Mémorial des sciences mathématiques

L. Poli

P. Delerue

Le calcul symbolique à deux variables et ses applications

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 127 (1954)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1954__127__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXXVII

Le calcul symbolique à deux variables et ses applications

Par L. POLI
Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lyon

et P. DELERUE
Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1954

LE CALCUL SYMBOLIQUE A DEUX VARIABLES ET SES APPLICATIONS

PAR

L. POLI
Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lyon

ET

P. DELERUE
Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille

INTRODUCTION.

On trouve des essais de Calcul symbolique chez de nombreux auteurs anciens. Sans parler des pressentiments de Leibnitz, des tentatives de Lagrange ou Laplace, du Mémoire posthume d'Abel sur les fonctions déterminantes, nous citerons avant tout, parce qu'ils sont moins connus, les travaux de Brisson. Un Mémoire inséré au XIV^e Cahier de l'École Polytechnique est bien trop formel et trop général pour être utilisable, mais les procédés du calcul opérationnel y sont clairement en germe, et appliqués aux équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à n variables. Brisson présenta aussi à l'Académie des Sciences des rapports que nous n'avons plus, mais dont Cauchy comprit l'importance. On trouvera dans ses Œuvres [1] une longue étude qui couvre déjà le champ des applications modernes du Calcul symbolique à n variables. On y trouve « l'expansion-théorem » avec le cas des racines égales, l'emploi de l'intégrale de Fourier, des applications aux équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, etc.

Le XIX^e siècle vit de nombreux essais de calcul opérationnel, et souvent à plusieurs variables. On trouvera dans Stephens [2], McLachlan [3], Pincherle [4] ou l'Encyclopédie des Sciences mathématiques [5] une bibliographie abondante. On sait que Heaviside a retrouvé pour son compte le calcul opérationnel et en a tiré des résultats techniques exceptionnellement brillants, mais sans justification autre que leur succès expérimental [6], tandis que Carson, par l'emploi de la transformation de Laplace, donnait à cette théorie la base solide qui lui manquait [7]. Il faut remarquer ici que le calcul opérationnel de Heaviside, et le calcul symbolique de Carson, ne se recouvrent que partiellement. S'il n'est pas douteux que pour leur partie commune, le calcul de Carson ne soit nettement préférable, (voir les réflexions d'ailleurs trop sévères de Doestch [8]), reste que le calcul d'Heaviside est beaucoup plus large, utilise des opérateurs ne relevant pas de la transformation de Laplace, et obtient avec eux d'intéressants résultats [9].

Carson se limitait à une seule variable. L'idée a dû naître très tôt de généraliser à plusieurs. Nous avons souligné les difficultés rencontrées [10]. Sauf une courte Note de Van der Pol et Nyssens [11] (et qui traite d'un calcul simultané, c'est-à-dire de deux fonctions à une variable, plutôt que d'une fonction à deux) le premier essai de transformation de Laplace à deux variables appliqué au calcul symbolique nous semble la Note de M. P. Humbert en 1934 aux Comptes rendus, suivie en 1936 d'un exposé plus étendu paru aux Annales de la Société Scientifique de Bruxelles [12].

Des applications aux polynomes de Laguerre par Koschmieder [13] et aux fonctions hypergéométriques confluentes par Erdelyi [14] précédèrent la thèse de Voelker [15] et les travaux de Picone [16] principalement consacrés aux équations aux dérivées partielles. Le travail fondamental pour assurer les bases nous semble le Mémoire d'Amerio [17] auquel nous nous référerons souvent. Il utilise l'intégrale de Lebesgue, tandis que D. L. Bernstein a donné les principes pour l'emploi de l'intégrale de Stieljes [18].

Depuis, Bose [19] a retrouvé de façon indépendante, et complété de nombreux résultats déjà connus, y ajoutant de nouveaux théorèmes. Voelker et Doetsch ont publié une importante monographie [20]; après avoir repris sommairement, mais avec rigueur, les fondements, ils exposent longuement la théorie des équations aux dérivées partielles. Leur livre contient une liste abondante de règles opérationnelles et de correspondances qui en fait un outil très précieux pour les chercheurs et pour les techniciens.

M. Villat a exposé en Sorbonne, dans un cours qui sera sans doute polycopié, cette même application aux équations, aux dérivées partielles (et à l'hydrodynamique). Et M. Carstoiu a indiqué des applications [21]. On trouvera dans la thèse de M. P. Delerue [22] de nombreuses correspondances nouvelles, et des applications variées aux fonctions de type hypergéométrique et spécialement hyperbesseliennes. *Voir* aussi dans Bremmer et Van der Pol [47], le chapitre XVI.

Varma, généralisant la transformation de Laplace, a étudié la correspondance

$$\varphi(p) = p\int_0^\infty (2px)^{-\frac{1}{4}} W_{k,m}(2px) f(x)\,dx,$$

où $W_{k,m}$ est la fonction de Whittaker. Si $k=\frac{1}{4}$, $m=\pm\frac{1}{4}$, on retrouve l'intégrale de Laplace puisque

$$(2px)^{-\frac{1}{4}} W_{\frac{1}{4},\pm\frac{1}{4}}(2px) = e^{-px}.$$

Bose a étendu à deux variables la correspondance de Varma en posant

$$\Phi(p, q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty (2px)^{-\frac{1}{4}}(2qy)^{-\frac{1}{4}} W_{k,m}(2px) W_{k'm'}(2qy) f(x,y)\,dx\,dy.$$

Les résultats qu'il a obtenus donnent en y faisant

$$k = k' = m = m' = \frac{1}{4}$$

des propriétés du calcul symbolique à deux variables.

Des chaînes de transformations et des applications diverses ont été obtenues par d'autres mathématiciens des Indes : MM. Mitra, Sharma, Chakrabarty, Srivastava.

M$^{\text{lle}}$ Delavault utilisant des transformations qui sont de Laplace pour une variable, de Fourier ou de Hänkel pour les autres variables, a résolu deux problèmes de la théorie de la chaleur.

Elle a posé

$$\varphi(u, v, w) = \int_0^\infty e^{-ut}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(vx+wy)} f(t, x, y)\,dx\,dy\right] dt,$$

ou

$$\varphi(u, v) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-uxy} J_n(vy) f(x, y)\,dx\,dy.$$

Nous supposerons le lecteur au courant du calcul symbolique à une variable. On pourra consulter le fascicule CV de ce Mémorial [23] ou l'un des nombreux traités parus ces dernières années [24].

CHAPITRE I.

Transformation de Laplace a deux variables.

1. Définition. — La transformation de Laplace, déjà utilisée par Euler en 1737, fait correspondre à une fonction $\mathrm{F}(x)$ la nouvelle fonction

$$\varphi(p) = \mathcal{L}[\mathrm{F}(x)] = \int_0^{\infty} e^{-ps}\,\mathrm{F}(s)\,ds.$$

L'extension formelle à deux (ou n variables) est évidemment immédiate. On posera

$$\varphi(p, q) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-ps-qt}\,\mathrm{F}(s, t)\,ds\,dt$$

qu'on notera

$$\varphi(p, q) = \mathcal{L}[\mathrm{F}(x, y)].$$

Il pourrait même sembler, à première vue, qu'il n'y a là aucune idée nouvelle, une simple généralisation sans intérêt, ne demandant que des complications d'écriture. Contrairement à cette première impression, on verra que le calcul à deux variables est plus riche et plus varié qu'à une seule : l'étude des quadriques n'est pas une simple doublure de celle des coniques.

On sait bien d'ailleurs que tout ne va pas de soi quand on passe d'une à plusieurs variables dans l'intégrale de Cauchy-Riemann. Les conditions de validité, de continuité, le champ d'application, se posent de façon très différente.

2. Image de Carson. — Par analogie avec ce qu'a fait Carson dans le cas d'une variable, nous modifierons légèrement la définition précédente et poserons

$$f(p, q) = pq\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-ps-qt}\,\mathrm{F}(s, t)\,ds\,dt,$$

ce qu'on écrit symboliquement

$$f(p, q) \subset F(x, y)$$

$f(p, q)$ s'appelle l'image; $F(x, y)$ l'original.

Donnons quelques exemples :

α. Il est d'abord évident que si l'on connaît en calcul symbolique à une variable (nous dirons : en CS_1) les images :

$$F_1(x) \supset f_1(p),$$
$$F_2(x) \supset f_2(p),$$

l'image de $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$ sera en calcul à deux variables (nous dirons en CS_2)

$$f(p, q) = p\int_0^{\infty} e^{-ps} F_1(s)\, ds\, q\int_0^{\infty} e^{-qt} F_2(t)\, dt = f_1(p) f_2(q).$$

β. Tout spécialement

$$\frac{x^m}{\Gamma(1+m)} \frac{y^n}{\Gamma(1+n)} \supset \frac{1}{p^m} \frac{1}{q^n} \qquad (m \text{ et } n > -1).$$

γ. Cherchons à présent l'image de

$$F(x, y) = \frac{x^a y^b}{(x+y)^c}.$$

L'intégrale

$$f(p, q) = pq\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-ps-qt} \frac{s^a t^b}{(s+t)^c}\, ds\, dt$$

se calcule directement avec le changement de variables

$$s + t = u, \qquad \frac{s}{t} = v.$$

On trouve

$$\frac{x^a y^b}{(x+y)^c} \supset \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(a+b+2-c)}{\Gamma(a+b+2)\, q^{b-c} p^a}\, {}_2F_1\left(c, a+1; a+b+2; \frac{p-q}{p}\right).$$

La réponse ne semble pas symétrique en (p, a) et (q, b). La transformation d'Euler suffit à montrer qu'elle l'est. Les conditions de validité sont $a > -1$, $b > -1$, $c < a + b + 2$.

En particulier on a

$$\frac{1}{x+y} \supset \frac{pq}{p-q} \operatorname{Log} \frac{q}{p}.$$

On passe immédiatement de la définition de Carson à celle de Laplace, et l'importance du choix de l'une ou de l'autre n'est pas très considérable.

Nous garderons plutôt l'expression de Carson; c'est la plus usuelle chez les électrotechniciens car elle conserve les notations et les formules du calcul opérationnel d'Heaviside. Et de plus, à cause de la correspondance

$$\frac{1}{p^m q^n} \subset \frac{x^m y^n}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}$$

une fonction homogène de degré n en x et y, aura pour image une fonction homogène de même degré $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$. Tout spécialement une constante est sa propre image, et l'on pourra ajouter une même constante aux deux membres d'une égalité symbolique.

3. **Notations.** — Nous représentons ordinairement par x et y les variables de l'original; par p et q celles de l'image; il n'y aura donc aucune confusion à craindre entre l'image totale

$$f(p, q) \subset F(x, y),$$

pour représenter

$$f(p, q) = pq\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt} F(s, t)\, ds\, dt$$

et les images partielles

$$f_1(p, y) \subset F(x, y),$$

ou

$$f_2(x, q) \subset F(x, y),$$

où la transformation serait faite par rapport à une seule des variables; c'est-à-dire

$$f_1(p, y) = p\int_0^\infty e^{-ps} F(s, y)\, ds,$$

ou bien

$$f_2(x, q) = q\int_0^\infty e^{-qt} F(x, t)\, dt.$$

Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, quand nous emploierons la transformée de Laplace de la fonction $F(x, y)$ nous la noterons $\varphi(p, q)$; quand il s'agira de l'image de Carson, elle sera notée $f(p, q)$. S'il y a plusieurs fonctions nous les appellerons $F_i(x, y)$ et leurs images seront $f_i(p, q)$. Quand nous devrons employer d'autres lettres, nous préciserons chaque fois.

4. **Remarques sur l'emploi de l'intégrale de Cauchy-Riemann.** — Définir l'image par une intégrale de Cauchy-Riemann soulève un certain nombre de difficultés; certaines se rencontrent déjà en CS_1.

A. Heaviside écrit quel que soit m

$$p^{-m} \subset \frac{x^m}{\Gamma(1+m)}.$$

Or si $m \leqq -1$, l'intégrale correspondante diverge. En particulier si $m = -1$, p serait l'image de ce que les physiciens appellent aujourd'hui fonction impulsive, ou fonction de Dirac, et qu'Heaviside considérait comme une sorte de dérivée de sa fonction-unité

$$U(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \quad \text{et} \quad U(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > 0.$$

Avec l'intégrale de Cauchy-Riemann ce concept est inacceptable.

On retrouve cette difficulté en CS_2 si l'on veut écrire pour tout m, n

$$p^{-m} q^{-n} \subset \frac{x^m y^n}{\Gamma(1+m)\Gamma(1+n)}.$$

B. La transformation de Laplace n'est pas une transformation continue. Si l'on a, avec un paramètre α

$$f(p, \alpha) \subset F(x, \alpha)$$

on n'en déduit pas en général

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} f(p, \alpha) \subset \lim_{\alpha \to \alpha_0} F(x, \alpha).$$

Ceci équivaudrait à un passage à la limite sous le signe somme, et ce passage est incorrect avec une intégrale de Cauchy. Et il faudra des précautions pour dériver ou intégrer par rapport à un paramètre une égalité symbolique.

On retrouve une difficulté analogue pour prendre terme à terme l'image d'une série.

C. Voici maintenant une difficulté qui n'existe pas en CS_1.

Si l'intégrale $\int_0^\infty e^{-ps} F(s)\, ds$ converge, l'intégrale $\int_0^l e^{-ps} F(s)\, ds$

est bornée quel que soit $l > 0$. Ceci n'est plus exact pour les intégrales doubles, et pour édifier le Ss_2 la convergence simple de l'intégrale ne suffira pas. Et nous serons amenés à supposer la convergence absolue.

D'autant plus qu'une intégrale double $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt} F(s, t)\, ds\, dt$ non absolument convergente est une somme qui dépend de l'ordre dans lequel on fait les sommations (et dépend donc des variables choisies). Et cela entraîne, vu surtout l'infinité du champ d'intégration, des difficultés sérieuses. Ainsi renverser l'ordre des intégrations peut n'être pas légitime; l'intégration double de Laplace peut exister sans que les intégrales itérées existent. Ou, si l'on préfère, une fonction peut avoir une image en x et y, et n'avoir pas pourtant d'image en x pour certaines valeurs de y, ce qui empêcherait de prendre l'image en deux fois, d'abord par rapport à x puis par rapport à y.

Par exemple l'intégrale double

$$pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt} \frac{ds\, dt}{s+t}$$

existe; on a vu plus haut sa valeur $\frac{pq}{p-q} \operatorname{Log} \frac{q}{p}$ mais $\frac{1}{x+y}$ n'a pas d'image en x pour $y = 0$.

5. Solution de certaines de ces difficultés. — A. Appel à *l'intégrale de Stieltjes*. — Si au lieu de l'intégrale de Cauchy on utilise une intégrale de Stieltjes, généralisant ainsi le procédé que Widder [24] a utilisé systématiquement pour le calcul à une variable, on posera

$$f(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt}\, d_s\, d_t H(s, t).$$

Si $H(s, t)$ est deux fois dérivable, on aura

$$d_s\, d_t H(s, t) = \frac{\partial^2 H}{\partial s\, \partial t} ds\, dt = F(s, t)\, ds\, dt$$

et l'on retrouvera une intégrale ordinaire. Mais si $H(s, t)$ n'est pas deux fois dérivable on aura une généralisation intéressante.

D. Bernstein l'a utilisée, et a donné les théorèmes fondamentaux de cette transformation [18]. Ce procédé a d'abord l'avantage de justifier l'utilisation de la fonction de Dirac; si, pour nous borner à une variable, $H(x)$ est la fonction unité d'Heaviside $U(x)$, l'image

$$p\int_0^{\infty} e^{-ps}\, dU(s)$$

existe et est égale à p. Nous avons donc ici une base rigoureuse pour justifier l'emploi de la fonction de Dirac [qui d'ailleurs est improprement appelée « fonction »; c'est en réalité une distribution].

Notons ici que la correspondance générale

$$p^{-m}q^{-n} \subset \frac{x^m y^n}{\Gamma(1+m)\Gamma(1+n)}$$

peut se justifier, quels que soient m et n, de trois façons; avec le concept de dérivation fractionnaire [29]; avec celui de partie finie d'intégrale [33]; avec celui de distribution [25]. On pourrait dire aussi que la justification s'opère en changeant, dans la formule d'intégration complexe que nous rappellerons plus loin, le chemin sur lequel on intègre. McLachlan a longuement expliqué ce procédé pour le CS_1 [3]. Mais l'utilisation de l'intégrale de Stieltjes présente un autre avantage plus important pour le théoricien; si l'on prend pour $H(x, y)$ une fonction à sauts (constante par intervalles), on trouvera pour $f(p, q)$ une série double de Dirichlet dont la théorie apparaît ainsi comme un cas particulier des transformées de Laplace; et il arrive souvent que l'intégrale, convergeant dans un domaine plus étendu que la série, en fournit le prolongement analytique.

B. Appel à *l'intégrale de Lebesgue.* — On a proposé aussi d'utiliser l'intégrale de Lebesgue. Voici quelques raisons pour cela.

On peut passer à la limite sous le signe somme. Si l'on a

$$F(x, y, \alpha) \supset f(p, q, \alpha)$$

et si la fonction $F(x, y, \alpha)$ reste inférieure à une fonction $H(x, y)$ ayant elle-même une image, l'existence de $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} F(x, y, \alpha)$ impliquera celle de son image $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(p, q, \alpha)$.

De plus le théorème de Fubini sur les intégrales itérées, et l'inversion de l'ordre des intégrations, nous permettra d'affirmer que l'existence de l'image de $F(x, y)$ implique l'existence « presque partout » de l'intégrale itérée correspondante; cela veut dire qu'il existera une fonction $F_1(x, y)$ équivalente à $F(x, y)$ et donc ayant même image, telle qu'on obtienne cette image en prenant successivement les images en x puis en y (ou inversement).

Rappelons qu'on appelle fonctions « équivalentes » deux fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle; si l'une est intégrable au sens de Lebesgue, l'autre aussi; et les deux intégrales sont égales.

C. Nous n'emploierons cependant dans ce fascicule ni l'intégrale de Stieltjes, ni celle de Lebesgue. Le recours à ce type d'intégrale s'imposerait si le CS_2 n'était souvent utilisé par des techniciens. Or, comme le remarquait Giorgi, la physique ignore les fonctions définies sur un ensemble de mesure nulle. Le mathématicien cherche les conditions les plus larges de validité d'un théorème, avec le minimum d'hypothèses. Le physicien et le technicien ne s'inquiètent guère de savoir si l'on a rétréci plus qu'il ne serait nécessaire les conditions de départ. Il demande seulement que les hypothèses soient vérifiées pour les fonctions qu'il utilise d'ordinaire, ou en tout cas qu'on lui précise un domaine où il sera sûr d'opérer légitimement. L'intégrale de Lebesgue lui semblerait une complication inutile.

D. Nous ferons donc dans cet exposé l'hypothèse suivante :

Nous supposerons l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt}\, F(s, t)\, ds\, dt$$

absolument convergente pour un couple de valeur (p_0, q_0).

On en déduit qu'il existera une constante M telle que

$$p_0 q_0 \int_0^l \int_0^m e^{-ps-qt}\, |F(s, t)|\, ds\, dt < M,$$

pour tout l et m positifs.

Nous verrons qu'on peut alors obtenir l'image $f(p, q)$ en prenant successivement l'image en x puis en y, à condition que l'image intermédiaire existe.

Une difficulté subsistera cependant; on ne pourra pas affirmer que l'existence de $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} F(x, y, \alpha)$ implique celle de $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(p, q, \alpha)$. On pourra seulement, si on a constaté l'existence des deux limites, affirmer que la seconde est l'image de la première.

6. Linéarité de la transformation. — Si l'on a

$$f_i(p, q) \subset F_i(x, y) \qquad (i = 1, 2)$$

on aura avec des constantes C_i quelconques

$$C_1 f_1(p, q) + C_2 f_2(p, q) \subset C_1 F_1(x, y) + C_2 F_2(x, y).$$

On peut ajouter des égalités symbolique en nombre fini, et les multiplier par des constantes. On est conduit à penser qu'il en résulte qu'on peut intégrer ou différencier par rapport à un paramètre une égalité symbolique; ou encore, ajoutant les égalités symboliques correspondant à chaque terme d'une série convergente, prendre son image terme à terme. Pour les raisons que nous avons indiquées il n'en est pas ainsi dans le cas général.

