MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

W. J. TRJITZINSKY

Les problèmes de totalisation se rattachant aux laplaciens non sommables

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 125 (1954)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1954__125__1_0>

© Gauthier-Villars, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BSM 3966

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXXV

Les problèmes de totalisation se rattachant aux laplaciens non sommables

Par W. J. TRJITZINSKY

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1954

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
ST-MARTIN-D'HÈRES

Copyright by Gauthier Villars, 1954.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

LES PROBLÈMES DE TOTALISATION

SE RATTACHANT

AUX LAPLACIENS NON SOMMABLES

Par W. J. TRJITZINSKY
(Université d'Illinois, U.S.A).

Introduction. — Si l'on considère l'équation

$$\left\{\begin{array}{ll}(1^{\circ}.1) & \nabla^{0} F(x, y) = -f(x, y) \\ & [(x, y) \text{ sur un domaine ouvert, borné, D, dans le plan } U_2]\end{array}\right.$$

dans la supposition que $f(x, y)$ (réel), unique et fini en tout point de D, soit un laplacien convenable d'une fonction $F(x, y)$ continue sur D, et si l'on cherche à construire $F(x, y)$, étant donné $f(x, y)$, on sera amené à quelques problèmes et méthodes du type qui surviennent dans les totalisations de A. Denjoy [1] [*le livre* [1] *sera désigné par* (D)]; en général, $f(x, y)$ ne sera pas sommable sur D. Dans le présent Ouvrage, il est supposé que les dérivées premières bilatérales (uniques)

$$(1^{\circ}.1\,a) \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

existent et sont continues sur D. Nous tirerons parti de quelques

---

[1] A. Denjoy, *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, Parties I, ..., IV, Paris, 1941-1949, p. 1-714, *désigné dans le texte par* (D).

résultats dans notre travail ([2]), *par la suite, désigné par* (T). De plus, nous sera utile la Note ([3]) de M. Brelot, *désignée par* (B). Le travail (T) et cette étude ne sont qu'un commencement vers la résolution du problème que nous venons d'indiquer; c'est parce qu'il faut établir tant de résultats préliminaires.

Dans (1.4)-(1.4*b*), (1.5)-(1.5*c*), (1.6)-(1.6*b*), (1.8)-(1.8*b*), (1.9)-(1.9*a*) nous étudions la dérivation, sous le signe d'intégration, du potentiel $G(x, y)$ (1.1) et la continuité des dérivées premières; le rôle de ces résultats est de préciser les théorèmes 5.6, 9.7, 9.11, 9.13 dans (T), se rattachant aux représentations potentielles. Les formules (2.1)-(2.6*b*) donnent une récapitulation de divers laplaciens; le théorème 6.10 de (T), [(2.8)-(2.8*c*)], signale un rapport entre la dérivée ordinaire (au sens de fonctions d'intervalle) du flux $\Phi(F \mid I)$ (2.7) et le laplacien ∇^0 (2.6).

Dans la section 3 se trouvent quelques applications des théorèmes de Denjoy (D; p. 174, 175, 199, 208) aux laplaciens mixtes et à la fonction $\omega(x, y; h, k, h', k')$ (2.1*a*), de laquelle ils proviennent : [(3.5)-(3.5*b*)], [(3.8)-(3.8*b*)], [(3.10)-(3.11*b*)], [(3.13)-(3.14*a*)], (3.15)]; il y a des résultats ([(3.16)-(3.16*a*)], (3.17)-(3.17*b*)]) analogues pour les laplaciens spéciaux $\left(\text{sp}\,\overline{\nabla},\ \text{sp}\,\underline{\nabla},\ \text{sp}\,\nabla\right)$ et pour les laplaciens différentiels.

Dans la section 4, on note que le flux $\Phi(I)$ (2.7) d'une fonction $F(x_1, x_2)$ sera continu, si $F(x_1, x_2)$ et les dérivées bilatérales $D_{x_1}F$, $D_{x_2}F$ le sont comme fonctions d'un point (x_1, x_2), Avec une fonction $\Phi(I)$ additive d'intervalle I (mais pas nécessairement un flux) nous associons une fonction H(4.2) de point; pour que $\Phi(I)$ soit continue comme fonction d'intervalle, il est nécessaire et suffisant que H le soit, comme fonction de point; de là on déduit qu'on peut appliquer les théorèmes topologiques de Denjoy pour étudier les dérivés forts (4.4*a*) de $\Phi(I)$. Les dérivés $\overline{\Phi}$, $\underline{\Phi}$, ordinaires peuvent être exprimés par (4.8*a*); si $\Phi(I)$ est continu, ils seront de la classe *deux* de Baire.

Nous étudions topologiquement les dérivées ordinaires, particu-

---

([2]) W. J. Trjitzinsky, *Mixed laplacians and potential representations* (*Annali di Matematica*, série IV, t. 31, 1950, p. 143-230); *désigné par* (T).

([3]) M. Brelot, *Sur l'intégration de* $\Delta u(\mathfrak{M}) = \varphi(\mathfrak{M})$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 201, 1935, p. 1316-1317); *désigné par* (B).

liers, $\overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi$, $\underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi[\lambda_0 > 0, (5.1)]$; ceux-ci sont définis (4.7 *a*), comme certaines limites de la fonction $G(x_1, x_2; T)$ (4.3 *c*), dans l'hypothèse de continuité de $\Phi(I)$. On note que, si la dérivée (unique) $\mathrm{Der}^{x_1, x_2}\Phi$ existe et est finie partout sur D, elle aura la valeur $\mathrm{Der}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi$ pour $\lambda_0 > 1$.

Soit S le segment $\{\alpha_1 \leqq x_1 \leqq \beta_1;\ \alpha_2 \leqq x_2 \leqq \beta_2\}$. *La classe* (c_0) (sur S^0, = l'intérieur de S) est formée par les fonctions $f(x_1, x_2)$, qui en chaque point de S^0 sont les dérivées ordinaires (uniques), finies, des fonctions continues, additives, Φ, d'intervalle I sur S [(6.1)-(6.1 *a*)]. A cause de l'exemple (*d*) de totalisations, donné par Denjoy dans (D; p. 443) on voit qu'il y a *a priori*, une *totalisation* (T_0), dont les opérations, appliquées à f de classe (c_0), devraient uniquement produire la variation $\mathcal{V}(\ldots)$ (6.1 *a*) de

$$H(x_1, x_2) = \Phi(I(\alpha_1, \alpha_2; x_1, x_2)),$$

où $\Phi(I)$ est une fonction d'intervalle, telle que $\mathrm{Der}^{x_1, x_2}\Phi = f$ sur S^0.

Dans la section 7, on remarque que *tout f de (c_0) est nécessairement de la classe un de Baire*. D'où, pour tout f donné de (c_0) il existe un tel *ensemble fermé* F, $\leqq$ S, *non dense sur* S, que la propriété (7.2 *a*) est valable. Avec l'aide du théorème (T; 6.7) de l'auteur, en écrivant

$$2\pi G(s; x_1, x_2) = \iint_s f \log \frac{1}{r}\, dy_1 dy_2,$$

il s'ensuit que

$$\nabla^0 G(s; x_1, x_2) = -f(x_1, x_2)$$

en tout point de continuité approximative de $f(x_1, x_2)$ sur tout segment s, $< S^0$, disjoint de F.

Dans la section 8, nous désignons par (C_0) *la classe formée des totales* (T_0) *f de* (c_0). *La classe* (K_0) est constituée par les fonctions $F(x_1, x_2)$ continues, ainsi que $D_{x_1}F$, $D_{x_2}F$, telles que pour chacune d'elles $\mathrm{Der}^{x_1, x_2}J(F:I) = f(x_1, x_2)$ existe uniquement et est fini en tout point de S^0 [$J(F:I)$ est le flux (7.1 *a*)]; les $f(x_1, x_2)$ ci-dessus forment *la classe* $[c_0]$, $\subset (c_0)$, et les flux $J(F:I)$ constituent *la classe* $[C_0]$, $\subset (C_0)$. Nous définissons *a priori* une opération J^{-1}, comme l'ensemble de procédés (qu'il faut trouver), donnant une solution $F(x_1, x_2)$ de l'équation (7.1 *a*) $J(F:I) = \Phi(I)$, pour $\Phi(I)$ donné de $[C_0]$; pour un $\Phi(I)$ donné, ces solutions ne diffèrent entre elles que par des fonctions $h(x_1, x_2)$, harmoniques sur S^0; $F = J^{-1}T_0 f + h$ sur S^0, si $f \in [c_0]$ (ici on aura $T_0 f \in [C_0]$, $F \in [C_0]$). On remarque (8.5) que $\nabla^0 F(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2)$ sur *l'ensemble* A de points de continuité approximative de $f(x_1, x_2)$ sur $S^0 - F$ et que $f(x_1, x_2) = \mathrm{Der}^{x_1, x_2} J(F:I)$ partout sur S^0 (par définition); ici $f \in [c_0]$, $J(F:I) \in [C_0]$, $F \in (K_0)$. L'ensemble A ci-dessus contient un résiduel R de $S^0 - F$; A est une plénitude de $S^0 - F$.

Dans le théorème 9.12 il est affirmé qu'on aura sur σ_ν :

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma_\nu} f \log \frac{1}{r} \, dy_1 \, dy_2 + Q_\nu(x_1, x_2)$$

[σ_ν = somme finie de segments dans $S - F$; $\sigma_\nu \uparrow S - F$ pour $\nu \to \infty$; $Q_\nu(x_1, x_2)$ harmonique sur σ_ν^0], pourvu que $f(x_1, x_2) \in [c_0]$ et $F(x_1, x_2)$ de (K_0) soit une fonction correspondant à $f(x_1, x_2)$. De plus (théorème 10.7), si $f(x_1, x_2) \in [c_0]$ et $F(x_1, x_2) \in (K_0)$ (f, F se correspondant), si $f(x_1, x_2)$ est sommable sur l'ensemble ouvert O, $\leqq S^0 - F$, on aura sur O :

$$2\pi F(x_1, x_2) = \iint_O f \log \frac{1}{r} \, dy_1 \, dy_2 + h(x_1, x_2),$$

h étant harmonique sur O.

Dans la section 11, en supposant que Ω soit un ensemble ouvert, borné, et que $f(x)[x = (x_1, x_2)]$, pas nécessairement de la classe $[c_0]$ sur Ω, soit mesurable sur Ω et uniformément borné sur tout sous-ensemble borné de Ω et que $f(x)$ puisse être *non sommable* sur Ω, on conclut qu'il y aura une décomposition (théorème 11.14) :

$f = f + \psi$, f_0 *sommable* sur Ω, ψ de *type*-B sur Ω.

Ci-dessus « type-B » est selon la définition 11.12 et signifie la classe de fonctions *continues* de la sorte considérée par Brelot [*voir* (B)] dans une décomposition analogue, donnée pour le cas de fonctions f continues.

Dans le théorème 12.2, nous prouvons que

$$\nabla^0 \iint f \log \frac{1}{r} \, dy = -2\pi f(x) \qquad (dy = dy_1 \, dy_2)$$

sur *l'ensemble* A^* *de points de continuité approximative de* f *sur* Ω, si f est sommable sur Ω et $|f|$ est uniformément borné sur tout sous-ensemble fermé de Ω. Nous dénotons par $L_x(\psi, \Omega)$ l'opération définie à la façon de Brelot, à une fonction harmonique (sur Ω) près, pour ψ de type-B sur Ω, de sorte que $\nabla^0 L_x(\ldots) = -\psi$ sur Ω. Si f mesurable, uniformément borné sur tout sous-ensemble fermé de Ω, est non sommable sur Ω, nous ferons la décomposition $f = f_0 + \psi$ (11.14) et poserons

$$T_x(f, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \iint_\Omega f_0 \log \frac{1}{r} \, dy + L_x(\psi, \Omega); \tag{12.5a}$$

alors

$$\nabla^0 T_x(f, \Omega) = -f(x) \qquad (\text{sur } A^*). \tag{12.5b}$$

Enfin, dans la section 13, se trouve le résultat suivant (th. 13.9). Dans le cas général de $f(x) \in [c_0]$ et $F(x) \in (K_0)$, correspondant à f (sur le rectangle S^0 ouvert), *sur l'ensemble* $\Omega = S^0 - F$ *on aura*

$$F(x) = T_x(f, \Omega) + Q(x),$$

où $T_x(f, \Omega)$ (12.5a) correspond à une décomposition quelconque (11.14) $f = f_0 + \psi$, et $Q(x)$ est harmonique sur Ω.

Pour démontrer cet énoncé on se sert du théorème 14'.9, où il est établi que $L_x(\psi, \Omega)$ [$x = (x_1, x_2)$; $L_x(\ldots)$ donné dans (13.6-6d), dans l'hypothèse (11.10')] possède les dérivées bilatérales. uniques, $\frac{\partial L_x(\psi, \Omega)}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2)$, continues sur Ω. La preuve de ceci dépend de la formule

$$\lim_h \int_0^{2\pi} G_h(\Phi) \, d\Phi = \text{Princ.} \int_0^{2\pi} G(\Phi) \, d\Phi \tag{14.1a}$$

(l'intégration au second membre étant au sens de valeurs principales), valable dans les hypothèses (14.1°, 2°, 3°), et des lemmes 14.3, 14'.3, 14'.7.

Dans la section 15 nous faisons une revue générale des relations, valables sur $\Omega = S^0 - F$, entre les opérations J, J^{-1}, T_0, T_x (théorème (13.9), Der^x; *voir* (15.3-3d). On note (15.4-4a) que (laplacien) $\nabla^0 F(x) = -f(x)$ *sur* A (= l'ensemble de points de continuité approximative de f sur Ω), *si* $f(x) \in [c_0]$ *et* $F(x)$, $\in (K_0)$, *est une fonction correspondante*. Ensuite, *en supposant que* $f(x)$ *soit une fonction particulière de la classe* $[c_0]$ (*sur* S^0), *nous en dérivons une suite de conséquences nécessaires*; la première et la deuxième sont décrites dans [(15.4a)-(15.5c)]; les conséquences

3, 4, 5 se trouvent dans le texte qui précède le théorème 15.12. La classe $[\gamma_5]$ de fonctions satisfaisant ces cinq conditions contient la classe $[c_0]$ [*voir* le texte depuis le théorème 15.12 jusqu'à (15.14*b*)]. Nous introduisons certaines oscillations O_i, $O_{j,i}$ (15.15*a*) des fonctions $T_x(f, \Omega)$, $\frac{\partial}{\partial x_j} T_x(f, \Omega)$. La sixième conséquence est que les limites (15.17) de ces oscillations sont nulles [à comparer avec Denjoy (D; p. 330-331), à propos de la totalisation simple]. La signification de cette conséquence est indiquée dans le théorème 15.21. La septième condition est donnée par (15.21*c*). Pour que f soit de classe $[c_0]$, il est nécessaire et suffisant que les sept conditions indiquées soient valables et que le flux $\Phi(I)$ de $T_x(f, S^0)$ (15.21*c*) ait une dérivée ordinaire, unique et finie $(=f)$ en tout point de S^0; *alors* $F(x) = T_x(f, S^0)$ *sera une fonction de* (K_0) *correspondant à* f (de $[c_0]$).

Le problème du rapport entre f, $\in [c_0]$, et F, $\in (K_0)$, correspondant, n'est encore résolu effectivement que partiellement; c'est-à-dire, seulement sur l'ensemble $\Omega = S_0 - F$ (théorème 13.9). L'analyse présentée dans la section 15 a pour but de contribuer à la résolution complète et effective du problème.

1. Les dérivées premières d'un potentiel. — Soit Ω un domaine (c'est-à-dire, un ensemble ouvert dans le plan U_2) borné; $r(x, y; \xi, \eta) =$ la distance entre les points (x, y), (ξ, η) dans U_2; soient

$$z = x + iy, \qquad \zeta = \xi + i\eta$$

les variables complexes, et introduisons *les coordonnées polaires* (ρ, θ) *de pôle* z, de sorte que $\zeta = z + \rho e^{i\theta}$. *Considérons le potentiel*

$$G(x, y) = \iint_\Omega f(\xi, \eta) \log r^{-1}(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy, \tag{1.1}$$

où dans tous les cas on suppose que $f(\xi, \eta)$ soit une fonction réelle, mesurable sur Ω et telle que l'intégrale (lebesguienne) pour $G(x, y)$ existe (soit finie) pour tous les (x, y) sur Ω.

HYPOTHÈSE 1.2. — L'intégrale

$$f^*(x, y) = \iint_\Omega |f(\xi, \eta)|\, r^{-1}(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{1.2a}$$

existe (est finie) pour tous les (x, y) sur Ω. La fonction d'ensemble mesurable e, $\leqq \Omega$,

$$(1.2b) \qquad p(z, h; e) = \iint_{e(z,h)} |f(\xi, \eta)| \, r^{-1}(x+h, y; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

$[e(z, h) = e\mathrm{S}(z+h, \alpha h)$; $\mathrm{S}(z+h, \alpha h) =$ la région circulaire de points (ξ, η), tels que $\rho' = r(x+h, y; \xi, \eta) \leqq \alpha h$; $0 < h$; $0 < \alpha < 1]$ tend vers zéro avec $m(e)$ (la mesure de e) uniformément par rapport à h.

La dernière partie de l'hypothèse ci-dessus peut être satisfaite en tous les points $z(x, y)$ de Ω ou seulement en quelques-uns des points z ; ce qui veut dire que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta(\varepsilon) = \delta(z, \varepsilon) > 0$ indépendant de h, de sorte que

$$(1.2b') \qquad p(z, h; e) < \varepsilon$$

pour tous les ensembles mesurables e, $\leqq \Omega$, tels que $m(e) \leqq \delta(\varepsilon)$; on pourrait envisager une condition analogue se rattachant à l'intégrale

$$(1.2c) \qquad q(z, k; e) \equiv \iint_{e(z,k)} |f(\xi, \eta)| \, r^{-1}(x, y+k; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta,$$

où

$$e(z, k) = e\mathrm{S}(z+ik, \alpha k), \qquad \mathrm{S}(z+ik, \alpha k) = \{ r(x, y+k; \xi, \eta) \leqq \alpha k \},$$
$$(0 < k, \ 0 < \alpha < 1).$$

Hypothèse 1.3. — Considérons un point $z(x, y)$ de Ω; $\mathrm{W}_z =$ la partie de Ω pour laquelle $-\alpha_0 \leqq \theta \leqq \alpha_0$ (α_0 une constante positive). On suppose qu'en ce point z, $f^*(x, y)$ (1.2a) soit fini, tandis que l'intégrale

$$(1.3a) \qquad \iint_{\mathrm{W}_z} |f(\xi, \eta)| \frac{1}{\rho} \log \frac{b}{|\sin\theta|} \, d\xi \, d\eta$$
$$[\rho = r(x, y; \xi, \eta); \ \zeta = \xi + i\eta = z + \rho e^{i\theta}; \ b > 1]$$

existe; on peut aussi envisager l'existence de l'intégrale

$$(1.3b) \qquad \iint_{\mathrm{W}'_z} |f(\xi, \eta)| \frac{1}{\rho} \log \frac{b}{|\cos\theta|} \, d\xi \, d\eta,$$

où W'_z est la partie de Ω pour laquelle $-\alpha_0 \leqq \theta - \frac{\pi}{2} \leqq \alpha_0$.

Nous allons démontrer le résultat suivant :

(1.4) *Si l'hypothèse* 1.2 *est valable pour* (1.2a) *partout sur* Ω

et pour (1.2*b*) *en un point particulier* $z(x, y)$ *de* Ω, *en ce point on aura* (1.1)

$$(1.4a) \qquad \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) = \iint_\Omega f(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} \log r^{-1}(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Si la condition relativement à (1.2*b*) *est remplacée par celle se rattachant à* $q(z, k; e)$ (1.2*c*), *on obtiendra*

$$(1.4b) \qquad \frac{\partial}{\partial y} G(x, y) = \iint_\Omega f(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial y} \log r^{-1}(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Ci-dessus il s'agit vraiment de dérivés droits uniques; on aura la dérivée unique bilatérale $\frac{\partial}{\partial x} G(x, y)$, *représentée par le deuxième membre dans* (1.4*a*), si aux conditions déjà indiquées on ajoute une condition ayant rapport à une intégrale (1.2*b*), où l'on a remplacé $x + h$, $z + h$ par $x - h$, $z - h$ $\left[\text{nous faisons une remarque semblable pour } \frac{\partial}{\partial y} G(x, y)\right]$.

En écrivant

$$(1_0) \qquad F(x, y) = F(z) = \iint_\Omega f(\zeta) \log \frac{1}{z - \zeta}\, d\xi\, d\eta \qquad f(\zeta) = f(\xi, \eta),$$

on note que $G(z, y) = R\{F(z)\}$, $R\{\ldots\}$ désignant la partie réelle de $\{\ldots\}$. De plus,

$$(2_0) \qquad \frac{1}{h}[F(z + h) - F(z)] + \iint_\Omega \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}\, d\xi\, d\eta = \iint_\Omega f(\zeta)\, \tau_h(z, \zeta)\, d\xi\, d\eta,$$

où

$$\tau_h(z, \zeta) = \frac{1}{h} \log \frac{z - \zeta}{z + h - \zeta} + \frac{1}{z - \zeta} \to 0, \quad \text{avec } h.$$

On obtient

$$(3_0) \qquad \begin{cases} t(z, \zeta; h) = t(x, y; \xi, \eta; h) = R\{\tau_h(z, \zeta)\} = \dfrac{1}{2h} g(h) - \dfrac{\cos\theta}{\rho} \\ (\to 0 \text{ avec } h), \qquad g(h) = \log[\rho^2(\rho^2 - 2\rho h \cos\theta + h^2)^{-1}]. \end{cases}$$

Or le second membre dans (1.4*a*) est identique à

$$\iint_\Omega f(\zeta) \frac{\cos\theta}{\rho}\, d\xi\, d\eta = -R\left\{\iint_\Omega \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}\, d\xi\, d\eta\right\},$$

$\rho = r(x, y; \xi, \eta)$; donc, en prenant la partie réelle dans (2_0), on déduit que

$$\frac{1}{h}[G(x+h, y) - G(x, y)] - \text{le second membre dans } (1.4a)$$
$$= \iint_\Omega f(\zeta)\, t(z, \zeta; h)\, d\xi\, d\eta.$$

De là, le résultat (1.4)-(1.4a) sera établi, si l'on montre que

$$(4_0)\qquad \lim_h \iint_\Omega f(\zeta)\, t(z, \zeta; h)\, d\xi\, d\eta = \iint_\Omega f(\zeta) \lim_h t(z, \zeta; h)\, d\xi\, d\eta \qquad (=0)$$

Pour $\rho = |z - \zeta| > 2h$, on a $h\,|z-\zeta|^{-1} < 2^{-1}$ et (2_0)

$$h\tau_h(z, \zeta) = -\log\left[1 + \frac{h}{z-\zeta}\right] + \frac{h}{z-\zeta} = \frac{h^2}{(z-\zeta)^2}\,\delta, \qquad |\delta| < 1:$$

donc (3_0)

$$(5_0)\qquad |t(z, \zeta; h)| \leqq |\tau_h(z, \zeta)| < \frac{h}{\rho^2} < \frac{2^{-1}}{\rho}$$

pour $\zeta(\xi, \eta)$ sur $\Omega_h = \Omega - \Omega S(z, 2h)$.

Considérons la région

$$(6_0)\qquad S'_h = S(z, 2h) - S(z, \alpha h) - S(z+h, \alpha h) \qquad \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right);$$

sur S'_h, on a

$$\alpha h < \rho \leqq 2h, \qquad \alpha h < \rho' \leqq 3h, \qquad \frac{\alpha}{3} < \frac{\rho}{\rho'} < \frac{2}{\alpha}$$
$$[\rho' = |\zeta - (z+h)| = r(x+h, y; \xi, \eta)];$$

donc (3_0) :

$$(7_0)\qquad |t(z, \zeta; h)| \leqq \frac{1}{h}\left|\log\frac{\rho}{\rho'}\right| + \frac{1}{\rho} < \frac{1}{h}\log\frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\rho} < \frac{c'}{\rho} \qquad (\text{sur } S'_h),$$

où $c' = 1 + 2\log\frac{3}{\alpha}$. Quant à $S(z, \alpha h)$, on y obtient

$$(1-\alpha)h \leqq \rho' \leqq (1+\alpha)h, \qquad 1 < \frac{\rho'}{\rho} \leqq (1+\alpha)\frac{h}{\rho};$$

d'après (3_0),

$$\rho\,|t(z, \zeta; h)| \leqq \frac{\rho}{h}\log\frac{\rho'}{\rho} + 1 \leqq \frac{\rho}{h}\log\left[(1+\alpha)\frac{h}{\rho}\right] + 1;$$

ici $\nu = h\rho^{-1} \geqq \alpha^{-1} (> 2)$, et le second membre ci-dessus ne dépasse pas $c'' + 1$, où

$$c'' = \max(\alpha^{-1} < \nu < +\infty)\,\frac{1}{\nu}\log(1+\alpha)\nu;$$

de là

$$(8_0) \qquad |t(z,\xi;h)| \leqq \frac{c''+1}{\rho} \qquad [\text{sur } S(z,\alpha h)].$$

En considérant $S(z+h,\alpha h)$, on trouve que $\frac{\rho'}{\rho} > 1$ et

$$\rho' \leqq \alpha h, \qquad (1-\alpha)h \leqq \rho \leqq (1+\alpha)h; \qquad \left|\log\frac{\rho}{\rho'}\right| = \log\frac{\rho}{\rho'} \leqq \log\frac{(1+\alpha)h}{\rho'};$$

d'où (3_0)

$$\rho'|t(z,\zeta;h)| \leqq \frac{\rho'}{h}\log\frac{\rho}{\rho'} + \frac{\rho'}{\rho} \leqq \frac{\rho'}{h}\log\frac{(1+\alpha)h}{\rho'} + \frac{\alpha}{1-\alpha};$$

$$v' = \frac{h}{\rho'} \geqq \frac{1}{\alpha};$$

donc

$$(9_0) \qquad |t(z,\zeta;h)| \leqq \frac{c^0}{\rho'}, \qquad c^0 = c'' + \frac{\alpha}{1-\alpha} \qquad [\text{sur } S(z+h,\alpha h)],$$

où c'' est le nombre introduit ci-dessus.

