Mémorial des sciences mathématiques

Marc Zamansky

La sommation des séries divergentes

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 128 (1954)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1954__128__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur a la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXXVIII

La sommation des séries divergentes

Par Marc ZAMANSKY

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1954

LA SOMMATION

DES SÉRIES DIVERGENTES

Par Marc ZAMANSKY,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

PRÉFACE.

Un mathématicien qui s'intéresse pour la première fois à la sommation des séries divergentes, même en se bornant aux procédés les plus couramment utilisés dans diverses branches de l'analyse (prolongement analytique, séries de Fourier, approximation, etc.) ne peut pas ne pas être étonné et gêné par la variété des résultats, leurs interférences, la pluralité des méthodes de démonstration, en un mot par l'absence de fil conducteur.

Nous avons tenté de fournir un fil conducteur, peut-être encore ténu, mais qui semble résistant.

Il est certain qu'une des raisons de la gêne ressentie provient de ce que rarement un procédé de sommation, important par ses applications, est disjoint de ces dernières. Nous avons d'abord dissocié le problème de la sommation d'une série divergente des applications auxquelles la solution de ce problème le destinait ; nous l'avons même dissocié des problèmes taubériens classiques ne voulant nous attacher qu'au problème élémentaire : deux procédés sont donnés, l'un attribue une somme à une série, que dire de l'autre procédé ? Ce problème est d'abord restreint aux procédés dits linéaires et qui relèvent du théorème de Tœplitz, et nous avons voulu éprouver une méthode unique sur les plus usuels de ces procédés linéaires.

La plupart des résultats concernant ces procédés peuvent être obtenus par cette méthode, souvent de façon beaucoup plus simple, parfois sous forme plus générale, toujours sous une forme où l'intuition retrouve son compte. En outre, cette méthode fournit des résultats nouveaux.

Notre souci unique fut la clarté. C'est pourquoi nous avons restreint le champ dans lequel nous éprouvions cette méthode. C'est pourquoi aussi, nous avons usé d'hypothèses simples et simplificatrices et employé quelquefois au cours de l'exposé des locutions telles que : pratiquement, usuel, voisin, dont le sens intuitif ne peut à notre avis, qu'aider à la naissance de l'idée.

L'introduction présente et restreint le problème à partir de notions très élémentaires, expose ce qu'est l'outil principal : le théorème de Toeplitz, et montre quelle méthode sera suivie.

La première partie contient les résultats les plus importants concernant les procédés restreints usuels et s'achève par l'étude selon Rogosinski des procédés que cet auteur a dénommé les moyennes de Haussdorff continues.

La seconde partie est consacrée à éprouver la méthode sur les procédés considérés dans la première partie et accorde la place principale aux fonctions sommatoires pour lesquelles les résultats peuvent être considérés comme satisfaisants.

La troisième partie, très brève, signale quelques résultats concernant des procédés complets.

Enfin, des notes indiquent des résultats nouveaux, montrent que les théorèmes taubériens de Wiener peuvent être présentés par cette méthode, suggèrent de nouveaux champs d'application de cette méthode.

INTRODUCTION.

I. — Les procédés usuels de sommation.

I.1. On connaît le rôle que joue dans la théorie des séries de Fourier l'expression

$$S_n^1 = \frac{S_0(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1},$$

où $S_n(x)$ désigne la somme des $2n+1$ premiers termes de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$, de période 2π, intégrable. Le théorème de Fejer sur la convergence uniforme de $S_n^1(x)$ vers $f(x)$ lorsque f est continue peut s'énoncer ainsi : *quelle que soit* la fonction continue $f(x)$, la suite $S_n^1(x)$ construite à partir de la série de Fourier de f, converge uniformément vers f lorsque $n \to +\infty$. Cet exemple parmi de nombreux autres motive l'intérêt que peut présenter le problème d'attribuer une somme à une série éventuellement divergente. Mais ce problème demande à être précisé car un résultat de Banach affirme qu'à toute fonction réelle $f(t)$ bornée, définie sur $(0, +\infty)$ on peut attribuer une limite (généralisée) pour $t\ \infty$, cette limite coïncidant avec celle de $f(t)$ pour $t\infty$ lorsque cette dernière existe [1]. Mais il s'agit là d'un espace vectoriel de fonctions sur lequel on définit une fonctionnelle linéaire $F(f)$.

Nous soumettons le problème évoqué à une condition que nous appelons *condition de régularité* : si on connaît un moyen d'attribuer une limite à une suite ou une somme à une série, ce *même* moyen appliqué à *toute* suite (ou série) convergente au sens élémentaire, de limite (ou de somme) S, doit attribuer à cette suite (ou série) la limite (ou la somme) S.

Chaque fois qu'on connaît un moyen d'attribuer à une série une somme, nous dirons qu'on définit un *procédé de sommation*, P.

La condition de régularité mène à la définition suivante :

Définition. — *Un procédé de sommation de séries est régulier, si appliqué à une série convergente au sens élémentaire et de somme finie* S, *il lui attribue la somme* S, *quelle que soit cette série convergente.*

Convention de langage. — Si un procédé de sommation P appliqué à une série $\sum_0^\infty u_k$ lui attribue la somme S, nous dirons que $\sum_0^\infty u_k$ est « sommable par P » ou « sommable P » ou que « P somme la série ».

I.2. Les deux procédés, non les plus anciens, mais les plus connus sont celui de la première moyenne arithmétique ou moyenne de Cesaro d'ordre 1, qu'on désignera par (C, 1) èt celui d'Abel qu'on désignera par (A).

(C, 1) Ce procédé est défini par la considération de

$$S_n^1 = \frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) u_k, \qquad \text{où} \quad S_n = \sum_0^n u_k.$$

Si, n devenant infini par valeurs entières positives, S_n^1 a une limite finie S, on dit $\sum_0^\infty u_k$ est sommable (C, 1) et a pour somme S.

(A). Ce procédé est défini par la considération de la série entière

$$\sum_0^\infty u_k x^k = f(x)$$

supposée convergente pour $|x| < 1$. Si, x tendant vers un par valeurs moindres que 1, $f(x)$ a une limite S, on dit que $\sum_0^\infty u_k$ est sommable (A) et a pour somme S.

Dans les deux cas, un changement de variable, permet de transformer le paramètre n ou x en un paramètre devenant infini positif.

Ces deux procédés sont la source de l'exposé qui va suivre. Ils appellent les remarques suivantes.

R.1. Ce sont des transformations linéaires appliquées aux termes u_k ou aux sommes S_k [1].

R.2. (C, 1) use d'un paramètre entier n, (A) d'un paramètre continu x.

R.3. (C, 1) est défini par une suite de fonctions de n : $c_k(n) = \frac{1}{n+1}$ pour $k = 0, \ldots, n$; $c_k(n) = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$.

(A) est défini par une suite de fonctions de x : $c_k(x) = x^k$, non nulles quel que soit k pour $x > 0$.

---

[1] On passe d'un point de vue à l'autre par la formule d'Abel :

$$\sum_0^n a_p b_p = \sum_0^{n-1} (a_p - a_{p+1}) B_p + a_n B_n, \qquad B_n = b_0 + \ldots b_n.$$

R.4. (C, 1) et (A) sont réguliers.

R.5. Une série sommable (C, 1), est sommable (A) avec même somme.

Cette dernière propriété est la propriété de *concordance : deux procédés sommant une même série sont dits concordants s'ils attribuent à cette série même somme.*

Cette propriété est une forme plus générale de la propriété de régularité où l'un des procédés est la sommation ordinaire $[c_k(n) = 1$ si $k \leq n]$.

I.3. **Définitions.** — A L'EXCLUSION DE TOUS AUTRES PROCÉDÉS, nous considérerons les transformations linéaires, portant sur les sommes partielles $S_k = \sum_0^k u_m$, définies par la suite de fonctions $c_k(\omega)$ et la série :

$$T_\omega = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\omega)\, S_k. \tag{1}$$

La variable réelle ω prend soit uniquement des valeurs entières positives, soit uniquement des valeurs continues.

Une telle transformation définit un *procédé linéaire de sommation. Si la série* (1) *converge pour* ω *assez grand et si* T_ω *a une limite finie* S *quand* $\omega \to +\infty$, *nous dirons que la série* $\sum_0^\infty u_k$ *est sommable par le procédé linéaire défini par la suite* $c_k(\omega)$ *et a pour somme* S.

Pour alléger l'exposé, nous ne nous attacherons pas à la sommation des fonctions au moyen d'intégrales où à la sommation des intégrales. Toutefois nous userons d'un procédé défini par une intégrale qui, pour les séries, est encore un procédé linéaire :

On considère

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x, t)\, S(t)\, dt \tag{2}$$

quand cette expression a un sens pour x assez grand. *Si quand* $x \to +\infty$ *l'intégrale* (2) *a une limite finie* S, *nous dirons que* $S(t)$ *a pour limite* S *au sens de ce procédé.*

Si $S(t) = \sum_{k \leqq t} u_k$, nous retrouvons la définition précédente.

Enfin nous considérerons des procédés de sommation définis par une suite $c_k^\alpha(\omega)$ ou $c_k^f(x)$ dépendant d'un paramètre numérique α, ou fonctionnel f. L'ensemble des procédés correspondant à une telle suite s'appellera *classe*.

I.4. Nous considérons les formes usuelles des procédés linéaires qui se partagent en deux groupes :

1[er] *groupe* : Procédés définis par une suite $c_k(\omega)$ telle que $c_k(\omega) = 0$ pour $k > \omega$ et $k < 0$. Ces procédés seront appelés : *procédés restreints* ou *moyennes*.

2[e] *groupe* : Procédés définis par une suite $c_k(\omega)$ où pour tout ω une infinité de $c_k(\omega)$ ne sont pas nuls. Ces procédés seront appelés : *procédés complets*.

Dans l'énumération qui suit : $c_k(\omega)$ désigne le coefficient de S_k, $\gamma_k(\omega)$ celui de u_k.

Principales moyennes. — Les fonctions qui interviennent ici sont soumises à des conditions qui seront explicitées plus loin. Dans chaque somme d'indice n ou x, la sommation est faite pour $k \leqq n$ ou $k \leqq x$; n et $x \to +\infty$.

(N, α) ; moyennes de Nörlund :

$$c_k(n) = \frac{\alpha_{n-k}}{\sum_0^n \alpha_k}, \qquad \alpha_k \geqq 0, \qquad \alpha_0 > 0.$$

(N*, α) :

$$c_k(n) = \frac{\alpha_k}{\sum_0^n \alpha_k}, \qquad \alpha_k \geqq 0, \qquad \alpha_0 > 0, \qquad \sum_0^\infty \alpha_k = +\infty.$$

(C, p) ; moyennes de Cesaro :

$$\gamma_k(n) = \frac{C_n^k}{C_{n+p}^k} \qquad \text{avec} \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{et} \quad p \text{ entier} \geqq 0.$$

(H, p) ; moyennes de Hölder : moyennes arithmétiques itérées p fois (p entier $\geqq 0$).

(R, λ_k, p) ; moyennes de Riesz ou moyennes typiques :

$$\gamma_k(x) = \left(1 - \frac{\lambda_k}{x}\right)^p, \qquad p > 0, \qquad 0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \to +\infty.$$

$(\mathcal{H}, g)$; moyennes de Haussdorff :

$$\gamma_k(n) = k C_n^k \int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k} g(t)\,dt \qquad \text{si } k \neq 0, \qquad \gamma_0(n) = g(0)$$
$$(g = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et } t > 1).$$

$(\mathcal{F}, g)$:

$$\gamma_k(x) = g\left(\frac{k}{x}\right) \qquad (g = 0 \text{ pour } t < 0).$$

Dans le dernier cas, lorsque $g = (1 - t)^p$ pour $t \leqq 1$ et $g = 0$ pour $t > 1$, $t < 0$, $(\mathcal{F}, g)$ est identique à (R, k, p).

(N^*, α) est une moyenne « très voisine » de (R, λ, p) où

$$\lambda_k = \sum_0^{k-1} \alpha_m.$$

Remarque. — Il nous arrivera de désigner ces moyennes par la première lettre seulement lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible : N, N*, C, H, R, $\mathcal{H}$ sauf pour $(\mathcal{F}, g)$ que nous désignerons par g.