Mais nous avons supposé qu'on pouvait prendre successivement les images en x puis en y; les conditions connues pour le CS_1 permettront de préciser pour le CS_2 des conditions suffisantes.

A. *Intégration par rapport à un paramètre.* — Le problème est facile ici avec nos hypothèses.

Soit $F(x, y, \alpha) \supset f_1(p, y, \alpha) \supset f(p, q, \alpha)$ en explicitant l'image intermédiaire. Il suffit d'appliquer aux deux égalités symboliques les résultats que nous avons établis pour le CS_1 [48] pour conclure.

On peut intégrer dans l'intervalle $a < \alpha < b$ l'égalité symbolique

$$f(p, q, \alpha) \subset F(x, y, \alpha),$$

si l'intégrale $\int_a^b |F(x, y, \alpha)|\, d\alpha$ existe et a une image en (x, y).

B. *Dérivation par rapport à un paramètre.* — Un raisonnement analogue vaudra pour la dérivation par rapport à α de la même égalité symbolique.

Il suffira qu'on puisse trouver une fonction positive $H(x, y)$ ayant une image, et telle que

$$\left|\frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha}\right| < H(x, y)$$

au moins pour x et y assez grands. On emploiera avantageusement pour $H(x, y)$ une exponentielle $A e^{mx+ny}$ qui existe évidemment si $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ a une image répondant à nos hypothèses de (5, D).

C. *Image terme à terme d'une série.* — Prendre l'image terme à terme, revient à une intégration terme à terme. Il faut donc évidemment la convergence uniforme de la série. *A priori*, elle ne suffit pas puisqu'on intègre dans un champ infini.

α. Un théorème de Hardy montre qu'elle suffit pour les séries entières. « Si la série $y = \sum A_r x^r$ converge dans tout le plan, on peut l'intégrer terme à terme après multiplication par e^{-px} » [38]. Le théorème reste valide en CS_2.

β. Plus généralement :

1° Si la série $\sum_m \sum_n u_{m,n}(x, y)$ converge uniformément pour tout x et y finis;

2° Si chaque $|u_{m,n}(x, y)|$ a une image convergente dans un demi-plan fixe $p > p_0$, $q > q_0$;

3° Et si la série $\sum_m \sum_n \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p_0 s - q_0 t} \, |u_{m,n}(s, t)| \, ds \, dt$ converge, on peut intégrer et donc prendre l'image terme à terme dans ce même demi-plan.

γ. Pour la transformation inverse, on peut étendre à deux variables un résultat de Doetsch [24, p. 305].

1° Si la série $f(p, q) = \sum_m \sum_n f_{m,n}(p, q)$ converge absolument;

2° Si les originaux $F_{m,n}(x, y) \supset f_{m,n}(p, q)$ sont tels que la série $\sum_m \sum_n \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p_0 s - q_0 t} \, |F_{m,n}(s, t)| \, ds \, dt$ converge uniformément. Alors la série des originaux $\sum_m \sum_n F_{m,n}(x, y)$ converge presque partout vers une fonction $F(x, y)$ qui est l'original de $f(p, q)$.

7. Existence de l'image. Théorème d'Amerio. — Nous partons d'une fonction $F(x, y)$ de variable réelle, absolument intégrable dans tout domaine fini

$$0 < x < X, \qquad 0 < y < Y$$

et telle qu'il existe un couple de valeurs (p_0, q_0) réelles ou non, rendant convergente l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p_0 s - q_0 t} \,|\, \mathrm{F}(s,\, t) \,|\, ds\, dt.$$

Dans ces conditions :

1° La transformée de Laplace de $\mathrm{F}(x, y)$ existe pour tout couple (p, q) tel que

$$\mathcal{R}p > \mathcal{R}p_0, \qquad \mathcal{R}q > \mathcal{R}q_0,$$

$\mathcal{R}$ désignant comme d'usage la partie réelle;

2° Elle est uniformément convergente si $\mathcal{R}p$ et $\mathcal{R}q$ tendent vers l'infini;

3° La transformée a des dérivées en p et q de tous les ordres; on peut dériver sous le signe $\int$. Dans les demi-plans

$$\mathcal{R}p > \mathcal{R}p_0, \qquad \mathcal{R}q > \mathcal{R}q_0,$$

cette transformée est une fonction analytique;

4° On peut remplacer l'intégrale double par une intégrale itérée, c'est-à-dire que pour avoir l'image $f(p, q)$ on peut calculer d'abord l'image en x (où y joue le rôle de paramètre)

$$\mathrm{F}(x, y) \supset \mathrm{F}_1(p, y),$$

puis l'image de F_1 par rapport à y, p à son tour étant un paramètre

$$\mathrm{F}_1(p, y) \supset f(p, q).$$

On pourrait aussi opérer dans l'ordre inverse.

Comme nous l'avons souligné, la quatrième partie du théorème suppose l'existence de l'image intermédiaire $\mathrm{F}_1(p, y)$. L'emploi de l'intégrale de Lebesgue permettrait justement d'affirmer cette existence.

Le principe de la démonstration est évident puisqu'on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt}\, \mathrm{F}(s,\, t)\, ds\, dt \right| \\
&\quad \leqq \int_0^\infty \int_0^\infty |\, e^{-(p-p_0)s-(q-q_0)t} \,|\, |\, e^{-p_0 s - q_0 t}\, \mathrm{F}(s,\, t) \,|\, ds\, dt \\
&\quad \leqq \int_0^\infty \int_0^\infty |\, e^{-p_0 s - q_0 t}\, \mathrm{F}(s,\, t)\, ds\, dt \,|.
\end{aligned}$$

Mais le détail est long; et nous renverrons le lecteur à Amerio (17) à qui est dû le théorème.

8. Domaine de convergence. — On aura donc une ou plusieurs paires (p_0, q_0) d'abscisses associées, telles que l'intégrale converge dans les demi-plans $\mathcal{R}p > \mathcal{R}p_0$, $\mathcal{R}q > \mathcal{R}q_0$ comme, pour une série double, on a des paires de rayons de convergence associées.

Bornons-nous pour l'instant aux valeurs réelles de (p, q), ce qui

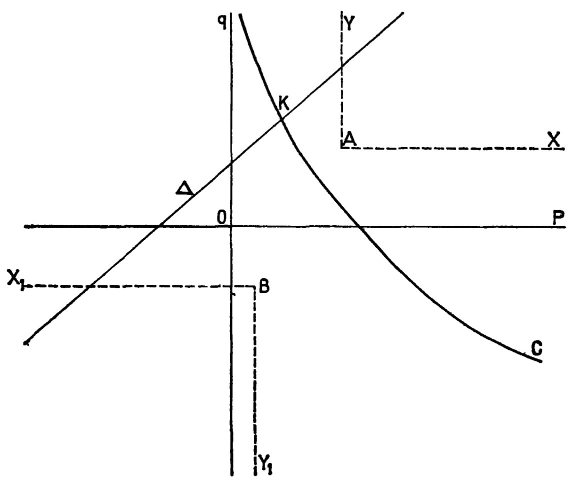

Fig. 1.

ne sera pas une restriction d'après les inégalités ci-dessus, et nous permettra de considérer (p, q) comme les coordonnées d'un point d'un plan rapporté aux axes poq.

S'il y a convergence en un point $A(p_0, q_0)$ de ce plan, il y aura convergence dans tout le quadrant XAY.

S'il y a divergence en B, il y a divergence dans tout le quadrant X_1BY_1.

Sur une droite Δ faisant avec OP un angle aigu, par exemple une parallèle à la première bissectrice, il y aura des points de convergence et des points de divergence puisque Δ pénètre dans les deux quadrants XAY et X_1BY_1. Et comme tout point à droite d'un point de convergence est lui-même point de convergence, et tout point à gauche d'un point de divergence est aussi point de divergence, il existera un point K séparant une demi-droite de convergence et une demi-droite de divergence sur Δ.

Si Δ varie en restant parallèle à elle-même, K décrira une courbe C continue, non croissante, séparant les couples (p, q) de convergence des couples (p, q) de divergence. Pour les points de la courbe il y aura doute [*voir* 17, 18, 20].

Pour prendre un exemple simple prenons l'image donnée par Humbert

$$I_0(2\sqrt{xy}) \subset \frac{pq}{pq-1}.$$

La courbe limite est l'hyperbole $pq = 1$ sur laquelle il y a divergence.

9. **Allure à l'infini.** — Le comportement à l'infini de $f(p, q)$ dans son domaine de convergence est important à considérer.

Si la transformée de Laplace

$$\varphi(p, q) = \mathcal{L}[F(x, y)]$$

existe en (p_0, q_0), on peut trouver une constante M telle que l'on ait

$$\int_0^X \int_0^Y e^{-pu-qv} F(u, v)\, du\, dv < M$$

pour tout X et Y finis, pourvu que p et q restent respectivement dans les angles

$$\mathcal{R}(p-p_0) > |p-p_0| \cos\theta,$$
$$\mathcal{R}(q-q_0) > |q-q_0| \cos\theta;$$

où θ est un angle aigu quelconque [17].

On en déduit que $\dfrac{f(p, q)}{pq} \to 0$ si p ou q s'éloignent à l'infini dans ces angles et que $f(p, q) \to f(p_0, q_0)$ si $(p, q) \to (p_0, q_0)$ en restant dans les mêmes angles.

Ceci est l'analogue en CS_2 du théorème d'Abel sur la limite d'une série entière quand la variable tend vers un point du cercle de convergence.

10. **Existence de l'original.** — Une fonction arbitraire $f(p, q)$ n'est pas une image; les conditions suffisantes ne sont pas aisées à préciser; mais on peut facilement, sur la base des théorèmes précédents, énoncer des conditions nécessaires.

α. Par exemple une image est holomorphe dans un couple de demi-plans associés

$$\mathcal{R}p > \mathcal{R}p_0, \qquad \mathcal{R}q > \mathcal{R}q_0.$$

Il s'ensuit que $\frac{1}{p^2+q^2}$ n'est pas une image car il existe des points $p = a$, $q = ai$ à partie réelle aussi grande que l'on voudra, où la fonction est infinie.

β. $\frac{f(p, q)}{pq}$ doit tendre vers zéro si p et q tendent vers l'infini par valeurs réelles positives par exemple.

Et par conséquent $\frac{p^2q^2}{p+q}$, $pq\,\mathrm{Log}(p+q)$ ne sont pas des images.

Lerch a démontré aussi que $f(p)$ ne peut avoir une infinité de racines en progression arithmétique dont la raison aurait une partie réelle non nulle [40].

Plus généralement $f(p)$ ne peut avoir une infinité de racines λ_n telles que la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ diverge (43). Les fonctions $\sin p$, $\sin p^2$, ne sont donc pas des images. Mais $\sin\sqrt{p}$ peut en être une.

Ici encore on peut passer à deux variables, toujours par le même procédé. On en déduit le résultat curieux qu'il suffit de connaître l'image $f(p, q)$ aux points d'une double progression arithmétique

$$p = p_0 + am, \qquad q = q_0 + bn$$

avec m et n entiers positifs arbitraires, a et b constantes réelles positives données, pour que $f(p, q)$ [et donc $F(x, y)$ avec les restrictions ci-dessus] soit univoquement déterminé. Nous verrons effectivement comment connaissant ces seules valeurs $f(p_0 + am, q_0 + bn)$ on peut calculer $F(x, y)$.

11. Unicité de l'original. — A une fonction ne correspond qu'une image. Il est évident que la réciproque est inexacte, et qu'à une image donnée correspondent une infinité de fonctions. Puisqu'en effet $F(x, y)$ n'intervient que par son intégrale dans la recherche de $f(p, q)$, on peut la remplacer par une fonction équivalente sans changer l'image comme nous l'avons expliqué au n° 5.

En CS_1, Lerch a démontré qu'à un $f(p)$ donné correspond un seul original $F(x)$ *continu*. D'une façon plus précise, si l'on avait

$$F(x) \supset f(p), \qquad H(x) \supset f(p),$$

la différence $[F(x) - H(x)]$ qui a pour image zéro, serait nulle en tous points où elle est continue. Le théorème s'étend immédiatement à deux variables en passant par les images intermédiaires à une variable.

Ce théorème d'unicité suffit pour la pratique; on rencontre bien en technique des fonctions discontinues, mais elles sont continues dans une suite d'intervalles fermés, et égales à la dérivée de leur intégrale : ce qui exclut les valeurs artificielles qui feraient considérer comme différentes deux fonctions égales en tous leurs points de continuité.

12. Formules d'inversion. — Le calcul de l'original quand on connaît l'image est ordinairement difficile; il n'y a même à vrai dire aucun procédé universellement pratique.

Il y a d'abord des tables d'images [20, 22]. A défaut on peut généraliser les méthodes d'inversion du CS_1 en utilisant l'image intermédiaire en x (ou y) et en procédant en deux étapes. Avec les formulaires d'images du CS_1 ce procédé donne déjà un grand nombre d'originaux. Voici les principales méthodes :

α. Inversion complexe.

On sait que si

$$\varphi(p) = \mathcal{L}[F(t)]$$

on a

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\varphi(p)\,dp.$$

On le déduit immédiatement du théorème d'inversion pour la transformée de Fourier. Le chemin d'intégration est une parallèle à l'axe imaginaire, d'abscisse a, et telle que $\varphi(p)$ soit holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{R}p \geqq a$.

Semblablement à deux variables de :

$$\varphi(p, q) = \mathcal{L}[F(x, y)]$$

on obtiendra

$$F(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{px+py}\,\varphi(p, q)\,dp\,dq,$$

a et b sont deux constantes réelles limitant deux demi-plans associés d'holomorphie de $\varphi(p, q)$. Mais en réalité l'intégrale complexe ci-dessus inverse la transformation bilatérale de Laplace

$$\varphi(p, q)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ps-qt}\mathrm{F}(s, t)\,ds\,dt,$$

et non pas, comme nous le voulions, la transformation simple

$$\varphi(p, q)=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-ps-qt}\mathrm{F}(s, t)\,ds\,dt.$$

Elle ne résout par conséquent notre problème que si $\mathrm{F}(x, y)$ calculé par cette formule, en résulte nul pour x ou $y < 0$. Les conditions nécessaires pour cela ne sont pas connues [17]. A une variable McLachlan a donné des conditions suffisantes qu'il a déduites de la transformation de Mellin [3], [32], Doetsch [24].

On les appliquera au CS_2 en prenant successivement l'original en p, puis en q. Il ne faudrait pas croire que les remarques faites enlèvent tout intérêt à la formule d'inversion complexe; si l'on part d'une fonction $\varphi(p, q)$ arbitraire, elle ne donnera qu'exceptionnellement un original; mais si l'on part d'une fonction $\varphi(p, q)$ dont on sait qu'elle est une transformée de Laplace, la formule permettra souvent de l'obtenir.

β. Méthode de Widder.

On généralise facilement à deux variables le procédé de Widder [37]. Soit

$$\varphi(p, q)=\mathcal{L}[\mathrm{F}(x, y)]$$

et

$$\varphi_{m,n}(p, q)=\frac{\partial^{m+n}\varphi(p, q)}{\partial p^m\,\partial q^n}.$$

On a

$$\mathrm{F}(x, y)=\lim_{m,n\to\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m\,!\,n\,!}\left(\frac{m}{x}\right)^{m+1}\left(\frac{n}{y}\right)^{n+1}\varphi_{m,n}\left(\frac{m}{x}, \frac{n}{y}\right).$$

γ. Méthode de Phragmen [17], [35].

On a de même, si $\mathrm{F}(x, y)\supset f(p, q)$,

$$\mathrm{F}(x, y)=\lim_{p,q\to\infty}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m\,!\,n\,!}e^{mpx+nqy}f(mp, nq).$$

δ. Méthodes de Tricomi ou Picone.

Les procédés précédents malgré leur intérêt théorique, ne sont guère utilisables en pratique. Si l'on n'a pas de tables d'images, il vaudra mieux essayer un développement en série, et prendre l'original terme à terme [34].

On pourra employer dans certains cas, un développement en série entière

$$f(p, q) = \sum_r \sum_s \frac{A_{rs}}{p^r q^s} \subset \sum_r \sum_s A_{rs} \frac{x^r}{\Gamma(r+1)} \frac{y^s}{\Gamma(s+1)},$$

(r et s pourraient d'ailleurs aussi prendre des valeurs non entières).

Les géomètres italiens, Tricomi, Picone, ont proposé des développements en série de polynomes de Laguerre ou de Legendre [36, 39], Amerio [17] a montré qu'on peut étendre au CS_2. Donnons une méthode un peu plus générale, valable formellement pour toute suite de polynomes orthogonaux, et facile à justifier en toute rigueur s'il s'agit de fonctions à carré sommable. Les avantages d'un pareil procédé d'inversion ont été bien mis en lumière par Picone. Le développement en série permet le calcul effectif, numérique, de l'original et l'on a obtenu d'importantes applications dans les problèmes pratiques de propagation de chaleur.

On peut souligner aussi un résultat théorique. Nous avons vu (n° 10) qu'une transformée de Laplace $\varphi(p, q)$ est individuée par ses valeurs aux points de deux suites p_m et q_n en progression arithmétique. Le procédé exposé supposera seulement que l'on connaît

$$\varphi_{ij}[p_0 + (i+1)a, \quad q_0 + (j+1)b]$$

où a et b sont deux constantes réelles, positives, données et i et j parcourent chacun la suite des entiers ≥ 0.

Soit une suite infinie de polynomes $L_n(x)$, orthonormés avec une fonction-poids donnée $\Phi(x)$, dans un intervalle qu'un changement de variables nous permet de ramener à $0 < x < 1$.

Cela veut dire que nous aurons

$$\int_0^1 \Phi(s) L_m(s) L_n(s)\, ds = 0 \quad \text{si } m \neq n \qquad \text{et} \quad = 1 \quad \text{si } m = n.$$

Nous appellerons l_{nj} les coefficients de

$$(1) \qquad L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_{nj} x^j,$$

alors si l'on suppose possible le développement d'une fonction donnée $F_1(x, y)$ selon les polynomes L_n

$$F_1(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} L_m(x) L_n(y),$$

on aura

$$A_{m,n} = \int_0^1 \int_0^1 \Phi(x) L_m(x) \Phi(y) L_m(y) F_1(x, y)\, dx\, dy.$$

Posons

$$x = e^{-as}, \qquad y = e^{-bt}$$

d'où

$$A_{m,n} = ab \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi(e^{-ns}) \Phi(e^{-bt}) L_m(e^{-as}) L_n(e^{-bt}) F_1(e^{-as}, e^{-bt}) \times e^{-as-bt}\, ds\, dt,$$

et remplaçant les polynomes par leur valeur (1)

$$\text{(2)} \qquad A_{m,n} = ab \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} l_{ni} l_{mj} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi(e^{-as}) \Phi(e^{-bt}) \times e^{-as(i+1)-bt(j+1)} F_1(e^{-as}, e^{-bt})\, ds\, dt.$$

Or nous avons supposé connue la transformée

$$\text{(3)} \qquad \varphi_{ij} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-[p_0 + a(i+1)]s - [q_0 + b(j+1)]t} F(s, t)\, ds\, dt$$

et les deux intégrales (2) et (3) s'identifient si l'on prend F_1 tel que

$$e^{-p_0 s - q_0 t} F(s, t) = \Phi(e^{-as}) \Phi(e^{-bt}) F_1(e^{-as}, e^{-bt});$$

alors on connaîtra

$$A_{mn} = ab \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} l_{mi} l_{nj} \varphi_{ij},$$

puis

$$F_1(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} L_m(x) L_n(y)$$

et enfin, remettant x et y pour s et t

$$\text{(4)} \quad F(x, y) = e^{p_0 x + q_0 y} \Phi(e^{-ax}) \Phi(e^{-by}) \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} L_m(e^{-ax}) L_n(e^{-by}).$$

Des conditions suffisantes pour la validité de ce calcul sont aisées à énoncer. On a fait un développement en série double de fonctions orthogonales, et l'on pourrait d'ailleurs développer successivement en x puis en y. Si l'on suppose $F(x, y)$ à carré intégrable dans le domaine $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, on est assuré de la convergence de $\Sigma\Sigma A_{mn}^2$ et la série (4) convergera en moyenne vers l'original $F(x, y)$ cherché.