La signification de (5_0), (7_0), (8_0), (9_0) est qu'il existe une constante c_0, >0, indépendante de h, telle que

$$(10_0) \qquad \begin{cases} |t(z,\zeta;h)| < \dfrac{c_0}{\rho} & [\text{sur } \Omega \text{ pour } \rho' = r(x+h,y;\xi,\eta) > \alpha h], \\ |t(z,\zeta;h)| < \dfrac{c_0}{\rho'} & (\text{pour } \rho' \leqq \alpha h). \end{cases}$$

Soit e un ensemble mesurable, quelconque, $\leqq \Omega$. En nous rappelant la notation dans $(1.2b)$, en vertu de (10_0), on obtient

$$\begin{aligned}
(11_0) \qquad \lambda_e &\equiv \left|\iint_e f(\zeta)t(z,\zeta;h)\,d\xi\,d\eta\right| \\
&\leqq \iint_e |f(\zeta)|\,|t(z,\zeta;h)|\,d\xi\,d\eta = \iint_{e-e(z,h)} \ldots + \iint_{e(z,h)} \ldots \\
&\leqq c_0 \iint_{e-e(z,h)} |f(\zeta)|\frac{d\xi\,d\eta}{\rho} + c_0 \iint_{e(z,h)} |f(\zeta)|\frac{d\xi\,d\eta}{\rho'} \\
&\leqq c_0 \iint_e |f(\zeta)|\frac{d\xi\,d\eta}{\rho} + c_0\,p(z,h;e) \\
&\qquad [\rho = r(x,y;\xi,\eta)].
\end{aligned}$$

A cause de l'hypothèse dans (1.4)-$(1.4b)$, on conclut $(1.2b')$ que

$$p(z,h;e) < \frac{\varepsilon}{2c_0}$$

pour tous les ensembles mesurables e, $\leqq \Omega$, tels que $m(e) \leqq \delta_0(\varepsilon)$,

$\delta_0(\varepsilon)\,(>0)$ étant indépendant de h $(0 < h \leqq h_0)$; d'autre part, en vue de l'existence de l'intégrale $f^*(x, y)$ (1.2), on aura

$$\iint_e |f(\zeta)| \frac{d\xi\, d\eta}{\rho} < \frac{\varepsilon}{2c_0}$$

pour tous les e, $\leqq \Omega$, mesurables, avec $m(e) \leqq \delta_1(\varepsilon)\,(>0)$, où $\delta_1(\varepsilon)$ est indépendant de h. Par conséquent (11_0),

$$(12_0) \qquad \lambda_e \leqq \varepsilon$$

pour tous les e, $\leqq \Omega$, ayant $m(e) \leqq \delta(\varepsilon)$, où le nombre

$$\delta(\varepsilon) = \min[\delta_0(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon)]; \qquad > 0,$$

est *indépendant de h*. C'est-à-dire, l'absolue continuité de la fonction additive d'ensemble mesurable e,

$$\iint_e f(\zeta)\, t(z, \zeta;\, h)\, d\xi\, d\eta,$$

est uniforme par rapport à h. Donc en vue d'un théorème connu sur le passage à la limite sous le signe d'intégration on justifie la formule (4_0), *ce qui démontre le résultat voulu* (1.4)-$(1.4a)$; la preuve de (1.4)-$(1.4b)$ se fait d'une façon toute semblable.

(1.5). *Si l'intégrale $f^*(x, y)$ $(1.2a)$ existe en tous points de Ω et si, pour un point $z = (x, y) = x + iy$ donné sur Ω, on a*

$$(1.5a) \quad \lim_{h \to 0} \iint_{S(z+h,\, \alpha h)} |f(\xi, \eta)|\, r^{-1}(x+h, y;\, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0 \quad (0 < \alpha < 1, h > 0),$$

alors en ce point on aura (le dérivé droit, unique)

$$(1.5b) \qquad \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) = \iint_\Omega f(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} \log r^{-1}(x, y;\, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta;$$

il y a un pareil résultat pour $\dfrac{\partial G(x, y)}{\partial y}$ *(le dérivé droit, unique); de plus,* $\dfrac{\partial G(x, y)}{\partial x}$ *dans $(1.5b)$ sera la dérivée unique, bilatérale, si à la condition $(1.5a)$ on ajoute*

$$(1.5c) \quad \lim_{k \to 0} \iint_{S(z-k,\, \alpha k)} |f(\xi, \eta)|\, r^{-1}(x - k, y;\, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0 \qquad (k > 0);$$

une remarque semblable est faite pour la dérivée $\dfrac{\partial G(x, y)}{\partial y}$.

En effet, soit

$t_0(z, \zeta; h) = t(z, \zeta; h)$ [sur $\Omega' = \Omega - S(z+h, \alpha h)$], $= 0$, [sur $S(z+h, \alpha h)$];

on aura (10_0)

$$|t_0(z, \zeta; h)| \leq |t(z, \zeta; h)| \to 0, \text{ avec } h, \qquad |t_0(z, \zeta; h)| < \frac{c_0}{\rho} \text{ (sur } \Omega),$$

où $\rho = |z - \zeta|$; or

$$\iint_\Omega |f(\zeta)| \rho^{-1} d\xi\, d\eta < \infty,$$

vu l'hypothèse; donc

$$\lim_{h \to 0} \iint_\Omega |f(\zeta)|\, |t_0(z, \zeta; h) d\xi\, d\eta = 0:$$

d'autre part (10_0),

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_\Omega f(\zeta)\, t(z, \zeta: h)\, d\xi\, d\eta \right| \\
&= \left| \iint_\Omega f(\zeta)\, t_0(z, \zeta; h)\, d\xi\, d\eta + \iint_{S(z+h, \alpha h)} f(\zeta)\, t(z, \zeta; h)\, d\xi\, d\eta \right| \\
&\leq \iint_\Omega |f(\zeta)|\, |t_0(z, \zeta; h)|\, d\xi\, d\eta + \iint_{S(z+h, \alpha h)} |f(\zeta)| \frac{1}{\rho'} d\xi\, d\eta \\
&\qquad [\rho' = r(r+h, y; \xi, \eta)];
\end{aligned}$$

d'où dans la condition ($1.5a$) on aura

$$\lim_{h \to 0} \iint_\Omega f(\zeta) t(z, \zeta; h)\, d\xi\, d\eta \equiv 0;$$

c'est-à-dire, (4_0) sera valable; *d'où le résultat voulu pour le dérivé* (*unique*) *droit* $\frac{\partial G(x, y)}{\partial x}$. Le reste de (1.5)-(1.5$c$) est établi de la même façon.

Nous allons maintenant démontrer le résultat suivant relativement à la dérivation du potentiel $G(x, y)$ (1.1).

(1.6). *Si l'hypothèse* (1.3) *est valable, soit* (1.3 a), *en un point donné* $z = (x, y)$ *de* Ω, *en ce point on aura*

$$(1.6\,a) \qquad \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) = \iint_\Omega f(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} \log r^{-1}(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta;$$

dans le cas où la condition relativement à (1.3 a) *est remplacée* *par celle en rapport avec* (1.3 *b*), *au lieu de* (1.5 *a*), *on obtiendra*

$$(1.6\,b)\qquad \frac{\partial}{\partial y}G(x,y)=\iint_\Omega f(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial y}\log r^{-1}(x,y;\,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Nous faisons ici une remarque analogue à celle suivant (1.4)-(1.4 *b*). Dans les conditions indiquées, $\frac{\partial G}{\partial x}\left[\frac{\partial G}{\partial y}\right]$ est le dérivé droit unique. $\frac{\partial G}{\partial x}$ *dans* (1.6 *a*) *sera la dérivée* (*unique*) *bilatérale au point* $z(x,y)$ *considéré*, si à la condition relative à (1.3 *a*), on ajoute la condition

$$\iint_{W^z}|f(\xi,\eta)|\frac{1}{\rho}\log\frac{b}{|\sin\theta|}\,d\xi\,d\eta<\infty,$$

où W^z est la partie de Ω pour laquelle $-\alpha_0\leqq\theta-\pi\leqq\alpha_0$ $(\alpha_0>0)$ [une pareille condition suffira pour l'existence de la dérivée (unique) bilatérale $\frac{\partial G}{\partial y}$].

La relation (1.6 *a*) *s'ensuivra si l'on démontre* (4_0). Nous avons encore les inégalités (10_0); la seconde sera remplacée par une autre. En vue de (3_0), sur $S(z+h,\alpha h)$,

$$\rho\,|t(z,\zeta;h)|=\left|\frac{\rho}{h}\log\frac{\rho}{\rho'}-\cos\theta\right|\leqq\frac{\rho}{h}\log\frac{\rho}{\rho'}+1\leqq(1+\alpha)\log\frac{\rho}{\rho'}+1;$$

or

$$\rho'=[(h-\rho\cos\theta)^2+\rho^2\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}}\geqq\rho\,|\sin\theta|;$$

d'où

$$|t(z,\zeta;h)|\leqq\frac{d_0}{\rho}\log\frac{1}{|\sin\theta|}\qquad(d_0=\text{const.}>0),$$

sur $S(z+h,\alpha h)$ $\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$; de plus (10_0), $|t(\ldots)|<c_0\rho^{-1}$ hors de $S(z+h,\alpha h)$; donc

$$|t(z,\zeta;h)|<\frac{d_1}{\rho}\log\frac{b}{|\sin\theta|}\qquad(d_1=\text{const.}>0,\ b>1)$$

sur W_z (l'hypothèse 1.3), pourvu que le nombre α_0 employé dans la définition de W_z soit tel que $W_z\geqq S(z+h,\alpha h)$; on peut prendre $\sin\alpha_0=\alpha$; enfin on conclut que *sur* Ω *on a*

$$(13_0)\qquad |t(z,\zeta;h)|<\psi_z(\xi,\eta)=\begin{cases} c_0\rho^{-1} & (\text{sur }\Omega-W_z),\\ d_1\rho^{-1}\log\dfrac{b}{|\sin\theta|} & (\text{sur }W_z)\end{cases}$$

pour toutes les valeurs $0 < h \leq h_0$; ici le second membre $\psi_z(\xi, \eta)$ est indépendant de h. Dans l'hypothèse 1.3 [l'intégrale (1.3 *a*) supposée existante] la fonction $|f(\xi, \eta)|\psi_z(\xi, \eta)$, indépendante de h, est sommable sur Ω, par rapport à (ξ, η); d'autre part (13₀).

$$|f(\zeta)t(z, \zeta; h)| < |f(\xi, \eta)|\psi_z(\xi, \eta) \qquad (\text{sur } \Omega).$$

Donc le passage à la limite dans (4₀) est permis; *ceci démontre* (1.6 *a*); le reste de (1.6)-(1.6 *b*) est établi pareillement.

Considérons, par exemple, le second membre dans (1.4 *a*), (1.6 *a*):

$$(1.7) \qquad Q(x, y) \equiv \iint_\Omega f(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} \log r^{-1}(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Nous allons démontrer le résultat suivant :

(1.8) *L'intégrale* $Q(x, y)$ (1.7) *représentera une fonction continue en un point* $z = (x, y) = x + iy$ *donné sur* Ω, *pourvu que*

$$(1.8\,a) \quad \begin{cases} f^*(x,y) = f^*(z) = \displaystyle\iint_\Omega \frac{|f(\xi, \eta)|}{r(x, y; \xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta = \iint_\Omega \frac{|f(\zeta)|}{\rho}\, d\xi\, d\eta < +\infty \\ \qquad (\zeta = \xi + i\eta) \end{cases}$$

en tous les points de Ω *et, étant donné un* $\varepsilon, > 0$, *quelconque, on a*

$$(1.8\,b) \quad \begin{cases} w(z, z'; e) = \displaystyle\iint_{e(z', \alpha r)} \frac{|f(z)|}{\rho'}\, d\xi\, d\eta < \varepsilon \\ [\rho' = r(x', y'; \xi, \eta) = |z' - \zeta|, \ z' = x' + iy', \ r = |z - z'|, \\ \qquad e(z', \alpha x) = e\,S(z', \alpha r), \ 0 < \alpha < 1] \end{cases}$$

pour tous les ensembles $e, \leq \Omega$, *ayant la mesure* $m(e) \leq \delta(\varepsilon)$, *où* $\delta(\varepsilon)$ *est positif et est indépendant de* z' [$\delta(\varepsilon)$ *pourrait dépendre de* z].

Les conditions ci-dessus seront satisfaites, si pour un $p > 2$, f^p *est sommable sur* Ω.

En vertu de la remarque qui suit (3₀) on a

$$Q(x, y) = -R\left\{\iint_\Omega \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}\, d\xi\, d\eta\right\}, \qquad Q(x', y') = -R\left\{\iint_\Omega \frac{f(\zeta)}{z' - \zeta}\, d\xi\, d\eta\right\};$$

de là

$$(14_0) \quad |Q(x, y) - Q(x', y')| = \left|\iint_\Omega f(\zeta) R\left\{\frac{z' - z}{(\zeta - z')(\zeta - z)}\right\} d\xi\, d\eta\right| \leq \iint_\Omega |f(\zeta)| \frac{r}{\rho'\rho}\, d\xi\, d\eta.$$

Pour $\zeta = (\xi, \eta) = \xi + i\eta$ sur $\Omega' = \Omega - S(z', \alpha r)$, on a $\rho' > \alpha r$ et

$$(15_0) \qquad \frac{r}{\rho'\rho} < \frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{\rho},$$

tandis que sur $S(z', \alpha r)$, $\rho \geqq (1-\alpha)r$ et

$$(16_0) \qquad \frac{r}{\rho'\rho} \leqq \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{\rho'}.$$

Donc, avec la notation dans $(1.8\,b)$:

$$(17_0) \qquad \iint_e |f(\zeta)|\,\frac{r}{\rho'\rho}\,d\xi\,d\eta$$

$$= \iint_{e\Omega'} \cdots + \iint_{e(z', \alpha r)} \cdots$$

$$\leqq \iint_{e\Omega'} |f(\zeta)|\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{\rho}\,d\xi\,d\eta + \iint_{e(z', \alpha r)} |f(\zeta)|\,\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{\rho'}\,d\xi\,d\eta$$

$$\leqq \frac{1}{\alpha}\iint_e |f(\zeta)|\,\frac{1}{\rho}\,d\xi\,d\eta + \frac{1}{1-\alpha}\,w(z, z'; e).$$

Grâce à l'existence de l'intégrale $f^*(x, y)$ $(1.8\,a)$ et de la condition $(1.8\,b)$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe des nombres $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2(\varepsilon) > 0$, indépendants de z', de sorte que :

$$\frac{1}{\alpha}\iint_e |f(\zeta)|\,\frac{1}{\rho}\,d\xi\,d\eta < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour tous les } e, \leqq \Omega, \text{ avec } \ m(e) \leqq \delta_1(\varepsilon);$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\,w(z, z'; e) \quad > \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour tous les } e, \leqq \Omega, \text{ ayant } m(e) \leqq \delta_2(\varepsilon);$$

ainsi (17_0)

$$\iint_e |f(\zeta)|\,\frac{r}{\rho'\rho}\,d\xi\,d\eta < \varepsilon \qquad \text{pour } e, \leqq \Omega, \text{ de mesure} \leqq \delta_0(\varepsilon),$$

où $\delta_0(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \ \delta_2(\varepsilon)) > 0$ est indépendant de z'. Cela signifie que la continuité absolue du premier membre ci-dessus, considéré comme fonction d'ensemble mesurable e, est uniforme par rapport à z' (pour le point fixe z, donné sur Ω). Donc pour (14_0), on peut passer à la limite sous le signe d'intégration, obtenant

$$\lim_{z' \to z} |\,Q(x, y) - Q(x', y')\,| = 0,$$

ce qui démontre (1.8) — $(1.8\,b)$.

(1.9) *L'intégrale* $Q(x, y)$ (1.7) *représentera une fonction continue en un point z donné sur* Ω, *si l'intégrale* $f^*(x, y)$ (1.8 *a*) *existe en tous les points de* Ω, *tandis que*

$$(1.9\,a)\qquad \lim_{z' \to z} \iint_{S(z', \alpha r)} \frac{|f(\zeta)|}{\rho'} d\xi\, d\eta = 0 \qquad (r = |z - z'|,\ 0 < \alpha < 1);$$

les hypothèses ci-dessus seront valables, par exemple, si f^p *est sommable sur* Ω *pour un* $p > 2$.

Pour établir ce résultat, considérons la fonction

$$\begin{aligned} q(z, z', \zeta) &= \frac{r}{\rho'\rho} \qquad [\text{pour } \zeta = (\xi, \eta) \text{ sur } \Omega' = \Omega - S(z', \alpha r)],\\ &= 0 \qquad [\text{pour } \zeta \text{ sur } S(z', \alpha r)]. \end{aligned}$$

On remarque (15_0) que

$$(18_0)\qquad q(z, z', \zeta) \leq \frac{r}{\rho'\rho} \to 0 \ \text{ avec } r; \qquad q(\zeta, z', \zeta) < \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\rho} \quad (\text{sur } \Omega).$$

D'autre part (16_0),

$$\begin{aligned} (19_0)\qquad & \iint_{\Omega} |f(\zeta)| \frac{r}{\rho'\rho} d\xi\, d\eta \\ &= \iint_{\Omega} |f(\zeta)|\, q(z, z', \zeta)\, d\xi\, d\eta + \iint_{S(z', \alpha r)} |f(\zeta)| \frac{r}{\rho'\rho} d\xi\, d\eta \\ &\leq \iint_{\Omega} |f(\zeta)|\, q(z, z', \zeta)\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{1-\alpha} \iint_{S(z', \alpha r)} |f(\zeta)| \frac{1}{\rho'} d\xi\, d\eta. \end{aligned}$$

Or (18_0)

$$\lim_{z' \to z} |f(\zeta)|\, q(z, z', \zeta) = 0, \qquad |f(\zeta)|\, q(z, z', \zeta) \leq \frac{1}{\alpha} \frac{|f(\zeta)|}{\rho};$$

le dernier membre ici est indépendant de z' et est sommable sur Ω [l'hypothèse dans (1.9)]. De là, en revenant à (19_0) et en se servant de (1.9 *a*), on obtient

$$\lim_{z' \to z} \iint_{\Omega} |f(\zeta)| \frac{r}{\rho'\rho} d\xi\, d\eta = 0.$$

Enfin (14_0), il s'ensuit que

$$\lim_{z \to z'} |Q(x, y) - Q(x', y')| = 0.$$

Ainsi *le résultat* (1.9)-(1.9 *a*) *a été démontré.*

REMARQUE 1.10. — Les résultats (1.8)-(1.8*b*), (1.9)-(1.9*a*) resteront valables, si l'on y remplace $Q(x, y)$ par la fonction dans les seconds membre de (1.4*b*), (1.6*b*) :

$$P(x, y) = \iint_\Omega f(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial y} \log r^{-1}(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta; \tag{1.10a}$$

plus généralement, ces résultats obtiennent pour la fonction

$$\Gamma(x, y) = \iint_\Omega \frac{f(\xi, \eta)}{r(x, y; \xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta. \tag{1.10b}$$

REMARQUE 1.11. — Les méthodes utilisées jusqu'ici peuvent être appliquées dans la théorie des fonctions d'une variable complexe z pour étudier la dérivabilité et la continuité des intégrales Lebesgue-Stieltjes :

$$\iint_\Omega \log \frac{1}{\zeta - z}\, d\mu(e_\zeta), \quad \iint_\Omega \frac{d\mu(e_\zeta)}{(\zeta - z)^n}$$

(une détermination convenable de log ...; un entier $n \geqq 1$). Celles-ci, contenant le noyau de Cauchy ou les dérivées d'un ordre quelconque d'un tel noyau, ont une importance naturelle pour la représentation de diverses classes de fonctions, qui peuvent être non analytiques, d'une variable complexe.

Les résultats ci-dessus sont utiles pour préciser les théorèmes 5.6, 9.7, 9.11, 9.13, *qui se trouvent dans* (T) et qui, dans certaines conditions, donnent des représentations potentielles

$$\begin{cases} F(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} G(x, y) + h(x, y), \\ G(x, y) = \displaystyle\iint_\Omega f(\xi, \eta) \log \frac{1}{r(x, y; \xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta, \end{cases} \tag{1.11}$$

$F(x, y)$ étant donné sur Ω, F, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ étant continus sur Ω ; ici $f(\xi, \eta)$ est la dérivée ordinaire (au sens de dérivations de fonctions d'intervalle) du flux

$$\Phi(I) = \int_{(I)} \frac{d}{dn} F(x, y)\, ds(x, y) \quad \text{(la normale intérieure)} \tag{1.11a}$$

à travers la frontière (I) d'intervalle I. *Il faut admettre la possibilité d'existence d'un ensemble singulier (fermé)* F_s, $\leqq \Omega$, *de la fonction harmonique* $h(x, y)$; cet ensemble F_s, s'il existe, est défini par

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SCE VICE DE MATHÉMATIQUES PURES
38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

condition qu'en tout point (x, y) d'ensemble ouvert $\Omega - F_s$ on a, à la fois;

$$(1^\circ)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial G(x, y)}{\partial x} = \displaystyle\iint_{\Omega} f(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta, \\ \dfrac{\partial G(x, y)}{\partial y} = \displaystyle\iint_{\Omega} f\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta \end{cases}$$

(les dérivées uniques bilatérales);

(2°) Les seconds membres dans (1°) sont continus en (x, y).

F_s *sera vide, si* $|f(\xi, \eta)|$ *est borné sur* Ω. Dans le cas, où $f(\xi, \eta)$ est la dérivée ordinaire (unique, finie) du flux Φ (I) (1.11 a) en tout point de Ω, on verra que $f(\xi, \eta)$ sera de Baire classe *un*; dans ce cas il existe un ensemble fermé F_0, $\leqq \Omega$, *non dense* sur Ω, de sorte que $|f(\xi, \eta)|$ est uniformément borné sur tout sous-ensemble fermé de $\Omega - F_0$; les conditions (1°), (2°) seront valables sur l'ensemble ouvert $\Omega - F_0$; ainsi $F_s \leqq F_0$; $h(x, y)$ *dans* (1.11) *sera harmonique au moins sur* $\Omega - F_0 (\leqq \Omega - F_s)$; à l'aide des résultats (1.4)-(1.4 b), (1.5)-(15 c), (1.6)-(1.6 b), (1.8)-(1.8 b), (1.9)-(1.9 a); généralement on pourrait remplacer l'ensemble $\Omega - F$ par un autre, plus étendu.

2. **Les laplaciens.** — *Les laplaciens mixtes* [T; (2.2)-(2.2 a)], sup., inf., unique *d'une fonction continue* $F(x, y)$, (x, y) représentant un point dans l'ensemble ouvert, borné D dans le plan U_2,

$$(2.1)\qquad \overline{\nabla}F,\quad \underline{\nabla}F,\quad \nabla F,$$

sont les limites sup., inf. et unique, pour h, k, h' $k' (> 0) \to 0$, de

$$(2.1\,a)\quad \omega(h, k, h', k') = \frac{2}{h+k}\left[\frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h} - \frac{F(x, y) - F(x-k, y)}{k}\right] + \frac{2}{h'+k'}\left[\frac{F(x, y+h') - F(x, y)}{h'} - \frac{F(x, y) - F(x, y-k')}{k'}\right]$$

(*cf.* [T; (2.2)-(2.2 a)]). *Supposons que* $|F(x, y)|$ *est borné sur* D. On aura toujours h, k, h', $k' > 0$. *Les laplaciens généralisés* (de Zaremba), sup., inf., unique,

$$(2.2)\qquad \overline{\nabla}F,\quad \underline{\nabla}F,\quad \nabla F,$$

s'obtiennent quand ci-dessus on pose $h = k = h' = k'$.