Principaux procédés complets :

(A, α) ; procédés d'Abel :

$$\gamma_k(x) = x^{n^\alpha} \qquad (\alpha > 0,\ x \to 1 - 0).$$

$(\mathcal{R}, \alpha)$; procédés de Riemann :

$$\gamma_k(x) = \left(\frac{\sin kx}{kx}\right)^\alpha \qquad (\alpha > 0,\ x \to +0)$$

(L) ; procédé de Lambert :

$$\gamma_k(x) = \frac{kx\, e^{-kx}}{1 - e^{-kx}} \qquad (x \to +0).$$

(B) ; procédé de Borel :

$$c_k(x) = \frac{x^k}{k!} e^{-x} \qquad (x \to +\infty)$$

II. — Le théorème de Toeplitz [2, 3, 4, 5].

II.1. Le théorème de Toeplitz fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un procédé linéaire soit régulier.

$\mathfrak{T}_1$. *Soit* $T(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\omega) S_k$, *où* $\omega = n$ *ou* x *suivant qu'on prend un paramètre entier ou continu.*

Pour que $\lim\limits_{n\infty} S_n = S$ *entraîne* $\lim\limits_{\omega=+\infty} T(\omega) = S$, *il faut et il suffit que l'ensemble des trois conditions suivantes soit réalisé :*

1° $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(\omega)|$ *est borné par un nombre indépendant de* ω ;

2° $\lim\limits_{\omega\infty} c_k(\omega) = 0$;

3° $\lim\limits_{\omega\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\omega)\right] = 1$.

Pour les procédés définis par une intégrale, le théorème suivant donne une condition suffisante :

$\mathfrak{T}_2$. *Soit* $T(x) = \int_0^\infty \varphi(x, t)\, S(t)\, dt$.

Pour que $\lim\limits_{x\infty} S(x) = S$ *entraîne* $\lim\limits_{x\infty} T(x) = S$, *il suffit que l'ensemble des trois conditions suivantes soit réalisé :*

1° $\int_0^\infty |\varphi(x, t)|\, dt$ *est bornée par un nombre indépendant de* x ;

2° $\lim\limits_{x\infty} \int_0^a |\varphi(x, t)|\, dt = 0$ *pour tout* a *fini* ;

3° $\lim\limits_{x\infty} \int_0^\infty \varphi(x, t)\, dt = 1$.

Remarques. — 1° Le caractère nécessaire des conditions de $\mathfrak{T}_1$ est le suivant : si l'une de ces conditions n'est pas réalisée, alors une suite convergente est transformée ou bien en suite non convergente ou bien en une suite convergente mais de limite différente.

2° Si dans $\mathfrak{T}_1$ on conserve ($\mathfrak{T}_1$, 1°) et si l'on remplace ($\mathfrak{T}_1$, 2°) par $\lim\limits_{\omega\infty} c_k(\omega) = \alpha_k$ et ($\mathfrak{T}_1$, 3°) par $\lim\limits_{\omega\infty}\sum\limits_0^\infty c_k(\omega) = \alpha$, alors $\sum \alpha_k$ est absolument convergente et l'ensemble des nouvelles conditions est nécessaire et suffisante pour transformer une suite convergente en une suite convergente (les limites n'étant pas nécessairement les mêmes).

Ainsi ($\mathfrak{T}_1$, 2°) et ($\mathfrak{T}_1$, 3°) sont destinées à assurer qu'un tel procédé appliqué à une suite convergente S_k de limite S finie, lui attribue même limite S.

3° Si ($\mathfrak{T}_1$, 1°) et ($\mathfrak{T}_1$, 2°) sont conservées et si ($\mathfrak{T}_1$, 3°) est remplacée par $\lim\limits_{\omega\infty}\sum\limits_0^\infty c_k(\omega) = \alpha \neq 0$, il suffit de remplacer $c_k(\omega)$ par $\dfrac{c_k(\omega)}{\alpha}$ pour retrouver le théorème $\mathfrak{T}_1$.

DANS TOUTE LA SUITE NOUS N'ÉTUDIONS QUE LES PROCÉDÉS LINÉAIRES RÉGULIERS.

II.2. **Définitions.** — Soient a, b deux procédés linéaires réguliers.

1° *Si toute série sommable b est sommable a, nous écrirons $a \supseteqq b$ ou $b \subseteqq a$* et nous dirons que a est au moins *aussi puissant* que b ou que la *puissance de a n'est pas inférieure à celle de b.* S'il existe *de plus* une série sommable a mais non sommable b, nous écrirons $a \supset b$ ou $b \subset a$ et nous dirons que *a est plus puissant que b* ou que la *puissance de a est supérieure à celle de b.*

2° $a \sim b$ signifiera que simultanément : $a \supseteqq b$ et $b \supseteqq a$; on dira que a et b *sont équivalents* ou ont *même puissance.*

3° S'il existe une série sommable a, non sommable b et une série sommable b, non sommable a, on dira que a et b ne sont pas comparables.

4° *Composition de deux procédés :*

α. a étant défini par la suite $c_k(n)$, soit $\sum\limits_0^\infty u_k$ une série donnée et

$$T_n(a) = T_n(a, S_k) = \sum_{k=0}^\infty c_k(n)\, S_k.$$

b étant un procédé défini par la suite $d_k(n)$, l'application de b à la suite $T_n(a)$ [où à la série $\Sigma(T_n - T_{n-1})$] fournit

$$T_n[b, T_k(a)] = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(n)\, T_k(a).$$

Cette expression définit un procédé linéaire appliqué à Σu_k que nous désignons par $b \circ a$.

β. a étant défini par une suite $c_k(x)$, soit

$$T_x(a) = T_x(a, S_k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x)\, S_k.$$

b étant défini par une intégrale utilisant un noyau $\varphi(x, t)$, l'application de b à la fonction $T_x(a)$ fournit :

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x, t)\, T_t(a)\, dt.$$

Cette expression définit (moyennant des conditions d'intégrabilité qui seront précisées dans chaque cas) un procédé linéaire appliqué à Σu_k que nous désignerons encore par $b \circ a$.

Nous appellerons $b \circ a$ le *transformé* de a par b.

En résumé : $b \circ a$ désigne le procédé appliqué à Σu_k obtenu en transformant $T_\omega(a)$ par un procédé b ; ce procédé b est utilisé sous la forme définie en $\mathcal{C}_1$ si $\omega = n$, sous la forme définie en $\mathcal{C}_2$ si $\omega = x$.

III. — Conditions de régularité des procédés usuels.

Tous les procédés complets définis en I.4 sont réguliers sauf $(\mathcal{R}, \alpha)$ qui ne l'est que si $\alpha > 1$.

Les moyennes (C, p), (R, λ_k, α), (N^*, α), (H, p) sont régulières.

Les moyennes (N, α) sont régulières si et seulement si

$$\lim_{k \infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \ldots + \alpha_k} = 0.$$

Les moyennes $(\mathcal{H}, g)$ sont régulières si g est à variation bornée pour $0 \leqq t \leqq 1$, continue pour $t = 0$ et si $g(0) = 1$.

Les moyennes $(\mathcal{F}, g)$ sont régulières si g est continue, nulle pour $t > 1$, $t < 0$, à variation bornée pour $0 \leqq t \leqq 1$ et si $g(0) = 1$.

Pour ces deux dernières classes la condition imposée à g d'être à variation bornée est la forme simple que prend la condition $(\mathfrak{C}_1, 1^\circ)$.

IV. — LES PROBLÈMES.

La construction de procédés de sommation réguliers, pose les deux problèmes suivants [1] :

1° Un procédé régulier étant donné, que peut-on dire des séries sommables par ce procédé ?

2° Deux procédés a et b réguliers donnés, reconnaître si une série sommable a est sommable b avec la même somme (*inclusion relative*).

1° Le premier problème demande à être précisé. Le second en est un aspect si on propose, a étant donné de trouver tous les b possibles. Il est évident que si un procédé linéaire a est régulier et si $\sum_0^\infty u_k$ est sommable a, alors a_1 étant un autre procédé linéaire régulier $a_1 \circ a$ est un procédé b.

Mais nous précisons que le premier problème est posé dans les intentions suivantes : $\sum_0^\infty u_k$ étant sommable a, trouver l'ordre de grandeur de $|u_k|$ ou de $|S_k|$ ou déterminer un équivalent numérique de $|S_k|$.

2° Le principal objet de ce fascicule est de fournir des réponses au deuxième problème en nous bornant aux procédés énumérés en I.4. Deux points de vue : a et b appartiennent à l'une des classes énumérées ou à deux de ces classes.

Des réponses assez satisfaisantes peuvent être données lorsqu'on se place au second point de vue et lorsqu'on considère les moyennes. Il n'en est pas ainsi lorsqu'on considère les procédés complets.

---

(1) On peut certes poser le suivant : une série non convergente étant donnée, construire un procédé régulier permettant de la sommer. Si l'on précise de plus que cette série est d'une certaine espèce (*exemple* : série de Fourier d'une fonction périodique sommable, ou continue, etc.), le problème a un sens. Sans autre hypothèse que la donnée de cette série, on peut se demander si ce problème n'est pas gratuit et vide de contenu.

Des réponses satisfaisantes peuvent être données lorsqu'on se place au premier point de vue et lorsqu'on considère les moyennes. Dans ce cas, soit $\mathcal{A}$ une classe de moyennes ; on peut poser le problème de l'*ordination* de $\mathcal{A}$ par la puissance des procédés de $\mathcal{A}$.

V. — Méthodes d'étude d'une classe de procédés réguliers [39].

Première méthode. — On peut chercher à exprimer $T_\omega(a_2)$ au moyen de $T_\omega(a_1)$. Supposons que cet objectif étant atteint on constate que a_2 est le transformé de a_1 par un procédé linéaire b : $a_2 = b \circ a_1$. Alors si b est régulier, on a : $a_2 \supsetneqq a_1$. Sinon en écrivant que b est régulier et en usant de $\mathfrak{T}_1$ ou $\mathfrak{T}_2$ on obtient une condition nécessaire et suffisante ou seulement une condition suffisante pour que $a_2 \supsetneqq a_1$.

C'est la méthode dont on use pour les moyennes (R, λ, α) lorsque α est fixé.

Des classes de procédés réguliers (*exemple* : les moyennes de Cesaro) sont obtenues en appliquant à un procédé régulier les procédés b d'une classe $\mathcal{B}$ de procédés réguliers.

Deuxième méthode. — Lorsque l'expression de $T_\omega(a_2)$ en fonction de $T_\omega(a_1)$ est impraticable, on cherche une classe de procédés $\mathcal{B}$, telle que si $b \in \mathcal{B}$, $b \circ a_1 = a_2 \in \mathcal{A}$. En général à tout couple a_1, a_2 ne correspond pas b tel que a_2 soit le transformé de a_1 par b. Mais on peut obtenir des conditions suffisantes, parfois précises.

Le problème étant de conclure à l'inclusion relative de a_1, a_2 (lorsque cette inclusion n'est pas impossible), il s'agit d'obtenir un énoncé où b ne figure pas. Supposons alors qu'à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ puissent être associées respectivement des fonctionnelles $\mathfrak{T}$ et Θ pour lesquelles sont connus des théorèmes d'unicité et qui de plus jouissent d'une propriété algébrique simple vis-à-vis de l'opérateur $b \circ a$. Pour fixer les idées supposons que

$$\mathfrak{T}(a_2) = \mathfrak{T}(b \circ a_1) = \Theta(b)\,\mathfrak{T}(a_1).$$

Alors pour tout couple a_1, a_2 de $\mathcal{A}$ tel que $\frac{\mathfrak{T}(a_2)}{\mathfrak{T}(a_1)}$ soit égal à la fonctionnelle Θ d'un certain procédé b, on verra que moyennant certaines conditions :

$$a_0 = b \circ a_1 \qquad \text{et} \qquad a_2 \underset{\sim}{\supset} a_1.$$

Ce sera le cas des moyennes (N, α), ($\mathcal{H}$, g), ($\mathcal{F}$, g).

PREMIÈRE PARTIE.

Les procédés restreints usuels.

I. — Les moyennes (N, α) [6, 7, 8].

I.1. Elles constituent une généralisation de la première moyenne arithmétique.

Soit

$$T_n(N, \alpha) = \frac{\sum_0^n \alpha_{n-k} S_k}{\sum_0^n \alpha_k},$$

α désigne la série $\sum \alpha_k$ (1) où

$$\alpha_k \geq 0, \qquad \alpha_0 > 0, \qquad \alpha_n = o\left(\sum_0^n \alpha_k\right)$$

[condition nécessaire et suffisante pour que (N, α) soit régulier [8, 11].

I.2. **Théorème d'inclusion.** — Soient (N, α), (N, β) deux moyennes N régulières. En exprimant $T_n(N, \beta)$ au moyen des $T_k(N, \alpha)$, on montre d'abord que si (N, α) et (N, β) somment une série, ils lui attribuent même somme (concordance) [9] puis en appliquant le théorème $\mathcal{T}_1$ on obtient :

Théorème 1. — *Soit γ_n défini par* $\sum_{k=0}^{n} \{\gamma_k(\alpha_0 + \ldots + \alpha_{n-k})\} = \beta_0 + \ldots + \beta_n$

(1) En général on ne considère que les cas où $\sum_0^\infty \alpha_k = +\infty$; cette hypothèse quoique non nécessaire sera admise ici pour simplifier l'exposé.