CHAPITRE II.

FORMULES OPÉRATOIRES. — 1° GROUPE.

Les formules opératoires en CS_2 sont extrêmement nombreuses. On en trouvera une très longue liste dans le livre de Doetsch-Voelker [20]. Nous nous bornerons aux plus essentielles, et exposerons d'abord, dans ce chapitre, un premier groupe qui généralise à deux variables, les principales formules du CS_1.

Le théorème fondamental permet, en effet, par l'emploi de l'image intermédiaire, d'étendre au CS_2 la plupart des règles opératoires du Formulaire de M. Humbert et McLachlan [26] et [27], ou des tables de Doetsch [28]. Cette extension est immédiate, et nous omettrons ordinairement les démonstrations. Nous rappelons que $F(x, y)$ ou $F_i(x, y)$ désignant les originaux, $f(p, q)$ ou $f_i(p, q)$ représentera les images respectives en transformation de Carson.

1. **Règle de similitude.** — $f\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right) \subset F(ax, by)$, où a et b sont des nombres positifs. Il faut se souvenir ici que $F(x, y)$ est une fonction de variables réelles; on ne l'a utilisée, on ne l'a même supposée définie, que pour x et y positifs. Il est alors évident que l'image ne peut nous donner en général aucun renseignement sur les valeurs de F pour a (ou b) négatifs ou complexes.

On a pourtant, par calcul direct, l'image

$$\frac{(ax)^n}{\Gamma(1+n)} \frac{(by)^m}{\Gamma(1+m)} \supset \frac{a^n}{p^n} \frac{b^m}{q^m}$$

qui est valable quels que soient a et b (réels ou complexes).

Si donc on suppose $F(x, y)$ analytique, on pourra la développer en série entière, et appliquant terme à terme, lorsque c'est légitime, l'image (1), on en déduira

$$F(ax, by) \supset f\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right)$$

pour toutes valeurs de a et b.

2. **Intégration de la fonction.** — Si $F(x, y)$ a une image ses intégrales d'ordre quelconque par rapport à x et à y en ont une aussi et l'on a

$$\int_0^x F(s, y)\, ds \supset \frac{1}{p} f(p, q),$$

$$\int_0^x \int_0^y F(s, t)\, ds\, dt \supset \frac{1}{pq} f(p, q),$$

....

3. **Dérivation.** — Par contre on n'est pas assuré que les dérivées de $F(x, y)$ aient une image. Il suffit de penser à la fonction $F = \operatorname{Log} x$ dont la dérivée $\frac{1}{x}$ rend divergente l'intégrale de Laplace.

A. Si les dérivées ont une image on l'obtiendra par les mêmes règles qu'en CS_1. Le calcul est seulement plus compliqué parce qu'il faut davantage de valeurs initiales.

Si $F(0, y) = 0$, on aura simplement

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \supset p f(p, q).$$

Sinon, soit

$$F(0, y) = F_1(y) \supset f_1(q),$$

on écrira

$$F(x, y) - F_1(y) \supset f(p, q) - f_1(q)$$

et en dérivant le premier membre qui est nul pour $x = 0$ par rapport à x

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \supset p[f(p, q) - f_1(q)].$$

Semblablement si

$$F(x, 0) = F_2(x) \supset f_2(p),$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \supset q[f(p, q) - f_2(p)].$$

On peut continuer de façon analogue. Par exemple

$$F(x, y) - F_1(y) - F_2(x) + F(0, 0) \supset f(p, q) - f_1(q) - f_2(p) + F(0, 0).$$

Dérivant en x

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - \frac{dF_2(x)}{dx} \supset p[f(p, q) - f_1(q) - f_2(p) + F(0, 0)],$$

puis en y

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \, \partial y} \supset pq[f(p, q) - f_1(q) - f_2(p) + F(0, 0)].$$

B. Le calcul est parfois plus simple, car il y a des formules indépendantes des valeurs initiales. On peut dériver en a ou b, et un nombre quelconque de fois, la règle de similitude

$$F(ax, by) \supset f\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right).$$

En faisant après la dérivation

$$a = b = 1,$$

il vient par exemple

$$x \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \supset -p \frac{\partial f(p, q)}{\partial p},$$

$$xy \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \, \partial y} \supset pq \frac{\partial^2 f(p, q)}{\partial p \, \partial q}.$$

....

Cette règle suppose $F(x, y)$ dérivable dans tout son domaine d'existence, si l'on ne veut pas voir s'introduire des fonctions de Dirac. Ces formules sont susceptibles de généralisations nombreuses; citons seulement, ne les ayant pas vues signalées en CS_1,

$$(1) \qquad x^n y^m \frac{\partial^{m+n} F(x, y)}{\partial x^n \, \partial y^m} \supset (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial p^{n-1} \, \partial q^{m-1}} \left[p^n q^m \frac{\partial^2 f(p, q)}{\partial p \, \partial q} \right],$$

$$(2) \qquad x^r y^s \frac{\partial^{m+n} F(x, y)}{\partial x^n \, \partial y^m} \supset (-1)^{r+s} pq \frac{\partial^{r+s}}{\partial p^r \, \partial q^s} [p^{n-1} q^{m-1} f(p, q)],$$

avec $r \geqq m$ et $s \geqq n$ et r, s, m, n entiers positifs

$$(3) \qquad \frac{\partial^{r+s-2}}{\partial x^{r-1} \, \partial y^{s-1}} \left[x^n y^m \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \, \partial y} \right] \supset (-1)^{m+n} p^r q^s \frac{\partial^{m+n} f(p, q)}{\partial p^n \, \partial q^m}$$

ici il faut $m \geqq r$, $n \geqq s$ et (r, s, m, n) entiers positifs. Cette dernière formule donnerait en CS_1 avec $r = s = 1$

$$x^n \frac{dF(x)}{dx} \supset (-1)^n \frac{d^n f(p)}{dp^n},$$

(corriger l'erreur d'impression du Supplément du Formulaire [27, p. 14)].

Les démonstrations se font par récurrence sur l'exposant en appliquant les relations

$$x \frac{\partial F}{\partial x} \supset -p \frac{\partial f}{\partial p} \quad \text{ou} \quad y \frac{\partial F}{\partial y} \supset -q \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Les formules ainsi obtenues jouent un grand rôle dans la résolution des équations différentielles ou aux dérivées partielles, à coefficients polynomes.

4. **Multiplication de l'original par une exponentielle.** — Si $F(x, y)$ a une image, $e^{-ax-by}F(x, y)$ en aura une aussi quelles que soient les constantes a et b, réelles ou non. Et l'on aura

$$\frac{p}{p+a} \frac{q}{q+b} f(p+a, q+b) \subset e^{-ax-by} F(x, y).$$

5. « **Shifting theorem** ». — Par contre l'original de $e^{-ap-bq} f(p, q)$ n'existera en général que pour les valeurs réelles et positives des constantes a et b

$$e^{-ap-bq} f(p, q) \subset \begin{cases} 0 \quad \text{si } x < a \quad \text{ou} \quad y < b, \\ F(x-a, y-b) \quad \text{si } x > a, y > b. \end{cases}$$

Dans le cas seulement où $F(x, y)$ serait identiquement nul pour $0 < x < m$ ou $0 < y < n$ l'image de $e^{ap+bq} f(p, q)$ existerait pour $a \leqq m$, $b \leqq n$ et serait la fonction $F(x+a, y+b)$.

6. **Image de $x^\alpha y^\beta F(x, y)$.** — Si $F(x, y)$ a une image, on est assuré que pour α et β positifs $x^\alpha y^\beta F(x, y)$ en aura une aussi.

Pour α et β entiers elle est donnée par

$$x^\alpha y^\beta F(x, y) \supset (-1)^{\alpha+\beta} pq \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial p^\alpha \partial q^\beta} \left[\frac{f(p, q)}{pq}\right].$$

Par contre on n'est pas certain de l'existence de l'image si α ou β sont négatifs.

Soient $\alpha = -\mu$, $\beta = -\nu$ avec μ et ν positifs ; si l'image existe, elle est donnée par

$$\frac{F(x, y)}{x^{\mu} y^{\nu}} \supset \frac{pq}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_p^{\infty} \int_q^{\infty} \frac{(u-p)^{\mu-1}(v-q)^{\nu-1}}{uv} f(u, v)\, du\, dv,$$

comme nous le démontrerons plus loin avec la règle du nouveau produit. On reconnaît une forme de l'intégrale pour définir les dérivées fractionnaires dont J. Maître a longuement discuté les rapports avec le CS_1 [29].

Si l'on voulait obtenir l'image de $x^{\alpha} y^{\beta} F(x, y)$ avec α et β non entiers, on chercherait d'abord l'image de $x^a y^b F(x, y)$ en appelant a et b les entiers immédiatement supérieurs à α et β. On diviserait alors par $x^{a-\alpha} y^{b-\beta}$ en appliquant la formule ci-dessus.

7. Formule de Parseval. — Soit

$$f_1(p, q) \subset F_1(x, y),$$
$$f_2(p, q) \subset F_2(x, y).$$

Considérons l'intégrale

$$(1) \qquad I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_1(u, v) F_2(u, v) \frac{du}{u} \frac{dv}{v}.$$

En remplaçant $f_1(u, v)$ par sa valeur $uv \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-us-vt} F_1(s, t)\, ds\, dt$, on a

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F_2(u, v)\, du\, dv \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-us-vt} F_1(s, t)\, ds\, dt.$$

Si on intervertit l'ordre des intégrations

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F_1(s, t)\, ds\, dt \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-us-vt} F_2(u, v)\, du\, dv$$

ou

$$(2) \qquad I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F_1(s, t) f_2(s, t) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}.$$

L'égalité des intégrales (1) et (2) constitue le théorème de Parseval. Sa validité suppose qu'il était légitime d'intervertir les intégrations, ce qu'on ne peut affirmer ici d'une manière générale. En pratique on pourra appliquer cette formule si l'on peut démontrer la convergence absolue et uniforme de l'une des intégrales (1) ou (2).

8. Produit de composition. — Volterra a défini le produit de composition [54]

$$F_1(x, y) \bigstar\bigstar F_2(x, y) = \int_0^x \int_0^y F_1(u, v) F_2(x-u, y-v)\, du\, dv$$

et l'on a

$$F_1(x, y) \bigstar\bigstar F_2(x, y) \supset \frac{1}{pq} f_1(p, q) f_2(p, q).$$

Nous avons mis un double astérisque pour distinguer de

$$F_1(x, y) \overset{x}{\bigstar} F_2(x, y) = \int_0^x F_1(u, y) F_2(x-u, y)\, du$$

ou de la composition analogue par rapport à y. La démonstration se fait comme en CS_1.

Si les images de F_1 et F_2 convergent absolument en un point (p_0, q_0), l'image de leur produit de composition converge aussi absolument en ce même point.

Amerio a démontré un théorème un peu plus général; la convergence absolue du produit n'exige que la convergence absolue de F_1 et la convergence simple de F_2 [17].

9. Théorème du nouveau produit. — La même démonstration que dans le cas du CS_1 donne

$$\int_0^x \int_0^y F_1(s, t) f_2(s, t) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \supset \int_p^\infty \frac{du}{u} \int_q^\infty F_2(u-p, v-q) f_1(u, v) \frac{dv}{v}$$

et

$$\frac{F_1(x, y) f_2(x, y)}{xy} \supset pq \int_p^\infty \frac{du}{u} \int_q^\infty F_2(u-p, v-q) f_1(u, v) \frac{dv}{v}$$

qui généralisent la formule de Parseval, et dont l'analogie avec le théorème du produit est manifeste [30]. En prenant par exemple

$$F_2(x, y) = \frac{x^\mu y^\nu}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \supset \frac{1}{p^\mu q^\nu}$$

on aura la règle annoncée au n° 6 ci-dessus.

$$\frac{F(x, y)}{x^{\mu+1} y^{\nu+1}} \supset \frac{pq}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \int_p^\infty \frac{du}{u} \int_q^\infty (u-p)^\mu (v-q)^\nu f_1(u, v) \frac{dv}{v}.$$

10. Généralisation d'une formule de Van der Pol. — La règle (2) nous a donné

$$F(ax, by) \supset f\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right).$$

Multiplions les deux membres par une fonction quelconque : $g(a, b)\, da\, db$ et intégrons dans le carré de côtés $0 < a < 1$, $0 < b < 1$

$$\int_0^1 \int_0^1 F(ax, by)\, g(a, b) \frac{da}{a} \frac{db}{b} \supset \int_0^1 \int_0^1 f\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right) g(a, b) \frac{da}{a} \frac{db}{b}.$$

Posons dans la première intégrale

$$ax = s, \qquad by = t,$$

et dans la seconde

$$a = \frac{p}{u}, \qquad b = \frac{q}{v}.$$

Il vient

$$\int_0^x \int_0^y F(s, t)\, g\left(\frac{s}{x}, \frac{t}{y}\right) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \supset \int_p^\infty \int_q^\infty f(u, v)\, g\left(\frac{p}{u}, \frac{q}{v}\right) \frac{du}{u} \frac{dv}{v}.$$

Cette formule donne beaucoup d'images nouvelles.

Le cas $g(a, b) = 1$ est dû à Van der Pol [31].

Pour $g(a, b) = a^{-\mu} b^{-\nu}$ nous aurons

$$x^\mu y^\nu \int_0^x \int_0^y F(s, t) \frac{ds}{s^{\mu+1}} \frac{dt}{t^{\nu+1}} \supset \frac{1}{p^\mu q^\nu} \int_p^\infty \int_q^\infty f(u, v)\, u^{\mu-1} v^{\nu-1}\, du\, dv.$$

La même formule (1) multipliée par $g(a, b) \dfrac{da}{a} \dfrac{db}{b}$ et intégrée de 1 à l'infini, donne avec les mêmes changements de variable

$$\int_x^\infty \int_y^\infty F(s, t)\, g\left(\frac{s}{x}, \frac{t}{y}\right) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \supset \int_0^p \int_0^q f(u, v)\, g\left(\frac{p}{u}, \frac{p}{v}\right) \frac{du}{u} \frac{dv}{v}$$

avec le même cas particulier

$$x^\mu y^\nu \int_0^\infty \int_0^\infty F(s, t) \frac{ds}{s^{\mu+1}} \frac{dt}{t^{\nu+1}} \supset \frac{1}{p^\mu q^\nu} \int_0^p \int_0^q f(u, v)\, u^{\mu-1} v^{\nu-1}\, du\, dv.$$

Enfin on aurait pu intégrer de 0 à l'infini pour obtenir

$$\int_0^\infty \int_0^\infty F(s, t)\, g\left(\frac{s}{x}, \frac{t}{y}\right) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \supset \int_0^\infty \int_0^\infty f(u, v)\, g\left(\frac{p}{u}, \frac{q}{v}\right) \frac{du}{u} \frac{dv}{v}.$$

Par exemple avec

$$g(a, b) = \frac{ab}{(a^2+1)(b^2+1)},$$

$$xy\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{F(s, t)}{(s^2+x^2)(t^2+y^2)}, \qquad ds\,dt \supset pq\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(u, v)\,du\,dv}{(u^2+p^2)(v^2+q^2)}.$$

Ce calcul équivalent à un changement de l'ordre d'intégration suppose l'existence des intégrales obtenues [45].

11. **Itération de la transformation de Laplace.** — On sait qu'une intégrale, considérée par Stieltjes, permet en CS_1 d'itérer la transformation de Laplace. Il est facile de généraliser en CS_2.

Soit

$$f(p, q) \supset F(x, y)$$

et

$$\frac{1}{p^\alpha q^\beta} F(p, q) \supset g(x, y),$$

on aura

$$\frac{F(p, q)}{p^\alpha q^\beta} = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ps-qt}\, g(s, t)\, ds\, dt,$$

d'où

$$F(x, y) = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-xs} y^{\beta+1} e^{-yt}\, g(s, t)\, ds\, dt.$$

Or

$$x^{\alpha+1} e^{-xs} \supset p\frac{\Gamma(\alpha+2)}{(p+s)^{\alpha+2}}$$

et

$$y^{\beta+1} e^{-yt} \supset q\frac{\Gamma(\beta+2)}{(q+t)^{\beta+2}}.$$

D'où en prenant les images (α et $\beta > -2$)

$$f(p, q) = \Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)pq\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{g(s, t)\, ds\, dt}{(p+s)^{\alpha+2}(q+t)^{\beta+2}}.$$

On obtient l'intégrale même de Stieltjes si l'on prend les transformées de Laplace au lieu de Carson; et $\alpha = \beta = -1$.

De

$$\varphi(p, q) = \mathcal{L}[F(x, y)]$$

et

$$F(p, q) = \mathcal{L}[g(x, y)]$$

on tire

$$\varphi(p, q) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{g(s, t)\, ds\, dt}{(p+s)(q+t)}.$$

12. **Formule de M. Humbert.** — Il suffit de remplacer dans l'intégrale de définition, p et q respectivement par $\operatorname{Log} p$ et $\operatorname{Log} q$, pour étendre au CS_2 la formule de M. Humbert [46]

$$\frac{f(\operatorname{Log} p, \operatorname{Log} q)}{\operatorname{Log} p \operatorname{Log} q} \subset \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^s y^t \mathrm{F}(s, t)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+t)} ds\, dt.$$

Si l'on avait divisé, avant de prendre l'image, par $\operatorname{Log}^2 p \operatorname{Log}^2 q$ on aurait obtenu

$$\frac{f(\operatorname{Log} p, \operatorname{Log} q)}{\operatorname{Log}^2 p \operatorname{Log}^2 q} \subset \int_0^\infty \int_0^\infty \nu(x, s)\, \nu(y, t)\, \mathrm{F}(s, t)\, ds\, dt.$$

Pour la définition de la fonction $\nu(x, s)$ voir le Supplément au Formulaire [27] dont nous suivons les notations et les définitions.

13. **Formules de MM. Parodi et P. Delerue.** — Citons encore les formules de M. Parodi [41].

$$\frac{1}{p^{\alpha-1} q^{\beta-1}} f\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \subset x^{\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\beta}{2}} \int_0^\infty \int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}} t^{\frac{\beta}{2}} \mathrm{J}_\alpha(2\sqrt{xs})\, \mathrm{J}_\beta(2\sqrt{yt})\, \mathrm{F}(s, t)\, ds\, dt$$

et

$$x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$
$$\supset \frac{1}{p^{\frac{\alpha}{2}-1} q^{\frac{\beta}{2}-1}} \int_0^\infty \int_0^\infty s^{\frac{\alpha}{2}-1} t^{\frac{\beta}{2}-1} \mathrm{J}_\alpha(2\sqrt{ps})\, \mathrm{J}_\beta(2\sqrt{qt})\, f(s, t)\, ds\, dt.$$

Elles servent à étudier la réciprocité de Hankel pour les fonctions à deux variables et aussi dans la résolution de certaines équations intégrales [22].

M. Delerue les a considérablement généralisées au moyen des fonctions hyperbesseliennes qui permettent d'obtenir l'original de

$$\frac{1}{p^\alpha q^\beta} f\left(\frac{1}{p^r}, \frac{1}{q^s}\right).$$

Remarque. — On généraliserait ainsi sans difficulté la plupart des règles du CS_1. Nous nous sommes bornés aux plus utiles.

Rappelons qu'il est en général aisé de justifier ces extensions au CS_2 en opérant en deux temps ; il suffit d'appliquer aux images successives en x et y, les discussions classiques pour le CS_1.

CHAPITRE III.

Formules de transformation.

Les formules du chapitre précédent étaient de simples généralisations de celles du CS_1. Nous allons en établir de nouvelles qui, en général, n'ont pas leur analogue à une variable, mais permettent à partir d'images à une variable, de calculer des images à deux.

1. Images de $F(x, y)$, $f\left(\frac{x}{y}\right)$, **et analogues.** — A. Si

$$F(x) \supset f(p) \tag{1}$$

et

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \supset g(p) \tag{2}$$

on aura

$$F(xy) \supset g(pq). \tag{3}$$

En effet la règle de similitude donne, à partir de (1)

$$F(xy) \supset f\left(\frac{p}{y}\right)$$

et prenant, grâce à (2), l'image en y, on obtient (3).