Les laplaciens spéciaux, sup., inf., unique, sont les limites sup., inf., unique (selon le cas) de $\omega(h, k, h, k)$ (2.1 *a*) :

$$(2.3)\quad \begin{cases} \mathrm{sp}\,\overline{\nabla}\,F(x, y) = \overline{\lim_{h,k}}\,\omega(h, k, h, k), \qquad \mathrm{sp}\,\underline{\nabla}\,F(x, y) = \underline{\lim}\,\omega(h, k, h, k), \\ \mathrm{sp}\,\nabla\,F(x, y)\,(\text{unique}) = \lim\omega(h, k, h, k) \qquad \left(\text{si } \mathrm{sp}\,\overline{\nabla} = \mathrm{sp}\,\underline{\nabla}\right) \end{cases}$$

(*cf.* [T; (4.1 *a*)-(4.1 *c*)]). Lorsqu'en un point (x, y), $F(x, y)$ possède les dérivées finies, bilatérales (uniques) $D_x F(x, y)$, $D_y F(x, y)$, écrivons

$$(2.4)\quad \Omega(u) \equiv \Omega(x, y; u) = \frac{2}{u}\left[\frac{F(x+u, y) + F(x, y+u) - 2F(x, y)}{u} - D_x F(x, y) - D_y F(x, y)\right].$$

Les laplaciens différentiels (sup., inf., unique) sont

$$(2.4\,a)\quad \begin{cases} \overline{\nabla}''\,F(x, y) = \overline{\lim_{u}}\,\Omega(u), \qquad \underline{\nabla}'' = \underline{\lim_{u}}\,\Omega(u), \\ \nabla''\,(\text{unique}) = \lim\Omega(u) \qquad \left(\text{si } \overline{\nabla}'' = \underline{\nabla}''\right), \end{cases}$$

u ici restant positif (*cf.* [T; (4.2)-(4.3 *a*)]).

Si les dérivées (par rapport aux x, y) *finies, bilatérales* (uniques) *existent en* (x, y) *et dans un voisinage* (ouvert) *de* (x, y) *nous définissons*

$$(2.5)\quad T(F; u) = T(u) = \frac{1}{u}[D_x F(x+u, y) + D_y F(x, y+u) - D_x F(x, y) - D_y F(x, y)]$$

($u \neq 0$ réel, de signe variable ou non);

$$(2.5\,a)\quad \begin{cases} \overline{T}^{+}(x, y) = \overline{\lim_{h}}\,T(h) \quad (h > 0), \\ \overline{T}^{-}(x, y) = \overline{\lim_{k}}\,T(-k) \quad (k > 0), \\ \underline{T}^{+}(x, y) = \underline{\lim}\,T(h), \qquad \underline{T}^{-}(x, y) = \underline{\lim}\,T(-k); \end{cases}$$

$$(2.5\,b)\quad \begin{cases} D'' = D''(x, y) = \max\left\{\overline{T}^{+}(x, y),\ \overline{T}^{-}(x, y)\right\}, \\ \delta'' = \delta''(x, y) = \min\left\{\underline{T}^{+}(x, y),\ \underline{T}^{-}(x, y)\right\}; \end{cases}$$

alors [T; (4.15)]

$$(2.5\,c)\quad \delta'' \leq \mathrm{sp}\,\underline{\nabla}\,F(x, y) \leq \mathrm{sp}\,\overline{\nabla}\,F(x, y) \leq D'';$$

dès lors, *si la limite unique*

$$(2.6)\quad \lim_{u} T(F; u) = \nabla^{0}\,F(x, y) \qquad (u \text{ de signe variable})$$

existe (ce qui nous donne $\delta'' = \mathrm{D}''$), *on aura*

$$\nabla^0 \mathrm{F}(x, y) = \mathrm{sp}\nabla \mathrm{F}(x, y) \tag{2.6 a}$$

[dans l'hypothèse faite dans le texte qui précède (2.5)]; δ'', D'' sont une sorte de *laplaciens extrêmes*; dans les conditions indiquées, vu le théorème 4.5 de (T), on aura

$$\nabla^0 \mathrm{F}(x, y) = \nabla'' \mathrm{F}(x, y). \tag{2.6 b}$$

Soit I un intervalle (un rectangle ouvert), (I) sa frontière. *Le flux* de F autour de (I) est

$$\Phi(\mathrm{F} \mid \mathrm{I}) = \Phi(\mathrm{I}) = \int_{(\mathrm{I})} \frac{d}{dn} \mathrm{F}(x, y)\, ds(x, y) \tag{2.7)}$$

[normale intérieure en (x, y), sur (I); $ds(x, y) =$ l'élément de longueur], si l'intégrale au dernier membre a un sens.

Selon le théorème 6.10 de (T) :

Si dans un ensemble ouvert $\omega \leqq \mathrm{D}$:

(2.8) $\mathrm{F}(x, y)$, $\mathrm{D}_x\mathrm{F}(x, y)$, $\mathrm{D}_y\mathrm{F}(x, y)$ sont continus sur ω;

(2.8 a) le flux $\Phi(\mathrm{I})$ (2.7) est absolument continu dans ω, comme une fonction d'intervalle I ($\leqq \omega$);

(2.8 b) $\mathrm{Der}^{x,y}\Phi$ (la dérivée ordinaire de fonction d'intervalle) existe et est bornée sur une plénitude ω_1, de ω, alors on aura

$$\mathrm{Der}^{x,y}\Phi = -\nabla^0 \mathrm{F}(x, y) \quad [\text{le laplacien } \nabla^0 \text{ de } (2.6)] \tag{2.8 c}$$

sur la plénitude $\omega_1\omega_0$ de ω, ω_0 étant l'ensemble de *la continuité approximative de* $\mathrm{Der}^{x,y}\Phi$.

Dans l'épreuve du résultat (T; 9.3), il a été noté que les hypothèses des théorèmes (T; 9.1-9.2) entraînent les conditions (2.8), (2.8 a), (2.8 b); dès lors *dans les hypothèses des théorèmes* (T; 9.1-9.2), *on a*

$$\mathrm{Der}^{x,y}\Phi = -\nabla^0 \mathrm{F}(x, y) \tag{2.9}$$

sur une plénitude de l'ensemble ouvert considéré.

3. Propriétés topologiques se rapportant aux laplaciens mixtes, etc. — On parle toujours des ensembles parfaits P qui se trouvent dans D (ou un autre ensemble ouvert, borné, connexe, que nous appellerons *domaine*). U_p (entier $p > 0$) dénotera l'espace de p

dimensions. On a D dans U_2. Soit $X = (x, y)$ un point variable sur P et $T = (h, k, h', k')$ un point variable dans l'ensemble e, défini par des inégalités

$$(3.1)\qquad 0 < h \leqq h_0, \qquad 0 < k \leqq k_0, \qquad 0 < h' \leqq h'_0, \qquad 0 < k' \leqq k'_0.$$

Le point $T_0(0, 0, 0, 0)$ est étranger à e; T_0 est un point d'accumulation de e; l'ensemble e est dans l'espace U_4. Considérons la fonction (**2**.1 a)

$$(3.1\,a)\qquad Y = f(X, T) = \omega(x, y;\, h, k, h', k') = \omega(h, k, h', k').$$

$F(x, y)$ étant continu en $X = (x, y)$ sur P (l'étant sur $D > P$), la fonction $f(X, T)$ *est continue en* X (sur P) pour chaque position de $T(h, k, h', k')$ sur e. Soit

$$(3.2\,a)\qquad \begin{cases} h(X) = \text{l'ensemble des valeurs-limites de } f(X, T) \\ \qquad\qquad (\text{quand } T, \in e, \to T_0); \end{cases}$$

$h(X)$ est un ensemble dans l'espace U_1. Les éléments extrêmes de $h(X)$ sont les laplaciens mixtes, sup. et inf., de F :

$$(3.2\,b)\qquad \begin{cases} \underline{\nabla} F(x, y) = \underline{\lim} f(X, T) & (T, \in e, \to T_0), \\ \overline{\nabla} F(x, y) = \overline{\lim} f(X, T) & (T, \in e, \to T_0). \end{cases}$$

Il a été montré dans (T; **4**.17) que correspondant à tout nombre γ entre $\underline{\nabla} F$, $\overline{\nabla} F$, il y a une suite des éléments (h_n, k_n, h'_n, k'_n) (nombres positifs), de sorte que

$$\omega(x, y;\, h_n, k_n, h'_n, k'_n) \to \gamma \qquad (\text{avec } h_n, k_n, h'_n, k'_n \to 0)$$

(c'est-à-dire, γ est un laplacien mixte moyen). Cela étant pour chaque $\underline{\nabla} F(x, y) \leqq \gamma \leqq \overline{\nabla} F(x, y)$ [$X = (x, y)$ fixe sur P], on conclut que *l'ensemble* $h(X)$ (**3**.2 a) *est un segment linéaire* (dans U_1). Soit λ (fini ou infini) donné.

Supposons qu'il y ait des points

$$(3.2\,c)\qquad a_n = (\alpha_n, \beta_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \in P,$$

partout denses sur P, et des points

$$(3.2\,d)\qquad T_n = (h_n, k_n, h'_n, k'_n), \qquad \in e, \qquad \to T_0(0, 0, 0, 0),$$

de façon que

(3.3) Ou bien $Y_n = f(a_n, T_n) = \omega(\alpha_n, \beta_n; h_n, k_n, h'_n, k'_n) \to \lambda$;

(3.3 *a*) Ou bien $\overline{\lim_n} Y_n \leqq \lambda$ (fini);

(3.3 *b*) Ou bien $\underline{\lim_n} Y_n \geqq \lambda$ (fini).

Alors, en conséquence du théorème général topologique (direct) de A. Denjoy (D; p. 174, 175), il y a un résiduel R de P tel que en tout point X de R, on a :

(3.4) $h(X)$ contient λ [cas (3.3)];
(3.4 *a*) l'élément inférieur de $h(X)$ est $\leqq \lambda$ [cas (3.3 *a*)];
(3.4 *b*) l'élément supérieur de $h(X)$ est $\geqq \lambda$ [cas (3.3 *b*)].

Cela signifie que, *pour* (x, y) *sur* $R \leqq P$ [dans l'hypothèse (3.2 *c*), (3.2 *d*)], *dans les trois cas respectifs* (3.3), (3.3 *a*), (3.3 *b*) *on a*

(3.5) $$\underline{\nabla} F(x, y) \leqq \lambda \leqq \overline{\nabla} F(x, y),$$

tandis qu'un laplacien mixte moyen $\nabla^* F(x, y) = \lambda$;

(3.5 *a*) $$\overline{\nabla} F(x, y) \leqq \lambda;$$

(3.5 *b*) $$\overline{\Delta} F(x, y) \geqq \lambda.$$

Employons la notations PE(X | ...) pour dénoter l'ensemble de points X de P pour lesquels la condition ... est valable. Soient H, H_1, H_2 les ensembles

(3.6) $$\begin{cases} H = PE\big(x, y \,|\, \underline{\nabla} F(x, y) \leqq \lambda \leqq \overline{\nabla} F(x, y)\big) & (\lambda \text{ fini}); \\ H_1 = PE\big(x, y \,|\, \overline{\nabla} F(x, y) \geqq \lambda\big) & (\lambda > -\infty); \\ H_2 = PE\big(x, y \,|\, \underline{\nabla} F(x, y) \leqq \lambda\big) & (\lambda < +\infty). \end{cases}$$

Par le corollaire de (D; p. 176) :

(3.6 *a*) *Quand l'ensemble* H (*ou* H_1, *ou* H_2) *est partout dense sur* P, *cet ensemble* H (*ou* H_1, *ou* H_2) *est un résiduel de* P.

Comme dans le cas des nombres dérivés seconds généralisés [*cf.* (D; p. 195)], on obtient le résultat suivant [une conséquence de (3.3)-(3.5 *b*)].

Soient les $a_n = (\alpha_n, \beta_n)$ sur P, sans l'hypothèse d'être partout denses sur P; considérons les trois cas :

$$(3.7)\quad Y_n = \omega(\alpha_n, \beta_n; h_n, k_n, h'_n, k'_n) \to \lambda \quad (\text{pour } h_n, k_n, h'_n, k'_n \text{ positifs} \to 0);$$

$$(3.7\,a)\quad \overline{\lim_n}\, Y_n \leqq \lambda \quad (\text{fini});$$

$$(3.7\,b)\quad \underline{\lim}\, Y_n \geqq \lambda \quad (\text{fini}).$$

Suposons que tout résiduel de tout ensemble parfait contenu dans P contienne des points (x, y) de façon que :

$$(3.8)\quad \lambda < \underline{\nabla} F(x, y) \quad \text{ou} \quad \overline{\nabla} F(x, y) < \lambda \quad [\text{le cas } (3.7)];$$

$$(3.8\,a)\quad \lambda < \underline{\nabla} F(x, y) \quad [\text{le cas } (3.7\,a)];$$

$$(3.8\,b)\quad \overline{\nabla} F(x, y) < \lambda \quad [\text{le cas } (3.7\,b)].$$

Il s'ensuit que nécessairement les $a_n = (\alpha_n, \beta_n)$ sont clairsemés (non denses sur tout ensemble parfait, selon la définition de Denjoy).

A cause du théorème topologique inverse de A. Denjoy (D; p. 199) le résultat suivant s'ensuit.

Avec λ fini ou infini, considérons les trois cas, vérifiés en tout point (x, y) $[= X]$ de P :

$$(3.9)\quad \text{unique } \nabla F(x, y) = \lambda;$$

$$(3.9\,a)\quad \overline{\nabla} F(x, y) \leqq \lambda \quad (\text{fini});$$

$$(3.9\,b)\quad \underline{\nabla} F(x, y) \geqq \lambda \quad (\text{fini}).$$

Alors, étant donné $\varepsilon (> 0)$, il y a un ensemble $K(P, \varepsilon)$ (pouvant être vide), fermé, non dense sur P, tel qu'à toute proportion $\overline{\omega}$ de P, disjointe de $K(P, \varepsilon)$, il correspond $\eta(\overline{\omega}, \varepsilon) > 0$ de façon que, si

$$(3.10)\quad 0 < h,\ k,\ h',\ k' < \eta(\overline{\omega}, \varepsilon),$$

pour (x, y) sur ω on aura

$$(3.11)\quad \begin{cases} |\omega(x, y; h, k, h', k') - \lambda| < \varepsilon \quad (\lambda \text{ fini}), \\ \omega(\ldots) > \dfrac{1}{\varepsilon} \quad (\lambda = +\infty), \qquad \omega(\ldots) < -\dfrac{1}{\varepsilon} \quad (\lambda = -\infty) \\ \qquad [\text{dans le cas } (3.9)]; \end{cases}$$

$$(3.11\,a)\quad \omega(x, y; h, k, h', k') < \lambda + \varepsilon \quad [\text{dans le cas } (3.9\,a)];$$

$$(3.11\,b)\quad \omega(x, y; h, k, h', k') > \lambda - \varepsilon \quad [\text{dans le cas } (3.9\,b)].$$

Un autre théorème topologique, inverse, de A. Denjoy (D; p. 208, 209), se rattachant aux inégalités ouvertes, nous donne le résultat suivant.

Envisageons les cas, vérifiés en chaque point (x, y) de P :

$$(3.12)\qquad \bar{\nabla} F(x, y) < \lambda \qquad (-\infty < \lambda \leqq +\infty);$$

$$(3.12\,a)\qquad \underline{\nabla} F(x, y) > \lambda \qquad (-\infty \leqq \lambda < +\infty).$$

Alors il existe un ensemble fermé $K(P)$ (pouvant être vide), $\leqq P$, non dense sur P, tel qu'à chaque portion $\bar{\omega}$ de P, disjointe de $K(P)$, correspondent des nombres

$$\gamma(\bar{\omega}),\quad \eta(\bar{\omega}) \qquad \text{(positifs, finis),}$$

de façon que, si

$$(3.13)\qquad 0 < h,\ k,\ h',\ k' < \eta(\bar{\omega}),$$

sur $\bar{\omega}$, on aura

$$(3.14)\qquad \begin{cases} \omega(x, y;\ h,\ k,\ h',\ k') < \lambda - \gamma(\bar{\omega}) & (\lambda \text{ fini}) \\ \text{ou} & \\ \omega(x, y;\ h,\ k,\ h',\ k') < \dfrac{1}{\gamma(\bar{\omega})} & (\lambda = +\infty) \\ \qquad [\text{dans le cas } (3.12)]; & \end{cases}$$

$$(3.14\,a)\qquad \begin{cases} \omega(x, y;\ h,\ k,\ h',\ k') > \lambda + \gamma(\bar{\omega}) & (\lambda \text{ fini}) \\ \text{ou} & \\ \omega(x, y;\ h,\ k,\ h',\ k') > -\dfrac{1}{\gamma(\bar{\omega})} & (\lambda = -\infty) \\ \qquad [\text{dans le cas } (3.12\,a)]. & \end{cases}$$

A l'aide des théorèmes topologiques inverses dans (D), on obtient le résultat suivant.

(3.15) *Posons que sur l'ensemble parfait* $P(< D)$ *unique* $\nabla F(x, y)$, *fini, existe; alors il y a un résiduel* R *de* P, *en chaque point duquel* $\nabla F(x, y)$ *est continu spécialement à* P.

En effet, en suivant les procès de (D; p. 212, 213), notons que

$$Y = \omega(X; T) \qquad [X = (x, y) \in P;\ T = (h,\ k,\ h',\ k') \in e]$$

tend vers $\nabla F(X)$ [limite unique, finie, vue l'hypothèse dans (3.15)], quand $T \to T_0 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$; soit ν l'ensemble des éléments

$\tau = (T, T_1)$, où $T, T_1 = (h_1, k_1, h'_1, k'_1)$ sont des points de e; posons $\tau_0 = (T_0, T_0)$,

$$|\tau - \tau_0| \quad [= \text{la distance de } \tau \text{ à } \tau_0] = h + k + h' + k' + h_1 + k_1 + h'_1 + k'_1$$
$$[0 < h, \ldots, k'_1;\ h \leqq h_0, \ldots, k' \leqq k'_0;\ h_1 \leqq h_0, \ldots, k'_1 \leqq k'_0];$$

en conséquence de Y tendant vers $\nabla F(X)$ (sur P), la fonction

$$f(X, \tau) = |\omega(X; T) - \omega(X; T_1)|$$

(continue en X sur P pour tout $\tau \in \nu$) tend vers zéro (X étant sur P) quand $\tau, \in \nu, \to \tau_0$. L'hypothèse 1° de (D; p. 199) a lieu, avec $\lambda = 0$; on conclut qu'il y a un ensemble $K(P, \varepsilon)$ (pouvant être inexistant), fermé, non dense sur P, de sorte qu'à toute portion $\bar{\omega}$ de P, disjointe de $K(P, \varepsilon)$, il corresponde $\eta(\bar{\omega}, \varepsilon)$, tel que les inégalités

$$(1) \qquad 0 < h,\ k,\ h',\ k',\ h_1,\ k_1,\ h'_1,\ k'_1 < \eta(\bar{\omega}, \varepsilon)$$

entraînent

$$(2) \qquad |\omega(X; T) - \omega(X; T_1)| < \varepsilon \qquad [X \in \dot{\bar{\omega}}].$$

Laissant $T_1(h_1, k_1, h'_1, k'_1) \to T_0(0, \ldots, 0)$, on obtient

$$(3) \qquad |\omega(X; T) - \nabla F(X)| \leqq \varepsilon \qquad (\text{sur } \bar{\omega}),$$

quand $0 < h, k, h', k' < \eta(\bar{\omega}, \varepsilon)$. En notant que

$$|\nabla F(X') - \nabla F(X)| \leqq |\nabla F(X') - \omega(X'; T)|$$
$$+ |\omega(X'; T) - \omega(X; T)| + |\omega(X; T) - \nabla F(X)|,$$

avec X, X' sur $\bar{\omega}$, d'après (3), on obtient

$$|\nabla F(X') - \nabla F(X)| \leqq 2\varepsilon + |\omega(X'; T) - \omega(X; T)|;$$

$\omega(X; T)$ (T fixe sur e) étant continue, comme fonction de X sur P, on en déduit

$$(4) \qquad \overline{\lim}\, |\nabla F(X') - \nabla F(X)| \leqq 2\varepsilon,$$

quand $X', \in \bar{\omega}, \to X$, $\bar{\omega}$ étant une portion quelconque (de P) disjointe de $K(P, \varepsilon)$; prenons $\varepsilon = \varepsilon_p, > 0, \to 0$ avec $\frac{1}{p}$; on en conclut (4) que l'oscillation (sur P) de $\nabla F(X)$ en chaque point de résiduel

$$R = P - \Sigma K(P, \varepsilon_p)$$

de P est zéro. *D'où le résultat* (3.15); on l'obtient aussi par l'application du théorème direct de Baire (sur des limites des fonctions continues).

Des résultats des types [(3.5)-(3.5*b*)], [(3.8)-(3.8*b*)], [(3.10)-(3.11*b*)], [(3.13)-(3.14*a*)], [(3.15)] *ont lieu aussi pour les laplaciens* (extrêmes et uniques) *spéciaux et généralisés des fonctions continues* F,

$$\text{(3.16)} \qquad \mathrm{sp}\,\overline{\nabla}\mathrm{F}, \quad \mathrm{sp}\,\underline{\nabla}\mathrm{F}, \quad \mathrm{sp}\,\nabla\mathrm{F}, \quad \overline{\Delta}\mathrm{F}, \quad \underline{\Delta}\mathrm{F}, \quad \Delta\mathrm{F}$$

[*voir* (2.2), (2.3)], ainsi que pour les fonctions correspondantes

$$\text{(3.16}a\text{)} \qquad \begin{cases} \omega(x, y;\, h, k, h, k) = \omega(x, y;\, h, k), \\ \omega(x, y;\, h, h, h, h) = \omega(x, y;\, h) \end{cases}$$

(d'où proviennent les laplaciens indiqués).

Cela devient manifeste si l'on reprend les développements ci-dessus, remplaçant l'ensemble e (dans U_4) (3.1) respectivement par les ensembles

$$e\{0 < h \leqq h_0,\ 0 < k \leqq k_0\}, \qquad e\{0 < h \leqq h_0\},$$

qui sont dans les espaces U_2, U_1.

$F(x, y)$ étant continu dans le domaine (ouvert, borné, connexe) D, *si les dérivées* (uniques, bilatérales)

$$\text{(3.17)} \qquad D_x F(x, y), \quad D_y F(x, y)$$

sont continues sur l'ensemble parfait $P \leqq D$, *des résultats de la sorte obtenus ci-dessus auront lieu pour les laplaciens différentiels* (sup., inf., unique) (2.4*a*) $\overline{\nabla}''F$, $\underline{\nabla}''F$, $\nabla''F$, *ainsi que le laplacien unique* $\nabla^0 F$ [(2.6), la limite ici étant supposée unique]; dans ces cas il s'agit aussi de propriétés des fonctions, continues sur P,

$$\text{(3.17}a\text{)} \quad \Omega(x, y;\, u) = \frac{2}{u}\left[\frac{1}{u}\big(F(x+u, y) + F(x, y+u) - 2F(x, y)\big) - D_x F(x, y) - D_y F(x, y)\right] \quad (u > 0);$$

$$\text{(3.17}b\text{)} \quad T(F;\, u) \equiv T(x, y;\, u) = \frac{1}{u}\big[D_x F(x+u, y) + D_y F(x, y+u) - D_x F(x, y) - D_y F(x, y)\big]$$
$$(u,\ \neq 0,\ \text{de signe variable})$$

dans le cas (3.17*a*) (rattaché aux laplaciens différentiels) l'ensemble e

est $\{0 < u \leqq u_0\}$, T_0 étant zéro ; dans l'autre cas l'ensemble e est un segment d'extrémités $-u_0$, $u_0 (> 0)$, privé du point zéro.

Soit δ un nombre positif, D_δ la partie du domaine D à distance δ de la frontière de D ; soit P, $\leqq \overline{D}_\delta$, un ensemble parfait ; posons

$$\psi(u) = \psi(-u),$$

croissant avec u pour $u \in e\{0 < u \leqq \delta_0\}$, $0 < \delta_0 < \delta$, $\psi(0^+) = 0$. *Pour* $(x, y) \in P$ *et* $u \in e$ *définissons*

$$(3.18) \quad S(x, y; u) = \frac{1}{\psi(u)}[(F(x+u, y) + F(x-u, y) - 2F(x, y)) \\ + (F(x, y+u) + F(x, y-u) - 2F(x, y))];$$

les points $(x \pm u, y)$, $(x, y \pm u)$ seront tous sur $\overline{D}_{\delta-\delta_0}$; *pour toute valeur* u *fixe sur* e, $S(x, y; u)$ *est continue comme une fonction de* (x, y) *sur* P. $F(x, y)$ étant continu sur D, $|F(x, y)|$ *sera borné pour* (x, y) *sur* $\overline{D}_{\delta-\delta_0}$.

Supposons que

$$(3.18a) \qquad \max_{\delta_0 \geq u > 0} |S(x, y; u)| = A(x, y) < +\infty \qquad [(x, y) \in P].$$

Comme dans un cas analogue dans (D, p. 219), cette hypothèse équivaut à dire que

$$(3.18b) \qquad \overline{\lim_{u \to 0}} |S(x, y; u)| < +\infty \qquad [(x, y) \in P].$$

En appliquant le théorème topologique de (D ; p. 208), l'hypothèse 1° de ce théorème étant satisfaite par

$$|S(x, y; u)| [(x, y) = X, u = T, e = \{0 < u \leqq \delta_0\}],$$

avec $\lambda = +\infty$, on conclut qu'il existe un ensemble fermé K(P), $\leqq$ P, pouvant être vide, non dense sur P, tel qu'à toute portion $\overline{\omega}$ de P, disjointe de K(P), il corresponde un nombre $A(\overline{\omega}) (> 0$, fini) de façon que

$$(3.18c) \qquad A(x, y) \leqq A(\overline{\omega}) \qquad (\text{sur } \overline{\omega}).$$

[il existe $\eta(\overline{\omega})$, $\leqq \delta_0$, $B(\overline{\omega})$, positifs, finis, tels que $|S(x, y; u)| \leqq B(\overline{\omega})$ sur $(\overline{\omega})$, pour $0 < u < \eta(\overline{\omega})$; si $\eta(\overline{\omega}) = \delta_0$, (3.18$c$) aura lieu avec $A(\overline{\omega}) = B(\overline{\omega})$; sinon, en posant $\mathfrak{M} = \max$ (sur $\overline{D}_{\delta-\delta_0}$)

de $|F|$, on, obtient (3.18c) avec $A(\bar{\omega})$ égal au plus grand des nombres $B(\bar{\omega})$, $\dfrac{6\mathfrak{M}}{\psi(\eta(\bar{\omega}))}\Big]$.