$(n=0, 1, \ldots)$. *Pour que* $(\mathrm{N}, \beta) \supset (\mathrm{N}, \alpha)$, *il faut et il suffit que*

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{|\gamma_k|\sum_{m=0}^{n-k}\alpha_m\right\} \leq \mathrm{M}\sum_{0}^{n}\beta_k,$$

où M *est une constante indépendante de* n, *les procédés* (N, α), (N, β) *étant réguliers* [10]:

Théoreme 2 (Équivalence). — (N, α) *et* (N, β) *étant réguliers, pour que* $(\mathrm{N}, \alpha) \sim (\mathrm{N}, \beta)$ *il faut et il suffit que*

$$\sum|\gamma_n| = \mathrm{O}(1) \qquad \text{et} \qquad \sum|\delta_n| = \mathrm{O}(1),$$

où γ_n *et* δ_n *sont définis par*

$$\sum_{k=0}^{n}\{\gamma_k(\alpha_0+\ldots+\alpha_{n-k})\} = \beta_0+\ldots+\beta_n,$$

$$\sum_{0=k}^{n}\{\delta_k(\beta_0+\ldots+\beta_{n-k})\} = \alpha_0+\ldots+\alpha_n \quad [10].$$

Voici une condition suffisante.

Théorème 3. — (N, α) *et* (N, β) *étant réguliers, pour que* $(\mathrm{N}, \beta) \supseteq (\mathrm{N}, \alpha)$ *il suffit que*

$$\alpha_0 = 1, \qquad \alpha_k > 0, \qquad \beta_k > 0$$

et que les suites $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$ *et* $\frac{\beta_k}{\alpha_k}$ *soient non décroissantes* [11].

Les théorèmes 1 et 2 sont obtenus en appliquant la première méthode.

II. — Les moyennes (N^*, α) [11].

II.1. Elles constituent une autre généralisation de la première moyenne arithmétique.

Soient

$$\mathrm{T}_n(\mathrm{N}^*, \alpha) = \frac{\sum_{0}^{n}\alpha_k \mathrm{S}_k}{\sum_{0}^{n}\alpha_k},$$

où

$$\alpha_0 > 0, \qquad \alpha_k \geqq 0, \qquad \sum \alpha_k = +\infty.$$

THEORÈME 4 (Inclusion). — *Soient* (N^*, α) (N^*, β) *deux moyennes* N^* *régulières telles de plus que* α_k *et* β_k *soient* > 0. *Pour que* $(N^*, \beta) \supseteq (N^*, \alpha)$, *il suffit que l'ensemble des conditions suivantes soit réalisé :*

1° $\beta_n \sum_0^n \alpha_k = O\left(\alpha_n \sum_0^n \beta_k\right)$;

2° *la suite* $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ *est monotone* [12, 13].

C'est encore une application de la première méthode.

II.2. Comment différencier intuitivement les moyennes N et N^*? L'exemple bien connu des moyennes (C, p) qui sont une sous-classe de (N, α), montre que *grosso modo* la puissance d'un procédé N augmente avec la croissante de α_k. Au contraire, si α_k croît trop vite (par exemple si $\alpha_{k+1} \geqq a\alpha_k$, où $a > 1$), le procédé (N^*, α) perd tout intérêt, car il ne peut plus sommer que des séries convergentes.

En réalité, cette différence est superficielle. Nous verrons, en effet, que l'intuition mène à penser qu'un procédé $(\mathcal{F}, g)$ est d'autant plus puissant que l'ordre du zéro $t = 1$ pour $g(t)$ est élevé. Si ici nous posons

$$\varphi(n) = \sum_0^n \alpha_k,$$

le coefficient de u_{n-1} dans $T_n(N, \alpha)$ est $\frac{\varphi(1)}{\varphi(n)}$ et dans $T_n(N^*, \alpha)$ il est $1 - \frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n)}$. Dans le premier cas $\frac{\varphi(1)}{\varphi(n)}$ tend vers zéro d'autant plus vite que $\varphi(n)$ croît plus rapidement et dans le second cas $1 - \frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n)}$ tend vers zéro d'autant plus vite que $\frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n)}$ tend plus rapidement vers un, ce qui est évidemment impossible si

$$\varphi(n) = a^n \qquad (a > 1.$$

III. — Les moyennes (C, p).

III.1. Bien qu'elles soient des moyennes N particulières, leur emploi fréquent justifie une mention spéciale.

Pour p entier $\geqq 0$, elles peuvent être définies par récurrence de la façon suivante : $(C, 0)$ désignant la sommation élémentaire, soit $S_n^0 = S_n$, S_n^1, S_n^2, ... les sommes de rang n des moyennes $(C, 0)$, $(C, 1)$, $(C, 2)$, ...

On a :

$$(n+1)\, S_n^1 = S_n^0, \quad C_{n+2}^2 S_n^2 = \sum_0^n C_{k+1}^1 S_k^1, \quad C_{n+3}^3 S_n^3 = \sum_0^n C_{k+2}^2 S_k^2, \quad \ldots \quad [14, 15, 16].$$

La condition de concordance est réalisée et

$$(C, p+m) \supset (C, p) \qquad (m > 0) \quad [15, 16].$$

Dans S_n^p le coefficient de u_k s'écrit :

$$(1) \quad \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{k}{n+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{n+p}\right) \qquad \text{ou} \qquad (2) \quad \frac{C_n^k}{C_{n+p}^k}.$$

III.2. La première expression (1) montre que si, t étant fixe, on pose $k = nt\,(0 \leqq t \leqq 1)$, alors pour $n \infty$ ce coefficient a pour limite $(1-t)^p$, c'est-à-dire celui de u_k dans $T_n(R, k, p)$, où l'on a remplacé x par n. Cette remarque laisse prévoir le théorème suivant, théorème d'équivalence entre deux classes :

Théorème 5. — $(C, p) \sim (R, k, p)$ [5, 17].

Les moyennes (C, p) peuvent être définies pour p non entier mais le théorème 5 est alors d'une démonstration délicate. Il n'est vrai que si on use dans la définition de (R, k, p) d'un paramètre continu x. La raison en est que la convergence de (C, p) entraîne $u_n = o(n^p)$ et la convergence de (R, k, p) entraîne aussi $u_n = o(n^p)$ à condition que (R, k, p) use d'un paramètre continu x. Nous verrons une propriété beaucoup plus générale lors de l'étude de la classe $(\mathcal{F}, g)$ qui motive l'emploi d'un paramètre continu.

III.3. L'expression (2) permet de définir (C, p) pour p non entier. Elle nous permettra, d'autre part, d'introduire simplement les moyennes $(\mathcal{H}, g)$ (2e partie).

IV. — **Les moyennes** (H, p) [18].

Ce sont les moyennes arithmétiques itérées. Elles sont définies pour p entier > 0, mais les moyennes ($\mathcal{H}$, g) permettent d'étendre cette notion au cas de $p > 0$ non entier [15].

THÉORÈME 6. — $(H, p) \sim (C, p)$ [(1)] [19, 20, 21].

On remarque que le coefficient de u_k dans $T_n(H, p)$ est tel que si l'on pose $k = nt$, pour t fixe et $n\,\infty$, ce coefficient a pour limite

$$g(t) = 1 - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t \left(\log \frac{1}{t}\right)^{p-1} dt,$$

c'est-à-dire, encore une fois, une fonction g qui admet $t = 1$ pour zéro d'ordre p.

V. — **Les moyennes** (R, λ, p) [17, 22].

V.1. Si pour les moyennes (N^*, α) on pose

$$\lambda_k = \alpha_0 + \ldots + \alpha_k \qquad (\alpha_k > 0)$$

et si on écrit :

$$T_n(N^*, \alpha) = \sum_0^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right) u_k + u_n,$$

on est mené à

$$T_n(R, \lambda, p) = \sum_{\lambda_k \leq n} \left(1 - \frac{\lambda_k}{n}\right)^p u_k \qquad (p > 0).$$

Pour obtenir des résultats simples on utilise pour définir les moyennes (R, λ_k, p) :

$$T_x(R, \lambda, p) = \sum_{\lambda_k \leq x} \left(1 - \frac{\lambda_k}{x}\right)^p u_k \qquad (0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \to +\infty)$$

p est l'*ordre*; la suite λ_k définit le *type* (c'est celui des séries de Dirichlet à l'étude desquelles conviennent ces moyennes).

(1) Nous rappelons que nous avons supposé que la somme d'une série est *finie*.

V.2. Les deux théorèmes qui suivent sont des théorèmes d'inclusion, relatifs le premier à la variation de l'ordre pour un type donné, le second à la variation de type pour un ordre donné.

THÉORÈME 7. — *Si* $p' > p$, $(R, \lambda, p') \supseteq (R, \lambda, p)$ [22].

THÉORÈME 8. — $[R, \varphi(\lambda), p] \supseteq (R, \lambda, p)$ *si* $\varphi(t)$ *satisfait aux conditions suivantes :*

1° $\varphi(t) > 0$ *admet pour* $t > 0$ *des dérivées jusqu'à l'ordre* $[p]+1$;
2° $\varphi(t)$ *croît et devient infini;*
3° φ' *croît ou bien* φ' *décroît mais* $t\varphi'' = o(\varphi')$;
4° $\int_a^x t^m \,|\varphi^{(m+1)}(t)|\, dt = O(\varphi)$ *pour* $m = 1, 2, \ldots, p$ *si* p *est entier;* $m = 1, 2, \ldots, [p]+1$ *si* p *n'est pas entier* [23].

Kuttner montra que pour p entier le théorème 8, de Hirst, est le meilleur pour la classe définie par les propriétés imposées à φ, que les conditions étaient surabondantes et que $\int_a^x t^p \,|\varphi^{(p+1)}(t)|\, dt = O(\varphi)$ suffisait [19].

Lorsque p n'est pas entier et si φ a une dérivée d'ordre $[p]+2$ presque partout, Kuttner a donné des conditions nécessaires et suffisantes d'inclusion en usant de $D_x^p f(t)$ dérivée généralisée de Riemann-Liouville de $f(t)$ d'ordre p [24].

THÉORÈME 9. — *Pour que* $(R, \varphi(\lambda), p) \supseteq (R, \lambda, p)$ *où* p *n'est pas entier,* $\varphi > 0$ *croissante et où* $\varphi^{[p]+2}$ *existe presque partout, il faut et il suffit que*

$$\int_a^x t^p \,|D_x^{p+1}[\varphi(x)-\varphi(t)]^p|\, dt = O([\varphi(x)]^p) \qquad \text{pour} \quad x\infty.$$

V.3. Signalons un théorème d'équivalence de Zygmund [25] :

THÉORÈME 10. — *Si existent* δ *et* δ' *positifs telle que la croissance de* $\varphi(t)$ *satisfasse à* $t^\delta \prec \varphi(t) \prec t^{\delta'}$, (R, λ, p) *et* $[R, \varphi(\lambda), p]$ *sont équivalents.*

Remarque. — Lorsque $\lambda_k = \log(k+1)$ le procédé $(R, \lambda, 1)$ prend le nom de *moyenne logarithmique d'ordre* 1 et est équivalent au procédé défini par

$$\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{0}^{n}\frac{S_k}{k+1}\quad [22].$$

On peut alors définir les moyennes logarithmiques itérées que nous verrons s'introduire dans la classe $(\mathcal{F}, g)$ pour sommer les « séries exceptionnelles ».

VI. — Les moyennes $\mathcal{H}$.

VI.1. Une remarque simple sur les propriétés des différences successives de S_n^0, S_n^1, $\left[S_n^0=\sum_0^n u_k, (n+1)S_n^1=\sum_0^n S_k\right]$ mena Haussdorff à définir ce procédé de la façon suivante [26, 27, 28] :

Soit M la demi-matrice définie par

$$(-1)^k C_n^k (k=0, 1, \ldots, n;\ n=0, 1, \ldots),$$

μ la matrice diagonale définie par la suite μ_n. A la suite S_k on applique la transformation linéaire $(\mathcal{H}, \mu) = M\circ\mu\circ M$. L'application du théorème $\mathcal{T}_1$ donne :

THÉORÈME 11. — *Pour que* $(\mathcal{H}, \mu)$ *soit une méthode régulière il faut et il suffit que la suite* μ_n *soit la différence de deux suites totalement monotones, que la* $n^{\text{ième}}$ *différence*

$$\Delta^n\mu_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\mu_k = o(1)$$

et que $\mu_0 = 1$ [28].