B. Absolument de même

$$F(x) \supset f(p) \quad \text{et} \quad f(x) \supset g(p),$$

donnent

$$F\left(\frac{x}{y}\right) \supset g\left(\frac{q}{p}\right).$$

C. On peut généraliser.

(1) avec

$$x^\alpha f\left(\frac{1}{x}\right) \supset g(p),$$

donne

$$y^\alpha F(xy) \supset p^\alpha g(pq)$$

D. De même : (1) et

$$x^\alpha f(x) \supset g(p)$$

donnera

$$y^\alpha F\left(\frac{x}{y}\right) \supset \frac{1}{p^\alpha} g\left(\frac{q}{p}\right).$$

E. Enfin on aurait de façon analogue l'image de $F(x^\alpha y^\beta)$ ou l'original d'expressions comme $p^\alpha f(p^b q^c)$.

Voici quelques exemples d'images obtenues ainsi.

α. Avec la règle A

$$\frac{\cos 2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \supset \frac{\pi pq}{\sqrt{pq+1}},$$

$$J_0^2(\sqrt{xy}) \subset \sqrt{\frac{pq}{pq+1}},$$

$$J_0(xy) \supset \frac{\pi}{2} pq[H_0(pq) - Y_0(pq)],$$

$$\frac{(xy)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n+1)} J_n(2\sqrt{xy}) \supset \frac{pq}{(pq+1)^{n+1}},$$

$$J_0(2\sqrt{xy})\, I_1(2\sqrt{xy}) \supset \frac{pq[\sqrt{p^2q^2+1} - pq]}{\sqrt{p^2q^2+1}}.$$

β. Avec la règle B.

$$J_1\left(\frac{x}{y}\right) \supset \frac{\pi}{2}\,\frac{q}{p}\left[H_1\left(\frac{q}{p}\right) - Y_1\left(\frac{q}{p}\right) - \frac{2}{\pi}\right],$$

$$J_0\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right) \supset \sqrt{\frac{q}{p}}\, K_1\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right).$$

γ. Avec la règle C.

$$x^{\frac{2m-n}{3}}\, y^{\frac{2n-m}{3}}\, J_{m,n}(3\sqrt[3]{xy}) \supset \frac{e^{-\frac{1}{pq}}}{p^m q^n}.$$

δ. Enfin de

$$\sin x \supset \frac{p}{p^2+1}$$

on déduit

$$y \sin\frac{x}{y^2} \supset \frac{py^3}{p^2y^4+1}$$

et, prenant l'image en y

$$y \sin\frac{x}{y^2} \supset -\frac{q}{p}\, A\left(\frac{q}{\sqrt{p}}, 3, 4\right).$$

Voir [27] ou [44] pour la définition de la fonction A. Et dans [22] une longue liste de telles images.

2. Image de $F(x+y)$. — De $F(x) \supset f(p)$ on tire

$$F(x+y) \supset \frac{p\,f(q) - q\,f(p)}{p-q}.$$

En effet nous cherchons

$$f(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt}\, \mathrm{F}(s+t)\, ds\, dt.$$

C'est une intégrale du type de Dirichlet, qu'on ramène à deux intégrales simples en faisant le changement de variable $s + t = \mathrm{X}$ et laissant t inchangé

$$\begin{aligned} f(p, q) &= pq \int_0^\infty e^{-p\mathrm{X}}\, \mathrm{F}(\mathrm{X})\, d\mathrm{X} \int_0^{\mathrm{X}} e^{(p-q)t}\, dt \\ &= \frac{pq}{p-q} \int_0^\infty (e^{-q\mathrm{X}} - e^{-p\mathrm{X}})\, \mathrm{F}(\mathrm{X})\, d\mathrm{X} = \frac{p f(q) - q f(p)}{p-q}. \end{aligned}$$

Cette formule est de M. P. Humbert [12]. Ajoutons les règles qu'on en déduit aussitôt

$$\mathrm{F}'(x+y) \supset pq \frac{f(q) - f(p)}{p-q},$$

$$\int_0^x \mathrm{F}(s)\, ds + \int_0^y \mathrm{F}(s)\, ds - \int_0^{x+y} \mathrm{F}(s)\, ds \supset \frac{f(p) - f(q)}{p-q}.$$

Exemple. — $\mathrm{J}_0(x) \supset \dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}$ donne

$$\mathrm{J}_0(x+y) \supset \frac{pq}{p-q} \left[\frac{1}{\sqrt{q^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \right].$$

Cette règle sert à trouver de nombreuses formules d'addition et nous en verrons des applications. Indiquons seulement le procédé : on connaît l'image des polynomes de Laguerre

$$\mathrm{L}_n(x) \supset \left(1 - \frac{1}{q}\right)^n.$$

Donc

$$\mathrm{L}'_n(x+y) \supset \frac{pq}{p-q}\left[\left(1-\frac{1}{q}\right)^n - \left(1-\frac{1}{p}\right)^n\right] = -\frac{\left(1-\frac{1}{q}\right)^n - \left(1-\frac{1}{p}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{q}\right) - \left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

$$\supset -\sum_{r=0}^{n-1} \left(1-\frac{1}{p}\right)^r \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-r-1}.$$

D'où, en revenant à l'original :

$$-\mathrm{L}'_n(x+y) = \sum^{n-1} \mathrm{L}_r(x)\, \mathrm{L}_{n-r-1}(y).$$

3. Image de $F(x-y)$. — La règle de similitude donnerait

$$F(ax+by) \supset \frac{bp\, f\left(\frac{q}{b}\right) - aq\, f\left(\frac{p}{a}\right)}{bp-aq}.$$

Pour les raisons que nous avons déjà dites il faut supposer essentiellement a et b réels, positifs.

Mais on vérifie par la formule du binome que la règle est applicable à $(ax+by)^n$ (n entier) quels que soient les signes de a et b; elle est applicable par conséquent à toute fonction $F(ax+by)$ développable en série entière $\Sigma A_n(ax+by)^n$ convergente dans tout le plan.

En particulier pour une fonction analytique entière

$$F(x-y) \supset \frac{p f(-q) + q f(p)}{p+q}.$$

4. Image de $F(x-y)$ **pour** $x > y$ **et de** $F|x-y|$. — Mais si l'on ne sait rien sur la fonction $F(x)$ lorsque la variable est négative, nous pourrons chercher seulement l'image de

$$F_1(x, y) = \begin{cases} F(x-y) & \text{pour } x > y \\ 0 & \text{pour } x < y \end{cases}$$

Cette image est

$$f_1(p, q) = pq \int_0^{\infty} e^{-qs}\, ds \int_s^{\infty} e^{-pt} F(t-s)\, dt.$$

On intègre en posant $t-s=u$ et il vient

$$F_1(x-y) \supset f_1(p, q) = \frac{q}{p+q} f(p).$$

Cherchons de même l'image de

$$F_2(x-y) = \begin{cases} F(y-x) & \text{si } y > x \\ 0 & \text{si } y < x \end{cases},$$

c'est, par symétrie;

$$\frac{p}{p+q} f(q).$$

Et en ajoutant

$$F_1 + F_2 = F(|x-y|) \supset \frac{p f(q) + q f(p)}{p+q}.$$

5. Original de $f(p+q)$. Image de $F(m)$ où $m = min(x, y)$. — Soit m la plus petite des valeurs de x et y; et M la plus grande. Cherchons l'image de $F(m)$,

$$f(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt} F(m)\, ds\, dt.$$

Il faut tracer la bissectrice OI de XOY, et calculer l'intégrale en deux parties; dans l'angle XOI où $F(m) = F(x) = F(s)$ et dans l'angle IOY où $F(m) = F(y) = F(t)$.

On trouve sans difficulté

$$f(p, q) = f(p+q),$$

où $f(p)$ est l'image de $F(x)$ en CS_1 [10].

On déduit par le même calcul les égalités symboliques suivantes que nous nous bornons à énoncer

$$\begin{array}{l}
F(m) \supset f(p+q),\\
F(M) \supset f(p) + f(q) - f(p+q),
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rl} F(x) & \text{si } x<y \\ 0 & \text{si } x>y \end{array}\right\} \supset \frac{p}{p+q} f(p+q),$$

$$\left.\begin{array}{rl} F(x) & \text{si } x<y \\ F_1(y) & \text{si } x>y \end{array}\right\} \supset \frac{pf(p+q) + qf_1(p+q)}{p+q},$$

$$\left.\begin{array}{rl} (y-x)^\nu F(x) & \text{si } y>x \\ 0 & \text{si } y<x \end{array}\right\} \supset \frac{\Gamma(\nu+1)p}{q^\nu} \frac{f(p+q)}{p+q}.$$

On en tirerait par exemple la correspondance [22],

$$\frac{1}{p^{\mu-k} q^{\nu-k}} \frac{1}{(p+q)^k} \supset \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x^{\mu-k}}{\Gamma(\mu-k)} \dfrac{y^\nu}{\Gamma(\nu-1)}\, {}_2F_1\left(k, k-\mu; \nu+1; \dfrac{y}{x}\right) \\ \qquad\qquad \text{si } y > x; \\ \dfrac{x^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \dfrac{y^{\nu-k}}{\Gamma(\nu-k)}\, {}_2F_1\left(k, k-\nu; \mu+1; \dfrac{x}{y}\right) \\ \qquad\qquad \text{si } x > y \quad \text{avec } \mu \text{ et } \nu > -1. \end{array} \right.$$

Nous aurons besoin aussi dans la théorie des équations aux dérivées partielles, de l'original

$$\frac{f(p, q)}{p+q} \subset \int_0^m F(x-s, y-s)\, ds.$$

Il est facile à calculer; et nous ne détaillons le procédé que comme exemple à généraliser dans les recherches analogues. Soit

$$f(p, q) \subset F_1(x, q) \subset F(x, y).$$

Puisque

$$\frac{p}{p+q} \subset e^{-qx},$$

on aura par le théorème du produit de composition, appliqué en CS_1 à la variable y

$$\frac{f(p,q)}{p+q} = \frac{1}{p}\frac{p}{p+q}f(p,q) \subset e^{-qx} \star F_1(x,q) \subset \int_0^x e^{-qs} F_1(x-s,q)\,ds.$$

De plus l'original en y de l'intégrand est, par le théorème du « shifting »,

$$e^{-qs} F_1(x-s,q) \subset \begin{cases} 0 & \text{si } y < s \\ F(x-s, y-s) & \text{si } y > s, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{f(p,q)}{p+q} \subset \int_0^m F(x-s, y-s)\,ds.$$

En particulier

$$\frac{f(p)f_1(q)}{p+q} \subset \int_0^m F(x-s)F_1(y-s)\,ds,$$

6. **Substitution linéaire sur les variables p et q.** — Nous avons trouvé $f(p+q)$, et la règle de similitude donnerait plus généralement $f(ap+bq)$ du moins si a et b sont positifs.

D'une manière plus générale, essayons de calculer l'original de $f(ap+bq+c, a_1p+b_1q+c_1)$ connaissant celui de $f(p,q)$.

Pour simplifier les calculs, remarquons que nous savons ajouter une constante à p et q; cela revient à multiplier l'original par une exponentielle; donc quels que soient c et c_1 nous pourrons les rendre nuls.

Reste alors à calculer l'original de

$$\frac{f(ap+bq, a_1p+b_1q)}{(ap+bq)(a_1p+b_1q)} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(ap+bq)s-(a_1p+b_1q)t} F(s,t)\,ds\,dt.$$

Notons d'abord que a, b, a_1, b_1 doivent être des constantes réelles, non négatives, puisque l'intégrale doit être holomorphe à droite de deux verticales de convergence associées.

Posons alors

$$as + a_1t = x, \qquad bs + b_1t = y,$$

et soit Δ le déterminant $(ab_1 - a_1b)$ supposé non nul.

On trouve

$$pq\frac{f(ap+bq,\ a_1p+b_1q)}{(ap+bq)(a_1p+b_1q)}$$
$$=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}\,\mathrm{F}\left(\frac{b_1x-a_1y}{\Delta},\ \frac{ay-bx}{\Delta}\right)\frac{dx\,dy}{\Delta},$$

et où l'intégrale est à étendre dans tout le domaine rendant positifs s et t, c'est-à-dire

$$pq\frac{f(ap+bq,\ a_1p+b_1q)}{(ap+bq)(a_1p+b_1q)}\subset\frac{1}{\Delta}\mathrm{F}\left(\frac{b_1x-a_1y}{\Delta},\ \frac{ay-bx}{\Delta}\right),$$

si $(b_1x-a_1y)\Delta$ et $(ay-bx)\Delta$ sont tous deux positifs et $\subset 0$ dans le cas contraire.

Et, par exemple,

$$\frac{p}{p+q}f(p+q,\ q)\subset\begin{cases}\mathrm{F}(x,\ y-x) & \text{si } y>x\\ 0 & \text{si } y<x,\end{cases}$$

ce qui généralise la règle (5).

7. Image de $\mathrm{F}(\sqrt{x^2+y^2})$. — Soit

$$\mathrm{F}(x)\supset p\varphi(p),$$

d'où

$$x\mathrm{F}(x)\supset-p\varphi'(p).$$

Pour calculer l'image de $\mathrm{F}(\sqrt{x^2+y^2})$, c'est-à-dire

$$f(p,q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ps-qt}\,\mathrm{F}\left(\sqrt{s^2+t^2}\right)ds\,dt,$$

nous passons en polaires en écrivant

$$s=\rho\cos\theta\qquad t=\rho\sin\theta,$$
$$u=p\cos\theta+q\sin\theta\qquad \mathrm{R}^2=p^2+q^2.$$

alors

$$f(p,q)=pq\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^\infty e^{-u\rho}\rho\,\mathrm{F}(\rho)\,d\rho=-pq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi'(u)\,d\theta.$$

On ramène ainsi à une intégrale simple que l'on saura parfois calculer.

On peut remarquer que

$$du = (-p \sin \theta + q \cos \theta)\, d\theta = \pm \sqrt{R^2 - u^2}\, d\theta,$$

et en précisant le signe

$$F(\sqrt{x^2+y^2}) \supset -pq \int_p^R \varphi'(u) \frac{du}{\sqrt{R^2-u^2}} - pq \int_q^R \varphi'(u) \frac{du}{\sqrt{R^2-u^2}}.$$

Remarque. — On peut voir que si l'on utilisait la transformation bilatérale de Laplace, la transformée de $F(\rho)$ serait fonction de R seulement. On aurait en effet à calculer $\int_0^{2\pi} \varphi'(u)\, d\theta$.

Or si l'on pose

$$p = R \cos \alpha \qquad q = R \sin \alpha,$$

on obtient

$$u = R \cos(\theta - \alpha),$$

et par une rotation d'angle α, le théorème en résulte. Mais le résultat n'est pas exact pour la transformation simple que nous étudions dans ce travail. Pour l'étude en CS_1 de la transformation bilatérale, *voir* [47].

8. Image de $\frac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}} F\left(\frac{xy}{x+y}\right)$ et analogues. — A. Soit

$$F(x) \supset f(p) = p \int_0^\infty e^{-ps} F(s)\, ds.$$

Substituant $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ à p

$$\sqrt{pq} \frac{f(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \int_0^\infty \sqrt{p}\, e^{-s\sqrt{p}} \sqrt{q}\, e^{-s\sqrt{q}} F(s)\, ds.$$

Prenant les images au second membre, en utilisant

$$\sqrt{p}\, e^{-s\sqrt{p}} \subset \frac{e^{-\frac{s^2}{4x}}}{\sqrt{\pi x}},$$

il viendra

$$\sqrt{pq} \frac{f(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \subset \int_0^\infty \frac{e^{-s^2\frac{(x+y)}{4xy}}}{\pi\sqrt{xy}} F(s)\, ds,$$

et en faisant $s = \sqrt{u}$,

$$\sqrt{pq} \frac{f(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \subset \int_0^\infty \frac{1}{2\pi\sqrt{xy}} e^{-u\left[\frac{x+y}{4xy}\right]} \frac{F(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\, du.$$

On reconnait au second membre à un facteur près l'image de $\frac{F(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ où p serait remplacé par $\frac{x+y}{4xy}$.

Et, par suite de

$$F(x) \supset f(p), \qquad \frac{F(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \supset g(p),$$

on déduira

$$\sqrt{pq}\frac{f(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \subset \frac{2\sqrt{xy}}{\pi(x+y)} g\left(\frac{x+y}{4xy}\right).$$

Exemple. — Avec

$$F(x) = x J_0(x) \supset \frac{p^2}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} = f(p),$$

$$\frac{F(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = J_0(\sqrt{x}) \supset e^{-\frac{1}{4p}} = g(p),$$

on obtient

$$\frac{\sqrt{pq}(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{[(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2+1]^{\frac{3}{2}}} \subset \frac{2}{\pi(x+y)} \frac{\sqrt{xy}}{} e^{-\frac{xy}{x+y}}.$$

B. On peut énoncer autrement cette relation.

Si

$$f(p) \subset F(x),$$

et

(1) $$f(\sqrt{p}) \subset \theta(x),$$

on sait que l'on a

$$\frac{F(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \supset \sqrt{p\pi}\,\theta\left(\frac{1}{4p}\right),$$

ce qui donne la fonction que nous appelions $g(p)$. Et, par suite,

(2) $$\sqrt{pq}\frac{f(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \subset \frac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}}\theta\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

C. Mais on voit alors que la fonction $F(x)$ n'intervient pas dans le résultat et (2) se déduit immédiatement de (1). On énoncera, en changeant les notations.

Si $f(p) \subset F(x)$;

$$\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} f[(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2] \subset \frac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}} F\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Par exemple :

$$\alpha. \quad \cos x \supset \frac{p^2}{p^2+1},$$

d'où

$$\frac{\sqrt{pq}\,(\sqrt{p}+\sqrt{q})^3}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^4+1} \subset \frac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}} \cos\frac{xy}{x+y}.$$

$$\beta. \quad \sin x \supset \frac{p}{p^2+1},$$

d'où

$$\frac{\sqrt{pq}\,(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^4+1} \subset \frac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}} \sin\frac{xy}{x+y}.$$

$$\gamma. \quad \frac{x^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)} \supset \frac{1}{p^{\frac{\nu}{2}}} \qquad \text{avec} \quad \nu > -2,$$

d'où

$$\frac{\sqrt{pq}}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^{\nu+1}} \subset \frac{(xy)^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)(x+y)^{\frac{\nu+1}{2}}}.$$

D. Autres formes analogues.

Si $F(x) \supset f(p)$ et $F(\sqrt{x}) \supset g(p)$, on trouvera

$$p\sqrt{q}\,\frac{f(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \subset \frac{y}{\pi\sqrt{xy}\,(x+y)}\, g\left(\frac{x+y}{4xy}\right),$$

$$\frac{q\sqrt{p}\,f(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \subset \frac{x}{\pi(x+y)\sqrt{xy}}\, g\left(\frac{x+y}{4xy}\right),$$

et, en ajoutant,

$$\sqrt{pq}\,f(\sqrt{p}+\sqrt{q}) \subset \frac{1}{\pi\sqrt{xy}}\, g\left(\frac{x+y}{4xy}\right).$$

Ainsi avec

$$F(x) = J_0(x) \supset \frac{p}{\sqrt{p^2+1}},$$

et

$$J_0(\sqrt{x}) \supset e^{-\frac{1}{4p}},$$

il viendra

$$\frac{\sqrt{pq}\,(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{1+(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}} \subset \frac{1}{\pi\sqrt{xy}}\, e^{-\frac{xy}{x+y}}.$$

9. **Fonctions de fonctions.** — On peut donner, pour trouver les originaux, une formule assez générale.