4. **Fonctions continues d'intervalle.** — Le flux de $F(x_1, x_2) = F(x)$ (F continu dans le domaine D) est une fonction additive d'intervalle [*voir* (2.7)] $\Phi(I) = \Phi(F \mid I)$, si les dérivées $D_{x_1}F$, $D_{x_2}F$ existent sur D et que l'intégrale dans (2.7) a un sens. Si l'on pose que les dérivées (uniques, bilatérales) $D_x F$, $D_y F$ sont continues sur D, on conclut que $\Phi(I)$ *est continue comme fonction d'intervalle.* Posons

(4.1) $$I(a_1, a_2; b_1, b_2) = \{ a_1 < x_1 < b_1;\ a_2 < x_2 < b_2 \}$$

[l'ensemble de points (x_1, x_2) satisfaisant la condition indiquée]; *soit*

$$m(a; b) = m(I) = \textit{le moindre des nombres } (b_1 - a_1),\ (b_2 - a_2).$$

L'aire $|I|$ de I tendra vers zéro, si $m(I) \to 0$; la réciproque est aussi vraie (pour I dans le domaine borné D).

On dit que $\Phi(I)$ est continue (comme une fonction d'intervalle), pourvu que

(4.1a) $$\Phi(I(a_1, a_2; b_1, b_2)) \to 0$$

pour $m(a, b) \to 0$ (c'est-à-dire, quand $|I| \to 0$). Soit

(4.1b) $$S = \{ \alpha_1 \leqq x_1 \leqq \beta_1;\ \alpha_2 \leqq x_2 \leqq \beta_2 \}$$

un segment (rectangle fermé) fixe, situé dans D. *Associons avec* $\Phi(I)$ [pas nécessairement donné par (2.7)], *additive*, *la fonction de point* (b_1, b_2) *sur* S :

(4.2) $$H(b_1, b_2) = \Phi(I(\alpha_1, \alpha_2; b_1, b_2))$$

[notons que $\Phi(I)$, étant continu, $\Phi(I) = \Phi(\bar{I})$, où $\bar{I}$ est la fermeture de I]. Pour $I(a_1, a_2; b_1, b_2) < S$, $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, on aura

(4.2a) $$\Phi(I(a_1, a_2; b_1, b_2)) = H(b_1, b_2) - H(b_1, a_2) - H(a_1, b_2) + H(a_1, a_2);$$

(4.2b) $$H(b_1, b_2) - H(a_1, a_2) = \Phi(I(\alpha_1, \alpha_2; b_1, b_2)) - \Phi(I(\alpha_1, \alpha_2; a_1, a_2)) = \Phi(I_1) + \Phi(I_2) + \Phi(I_3),$$

où

$$I_1 = I(\alpha_1, a_2; a_1, b_2), \qquad I_2 = I(a_1, a_2; b_1, b_2), \qquad I_3 = I(a_1, \alpha_2; b_1, \alpha_2);$$

si, par exemple, $b_1 \leqq a_1$, $b_2 \geqq a_2$, on aura

$$(4.2c) \qquad H(b) - H(a) = \Phi(I_4) - \Phi(I_5),$$

où

$$I_4 = I(\alpha_1, a_2; b_1, b_2), \qquad I_5 = I(b_1, \alpha_2; a_1, a_2)$$

et *dans tous les cas*

$$(4.2d) \qquad \Phi(I) = \text{une somme de deux ou trois termes de la forme } \pm \Phi(I_j),$$

les intervalles I_j *ayant des aires tendant vers zéro pour* $b \to a$.

Si $\Phi(I)$ est continu dans D, $> S$, il s'ensuivra (4.2b-2d) que pour $b \to a$ on aura $H(b) - H(a) \to 0$ [puisque les $\Phi(I_j) \to 0$ avec les $|I_j|$], c'est-à-dire, H sera continu sur S.

Réciproquement, considérons le cas de H continu sur S; soit $\mathfrak{M}(u)$ le module de continuité de H; rappelons que $m(a, b)$ est le moindre côté de $I = I(a_1, a_2; b_1, b_2)$; en vue de (4.2$a$)

$$|\Phi(I)| \leqq |H(b_1, b_2) - (b_1, a_2)| + |H(a_1, b_2) - H(a_1, a_2)|,$$
$$|\Phi(I)| \leqq |H(b_1, b_2) - H(a_1, b_2)| + |H(b_1, a_2) - H(a_1, a_2)|;$$

de là

$$|\Phi(I)| \leqq 2\mathfrak{M}(|b_2 - a_2|), \qquad |\Phi(I)| \leqq 2\mathfrak{M}(|b_1 - a_1|),$$

et l'on aura

$$|\Phi(I)| \leqq 2\mathfrak{M}(m(a, b));$$

donc $\Phi(I) \to 0$, quand $|I| \to 0$ [à cause de $m(a, b) \to 0$]; ainsi $\Phi(I)$ sera continu sur S.

Par conséquent, *dire que la fonction* $\Phi(I)$ *d'intervalle est continue sur* S *équivaut à dire que la fonction* H *de point l'est sur* S.

Dans la suite (de cette section) *supposons que* $\Phi(I)$ *soit continu.* Soit (x_1, x_2) un point de S_0, *un segment à l'intérieur* de S. Prenons

$$(4.3) \qquad h_0 \geqq h_1, \quad h_2, \quad k_1, \quad k_2 > 0 \quad (h_0 > 0).$$

Soit h_0 assez petit, de sorte que les points

$$(4.3a) \quad (a_1, a_2) = (x_1 - k_1, x_2 - k_2), \qquad (b_1, b_2) = (x_1 + h_1, x_2 + h_2)$$

soient dans S pour toutes les positions du point (x_1, x_2) sur S_0. L'intervalle $I(a_1, a_2; b_1, b_2)$ contient (x_1, x_2) et l'on a

$$(4.3b)\quad \begin{cases} \Phi(I(a_1, a_2; b_1, b_2))\,|I(a_1, a_2; b_1, b_2)|^{-1} = G(x_1, x_2; T), \\ \qquad T = (h_1, h_2, k_1, k_2), \end{cases}$$

où $(4.2a\text{-}3a)$

$$(4.3c)\quad G(x_1, x_2; T) = \frac{1}{(h_1+k_1)(h_2+k_2)} \times [H(x_1+h_1, x_2+h_2) - H(x_1+h_1, x_2-k_2) - H(x_1-k_1, x_2+h_2) + H(x_1-k_1, x_2-k_2)]$$

[H de (4.2)]. *Pour* $T(h_1, h_2, k_1, k_2)$ *sur l'ensemble* e (dans l'espace U_4), défini par (4.3), *la fonction* $G(x_1, x_2; T)$ *sera continue, comme fonction de* (x_1, x_2) *sur le segment* S_0 [dans la supposition que $\Phi(I)$ est continu dans D, même seulement dans S].

Si l'on définit l'ensemble e^* par les inégalités (h_0 comme ci-dessus)

$$(4.4)\qquad h_0 \geqq h_1,\quad h_2,\quad k_1,\quad k_2 \geqq 0; \qquad (h_1+k_1)(h_2+k_2) > 0,$$

il sera possible pour le point (x_1, x_2) de se trouver sur la frontière de la fermeture de $I(a_1, a_2; b_1, b_2)$ [a_1, a_2, b_1, b_2 étant donnés par $(4.3a)$]. Le point $T_0 = (0, 0, 0, 0)$ est un point d'accumulation de l'ensemble e^* (comme il l'est de e), lui étranger. Pour (x_1, x_2), un point du segment S_0, on peut définir

$$(4.4a)\quad \begin{cases} \overline{\lim\limits_{T \succ T_0}} \dfrac{\Phi(I)}{|I|} = \overline{\Phi}_f(x_1, x_2), \qquad \underline{\lim\limits_{T \succ T_0}} \dfrac{\Phi(I)}{|I|} = \underline{\Phi}_f(x_1, x_2), \\ \lim\limits_{T \succ T_0} \dfrac{\Phi(I)}{|I|} = \Phi_f(x_1, x_2) \qquad [\text{si } \overline{\Phi}_f(x_1, x_2) = \underline{\Phi}_f(x_1, x_2)] \\ [I = I(a_1, a_2; b_1, b_2)\ (4.3a);\ T \text{ ne quittant pas } e^*], \end{cases}$$

c'est-à-dire, *les nombres dérivés forts*, sup. et inf., ainsi que *la dérivée forte* (unique) $\Phi_f(x_1, x_2)$. Maintenant, on note que ce sont des limites (pour T, $\in e^*$, $\to T_0$), sup., inf. et unique, de la famille des fonctions

$$(4.5)\qquad G(x_1, x_2; T),$$

continues (pour chaque $T \in e^*$) *sur* S_0. Grâce aux théorèmes topologiques de Denjoy (D), on en déduit plusieurs propriétés de $G(x_1, x_2; T)$ et des nombres dérivés forts correspondants. Nous n'irons pas plus loin.

Examinons les *nombres dérivés ordinaires*, sup., inf. et unique de la fonction continue $\Phi(I)$ d'intervalle; nous les désignerons par

$$(4.6)\quad \begin{cases} \overline{\Phi}(x_1, x_2) = \overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}\Phi, \qquad \underline{\Phi}(x_1, x_2) = \underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}\Phi, \\ \Phi'(x_1, x_2) = \mathrm{Der}^{x_1, x_2}\Phi. \end{cases}$$

Ce sont les limites (sup., inf., unique) de la fonction dans le premier membre de $(4.3b)$, correspondant aux suites (dites régulières) d'intervalles [contenant (x_1, x_2) et de diamètre $\to 0$], de façon qu'à chacune de ces suites il corresponde un nombre $\lambda(>1)$ tel que :

$(4.6a)$ $\frac{1}{\lambda} <$ le rapport des longueurs des côtés d'intervalle (de la suite considérée) $< \lambda$; (λ, fini, peut varier avec les suites envisagées). Soit $e_\lambda(\lambda > 1)$ l'ensemble des points T de e (4.3), assujettis à la condition additionnelle

$$(4.7)\qquad \frac{1}{\lambda} < \frac{h_1 + k_1}{h_2 + k_2} < \lambda.$$

Alors, définissons les nombres dérivés, se rattachant à λ :

$$(4.7a)\quad \overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda)\Phi = \overline{\lim}\, G(x_1, x_2; T), \qquad \underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda)\Phi = \underline{\lim}\, G(x_1, x_2; T)$$

[quand T, $\in e_\lambda$, $\to T_0(0, 0, 0, 0)$], (x_1, x_2) étant sur S_0; si ces limites extrêmes des fonctions continues sont égales, posons

$$(4.7b)\qquad \mathrm{Der}^{x_1, x_2}(\lambda)\Phi\left[= \overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda)\ldots = \underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda)\ldots\right];$$

si $(T_j)(j = 1, 2, \ldots)$ est une suite quelconque des points de e_λ tendant vers T_0, l'intervalle $I(a_1, a_2; b_1, b_2)$ [dans $(4.3b)$] corrélativement parcourt une suite régulière [satisfaisant $(4.6a)$]. On a $e_\lambda \leqq e_{\lambda'}$ pour $\lambda \leqq \lambda'$; il suit que

$$(4.8)\quad \begin{cases} e = \lim e_\lambda, \qquad \overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda)\Phi \text{ non décroissant,} \\ \underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda)\Phi \text{ non croissant} \qquad (\text{quand } \lambda \to +\infty). \end{cases}$$

Finalement les nombres dérivés ordinaires, extrêmes, sont

$$(4.8a)\quad \begin{cases} \overline{\Phi}(x_1, x_2) = \lim\limits_{\lambda} \overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda)\Phi = \lim\limits_{\lambda}\left[\overline{\lim}(T, \in e_\lambda, \to T_0) G(x_1, x_2; T)\right], \\ \underline{\Phi}(x_1, x_2) = \lim\limits_{\lambda} \underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda)\Phi = \lim\limits_{\lambda}\left[\underline{\lim}(T, \in e_\lambda, \to T_0) G(x_1, x_2; T)\right] \end{cases}$$

$(4.3c)$ pour (x_1, x_2) sur le segment S_0 [dans l'intérieur du segment $S < D$ (4.1 b)]. $\Phi(I)$ étant continu (pour I sur S) et, par conséquent, $H(4.2)$ étant continu sur S, on voit que (4.8 a) signifie que *les nombres dérivés ordinaires extrêmes de* Φ *sont de la classe deux de Baire.*

5. Propriétés topologiques des nombres dérivés ordinaires des fonctions continues d'intervalle. — Avec $\lambda_0 (> 0)$ fini, considérons les nombres dérivés ordinaires

$$(5.1) \qquad \overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi, \quad \underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda^0)\Phi, \quad \mathrm{Der}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi,$$

définis par (4.7 a) pour (x_1, x_2) sur le segment S_0 (à l'intérieur du segment S, $< D$). *Supposons* Φ *continue, comme fonction d'intervalle sur* S; Φ *peut être le flux* (2.7) *de* F, F, $D_x F$, $D_y F$ *étant continus sur* S; $G(x_1, x_2; T)$ (4.3 c) sera continu sur S_0 pour toute position du point $T(h_1, h_2, k_1, k_2)$ dans e_λ [*voir* (4.7)]. Suivons les procédés de la section 3 (omettant les détails d'application des théorèmes topologiques de Denjoy) pour étudier les fonctions (5.1) et $G(x_1, x_2; T)$.

Soit P *un ensemble parfait quelconque dans* S_0.

Les $(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}) \in P$ ($n = 1, 2, \ldots$) étant partout denses sur P, posons qu'il existe une suite de points

$$(5.2) \qquad T_n(h_{1,n}, h_{2,n}, k_{1,n}, k_{2,n}), \qquad \in e_{\lambda_0}, \qquad \to T_0(0, 0, 0, 0)$$

(quand $n \to \infty$); considérons les trois cas :

$$(5.2a) \qquad G(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}; T_n) \to \lambda \qquad \text{(fini ou infini)};$$

$$(5.2b) \qquad \overline{\lim_n}\, G(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}; T_n) \leqq \lambda \qquad \text{(fini)};$$

$$(5.2c) \qquad \underline{\lim_n}\, G(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}; T_n) \geqq \lambda \qquad \text{(fini)};$$

alors il y a un résiduel $R(\leqq P)$ de P de façon que sur R, on a

$$(5.3a) \qquad \mathrm{Der}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi \leqq \lambda \leqq \underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi \qquad \text{[le cas (5.2}a\text{)]};$$

$$(5.3b) \qquad \underline{\underline{\mathrm{Der}}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi \leqq \lambda \qquad \text{[le cas (5.2}b\text{)]};$$

$$(5.3c) \qquad \overline{\overline{\mathrm{Der}}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi \geqq \lambda \qquad \text{[le cas (5.2}c\text{)]}.$$

Soient H, H_1, H_2 des ensembles

$$(5.4) \quad \begin{cases} H = PE\left(x_1, x_2 \mid \underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi \leqq \lambda \leqq \overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi\right) & (\lambda \text{ fini}); \\ H_1 = PE(x_1, x_2 \mid \overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi \geqq \lambda) & (\lambda > -\infty); \\ H_2 = PE(x_1, x_2 \mid \underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi \leqq \lambda) & (\lambda < +\infty). \end{cases}$$

(5.4*a*) Quand l'ensemble H (ou H_1, ou H_2) est partout dense sur P, cet ensemble H (ou H_1, ou H_2) est un résiduel de P.

Les $(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n})$ étant sur P, sans être nécessairement partout denses sur P, considérons les cas [avec $T_n = (h_{1,n}, h_{2,n}, k_{1,n}, k_{2,n}), \in e_{\lambda_0}, \to T_0$] :

(5.5) $$G(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}; T_n) \to \lambda;$$

(5.5*a*) $$\overline{\lim_n}\, G(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}; T_n) \leqq \lambda \quad \text{(fini)};$$

(5.5*b*) $$\underline{\lim_n}\, G(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}; T_n) \geqq \lambda \quad \text{(fini)}.$$

Supposons que sur tout résiduel de tout ensemble parfait contenu dans P il y ait des points (x_1, x_2), de sorte que

(5.6) $$\lambda < \underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi \quad \text{ou} \quad \overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi < \lambda \quad \text{[le cas (5.5)]};$$

(5.6*a*) $$\lambda < \underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi \quad \text{[le cas (5.5}a\text{)]};$$

(5.6*b*) $$\overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi < \lambda \quad \text{[le cas (5.5}b\text{)]};$$

alors (dans les cas respectifs) nécessairement les $(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont clairsemés.

Posons maintenant qu'il y a un des cas suivants, vérifiés en tout (x_1, x_2) de P :

(5.7) $$\text{(unique) } \mathrm{Der}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi = \lambda;$$

(5.7*a*) $$\overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi \leqq \lambda \quad \text{(fini)};$$

(5.7*b*) $$\underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi \geqq \lambda \quad \text{(fini)};$$

donnons $\varepsilon(> 0)$; alors il existe un ensemble $K(P, \varepsilon) < P$ (pouvant être vide), fermé, non dense sur P, de façon qu'à toute portion $\overline{\omega}$ (de P), disjointe de $K(P, \varepsilon)$, corresponde $\eta(\overline{\omega}, \varepsilon) > 0$, tel que les relations

(5.8) $$T(h_1, h_2, k_1, k_2) \in e_{\lambda_0}; \qquad h_1, h_2, k_1, k_2 < \eta(\overline{\omega}, \varepsilon)$$

entraînent sur $\overline{\omega}$:

(5.9) $$\left\{ \begin{array}{l} |G(x_1, x_2; T) - \lambda| < \varepsilon \quad (\lambda \text{ fini}), \qquad G(\ldots) > \frac{1}{\varepsilon} \quad (x = +\infty), \\ \qquad G(\ldots) < -\frac{1}{\varepsilon} \quad (\lambda = -\infty) \quad \text{[le cas (5.7)]}; \end{array} \right.$$

(5.8*a*) $$G(x_1, x_2; T) < \lambda + \varepsilon \quad \text{[le cas (5.7}a\text{)]};$$

(5.8*b*) $$G(x_1, x_2; T) > \lambda - \varepsilon \quad \text{[le cas (5.7}b\text{)]}.$$

Posons que l'un des deux cas suivants a lieu sur P :

(5.9) $\qquad \overline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi < \lambda \qquad (-\infty < \lambda \leqq +\infty);$

(5.9 a) $\qquad \underline{\mathrm{Der}}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi > \lambda \qquad (-\infty \leqq \lambda < +\infty);$

alors il existe un ensemble fermé K(P) (pouvant être vide), $\leqq$ P, non dense sur P, de sorte qu'à toute portion $\bar{\omega}$ de P, avec $\bar{\omega}$K(P) = o, correspondent des nombres $\gamma(\bar{\omega})$, $\eta(\bar{\omega})$ positifs, tels que les relations

(5.10) $\qquad T(h_1, h_2, k_1, k_2) \in e_{\lambda_0}; \qquad h_1, h_2, k_1, k_2 < \eta(\bar{\omega})$

entraînent sur $\bar{\omega}$:

(5.11)
$$\begin{cases} G(x_1, x_2;\ T) < \lambda - \gamma(\bar{\omega}) & (\lambda \text{ fini}) \\ \text{ou} & \\ G(x_1, x_2;\ T) < \dfrac{1}{\gamma(\bar{\omega})} & (\lambda = +\infty) \\ \qquad [\text{le cas } (5.9)]; & \end{cases}$$

(5.11 a)
$$\begin{cases} G(x_1, x_2;\ T) > \lambda + \gamma(\bar{\omega}) & (\lambda \text{ fini}) \\ \text{ou} & \\ G(x_1, x_2;\ T) > -\dfrac{1}{\gamma(\bar{\omega})} & (\lambda = -\infty) \\ \qquad [\text{le cas } (5.9a)]. & \end{cases}$$

Dans le cas où

(5.12) $\qquad$ unique $\mathrm{Der}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi \qquad$ (fini),

existe en chaque point (x_1, x_2) de P ($\leqq S_0$), on conclut qu'il y a un résiduel R de P, en tout point duquel

(5.12 a) $\qquad \mathrm{Der}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi$ est continue spécialement à P.

Si la dérivée (unique) $\mathrm{Der}^{x_1, x_2}\Phi = f$, *finie, existe en tout point de* D, *on aura* $f = \mathrm{Der}^{x_1, x_2}(\lambda_0)\Phi$, *avec* $\lambda_0 > 1$ *quelconque.*

6. **Le cas de dérivée ordinaire** $\mathrm{Der}^{x_1, x_2}\Phi$, **finie.** — *Soit* S *un segment du plan* $U_2\{\alpha_1 \leqq x_1 \leqq \beta_1;\ \alpha_2 \leqq x_2 \leqq \beta_2\}$. *Définissons la classe* (c_0) *des fonctions* $f(x_1, x_2)$ *qui en chaque point* (x_1, x_2) *de l'intérieur* S^0 *de* S *sont les dérivées ordinaires* (uniques), *finies, des fonctions continues, additives,* Φ *d'intervalle* I *sur* S. Pour toute fonction f de la classe (c_0) il existe une fonction continue,

additive, $\Phi(\mathrm{I})$ d'intervalle I sur S, de façon qu'en chaque point (x_1, x_2) de S^0,

$$(6.1)\quad \begin{cases} f(x_1, x_2) = \lim \dfrac{\Phi(\mathrm{I})}{|\mathrm{I}|} = \lim \mathrm{G}(x_1, x_2;\ \mathrm{T}) \\ [\mathrm{G}(\ldots) \text{ de } (4.3c);\ \mathrm{I} = \mathrm{I}(x_1 - k_1, x_2 - k_2;\ x_1 + h_1, x_2 + h_2) < \mathrm{S}], \end{cases}$$

quand le point $\mathrm{T} = (h_1, h_2, k_1, k_2)$ [sur l'ensemble

$$e = \{ 0 < h_1, h_2, k_1, k_2 \leqq h_0 \},$$

h_0 assez petit, dépendant de (x_1, x_2)] tend vers T_0 (o, o, o, o) de façon que

$$\frac{h_2 + k_2}{h_1 + k_1} + \frac{h_1 + k_1}{h_2 + k_2}$$

reste borné; ici

$$(6.1a)\quad \begin{cases} \mathrm{G}(x_1, x_2;\ \mathrm{T}) \\ \quad = \dfrac{1}{(h_1 + k_1)(h_2 + k_2)} \mathcal{V}(\mathrm{H};\ x_1 - k_1, x_2 - k_2;\ x_1 + h_1, x_2 + h_2); \\ \mathcal{V}(\mathrm{H};\ x_1 - k_1, x_2 - k_2;\ x_1 + h_1, x_2 + h_2) \\ \quad = \mathrm{H}(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - \mathrm{H}(x_1 + h_1, x_2 - k_2) \\ \quad\quad - \mathrm{H}(x_1 - k_1, x_2 + h_2) + \mathrm{H}(x_1 - k_1, x_2 - k_2); \\ \mathrm{H}(x_1, x_2) = \Phi(\mathrm{I}(\alpha_1, \alpha_2;\ x_1, x_2)); \end{cases}$$

notons que $\mathrm{H}(x_1, x_2)$ est continue, comme fonction de point sur S^0; $\mathrm{G}(x_1, x_2;\ \mathrm{T})$ est continu sur S^0 pour toute position de T dans e (avec h_0 assez petit). Désignons par $\mathcal{V}(\ldots)$, ci-dessous, *la variation de* H sur l'intervalle I (6.1).

En conséquence de (D, p. 443) [l'exemple (d) de totalisation]

$$(6.2)\qquad \min_{(\text{dans I})} f \leqq \frac{\Phi(\mathrm{I})}{|\mathrm{I}|} = \frac{\mathcal{V}(\mathrm{H};\ \ldots)}{(h_1 + k_1)(h_2 + k_2)} \leqq \max_{(\text{dans I})} f;$$

si $f = 0$ sur un intervalle I, on aura la variation $\mathcal{V} = 0$ sur tout intervalle inclus dans I (et H sera la somme d'une fonction de x_1 et d'une fonction de x_2); *on déduit de* (D, p. 443) *que la variation*

$$(6.2a)\qquad \mathcal{V}(\mathrm{H};\ \ldots) = \Phi$$

est entièrement déterminée sur tout l'intervalle inclus dans I, *si l'on sait sur* I *la fonction* f, $\in (c_0)$, *correspondante*. Cette circonstance très importante entraîne que

$$(6.3)\qquad \mathcal{V}(\mathrm{H};\ \mathrm{I}) = \Phi(\mathrm{I}) = \mathrm{L}(f;\ \mathrm{I})$$

$[\mathrm{I} \leqq S^0;\ S^0 =$ l'intérieur de S$]$ est une fonctionnelle (linéaire en f, additive, d'intervalle) de $f \in (c_0)$. Le calcul de cette fonctionnelle L [dans le champ de fonctions de la classe (c_0) est un problème de *totalisation, que nous appellerons* (T_0)]; (T_0) devrait être une suite dénombrable (au plus) d'opérations telle que correspondant à chaque fonction f de la classe (c_0), on peut construire $L(f; I)$, en même temps établissant l'identité entre la fonctionnelle $L(f; I)$ et la variation $\mathcal{V}$ correspondante.