Cette propriété rattachée à la théorie des moments fournit alors le résultat suivant :

THÉORÈME 12. — *Pour que* $(\mathcal{H}, \mu)$ *soit un procédé régulier, il faut et il suffit que* $\mu_n=\int_0^1 t^n\,d\varphi$, *où la fonction réelle* $\varphi(x)$ *est à variation bornée pour* $0 \leq x \leq 1$, *continue pour* $x=0$ *et telle que* $\varphi(1)=1$. *Une telle suite* μ_n *est appelée suite régulière de moments* [28]. [On peut évidemment supposer, de plus, que $\varphi(0)=0$].

Voici alors le théorème d'inclusion et d'équivalence pour deux procédés $(\mathcal{H}, \mu)$, $(\mathcal{H}, \mu')$, où μ_n et μ'_n *ne s'annulent pas.*

THÉORÈME 13. — *Si pour tout* n, μ_n *et* μ'_n *sont* $\neq 0$ *et si* $(\mathcal{H}, \mu)$, $(\mathcal{H}, \mu')$ *sont des procédés réguliers, pour que* $(\mathcal{H}, \mu') \supseteq (\mathcal{H}, \mu)$ *il faut et il suffit que* $\frac{\mu'_n}{\mu_n}$ *soit une suite régulière de moments et pour que* $(\mathcal{H}, \mu') \sim (\mathcal{H}, \mu)$ *il faut et il suffit que* $\frac{\mu'_n}{\mu_n}$ *et* $\frac{\mu_n}{\mu'_n}$ *simultanément, soient des suites régulières de moments* [29, 30, 31].

Si nous ne considérons que les moyennes $(\mathcal{H}, \mu)$ régulières, nous sommes fondés à changer la notation et à les désigner par $(\mathcal{H}, \varphi)$.

Les moyennes $(\mathcal{H}, \varphi)$ contiennent les moyennes de Cesaro :

$$\mu_n = \frac{1}{C^p_{n+p}} \qquad \text{et} \qquad \varphi(t) = 1 - (1-t)^p,$$

contiennent les moyennes de Hölder

$$\mu_n = \frac{1}{(n+1)^p} \qquad \text{et} \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t \left(\log \frac{1}{x}\right)^{p-1} dx,$$

ce qui permet de définir les moyennes C et H pour p non entier.

Si $\varphi(t) = 0$ pour $0 \leq t < a$ et $\varphi(t) = 1$ pour $a < x \leq 1$, alors $\mu_n = a^n$ et $(\mathcal{H}, \varphi)$ est la méthode d'Euler qu'on peut désigner par (E, a). *Les moyennes* E *et* C *ne sont pas comparables* [32].

Remarques :

1° $(\mathcal{H}, \varphi)$ ne contient pas les moyennes de Riesz

$$(R, k, p) \equiv [\mathcal{F}, (1-t)^p].$$

2° A une constante additive près et au signe près, φ est pour (C, p), (H, p) égale à $(1-t)^p$ ou à la fonction g signalée au paragraphe IV, théorème **6**.

Une propriété des moyennes $\mathcal{H}$ est donc d'établir une correspondance entre les coefficients de u_k dans (C, p) d'une part, dans (R, k, p) d'autre part.

3° L'expression de μ_n lorsque $(\mathcal{H}, \mu)$ est un procédé régulier appelle la transformée de Mellin d'une fonction g $\left(\text{soit sous la forme } \int_0^1 t^z \, dg \text{ soit sous la forme } \int_0^1 t^{z-1} g \, dt\right)$ ou l'intégrale de Laplace.

VI.2. Dans un premier Mémoire, Rogosinski a fait une étude très fine des moyennes $\mathcal{H}$ [33]. Il associe à $(\mathcal{H}, \varphi)$ $\left(\mu_n = \int_0^1 t^z\, d\varphi\right)$ la transformée de Mellin $\mathfrak{M}[(\mathcal{H}, \varphi), z] = \int_0^1 t^z\, d\varphi$ qui jouit de la propriété :

$$\mathfrak{M}[(\mathcal{H}, \varphi_0)\circ(\mathcal{H}, \varphi_1), z] = \mathfrak{M}[(\mathcal{H}, \varphi_0), z]\,\mathfrak{M}[(\mathcal{H}, \varphi_1), z].$$

La deuxième méthode exposée précédemment (Introduction, V) montre que le problème de l'inclusion est ramené à un problème d'analyse : trouver des condilions pour que le quotient de deux fonctionnelles $\mathfrak{M}$ soit une fonctionnelle $\mathfrak{M}$, un théorème d'unicité étant attaché à $\mathfrak{M}$.

Voici les résultats les plus importants où nous écrivons $\mathfrak{M}_1(z)$ au lieu de $\mathfrak{M}[(\mathcal{H}, \varphi_1), z]$:

Théorème 14. — *Si $(\mathcal{H}, \varphi_1)$ et $(\mathcal{H}, \varphi_2)$ sont des procédés réguliers et si $\mathfrak{M}_2(z)/\mathfrak{M}_1(z)$ est une transformée de Mellin, $(\mathcal{H}, \varphi_2) \supseteq (\mathcal{H}, \varphi_1)$.*

Théorème 15. — *Si $(\mathcal{H}, \varphi_1)$ et $(\mathcal{H}, \varphi_2)$ sont des procédés réguliers, si $(\mathcal{H}, \varphi_2) \supseteq (\mathcal{H}, \varphi_1)$ et si $\mu_n^1 = \int_0^1 t^n\, d\varphi_1$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois, $\mathfrak{M}_2(z)/\mathfrak{M}_1(z)$ est une transformée de Mellin.*

Une étude détaillée du quotient de deux transformées de Mellin et l'obtention de critères assurant que $\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_1$ est une transformée de Mellin permet à l'auteur de retrouver des résultats connus : théorème de Mercer [équivalence de $(\mathcal{F}, 1+\alpha t)$ et de $(\mathcal{F}, 1)$ si $\alpha > -1$], équivalence de (C, p) et (H, p), théorème de Hurvitz et Silvermann (où φ_1 et φ_2 sont analytiques) [26].

Enfin il obtient un résultat où les hypothèses sur φ sans être très générales sont pratiquement satisfaisantes et qu'on peut traduire intuitivement de la façon suivante : *si $\varphi(t)$ est suffisamment dérivable et admet $t=1$ pour zéro d'ordre p entier $\geqq 1$, $(\mathcal{H}, \varphi)$ est $\sim (H, p)$ ou (C, p) si et seulement si $\mathfrak{M}(\mathcal{H}, z)$ n'est pas nulle pour $\mathcal{R}z \geqq 0$.*

En réalité, ce dernier théorème a une forme moins simple, les difficultés paraissant provenir en partie de l'hypothèse $\varphi(1)=1$.

VI.3. Un second Mémoire de Rogosinski concerne ce qu'il a nommé les *moyennes de Haussdorff continues* et qui consistent en la sommation d'une fonction $s(x)$ par

$$(1) \qquad T(x) = \int_0^x s(t)\, d\varphi\left(\frac{t}{x}\right) \qquad (x > 0,\ x \to +\infty) \quad [34, 35]$$

(les fonctions sommatoires constituent des procédés voisins mais les résultats seront plus simples). Si, avec M. Rogosinski on désigne par T_1 et T_2 ou (T, φ_1) et (T, φ_2) les transformations définies par (1), où $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_2$, on a :

$$(2) \qquad T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$$

et

$$(3) \qquad \mathfrak{M}(T_2 \circ T_1) = \mathfrak{M}(T_2)\, \mathfrak{M}(T_1) \quad (^1).$$

La théorie de ces procédés se déroule alors de façon identique à celle exposée en VI.2, jusqu'au théorème, sur lequel nous portons notre attention et dont la forme, volontairement simplifiée est la suivante : si φ est suffisamment dérivable et admet $t = 1$ pour zéro d'ordre $p \geqq 0$ entier, il existe un polynome entier $P(t)$, admettant $t = 1$ pour zéro d'ordre p et tel que

$$(T, \varphi) \sim (T, P).$$

VI.4. Nous abandonnons la dénomination : moyennes de Haussdorff continues. Pour nous une *moyenne continue* sera celle où le paramètre ω prend des valeurs continues (*voir* Notes).

D'autre part, les moyennes $\mathcal{H}$ considérées en VI.1 et VI.2 contiennent les moyennes (C, p) et (H, p) tandis que même pour p entier les moyennes considérées en VI.3 ne les contiennent pas.

Enfin si l'on pouvait songer à cette dénomination parce qu'à ces moyennes (VI.3) est encore associée la transformée de Mellin, comme dans le cas des moyennes $\mathcal{H}$(VI.1), l'exposé de la seconde méthode (Introduction, V) suffit à montrer qu'on peut concevoir d'autres procédés auxquels sont associées des fonctionnelles autres que $\mathfrak{M}$ (*exemple* : moyenne N dans la 2e partie).

---

(1) Dans l'étude de la classe $(\mathcal{S}, g)$ la commutativité définie par (2) n'aura pas lieu.

L'objet de la seconde partie est de montrer que l'étude des fonctions sommatoires « usuelles » fournit des résultats assez complets pour considérer que cette classe de procédés peut servir de guide à un essai de synthèse.

DEUXIÈME PARTIE.

I. — Les moyennes ($\mathcal{F}$, g) [35, 36, 37, 38, 39].

I.1. Définitions :

1° Soit $g(t)$ une fonction réelle, continue pour $0 \leqq t \leqq 1$, à variation bornée, nulle pour $t < 0$, $t > 1$, telle que $g(0) = 1$. Une telle fonction s'appellera : *fonction sommatoire.*

Les moyennes ($\mathcal{F}$, g) (Introduction, I.4, III) sont alors des procédés de sommation réguliers définis par

$$T_x(g) = \sum_{k \leqq x} g\left(\frac{k}{x}\right) u_k. \tag{1}$$

($\mathcal{F}$, g) est la *classe* $\mathcal{A}$ (Introduction, V).

2° La *classe* $\mathcal{B}$ est définie de la façon suivante. Soit $\gamma(t)$ une fonction réelle, définie pour $t > 0$ telle que $\gamma'(t)$ et $t\gamma'(t)$ soient absolument intégrables sur $(0, +\infty)$. On considère le procédé défini par

$$-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \gamma'\left(\frac{t}{x}\right) S(t)\,dt \quad \text{[Introduction, I.3, (2)].}$$

Ce procédé sera désigné par γ^* *ou* ($\mathcal{F}$, γ^*) (1).

3° Le procédé $\gamma^* \circ g$ est défini alors par

$$-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \gamma'\left(\frac{t}{x}\right) T_t(g)\,dt.$$

(1) On est conduit à ce procédé en appliquant la formule d'Abel à $\sum_0^n \gamma\left(\frac{k}{n}\right) u_k$ lorsque γ est une fonction sommatoire. On considère alors $-\frac{1}{n}\sum_0^n \gamma'\left(\frac{k}{n}\right) S_k$ dont γ^* est la généralisation. La notation γ^* rappelle cette origine.

Ce procédé est le procédé $[\mathcal{F}, G_\gamma(g)]$ ou $(\mathcal{F}, \gamma^* \circ g)$, avec :

$$G_\gamma(g, t) = G_\gamma(g) = \int_{\theta=0}^{\theta=1} g(\theta)\, d\gamma\left(\frac{t}{\theta}\right) = -t\int_{\theta=0}^{\theta=1} g(\theta)\, \gamma'\left(\frac{t}{\theta}\right)\frac{d\theta}{\theta^2}$$
$$= -\int_{u=t}^{+\infty} g\left(\frac{t}{u}\right)\gamma'(u)\, du.$$

Nous écrirons aussi

$$G_\gamma(g) = \gamma^* \circ g \quad (^2).$$

Lorsque $\gamma(t)$ et $\gamma'(t)$ sont nulles pour $t > 1$, $G_\gamma(g)$ est une fonction sommatoire.

4° Soit

$$\mathcal{M}(\varphi, z) = \mathcal{M}(\varphi) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, \varphi(t)\, dt$$

la transformée de Mellin de φ [intégrale de Laplace bilatérale de $F(t)$, où $F(-\log u) = \varphi(u)$, unilatérale si $\varphi(t) = 0$ pour $t > 1$].

A la classe $(\mathcal{F}, g)$ nous associons la fonctionnelle $\mathcal{M}(g)$, à la classe $(\mathcal{F}, \gamma^*)$ nous associons la fonctionnelle $\mathcal{M}[-t\gamma'(t)]$.