Soit $\varphi(p)$ une transformée de Laplace

$$\varphi(p) = \frac{f(p)}{p} = \int_0^\infty e^{-ps} \mathrm{F}(s)\, ds.$$

Remplaçons p par $[\rho(p) + \sigma(q)]$ où $\rho(p)$ et $\sigma(q)$ sont deux fonctions pour l'instant arbitraires, et, après avoir multiplié les deux membres par les nouvelles fonctions $\alpha(p)$ et $\beta(q)$

$$\alpha(p)\beta(q)\varphi[\rho(p) + \sigma(q)] = \int_0^\infty \alpha(p)e^{-s\rho(p)}\beta(q)e^{-s\sigma(q)} \mathrm{F}(s)\, ds,$$

prenons les images en supposant que l'on connaisse en CS_1

$$\alpha(p)e^{-s\rho(p)} \subset \mathrm{A}(x, s),$$
$$\beta(q)e^{-s\sigma(q)} \subset \mathrm{B}(y, s),$$

et il viendra

$$\alpha(p)\beta(q)\varphi[\rho(p) + \sigma(q)] \subset \int_0^\infty \mathrm{A}(x, s)\,\mathrm{B}(y, s)\, ds,$$

avec une discussion appropriée dans chaque cas. L'essentiel de cette discussion consiste à vérifier que la région d'holomorphie, de $f(p)$, à savoir $\mathcal{R}(p) > p_0$, existante par hypothèse, inclut, une fois transformée par la substitution $p \to f(p) + \sigma(q)$ deux régions de convergence associées $\mathcal{R}(p) > p_1$, $\mathcal{R}(q) > q_1$ pour la nouvelle image.

On aura par exemple les images suivantes, où, pour éviter les confusions nous remettons l'image f au lieu de la transformée φ de Laplace :

$$\frac{pqf\left(\sqrt{p^2+1} + \sqrt{q^2+1}\right)}{\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\left[\sqrt{p^2+1} + \sqrt{q^2+1}\right]} \subset \int_0^m \mathrm{J}_0\left(2\sqrt{x^2 - s^2}\right) \mathrm{J}_0\left(2\sqrt{y^2 - s^2}\right) \mathrm{F}(s)\, ds,$$

$$\frac{f\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}{p^{\nu-1}q^{\mu-1}(p+q)} \subset x^{\frac{\nu}{2}} y^{\frac{\mu}{2}} \int_0^\infty \mathrm{J}_\nu(2\sqrt{xs})\,\mathrm{J}_\mu(2\sqrt{ys}) \frac{\mathrm{F}(s)\, ds}{s^{\frac{\mu+\nu}{2}}} \quad \text{avec } \mu \text{ et } \nu > 0,$$

$$f_1(p)f_2(q)\frac{f(p+q)}{p+q} \subset \int_0^m \mathrm{F}_1(x - s)\,\mathrm{F}_2(y - s)\,\mathrm{F}(s)\, ds,$$

$$\frac{f(p + \mathrm{Log}\, q)}{p + \mathrm{Log}\, q} \subset \int_0^x \frac{y^s \mathrm{F}(s)\, ds}{\Gamma(1+s)},$$

et, en particulier, avec les fonctions ν et λ

$$\nu\left(\frac{e^{-p}}{q}\right) \subset \int_0^x \frac{y^s\,ds}{[\Gamma(1+s)]^2},$$

$$\lambda(qe^p, a) \subset \begin{cases} \dfrac{y^x - y^a}{\operatorname{Log} y} & \text{si} \quad x > a > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x < a. \end{cases}$$

ce qui généralise des formules connues [48], [50].

On trouvera facilement beaucoup d'autres formules analogues.

B. Il est bien clair d'ailleurs qu'on pourra appliquer les mêmes transformations à l'intégrale double de Carson; mais on ne saura en général ni intégrer, ni ramener à une intégrale simple.

La formule garde cependant une grande utilité. Elle permet de représenter par une intégrale les images d'originaux qui contiennent une fonction de fonction, et l'on en rencontre d'importantes applications dans la théorie des équations aux dérivées partielles, comme nous le verrons.

On a par exemple

$$\frac{pqf\left(\sqrt{p^2+1}, \sqrt{q^2+1}\right)}{(p^2+1)(q^2+1)} \subset \int_0^x \int_0^y J_0\left(\sqrt{x^2-s^2}\right) J_0\left(\sqrt{y^2-t^2}\right) F(s, t)\,ds\,dt,$$

$$\frac{pqf\left(p+\frac{1}{p}, q+\frac{1}{q}\right)}{(p^2+1)(q^2+1)} \subset \int_0^x \int_0^y J_0\left(2\sqrt{s(x-s)}\right) J_0\left(2\sqrt{t(y-t)}\right) F(s, t)\,ds\,dt,$$

$$\frac{f(p+\operatorname{Log} p, q+\operatorname{Log} q)}{(p+\operatorname{Log} p)(q+\operatorname{Log} q)} \subset \int_0^x \int_0^y \frac{(x-s)^s}{\Gamma(1+s)} \frac{(y-t)^t}{\Gamma(1+t)} F(s, t)\,ds\,dt,$$

$$\frac{f(p+\operatorname{Log} p, q)}{p+\operatorname{Log} p} \subset \int_0^x \frac{(x-s)^s}{\Gamma(1+s)} F(s, y)\,ds,$$

$$\frac{f(p+\operatorname{Log} q, q+\operatorname{Log} p)}{(p+\operatorname{Log} q)(q+\operatorname{Log} p)} \subset \int_0^x ds \int_0^y \frac{(y-t)^{s-1}}{\Gamma(s)} \frac{(x-s)^{t-1}}{\Gamma(t)} F(s, t)\,ds\,dt,$$

$$\frac{f(p+\operatorname{Log} q, q)}{p+\operatorname{Log} q} \subset \int_0^x ds \int_0^y \frac{(y-t)^{s-1}}{\Gamma(s)} F(s, t)\,ds\,dt.$$

10. Original de $f(\sqrt{p}, \sqrt{q})$, images de $F(\sqrt{x}, \sqrt{y})$, et analogues. — Nous insisterons un peu plus sur le cas où l'on ferait $\rho(p) = \sqrt{p}$, $\sigma(q) = \sqrt{q}$. Il vient alors

$$f(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \subset \frac{1}{\pi\sqrt{xy}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}-\frac{t^2}{4y}} F(s, t)\,ds\,dt.$$

Et si l'on pose $s^2 = u$, $t^2 = v$,

$$f(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \subset \frac{1}{4\pi\sqrt{xy}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u}{4x}-\frac{v}{4y}} \frac{F(\sqrt{u}, \sqrt{v})}{\sqrt{uv}} \, du \, dv.$$

On reconnaît au second membre à un facteur près l'image de $\frac{F(\sqrt{x}, \sqrt{y})}{\sqrt{xy}}$. D'où la séquence

$$f(p, q) \subset F(x, y),$$

$$g(p, q) \subset \frac{F(\sqrt{x}, \sqrt{y})}{\sqrt{xy}},$$

$$f(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \subset \frac{4\sqrt{xy}}{\pi} g\left(\frac{1}{4x}, \frac{1}{4y}\right),$$

où deux quelconques des égalités entraînent la troisième, et qui peut servir à calculer l'une quelconque des six fonctions qui y figurent quand on connaît les autres.

Par exemple, avec, lorsqu'il est utile, un changement de notation convenable.

A. On déduit l'image de $\frac{F(\sqrt{x}, \sqrt{y})}{\sqrt{xy}}$ de l'original de $f(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ où l'on remplace x et y par $\frac{1}{4p}$, $\frac{1}{4q}$ et que l'on multiplie par $\pi\sqrt{pq}$.

B. On déduit l'original de $f(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ de l'image de $\frac{F(\sqrt{x}, \sqrt{y})}{\sqrt{xy}}$ où l'on remplace p et q par $\frac{1}{4x}$, $\frac{1}{4y}$ et que l'on multiplie par $\frac{4}{\pi}\sqrt{xy}$.

C. On déduit l'image de $xyF(x^2, y^2)$ de l'original de $\sqrt{xy}f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ où l'on remplace p et q par $\frac{p^2}{4}$, $\frac{q^2}{4}$ et que l'on divise par π.

D. On déduit l'original de $f(p^2, q^2)$ de l'original de $\pi\sqrt{pq}F\left(\frac{1}{4p}, \frac{1}{4q}\right)$ où l'on remplace x et y par x^2 et y^2, et que l'on multiplie par xy.

E. On déduit l'image de $\sqrt{xy}f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ de l'image de $xyF(x^2, y^2)$ où l'on remplace p et q par $2\sqrt{p}$, $2\sqrt{q}$ et que l'on multiplie par π.

F. On déduit l'original de $\sqrt{pq}F\left(\frac{1}{4p}, \frac{1}{4q}\right)$ de l'original de $f(p^2, q^2)$ où l'on remplace x et y par $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ et que l'on multiplie par $\frac{1}{\pi\sqrt{xy}}$.

Donnons un exemple :

$$f(p, q) = \frac{p^2q^2}{p^2q^2+1} \subset \mathrm{ber}(2\sqrt{xy}) = \mathrm{F}(x, y),$$
$$f(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \frac{pq}{pq+1} \subset \mathrm{J}_0(2\sqrt{xy}).$$

On en tire

$$\pi\sqrt{pq}\,\mathrm{J}_0\left(\frac{1}{2\sqrt{pq}}\right) \subset \frac{\mathrm{ber}(2\sqrt[4]{xy})}{\sqrt{xy}}.$$

11. Original de $\sqrt{pq}\,f(\sqrt{p}, \sqrt{q})$. Image de $\mathrm{F}(\sqrt{x}, \sqrt{y})$. — On a, de façon analogue, la séquence

$$\mathrm{F}(x, y) \supset f(p, q),$$
$$g(p, q) \subset \mathrm{F}(\sqrt{x}, \sqrt{y}),$$
$$\sqrt{pq}\,f(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \subset \frac{1}{\pi\sqrt{xy}}\,g\left(\frac{1}{4x}, \frac{1}{4y}\right).$$

On en tirerait six règles analogues aux précédentes.

Par exemple : A. L'original de $\frac{1}{pq}f(p^2, q^2)$ s'obtient en prenant l'original de $\frac{\pi}{2\sqrt{pq}}\mathrm{F}\left(\frac{1}{4p}, \frac{1}{4q}\right)$ et en y remplaçant x et y par x^2 et y^2; B. L'image de $\mathrm{F}(x^2, y^2)$ s'obtient avec l'image de $\frac{1}{\sqrt{xy}}f\left(\frac{1}{4x}, \frac{1}{4y}\right)$ dans laquelle on remplace p et q par p^2 et q^2 et que l'on divise par πpq.

Exemples. — On a donné plus haut les images de $\mathrm{J}_0(xy)$ et $\mathrm{J}_0(\sqrt{xy})$. On obtiendra donc la relation

$$\frac{\pi}{2}pq[\mathrm{H}_0(\sqrt{pq}) - \mathrm{Y}_0(\sqrt{pq})] \subset \frac{1}{\pi\sqrt{xy}}\,\frac{1}{1+4xy}.$$

De même avec les image de $\mathrm{J}_0\left(\frac{x}{y}\right)$ et $\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$ on pourra écrire :

$$\frac{\pi}{2}q\left[\mathrm{H}_1\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right) - \mathrm{Y}_1\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)\right] - q \subset \frac{1}{\pi y}\mathrm{K}_1\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$

Signalons aussi la séquence

$$\mathrm{F}(x, y) \supset f(p, q),$$
$$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{F}(\sqrt{x}, \sqrt{y}) \supset g(p, q),$$
$$\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{x}{y}}\,g\left(\frac{1}{4x}, \frac{1}{4y}\right) \supset \sqrt{q}\,f(\sqrt{p}, \sqrt{q}),$$

12. Réduction à une variable. — La résolution des équations aux dérivées partielles nécessite le calcul des originaux à une variable d'images comme $f(p, p)$, $f(\sqrt{p}, p)$, ...

Nous ne pouvons songer, devant l'infinie variété des formes nécessaires, à les calculer d'avance. Montrons sur un exemple la méthode que l'on appliquera dans chaque cas particulier. Soit à trouver l'original de $f(p, p)$. On écrira

$$\frac{1}{p}f(p,p) = p\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(s+t)}\,\mathrm{F}(s, t)\,ds\,dt.$$

On pose

$$s + t = x$$

$$\frac{1}{p}f(p, p) = p\int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^x \mathrm{F}(s, x - s)\,ds,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{p}f(p, p) \subset \int_0^x \mathrm{F}(s, x - s)\,ds.$$

On peut l'écrire aussi

$$\frac{1}{p}f(p, p) \subset \int_0^x \mathrm{F}(x - s, s)\,ds.$$

CHAPITRE IV.

Applications du calcul symbolique.

Les applications du CS_2 sont très nombreuses. Nous nous contenterons d'indiquer ici des directions, nous limitant : 1° aux calculs d'intégrales ; 2° aux équations aux dérivées partielles, et 3° à l'étude de fonctions à partir de leur image, à savoir les fonctions de Bessel du troisième ordre, et les polynomes de Laguerre.

I. — CALCUL D'INTÉGRALES.

A. Si, dans la formule

$$\frac{f(p, q)}{pq} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt}\,\mathrm{F}(s, t)\,ds\,dt$$

on fait tendre p et q vers zéro, on obtient

$$\lim_{p,q \to 0} \frac{f(p, q)}{pq} = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{F}(s, t)\, ds\, dt.$$

Le passage à la limite sous le signe somme a été justifié par Vignaux si l'image existe pour $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ et si l'intégrale du second membre converge au sens de Pringsheim, c'est-à-dire si

$$\int_0^x \int_0^y \mathrm{F}(s, t)\, ds\, dt = \sigma(x, y)$$

existe pour tout x, y [51].

Lorsque $\sigma(x, y)$ n'existe pas, on peut convenir de prendre pour intégrale généralisée la limite de $f(p, q)$. C'est l'extension aux intégrales de la sommation exponentielle de Borel. Elle a été étudiée par Hardy pour une variable.

B, Le théorème de Van der Pol, vaut dans des conditions analogues (chap. II, règle 10) et fournit

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\mathrm{F}(s, t)\, ds\, dt}{s^{a+1}\, t^{b+1}} = \Gamma(a+1)\Gamma(b+1) \int_0^\infty \int_0^\infty f(u, v)\, u^{a-1}\, v^{b-1}\, du\, dv$$

qui ramène l'une à l'autre deux intégrales doubles supposées l'une et l'autre convergentes.

C. On peut aussi pour calculer une intégrale double prendre l'image par rapport à un paramètre, ou même introduire un paramètre dans une intégrale qui n'en contenait pas.

α. Soit à calculer [44]

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^\infty \sin xs \cos s \frac{ds}{s}.$$

J'écris

$$\mathrm{I}(x, y) = \int_0^\infty \sin xs \cos ys \frac{ds}{s}.$$

Avec les images connues

$$\sin xs \supset \frac{ps}{p^2 + s^2}$$

$$\cos ys \supset \frac{q^2}{q^2 + s^2}$$

nous aurons

$$\mathrm{I}(x, y) \supset \int_0^\infty \frac{ps}{p^2 + s^2} \frac{q^2}{q^2 + s^2} \frac{ds}{s} = \frac{q}{p+q} \frac{\pi}{2}.$$

Et revenant à l'original

$$I(x, y) = \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad x > y \qquad \text{et} \qquad 0 \text{ si } x < y.$$

En faisant $y = 1$ on aura

$$I(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{si} \quad x > 1.$$

β. Soit de même

$$I(x) = \int_0^\infty \sin xs \sin \frac{1}{s} \frac{ds}{s^2}$$

J'écrirai

$$I(x, y) = \int_0^\infty \sin xs \sin \frac{y}{s} \frac{ds}{s^2} \supset \int_0^\infty \frac{pq\, ds}{(p^2 + s^2)(q^2 s^2 + 1)}$$

ou

$$I(x, y) \supset \frac{q}{pq + 1} \frac{\pi}{2}.$$

Revenant aux originaux d'abord en y, puis en x

$$I(x, y) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} J_1(2\sqrt{xy}).$$

γ. Soit enfin à calculer

$$I(p, q) = \int_0^\infty K_\mu(\sqrt{ps}) K_\nu(\sqrt{qs}) s^\lambda ds$$

qui existe pour $\mu + \nu = 2\lambda + 2$ d'après les valeurs connues, à l'origine et à l'infini, de $K_\mu(t)$. Nous avons supposé μ et ν positifs, ce qui est toujours permis puisque

$$K_\mu = K_{-\mu}.$$

L'image connue en CS_1

$$e^{-\frac{1}{x}} x^{\nu-1} \supset \frac{2}{p^{\frac{\nu}{2}-1}} K_\nu(2\sqrt{p}) \qquad (\nu > 0)$$

donnera ici

$$\frac{I(p, q)}{p^{\frac{\mu}{2}-1} q^{\frac{\nu}{2}-1}} \subset (2x)^{\mu-1}(2y)^{\nu-1} \int_0^\infty e^{-s\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}\right)} s^{\lambda-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}} ds.$$

L'intégrale du second membre est la transformée de Laplace de $t^{\lambda-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}}$ où la variable symbolique serait

$$P = \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y}.$$

C'est donc

$$\frac{\Gamma\left(1+\lambda-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}{P^{1+\lambda-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}}}$$

et par suite

$$\frac{I(p, q)}{p^{\frac{\mu}{2}-1} q^{\frac{\nu}{2}-1}} \subset \frac{2^{2\lambda} x^{\lambda+\frac{\mu-\nu}{2}} y^{\lambda+\frac{\nu-\mu}{2}} \Gamma\left(1+\lambda-\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{(x+y)^{1+\lambda-\frac{\mu+\nu}{2}}}.$$

Revenant à l'original avec l'image donnée (p. 4, chap. I, n° 2).

$$I(p, q) = \frac{C}{p^{\lambda+1-\frac{\nu}{2}} q^{\nu+\frac{\mu}{2}}} {}_2F_1\left(1+\lambda-\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{\mu-\nu}{2}+1+\lambda; 2\lambda+2; 1-\frac{q}{p}\right)$$

où C est la constante :

$$2^{2\lambda} \frac{\Gamma\left(1+\lambda-\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(1+\lambda+\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\lambda+\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(1+\lambda+\frac{\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda+2)}.$$

D. L'itération de la transformation de Laplace fournit aussi des intégrales du type de l'intégrale de Stieljes.

Par exemple avec

$$\frac{\pi}{2} \frac{pq}{(pq+1)^{\frac{3}{2}}} \subset \sin(2\sqrt{xy})$$

et

$$\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+xy)^{\frac{3}{2}}} \supset -4pq\left[\cos(2\sqrt{pq})\,\mathrm{ci}(2\sqrt{pq}) + \sin(2\sqrt{pq})\,\mathrm{si}(2\sqrt{pq})\right]$$

on aura

$$-4\left[\cos(2\sqrt{pq})\,\mathrm{ci}(2\sqrt{pq}) + \sin(2\sqrt{pq})\,\mathrm{si}(2\sqrt{pq})\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{uv}}{(p+u)(q+v)}\,du\,dv.$$

II. — ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

1. Le calcul symbolique a d'abord servi à résoudre les équations différentielles.

Laplace avait déjà montré comment sa transformation ramène les équations linéaires à coefficients constants à des équations algébriques, et les équations linéaires dont les coefficients sont des polynomes de degré m, a des équations différentielles d'ordre m. Les géomètres, Poincaré en particulier [55] ont minutieusement discuté la question. Van der Pol a retrouvé le résultat de Laplace en généralisant le calcul opérationnel d'Heaviside et a étendu aux systèmes d'équations simultanées [11]. Nous ne reviendrons pas sur les équations différentielles. Elles sont longuement traitées dans le fascicule de M. Humbert et Colombo sur la CS_1 [23] et le CS_2 n'introduit aucune idée nouvelle.

Il en va tout autrement pour la théorie des équations aux dérivées partielles.

Nous nous bornerons dans tout ce paragraphe aux équations à deux variables à l'inconnue $z = F(x, y)$. Rappelons d'abord la méthode en CS_1. On verra mieux ainsi ce qu'apporte de neuf le CS_2.

Étudiant la propagation d'un signal électrique le long d'un câble « idéal », Heaviside rencontre le cas particulier de l'équation des télégraphistes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = K \frac{\partial z}{\partial x}$$

[qui se confond dans ce cas avec l'équation de la chaleur; K est une constante]. Il prend l'image par rapport à x

$$z(x, y) \supset f(p, y)$$

et traitant y comme un paramètre en déduit

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} \supset \frac{\partial^2 f(p, y)}{\partial y^2}.$$

La solution $z(x, y)$ qu'il cherche, est la solution nulle pour $x = 0$. La règle de dérivation donne alors $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \supset p f(p, y)$ et l'on est ramené à l'équation différentielle linéaire, immédiatement résoluble, puisque à coefficients constants :

$$\frac{\partial^2 f(p, y)}{\partial y^2} - \mathrm{K} p f(p, y) = 0.$$

Il ne restera qu'à remonter à l'original. Fantappié a justifié le procédé par sa théorie des fonctionnelles, et montré que l'on ramène à une équation différentielle linéaire ordinaire les équations aux dérivées partielles dont les coefficients seraient fonction d'une seule variable [56].