Une fonction f appartient à la classe (c_0) dans ce cas, et dans ce cas seulement, quand les procédés de la totalisation (T_0), appliqués à f, réussissent tous.

7. **L'équation pour le flux.** — Étant donné $f \in (c_0)$, selon la totalisation (T_0), on obtient une fonction continue $\Phi(I)$, d'intervalle, définie sur S, telle que f est la dérivée ordinaire (finie et unique) de Φ en *tout* point de S^0; alors la question suivante se pose.

(7.1) Trouver une fonction F, continue ainsi que ses dérivées bilatérales $D_{x_1}F$, $D_{x_2}F$ sur S^0, telle que pour tout intervalle I dans S_0, on aura

$$\text{(7.1}a) \qquad \text{le flux de F à travers (I) (la frontière de I)}$$
$$\equiv J(F:I) \equiv \int_{(I)} \frac{dF}{dn} ds(x_1, x_2) = \Phi(I) \qquad [\bar{I} = I + (I) < S^0].$$

C'est une sorte d'équation intégrale. A toute solution F de ce problème on peut ajouter une fonction arbitraire, harmonique (le flux de celle-ci étant zéro).

Si $I = I(a_1, a_2; b_1, b_2)$, en notant [T; (8.5), (8.9)-(8.9b)], on obtient

$$\text{(7.1')} \qquad J(F:I) = -\int_{a_1}^{b_1} (u(x_1, b_2) - u(x_1, a_2))\, dx_1$$
$$+ \int_{a_2}^{b_2} (v(a_1, x_2) - v(b_1, x_2))\, dx_2 = R\, J(g, I),$$

où R... est la partie réelle de ... et

$$\text{(7.1'')} \qquad \left\{ \begin{array}{l} J(g, I) = \int_{(I)} g(z)\, dz, \qquad g(z) = u + iv, \qquad u = D_{x_2} F(x_1, x_2), \\ \qquad v = D_{x_1} F(x_1, x_2) \qquad (z = x_1 + i x_2). \end{array} \right.$$

C'est-à-dire, le flux $J(F:I)$ est la partie réelle de la fonction $J(g, I)$ d'intervalle I, avec $g(z)$ une fonction de variable complexe z;

$J(g, I)$ est une fonction additive d'intervalle, pouvant prendre des valeurs non réelles, continue en I, si $D_{x_1}F$, $D_{x_2}F$ le sont en (x_1, x_2).

En notant la remarque à la fin de la section 5, $\Phi(I)$ dans (7.1a) ayant par hypothèse f pour sa dérivée ordinaire, finie en tout point de S^0, on conclut que

$$(7.2) \qquad f(x_1, x_2) = \mathrm{Der}^{x_1, x_2}(\lambda)\Phi \quad (\text{dans } S^0;\ \lambda, > 1, \text{ quelconque})$$

est une fonction de *la classe un* (dans S^0). Par conséquent, si f n'est pas borné sur S, il existe un *ensemble* F $(\leqq S)$ *fermé, non dense sur* S, tel qu'à tout segment s (rectangle fermé) dans S, disjointe de F, correspond un nombre $\mathcal{M}(s)$ fini, tel que

$$(7.2a) \qquad |f(x_1, x_2)| \leqq \mathcal{M}(s) < +\infty \quad (\text{sur } s).$$

(*Voir* Denjoy, *Dérivées sommables*, ...; p. 185). Pour un segment particulier s, avec $sF = 0$, considérons le potentiel

$$(7.2b) \qquad G(s; x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_S f(y_1, y_2)\log\frac{1}{r}\,dy_1\,dy_2,$$

où $r = r(x, y)$ est la distance entre les points x, y. D'après le théorème de l'auteur [T; (6.7)], en désignant par ∇^0 le laplacien (2.6), ou sp∇, ou ∇'' (2.4a), on obtient

$$(7.2c) \qquad \nabla^0 G(s; x_1, x_2) = -f(x_1, x_2) \quad (\text{sur } s^{ap}),$$

où s^{ap} est l'ensemble de points de continuité approximative, sur s, de f; *s^{ap} est une plénitude du segment s.*

8. Le rapport entre (T_0) et les laplaciens. — Introduisons :

DÉFINITION 8.1. — Les fonctions $F(x_1, x_2)$ continues sur S^0, ainsi que leurs dérivées (bilatérales, uniques $D_{x_1}F(x_1, x_2)$, $D_{x_2}F(x_1, x_2)$, telles que les flux $J(F:I)$ (7.1a) correspondants possèdent les dérivées ordinaires (uniques, finies)

$$(8.1a) \qquad \mathrm{Der}^{x_1, x_2} J(F:I) = f(x_1, x_2)$$

en tout point de S^0, appartiennent à *la classe* (K_0).

NOTE 8.2. — Les fonctions f dans (8.1a) forment *une classe* $[c_0]$, qui est contenue dans la classe (c_0); les flux $J(F:I)$ ci-dessus constituent *la classe* $[C_0]$, sous-classe de *la classe* (C_0) de toutes les totales (T_0) des fonctions f de (c_0).

Si $f \in [c_0]$, la totalisation (T_0) devra nous donner une fonction $\Phi(I)$, $\in [C_0]$, correspondante. L'équation correspondante (7.1a) $J(F:I) = \Phi(I)$ devrait avoir une solution $F \in (K_0)$. Tous les F de (K_0) correspondant à une fonction particulière f de $[c_0]$, ne diffèrent entre eux que par des fonctions harmoniques sur S^0. Les procédés, donnant une solution de (7.1a) pour $\Phi(I) \in [C_0]$, *constituent une opération que nous appellerons* J^{-1}. On aura

$$F = J^{-1} T^0 f + h, \tag{8.3}$$

si $f \in [c_0]$; ici $T_0 f \in [C_0]$, $F \in (K_0)$, h est harmonique sur S^0.

En utilisant la remarque de A. Denjoy (D; p. 395) à propos de toutes les totalisations, on arrivera à la conclusion suivante.

(8.4) Φ, $\in [C_0]$, étant une fonctionnelle de f, $\in [c_0]$, qui peut être calculée par la totalisation T_0 de son argument f, et P étant un ensemble parfait $(< S^0)$, toute portion $\bar{\omega}$ de P contient une autre portion $\bar{\omega}'$, où f est sommable.

Il s'ensuit qu'il existe *un ensemble* $F_1 (\leqq S)$, *fermé et non dense sur* S^0, tel que dans tout domaine $\omega (\leqq S^0)$, ayant sa fermeture ϖ disjointe de F_1, f est sommable; bien entendu

$$J(F:I) = \iint_I f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \tag{8.4a}$$

pour tous les I dans ω, l'intégrale étant lebesguienne. On voit que $J(F:I)$ *est absolument continue* (comme fonction d'intervalle) dans le domaine ω, pourvu que $\bar{\omega} F_1 = 0$. D'après (7.2)-(7.2a), si $\omega (< S)$ est un domaine dont la fermeture $\bar{\omega}$ est disjointe de F,

$$|f(x_1, x_2)| \leqq N(\bar{\omega}) < \infty \qquad [\text{sur } \bar{\omega};\ N(\bar{\omega}) \text{ indépendant de } (x_1, x_2)]. \tag{8.4b}$$

Avec $\bar{\omega} F = 0$, on aura (8.4a) pour I contenu dans ω (l'intégrale au second membre étant lebesguienne); d'où F_1 *est contenu dans* F.

Soit $F(x_1, x_2)$ de classe (K_0) et ∇^0 le laplacien (2.6). De (2.8)-(2.8c), en notant la propriété d'absolue continuité de $\Phi(I) = J(F:I)$, mentionnée ci-dessus, ainsi que (8.4b), *on conclut que*

$$\nabla^0 F(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2) = -\operatorname{Der}^{x_1, x_2} J(F:I) \tag{8.5}$$

en tout point de continuité approximative de $f(x_1, x_2)$ *sur l'ensemble* $S^0 - F\{f \in [c_0], J(F:I) \in [C_0], F \in (K_0)\}$, F *étant un certain ensemble fermé, non dense sur* S^0.

De là, en vertu de (8.3) *pour* $f \in [c_0]$, *on a*

$$(8.6) \qquad -\nabla^0(J^{-1}T_0)f = f$$

(en les points de continuité approximative de f sur $S^0 - F$), où F est l'ensemble fermé, non dense sur S^0, mentionné ci-dessus.

(8.7) C'est-à-dire, *si* $f \in [c_0]$ (note 8.2), *une solution de l'équation de Laplace* $\nabla^0 F = -f$, *telle que* F, $D_{x_1}F$, $D_{x_2}F$ *soient continus sur l'intervalle* S^0, *sera donnée en tous les points d'approximative continuité de* f *sur* $S^0 - F$ *par* $J^{-1}T_0 f$.

Rappelons que $T_0 f$ sera de la classe $[C_0]$ (note 8.2) et $J^{-1}(T_0 f)$ sera de la classe (K_0) (définition 8.1).

Quand $f(x_1, x_2) \in [c_0]$ [ou même (c_0)], f appartient à la classe *un*; dès lors selon le théorème direct de Baire, dans la forme donnée par *Denjoy*, on voit que tout ensemble parfait P, $< S^0$, contient un résiduel R(P) de P en tout point duquel f est continue spécialement à P.

Nous allons établir le résultat suivant.

(8.8) *Il existe un ensemble* $G \leqq S^0$ (S^0 *étant l'intérieur du segment* S) *de façon que;*

(i) *en tout point de* $G f(x_1, x_2) [\in (c_0)]$ *soit continu spécialement à* S^0;

(ii) G *soit un résiduel dans tout segment* $\sigma < S^0$ (*c'est-à-dire,* $G\sigma$ *soit un résiduel de* σ *pour tout segment* $\sigma < S^0$);

(iii) G *soit un résiduel de* S.

(8.8*a*) Remarque. — *Dans tous les cas un segment* (*à deux dimensions*) *sera un rectangle* (*fermé*) *ayant des points intérieurs.*

Pour démontrer (8.8) considérons des segments S_n ($n = 1, 2, \ldots$), leurs intérieurs S_n^0, leurs frontières (S_n), de manière que

$$(1) \qquad S_n < S_{n+1}^0; \qquad S_n < S^0; \qquad \lim S_n \left(= \lim_n S_n^0\right) = S^0.$$

En vertu du résultat précédent (8.8), S_n contiendra un résiduel $R(S_n)$ (de soi-même), en tout point duquel f sera continue spécialement à S_n; (S_n) étant un ensemble fermé, non dense sur S_n, on pourrait supposer que

$$(2) \qquad R(S_n) \leqq S_n^0,$$

Alors f est continue en tout point de $R(S_n)$ spécialement à S^0, pour $n = 1, 2, \ldots$; d'où f est continue en tout point de

$$G = R(S_1) + R(S_2) + \ldots \qquad (\leqq S^0) \tag{3}$$

spécialement à S^0; *c'est la propriété* (8.8i). On peut poser

$$R(S_1) < R(S_2) < \ldots, \tag{4}$$

car on pouvait toujours inclure le résiduel (de S_n) $R(S_n)$ dans le résiduel (de S_{n+1}) $R(S_{n+1})$ ($n = 1, 2, \ldots$). Nous avons

$$GS_n = R(S_n) - GS_n^0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Soit σ, $< S_0$. un segment. Il y a un entier m (> 0) tel que σ est contenu dans l'intervalle S_m^0. En vertu de (5),

$$\sigma G = (\sigma S_m)G = \sigma(S_m G) = \sigma R(S_m). \tag{6}$$

Le résiduel $R(S_m)$ de S_m est exprimable comme $S_m - \sum_j F_{m,j}$, où les $F_{m,j}$ ($j = 1, 2, \ldots$) sont fermés, situés dans S_m, non denses sur S_m [en vue de (2) (S_m) est parmi les $F_{m,j}$]. D'où (6)

$$\sigma G = \sigma - \sum_j \sigma F_{m,j}. \tag{7}$$

$\sigma F_{m,j}$ est non dense sur σ (sinon, étant fermé, $\sigma F_{m,j}$ contiendrait un segment $\sigma_1 \leqq \sigma$, on aurait $F_{m,j} \geqq \sigma_1$, et l'on arriverait à une contradiction à la non-densité de $F_{m,j}$ sur S_m); (7) entraîne donc que σG est un résiduel de σ. *Nous avons établi la propriété* (8.8ii). Soient σ_i ($i = 1, 2, \ldots$) des segments, tels qu'en dénotant par σ_i^0 l'intérieur de σ_i, on a

$$\sigma_i^0 \sigma_j^0 = 0 \text{ (l'ensemble vide, pour } i \neq j), \qquad \sigma_i < S^0, \qquad \Sigma \sigma_i = S^0. \tag{8}$$

Évidemment

$$G = \Sigma G\sigma_i. \tag{9}$$

En vertu de (8.8ii) $G\sigma_i$ est un résiduel de σ_i; ainsi

$$G\sigma_i = \sigma_i - \sum_q F^{i,q} \qquad (F^{i,q} \leqq \sigma_i, \ F^{i,q} \text{ fermé, non dense sur } \sigma_i). \tag{10}$$

Dès lors (9), (8)

$$G=\sum_i\Big(\sigma_i-\sum_q F^{i,q}\Big)=S^0-\sum_{i,q}F^{i,q}=S-\Big[(S)+\sum_{i,q}F^{i,q}\Big], \tag{11}$$

(S) étant la frontière de S; (S) et les $F^{i,q}$ constituent une collection d'ensembles, contenus dans S, fermés et non denses sur S; *d'où la conclusion* (8.8iii).

(8.9) *Soit* G *l'ensemble dans* (8.8); *si* O *est un ensemble ouvert quelconque*, $\leqq S^0$, G *sera un résiduel dans* O (c'est-à-dire, $GO = O - Q$, où Q est une gerbe de O).

On peut établir cela, comme une conséquence de (8.8ii), remplaçant S^0 dans les développements (8)-(11) par O; on obtiendra

$$GO = O-\sum_{i,q}F^{i,q} \qquad (\text{les } F^{i,q} \text{ fermés, non denses sur } Q).$$

THÉORÈME 8.10. — $F(\leqq S)$ *étant un certain ensemble fermé, non dense sur* S^0, *rappelons que les résultats* (8.5), (8.6), (8.7) *ont lieu sur l'ensemble* $A\,(\leqq S^0-F)$ *de points de continuité approximative de* f $(\in[c_0])$ *sur* S^0-F; *cet ensemble* A *a les propriétés suivantes :*

(1°) A *est une plénitude de* S^0-F.

(2°) A *contient un résiduel* R *de* S^0-F.

En tenant compte de (8.8), (8.9) on peut prendre $R = G(S^0-F)$, où G est l'ensemble dans (8.8). En effet, S^0-F est ouvert, de là (8.9) $R = G(S^0-F)$ sera un résiduel de S^0-F. D'autre part, en vue de (8.8i), tout point de $G(S^0-F)$ sera un point de continuité ordinaire de f; ainsi $G(S^0-F)\leqq A$. La propriété (1°) s'ensuit par un théorème général, bien connu, de A. Denjoy. C'est-à-dire, A est métriquement ainsi que topologiquement quasi universel sur S^0-F.

9. Le rapport entre les classes $[c_0]$, $[C_0]$, (K_0) et les potentiels.

— *Soit* $f(x_1, x_2)\in[c_0]$. Revenons au résultat (7.2)-(7.2c); on a (7.2a) $|f|\leqq \mathfrak{M}(s)<+\infty$ sur tout segment $s\,(\leqq S)$ disjoint de F. Le théorème de l'auteur (T; 6.7) s'applique de telle façon qu'en écrivant

$$G(\tau;\, x_1, x_2)=\frac{1}{2\pi}\iint_\tau f(y_1, y_2)\log\frac{1}{r}\,dy_1\,dy_2, \tag{9.1}$$

on a

$$(9.1a) \qquad \nabla^0 G(\tau;\, x_1,\, x_2) = -f(x_1,\, x_2) \qquad [\text{le laplacien } \nabla^0\ (2.6)]$$

sur une plénitude τ^{ap} (l'ensemble de points de continuité approximative, sur τ, de f) de τ, pourvu que τ, $\leqq S$, soit un ensemble ouvert quelconque sur lequel

$$(9.1b) \qquad |f(x_1,\, x_2)| \leqq N(\tau) < +\infty.$$

On pourrait, par exemple, prendre pour τ un ensemble ouvert quelconque, contenu dans une somme *finie*

$$(9.1c) \qquad \sigma_\nu = s_1 + \ldots + s_\nu$$

de segments s_j, $\leqq S$, disjoints de F; en effet, en vertu de $(7.2a)$, dans ce cas, on aura

$$(9.1d) \qquad |f| \leqq \max(j = 1,\, \ldots,\, \nu)\, \mathfrak{M}(s_j) < \infty \qquad (\text{sur } \sigma_\nu;\ \text{sur } \tau).$$

En employant un réseau convenable, on conclut qu'on peut choisir une suite (simplement infinie d'ensembles $(9.1c)$:

$$(9.2) \qquad \sigma_1,\quad \sigma_2,\quad \ldots,$$

de sorte que $\sigma_\nu < S - F$,

$$(9.2a) \qquad \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots; \qquad \lim_\nu \sigma_\nu = \sum_1^\infty \sigma_\nu = S - F.$$

On observe que la frontière (σ_ν) de σ_ν est mince.

$(9.2b)$ la distance de σ_ν à F tend vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$; en posant

$$N(\sigma_\nu) = \max\ (\text{dans } \sigma_\nu)\, |f|,$$

on aura

$$N(\sigma_\nu) \leqq N(\sigma_{\nu+1}) < +\infty$$

et l'on peut avoir

$$\lim_\nu N(\sigma_\nu) = +\infty.$$

Prenant $\tau = \sigma_\nu^0$ (l'intérieur de σ_ν), nous déduirons $(9.1\text{-}1b)$:

$$(9.3) \qquad \nabla^0 G(\sigma_\nu^0;\, x_1,\, x_2) = \nabla^0 G(\sigma_\nu;\, x_1,\, x_2) = -f(x_1,\, x_2)$$

sur l'ensemble $\sigma_\nu^{0\,ap}$ (une plénitude de σ_ν^0) de points d'approximative continuité, sur σ_ν^0, de f. En définissant une fonction f_ν,

$$(9.3') \qquad f_\nu = f \quad (\text{sur } \sigma_\nu^0), \qquad f_\nu = 0 \quad (\text{sur } S^0 - \sigma_\nu^0),$$

il s'ensuit que

$$(9.3a)\quad \begin{cases} \nabla^0\left[\frac{1}{2\pi}\iint_S f_\nu(y_1, y_2)\log\frac{1}{r}\,dy_1\,dy_2\right] = -f(x_1, x_2) & (\text{sur } \sigma_\nu^{0\,ap}), \\ \nabla^0\left[\frac{1}{2\pi}\iint_S f_\nu(y_1, y_2)\log\frac{1}{r}\,dy_1\,dy_2\right] = 0 & (\text{sur } S^0 - S^0\sigma_\nu). \end{cases}$$

Soit $F(x_1, x_2)$ *une fonction particulière de la classe* (K_0), *correspondant à notre fonction* $f(x_1, x_2)$, $\in [c_0]$, à présent considérée. Le théorème (8.10) s'applique. Posons

$$(9.4)\quad \begin{cases} F(x_1, x_2) = F_\nu(x_1, x_2) + Q_\nu(x_1, x_2), \\ F_\nu(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\iint_S f_\nu(y_1, y_2)\log\frac{1}{r}\,dy_1\,dy_2. \end{cases}$$

En vertu de l'inégalité

$$(9.4')\qquad |f_\nu| \leqq N(\sigma_\nu) < \infty \qquad (\text{sur } \sigma_\nu \text{ et aussi sur } S),$$

on voit que

$$F_\nu(x_1, x_2),\quad D_{x_1}F_\nu(x_1, x_2),\quad D_{x_2}F_\nu(x_1, x_2)$$

sont continus sur S^0; $F(x_1, x_2)$ ayant la dernière propriété [d'après la définition de (K_0)], les dérivées $D_{x_1}Q_\nu$, $D_{x_2}Q_\nu$ existent et

$$(9.4a)\qquad Q_\nu(x_1, x_2),\quad D_{x_1}Q_\nu(x_1, x_2),\quad D_{x_2}Q_\nu(x_1, x_2)$$

sont continus sur S^0. Observons que

$$A\sigma_\nu^{0\,ap} = A\sigma_\nu^0 = \sigma_\nu^{0\,ap}, \qquad A(S^0 - S^0\sigma_\nu) = A - A\sigma_\nu.$$

En notant que $\nabla^0 Q_\nu = \nabla^0 F - \nabla^0 F_\nu$, en vertu de (8.5), (9.3a) on obtiendra

$$(9.5)\quad \nabla^0 Q_\nu = 0 \quad (\text{sur } A\sigma_\nu^0), \qquad \nabla^0 Q_\nu = -f(x_1, x_2) \quad (\text{sur } A - A\sigma_\nu);$$

on a (9.2a) $\sigma_\nu \uparrow S - F$ et $\sigma_\nu^0 \uparrow S^0 - S^0F$; ainsi (avec $A \leqq S^0 - S^0F$)

$$(9.5a)\quad A\sigma_\nu^0 \uparrow A, \qquad A - A\sigma_\nu \uparrow \text{l'ensemble vide} \qquad (\text{pour } \nu \to \infty).$$

En vue du théorème 8.10 $A\sigma_\nu^0$ *est une plénitude et contient un résiduel de l'ensemble ouvert* σ_ν^0.

A cause de la continuité des fonctions (9.4a) le flux, $J(Q_\nu : I)$, de Q_ν existe pour tous les intervalles I, pour lesquels $\bar{I}(= I + (I)) < S^0$; *c'est une fonction d'intervalle, continue sur* S^0. En vue de la définition des classes $[c_0]$, $[C_0]$, (K_0) on observe que, f étant de la classe $[c_0]$, on aura pour une fonction correspondante F, $\in (\overset{*}{K}_0)$, la relation

$$\text{(9.6)} \qquad \operatorname{Der}^{x_1, x_2} J(F : I) = f(x_1, x_2) \qquad \text{(partout sur } S^0\text{)};$$

de plus $J(F : I) = \Phi(I)$ appartiendra à $[C_0]$. En rappelant le résultat (T; 5.3b) de l'auteur, nous concluons que pour la fonction F_ν(9.4) on aura

$$\text{(9.6}a\text{)} \qquad J(F_\nu : I) = \iint_I f_\nu(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 \qquad (\bar{I} < S^0),$$

parce qu'en vertu de (9.4′)

$$\int_I \left[\iint_{S^0} \frac{|f_\nu|}{r} dy_1\, dy_2 \right] ds(x, y) \leqq c < \infty \qquad (\text{constante } c;\ I < S^0).$$

Par un théorème connu, de (9.6a) l'on obtient

$$\operatorname{Der}^{x_1, x_2} J(F_\nu : I) = f_\nu(x_1, x_2)$$

en tout point de S^0, où f_ν est approximativement continu. En vue de (9.3′) il s'ensuit que

$$\text{(9.6}b\text{)} \quad \operatorname{Der}^{x_1, x_2} J(F_\nu : I) = f(x_1, x_2) \quad (\text{sur } \sigma_\nu^{0\,ap}), \qquad = 0 \quad (\text{sur } S^0 - S^0\sigma_\nu).$$

En notant que

$$Q_\nu(x_1, x_2) = F(x_1, x_2) - F_\nu(x_1, x_2),$$

de (9.6), (9.6b) nous déduisons que la $\operatorname{Der}^{x_1, x_2} J(Q_\nu : I)$ existe sur $\sigma_\nu^{0\,ap}$ et sur $S^0 - S^0\sigma_\nu$ et

$$\text{(9.7)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{Der}^{x_1, x_2} J(Q_\nu : I) &= \operatorname{Der}^{x_1, x_2} J(F : I) - \operatorname{Der}^{x_1, x_2} J(F_\nu : I) \\ &= \begin{cases} 0 & (\text{sur } \sigma_\nu^{0\,ap}), \\ f & (\text{sur } S^0 - S^0\sigma_\nu); \end{cases} \end{aligned}$$

à cause du théorème 8.10, $\sigma_\nu^{0\,ap}$ est une plénitude et contient un résiduel ($\leqq \sigma_\nu^0$) de σ_ν^0.

On peut maintenant se demander si les annonces suivantes, (9.8), (9.9), sont correctes :

(9.8) $Q(x_1, x_2)$ étant continue sur l'ensemble O, borné et ouvert, et les dérivées $D_{x_1}Q$, $D_{x_2}Q$ existant et continues sur O, *si* $\nabla^0 Q = 0$ [le laplacien ∇^0 (2.6)] sur $O - e$, où $e(\leqq O)$ est mince et une gerbe de O, alors $Q(x_1, x_2)$ sera harmonique sur O.

(9.9) La même annonce que (9.8), avec le laplacien $\nabla^0 Q(x_1, x_2)$ remplacé par la dérivée (ordinaire) du flux de Q, c'est-à-dire, par $\mathrm{Der}^{x_1, x_2} J(Q:I)$.

(9.8*a*) Si la réponse à (9.8) était affirmative, il suivrait (9.5) que $Q_v(x_1, x_2)$ [dans (9.4)] serait harmonique sur σ_v^0.

(9.9*a*) Si (9.9) était vrai, on déduirait (9.7) que $Q(x_1, x_2)$ serait harmonique sur σ_v^0.