On a

$$\mathcal{M}(\gamma^* \circ g) = \mathcal{M}(-t\gamma')\, \mathcal{M}(g).$$

I.2 Théorèmes d'inclusion [37]. — Voici les premiers résultats concernant les fonctions sommatoires.

Théorème 16. — $(\mathcal{F}, \gamma^* \circ g) \supseteq (\mathcal{F}, g)$ [*une série sommable* $(\mathcal{F}, g)$ *est sommable* $(\mathcal{F}, \gamma^* \circ g)$].

Théorème 17. — *Soient* $g_1(t)$, $g_2(t)$ *deux fonctions sommatoires. Si pour* $\Re z > 0$, $\mathcal{M}(g_1)/\mathcal{M}(g_2)$ *peut être représentée par une intégrale de Laplace unilatérale absolument convergente pour* $\Re z \geqq 0$, *une série sommable* g_1 *est sommable* g_2 *avec même somme.*

Ce résultat comporte des conditions auquelles nous faisions allusion dans l'exposé de la deuxième méthode. Si on fait une hypothèse

(2) $\gamma^* \circ g$ n'est pas commutatif en général.

convenable sur les séries considérées, il peut être amélioré. C'est l'objet du :

THÉORÈME 18. — *Soient* $g_1(t)$, $g_2(t)$ *deux fonctions sommatoires et* $\sum_0^\infty u_k$ *une série telle que* $u_k = O(k^\beta)$ $(\beta > -1)$. *Si pour* $0 < \mathcal{R}z \leqq \beta + 1$, $\mathfrak{M}(g_2)/\mathfrak{M}(g_1)$ *peut être représentée par une intégrale de Laplace bilatérale absolument convergente pour* $0 \leqq \mathcal{R}z \leqq \beta + 1$, *la série sommable* g_1, *est sommable* g_2 *avec même somme.*

I.3. **Ordination partielle de la classe des fonctions sommatoires** [38]. — $\mathcal{F}$ désignant la classe des fonctions sommatoires, $\mathcal{F}_p$ désignera la classe des fonctions sommatoires satisfaisant aux conditions suivantes :

p étant un entier $\geqq 0$:

1° $g^{(m)}$ existe pour $m = 1, \ldots, p$ et $0 \leqq t \leqq 1$;

2° $g^{(m)}(1) = 0$ pour $m \leqq p - 1$ et $g^{(p)}(1) \neq 0$;

3° $g^{(p+1)}$ est à variation bornée sur tout intervalle $(\varepsilon, 1)$ $(\varepsilon > 0)$ et $V(\varepsilon)$ désignant la variation totale de $g^{(p+1)}$ sur $(\varepsilon, 1)$, $V(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\alpha - p - 1})$ au moins pour un $\alpha > 0$.

Alors si $g \in \mathcal{F}_p$, $\mathfrak{M}(g)$ est méromorphe, ne peut admettre pour pôles que $0, -1, \ldots, -p-1$ et n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathcal{R}z \geqq 0$.

On en déduit aussitôt les résultats suivants :

THÉORÈME 19. — 1° *Soient* $p_2 \geqq p_1$, $g_1 \in \mathcal{F}_{p_1}$, $g_2 \in \mathcal{F}_{p_2}$. *Si dans le demi-plan* $\mathcal{R}z \geqq 0$, *tout zéro de* $\mathfrak{M}(g_1)$ *d'ordre* m_1 *est zéro de* $\mathfrak{M}(g_2)$ *d'ordre* $m_2 \geqq m_1$, *alors* $g_2 \gtrsim g_1$.

2° *Si* $p_1 = p_2$ *et si* $\mathfrak{M}(g_1)$, $\mathfrak{M}(g_2)$ *ont mêmes zéros aux mêmes ordres*, $g_1 \sim g_2$.

THÉORÈME 20. — *Si* $g \in \mathcal{F}_p$ *et si* $\mathfrak{M}(g)$ *n'a pas de zéro dans* $\mathcal{R}z \geqq 0$, *alors :*

$$g \sim (1-t)^p \sim (C, p).$$

THÉORÈME 21. — *Si* $g \in \mathcal{F}_p$, *il existe un polynome entier* $P \in \mathcal{F}_p$ *tel que :*

$$g \sim P.$$

Les restrictions imposées aux fonctions sommatoires ne fournissent pas une réponse assez satisfaisante au problème de l'ordination partielle de $(\mathcal{F}, g)$. D'autant plus qu'on peut construire des exemples de séries sommables par $g \in \mathcal{F}_p$ et cependant non sommable (C, p) : ainsi la série $u_0 = 0$, $u_n = \frac{1}{n^{1-\alpha}} (0 < \alpha < 1)$ non convergente est sommable par g telle que $\mathfrak{M}(g, \alpha) = 0$.

On peut penser que deux procédés de $\mathcal{F}_p$ sont « très peu différents » si $\mathfrak{M}(g_1)$, $\mathfrak{M}(g_2)$ ont mêmes zéros aux mêmes ordres dans $\mathcal{R}z \geqq 0$ et au contraire sont « très différents » si $\mathfrak{M}(g_1)$, $\mathfrak{M}(g_2)$ n'ont aucun zéro commun dans ce demi-plan. Le théorème suivant prouve qu'une série sommable par *deux* procédés « très différents » de $\mathcal{F}_p$ est nécessairement sommable (C, p).

THÉORÈME 22. — 1° *Soient $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{F}_p$ telles que dans $\mathcal{R}z \geqq 0$ tout zéro commun à $\mathfrak{M}(g_1)$ (avec l'ordre m_1) et à $\mathfrak{M}(g_2)$ (avec l'ordre m_2) soit zéro de $\mathfrak{M}(g_3)$ avec un ordre $m_3 \geqq \min(m_1, m_2)$. Alors une série sommable g_1 et g_2 est sommable g_3.*

2° *Si $\mathfrak{M}(g_1)$ et $\mathfrak{M}(g_2)$ n'ont aucun zéro commun dans $\mathcal{R}z \geqq 0$, une série sommable g_1 et g_2 est sommable (C, p).*

Remarques. — 1° Si une série est sommable $g_1 \in \mathcal{F}_{p_1}$ et $g_2 \in \mathcal{F}_{p_2}$, les sommes obtenues sont égales.

2° Si l'on ne considère que les séries $\sum_0^\infty u_k$ telles que

$$u_k = O(k^\beta) \, (\beta > -1),$$

dans tous les résultats de I.3 on peut remplacer le demi-plan $\mathcal{R}z \geqq 0$ par la bande $0 \leqq \mathcal{R}z \leqq \beta + 1$.

I.4. Ordre de grandeur maximum des termes d'une série sommable par $g \in \mathcal{F}_p$ [38]. — L'importance du théorème 21 est mise en évidence par les applications qu'on peut en faire en I.4 et I.5. Nous avons signalé (1re partie, III.2) que si $\sum_0^\infty u_k$ est sommable par $g = (1-t)^p$, $u_k = o(k^p)$. La généralisation de cette propriété fait l'objet du

THÉORÈME 23. — *Si $g \in \mathcal{F}_p$ et si Σu_k est sommable g, alors $u_k = o(k^p)$.*

Par conséquent, la sommation d'une série par g *au moyen d'un paramètre continu* x (ce qui fait partie de la définition même, (Introduction, I.4) n'est possible que si $u_k = o(k^p)$ lorsque $g \in \mathcal{F}_p$. Inversement si $g^{(p+1)}$ est bornée (¹) et si $g \in \mathcal{F}_p$, la convergence de $T_n(g)$ et la condition $u_k = o(k^p)$ entraîne la convergence de $T_x(g)$. Donc

THÉORÈME 24. — *Lorsque $g \in \mathcal{F}_p$ et lorsque $g^{(p+1)}$ est bornée, il y a équivalence entre les hypothèses : « $T_x(g)$ converge » et « $T_n(g)$ converge et $u_k = o(k^p)$ ».*

La démonstration des théorèmes 23 et 24 n'offre pas de difficulté; il suffit de remarquer que si $P \sim g \in \mathcal{F}_p$, l'hypothèse $T_x(P) = o(1)$ à laquelle on peut se ramener entraîne que quel que soit m entier fixe :

$$\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n+m}\right) u_k = o(1),$$

donc

$$P\left(\frac{n+1}{n}\right) u_n = o(1) \qquad \text{et} \qquad u_n = o(n^p).$$

Conséquence. — Pour obtenir des théorèmes d'inclusion relative entre procédés appartenant à $\mathcal{F}_p$, on peut dans l'étude des transformées de Mellin remplacer le demi-plan $\mathcal{R} z \geqq 0$ par la bande

$$0 \leqq \mathcal{R} z \leqq p+1.$$

I.5. **Les séries exceptionnelles** [38]. — L'objet de ce paragraphe est d'améliorer sensiblement le théorème 20 pour le remplacer par : « $g \in \mathcal{F}_p$ entraîne $g \sim (C, p)$ ».

Le théorème 19, 1°, montre que $(C, p) \supsetneq g$ si $g \in \mathcal{F}_p$ sans hypothèse supplémentaire (une démonstration élémentaire consiste à user de la formule d'Abel) [37]. Or l'exemple donné de la série

$$u_0 = 0, \qquad u_n = \frac{1}{n^{1-\alpha}} \qquad (n \geqq 1)$$

(¹) Cette hypothèse est peut-être inutile.

sommable par

$$g = 1 - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)t \qquad (0 < \alpha < 1)$$

prouve la précision du théorème 19.

Voici un résultat plus général :

Théorème 25. — *Si* $0 \leqq \mathcal{R}z < 1$, $z \neq 0$, *la série définie par* $S_n = n^z(\log n)^q$ (*q entier* $\geqq 0$) *est sommable par toute fonction sommatoire g dont la transformée de Mellin* $\mathfrak{M}(g)$ *admet z pour zéro d'ordre* $q+1$; *si* $\mathcal{R}z = 0$, *cette série est de plus sommable par la moyenne logarithmique itérée q fois* ([1]).

(Voir définition de cette dernière moyenne : 1re partie, V.4, *remarque.*)

On peut alors chercher si les séries sommables par $g \in \mathcal{F}_p$ mais non sommables par (C, p) et que nous appelons *séries exceptionnelles* ont des propriétés remarquables assez précises pour permettre l'énoncé d'un théorème où les restrictions imposées à g (th. 19 et 20) sont remplacées par des restrictions imposées à l'ensemble des séries. La forme du résultat souhaité s'énonce intuitivement ainsi : sauf pour des séries dont la naure est bien connue, la sommation par une fonction sommatoire usuelle est équivalente à la sommation par une moyenne de Cesaro.

Pour la classe $\mathcal{F}_0$ à laquelle nous nous bornons, le résultat est le suivant :

Théorème 26. — *Lorsque* Σu_k *est sommable par* $g \in \mathcal{F}_0$:

ou bien Σu_k *est convergente;*

ou bien $\sum_0^n u_k$ *est équivalent pour* $n\infty$ *à* $\sum_{m=0}^{q} c_m n^{\zeta_m}(\log n)^{\mu_m}$, *où* ζ_m *est un zéro de* $\mathfrak{M}(g, z)$ *d'ordre au moins égal à* $\mu_m + 1$;

ou bien Σu_k *est sommable par une moyenne logarithmique itérée.*

([1]) La première moyenne logarithmique est considérée comme une itération de rang 0.

Voici un schéma de la démonstration et des lemmes employés.

1° Considérons la classe $\mathcal{F}_0$ (pour la classe $\mathcal{F}_p$ on fait jouer à S_n^p le rôle que joue ici S_n). On connaît le théorème de Mercer sous sa première forme : si $T_n[\alpha + (1-\alpha)(1-t)]$ converge pour $n\infty$ et si $\alpha > 0$, S_n converge. La condition $\alpha > 0$ n'est autre que $\mathcal{R}z < 0$, z étant le zéro de $\mathfrak{M}[\alpha + (1-\alpha)(1-t)]$. Hardy en a donné une démonstration simple qu'on peut ici améliorer.

Supposons que Σu_k est sommable par

$$g = \left(1 + \frac{1}{z}\right)(1-t) - \frac{1}{z} \in \mathcal{F}_0 \qquad (z \neq 0).$$

Alors $u_k = o(1)$. Posons $S_n^1 = n^z \varphi(n)$ [S_n^1 : moyenne de rang n de (C, 1)]. On trouve

$$\varphi(n) = o(n^{1-z}), \qquad \varphi(n) - \varphi(n-1) = o(n^{-z-1});$$

si $\mathcal{R}z = 0$:

$$\varphi(n) = o(\log n), \qquad n^z\varphi(n) - (n-1)^z\varphi(n-1) - z\varphi(n-1)n^{-1+z} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que :

a. ou bien S_n^1 converge;

b. ou bien $S_n^1 \sim Cn^z$ pour $n\infty$ ($C = \text{const.}$);

c. ou bien la suite S_n^1 est sommable par la première moyenne logarithmique. S_n jouit donc des mêmes propriétés.