F. Lévy, de son côté, rattache la méthode au produit de composition de Volterra [57]. On trouvera de très nombreux exemples dans Carson [58], Cohen [59], M. C. Lachlan [3], Wagner [60], Parodi [24], Hereng [61], Ghizzetti [62], Carslaw [63], Churchill [65], Colombo [64] et bien d'autres.

On pourrait signaler aussi de très nombreux mémoires de Giorgi et de ses élèves; mais ils se placent plutôt dans le champ du calcul opérationnel (encore qu'il soit ordinairement facile de les interpréter en calcul symbolique). Graffi, Sbrana, ..., étudient les opérateurs avec plusieurs variables [66].

2. Les premiers travaux pour appliquer aux équations aux dérivées partielles la transformation de Laplace à deux (et même à n variables) semblent ceux de Picone [16], [36], [68]. De nombreux mathématiciens italiens surtout, ont simplifié et développé ses calculs. Citons Amerio, Ghizetti, Mangeron [67]. On leur doit deux progrès principaux :

α. D'abord par un procédé qu'on ramène aisément à la formule de Green, ils rattachent les valeurs de z à celles de ses dérivées sur la frontière du domaine où on opère.

En laissant provisoirement indéterminées certaines de ces valeurs, ils obtiennent sans intégration l'image :

$$z(x, y) \supset \frac{\mathrm{N}(p, q)}{\mathrm{D}(y, q)}$$

de la fonction cherchée, avec des conditions aux limites assez générales.

Utilisant alors le fait qu'une image est holomorphe pour des valeurs positives arbitrairement grandes de p et q, ils en déduisent que certaines racines du dénominateur doivent annuler le numérateur. Ce qui leur fournit des conditions nécessaires (et ordinairement suffisantes pour calculer les indéterminées.

β. Un second progrès dû à Picone est la limitation de l'intervalle de définition. Une expression comme $\frac{1}{xy}$ n'a pas d'image; mais on peut très bien utiliser une fonction égale à $\frac{1}{xy}$ dans le rectangle :

$$0 < a < x < b$$
$$0 < c < y < d$$

et nulle partout ailleurs.

Une fonction ainsi « mutilée » et réduite à un domaine fini, a toujours une image $f(p, q)$ et cette image est une fonction entière de p et q [68].

Cela fournit de nouvelles conditions (et parfois en nombre infini), d'où l'on déduit les fonctions fondamentales permettant le développement de la solution en série.

C'est ainsi que Tolotti a pu intégrer les équations de l'élasticité dans le cas d'un parallélépipède rectangle, avec des relations données *a priori*, sur la surface limite, entre les déformations et les forces [69], et Ghizzetti résoudre le problème de Dirichlet dans l'espace [67].

Amerio a souligné que le bénéfice de cette « mutilation » est intéressant principalement pour les équations elliptiques et a traité ainsi l'équation de Poisson [67].

Mais nous ne pouvons que renvoyer aux Mémoires cités qui dépassent le cadre de ce fascicule.

γ. Un nouveau progrès, et ici tout à fait dans la ligne du CS_2, est celui qui est dû à Doetsch-Voelker.

Il était facile de prévoir que si prendre l'image en x, d'une équation aux dérivées partielles à l'inconnue $z = f(x, y)$ la ramène à une équation différentielle en y, prendre l'image à la fois en x et y ramènera à une équation algébrique.

C'est exact; mais notons que, si les coefficients dépendent de x ou de y, le bénéfice n'est guère notable : mieux vaut opérer en CS_1 comme nous l'avons indiqué ci-dessus. Avec des coefficients constants, au contraire, le CS_2 permet, grâce à la remarque de M. Picone retrouvée par Voelker [15] et Carstoiu [21], de déterminer très simplement entre les conditions aux limites des relations nécessaires, et de constater souvent que ces conditions sont suffisantes.

De plus, et c'est un progrès essentiel dû à MM. Doetsch et Voelker, il sera le plus souvent inutile d'utiliser des formules d'inversion ; on écrira directement la solution en x et y [20]. Voici quelques exemples simples pour expliquer la méthode.

Rappelons que nos variables x et y sont supposées réelles et positives. De soi, notre calcul ne vaut que pour le premier quadrant.

Rappelons aussi qu'étant donnée une équation du premier ordre à coefficients constants

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = g(x, y),$$

les droites $a\,dy - b\,dx = 0$ sont les caractéristiques.

Semblablement pour une équation du second ordre

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,c + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y, z\right) = 0,$$

les droites $a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2 = 0$ sont pareillement les caractéristiques. L'équation est hyperbolique, elliptique ou parabolique selon que ces droites sont réelles, imaginaires, ou confondues.

4. Équations linéaires dont les caractéristiques ont une pente positive. — Soit par exemple

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = G(x, y).$$

Pour appliquer le calcul symbolique, et calculer l'image de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ il nous faut connaître les valeurs de z pour $x = 0$ ou $y = 0$. Soit donc

$$\begin{aligned} &z(x, y) \supset f(p, q) \\ &z(0, y) = A(y) \supset a(q) \\ &z(x, 0) = B(x) \supset b(p) \end{aligned}$$

la nouvelle inconnue

Et soit aussi $G(x, y) \supset g(p, q)$.

L'équation aura pour image

$$p[f(p, q) - a(q)] + q[f(p, q) - b(p)] = g(p, q)$$

d'où l'image de la solution cherchée

$$f(p, q) = \frac{g(p, q)}{p+q} + \frac{p}{p+q}a(q) + \frac{q}{p+q}b(p).$$

Comme nous l'avons dit déjà, on peut remonter directement à l'original. D'après la règle 5 (chap. III)

$$\frac{p}{p+q}a(q) \subset \begin{cases} 0 & \text{si } y < x \\ A(y-x) & \text{si } y > x, \end{cases}$$

$$\frac{q}{p+q}b(p) \subset \begin{cases} 0 \text{ si } x < y \\ B(x-y) \text{ si } x > y. \end{cases}$$

Enfin la même règle nous permet de diviser une image par $(p+q)$ et donne

$$\frac{g(p, q)}{p+q} \subset \int_0^{m(x,y)} G(x-s, y-s)\,ds.$$

D'où finalement

$$F(x, y) = \begin{cases} B(x-y) + \int_0^{y} G(x-s, y-s)\,ds \text{ si } x > y, \\ \text{et} \\ A(y-x) + \int_0^{x} G(x-s, y-s)\,ds \text{ si } x < y. \end{cases}$$

En résumé on a une solution z

α. définie, et continue dans le premier quadrant. Il faut évidemment supposer $A(0) = B(0)$ et les deux expressions de z coïncident pour $y = x$.

β. dérivable séparément dans les deux domaines $y > x$ et $y < x$.

γ. et prenant sur $x = 0$ ou $y = 0$ les valeurs arbitraires $A(y)$ ou $B(x)$ données. Le procédé de démonstration semble supposer que $A(y)$ ou $B(x)$, devant avoir une image, sont à croissance exponentielle. Mais il est facile de vérifier que le résultat est exact sans restriction.

Le théorème de Cauchy affirme l'existence d'une seule solution analytique définie par ses valeurs sur Ox, c'est-à-dire par $A(y)$ seul. Mais notre solution n'est pas analytique le long de $y = x$ où ses dérivées sont discontinues. Le résultat sera tout autre si les caractéristiques sont à pente négative. On ne pourra pas prendre $A(y)$ et

$B(x)$ arbitraires. Et c'est un des avantages du CS_2 de nous montrer cela sans aucune théorie préconçue. Nous ne savions pas, au départ, si $A(x)$ et $B(y)$ étaient ou non indépendants.

5. Équation linéaire à caractéristiques de pente négative. — Soit de même $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = G(x, y)$ avec les mêmes notations et les mêmes calculs qu'au numéro précédent, l'image sera

$$f(p, q) = \frac{pa(q) - qb(p) + g(p, q)}{p - q}. \tag{1}$$

Mais on sait qu'une image doit être holomorphe pour toute valeur de p et de q vérifiant $\Re p > p_0$, $\Re q > q_0$, où p_0 et q_0 sont deux constantes convenables.

Ceci implique que le numérateur de notre image doit être divisible par $p - q$, sans quoi on aurait, quel que grand que soit a, le pôle $p = a$, $q = a$. Il faut donc

$$pa(p) - pb(p) + g(p, p) = 0 \tag{2}$$

et cette relation lie entre elles les valeurs de $A(x)$ et $B(x)$ qui ne peuvent plus être arbitraires. On peut d'ailleurs remonter aux originaux sans formule d'inversion et donner explicitement la relation de condition entre A et B.

Le n° 12 (chap. III) nous donne

$$\frac{1}{p} g(p, p) \subset \int_0^x G(x - s, s)\, ds$$

et par suite (2) s'écrit

$$A(x) - B(x) + \int_0^x G(x - s, s)\, ds = 0. \tag{3}$$

Si cette relation entre les conditions initiales est vérifiée, (1) donnera l'image de la solution cherchée.

Contrairement à l'exemple précédent se donner $A(x)$ (ou $B(x)$) suffit à caractériser l'intégrale. Ici encore on l'obtient sans table d'inverses. En effet, grâce à la relation (2) on peut écrire (1)

$$f(p, q) = \frac{pa(q) - qa(p)}{p - q} + \frac{g(p, q)}{p - q} - \frac{qg(p, p)}{p(p - q)}.$$

La première fraction (règle 2, chap. III) est l'image de $A(x+y)$. La seconde écrite $\frac{1}{q} g(p, q) \frac{q}{p-q}$ permet de prendre l'original en q, car elle représente un produit de composition.

Soit

$$\frac{q}{p-q} \subset -e^{py},$$
$$g(p, q) \subset G_1(p, y).$$

Alors

$$\frac{1}{p-q} g(p, q) \subset -\int_0^y e^{-p(y-s)} G_1(p, s)\, ds,$$

tandis que

$$-\frac{q}{p-q} \frac{1}{p} g(p, p) \subset e^{py} \int_0^\infty e^{-ps} G_1(p, s)\, ds$$

[par définition de $g(p, p)$], d'où

$$\frac{g(p, q)}{p-q} - \frac{q}{p-q} \frac{1}{p} g(p, p) \subset \int_y^\infty e^{-p(s-y)} G_1(p, s)\, ds.$$

Comme d'ailleurs, puisque $s-y$ est positif,

$$e^{-p(s-y)} G_1(p, s) \subset \begin{cases} 0 \text{ si } x < s-y \\ G(x+y-s, s) \text{ si } x > s-y, \end{cases}$$

il viendra en prenant l'image en p

$$\frac{g(p, q)}{p-q} - \frac{q}{p(p-q)} g(p, p) \subset \int_y^{x+y} G(x+y-s, s)\, ds$$

ou encore

$$\subset \int_0^x G(x-s, y+s)\, ds,$$

alors pour la solution cherchée

$$z = A(x+y) + \int_0^x G(x-s, y+s)\, ds.$$

On vérifie aisément que cette solution est continue et dérivable si A et G le sont, et qu'elle satisfait à l'équation donnée [sans limitation de A ou de G, comme pourrait le faire craindre la méthode employée]. On l'exprimerait aussi bien, grâce à la relation (3) au moyen de $B(x)$ au lieu de $A(x)$.

On traiterait semblablement, sans complication essentielle, mais avec plus de longueurs d'écriture, l'équation générale linéaire à coefficients constants

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=G(x,y).$$

6. **Équations hyperboliques.** — Soit une équation du second ordre, à caractéristiques réelles, par exemple l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=G(x,y). \tag{1}$$

On pose encore

$$z(x,y)\supset f(p,q),$$
$$G(x,y)\supset g(p,q).$$

Pour appliquer le CS_2 et pouvoir calculer les images des dérivées, il nous faut connaître les valeurs initiales

$$z(0,y)=A(y)\supset a(q),$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=0}=C(y)\supset c(q),$$
$$z(x,0)=B(x)\supset b(p),$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y=0}=D(x)\supset d(p),$$

avec la condition $A(0)=B(0)$ si nous voulons une fonction continue à l'origine. Mais nous ne savons pas, en dehors de cette condition, lesquelles des fonctions A, B, C, D sont indépendantes. L'image de (1) s'écrit

$$p^2[f(p,q)-a(q)]-pc(q)-q^2[f(p,q)-b(p)]+q\,d(p)=g(p,q),$$

d'où

$$f(p,q)=\frac{g(p,q)+pc(q)-q\,d(p)+p^2a(q)-q^2b(p)}{p^2-q^2}. \tag{2}$$

Pour que $f(p,q)$ soit une transformée de Laplace il faut, comme nous l'avons déjà fait remarquer, que le numérateur s'annule pour $p=q$, d'où la condition

$$g(p,p)+pc(p)-p\,d(p)+p^2[a(p)-b(p)]=0.$$

Cette condition s'interprète directement grâce aux règles 3 (chap. II) et 12 (chap, III). On l'écrit

$$\frac{1}{p}g(p,p)+c(p)-d(p)+p[a(p)-A(0)]-p[b(p)-B(0)]=0, \tag{3}$$

d'où

$$\int_0^x G(x-s, s)\,ds + C(x) - D(x) + \frac{\partial}{\partial x}[A(x) - B(x)] = 0,$$

et par conséquent connaissant trois des fonctions A, B, C, D, on pourra obtenir la quatrième. On savait par la physique, et l'on retrouve simplement ici, qu'il n'y en a que trois d'indépendantes.

Pour avoir $z(x, y)$ il faut prendre l'original de (2). On peut le faire directement, sans avoir dû préalablement calculer $a(p)$, $b(p)$, $c(p)$, $d(p)$, ... et sans table d'images.

En effet, soustrayons la condition (3) multipliée par q du numérateur de l'image $f(p, q)$ donnée en (2). Il vient

$$f(p, q) = \frac{pg(p, q) - qg(p, p)}{p(p^2 - q^2)} + \frac{pc(q) - qc(p)}{p^2 - q^2}$$
$$+ p\left[\frac{pa(q) - qa(p)}{p^2 - q^2}\right] + \frac{qb(p)}{p+q},$$

et il faut prendre l'original des divers termes du second membre.

On utilisera les calculs du numéro précédent, et la règle (n° 5, chap. III) qui permet de diviser par $(p+q)$.

α. Ainsi nous avons déjà

$$\frac{pg(p, q) - qg(p, p)}{p(p-q)} \subset \int_0^x G(x-t, y+t)\,dt,$$

d'où

$$\frac{pg(p, q) - qg(p, p)}{p(p^2 - q^2)} \subset \int_0^{m(x,y)} ds \int_0^{x-s} G(x-s-t, y-s+t)\,dt.$$

β. La seconde fraction se calcule à partir de

$$\frac{pc(q) - qc(p)}{p-q} \subset C(x+y),$$

d'où

$$\frac{pc(q) - qc(p)}{p^2 - q^2} \subset \int_0^{m(x,y)} C(x+y-2s)\,ds.$$

γ. La troisième fraction s'écrit, en développant

$$\frac{1}{2}\,\frac{pa(q) - qa(p)}{p-q} + \frac{1}{2}\,\frac{pa(q)}{p+q} - \frac{1}{2}\,\frac{qa(p)}{p+q}$$

et l'original, pris terme à terme, est

$$\frac{1}{2}[A(x+y)+A(y-x)] \quad \text{si} \quad y>x,$$

$$\frac{1}{2}[A(x+y)-A(x-y)] \quad \text{si} \quad x>y.$$

δ. Enfin

$$q\frac{b(p)}{p+q} \subset e^{-py}b(p) \subset \begin{cases} B(x-y) & \text{si} \quad x>y, \\ 0 & \text{si} \quad x<y. \end{cases}$$

On obtient en résumé

$$\begin{aligned} z(x, y) = & \int_0^{m(x,y)} ds \int_0^{x-s} G(x-s-t, y-s+t)\,dt \\ & + \int_0^{m(x,y)} C(x+y-2s)\,ds + \frac{1}{2}A(x+y) \\ & + \begin{cases} B(x-y) - \frac{1}{2}A(x-y) & \text{si} \quad x>y \\ \text{et} & \\ \frac{1}{2}A(y-x) & \text{si} \quad y>x. \end{cases} \end{aligned}$$

Ici encore la vérification directe montre que la solution est valable sous des conditions beaucoup plus larges que ne le laisserait supposer la méthode employée; il n'est pas exigé que les fonctions A, B, C, D, G soient transformables par la transformation de Laplace.

7. Équation de la chaleur. — Soit l'équation parabolique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = G(x, y).$$

Posons

$$z(x, y) \supset f(p, q)$$

et désignons les valeurs aux limites, *a priori* nécessaires, par les notations

$$\begin{aligned} z(x, 0) &= A(x) \supset a(p), \\ z(0, y) &= B(y) \supset b(q), \\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=0} &= C(y) \supset c(q), \end{aligned}$$

d'où

$$p^2[f(p, q) - b(q)] - pc(q) - q[f(p, q) - a(p)] = g(p, q)$$

et donc

$$(2) \qquad f(p, q) = \frac{g(p, q) - qa(p) + pc(q) + p^2 b(q)}{p^2 - q}.$$

Il faut que le numérateur admette la racine

$$p = \sqrt{q}$$

sans quoi la fonction cesserait d'être holomorphe pour des valeurs $q = a^2$, $p = a$ de partie réelle aussi grande qu'on voudra, d'où

$$(3) \qquad g(\sqrt{q}, q) - qa(\sqrt{q}) + \sqrt{q}\, c(q) + qb(q) = 0,$$

et cette relation lie entre elles les valeurs initiales $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ dont deux seulement pourront être prises arbitraires.

On a d'ailleurs sans peine la relation explicite entre A, B et C. Supposons par exemple que connaissant A et C on cherche B. Nous écrirons la relation (3)

$$(4) \qquad b(p) = -\frac{1}{p} g(\sqrt{p}, p) + a(\sqrt{p}) - \frac{1}{\sqrt{p}} a(p),$$

et il suffira de remonter à l'original.

α. Original de

$$\frac{1}{p} g(\sqrt{p}, p).$$

On a

$$g(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt} G(s, t)\, ds\, dt,$$

d'où

$$\frac{1}{p} g(\sqrt{p}, p) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s\sqrt{p}-tp} \sqrt{p}\, G(s, t) ds\, dt.$$

Or on connaît l'image

$$\sqrt{p}\, e^{-s\sqrt{p}} \subset \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{s^2}{4x}},$$

d'où, par la règle du « shifting »,

$$\sqrt{p}\, e^{-s\sqrt{p}-tp} \subset \begin{cases} 0 & \text{si } x < t, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi(x-t)}} e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}} & \text{si } x > t, \end{cases}$$

et par suite

$$\frac{1}{p} g(\sqrt{p}, p) \subset \int_0^\infty ds \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi(x-t)}} e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}} G(s, t)\, dt.$$

β. Original de $a(\sqrt{p})$.

Il est connu [27].

C'est

$$a(\sqrt{p}) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}} A(s)\, ds.$$

γ. Original de $\frac{c(p)}{\sqrt{p}}$

$$\frac{c(p)}{\sqrt{p}} = \sqrt{p} \int_0^\infty e^{-ps} C(s)\, ds.$$

Or

$$e^{-ps}\sqrt{p} \subset \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < s, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi(x-s)}} & \text{si} \quad x > s, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{c(p)}{\sqrt{p}} \subset \int_0^x \frac{C(s)\, ds}{\sqrt{\pi(x-s)}}.$$

Portant ces résultats dans la relation (4),

$$\begin{aligned} B(x) = &-\int_0^\infty ds \int_0^x e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}} G(s, t)\, ds\, dt \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}} A(s)\, ds - \int_0^x \frac{C(s)\, ds}{\sqrt{\pi(x-s)}}, \end{aligned}$$

qui donne $B(x)$ quand on connaît A et C. On pourrait avoir explicitement A en fonction de B et C, ou C en fonction de A et B par la même méthode.