A présent nous éviterons la question si les annonces (9.8), (9.9) sont correctes. Rappelons qu'en vue des considérations générales, se rattachant à la totalisation T_0, on a

$$(8.4a) \quad J(F:I) = \iint_I f\,dx_1\,dx_2 \qquad (I \leqq \omega;\ \text{l'intégrale de Lebesgue}),$$

si $F \in (K_0)$, $f \in [c_0]$ et si l'ensemble ouvert $\omega (\leqq S^0)$ a sa fermeture $\bar{\omega}$ disjointe de F_1 (F_1 fermé, non dense sur S^0; $F_1 \leqq F$). Dès lors (9.6*a*)

$$J(Q_v:I) = J(F:I) - J(F_v:I) = \iint_I (f(x_1, x_2) - f_v(x_1, x_2))\,dx_1\,dx_2,$$

si I est contenu dans l'ensemble ω [de (8.4*a*)] quelconque, tandis que $\bar{I} < S^0$ (autrement dit, pour les segments $\bar{I}$, $< S^0$, disjoints de F_1); puisque $f_v = f$ sur σ_v^0 (9.3′), il s'ensuit que

$$(9.10) \qquad J(Q_v:I) \left\{ = \int_I \frac{dQ_v}{dn}\,ds(x_1, x_2) \right\} = 0$$

pour tous les segments I tels que simultanément :

$$(9.10a) \qquad \bar{I} < S^0, \qquad \bar{I} F_1 = 0, \qquad \bar{I} \leqq \sigma_v.$$

L'ensemble ouvert σ_v^0 peut s'exprimer comme une somme finie ou dénombrable de segments $\bar{I}$, satisfaisant (9.10*a*) et deux à deux sans points communs intérieurs; or (9.4*a*) Q_v, $D_{x_1}Q_v$, $D_{x_2}Q_v$ sont continus sur σ_v^0 (sur S^0, plus généralement); de là nous déduisons que

(9.11) *$Q_v(x_1, x_2)$ de (9.4) est harmonique sur σ_v^0.*

(9.11) entraîne que $\nabla^0 Q_v = 0$ (sur σ_v^0); ainsi la première relation (9.5) est devenue superflue.

On peut résumer comme il suit.

THÉORÈME 9.12. — *Soient* $f(x_1, x_2)$ *de* $[c_0]$, $\Phi(I)$ *la fonction correspondante d'intervalle* I, *de* $[C_0]$, *et* $F(x_1, x_2)$ *une fonction correspondante de* (K_0). *Il y a un ensemble fermé* $F \geqq F_1$, *non dense sur* $S^0[F, F_1$ *introduits avant* (7.2*a*), (8.4*a*), *respectivement*], *de façon qu'on ait*

$$(9.12a) \qquad \nabla^0 F(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2) = -\operatorname{Der}^{x_1, x_2} J(F:I)$$

sur l'ensemble A *de points de continuité approximative de* f *sur* $S^0 - F$, $J(F:I) = \Phi(I)$ *étant le flux de* F *à travers de* (I); A *est une plénitude de* $S^0 - F$ *et il contient un résiduel* R *de* $S^0 - F$. *Soit* σ_ν *un ensemble fermé* (*somme finie de segments dans* $S - F$), *tel que* $\sigma_\nu < S - F$,

$$(9.12b) \qquad \begin{cases} \sigma_\nu \uparrow S - F & (\textit{pour } \nu \to \infty), \\ \rho_\nu (= \textit{la distance de } \sigma_\nu \textit{ à } F) \to 0 & \textit{avec } \dfrac{1}{\nu}. \end{cases}$$

Correspondant à chaque ensemble σ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, *la fonction* $F(x_1, x_2)$ [*de* (K_0)] *s'exprime au moyen de* $f(x_1, x_2)$ (*de* $[c_0]$) *comme une somme*

$$(9.12c) \qquad F(x_1, x_2) = F_\nu(x_1, x_2) + Q_\nu(x_1, x_2),$$

où (*avec* $f_\nu = f$, *sur* σ_ν^0, *et* $f_\nu = 0$, *sur* $S^0 - \sigma_\nu^0$) F_ν *est le potentiel*

$$(9.12d) \qquad \begin{aligned} F_\nu(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \iint_S f_\nu(y_1, y_2) \log \frac{1}{r}\, dy_1\, dy_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma_\nu} f(y_1, y_2) \log \frac{1}{r}\, dy_1\, dy_2, \end{aligned}$$

et $Q_\nu(x_1, x_2)$ *est harmonique sur* σ_ν^0.

10. Des compléments au théorème précédent.

— Soit :

(10.1) $\lambda_1 = \lambda(x_1, x_2)$ la partie d'ensemble $S^0 - F$ dans la région circulaire $r = r(x_1, x_2; y_1, y_2) \leqq 1$; D = le diamètre de $S^0 - F$; $L = \max(1, D)$.

Notons que

$$\left| \log \frac{1}{r} \right| = \log \frac{1}{r} \qquad [\text{sur } \lambda(x_1, x_2)],$$

$$\left| \log \frac{1}{r} \right| = \log r \leqq \log L \qquad [\text{sur } S^0 - F - \lambda(x_1, x_2)];$$

si (x_1, x_2) est un point sur $S^0 - F$, on obtiendra

$$(10.1\ a)\quad \begin{cases} \nu(x_1, x_2) \equiv \iint_{S^0-F} |f| \left|\log\frac{1}{r}\right| dy_1\, dy_2 \\ \qquad = \iint_{\lambda(x_1,x_2)} \cdots + \iint_{S_0-F-\lambda(x_1,x_2)} \cdots \leqq \nu_1 + \nu_2 \log L, \\ \nu_1 = \iint_{S^0-F} |f| \log^+ \frac{1}{x}\, dy_1\, dy_2, \qquad \nu_2 = \iint_{S^0-F} |f|\, dy_1\, dy_2, \end{cases}$$

pourvu que ν_1, ν_2 soient finies au point (x_1, x_2), considérées comme intégrales lebesguiennes. Si $s(x, \delta)$ est la région circulaire $r(x_1, x_2; y_1, y_2) \leqq \delta$ et ν_1 est fini pour le point particulier $x = (x_1, x_2)$, en prenant $0 < \delta < 1$ on obtiendra

$$(10.1\ b)\quad \infty > \nu_1 = \iint_{\lambda_1} |f| \log\frac{1}{r}\, dy_1\, dy_2 \geqq \iint_{\lambda_\delta} |f| \log\frac{1}{r}\, dy_1\, dy_2 \geqq \log\frac{1}{\delta} \iint_{\lambda_\delta} |f|\, dy_1\, dy_2,$$

où

$$\lambda_\delta = s(x, \delta)(S^0 - F).$$

Dès lors l'intégrale

$$\iint_{\lambda_\delta} |f|\, dy_1\, dy_2$$

existe dans le sens lebesguien, si l'intégrale (10.1 a) existe pour le point considéré. La conséquence suivante est immédiate.

(10.2) Posons qu'il existe des points $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)})$ $(j = 1, \ldots, k)$, en nombre fini et des nombres $0 < \delta_j < 1$ correspondants, de sorte que l'intégrale

$$(10.2\ a)\quad N_1(x^{(j)}) = \iint_{S^0-F} f(y_1, y_2) \log^+ \frac{1}{x(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}; y_1, y_2)}\, dy_1\, dy_2$$

existe dans le sens lebesguien pour $j = 1, \ldots, k$, tandis que

$$(10.2\ b)\quad S^0 - F \leqq \sum_1^k s(x^{(j)}, \delta_j);$$

alors l'intégrale

$$(10.2\ c)\quad \iint_{S^0-F} f\, dy_1\, dy_2$$

existera comme celle de Lebesgue; en effet, on aura

$$\iint_{S^0-F} |f|\, dy_1\, dy_2 \leq \sum_1^j \left(\log\frac{1}{\delta_j}\right)^{-1} \iint_{S^0-F} |f| \log^+ r(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}; y_1, y_2)^{-1}\, dy_1\, dy_2.$$

On obtient un corollaire presque évident. Si

$$(10.3) \qquad N(x) = \iint_{S^0-F} f \log^+ \frac{1}{r}\, dy_1\, dy_2$$

existe comme *l'intégrale lebesguienne* pour tous les points x sur S^0-F, alors f sera sommable sur S^0-F; ainsi (10.1 a), si l'intégrale $N(x)$ (10.3) existe (et est finie) partout sur S^0-F, l'intégrale

$$(10.3\ a) \qquad \iint_{S^0-F} |f| \left|\log\frac{1}{r}\right| dy_1\, dy_2$$

existera dans le sens de Lebesgue pour tous les points x sur S^0-F.

Revenons maintenant au théorème 9.12, le complétant comme il suit.

THÉORÈME 10.4. — *Dans les conditions du théorème* 9.12, *si l'intégrale* $N(x)$ (10.3) *de Lebesgue existe partout sur* S^0-F, *la fonction* $F(x_1, x_2) \in (K_0)$ *sera reliée avec la fonction correspondante* f *de* $[c_0]$ *par un potentiel :*

$$(10.4\ a) \qquad F(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S^0-F} f \log\frac{1}{r}\, dy_1\, dy_2 + Q(x_1, x_2)$$
$$(\textit{partout sur } S^0-F),$$

où $Q(x_1, x_2)$ *est une fonction harmonique sur* S^0-F.

Rapppelons que

$$\sigma_\nu^0 \uparrow S^0-F; \qquad \rho_\nu (= \text{la distance de } \sigma_\nu \text{ à } F), \qquad > 0, \qquad \to 0;$$
$$f_\nu = \begin{cases} f & (\text{sur } \sigma_\nu), \\ 0 & (\text{sur } S^0-\sigma_\nu^0). \end{cases}$$

Notons (9.12 d) que

$$(1) \qquad F_\nu(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S^0-F} f_\nu(y_1, y_2) \log\frac{1}{r}\, dy_1\, dy_2.$$

Parce que sur S^0-F l'on a $f_\nu \to f$, $|f_\nu| \leq |f|$, il s'ensuit que

$$(2) \qquad \begin{cases} f_\nu(y_1, y_2) \log\dfrac{1}{r} \to f(y_1, y_2) \log\dfrac{1}{r}; \\ \left|f_\nu(y_1, y_2) \log\dfrac{1}{r}\right| \leq \left|f(y_1, y_2) \log\dfrac{1}{r}\right|. \end{cases}$$

D'où, par un théorème bien connu sur le passage à la limite sous le signe d'intégration (lebesguienne), nous obtenons

$$(3)\qquad G(x_1, x_2) \equiv \lim_{\nu} F_\nu(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\iint_{S^0-F} f(y_1, y_2)\log\frac{1}{r}\,dy_1\,dy_2$$

pour tous les $x = (x_1, x_2)$ sur $S^0 - F$; cela sera valable à cause de l'existence de l'intégrale

$$(4)\qquad \iint_{S_0-F} |f(y_1, y_2)\log r^{-1}(x_1, x_2; y_1, y_2)\,dy_1\,dy_2$$

pour tous les x, sur $S^0 - F$; celle-ci existera en vertu du résultat à propos (10.3 a). $Q_\nu(x_1, x_2)$ étant harmonique sur $\sigma_\nu^0\,(\uparrow S^0 - F)$, en conséquence de (9.12 c), (3), l'on obtient

$$(5)\qquad \begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= \lim_{\nu} Q_\nu(x_1, x_2) \\ &= \lim_{\nu}(F(x_1, x_2) - F_\nu(x_1, x_2)) = F(x_1, x_2) - G(x_1, x_2) \end{aligned}$$

sur $S^0 - F$; la limite $Q(x_1, x_2)$ existera et représentera une fonction harmonique sur l'ensemble ouvert $S^0 - F$; or (5) équivaut à (10.4 a), $G(x_1, x_2)$ (3) étant le potentiel et $Q(x_1, x_2)$ (5) étant la fonction (du caractère exigé) dans la formule (10.4 a).

(10.5) Soit O un ensemble ouvert contenu dans $S^0 - F$ et pouvant être à distance nulle de F; dans les conditions du théorème 9.12, posons que $N(x)$ (10.3) existe au sens de Lebesgue pour tous les x sur O et que f soit sommable sur $S^0 - F$; *dans ce cas la représentation-potentiel de* $F[\in(K_0)]$ (10.4 a) *aura lieu sur* O, *la fonction* $Q\,(x_1, x_2)$ *étant harmonique sur* O.

La démonstration de cela s'achève en répétant le raisonnement de (1) à (5), ci-dessus, avec des modifications convenables et en notant que $O\sigma_\nu^0 \uparrow O$ (pour $\nu \to \infty$).

Or $\Phi(I) = J(F; I) \in [C_0]$; en vertu de nos définitions,

$$f(x_1, x_2)[\in[c_0]] = \mathrm{Der}^{x_1, x_2}\Phi \qquad \text{sur } S_0;$$

(T_0) étant l'opération d'une totalisation et J^{-1} étant l'opération dont il s'agit dans (8.3), une conséquence de (8.3), (9.12 c-d) sera *la formule pour l'opération* J^{-1} :

$$(10.6)\qquad J^{-1}\Phi = \frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma_\nu} \mathrm{Der}^{y_1, y_2}\Phi \log\frac{1}{r}\,dy_1\,dy_2 + H_\nu(x)$$

sur σ_ν^0, $H_\nu(x)\,[= Q_\nu(x) - h(x)]$ *étant une fonction harmonique dans* σ_ν^0 ; aussi on aura *une expression pour l'opération* $J^{-1}T_0$:

$$(10.6\ a)\qquad J^{-1}T_0 f = \frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma_\nu} f\log\frac{1}{r}\,dy_1\,dy_2 + H_\nu(x)$$

(H_ν comme ci-dessus) *pour* (x_1, x_2) *sur* σ_ν^0.

Si f est sommable sur $S^0 - F$, *si* $O, \leqq S^0 - F$, *est ouvert, tandis que l'intégrale lebesguienne*

$$N(x) = \iint_{S^0-F} f\log^+\frac{1}{r}\,dy_1\,dy_2$$

existe pour tous les $x\,[=(x_1, x_2)]$ *sur* O, [par (10.5), (10 4 *a*)] *les formules pour les opérations* J^{-1}, T_0 *seront*

$$(10.6\ b)\qquad J^{-1}\Phi = \frac{1}{2\pi}\iint_{S^0-F} \mathrm{Der}^{x_1,x_2}\Phi\log\frac{1}{r}\,dy_1\,dy_2 + Q(x_1, x_2),$$

$$(10.6\ c)\qquad J^{-1}T_0 f = \frac{1}{2\pi}\iint_{S^0-F} f\log\frac{1}{r}\,dy_1\,dy_2 + Q(x_1, x_2),$$

pour (x_1, x_2) *sur* O, $Q(x_1, x_2)$ *étant harmonique sur* O.

Théorème 10.7. — *Dans les conditions du théorème* 9.12, *soient* $f(x) \in [c_0]$, $F(x) \leqq (K_0)$ (*correspondant à f*), *l'ensemble* F (*fermé, non dense sur* S^0) *comme ci-dessus. Ne faisant aucune hypothèse sur* $N(x)$ (10.3), *supposons que f soit sommable sur l'ensemble ouvert* $O, \leqq S^0 - F$, (pouvant être à distance nulle de F). *Alors* $F(x)$, $f(x)$ *seront reliés par la formule*

$$(10.7\ a)\qquad F(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\iint_0 f(y_1, y_2)\log\frac{1}{r}\,dy_1,\,dy_2 + Q(x_1, x_2),$$

pour tous les x sur O, $Q(x_1, x_2)$ *étant harmonique sur* O.

Établissons ceci d'abord quand $O = S^0 - F$. Selon l'hypothèse on a (10.1 *a*)

$$(10.8)\qquad \nu_2 \equiv \iint_{S^0-F} |f|\,dy_1,\,dy_2 < +\infty.$$

Soit x un point fixe sur $S^0 - F$. Les ensembles σ_j ($j = 1, 2, \ldots$), introduits dans (9.1 *c*-2 *b*), seront assujettis à la condition additionnelle

$$(10.8\ a)\qquad \sigma_j < \sigma_{j+1}^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Nous avons encore $\sigma_j^0 \uparrow S^0 - F$, $\sigma_j \uparrow S^0 - F$ (pour $j \to \infty$). Soit λ_j la distance entre les frontières de σ_{j-1}, σ_j; $\lambda_j > 0$. Pour un entier ν (dépendant de x)

$$(10.8\,b) \qquad x \in \sigma_{\nu-1}^0.$$

Avec λ_1 désignant l'ensemble de points y de $S^0 - F$ pour lesquels $r = r(x, y)\,[= r(x_1, x_2; y_1, y_2)] \leq 1$, on note (10.1 a) que

$$(10.8\,c) \qquad \nu_1(x) \equiv \iint_{S^0-F} |f(y)| \log^+ \frac{1}{r(x, y)}\, dy_1\, dy_2 = \iint_{{}_1\lambda} |f| \log \frac{1}{r}\, dy_1\, dy_2$$

(si l'intégrale ici existe); σ_ν est à distance positive de F; ainsi il existe un nombre $\mathfrak{M}(\sigma_\nu) < +\infty$ tel que

$$|f(y)| \leq \mathfrak{M}(\sigma_\nu) \qquad (\text{sur } \sigma_\nu);$$

d'où

$$(10.8\,d) \qquad \begin{aligned} &\iint_{\lambda_1\sigma_\nu} |f(y)| \log \frac{1}{r(x, y)}\, dy_1\, dy_2 \\ &\leq \left\{ \mathfrak{M}(\sigma_\nu) \iint_{\lambda_1\sigma_\nu} \log \frac{1}{r(x, y)}\, dy\, dy_{21} \right. \\ &\leq \mathfrak{M}(\sigma_\nu) \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \log \frac{1}{r}\, r\, dr\, d\theta = \left. \right\} c\,\mathfrak{M}(\sigma_\nu); \end{aligned}$$

c est fini et indépendant de x, ν. Si l'ensemble $\lambda_1 - \lambda_1\sigma_\nu$ existe, on aura (10.8 b)

$$1 \geq r(x, y) > \lambda_\nu \qquad (\text{pour } y \text{ sur } \lambda_1 - \lambda_1\sigma_\nu),$$

$$(0 \leq) \iint_{\lambda_1-\lambda_1\sigma_\nu} |f| \log \frac{1}{r}\, dy_1\, dy_2 \leq \log \frac{1}{\lambda_1} \iint_{\lambda_1-\lambda_1\sigma_\nu} |f|\, dy_1\, dy_2;$$

or $\lambda_1 - \lambda_1\sigma_\nu$ est contenu dans $S^0 - F - \sigma_\nu$; de là

$$(10.8\,e) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(0 \leq) \iint_{\lambda_1-\lambda_1\sigma_\nu} |f| \log \frac{1}{r}\, dy_1\, dy_2 \leq c_\nu \log \frac{1}{\lambda_\nu}; \\ &c_\nu = \iint_{S^0-F-\sigma_\nu} |f|\, dy \qquad (c_\nu \text{ fini, indépendant de } x), \end{aligned} \right.$$

et (10.8 c-e)

$$(10.9) \qquad \begin{aligned} \nu_1(x) &\equiv \left(\iint_{\lambda_1\sigma_\nu} + \iint_{\lambda_1-\lambda_1\sigma_\nu} \right) |f| \log \frac{1}{r}\, dy_1\, dy_2 \\ &\leq N_\nu \left[= c\,\mathfrak{M}(\sigma_\nu) + c_\nu \log \frac{1}{\lambda_\nu} \right] < +\infty \end{aligned}$$

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE ★ SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES ★ 38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

pour tous les x sur l'ensemble ouvert $S^0 - F$; N_ν ci-dessus dépend de x seulement par ν [*voir* (10.8 *b*)]; la fonction N_ν peut être non bornée pour x sur $S^0 - F$.

En vue de (10.8, 9) on conclut que $\nu(x_1, x_2)$ (10.1 *a*) existe comme une intégrale lebesguienne pour tous les x sur $S^0 - F$; de plus

$$(10.10) \qquad \begin{aligned} \nu(x_1, x_2) &\equiv \iint_{S^0-F} |f| \left|\log\frac{1}{r}\right| dy_1\, dy_r \\ &\leqq N_\nu + \log L \iint_{S_0-F} |f|\, dy_1\, dy_2 \equiv N[x] \end{aligned}$$

(sur $S^0 - F$; ν tel que $\sigma^0_{\nu-1}$ contient x); $N[x]$ est borné sur tout ensemble dont la fermeture est contenue dans $S^0 - F$. En conséquence de (10.10), la démonstration du théorème 10.4 s'applique, *ce qui établit le théorème* 10.7, *quand* $O = S^0 - F$.

Considérons le cas $O < S^0 - F$. L'ensemble $S^0 - O (> F)$ est fermé sur S^0 (F non dense sur S^0). Définissons les σ_j comme auparavant, mais avec l'ensemble F remplacé par $F^* = S^0 - O$. Le théorème 10.4 sera valable avec ce remplacement [c'est-à-dire, pour x sur O et avec l'intégration dans (10.4 *a*) étendue à O]. Avec la nouvelle définition des σ_j, en répétant les procédés (10.8)-(10.10), remplaçant partout F par F^* et $S^0 - O$ par O, *nous complétons l'épreuve du théorème* 10.7.

Revenant à l'opération totalisante (T_0) et à J^{-1} (8.3), en conséquence du théorème 10.7 on obtient le résultat suivant.

(10.11) *Soient* $\Phi(I) = J(F:I) \in [C_0]$, $F(x) \in (K_0)$, $f \in [c_0]$, *l'ensemble ouvert* $O \leqq S^0 - F$; *supposons* f *sommable sur* O; *alors*

$$(1^\circ) \qquad J^{-1}\Phi = \frac{1}{2\pi}\iint_0 \mathrm{Der}^{x_1, x_2}\Phi \log\frac{1}{r}\, dy_1\, dy_2 + Q(x_1, x_2),$$

$$(2^\circ) \qquad J^{-1}T_0 f = \frac{1}{2\pi}\iint_0 f \log\frac{1}{r}\, dy\, dy_2 + Q(x_1, x_2)$$

pour (x_1, x_2) *sur* O, $Q(x_1, x_2)$ *étant harmonique sur* O.

11. Une décomposition de fonctions non sommables. — Nous voulons étendre les résultats précédents au cas où la fonction $f(x) [= f(x_1, x_2)]$ de classe $[c_0]$ n'est pas sommable sur $S^0 - F$. Nous ramènerons de tels développements à un problème résolu par

Brelot dans sa Note (B) en montrant par la suite que $f = f_0 + \psi$, où f_0 est sommable sur $(S^0 - F)$ et ψ est une fonction continue sur $S^0 - F$ et ayant les mêmes propriétés que la fonction ainsi désignée dans (B) [si l'on pose Ω, de (B), $= S^0 - F$]. Brelot avait fait une telle décomposition dans le cas de f continu, obtenant un f_0 sommable et continu.

Hypothèse 11.1. — *Soit Ω un ensemble ouvert, borné, d'ailleurs quelconque; supposons que $f(x)$ (pas nécessairement de $[c_0]$ sur Ω, soit mesurable sur Ω et soit uniformément borné sur tout sous-ensemble* G *de Ω à distance positive de la frontière de Ω [c'est-à-dire, si $G < \Omega$, il existera un nombre $c(G)$ indépendant de x, tel que $|f(x)| \leqq c(G)$ sur* G].

Jusqu'à ce qu'on dise le contraire, f et Ω seront soumis à cette hypothèse-ci.

Par quadrillage subdivisé, si on le veut, on obtient une suite d'ensembles fermés $\sigma_n (n = 1, 2, \ldots)$ de sorte que :

1° σ_n soit une somme finie de carrés fermés deux à deux sans points communs intérieurs;

2° $\sigma_n < \Omega$; $\sigma_n < \sigma^0_{n+1}$; $\sigma_n \to \Omega$ (comme $\nu \to \infty$).

σ_n étant à distance positive de la frontière de Ω, on aura

$$(11.2) \qquad |f(x)| \leqq \mathfrak{M}_n = c(\sigma_n) < \infty \qquad (\text{sur } \sigma_n);$$

notons aussi que

$$(11.2\,a) \qquad \Omega = \sum_1^\infty (\sigma_n - \sigma_{n-1}) \qquad (\sigma_0 \text{ vide}).$$

Considérons maintenant un ensemble

$$(11.3) \qquad \omega = \sigma_n - \sigma^0_{n-1} \qquad (= \text{la fermeture de } \sigma_n - \sigma_{n-1})$$

particulier. Choisissons des ε_n, > 0, comme les termes d'une série convergente,

$$(11.3\,a) \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots = c < \infty;$$

puis posons

$$(11.3\,b) \qquad \sigma = \frac{\varepsilon_n}{6\mathfrak{M}_n}.$$

Par un théorème bien connu de Lusin, f étant mesurable sur $\sigma_n - \sigma_{n-1}^0$, on peut trouver un ensemble fermé H tel que

$$(1_0) \qquad \mathrm{H} \leqq \omega; \qquad m(\omega - \mathrm{H}) < \tau,$$

tandis que

(2_0) $\qquad f(x)$ est continue sur H spécialement à H.