2° Nous dirons que deux procédés P, P′ sont *strictement équivalents* si $T_n(P) - T_n(P') = o(1)$ pour la ou les séries considérées [35].

Nous appellerons *série de g* la série $\sum_0^\infty [T_{n+1}(g) - T_n(g)]$.

Lorsque $u_k = o(1)$, $T_{n+1}(g) - T_n(g) = o(1)$ quelle que soit la fonction sommatoire.

Soit alors d'une part une fonction sommatoire g et le procédé

$$g_1 = \left(\frac{1}{z_1} + 1\right)(1-t) - \frac{1}{z_1} \in \mathcal{F}_0 \qquad (z_1 \neq 0,\ g_1 = 0 \text{ pour } t < 0,\ t > 1).$$

Si à la série de g on applique le procédé g_1 *avec un paramètre* *entier* n, le résultat est un procédé linéaire appliqué à Σu_k, défini par $\sum_{k=0}^{n} \gamma_k(n) u_k$ et l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_k(n) u_k - \mathrm{T}_n\left[\left\{\left(\frac{1}{z_1}+1\right)(1-t)\right\}^{*} \circ g - \frac{1}{z_1} g\right] = o(1).$$

Soit g_2 la fonction sommatoire

$$\left[\left(\frac{1}{z_1}+1\right)(1-t)\right]^{*} \circ g - \frac{1}{z_1} g.$$

Ce résultat signifie que les procédés g_2 et $\gamma_k(n)$ sont *strictement équivalents. Les zéros de* $\mathfrak{M}(g_2)$ *sont* z_1 *et ceux de* $\mathfrak{M}(g)$.

Nous désignerons encore par $g_1 \circ g$, le procédé défini par $\gamma_k(n)$.

3° Soit alors $g \in \mathcal{F}_0$ et $\sum_{0}^{\infty} u_k$, où $u_k = o(1)$. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les zéros de $\mathfrak{M}(g)$ situés dans $0 \leqq \mathcal{R} z \leqq 1$, comptés autant de fois que l'exige leur ordre.

[Si on suppose que $\sum_{0}^{\infty} u_k$ est sommable g, on peut supposer aussi que g est un polynome entier en t (th. 21).]

Soit encore :

$$g_\nu(t) = \left(\frac{1}{z_\nu}+1\right)(1-t) - \frac{1}{z_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

$g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_m$ désignant le résultat obtenu en appliquant à $\sum_{0}^{\infty} u_k$ le procédé g_m avec un paramètre entier n, puis le procédé g_{m-1} à la série de g_m avec un paramètre entier n, etc., on a d'après le 2° et le théorème 19,2° :

$$g \sim g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_m,$$

4° Supposons alors Σu_k sommable par g, donc par $g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_m$. Cela signifie que la série de $g_2 \circ \ldots \circ g_m$ est sommable par g_1.

A la série de $g_2 \circ \ldots \circ g_m$ on applique le résultat du 1° : ou bien la série de $g_2 \circ g_3 \circ \ldots \circ g_m$ est convergente, ou bien la somme de ses n premiers termes est égale à $\mathrm{C} n^{z_1} + o(1)$, ou bien elle est sommable par la moyenne logarithmique (lorsque $\mathcal{R} z_1 = 0$). Alors on étudie $g_2 \circ g_3 \circ \ldots \circ g_m$, c'est-à-dire la sommation de la série de $g_3 \circ \ldots \circ g_m$ par g_2, résultat sur lequel il faut *a priori* et successivement faire les hypothèses a, b, c du 1°. A la $\nu^{\text{ième}}$ opération, on est conduit à sommer par g_ν une série dont on sait qu'elle est ou bien sommable par g_ν, ou bien que la somme de rang n est $\sim \mathrm{C}n^\alpha$ ou $\mathrm{C}n^\alpha(\log n)^\mu$ ou bien qu'elle est sommable par une moyenne logarithmique itérée.

II. — Les moyennes de Haussdorff $\mathcal{H}$ [39].

Ce paragraphe est destiné à présenter une définition élémentaire des moyennes $\mathcal{H}$ et à lier étroitement les classes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{F}$.

II.1. **Définition.** — Si on considère acquis le résultat concernant l'équivalence entre $g = (1-t)^p \in \mathcal{F}_p$ et (C, p) (th. 5), on peut se demander comment passer de $\mathrm{T}_n(g)$ à $\mathrm{T}_n(\mathrm{C}, p)$ ou inversement. Il semble qu'il faille renoncer à un résultat *simple* mais on peut alors chercher une relation entre les coefficients de u_k dans les deux sommes.

Dans S_n^p somme de rang n, fournie par (C, p), le coefficient de u_k est $\frac{\mathrm{C}_n^k}{\mathrm{C}_{n+p}^k}$ et s'exprime par conséquent au moyen des fonctions $\mathrm{B}(x, y)$ par :

$$\frac{\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k}(1-t)^p\,dt}{\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt} \qquad (k, n, p \text{ entiers} > 0).$$

On est donc conduit à définir ainsi le procédé $(\mathcal{H}, g)$: le coefficient de u_k est

$$\gamma_k(n) = \frac{\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k}g(t)\,dt}{\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt} \qquad \text{pour} \quad k \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_0(n) = g(0).$$

Si $g(t)$ est une fonction sommatoire, ce procédé est régulier. En posant $t = xn$ (x fixé), on a

$$\lim_{n\,\infty} \gamma_k(n) = g(x).$$

II.2. **Propriétés principales.** — Si à $\mathrm{T}_n(\mathcal{H}, g)$ on applique la formule élémentaire d'Abel comme dans la première partie, I.1,2°, on est conduit à définir le procédé :

$$c_k(n) = C_n^k \int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}\,dg.$$

Ce procédé sera désigné par $(\mathcal{H}, g^*)$.

Un calcul simple donne alors :

THÉORÈME 27. — $\mathcal{H}(\gamma^* \circ g) = (\mathcal{H}, \gamma^*) \circ (\mathcal{H}, g)$, γ *et* g *étant des fonctions sommatoires.*

Il est clair alors que si G peut se mettre sous la forme $\gamma^* \circ g$, $\mathcal{H}(G) \supseteq (\mathcal{H}, g)$, d'où le

THÉORÈME 28. — *Si le quotient* $\mathfrak{M}(g_2)/\mathfrak{M}(g_1)$ *des transformées de Mellin des fonctions sommatoires* g_1, g_2 *est une intégrale de Laplace unilatérale absolument convergente dans* $\mathcal{R}z \geqq 0$, $\mathcal{H}(g_2) \supseteq \mathcal{H}(g_1)$ (*cf.* th. 14).

Le théorème 27 rattache donc la théorie des moyennes $\mathcal{H}$ à l'analyse des fonctions analytiques. Tout critère permettant d'affirmer que $\mathfrak{M}(g_2)/\mathfrak{M}(g_1)$ est une fonctionnelle $\mathfrak{M}$ donnera des critères d'inclusion pour les moyennes $\mathcal{H}$. On remarquera que le théorème 27 prouve très simplement que les moyennes (H, p) sont des moyennes $\mathcal{H}$.

III. — Les moyennes (N, φ) [39].

III.1. **Définition.** — Nous définissons les moyennes de Nörlund par :

$$T_x(N, \varphi) = \sum_{k \leqq x} \frac{\varphi(x-k)}{\varphi(x)} u_k,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction positive, non décroissante que nous supposerons douée d'une dérivée continue $\varphi'(x) \geqq 0$, φ et φ' étant définies pour $x \geqq 0$, nulles pour $x < 0$.

La condition $\varphi' = o(\varphi)$ assure la régularité de ces procédés (*cf.* 1re partie, I.1).

Soit Ω *l'ensemble des fonctions satisfaisant aux mêmes conditions que* φ [*dont :* $\varphi' = o(\varphi)$].

III.2. **Inclusion relative.** — Nous usons ici de la deuxième méthode (Introduction, V).

1° Nous transformons $T_x(N, \varphi)$ par :

$$(1) \qquad \frac{\int_0^x \psi(x-t)\varphi(t)T_t(N, \varphi)\,dt}{\int_0^x \psi(x-t)\varphi(t)\,dt} \text{ [1]},$$

$\psi(x)$ étant supposée aussi continue et nulle pour $x < 0$.

Ce procédé est un procédé (N, Φ), où

$$\Phi(x) = \int_0^x \psi(x-t)\varphi(t)\,dt$$

(produit de composition de φ et ψ), mais nous ne savons pas *a priori* si le procédé (1), c'est-à-dire le procédé défini par

$$(2) \qquad \frac{\int_0^x \psi(x-t)\varphi(t)S(t)\,dt}{\int_0^x \psi(x-t)\varphi(t)\,dt}$$

est régulier. Il suffit, pour qu'il le soit, que la fonction de x, t : $\dfrac{\psi(x-t)\varphi(t)}{\int_0^x \psi(x-t)\varphi(t)\,dt}$ satisfasse aux conditions du théorème $\mathcal{T}_2$.

2° Si $\mathcal{L}_1(f)$ désigne l'intégrale de Laplace unilatérale de f, on a :

$$\mathcal{L}_1(\Phi) = \mathcal{L}_1(\psi)\mathcal{L}_1(\varphi).$$

D'où :

THÉORÈME 29. — *Si* φ *et* $\Phi \in \Omega$ *et si* $\dfrac{\mathcal{L}_1(\Phi)}{\mathcal{L}_1(\varphi)}$ *peut être représentée par une intégrale de Laplace unilatérale absolument convergente dans* $\mathcal{R}z \geqq a \geqq 0$, *le procédé* (N, Φ) *est le transformé de* (N, φ) *par le procédé* (2).

Lorsque les conditions du théorème 29 sont réalisées, il faudra, si on veut obtenir $(N, \Phi) \supseteq (N, \varphi)$, écrire que le procédé (2) est régulier. Ces conditions suffisantes sont celles du théorème 1.

[1] Nous nous bornons à ce cas. *Voir* Notes.

Il est souhaitable d'obtenir des théorèmes d'inclusion où ne figure pas la fonction ψ déterminée par $\frac{\mathcal{L}_1(\Phi)}{\mathcal{L}_1(\varphi)}$.

Signalons les résultats suivants :

THÉORÈME 30. — 1° *Si* φ *et* $\Phi \in \Omega$ *et si* $\frac{\mathcal{L}_1(\Phi)}{\mathcal{L}_1(\varphi)}$ *peut être représentée par une intégrale de Laplace unilatérale absolument convergente dans* $\mathcal{R}z \geqq 0$, $(N, \Phi) \supsetsim (N, \varphi)$.

2° *Si, de plus, il en est de même de* $\frac{\mathcal{L}_1(\varphi)}{\mathcal{L}_1(\Phi)}$, $(N, \Phi) \sim (N, \varphi)$ (*cf.* th. 2).

THÉORÈME 31. — *Si* φ *et* $\Phi \in \Omega$ *et si* $\frac{\mathcal{L}_1(\Phi)}{\mathcal{L}_1(\varphi)}$ *est représentée dans un demi-plan* $\mathcal{R}z \geqq a \geqq 0$ *par l'intégrale de Laplace, unilatérale, absolument convergente d'une fonction* $\psi \in \Omega$, $(N, \Phi) \supsetsim (N, \varphi)$.

IV. — Les moyennes N* [39].

Soit $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ continues, positives, $\varphi(x) = 0$ pour $x < 0$, $\varphi(+\infty) = +\infty$, $\varphi' \not\leq 0$. Le procédé (N^*, φ) est défini par

$$T_x(N^*, \varphi) = \sum_{k \leq x} \left[1 - \frac{\varphi(k)}{\varphi(x)}\right] u_k. \tag{1}$$

Il jouit de la propriété :

$$\varphi T_x(N^*, \varphi) + \psi T_x(N^*, \psi) = (\varphi + \psi) T_x(N^*, \varphi + \psi). \tag{2}$$

Transformons $T_x(N^*, \varphi)$ par

$$\frac{\int_0^x \psi(t)\varphi(t) T_t(N^*, \varphi)\, dt}{\int_0^x \psi(t)\varphi(t)\, dt}. \tag{3}$$

Si $\psi(t)$ est une fonction intégrable qui garde un signe constant, ce procédé, appliqué à $T_t(N^*, \varphi)$ est régulier.