Supposant ainsi connus a, b, c, la formule (2) donnera l'image $f(p, q)$ et en remontant à l'original on aura l'intégrale z cherchée. Mais il est inutile de connaître a, b, c, et ici encore on peut calculer $z(x, y)$ directement à partir de (2) sans formule d'inversion. Nous ne ferons pas ce calcul analogue à celui que nous avons donné pour l'équation des cordes vibrantes, mais beaucoup plus long, il nous entraînerait trop loin. Nous ferons simplement remarquer à ce sujet que pour abréger les calculs en CS_2, plus encore que d'une table d'images, on a besoin d'une table de correspondances fonctionnelles. Doetsch et Voelker [20] en ont donné déjà un grand nombre,

Nous ne parlerons pas non plus des équations elliptiques. Le CS_2 semble *a priori* moins indiqué puisque l'on sait combien le problème se pose alors de toute autre façon. Nous avons signalé pourtant les résultats de Ghizzetti et Amerio [67]. Pour le problème plus particulier posé ici, Voelker et Doetsch ont obtenu des résultats nouveaux et intéressants sur la détermination (ou plutôt l'indétermination) d'une fonction harmonique par ses valeurs sur les axes de coordonnées.

III. — FONCTIONS DE BESSEL DU 3e ORDRE.

On sait que le CS_1 permet de retrouver très simplement les propriétés classiques des fonctions de Bessel. Le CS_2 permet de la même façon d'étudier les fonctions généralisées que M. P. Humbert a appelées fonctions de Bessel du troisième ordre, c'est-à-dire

$$J_{m,n}(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^{m+n} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}\, {}_0F_2\left(m+1,\, n+1;\, -\frac{x^3}{27}\right).$$

En remplaçant x par $3\sqrt[3]{xy}$ et prenant l'image terme à terme

$$\text{(R)} \qquad x^{\frac{2m-n}{3}}\, y^{\frac{2n-m}{3}}\, J_{m,n}(3\sqrt[3]{xy}) \supset \frac{1}{p^m q^n}\, e^{-\frac{1}{pq}}.$$

A. *Formules de récurrence.* — Avec la règle

$$x\,F(x, y) \supset -p\,\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{f(p, q)}{p}\right],$$

on obtient

$$x^{\frac{2m-n}{3}+1}\, y^{\frac{2n-m}{3}}\, J_{m,n}(3\sqrt[3]{xy}) \supset \frac{m+1}{p^{m+1} q^n}\, e^{-\frac{1}{pq}} - \frac{1}{p^{m+2} q^{n+1}}\, e^{-\frac{1}{pq}}$$

ou

$$x^{\frac{2m-n}{3}+1}\, y^{\frac{2n-m}{3}}\, J_{m,n}(3\sqrt[3]{xy}) = (m+1)\, x^{\frac{2(m+1)-n}{3}}\, y^{\frac{2n-(m+1)}{3}}\, J_{m+1,n}(3\sqrt[3]{xy}) - x^{\frac{2m-n}{3}+1}\, y^{\frac{2n-m}{3}}\, J_{m+2,n+1}(3\sqrt[3]{xy}).$$

Après simplifications et changement de $3\sqrt[3]{xy}$ en u, il vient

$$u[J_{m-1,n}(u) + J_{m+1,n+1}(u)] = 3m\,J_{m,n}(u).$$

L'application de la règle

$$x\,\frac{\partial F}{\partial x} \supset -p\,\frac{\partial f}{\partial p}$$

donnerait par un calcul analogue

$$(m+n)J_{m,n}(u) = u[J'_{m,n}(u) + J_{m+1,n+1}(u)].$$

On retrouverait ainsi la plupart des formules déjà connues au sujet des $J_{m,n}$ [70]. Mais voici des relations nouvelles.

B. *Représentation intégrale.* — Poisson a donné pour les fonctions de Bessel, la représentation

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int_0^\pi \cos(z\cos\theta)\sin^{2n}\theta\, d\theta,$$

ou, en posant $\cos\theta = \xi$,

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int_0^1 (1-\xi^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos(\xi z)\, d\xi,$$

$J_{m,n}$ s'exprimera pareillement au moyen d'une intégrale double, avec les sinus du troisième ordre $f(x, j, 3)$.

On sait que

$$f(x, j, n) \supset \frac{p^j}{p^n+1},$$

et M. Humbert a montré que

$$J_{\frac{2}{3},\frac{1}{3}}(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi x} f(x, 1, 3),$$

$$J_{\frac{1}{3},-\frac{1}{3}}(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi x} f(x, 2, 3),$$

$$J_{-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}}(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi x} f(x, 3, 3).$$

Écrivons la relation (R) sous la forme

$$x^{\frac{2m-n}{3}} y^{\frac{2n-m}{3}} J_{m,n}(3\sqrt[3]{xy}) \supset \frac{1}{pq}\,\frac{1}{p^{m-m'}}\,\frac{1}{q^{n-n'}}\,\frac{1}{p^{m'-1}q^{n'-1}}\, e^{-\frac{1}{pq}}$$

et appliquons la formule du produit. L'original du second membre est

$$\int_0^x\int_0^y \frac{(x-u)^{m-m'}}{\Gamma(m-m'+1)}\,\frac{(y-v)^{n-n'}}{\Gamma(n-n'+1)} \times u^{\frac{2m'-n'-1}{3}} v^{\frac{2n'-m'-1}{3}} J_{m'-1,n'-1}(3\sqrt[3]{uv})\, du\, dv,$$

ou, en changeant x, y, u, v respectivement en x^3, y^3, u^3, v^3,

$$\int_0^x\int_0^y \frac{9(x^3-u^3)^{m-m'}}{\Gamma(m-m'+1)}\,\frac{(y^3-v^3)^{n-n'}}{\Gamma(n-n'+1)} \times u^{2m'-n'+1} v^{2n'-m'+1} J_{m'-1,n'-1}(3uv)\, du\, dv.$$

En faisant successivement dans cette intégrale

$$m' = \frac{5}{3}, \quad n' = \frac{4}{3}; \quad m' = \frac{4}{3}, \quad n' = \frac{2}{3}; \quad m' = \frac{2}{3}, \quad n' = \frac{1}{3},$$

on fera intervenir les sinus du troisième ordre; par exemple

$$x^{2m-n}y^{2n-m}J_{m,n}(3xy) = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right)} \times \int_0^x \int_0^y (x^3-u^3)^{m-\frac{2}{3}}(y^3-v^3)^{n-\frac{1}{3}} u f(3uv, 3, 3)\,du\,dv,$$

et, si l'on pose $u = x\xi$, $v = y\eta$, $3xy = z$,

$$J_{m,n}(z) = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{z}{3}\right)^{m+n} \times \int_0^1 \int_0^1 (1-\xi^3)^{m-\frac{2}{3}}(1-\eta^3)^{n-\frac{1}{3}} \xi f(\xi\eta z, 3, 3)\,d\xi\,d\eta.$$

C. *Dérivée par rapport à l'indice.* — Cherchons $\frac{\partial J_{n,n}}{\partial n}$. Dérivons par rapport à n les deux membres de (R) après y avoir fait $m = n$,

$$\frac{1}{3}(xy)^{\frac{n}{3}}\log(xy)J_{n,n}(3\sqrt[3]{xy}) + (xy)^{\frac{n}{3}}\frac{d}{dn}J_{n,n}(3\sqrt[3]{xy}) \supset -\frac{1}{(pq)^n}\log(pq)\,e^{-\frac{1}{pq}}.$$

Appliquons ici encore la formule du produit, en tenant compte des relations symboliques

$$-\log(pq) \subset \log xy + 2\gamma \qquad (\gamma = \text{const. d'Euler}),$$

$$\frac{1}{(pq)^{n-1}}e^{-\frac{1}{pq}} \subset (xy)^{\frac{n-1}{3}}J_{n-1,n-1}(3\sqrt[3]{xy}),$$

l'original du second membre est

$$\int_0^x \int_0^y [\log(x-u)(y-v) + 2\gamma](uv)^{\frac{n-1}{3}}J_{n-1,n-1}(3\sqrt[3]{uv})\,du\,dv,$$

ou encore

$$[\log(xy) + 2\gamma]\int_0^x \int_0^y (uv)^{\frac{n-1}{3}}J_{n-1,n-1}(3\sqrt[3]{uv})\,du\,dv + \int_0^x \int_0^y \log\left[\left(1-\frac{u}{x}\right)\left(1-\frac{v}{y}\right)\right](uv)^{\frac{n-1}{3}}J_{n-1,n-1}(3\sqrt[3]{uv})\,du\,dv.$$

La seconde intégrale peut s'écrire

$$y^{\frac{n+1}{3}} \int_0^x \log\left(1-\frac{u}{x}\right) u^{\frac{n-2}{3}} \mathrm{J}_{n-1,n}(3\sqrt[3]{uy})\,du + x^{\frac{n+1}{3}} \times \int_0^y \log\left(1-\frac{v}{y}\right) v^{\frac{n-2}{3}} \mathrm{J}_{n-1,n}(3\sqrt[3]{vx})\,dv.$$

Avec le changement $u = tx$, $v = ty$, $3\sqrt[3]{xy} = z$ et quelques simplifications on obtiendra

$$\frac{\partial}{\partial n}[\mathrm{J}_{n,n}(z)] = 2[\gamma + \operatorname{Log} z]\mathrm{J}_{n,n}(z) + 2z\int_0^1 \log(1-t^3)t^n \mathrm{J}_{n-1,n}(tz)\,dt.$$

IV. — POLYNOMES DE LAGUERRE A DEUX VARIABLES.

C'est dans la première étude systématique du CS_2 [12] que M. Humbert a défini les polynomes d'Abel-Laguerre à deux variables.

On peut étudier plus généralement des polynomes à deux variables analogues aux polynomes étendus de Laguerre.

Les polynomes étendus de Laguerre définis par

$$l_m^\alpha(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{m!} \frac{d^m}{dx^m}(x^{m+\alpha} e^{-x}) \qquad (m \text{ entier} \geqq 0),$$

vérifient la relation symbolique

$$x^\alpha l_m^\alpha(x) \supset \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m!} \frac{1}{p^\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right)^m$$

et sont solution de l'équation différentielle

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + my = 0.$$

Pour définir des polynomes analogues à deux variables $\mathrm{L}_m^{\alpha,\beta}(x, y)$, on part de la fonction hypergéométrique confluente à deux variables

$$x^\alpha y^\beta \psi_2(-m;\alpha+1;\beta+1;x,y) = \sum_\mu \sum_\nu \frac{(-m, \mu+\nu)}{(\alpha+1,\mu)(\beta+1,\nu)} \frac{x^{\mu+\alpha} y^{\nu+\beta}}{\mu!\,\nu!},$$

où m est un entier positif. L'image est

$$\sum_\mu \sum_\nu \frac{(-m,\mu+\nu)}{(\alpha+1,\mu)(\beta+1,\nu)} \frac{1}{\mu!\,\nu!} \frac{\Gamma(\mu+\alpha+1)}{p^{\mu+\alpha}} \frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{q^{\nu+\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{p^\alpha q^\beta}\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)^m.$$

On peut évidemment introduire un facteur constant dans la définition. Par analogie avec celui qui figure dans les polynomes à une variable, nous poserons

$$x^{\alpha} y^{\beta} \mathrm{L}_m^{\alpha,\beta}(x, y) \supset \frac{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+\beta+1)}{(m\,!)^2} \frac{1}{p^{\alpha} q^{\beta}} \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^m.$$

Pour $\alpha = \beta = 0$, on retrouve les polynomes de M. Humbert.

Pour $m = 0$, $\mathrm{L}_0^{\alpha,\beta} = 1$.

On consultera Erdelyi [14] qui a étudié en général les fonctions hypergéométriques confluentes.

A. *Équations aux dérivées partielles.* — Soit pour abréger l'écriture

$$\mathrm{F} \supset \frac{1}{p^{\alpha} q^{\beta}} \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^m = f(p, q).$$

Utilisons les règles opérationnelles

$$x \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} \supset -p \frac{\partial f}{\partial p} \qquad \text{et} \qquad y \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} \supset -q \frac{\partial f}{\partial q}.$$

On en déduit

$$(1) \qquad x \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} - \alpha \mathrm{F} \supset \frac{-m}{p^{\alpha+1} q^{\beta}} \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{m-1},$$

$$(2) \qquad y \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} - \beta \mathrm{F} \supset \frac{-m}{p^{\alpha} q^{\beta+1}} \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{m-1},$$

et en additionnant

$$(3) \qquad x \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} - (\alpha + \beta + m)\mathrm{F} \supset \frac{-m}{p^{\alpha} q^{\beta}} \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{m-1}.$$

D'autre part $\left(x \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} - \alpha \mathrm{F}\right)$ s'annule pour $x = 0$ si $\alpha + 1 > 0$ et donc en dérivant (1)

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[x \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} - \alpha \mathrm{F}\right] \supset \frac{-m}{p^{\alpha} q^{\beta}} \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{m-1}.$$

Comparant (4) et (3) on voit que F satisfait aux deux équations

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\mathrm{F}) - \alpha \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} = x \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} - (\alpha + \beta + m)\mathrm{F},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y\mathrm{F}) - \beta \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} = x \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} - (\alpha + \beta + m)\mathrm{F},$$

et par suite les polynomes $L_m^{\alpha,\beta}$ satisferont aux deux équations aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}+(\alpha+1)\frac{\partial L}{\partial x}=y\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}+(\beta+1)\frac{\partial L}{\partial y}=x\frac{\partial L}{\partial x}+y\frac{\partial L}{\partial y}-mL$$

ou encore

$$(E_1)\qquad x\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}+(\alpha+1)\frac{\partial L}{\partial x}-(\beta+1)\frac{\partial L}{\partial y}=0,$$

équation indépendante de m, et

$$(E_2)\quad y\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}+x\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}+(\alpha+1-2x)\frac{\partial L}{\partial x}+(\beta+1-2y)\frac{\partial L}{\partial y}+2mL=0.$$

B. *Fonction génératrice.* — On voit immédiatement que

$$G(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m!\,x^\alpha y^\beta}{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+\beta+1)}L_m^{\alpha,\beta}(x,y)z^m \supset \frac{1}{p^\alpha q^\beta}e^{\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)z}.$$

Et en prenant l'original du second membre

$$G(x,y)=e^z\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{\beta}{2}}J_\alpha(2\sqrt{zx})J_\beta(2\sqrt{zy}).$$

C'est la fonction génératrice cherchée.

C. *Relations de récurrence.* — Les règles

$$x\frac{\partial F}{\partial x}\supset -p\frac{\partial f}{\partial p}\qquad\text{et}\qquad xF\supset -p\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{f(p,q)}{p}\right]$$

donnent les relations

$$\frac{\partial L_m^{\alpha,\beta}}{\partial x}+\frac{m+\beta}{m}L_{m-1}^{\alpha+1,\beta}=0,$$
$$\frac{\partial L^{\alpha,\beta}}{\partial y}+\frac{m+\alpha}{m}L_{m-1}^{\alpha,\beta+1}=0,$$
$$\alpha L_m^{\alpha,\beta}-\frac{m+\beta}{m}xL_{m-1}^{\alpha+1,\beta}=(m+\alpha)L_m^{\alpha-1,\beta},$$
$$\beta L_m^{\alpha,\beta}-\frac{m+\alpha}{m}yL_{m-1}^{\alpha,\beta+1}=(m+\beta)L_m^{\alpha,\beta-1}.$$

On pourrait en obtenir bien d'autres, ainsi que des formules de duplication de l'argument, de l'indice, ou des formules d'addition.

D. *Généralisation de la formule*

$$x^{\alpha} l_m^{\alpha}(x) = \frac{e^x}{m\,!} \frac{d^m}{dx^m} [x^{m+\alpha} e^{-x}].$$

Cette généralisation est moins directe. On écrit

$$\frac{1}{p^{\alpha} q^{\beta}}\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^m = \frac{1}{p^{\alpha} q^{\beta}}\left[\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{pq}\right]^m$$

$$= \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j}\, C_m^j \left(1 - \frac{1}{p}\right)^j \left(1 - \frac{1}{q}\right)^j \frac{1}{p^{m+\alpha-j}} \frac{1}{q^{m+\beta-j}}.$$

En tenant compte de

$$x^{\alpha} l_m^{\alpha}(x) \supset \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m\,!} \frac{1}{p^{\alpha}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^m$$

et de la formule à une variable que nous voulons généraliser on trouve

$$x^{\alpha} y^{\beta} L_m^{\alpha,\beta}(x, y) = \frac{e^{x+y}}{(m\,!)^2} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j}\, C_m^j \frac{\partial^{2j}}{\partial x^j\, \partial y^j} [x^{m+\alpha} y^{m+\beta} e^{-x-y}].$$

B. *Polynomes d'Hermite.* — Entre les polynomes d'Hermite à une variable, que nous noterons $h_m(x)$, et les polynomes de Laguerre $l(x)$ existent les relations (28)

$$x\, l_m^{\frac{1}{2}}(x^2) = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\, m\,!} h_{2m+1}(x),$$

$$l_m^{-\frac{1}{2}}(x^2) = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\, m\,!} h_{2m}(x).$$

On sait aussi que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m h_{2m+1}(x)}{(2m+1)\,!} = e \sin 2x,$$

$$\frac{h_{2m}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \supset \frac{(2m)\,!}{m\,!} \sqrt{p\pi}\left(\frac{1}{p} - 1\right)^m,$$

$$h_{2m+1}(\sqrt{x}) \supset \frac{(2m+1)\,!}{m\,!} \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{1}{p} - 1\right)^m.$$

Introduisons des polynomes $H_m(x, y)$ par l'une ou l'autre des formules symboliques

$$\frac{H_{2m}(\sqrt{x}, \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} \supset \frac{(2m)\,!}{m\,!} \pi \sqrt{pq}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right)^m,$$

$$H_{2m+1}(\sqrt{x}, \sqrt{y}) \supset \frac{(2m+1)\,!}{m\,!} \frac{\pi}{\sqrt{pq}}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right)^m.$$

Ces polynomes $H_m(x, y)$ ne sont ainsi que des cas particuliers des polynomes $L_m^{\alpha,\beta}$, car, en comparant les images, on voit immédiatement que

$$xy L_m^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x^2, y^2) = \frac{(-1)^m}{4^{2m+1}} \frac{(2m+1)!}{(m!)^3} H_{2m+1}(x, y),$$

$$L_m^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x^2, y^2) = \frac{(-1)^m}{4^{2m}} \frac{(2m)!}{(m!)^2} H_{2m}(x, y),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{H_{2m+1}(x, y)}{(2m+1)!} = e \sin 2x \sin 2y,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{H_{2m}(x, y)}{(2m)!} = e \cos 2x \cos 2y.$$

L'introduction des polynomes $H(x, y)$ pourrait sembler une généralisation un peu vaine des formules à une variable, mais le résultat est pourtant intéressant et les propriétés nombreuses. Montrons que ces polynomes s'expriment au moyen des polynomes d'Hermite h_m d'argument $(x+y)$ et $(x-y)$.

Considérons pour cela les séries

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{H_{2m+1}(\sqrt{x}, \sqrt{y})}{(2m+1)!} t^m \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{H_{2m}(\sqrt{x}, \sqrt{y})}{(2m)! \sqrt{xy}} t^m.$$

En utilisant les images données ci-dessus, on voit que ces séries sont respectivement égales à

$$t^{-1} e^t \sin(2\sqrt{tx}) \sin(2\sqrt{ty}) \qquad \text{et} \qquad e^t \cos(2\sqrt{tx}) \cos(2\sqrt{ty}).$$

Si l'on change t, x, y en $-t^2$, x^2, y^2 on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_{2m+1}(x, y)}{(2m+1)} t^{2m+1} &= \frac{e^{-t^2}}{t} \operatorname{sh}(2tx) \operatorname{sh}(2ty) \\ &= \frac{e^{-t^2}}{2t} [\operatorname{ch} 2t(x+y) - \operatorname{ch} 2t(x-y)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_{2m}(x, y)}{(2m)!\, xy} t^{2m} &= e^{-t^2} \operatorname{ch}(2tx) \operatorname{ch}(2ty) \\ &= \frac{e^{-t^2}}{2t} [\operatorname{ch} 2t(x+y) + \operatorname{ch} 2t(x-y)].\end{aligned}$$

Les polynomes étudiés sont donc la somme ou la différence, selon la parité de l'indice, de deux suites de polynomes en $x+y$ ou $x-y$.