H étant fermé, la continuité (2_0) de f sur H est uniforme, d'où il existe une fonction $\mu(u) \downarrow 0$ (avec $u \downarrow 0$) de sorte que

$$(11.4) \quad |f(x) - f(z)| \leqq \mu(r(x, z)) \qquad [x = (x_1, x_2),\ z = (z_1, z_2)]$$

pour tous les points x, z sur H. Maintenant prenons ρ positifs afin de satisfaire

$$(11.4\ a) \qquad \mu(\rho)\, m(\omega) \leqq \frac{\varepsilon_n}{3}.$$

Avec $S(z, r)$ désignant un cercle fermé de centre z et de rayon r, envisageons :

PROBLÈME 11.5. — *Étant donné* ω, τ, H, $\mu(u)$, ρ *comme ci-dessus, il est exigé de trouver un nombre fini (soit q) de cercles*

$$(11.5\ a) \qquad \Gamma_j = S(z_j, r_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

tels que

$$(11.5\ b) \qquad z_j \in \mathrm{H}; \qquad 0 < r_j \leqq \rho; \qquad m\left(\omega - \sum_1^q \Gamma_j\right) < 2\tau;$$

$$(11.5\ c) \qquad \Gamma_i \Gamma_j = 0 \quad (i \neq j); \qquad \Gamma_j < \omega^0.$$

Construisons un ensemble fermé ω, somme finie de certains rectangles (fermés), contenus dans ω, de sorte que

$$(11.6) \qquad \mathrm{H} \leqq \omega^* \leqq \omega, \qquad m(\omega^* - \mathrm{H}) < \frac{\tau}{2}.$$

Soit ω^{*0} l'intérieur de ω^*; définissons sur $\omega^{*0}\mathrm{H}$ une fonction $\rho(z)$ de façon que

$$(11.6\ a) \quad 0 < \rho(z) \leqq \rho, \qquad S(z, \rho(z)) < \omega^{*0} \qquad (\text{pour tous } z \text{ sur } \omega^*\mathrm{H}).$$

Avec tout point z de $\omega^{*0}\mathrm{H}$ associons une suite de cercles (fermés)

$$(11.6\ b) \qquad S(z, \rho(z)2^{-s}) \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots);$$

on dira que ces cercles (pour tous z sur $\omega^{*0}\mathrm{H}$ et $s = 0, 1, 2, \ldots$)

constituent une famille (F^*) (d'ensembles fermés). Tout point z de $\omega^{*0}H$ est contenu dans une suite régulière (tendant vers z) d'ensembles de (F^*) [les cercles de (11.6 b) pour ce z]; en effet, le paramètre de régularité d'une telle suite est $\frac{1}{4}\pi$. La famille (F^*) couvre $\omega^{*0}H$ dans le sens de Vitali; d'après un théorème de Vitali on peut trouver un nombre fini ou dénombrable d'ensembles de (F^*), deux à deux sans points communs, tels qu'une plénitude de $\omega^{*0}H$ soit contenue dans leur réunion; donc il existe un nombre fini ou infini de cercles

$$(11.6\ c) \qquad \Gamma_j = S(z_j, r_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

avec

$$(1^\circ) \qquad z_j \in \omega^{*0}H \quad (\text{donc dans } \omega^0), \qquad 0 < r_j = \rho(z_j)2^{-s_j} \leqq \rho(z_j) \leqq \rho$$

(quelques entiers $s_j \geqq 0$) et tels que (11.6 a)

$$(2^\circ) \qquad \Gamma_i\Gamma_j = 0 \quad (i \neq j), \qquad \Gamma_j < \omega^{*0} \leqq \omega^0;$$

$$(3^\circ) \qquad m(H - H\,\Sigma\Gamma_j) = m(\omega^{*0}H - H\,\Sigma\Gamma_j) = 0$$

(remarquons que les points de $H - \omega^{*0}H$ étant sur la frontière de ω^*, constituent un ensemble mince ou vide). Si le nombre de Γ_j est fini, soit $q (= q_n)$ ce nombre; sinon choisissons $q (= q_n)$ de sorte que

$$(4^\circ) \qquad \sum_{i=q+1}^{\infty} m(\Gamma_i) < \frac{\tau}{2}.$$

Il suffira de donner les développements dans le cas d'un nombre dénombrable de cercles (11.6 c); on a (4°) :

$$(5^\circ) \quad m\left(\omega^* - \sum_1^q \Gamma_j\right) = m\left[\left(\omega^* - \sum_1^\infty \Gamma_j\right) + \sum_{q+1}^\infty \Gamma_j\right] < m\left(\omega^* - \sum_1^\infty \Gamma_j\right) + \frac{\tau}{2}.$$

D'après (3°) et (11.6)

$$m(H) = m\left(H\sum_1^\infty \Gamma_j\right) \leqq m\left(\sum_1^\infty \Gamma_j\right);$$

$$m\left(\omega^* - \sum_1^\infty \Gamma_j\right) = m(\omega^*) - m\left(\sum_1^\infty \Gamma_j\right)$$
$$\leqq m(\omega^*) - m(H) = m(\omega^* - H) < \frac{\tau}{2};$$

donc (5°)

$$(6^{\circ})\qquad m\left(\omega^{*}-\sum_{1}^{q}\Gamma_j\right)<\tau.$$

A cause de $\Gamma_j<\omega^{*}\leqq\omega$ (11.6), finalement on obtient (6°) (1₀)

$$m\left(\omega-\sum_{1}^{q}\Gamma_j\right)=m(\omega-\omega^{*})+m\left(\omega^{*}-\sum_{1}^{q}\Gamma_j\right)\leqq m(\omega-\mathrm{H})+\tau<2\tau.$$

En vertu de (2°), (1°) on voit que *le problème* 11.5 *a été résolu.*

Avec (11.3)-(11.4 a) en vue et les cercles Γ_j ($j=1, \ldots, q=q_n$) étant supposés choisis afin que le problème 11.5 soit résolu, définissons dans $\omega(=\sigma_n-\sigma^0_{n-1})$ une fonction $\psi_n(x)$ par les conditions

$$(11.7)\qquad \psi_n(x)=f(z_j)\qquad (\text{pour } x \text{ dans } \Gamma_j;\ j=1, \ldots, q);$$

$$(11.7\,a)\qquad \psi_n(x)=0\qquad \left(\text{dans } \omega-\sum_{1}^{q}\Gamma_j\right).$$

A cause de $\omega(=\sigma_n-\sigma^0_{n-1})\leqq\sigma_n$, d'après (11.2) on obtiendra

$$(11.8)\qquad |\psi_n(x)-f(x)|=|f(x)|\leqq\mathfrak{M}_n\qquad \left(\text{sur } \omega-\sum_{1}^{q}\Gamma_j=\omega_0\right);$$

en vertu de (11.4), (11.5 b)

$$(11.8\,a)\qquad |\psi_n(x)-f(x)|=|f(z_j)-f(x)|\leqq\mu(r_j)\leqq\mu(\rho)\qquad (\text{sur } \mathrm{H}\Gamma_j);$$

Γ_j étant dans ω, on aura

$$(11.8\,b)\qquad \left\{\begin{array}{l} |\psi_n(x)-f(x)|=|f(z_j)-f(x)|\leqq|f(z_j)|+|f(x)|\leqq 2\mathfrak{M}_n \\ \qquad\qquad (\text{sur } \Gamma_j-\mathrm{H}\Gamma_j). \end{array}\right.$$

De là

$$(11.9)\qquad \gamma_n=\iint_{\omega}|\psi_n(x)-f(x)|\,dx=\iint_{\omega_0}\cdots+\sum_{1}^{q}\iint_{\mathrm{H}\Gamma_j}\cdots+\sum_{1}^{q}\iint_{\Gamma_j-\mathrm{H}\Gamma_j}\cdots$$
$$\leqq\mathfrak{M}_n\,m(\omega_0)+\mu(\rho)\,m\left(\sum_{1}^{q}\mathrm{H}\Gamma_j\right)+2\mathfrak{M}_n\,m\left(\sum_{1}^{q}(\Gamma_j-\mathrm{H}\Gamma_j)\right).$$

En notant que

$$\sum_{1}^{q}\mathrm{H}\Gamma_j\leqq\omega,\qquad \sum_{1}^{q}(\Gamma_j-\mathrm{H}\Gamma_j)=\sum_{1}^{q}\Gamma_j-\mathrm{H}\sum_{1}^{q}\Gamma_j\leqq\omega-\mathrm{H},$$

on déduit

$$\gamma_n \leqq \mathfrak{M}_n\, m(\omega_0) + \mu(\rho)\, m(\omega) + 2\mathfrak{M}_n\, m(\omega - \mathrm{H});$$

or [(11.5 b), (1_0)]

$$m(\omega_0) < 2\tau, \qquad m(\omega - \mathrm{H}) < \tau,$$

d'où (11.3 b-4 a)

$$(11.9\,a) \qquad \gamma_n < 4\tau\mathfrak{M}_n + m(\rho)\, m(\omega) \leqq \varepsilon_n.$$

Formons *une fonction* $\lambda_{n,j}(u)$, *continue pour* $0 \leqq u \leqq r_j$, *telle qu'avec un certain* $0 < \rho_{n,j} < r_j$, *on a*

$$(11.10) \qquad \lambda_{n,j}(u) = f(z_j) \qquad (\textit{pour } 0 \leqq u \leqq \rho_{n,j});$$

$$\lambda_{n,j}(r_j) = 0; \qquad \lambda_{n,j}(u) \textit{ monotone pour } \rho_{n,j} \leqq u \leqq r_j;$$

$$(11.10') \qquad \int_0^{r_j} \lambda_{n,j}(u)(r_j - u)^{-2}\, du \qquad (\textit{fini}).$$

Remplaçons $\psi_n(x)$ (11.7-7 a), comme il a été fait dans (B), par une fonction $\varphi_n(x)$:

$$(11.10\,a) \quad \begin{cases} \varphi_n(x) = \psi_n(x) = 0 & \left(\text{sur } \omega - \sum_1^q \Gamma_j;\ \omega = \sigma_n - \sigma_{n-1}^0\right), \\ \varphi_n(x) = \lambda_{n,j}(r(x, z_j)) & (\text{sur } \Gamma_j;\ j = 1, \ldots, q). \end{cases}$$

Cette fonction est *continue* sur ω; dans chaque cercle $\Gamma_j = \mathrm{S}(z_j, r_j)$ elle est une fonction de la distance au centre z_j; on aura

$$(11.10\,b) \quad \begin{cases} \varphi_n(x) = \psi_n(x) = f(z_j) & [\text{sur } \mathrm{S}(z_j, \rho_{n,j})], \\ |\varphi_n(x)| \leqq |f(z_j)| \leqq \mathfrak{M}_n & (\text{sur } \Gamma_j); \end{cases}$$

d'ailleurs (11.7), (11.10-10 a)

$$(11.10\,c) \quad \begin{cases} |\psi_n(x) - \varphi_n(x)| = |f(z_j) - \lambda_{n,j}(r(x, z_j))| \leqq \mathrm{M}_n \\ \qquad [\text{sur } a_{n,j} = \Gamma_j - \mathrm{S}(z_j, \rho_{n,j})], \end{cases}$$

et

$$(11.10\,d) \qquad |\psi_n(x) - \varphi_n(x)| = 0 \qquad \left(\text{sur } \omega - \sum_{j=1}^q a_{n,j}\right).$$

En tenant compte de deux dernières formules et de (11.9-9 a), on on obtient

$$\iint_{\omega} |\varphi_n(x) - f(x)|\,dx$$

$$\leqq \iint_{\omega} |\varphi_n(x) - \psi_n(x)|\,dx + \gamma_n < \varepsilon_n + \iint_{\omega} |\varphi_n(x) - \psi_n(x)|\,dx = \varepsilon_n$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} \iint_{a_{n,j}} |\varphi_n(x) - \psi_n(x)|\,dx \leqq \varepsilon_n + \mathfrak{M}_n\, m\left(\sum_{j=1}^{q} a_{n,j}\right).$$

En prenant les $\rho_{n,j}$ assez près des r_j (mais $\rho_{n,j} < r_j$, toujours), la mesure de la somme des anneaux $a_{n,j}(j = 1, \ldots, q)$ peut être faite aussi petite que l'on veut; choisissons les $\rho_{n,j}$ de sorte que

$$(11.11) \qquad g_n = \iint_{\omega} |\varphi_n(x) - f(x)|\,dx < 2\varepsilon_n \qquad (\omega = \sigma_n - \sigma_{n-1}^0).$$

Définition 11.12. — *Soit Ω un ensemble ouvert, borné. On dira qu'une fonction $\psi(x)$ sera du type-B (type de Brelot) sur Ω, s'il existe un nombre fini ou dénombrable de cercles $\Gamma^j = S(x_j, r(j))$ $(j = 1, 2, \ldots)$, fermés, tels que*

$$(11.12\,a) \qquad \Gamma^i \Gamma^j = 0 \quad (i \neq j), \qquad \Gamma^j < \Omega,$$

les centres x_j ne s'accumulant que vers la frontière de Ω, tandis que :

(11.12 b) *$\psi(x)$ est continu sur Ω,*

(11.12 c) *$\psi(x) = 0$ (sur $\Omega - \Sigma\Gamma^j$),*

(11.12 d) *dans chaque cercle Γ^j $\varphi(x)$ est une fonction (continue) de la distance au centre x_j.*

Définissons maintenant une fonction $\psi(x)$:

$$(11.13) \qquad \psi(x) = \varphi_n(x) \quad (\text{sur } \sigma_n - \sigma_{n-1};\ (n = 1, 2, \ldots),$$

où $\varphi_n(x)$ est la fonction (11.10 a). On conclut immédiatement que $\psi(x)$ est de type-B sur Ω; en vertu de (11.11), (11.3 a) on déduira aussi que

$$(11.13\,a) \qquad \iint_{\Omega} |f(x) - \psi(x)|\,dx \leqq \sum_{1}^{\infty} g_n < 2c < +\infty.$$

THÉORÈME 11.14. — *Dans l'hypothèse* 11.1 *il y a une décomposition :*

$$(11.14) \qquad f = f_0 + \psi \qquad (f_0 \text{ sommable sur } \Omega,\ \psi \text{ du type-B sur } \Omega).$$

12. **Le cas de f non sommable dans l'hypothèse 11.1.** — Le théorème de l'auteur (T; 6.7), selon lequel

$$(12.1) \qquad \nabla^0\left[\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega f(y)\log\frac{1}{r(x,y)}\,dy\right] = -f(x)$$

(en tous les points de continuité approximative de f sur l'ensemble ouvert, borné Ω), au cas où f est mesurable et uniformément borné sur Ω, ce théorème peut être étendu comme il suit.

THÉORÈME 12.2. — *Soit Ω ouvert, borné, et f sommable sur Ω, uniformément borné dans tout sous-ensemble fermé de Ω. Désignons par A^* l'ensemble de points de continuité approximative de f sur Ω. Alors*

$$(12.2) \qquad \nabla^0\left[\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega f(y)\log\frac{1}{r(x,y)}\,dy\right] = -f(x) \qquad (\text{sur } A^*).$$

On peut achever cette extension facilement par les méthodes déjà employées. On aura (11.2) $|f| \leq \mathfrak{M}_n$ (fini) dans σ_n, les σ_n étant des ensembles introduits dans le texte qui précède (11.2); $\sigma_n < \sigma^0_{n+1}$; $\sigma_n \uparrow \Omega$. La distance λ_n entre les frontières de σ_{n-1}, σ_n sera positive. Étant donné un point particulier x sur Ω, soit n un entier tel que $x \in \sigma_{n-1}$. Écrivons

$$(12.3) \qquad \left\{\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma_n} f(y)\log\frac{1}{r(x,y)}\,dy, \\ H_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega_n} f(y)\log\frac{1}{r(x,y)}\,dy, \\ \Omega_n &= \Omega - \sigma_n; \\ \Omega_n &= \Omega'_n + \Omega''_n, \end{aligned}\right.$$

$\Omega'_n =$ l'ensemble de points y de Ω_n avec $r(x, y) \leq 1$; $\Omega''_n =$ l'ensemble de points y de Ω_n avec $r(x, y) > 1$.

L'intégrale $P_n(x)$ existe puisque $|f(y)| \leq \mathfrak{M}_n$ pour y dans σ_n. Quant à $H_n(x)$, en écrivant $H_n(x) = H'_n(x) + H''_n(x)$, les intégrations pour les termes $H'_n(x)$ et $H''_n(x)$ étant sur Ω'_n et Ω''_n, respectivement, on déduira

$$2\pi\,|\,H'_n(x)\,| \leqq \log\frac{1}{\lambda_n}\iint_{\Omega'_n}|f(y)|\,dy \leqq \log\frac{1}{\lambda_n}\iint_{\Omega_n}|f(y)|\,dy \qquad (\text{fini}),$$

pourvu que Ω'_n ne soit pas vide; aussi

$$|\,H''_n(x)\,| \leqq \log D\iint_{\Omega''_n}|f(y)|\,dy \leqq \log D\iint_{\Omega_n}\cdots \qquad (\text{fini}),$$

si Ω''_n n'est pas vide. Comme pour tout point x sur Ω on peut trouver un n tel que $x\in\sigma_{n-1}$, les considérations que nous venons de donner montrent que $f(y)\log\frac{1}{r(x,y)}$ est sommable sur Ω, comme fonction de y, cela étant pour tous les x sur Ω. D'après notre théorème 12.1 on obtiendra (12.3)

$$(12.3\,a)\quad \nabla^0 P_n(x) = \nabla^0\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma_n^0} f\log\frac{1}{r}\,dy = -f(x) \qquad (\text{pour } x \text{ sur } A^*\sigma_n^0);$$

d'autre part $H_n(x)$ est harmonique en tout point intérieur de $\Omega-\Omega_n=\sigma_n$, donc dans σ_n^0; de là, $\nabla^0 H_n(x)=0$ (sur σ_n^0) et

$$\nabla^0\left[\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} f\log\frac{1}{r}\,dy\right] = \nabla^0[\,P_n(x)+H_n(x)] = -f(x)$$

sur $A^*\sigma_n^0$ (n tel que $x\in\sigma_{n-1}$); le premier membre ici étant indépendant de n, on voit que la formule (12.2) est valable sur A^*.

DÉFINITION 12.4. — *Avec Ω ouvert, borné, désignons par* $L_x(\ldots,\Omega)$ *l'opération définie, à une fonction harmonique (sur Ω) près, dans le champ de fonctions*

$$(12.4\,a)\qquad \psi(x)\in \textit{type-}B \textit{ sur } \Omega \qquad (\textit{définition } 11.12),$$

de façon que

$$(12.4\,b)\qquad \nabla^0 L_x(\psi,\Omega) = -\psi(x) \qquad (\textit{partout sur } \Omega).$$

En vertu de la Note de Brelot (B), une telle opération peut être effectivement construite.

Supposons maintenant que f soit mesurable sur Ω, uniformément bornée dans tout sous-ensemble fermé de Ω. Alors (théorème 11.14) on aura une décomposition (valable pour x sur Ω) :

$$f=f_0+\psi \qquad (f_0 \textit{ sommable sur } \Omega,\ \psi\in\textit{type-}B \textit{ sur } \Omega).$$

Puisque ψ, étant continu sur Ω, est uniformément borné sur tout sous-ensemble fermé de Ω, on voit que :

(1°) f_0 est uniformément borné sur tout G ayant $\overline{G} < \Omega$;

(2°) l'ensemble A^* de points de continuité approximative de f_0 sur Ω est le même que pour f;

donc le théorème 12.2 s'applique à f_0 de sorte que

$$(3°) \quad \nabla^0\left[\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega f_0(y)\log\frac{1}{r(x,y)}\,dy\right] = -f_0(x) \qquad (\text{sur } A^*).$$

D'où [(12.4 b), 3°] on conclut :

Théorème 12.5. — *Soit f mesurable sur Ω (l'ensemble ouvert, borné), uniformément borné sur tout sous-ensemble fermé de Ω mais pas nécessairement sommable sur Ω). Envisageons une décomposition* (11.14) *de f (théorème* 11.14). *La fonction $u(x)$, représentée par l'opération*

$$(12.5\,a) \quad u(x) = T_x(f,\Omega) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega f_0(y)\log\frac{1}{r(x,y)}\,dy + L_x(\psi,\Omega)$$

[$L_x(\ldots,\Omega)$ *selon la définition* 12.4], *satisfait à l'équation*

$$(12.5\,b) \qquad \nabla^0 u(x)[=\nabla^0 T_x(f,\Omega)] = -f(x) \qquad (\textit{sur } A^*),$$

où A^* est l'ensemble de points de continuité approximative de f sur Ω.

Remarque 12.6. — L'opérateur T dépend de la décomposition de f. Si $f = f'_0 + \psi'_0$ est une décomposition différente de celle donnée, en désignant par T' l'opérateur correspondant et en écrivant

$$u'(x) = T'_x(f,\Omega),$$

on conclura que

$$u'(x) - u(x) = \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega (f'_0(y) - f(y))\log\frac{1}{r(x,y)}\,dy + L_x(\psi') - L_x(\psi)$$

et $\nabla^0(u' - u) = 0$ sur A^*. Mais cela, en général, n'entraîne pas que $u' - u$ soit harmonique sur Ω, puisqu'on ne sait que l'ensemble excepté $\Omega - A^*$ est mince. La même remarque sera valable pour la différence de deux solutions quelconques (sur A^*) v, v' (c'est-à-dire, quand par n'importe quelles méthodes on a obtenu v, v', continues sur Ω, telles que ∇_ν^0, ∇'_ν existent partout sur Ω, tandis que $\nabla_\nu^0 = \nabla_{\nu'}^0$ sur A^*).

13. **La représentation de** $F(x)$ **de** (K_0) **sur** $S^0 - F$ **dans le cas général.** — Revenons au cas de $f \in [c_0]$ dans le rectangle ouvert S^0 (8.1-8.2); soit $F(\leqq S^0)$ l'ensemble fermé, non dense sur S, introduit à propos de (7.2 a); posons

$$(13.1) \qquad \Omega = S^0 - F;$$

il a déjà été établi que f est uniformément borné sur tout sous-ensemble de Ω à distance positive de F. De là, sans introduire aucune autre hypothèse, il s'ensuit que le théorème 12.5 s'applique à Ω, f dans le cas considéré maintenant; ainsi on en conclut comme il suit.

(13.2) *Si* $f \in [c_0]$ (dans S^0) *et* $f = f_0 + \psi$ *est une décomposition dans* $\Omega = S^0 - F$ (selon le théorème 11.14), *la fonction*

$$(13.2\,a) \qquad u(x) = T_x(f, \Omega) \equiv \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega f_0(y) \log\frac{1}{r}\,dy + L_x(\psi, \Omega)$$

(f_0 *sommable sur* Ω, ψ *de type*-B *sur* Ω) *satisfera à l'équation*

$$(13.2\,b) \qquad \nabla^0 u(x) = -f(x) \qquad (\textit{sur } A),$$

où A *est l'ensemble de points de continuité approximative de* f *sur* Ω; d'ailleurs (théorème 9.12),

(13.2 c) A *est une plénitude de* Ω *et contient un résiduel* R *de* Ω.
$F(x)$, $\in (K_0)$ dans S^0 (définition 8.1) étant une fonction correspondant à f, on aura (9.12 a) $\nabla^0 F(x) = -f(x)$ sur A; donc

$$(13.3) \qquad F(x) = u(x) + Q^*(x) \qquad [u(x) \text{ de } (13.2\,a)],$$

$Q^*(x)$ étant une fonction avec les propriétés suivantes :

(13.3 a) Q^* *est continue sur* Ω *et possède les dérivées* $D_{x_1} Q^*(x_1, x_2)$, $D_{x_2} Q^*(x_1, x_2)$ *continues sur* Ω;

$$(13.3\,b) \qquad \nabla^0 Q^*(x) = 0 \qquad (\textit{sur } A^*).$$

Les propriétés (13.3 a) *sont une conséquence du théorème* (14'.9) *ci-après.*

On remarque que le Laplacien ∇^0 de Q^* s'évanouit sur Ω, sauf sur l'ensemble exceptionnel $\Omega - A^*$, qui est *mince* et *gerbé* (à moins que $\Omega - A^*$ soit vide); nous ne savons pas si cela, par soi-même, suffit, pour que Q^* soit harmonique dans Ω; nous procéderons autrement.

Soit I un intervalle (rectangle ouvert), tel que

$$(13.) \qquad I < \Omega (= S^0 - F), \qquad I\bar{F} = 0, \qquad < S^0.$$

En vertu de (**8**.4 *a*), pour le flux de F (à travers de la frontière de I), on aura

$$(13.4\,a) \quad J(F:I) = \iint_I f(x)\,dx \qquad [x = (x_1, x_2),\ dx = dx_1\,dx_2].$$

Rappelons un *théorème de l'auteur dans* (T), (T; 9.16). Si $g(x)$ est sommable sur un ensemble ouvert et borné ω et $g^p(x)$, avec une constante $p > 1$, est sommable sur tout sous-ensemble fermé de ω, alors (avec intégrations lebesguiennes) en écrivant

$$(1^\circ) \qquad g^*(x) = \iint_\omega \frac{|f(y)|}{r(x, y)}\,dy,$$

(2°) $g^*(x)$ sera sommable sur tout segment linéaire dans ω.