Posons

$$\Psi(x) = \int_0^x \psi(t)\, dt, \qquad \Phi(x) = \int_0^x \varphi' \Psi\, dt,$$

donc

$$\frac{\Phi'}{\varphi'} = \int_0^x \psi(t)\, dt.$$

Si alors on se donne Φ et φ et si l'on suppose que φ' est $\neq 0$ et que $\frac{\Phi'}{\varphi'}$ est absolument continue et monotone (croissante ou décroissante), ψ est déterminée.

L'hypothèse $T_x(N^*, \varphi) = o(1)$ entraîne alors :

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi(x) - \varphi\Psi} T_x(N^*, \Phi) + \frac{\varphi\Psi}{\varphi\Psi - \Phi} T_x(N^*, \varphi) = o(1);$$

en résulte le théorème suivant (*cf.* th. 4), d'où le procédé auxiliaire ψ a disparu :

Théorème 32. — *Soient Φ, φ deux fonctions nulles pour $x < 0$, positives, croissantes, dérivables, telles que $\varphi(+\infty) = \Phi(+\infty) = +\infty$ et que $\varphi' \neq 0$.*

Si $\frac{\Phi'}{\varphi'}$ est absolument continue et monotone et si $\frac{\Phi'\varphi}{\Phi\varphi'} = O(1)$, $(N^*, \Phi) \supseteq (N^*, \varphi)$.

V. — Les moyennes typiques [40, 41, 42, 23, 24].

On peut présenter le problème de l'inclusion relative des moyennes typiques (1re partie, V) pour un même ordre et des types différents en usant de la première méthode.

Bornons-nous à m entier > 0.

On trouve aisément

$$(1) \quad T_x[R, \varphi(\lambda), m] = \left[\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]^m T_x(R, \lambda, m) + \frac{(-1)^{m-1}}{m!\,[\varphi(x)]^m} \int_0^x \left[\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \{\varphi(x) - \varphi(t)\}^m\right] \times t^m T_t(R, \lambda, m)\, dt.$$

Supposons $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ croissante, nulle pour $x < 0$, $\varphi(+\infty) = +\infty$, $\varphi^{(m+1)} = O(1)$.

Alors on a :

$$(2) \quad \left[\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]^m + \frac{(-1)^{m-1}}{m!\,[\varphi(x)]^m} \int_0^x \left[\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \{\varphi(x) - \varphi(t)\}^m\right] t^m\, dt = 1.$$

Si on suppose que la série considérée est sommable par (R, λ, m), on peut supposer la somme nulle. Les hypothèses $x\varphi' = O(\varphi)$ et celles du théorème $\mathfrak{T}_2$ (1° et 2°) appliqué au second terme du second membre de (2) donnent des conditions suffisantes d'inclusion. [La condition ($\mathcal{C}_2$, 3°) est ici inutile]. Mais $\varphi(+\infty)=+\infty$ rend superflue la condition ($\mathcal{C}_2$, 2°) et l'identité (2) rend superflue $x\varphi'=O(\varphi)$.

Si bien qu'on peut énoncer le critère :

$$\text{Si } \int_a^x \left| \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \{ \varphi(x) - \varphi(t) \}^m \right| t^m dt = O[\varphi(x)^m],$$
$$[R, \varphi(\lambda), m] \supseteq (R, \lambda, m).$$

TROISIÈME PARTIE.

Les procédés complets usuels.

Nous nous bornons à quelques indications sommaires. Les théorèmes d'inclusion qui suivent sont obtenus par des méthodes particulières à chaque théorème.

Les procédés A, $\mathcal{R}$ et L sont des procédés ($\mathcal{F}$, g) où la fonction $g^{(t)}$, nulle pour $t<0$ vaut respectivement

$$e^{-t^\alpha}(\alpha>0,) \quad \frac{\sin^\alpha t}{t^\alpha}(\alpha>0) \quad \text{et} \quad \frac{t\,e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

I. — Les procédés A.

La sommabilité (A, α) est définie par $\sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{x}{k}\right)u_k$, où $g(t)=e^{-t^\alpha}$ et $x\to+\infty$.

Voici les deux résultats principaux :

Théorème 33 [43]. — *Soit* $0<\beta<\alpha$. *Si la série* $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{k}{x}\right)^\beta} u_k$ *converge pour* $x>0$, $(A, \beta) \supseteq (A, \alpha)$.

Il existe un résultat [11] lorsque $\beta>\alpha>0$, mais il présente moins d'intérêt en raison des restrictions imposées [z est complexe et la convergence de (A, α) doit avoir lieu uniformément dans un angle $\theta_1 \leqq \arg z \leqq \theta_2$ non nul].

Les remarques que nous ferons au sujet de ce théorème dans les

Notes ont pour origine le fait qu'une démonstration de ce théorème emploie les propriétés de la transformée de Fourier.

THÉORÈME 34. — *Pour tout* $p > 0$, $(A, 1) \supset (C, p)$ [11].

La démonstration peut se faire élémentairement. Nous en suggérons une autre (*voir* Notes).

II. — Les procédés $(\mathcal{R}, \alpha)$.

On considère $\sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{x}\right) u_k$, où $x \to +\infty$ et $g(t) = \frac{\sin^{\alpha} t}{t^{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$, $g(t) = 0$ pour $t < 0$. Nous rappelons que $(\mathcal{R}, \alpha)$ est régulier si et seulement si $\alpha > 1$.

THÉORÈME 35. — $(A, 1) \supsetneq (R, 2) \supsetneq (R, 1)$.

THÉORÈME 36 [44]. — *p étant positif quelconque* : $(C, 2+p) \supsetneq (R, 2)$, $(C, 1+p) \supsetneq (R, 1)$.

THÉORÈME 37 [45]. — *p étant positif quelconque* $(R, 2) \supsetneq (C, 1-p)$ $(0 < p < 2)$.

III. — Le procédé L [46].

Le procédé de Lambert est défini par

$$\sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{x}\right) u_k, \qquad \text{où} \qquad g(t) = \frac{t\, e^{-t}}{1 - e^{-t}}.$$

Il jouit des propriétés suiavntes :

THÉORÈME 38 [47]. — $(A, 1) \supset L \supset (C, p)$ $(p > 0)$.

La démonstration de $L \supset (C, p)$ est facile. Pour démontrer que $(A, 1) \supset L$, une démonstration use de la théorie des nombres premiers. Nous suggérons une autre démonstration.

IV. — Le procédé B.

Le procédé emploie la fonction entière e^x.

B est défini par $e^{-x}\sum_0^\infty \frac{x^k}{k!} S_k (x \to +\infty)$. On définit aussi le procédé B′ par

$$\int_0^x \left(e^{-t}\sum_0^\infty \frac{t^k}{k!} u_k\right) dt \qquad (x \to +\infty).$$

(E, p) désignant un procédé d'Euler (1^re^ partie, VI), on a :

Théorème 39 [48]. — B ⊃ (E, p).

Théorème 40 [11]. — B′ ⊃ B.

Théorème 41 [11]. — B *n'est pas comparable à* (C, p).

Signalons que la sommabilité B (ou B′) de Σu_k avec pour somme S entraîne celle de $\sum_1^\infty Cu_k$ (C const.), celle de $\sum_0^\infty u_k$ et Σv_k entraîne celle de $\Sigma(u_k + v_k)$, celle de $\sum_1^\infty u_k$ entraîne celle de $\sum_0^\infty u_k$, mais celle de $\sum_0^\infty u_k$ n'entraine pas celle de $\sum_1^\infty u_k$.

NOTES.

L'objet de ces Notes est d'indiquer des résultats qui n'ont pas été signalés au cours de l'exposé précédent afin de ne pas alourdir cet exposé, d'indiquer des généralisations, certaines ou probables, de la méthode étudiée, de montrer que les théorèmes de Wiener se rattachent à cette méthode et de suggérer l'emploi de cette méthode à des problèmes nouveaux.

1. Remarques sur les moyennes (N, φ), ($\mathcal{H}$, g), ($\mathcal{F}$, g). — On peut pour les moyennes N obtenir des théorèmes d'inclusion entre (N, φ) et (C, p). Ainsi lorsque $\varphi'' > 0$, (N, φ) ⊃ (C, 1) (résultat connu [11]); lorsque $\varphi''' > 0$ et $|\varphi''| = o(\varphi)$, (N, φ) ⊃ (C, 2), ...

On peut aussi obtenir des résultats meilleurs en transformant $T_t(N, \varphi)$ par

$$\frac{\int_0^\infty \psi(x-t)\varphi(t)T_t(N, \varphi)\,dt}{\int_0^\infty \psi(x-t)\varphi(t)\,dt} \qquad [39].$$

On définit alors un procédé (N, Φ), où

$$\Phi = \int_0^{+\infty} \psi(x-t)\varphi(t)\,dt$$

et $\mathcal{L}_{\rm I}$, $\mathcal{L}_{\rm II}$ désignant les intégrales de Laplace uni- et bilatérale

$$\mathcal{L}_{\rm I}(\varphi) = \mathcal{L}_{\rm II}(\psi)\mathcal{L}_{\rm I}(\varphi).$$

Il nous paraît alors possible de faire des moyennes (N, φ) une étude analogue à celle faite pour les fonctions sommatoires des classes $\mathcal{F}_p$ et où l'une des hypothèses de départ sera

$$\varphi^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1), \qquad \varphi^{(p)}(0) \neq 0.$$

Les moyennes $(\mathcal{H}, g)$ telles que nous les avons définies dans la deuxième partie, posent les problèmes suivants : détermination des séries exceptionnelles quand $g \in \mathcal{F}_p$, équivalence de $(\mathcal{H}, g)$ et $(\mathcal{F}, g)$. Au sujet de ce dernier problème il faut noter que l'hypothèse de la continuité de g sur $(0, 1)$ est importante puisque si $g = 0$ pour $a < t < 1$ et $g(t) = 1$ pour $0 \leq t < a$, $(\mathcal{H}, g)$ est la moyenne d'Euler (E, q) d'ordre $\frac{1-a}{a} = q$ et il n'y a évidemment pas équivalence entre (E, q) et $(\mathcal{F}, g)$ pour cette expression de g.

L'extension des résultats concernant les classes $\mathcal{F}_p$ au cas p non entier paraît certaine ainsi que l'équivalence à $(1-t)^p$ [probablement par emploi des dérivées d'ordre non entier et l'hypothèse $g(t) = (1-t)^p\varphi(t)$, où $\varphi(t)$, est suffisamment dérivable].

2. Généralisations possibles. — Nous nous sommes bornés à exposer la méthode pour des fonctions sommatoires $g(t)$ [$g(t) \equiv 0$ si $t < 0$, $t < 1$]. Appelons *fonctions sommaires restreintes* (f. s. r.) celles où $g(t) \equiv 0$ si $t < 0$, $t > 1$ et *fonctions sommaires complètes* (f. s. c.) celles où $g(t) \equiv 0$ pour $t < 0$ $g(t) \not\equiv 0$ pour $t > 1$ [exemple : procédés (A, α), L].

La méthode d'étude des f. s. r. a consisté à transformer une f. s. r. par une f. s. c. S'il s'agit d'étudier les f. s. c. on usera encore de cette méthode en transformant une f. s. c. par une f. s. c. *Comme il s'agit d'obtenir les théorèmes d'inclusion*, on supposera d'abord que, g étant une fonction sommatoire complète définissant un procédé régulier (satisfaisant à $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$), la série $\sum_0^\infty u_k$ est sommable par g, ce qui évitera des hypothèses trop restrictives quant à la convergence (absolue ou non) des intégrales qui interviennent.

Si on veut faire une étude assez complète, analogue à celle qui fut faite pour les classes $\mathcal{F}_p$, on peut se demander par quelle hypothèse il faudra ici remplacer l'hypothèse qui a servi de guide pour les f. s. r. : $g(t)$ admet $t = 1$ pour zéro d'ordre p. L'exemple des procédés A et L prouve que certainement l'ordre de grandeur de $g(t)$ (f. s. c.) pour $t = +\infty$ interviendra, mais cette hypothèse formulée avec précision ne sera pas suffisante comme le prouvent les théorèmes 34 et 38 [L $\supset$ (C, p)] puisque pour (C, p) ou (R, 1, p) la fonction sommatoire est identiquement nulle pour $t > 1$. Faut-il penser à la répartition des zéros de $g(t)$?

Les théorèmes 34 et 38, s'exposent très simplement par cette méthode (généralisée aux f. s. c.). Un exposé simple du théorème 33 nous paraît souhaitable et possible.