Effectuons le calcul en développant en séries de $t(x+y)$ les termes de la forme

$$e^{-t^2}\operatorname{ch}[2t(x+y)] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{j!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{[2t(x+y)]^{2r}}{(2r)!}.$$

Le coefficient de t^{2m} dans ce développement est

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^{m-j} 2^{2j}}{(m-j)!\,(2j)!}(x+y)^{2j}.$$

Or le polynome

$$h_{2m}(x) = e^{x^2}\frac{d^{2m}(e^{-x^2})}{dx^{2m}} = \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^{m-j} 2^{2j}}{(2j)!\,(m-j)!} x^{2j}.$$

Les polynomes $H_m(x, y)$ sont donc liés aux polynomes d'Hermite par les relations

$$H_{2m}(x, y) = \frac{h_{2m}(x+y) + h_{2m}(x-y)}{2},$$

$$H_{2m-1}(x, y) = \frac{h_{2m}(x+y) - h_{2m}(x-y)}{4m}.$$

F. *Orthogonalité.* — Les polynomes $L(x, y)$ sont orthogonaux, sur l'intervalle $(0, \infty)$. avec le poids $e^{-2(x+y)}$, c'est-à-dire que l'on a

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-2(x+y)} L_m(x, y) L_n(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad \text{si} \quad m \neq n.$$

Partons en effet de

$$L_m\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \supset \left(1 - \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}\right)^m = \frac{1}{2^m}\left[\left(1-\frac{1}{p}\right) + \left(1-\frac{1}{q}\right)\right]^m$$

et en développant

$$L_m\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = 2^{-m}\sum_{j=0}^{m} C_m^j l_j(x) l_{m-j}(y).$$

De même

$$L_n\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = 2^{-n}\sum_{r=0}^{n} C_n^r l_r(x) l_{n-r}(y),$$

d'où

$$L_m\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) L_n\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = 2^{-m-n}\sum_j\sum_r C_m^j C_n^r l_j(x) l_r(x) l_{m-j}(y) l_{n-r}(y).$$

Multiplions par e^{-x-y}, et intégrons dans le premier quadrant

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} \mathrm{L}_m\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \mathrm{L}_n\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) dx\, dy$$
$$= 2^{-m-n} \sum_j \sum_r \mathrm{C}_m^j \mathrm{C}_n^r \int_0^\infty e^{-x} l_j(x) l_r(x)\, dx \int_0^\infty e^{-y} l_{m-j}(y) l_{n-r}(y)\, dy.$$

Les intégrales du second membre sont nulles, à moins que l'on ait à la fois $j = r$, $n - j = m - r$ auquel cas elles valent un.

D'où

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} \mathrm{L}_m\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \mathrm{L}_n\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) dx\, dy = 0 \qquad \text{si} \quad m \neq n$$

et

$$= \frac{1}{2^{2m}} \sum_j (\mathrm{C}_m^j)^2 = \frac{1}{2^{2m}} \mathrm{C}_{2m}^m \qquad \text{si} \quad m = n.$$

On l'écrit aussi selon que $m \neq n$ ou $m = n$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2(x+y)} \mathrm{L}_m(x, y) \mathrm{L}_n(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2^{2(m+1)}} \mathrm{C}_{2m}^m.$$

Par un calcul absolument semblable, on généralise cette formule aux polynomes $\mathrm{L}_m^{\alpha,\beta}(x, y)$. On établit d'abord la relation

$$\mathrm{L}_m^{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^{m} \mathrm{C}_m^j l_j^\alpha(x) l_{m-j}^\beta(y),$$

d'où résultera

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} x^\alpha y^\beta \mathrm{L}_m^{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \mathrm{L}_n^{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) dx\, dy = 0 \qquad \text{si} \quad m \neq n.$$

G. *Sommation des séries en* $\mathrm{L}_m^{\alpha,\beta}(x, y)$. — On peut souvent sommer de telles séries simples ou doubles, en supposant qu'il est légitime de prendre l'image terme à terme. Nous avons donné des théorèmes qui assurent parfois cette légitimité. Mais ce sont les questions de convergence qui font le plus souvent difficulté.

Nous remarquerons simplement que la formule (1) ci-dessus permet en bien des cas d'étendre aux $\mathrm{L}_m^{\alpha,\beta}(x, y)$ les limitations connues des $l_m^\alpha(x)$. Ainsi quand x varie dans un intervalle fini, on sait qu'il existe une constante A telle que

$$| l_n(x) | < \mathrm{A},$$

quel que soit n.

Il en résulte aussitôt

$$|L_n(x, y)| \leqq \frac{1}{2^n} \sum_i C_n^i A \leqq A.$$

On peut démontrer aussi

$$\lim_{n \to \infty} L_n(x, y) = 0 \qquad \text{pour} \qquad x \text{ et } y \text{ positifs.}$$

La relation analogue pour les polynomes $l_n(x)$ est bien connue.

Exemple. — Soit à sommer

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{11}(x, y)}{(n+1)^2}.$$

La convergence n'étant pas apparente *a priori*, calculons d'abord la somme finie

$$xy T_N(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} xy \frac{L_n^{11}(x, y)}{(n+1)^2}.$$

On aura en prenant les images

$$xy T_N(x, y) \supset \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{pq}\left[1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right]^n = \frac{1}{pq} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^N}{1 - \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}.$$

Or cette image : $\dfrac{1}{p+q} - \dfrac{\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^N}{p+q}$ a un original que la règle (5) (chap. 3), nous permet de calculer

$$xy T_N(x, y) = \min(x, y) - \int_0^{\min(x,y)} L_N(x - s, y - s)\, ds.$$

Si alors on fait tendre N vers l'infini, on a pour x et y positifs

$$xy T(x, y) = \min(x, y),$$

ou

$$T(x, y) = \frac{1}{\operatorname{Max}(x, y)}.$$

Remarque. — On pourrait signaler bien d'autres applications du CS_2. Nous nous contenterons de mentionner :

α. L'utilité pour les équations intégrales de Volterra aussi bien que de Fredholm; et pour les équations intégro-différentielles. Sur le modèle des résultats obtenus en CS_1 par M. Parodi [71] on peut trouver de larges classes d'équations ramenables à des quadratures [52].

β. L'extension à deux variables des formules de réciprocité de Hankel [22].

Mais ces sujets ont été peu étudiés jusqu'ici, et il reste un vaste champ de recherches.

APPENDICE.

Calcul symbolique a n variables.

Il est clair qu'on pourrait constituer, de façon analogue, un CS_n. Dans le premier chapitre de ce fascicule, nous avons signalé les difficultés rencontrées pour passer de une à deux variables, et indiquer comment l'introduction de l'intégrale de Lebesgue permettrait de les surmonter. Il n'y a pas de difficulté supplémentaire pour passer de deux à n variables.

A. On appellera transformée de Laplace d'une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (appelée original) une fonction $\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ donnée par

$$\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\sum_1^n p_i x_i} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1,\, dx_2, \ldots, dx_n.$$

On utilisera plutôt la transformée de Carson $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ (appelée image) donnée par

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_1, p_2, \ldots, p_n \varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

qu'on notera

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \underset{n}{\subset} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ou même simplement

$$\subset F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Les règles du chapitre II s'étendent sans difficulté, et la plupart des correspondances étudiées au chapitre III de même.

Exemples :

α. de

$$f(p) \subset F_1(x), \qquad F_1\left(\frac{1}{p}\right) \subset F_2(x), \qquad F_2\left(\frac{1}{p}\right) \subset F_3(x), \qquad F_{n-1}\left(\frac{1}{p}\right) \subset F(x),$$

on déduit

$$f(p_1 p_2 \ldots p_n) \subset F(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

β. plus généralement, de

$$f(p) \subset F_1(x), \qquad \frac{1}{p^{\lambda_1}} F_1\left(\frac{1}{p}\right) \subset F_2(x), \qquad \frac{1}{p^{\lambda_{n-1}}} F_{n-1}\left(\frac{1}{p}\right) \subset F(x),$$

on déduit

$$\frac{f(p_1 p_2 \ldots p_n)}{p_2^{\lambda_1} p_3^{\lambda_1+\lambda_2} \ldots p_n^{\lambda_1+\lambda_2 \ldots +\lambda_{n-1}}} \subset \frac{F(x_1 x_2 \ldots x_n)}{x_1^{\lambda_1+\lambda_2 \ldots +\lambda_{n-1}} x_2^{\lambda_2+\lambda_3 \ldots +\lambda_{n-1}} x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}}.$$

γ. de

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \supset f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

et

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \supset \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}\, F\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_n}\right),$$

on peut conclure

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{n}{2}} x_1 x_2 \ldots x_n G\left(\frac{x_1^2}{4}, \frac{x_2^2}{4}, \frac{x_n^2}{4}\right) \supset f(p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2).$$

B. *Applications.* — On a obtenu ainsi quelques résultats sur les polynomes de Laguerre à n variables, sur les fonctions réciproques de Hankel ou les équations intégrales [52], [73].

L'application aux équations aux dérivées partielles par l'école italienne, déjà signalée, est la plupart du temps indépendante du nombre des variables.

M. Jean Leray a fait, au collège de France, en 1952, un cours sur ce sujet, mais il n'a pas été publié.

M. P. Delerue a généralisé à n variables, les fonctions de Bessel et longuement étudié ces fonctions « hyperbesséliennes » de forme

$$J^{(n)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(x) = \left(\frac{x}{n+1}\right)^{\lambda_1+\lambda_2 \ldots +\lambda_n} \frac{1}{\Gamma(\lambda_1+1)\Gamma(\lambda_2+1)\ldots\Gamma(\lambda_n+1)}$$
$$\times\, {}_0F_n\left[\lambda_1+1, \lambda_2+1, \lambda_n+1\,; -\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\right],$$

nous en donnerons simplement les images.

Posons pour abréger

$$(n+1)\,a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ldots + \lambda_n.$$

Alors on trouve

$$x^{\lambda_1 - a} J^{(n)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n}\left[(n+1)\sqrt[n+1]{x}\right] \supset \frac{1}{p^{\frac{n+1}{n}(\lambda_1 - a)}} J^{(n-1)}_{\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n}\left[\frac{n}{\sqrt[n]{p}}\right],$$

c'est-à-dire que l'image d'une fonction d'ordre n est une fonction d'ordre $n - 1$.

Et en faisant intervenir le CS_n

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{\lambda_j - a} J^{(n)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n}\left[(n+1)\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \ldots x_n}\right] \supset \frac{1}{\prod p_j^{\lambda_j}} e^{-\frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_n}}$$

qui permet d'étendre aux fonctions d'ordre n les propriétés des fonctions ordinaires (du premier ordre) de Bessel [22] comme nous l'avons montré plus haut pour les fonctions de M. Humbert.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CAUCHY, *a. Œuvres*, 1re série, (2), *Mémoire sur le calcul intégral*; 2e série, (7) *Analogies des puissances et des différences.*
b. Exercices mathématiques (2), p. 157.

[2] STEPHENS, *Elementary theory of operational mathematic*, New-York, 1937.

[3] MC LACHLAN, *Complex variable and operational calculus*, Cambridge, University Press, 1939.

[4] PINCHERLE et AMALDI, *Operazioni distributive*, Bologne, 1902.

[5] *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, II, 5, fasc. 1.

[6] HEAVISIDE, *Electromagnetic theory*, I, 1893; II, 1899; III, 1912, Londres.

[7] CARSON, *Electric circuit theory*, New-York, 1926.

[8] DŒTSCH, *Tabellen zur Laplace-Transformation*, Berlin, 1947, p. 68.

[9] H. JEFFREYS et B. S. JEFFREYS, *Methods of mathematical physics*, Cambridge, 1950.

[10] L. POLI, *Revue scientifique*, 1947, p. 616.

[11] VAN DER POL et NYSSENS, *Phil. Mag.*, t. 13, 1932, p. 537.

[12] P. HUMBERT, *C. R. Acad. Sc.*, 1934, p. 657; *Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, 1936, A, p. 26-43.

[13] KOSCHMIEDER, *Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien*, t. 145, 1936, p. 651.

[14] ERDELYI, *Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien.*, t. 146, 1937, p. 431.

[15] VOELKER, *Die Zwei dimensionale Laplace-Transformation*, Fribourg, 1939.

[16] PICONE, *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'intergrazione* (*Atti Acc. Sc.*, Torino, t. 75, 1940).

[17] AMERIO, *Sulla trasformata doppia di Laplace* (*Mem. Acc. Ital.*, t. 12, 1941).

[18] D. BERNSTEIN, *Duke Math. J.*, t. 8, 1941, p. 460.

[19] BOSE, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 1949, p. 173.

[20] VOELKER et DŒTSCH, *Die zweidimensionale Laplace-Transformation*, Bâle, 1950.

[21] CARSTOIU, *Sur le calcul symbolique à deux variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 45).

[22] P. DELERUE, *Sur le calcul symbolique à n variables* (*Thèse*, Montpellier, 1951).

[23] P. HUMBERT et S. COLOMBO, *Calcul symbolique et applications à la Physique mathématique* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. CV).

[24] DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Bâle, 1950.
WIDDER, *The Laplace Transform*, Princeton, 1946.
PARODI, *Applications physiques de la transformation de Laplace* (*C.N.R.S.*, 1948).

[25] SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Paris, 1951.

[26] P. HUMBERT et MC LACHLAN, *Formulaire pour le calcul symbolique* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. C).

[27] P. HUMBERT, MC LACHLAN et L. POLI, *Supplément au formulaire* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. CXIII).

[28] KOGBELIANTZ, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1932, p. 137.

[29] J. MAITRE. *Sur l'intégration généralisée* (*Thèse*. Montpellier, 1950).

[30] L. POLI. *Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, 1949, p. 155.

[31] VAN DER POL, *Operational solution of differential equations* (*Phil. Mag.* t. 8, 1929, p. 863).

[32] E. PICARD, *Leçons sur quelques types d'équations dérivées partielles*, p. 24.

[33] GILLY, *Revue scientifique*, 1945, p. 259.

[34] CHURCHILL, *Math. Z.*, t. 42, 1937, p. 567; t. 43, 1938, p. 743.

[35] PHRAGMEN, *Acta Math.*, 1937, p. 351.

[36] PICONE, *Mem. Acc. Ital.*, t. 6, 1935, p. 643.

[37] WIDDER, *The inversion of the Laplace integral* (*Trans. Amer. Math. Soc.*), t. 36, p. 107).

[38] HARDY, *On differentiation and integration of divergent séries* (*Trans. Camb. Phil. Soc.*, t. 19, 1904, p. 297; t. 21, 1908, p. 1).

[39] TRICOMI, *Rend. Acc. dei Lincei*, 1935, p. 232 et 420.

[40] LERCH, Acta Math., t. 27, p. 339.

[41] PARODI, *Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, 1951, p. 57.

[42] E. PICARD, *Leçons sur quelques types...*, p. 44.

[43] WINTNER, *Math. Z.*, t. 36, 1933. p. 638.

[44] L. POLI, *Sinus du n^{ieme} ordre et* CS (*Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, 1940, p. 16).

[45] L. POLI, *Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, janvier 1952.

[46] P. HUMBERT, *Formules nouvelles pour le* CS (*Bul. Soc. Math. Fr.*, 1937).

[47] BREMMER et VAN DER POL, *Operational calculus*, Cambridge, 1950,

[48] L. POLI, *Ann. Univ. de Lyon*, 1944, p. 21.

[49] P. DELERUE, *Sur une formule opératoire nouvelle* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 229, 1949, p. 1197).

[50] P. HUMBERT et L. POLI, *Sur certaines transcendantes liées au* CS (*Bull. Sc. Math.*, nov. 1944).

[51] VIGNAUX, *Bull. Soc. Roy.*, Liége, 1933, p. 109; *Rend. Circ. dei Lincei*, t. 17, 1933, p. 1055.

[52] P. DELERUE, CS *à* 2 *ou n variables et équations intégrales* (*Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, oct. 1951, p. 96).

[53] ERDELEYI, *Math. Z., t.* 42, 1937. p. 125.

[54] VOLTERRA et PÉRÈS, *Leçons sur la composition et les fonctions permutables*, Paris.

[55] POINCARÉ. *Amer. J. Math.*, 1885, p. 217.

[56] FANTAPPIÉ, *Mem. Acc. Ital.*, t. 1, 1930, p. 25.

[57] LÉVY, *Bull. Sc. Math.*, 1926, p. 174.

[58] J. R. CARSON, *Electric circuit théory*, New-York, 1926.

[59] COHEN, *Théorie du circuit électrique*, Paris, 1935.

[60] WAGNER, *Operatorenrechnung*, Leipzig, 1940.

[61] HERENG, *Applications du calcul opérationnel*, chap. VIII, Paris, 1944.

[62] GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*, Rome, 1943.

[63] CARSLAW et JAEGER, *Operational methods in applied Math.*, New-York.

[64] S. COLOMBO, *Sur les conditions aux limites dans l'équation des télégraphistes C. R. Acad. Sc.*, t. 222, 1946, p. 283).

[65] R. CHURCHILL, *Modern operational mathematics*, New-York, 1944.

[66] GIORGI, *Congrès international de Toronto*, 1924; *Rend. del sem. Mat.*, Milan, 1934 (Metodi moderni di calcolo operatorio funzionali).

D. GRAFFI, *Acc. Pont. Nuovi Lincei*, vol. III, t. 2, p. 211.

SBRANA, *Operatori funzionali multipli* (trois notes) (*Atti Acc. Ligure*, 1949).

[67] L. AMERIO, *Amer. Math. J.*, 1947; *Sull'integrazione* (*Rend. Istituto Lombardo*. 1944).

GHIZETTI, *Problème de Dirichlet et* CS (*Rend. Sem.*, Padova, 1948).

MANGERON, *Rend. Acc. Ital.* (anciens *Lincei*), t. 1, p. 1.

[68 PICONE, *Appunti d'analisi superiore*, Napoli, 1940, p. 718.

FAEDO, *Trasformata multiple di Laplace* (*Rend. Acc. Ita.*, 1941).

[69] TOLOTTI, *Rend. Acc. Ital.*, 1940, p. 514.

[70] P. HUMBERT, *a. Les fonctions de Bessel du troisième ordre* (*Atti dell'acc, Pont. Nuovi Lincei*, 1930).

b. Nouvelles remarques sur les fonctions de Bessel (*Ibid.*, 1934).

[71] M. PARODI, *Équations intégrales et transformation de Laplace* (*Publ. scient. et techn. du Minist. de l'Air*, 1950).

[72] P. DELERUE, *Sur quelques images en* CS *à* 3 *et n variables* (*Bull. Sc. Math.*, 1952).

[73] P. DELERUE, *Sur une généralisation à n variables des polynomes de Laguerre* (*Ann. Soc. Sc.*. Bruxelles, 1952).

D. BERNSTEIN et G. COON, *Sur la transformation double de Laplace* (*Trans. amer. Soc.*, janvier 1953, p. 135-175).

S. K. Bose, *Généralised Laplace Integral of two variables Ganita* (Revue de l'Université de Lucknow), t. 3, n° 1, 1952, p. 23-35].

N. K. Chakrabarty, *Sur le calcul symbolique à deux variables* (*Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, 1953, t. 67, p. 23-28).

N. K. Chakrabarty, *Operational calculus with two variables* (*Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, 1953, t. 67, p. 203-218).

H. Delavault, *Sur un problème de la théorie de la chaleur et sa solution au moyen de la transformation de Hankel* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 2484-2485).

H. Delavault, *Sur un problème de la théorie de la chaleur et sa solution au moyen des transformations de Fourier et de Laplace* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 1067-1068).

P. Delerue, *Sur le calcul symbolique à n variables et sur les fonctions hyperbesseliennes* (*Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, t. 67, 1953, p. 83-105 et 229-275).

P. Humbert, *A propos des fonctions de Bessel à deux variables* (*Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, t. 67, 1953, p. 19-23).

P. Humbert et P. Delerue, *Sur une extension à deux variables de la fonction de Mittag-Leffler* (*C. R. Acar. Sc.*, t. 237, 1953, p. 1059-1060).

H. M. Srivastava, *On some séquences of Laplace Transforms* (*Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, t. 67, 1953, p. 218-229).

Varma, *A généralisation of Laplace Transform* (*Current Scienc.* T. 16, 1947, p. 17-18).

TABLE DES MATIÈRES.