3. **Les théorèmes taubériens.** — On appelle habituellement théorème taubérien, un théorème qui a la forme suivante : si une série S est sommable par un procédé a et satisfait à une condition C, (dite condition taubérienne), elle est sommable par un certain procédé b. On peut dire, reprenant une expression déjà employée (par exemple par Hardy), qu'un *théorème taubérien pur* est un théorème de la forme précédente mais où n'est pas imposée à S une condition C.

Si, par exemple, on veut sommer une série $\sum_0^\infty u_k$ par (C, p), il *faut* supposer d'abord que $u_n = o(n^p)$. C'est une condition pour que le problème posé ait un sens. Il ne faut donc pas considérer cette condition comme une condition taubérienne. De façon générale ne doit pas être considérée comme condition taubérienne toute condition devant être logiquement imposée à la série pour que le problème posé ait un sens.

Tous les théorèmes exposés dans les trois parties de ce fascicule sont des théorèmes taubériens purs sauf le théorème 18. L'importance de ce théorème est évidente puisque allié au théorème 21 il fournit la majoration de u_n et les séries exceptionnelles.

4. **Les théorèmes taubériens de Wiener.** [11]. — L'analogie entre le théorème 18 et les théorèmes de Wiener nous mène à faire de ceux-ci une mention spéciale.

L'un des deux théorèmes de Wiener s'énonce ainsi (1^re forme) :

W. *Soient* $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in L(-\infty, +\infty)$ (*absolument intégrables sur* $-\infty, +\infty$) *et supposons que la transformée de Fourier de* $\varphi_1(t)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\varphi_1(t)\,dt$ *ne s'annule pas.*

Alors les hypohèses

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x-t)f(t)\,dt \underset{x\,\infty}{\rightarrow} S\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad f(t) = O(1)$$

entraînent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x-t)f(t)\,dt \underset{x\,\infty}{\rightarrow} S\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(t)\,dt \quad (^1).$$

Un changement de variable mène à

$$\frac{1}{x}\int_0^{\infty} \varphi_1\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\infty} t^{ix}\varphi_1(t)\,dt \neq 0.$$

Une autre forme est obtenue en considérant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x-t)\,d\alpha(t) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \varphi_1\left(\frac{t}{x}\right)d\alpha(t).$$

Ces deux formes correspondent à (I.2, rem. 1 et renvoi en bas de

---

(1) On peut supposer $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2\,dt = 1$ (Introduction, II, rem. 3°).

page). Dans la seconde, les conditions imposées à φ_1 et φ_2 sont plus restrictives (on suppose, en particuliér, φ_1, φ_2 continues).

Pour les procédés des classes $\mathcal{F}_p$ les théorèmes de Wiener sont des cas particuliers des théorèmes obtenus (2[e] partie, I). Leurs démonstrations, assez longues, usent d'un théorème taubérien préliminaire où l'on suppose que $f(x) - f(y) \to 0$ quand

$$x, y \to +\infty \qquad \text{et} \qquad x - y \to 0 \qquad (y > x).$$

On peut les présenter d'abord par la méthode exposée. φ_1, φ_2, ψ appartenant à la classe de fonctions $L(-\infty, +\infty)$, on considère :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t-u) f(u)\,du\right] dt, \qquad f(t) = O(1)$$

qui définit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x-t) f(t)\,dt,$$

où φ_2 est le produit de composition de φ_1 et ψ et ces trois procédés sont réguliers. Si F désigne une tranformée de Fourier on a :

$$F(\varphi_2) = F(\varphi_1)\,F(\psi).$$

Si $\frac{F(\varphi_2)}{F(\varphi_1)}$ est la transformée de Fourier d'une fonction $\psi \in L(-\infty, +\infty)$, le théorème W est démontré. Des critères simples assurant que $\frac{F(\varphi_2)}{F(\varphi_1)}$ est F suffisent pour les cas usuels (*ex.* [11], p. 300, sq.).

L'intérêt du théorème W est de se contenter de l'hypothèse $F(\varphi_1) \neq 0$, mais il nous paraît plus simple de le présenter comme nous venons de le faire.

Autres problèmes.

Nous pensons que la méthode qui a été employée dans la deuxième partie peut servir à d'autres problèmes, tel celui de l'approximation.

Ce problème, avec un paramètre entier n, peut être ainsi posé. Soit $\sum_0^\infty u_k$ une série dont on suppose que le procédé a fournit l'approximation ρ_n, c'est-à-dire que

$$T_n(a) \underset{n\,\infty}{\to} S \qquad \text{et} \qquad |T_n(a) - S| \leqq \rho_n.$$

La série étant sommable par b, évaluer $|T_n(b) - S|$.

Si on se borne à supposer d'abord que $\rho_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha > 0)$, le problème précédent nous semble devoir être utilement dédoublé ainsi :

1° a est le procédé de sommation élémentaire $T_n = S_n$;

2° a est un procédé différent de la sommation élémentaire.

En ce qui concerne le premier point de vue les exemples suivants montrent comment se présente ce problème :

a. Si $S_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et si $\sigma_n^1 = \frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1}$, alors pour $\alpha < 1$, $\sigma_n^1 = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$; pour $\alpha = 1$, $\sigma_n^1 = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ et pour $\alpha > 1$, $\sigma_n^1 = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

b. Si $S_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et si $\sigma_n^2 = \frac{S_0 + 2S_1 + \ldots + (n+1)S_n}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, alors pour $\alpha < 2$, $\sigma_n^2 = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$; $\alpha = 2$, $\sigma_n^2 = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$; $\alpha > 2$, $\sigma_n^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Le procédé défini par σ_n^1 est celui défini par $g = 1 - t$ ($g = 0$ pour $t < 0$, $t > 1$), celui défini par σ_n^2 est le procédé défini par $g = 1 - t^2$ ($g = 0$ pour $t < 0$, $t > 1$).

Le second point de vue est ramené au premier en considérant la *série de a* (démonstration du théorème 24, 2°).

Les exemples a et b sont destinés à suggérer l'idée directrice, fournie par l'étude de l'approximation des fonctions continues périodiques [49,50]. Pour les fonctions sommatoires des classes $\mathcal{F}_p$ on est mené à penser qu'on accroît la puissance d'un procédé g, en accroissant l'ordre p du zéro $t = 1$, mais pour améliorer l'approximation il faut accroître l'ordre q du zéro $t = 0$ pour $g(t) - 1$. Ainsi $1 - t$ et $1 - t^2$ sont équivalents au point de vue de la sommation, mais $1 - t^2$ peut pour certaines séries fournir une approximation meilleure que $1 - t$.

Dans la théorie de l'approximation des fonctions continues périodiques $f(x)$, les hypothèses premières concernent $(f(x)$.

Exemple : Si $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, alors les coefficients de Fourier sont

$$O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right); \quad S_n(f) - f = O\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \sigma_n^1(f) - f = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Ici les hypothèses premières sont faites sur S_n (*ex. a* et *b*).

Le problème de l'approximation mène à des problèmes taubériens dont le plus simple est le suivant : si g est une fonction sommatoire et $\sum_0^\infty u_k$ une série sommable par g de somme S et telle que $T_n(g) - S = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha > 0)$, la série converge-t-elle et dans l'affirmative peut-on évaluer $S_n - S$? *Exemple* : si $\sigma_n^1 - S = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha \leqq 1)$, on ne peut conclure à la convergence de S_n, mais si $\alpha > 1$, $S_n - S = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$. Il semble qu'on pourra en introduisant les classes $\mathfrak{F}_{p,q}$ de fonctions sommatoires g suffisamment dérivables, admettant $t = 1$ pour zéro d'ordre p, $g(t) - 1$ admettant 0 pour zéro d'ordre q (p, q entiers positifs) établir l'équivalence entre $g \in \mathfrak{F}_{pq}$ et $(1 - t^q)^p$ pour une approximation $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha < p)$, ce dernier procédé étant lui-même équivalent à ce point de vue à la p^{ieme} moyenne arithmétique du procédé défini par $\frac{\sum C_{k+q-1}^{q-1} S_k}{C_{n+l}^q}$.

BIBLIOGRAPHIE.

Les articles et Ouvrages figurant dans cette bibliographie se rapportent aux questions figurant dans ce fascicule et leur ordre est celui de ces questions.

[1] Banach, *Théorie des opérations linéaires.*

[2] Toeplitz, *Prace matematyczno-fizyczne*, t. 22, 1911, p. 113-119).

[3] Steinhaus, *Ibid.*, p. 121-123.

[4] Schur, *J. reine andgew. Math.*, t. 151, 1921, p. 79-111.

[5] Hobson, *The theory of functions*, Cambridge, 1926, vol. 2.

[6] Voronoi, *Proc. of the eleventh congress of Russian naturalists and scientists*, Saint-Petersbourg, 1902, p. 60-61 (en russe).

[7] Tamarkin, Traduction anglaise de l'article précédent [*Ann. Math.* (2), t. 33, 1932, p. 422-428].

[8] Nörlund, *Lunds Universitats Årsskrift*, (2), t. 16, 1920, n° 3.

[9] Zygmund, *Math. Polska*, t. 1, 1926, p. 75-85 et 119-129.

[10] M. Riesz, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), t. 22, 1923, p. 412-419.

[11] Hardy, *Divergent series*, Oxford, 1949.

[12] Cesaro, *Atti Accad. Lincei* [*Rendiconti* (4), t. 4, 1888, p. 452-457].

[13] Hardy, *Quat. J. Math.*, t. 38, 1907, p. 269-288.

[14] Cesaro, *Bull. Sc. math.*, (2). t. 14, 1890, p. 114-120.

[15] Knopp, *Sitzb. Berliner. math. Ges.*, t. 7, 1907, p. 1-12.

[16] Chapman, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), t. 9, 1911, p. 369-409.

[17] M. Riesz, *C. R. Acad. Sc.*, t. 152, 1911, p. 1651.

[18] Frobenius, *J. Math. pures et appl.*, t. 89, 1880, p. 262-264.
Hölder, *Math. Ann.*, t. 20, 1882, p. 535-549.

[19] Knopp, *Grenzwerte von Reihen* (*Dissertation*, Berlin, 1907).

[20] Schnee, *Math. Ann.*, t. 67, 1909, p. 110-125.

[21] Andersen, *Math. Z.*, t. 28, 1928, p. 356-369.

[22] Hardy et Riesz, *The general theory of Dirichlet's series* (*Cambridge tracts*, n° 18, 1915).

[23] Hirst, *J. Lond. Math. Soc.*, 1932.

[24] Kuttner, *J. Lond. math. Soc.*, t. 26, 1951, p. 104-111 et t. 27, 1952, p. 207-217.

[25] Zygmund, *Bull. Acad. Polon.* A, 1925, p. 265-287.

[26] Hurvitz et Silvermann, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 18, 1917, p. 1-20.

[27] Haussdorff, *Math. Z.*, t. 9, 1921, p. 74-109.

[28] Haussdorff, *Ibid.*, t. 16, 1923, p. 220-248.

[29] Rogosinski, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 38, 1942, p. 166-192.

[30] Fuchs, *Oxford Quat. J.*, t. 16, 1945, p. 64-77.

[31] Fuchs, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 40, 1944, p. 189-196.
[32] Hardy et Littlewood, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), t. 11, 1913, p. 1-16.
[33] Rogosinski, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 38, 1942, p. 344-363.
[34] Fuchs et Rogosinski, *Oxford Quat. J.*, t. 14, 1943, p. 27-48.
[35] Zamansky, *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 808.
[36] Zamansky, *Ibid.*, t. 233, 1931, p. 999.
[37] Delange et Zamansky, *Ibid.*, t. 234, 1952, p. 1025.
[38] Zamansky, *Ibid.*, t. 235, 1952, p. 1094.
[39] Zamansky, *Ibid.*, t. 236, 1953, p. 2291.
[40] Bohr, *C. R. Acad. Sc.*, t. 148, 1909, p. 75-80.
[41] Hardy, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), t. 4, 1906, p. 247-265.
[42] Hardy, *Math. Ann.*, t. 64, 1907, p. 77-94.
[43] Cartwright, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), t. 31, 1930, p. 81-96.
[44] Kuttner, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), t. 38, 1935, p. 273-283.
[45] Verblunsky, *Ibid.*, (2), t. 31, 1930.
[46] Ananda Rau, *Ibid.*, (2), t. 19, 1919, p. 1-20.
[47] Hardy et Littlewood, *Ibid.*, (2), t. 19, 1919, p. 21-29.
[48] Knopp, *Math. Z.*, t. 15, 1922, p. 226-253 et t. 18, 1923, p. 125-156.
[49] Zamansky, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 46, 1949, fasc. 1, p. 19-93 et t. 47, 1950, fasc. 2, p. 161-198.
[50] de Sz. Nagy, *Hungarica Acta Math.*, vol. 1, n° 3, 1948.