Or f_0 (de la décomposition $f = f_0 + \psi$) de (**13**.2 *a*) est sommable sur Ω et uniformément borné, sur tout sous-ensemble fermé de Ω; donc le théorème ci-dessus s'applique; d'où on conclut que l'intégrale (lebesguienne)

$$(13.5) \quad \int_{(I)} \left[\iint_\Omega \frac{|f_0(y)|}{r(x, y)}\,dy \right] ds(x, y) \qquad [(I) = \text{la frontière de } I]$$

existe (est finie) pour tout I satisfaisant (**13**.4). Selon un résultat de l'auteur dans (T), (T; 5.3 *b*), l'existence de l'intégrale (**13**.5) entraînera que le flux de

$$(13.5\,a) \qquad F_0(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_\Omega f_0(y) \log \frac{1}{r(x, y)}\,dy$$

à travers (I) égalera $\iint f_0(y)\,dy$ (sur I); c'est-à-dire

$$(13.5\,b) \qquad J(F_0:I) = \iint_I f_0(y)\,dy \qquad [\text{dans } (13.4)].$$

La fonction $L_x(\psi, \Omega)$ (une solution de $\nabla^0 \ldots = -\psi$, partout sur Ω) peut être construite en accord avec Brelot (B), comme il suit. Soient $\Gamma_j = S(x_j, r_j)$ ($j = 1, 2, \ldots$) les cercles fermés (en nombre fini ou dénombrable), $\Gamma_j < \Omega$, $\Gamma_i\Gamma_j = 0$ ($i \neq j$), leurs centres ne s'accumulant que vers la frontière de Ω, ces cercles étant ceux employés dans la construction de ψ. En vertu de (B) *il existe une fonction $v(x)$ telle que :*

(**13**.6) $v(x)$ est harmonique sur Ω pour $x \neq x_i$;

(**13**.6 *a*) la partie principale de $v(x)$ en x_i est

$$c_i \log \frac{1}{r(x_i, x)}, \qquad \text{où} \quad c_i = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_i} \psi(y)\, dy$$

(c'est-à-dire, v est égale à la partie principale dans un voisinage de x_i, à une fonction harmonique près); $L_x(\psi, \Omega)$ est défini par les relations

$$(13.6\,b) \qquad L_x(\psi, \Omega) = v(x) \qquad (\text{sur } \Omega - \Sigma\Gamma_i^0);$$

$$(13.6\,c) \quad L_x(\psi, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_i} \psi(y) \log \frac{1}{r(x, y)}\, dy + H_i(x) \qquad (\text{sur } \Gamma_i^0),$$

où

(**13**.6 *d*) $H_i(x)$ est harmonique sur Γ_i^0 et a les valeurs limites sur la circonférence $C(\Gamma_i)$ de Γ_i, de sorte que $L_x(\psi, \Omega)$ soit continu sur Ω.

Une condition comme (**11**.10′) *ne se trouve pas dans la Note* (B) *de Brelot; pourtant il nous conviendra de l'utiliser; nous procéderons toujours dans l'hypothèse* (**11**.10′).

Or [(**13**.3 *a*), *voir* théorème **14**.9 ci après] on sait que

$$(13.7) \qquad D_{x_1} L_x(\psi, \Omega), \quad D_{x_2} L_x(\psi, \Omega) \quad \text{sont continus sur } \Omega.$$

I (**13**.4) est à distance positive de la frontière de Ω. Si $I < \Omega - \Sigma\Gamma_i^0$, pour le flux à travers (I) on aura (**13**.6 *b*), (**13**.6) :

$$(1_0) \qquad J(L_x(\psi, \Omega) : I) = 0.$$

Au cas où I se trouve dans un Γ_i on obtiendra (**13**.6 *c-d*)

$$(2_0). \qquad J(L_x(\psi, \Omega) : I) = \iint_I \psi(y)\, dy$$

[noter que $\psi(y)$ est continu et borné sur Γ_i].

Dans le cas général il y aura un nombre fini de cercles,

$$\Gamma_{i_1}, \quad \Gamma_{i_2}, \quad \ldots, \quad \Gamma_{i_q},$$

chacun possédant des points dans I; en désignant par $S_1, S_2, \ldots, S_q$ les parties de ces cercles dans I et par R_0 la partie I en dehors de $S_1, \ldots, S_q$, on obtiendra $I = R_0 + S_1 + \ldots + S_q$. *En vue des propriétés* (13.7) *de continuité*, si l'on prend les flux, toujours avec la normale intérieure, *pour les régions* $R_0, S_1, \ldots, S_q$, *on déduira*

$$J(L_x(\psi, \Omega) : I) = J(L_x(\ldots) : R_0) + \ldots + J(L_x(\ldots) : S_q).$$

Puisque R_0^0 est dans $\Omega - \Sigma\Gamma_i^0$, où $L_x(\psi, \Omega)$ a la valeur $v(x)$, tandis que $v(x)$ est harmonique (13.6), il s'ensuit que $J(L_x(\psi, \Omega) : R_0) = 0$. Dans S_1 on aura (13.6 c), avec $i = i_1$; $\psi(y)$ étant continu, borné, le flux pour S_1 sera donné par

$$J(L_x(\psi, \Omega) : S_1) = \iint_{S_1} \psi(y)\, dy;$$

de même pour $S_2, \ldots, S_q$. Donc

$$(3_0) \qquad J(L_x(\psi, \Omega) : I) = \sum_1^q \iint_{S_j} \psi(y)\, dy, \qquad \sum_1^q S_j = I \sum_1^\infty \Gamma_i.$$

En rappelant que $\psi = 0$ sur $\Omega - \Sigma\Gamma_i$, de (1_0)-(3_0) *on déduit que*

$$(13.7\,a) \qquad J(L_x(\psi, \Omega) : I) = \iint_I \psi(y)\, dy,$$

pourvu que I *soit à distance positive de la frontière de* Ω.

En conséquence de (13.2 a), (13.5 a)

$$J(u(x) : I) = J(F_0(x) : I) + J(L_x(\psi, \Omega) : I);$$

de là, en vue de (13.5 b-7 a) et puisque $f_0 + \psi = f$,

$$(13.8) \qquad J(u(x) : I) = \iint_I (f_0(y) + \psi(y))\, dy = \iint_I f(y)\, dy.$$

Enfin d'après (13.3, 4 a)

$$J(Q^*(x) : I) = J(F(x) : I) - J(u(x) : I) = 0$$

pour tous les I à distance $u > 0$ de la frontière de Ω. *D'où il suit que* $Q^*(x)$ *est harmonique sur* Ω.

Ainsi, en tenant compte de (13.3), (13.2a), on peut résumer comme il suit.

Théorème 13.9. — *Soient* $f(x)$, $\in[c_0]$, *et* $F(x)$, $\in(K_0)$ (*sur le rectangle* S^0) *deux fonctions qui se correspondent;* F *l'ensemble fermé de la section* 7. *Alors, sans aucune autre hypothèse,* $F(x)$ *sera représentable partout sur* $\Omega = S^0 - F$ *par la formule*

$$F(x) = T_x(f, \Omega) + Q(x) \quad [Q(x) \text{ harmonique sur } \Omega]; \tag{13.9a}$$

ici $T_x(\ldots)$ *correspond à une décomposition (quelconque)* (11.14), $f = f_0 + \psi$ (f_0 *sommable sur* Ω, ψ *de type*-B *sur* Ω), *et l'on a*

$$T_x(f, \Omega) = \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega f_0(y)\log\frac{1}{r}\,dy + L_x(\psi, \Omega), \tag{13.9b}$$

où l'opérateur $L_x(\psi, \Omega)$ (*définition* 12.4) *est construit selon* (13.6-6d).

Bien entendu, la fonction harmonique $Q(x)$ dépendra du choix de la décomposition.

14. **L'étude de l'opérateur** $L_x(\psi, \Omega)$. — Afin de démontrer (13.3a) nous établissons le résultat suivant.

(14.1) *Soit* $G_h(\Phi)$ *une fonction de période* 2π, *de la forme*

$$G_h(\Phi) = \Phi^{-1} g_h(\Phi), \tag{14.1°}$$

où $g_h(\Phi)$ *est mesurable pour* $|\Phi| \leqq \pi$ *et*

$$|g_h(\Phi) - g_h(-\Phi)| \leqq W(\Phi) \quad (0 < h \leqq h_0), \tag{14.2°}$$

où $W(\Phi)$ *est indépendant de* h *et tel que* $W(\Phi)\Phi^{-1}$ *est sommable sur* $(0, \pi)$; *supposons que la limite*

$$\lim_{h=0} G_h(\Phi) = G(\Phi) = \Phi^{-1} g(\Phi) \quad (-\pi \leqq \Phi \leqq \pi) \tag{14.3°}$$

existe. Alors on aura

$$\lim_n \int_0^{2\pi} G_h(\Phi)\,d\Phi = \text{Princ.}\int_0^{2\pi} G(\Phi)\,d\Phi, \tag{14.1a}$$

où la dernière intégrale est prise dans le sens des valeurs principales.

La signification du second membre dans (**14**. 1 a) est que

$$\text{Princ.}\int_0^{2\pi} G(\Phi)\,d\Phi = \text{Princ.}\int_{-\pi}^{\pi} G(\Phi)\,d\Phi = \lim_{\varepsilon=0} I_\varepsilon,$$

$$I_\varepsilon = \left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}\right) G(\Phi)\,d\Phi.$$

On observe que

$$\int_0^{2\pi} G_h(\Phi)\,d\Phi = \int_0^{\pi}[G_h(\Phi) + G_h(-\Phi)]\,d\Phi = \int_0^{\pi}[g_h(\Phi) - g_h(-\Phi)]\frac{d\Phi}{\Phi};$$

$$|\,g_h(\Phi) - g_h(-\Phi)\,|\,\Phi^{-1} \leqq W(\Phi)\,\Phi^{-1}.$$

Le dernier membre ici étant indépendant de h est intégrable sur $(0, \pi)$, on peut passer à la limite sous le signe d'intégration (dans le second membre ci-dessous), obtenant

$$\lim_h \int_0^{2\pi} G_h(\Phi)\,d\Phi = \lim_n \int_0^{\pi} [g_h(\Phi) - g_h(-\Phi)]\,\Phi^{-1}\,d\Phi$$

$$= \int_0^{\pi} [g(\Phi) - g(-\Phi)]\,\Phi^{-1}\,d\Phi.$$

La dernière intégrale existe au sens ordinaire et l'on note qu'il est possible de la représenter comme

$$\lim_{\varepsilon \succ 0} T_\varepsilon, \qquad \text{où} \quad T_\varepsilon = \int_\varepsilon^{\pi} [g(\Phi) - g(-\Phi)]\,\Phi^{-1}\,d\Phi;$$

d'autre part, d'après (**14**.3°)

$$T_\varepsilon = \int_\varepsilon^{\pi} [G(\Phi) + G(-\Phi)]\,d\Phi = \left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^{\pi}\right) G(\Phi)\,d\Phi = I_\varepsilon.$$

D'où la conclusion (**14**. 1 a).

NOTATION **14**.2. — $y = \rho e^{i\varphi}$, $z = R e^{i\Phi}$, $\zeta = R e^{i\theta}$, $x = r e^{i\theta}$, $\theta - \varphi = 2\alpha$ $(r = R - h;\ h > 0)$; $\Gamma =$ la région $\{\rho \leqq R\}$; $\Gamma^0 =$ le domaine $\{\rho < R\}$; $C =$ la circonférence de Γ; $\psi(y) = \psi(\rho)$, une fonction indépendante de φ; $\psi(\rho)$ continue pour $0 \leqq \rho \leqq R$; $\psi(R) = 0$;

$$(\mathbf{14}.2\,a) \qquad \int_0^R |\,\psi(\rho)\,|\,(R - \rho)^{-2}\,d\rho < \infty \qquad [\textit{voir}\ (\mathbf{11}.10')].$$

LEMME 14.3. — *Soit $y = \rho e^{i\varphi}$ un point fixe, avec $\rho < R$. Considérons la fonction*

$$(14.3\,a)\qquad K(h, y) = \frac{1}{h}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{2\pi r^2(x, z)} \log\frac{r(\zeta, y)}{r(z, y)}\,d\Phi = \int_0^{2\pi} \frac{2R - h}{2\pi\,|x - z|^2} \log\frac{|\zeta - y|}{|z - y|}\,d\Phi$$

(voir *la notation* 14.2). *Pour $h(>0) \to 0$ on obtient*

$$(14.3\,b)\qquad \lim_h K(h, y) = K(y) = \frac{1}{r^2(\zeta, y)}\left[\frac{\rho^2}{R} - \rho\cos(\varphi - \theta)\right].$$

Remarquons que

$$(1_0)\qquad |x - z|^2 = h^2 + 4R(R - h)\sin^2\frac{\Phi - \theta}{2};$$

$$(2_0)\qquad \frac{\zeta - y}{z - y} = e^{i(\theta - \Phi)}[1 - \rho R^{-1} e^{i(\varphi - \theta)}][1 - \rho R^{-1} e^{i(\varphi - \Phi)}]^{-1};$$

d'où

$$\log\frac{|\zeta - y|}{|z - y|} = \log|[1 - \rho R^{-1} e^{i(\varphi - \theta)}][1 - \rho R^{-1} e^{i(\varphi - \Phi)}]^{-1}| = Re\{\log[1 - \rho R^{-1} e^{i(\varphi - \theta)}][1 - \rho R^{-1} e^{i(\varphi - \Phi)}]^{-1}\},$$

$Re\{\ldots\}$ désignant la partie réelle de $\{\ldots\}$. Vu $\rho R^{-1} < 1$, on déduit

$$\{\ldots\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\rho^n R^{-n}(e^{in(\varphi - \Phi)} - e^{in(\varphi - \theta)}),$$

$$(3_0)\qquad \log\frac{|\zeta - y|}{|z - y|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\rho^n R^{-n}[\cos n(\Phi - \varphi) - \cos n(\varphi - \theta)].$$

La fonction

$$(4_0)\qquad G_h(\Phi - \theta) = \frac{2R - h}{2\pi\left[h^2 + 4R(R - h)\sin^2\frac{\Phi - \theta}{2}\right]} \times \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{\rho^n}{R^n}[\cos n(\Phi - \varphi) - \cos n(\varphi - \theta)]$$

est de période 2π; en écrivant

$$(5_0)\qquad G_h(\Phi - \theta) = (\Phi - \theta)^{-1} g_h(\Phi - \theta) \qquad (|\Phi - \theta| \leq 2\pi),$$

on obtient

$$(6_0)\qquad \nu = [g_h(\Phi - \theta) - g_h(\theta - \Phi)](\Phi - \theta)^{-1} = G_h(\Phi - \theta) + G_h(\theta - \Phi).$$

En vue de (4_0) on a

$$\nu = \frac{-4(2R-h)}{2\pi\left[h^2+4R(R-h)\sin^2\frac{\Phi-\theta}{2}\right]}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\varphi-\theta)\sin^2 n\frac{\Phi-\theta}{2}.$$

Vu une formule de moyen

$$\sin n\frac{\Phi-\theta}{2} = \frac{\Phi-\theta}{2} n\cos\vartheta \qquad \left(\text{quelque } \vartheta \text{ entre o et } n\frac{\Phi-\theta}{2}\right);$$

donc en écrivant

$$c_0 = \sum_1^\infty n\frac{\rho^n}{R^n} = \frac{R\rho}{(R-\rho)^2},$$

il s'ensuit que

$$(7_0) \qquad |\nu| \leqq \frac{4(2R-h)}{2\pi\left[4R(R-h)\sin^2\frac{\Phi-\theta}{2}\right]} c_0\left[\frac{\Phi-\theta}{2}\right]^2 \leqq \frac{c_0\pi}{4(R-h_0)} = c_1$$

pour $|\Phi-\theta| \leqq \pi$ et $\mathrm{o} < h \leqq h_0 (< R)$; par conséquent (6_0),

$$(8_0) \qquad |g_h(\Phi-\theta) - g_h(\theta-\Phi)| \leqq c_1|\Phi-\theta| \qquad (\mathrm{o} < h \leqq h_0)$$

lorsque $|\Phi-\theta| \leqq \pi$, c_1 (7_0) *étant indépendant de h.*

En tenant compte de (4_0), (5_0), (8_0) nous concluons que le résultat (**14**. 1-1a) s'applique à $G_h(\Phi-\theta)$ (4_0), $g_h(\Phi-\theta)$ (5_0), lorsque on y remplace Φ par $\Phi-\theta$ et $W(\Phi)$ par

$$W(\Phi-\theta) = c_1|\Phi-\theta|;$$

la fonction $W(\Phi-\theta)(\Phi-\theta)^{-1}$ est bornée pour Φ sur $(\theta, \theta+\pi)$. D'où (**14**.3a)

$$(14.4) \qquad \lim_h K(h, y) = K(y) = \text{Princ.}\int_0^{2\pi} G(\Phi-\theta)\,d\Phi = \lim T_\varepsilon;$$

ici par suite de (4_0), (3_0)

$$(14.4a) \qquad T_\varepsilon = \int_{\theta+\varepsilon}^{\theta+2\pi-\varepsilon} G(\Phi-\theta)\,d\Phi,$$

$$(14.4b) \quad G(\Phi-\theta) = \lim_h G_h(\Phi-\theta) = \frac{1}{4\pi R}\operatorname{cos\acute{e}c}^2\frac{\Phi-\theta}{2}\log\frac{r(\zeta, y)}{r(z, y)}.$$

Soient ζ', ζ'' les points sur C (**14**.2)

$$(9_0) \qquad \zeta'' = R\,e^{i(\theta+\varepsilon)}, \qquad \zeta' = R\,e^{i(\theta-\varepsilon)}.$$

En intégrant par parties, on déduit

$$4\pi RT_\varepsilon = -2\cot g\frac{\Phi-\theta}{2}\log\frac{r(\zeta,y)}{r(z,y)}\Big]_{\theta+\varepsilon}^{\theta+2\pi-\varepsilon}$$
$$-\int_{\theta+\varepsilon}^{\theta+2\pi-\varepsilon}\left[-2\cot g\frac{\Phi-\theta}{2}\right]\frac{\partial}{\partial\Phi}\log\frac{r(\zeta,y)}{r(z,y)}d\Phi$$
$$=\log\frac{r(\zeta,y)}{r(\zeta',y)}2\cot g\frac{\varepsilon}{2}-\log\frac{r(\zeta,y)}{r(\zeta'',y)}\left(-2\cot g\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$-\int_{\theta+\varepsilon}^{\theta+2\pi-\varepsilon}\cot g\frac{\Phi-\theta}{2}\frac{\partial}{\partial\Phi}\log r^2(z,y)\,d\Phi;$$

ainsi

$$(10_0)\quad\begin{cases}4\pi RT_\varepsilon = T_{1,\varepsilon}-T_{2,\varepsilon}, \qquad T_{1,\varepsilon}=2\cot g\frac{\varepsilon}{2}\log\left[\frac{r^2(\zeta,y)}{r(\zeta',y)\,r(\zeta'',y)}\right],\\ T_{2,\varepsilon}=\displaystyle\int_{\theta+\varepsilon}^{\theta+2\pi-\varepsilon}\cot g\frac{\Phi-\theta}{2}\frac{\partial}{\partial\Phi}\log(R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\Phi-\varphi))\,d\Phi.\end{cases}$$

En conséquence de (3_0), où nous posons $\Phi-\theta=\varepsilon$ et, puis, $\Phi-\theta=-\varepsilon$, on trouve (9_0)

$$\log\frac{r(\zeta,y)}{r(\zeta',y)}=\sum_1^\infty\frac{1}{n}\rho^nR^{-n}[\cos(n(\varepsilon+2\alpha))-\cos(n2\alpha)],$$
$$\log\frac{r(\zeta,y)}{r(\zeta',y)}=\sum_1^\infty\frac{1}{n}\rho^nR^{-n}[\cos(n(\varepsilon-2\alpha))-\cos(n2\alpha)];$$
$$|T_{1,\varepsilon}|=8\cot g\frac{\varepsilon}{2}\left|\sum\frac{1}{n}\rho^nR^{-n}\cos(n2\alpha)\sin^2\frac{n\varepsilon}{2}\right|.$$

Comme il a été indiqué dans le texte qui précède (7_0), $\left|\sin\frac{n\varepsilon}{2}\right|\leqq n\frac{\varepsilon}{2}$, ce qui donne (9_0)

$$|T_{1,\varepsilon}|\leqq 2c_0\varepsilon^2\cot g\frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc

$$(11_0)\qquad \lim_\varepsilon T_{1,\varepsilon}=0.$$

Pour calculer $T_{2,\varepsilon}$ (10_0) remarquons que

$$(12_0)\quad \frac{\partial}{\partial\Phi}\log(R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\Phi-\varphi))=\frac{\sin(\Phi-\varphi)}{c-\cos(\Phi-\varphi)};\qquad c=\frac{R^2+\rho^2}{2R\rho}>1;$$

dès lors

$$(13_0)\quad\begin{cases}T_{2,\varepsilon}=T_\varepsilon^0+T'_\varepsilon;\\ T_\varepsilon^0=\dfrac{\sin(\theta-\varphi)}{c-\cos(\theta-\varphi)}\displaystyle\int_{\theta+\varepsilon}^{\theta+2\pi-\varepsilon}\cot g\frac{\Phi-\theta}{2}d\Phi=0;\\ T'_\varepsilon=\displaystyle\int_{\theta+\varepsilon}^{\theta+2\pi-\varepsilon}\cot g\frac{\Phi-\theta}{2}\left[\frac{\sin(\Phi-\varphi)}{c-\cos(\Phi-\varphi)}-\frac{\sin(\theta-\varphi)}{c-\cos(\theta-\varphi)}\right]d\Phi.\end{cases}$$

Faisons le calcul de T'_ε :

$$T'_\varepsilon = \int_{\theta+\varepsilon}^{\theta+2\pi-\varepsilon} \frac{\cos\dfrac{\Phi-\theta}{2}}{\sin\dfrac{\Phi-\theta}{2}} \, \frac{2c\cos\left(\dfrac{\Phi+\theta}{2}-\varphi\right)\sin\dfrac{\Phi-\theta}{2}-\sin(\Phi-\theta)}{[c-\cos(\theta-\varphi)][c-\cos(\Phi-\varphi)]}\, d\Phi$$

$$= \frac{1}{c-\cos(\theta-\varphi)}\int_{\theta+\varepsilon}^{\theta+2\pi-\varepsilon} \cos\frac{\Phi-\theta}{2}\, \frac{2c\cos\left(\dfrac{\Phi+\theta}{2}-\varphi\right)-2\cos\dfrac{\Phi-\theta}{2}}{c-\cos(\Phi-\varphi)}\, d\Phi$$

$$= \frac{1}{c-\cos(\theta-\varphi)}\int_{\theta+\varepsilon}^{\theta+2\pi-\varepsilon}$$

$$\times\, [c\cos(\theta-\varphi)+c\cos(\Phi-\varphi)-1-\cos(\Phi-\theta)]\frac{d\Phi}{c-\cos(\Phi-\varphi)}.$$

Avec $2\alpha=\theta-\varphi$, on obtient

$$\lim_\varepsilon T'_\varepsilon = \frac{1}{c-\cos 2\alpha}\int_0^{2\pi}[(c\cos 2\alpha-1)+c\cos\Phi-\cos(\Phi-2\alpha)]\frac{d\Phi}{c-\cos\Phi}$$

$$= b^0\int_0^{2\pi}\frac{d\Phi}{c-\cos\Phi}+\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Phi}{c-\cos\Phi}\,d\Phi;$$

$$b^0=\frac{c\cos 2\alpha-1}{c-\cos 2\alpha}.$$

Puisque $c=(R^2+\rho^2)(2R\rho)^{-1}$, avec l'aide des formules

$$(14_0)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\frac{d\Phi}{c-\cos\Phi}=\frac{\pi}{\sqrt{c^2-1}}=\frac{4\pi R\rho}{R^2-\rho^2};\\ &\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Phi\, d\Phi}{c-\cos\Phi}=2\pi\left[\frac{c}{\sqrt{c^2-1}}-1\right]=\frac{4\pi\rho^2}{R^2-\rho^2},\end{aligned}\right.$$

on conclut que

$$b_0=\frac{(R^2+\rho^2)\cos 2\alpha-2R\rho}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos 2\alpha}=\frac{(R^2+\rho^2)\cos 2\alpha-2R\rho}{r^2(\zeta,y)}$$

et

$$\lim_\varepsilon T'_\varepsilon=\frac{4\pi}{R^2-\rho^2}\left[\rho^2+R\rho\frac{(R^2+\rho^2)\cos 2\alpha-2R\rho}{r^2(\zeta,y)}\right].$$

Cela nous conduit [(**14**.4), (10_0), (11_0), (13_0)] à

$$K(y)=\frac{-1}{R^2-\rho^2}\left[\frac{\rho^2}{R}+\rho\frac{(R^2+\rho^2)\cos 2\alpha-2R\rho}{r^2(\zeta,y)}\right];$$

le second membre ici peut être transformé en l'expression dans (**14**.3*b*), *ce qui démontre le lemme* **14**.3.

14'. L'étude de l'opérateur $L_x(\psi, \Phi)$ (continuation). — En procédant avec la notation 14.2, *posons que $v(x)$ est une fonction donnée harmonique pour $r(x, 0) < R'(R' > R)$, sauf en le point* o, *où elle a une singularité*

$$(14'.1) \qquad c \log \frac{1}{r(x, 0)}, \qquad c = \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y)\, dy;$$

c'est-à-dire

$$(14'.1\,a) \qquad v(x) = c \log \frac{1}{r(x, 0)} + v^0(x),$$

$v^0(x)$ étant une fonction harmonique pour $r(x, 0) < R'$. D'autre part, définissons $w(x)$ comme il suit :

$$(14'.1\,b) \qquad w(x) = v(x) \qquad \text{pour} \quad R \leqq r(x, 0) < R';$$

$$(14'.1\,c) \qquad w(x) = P(x) + H(x), \qquad P(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y) \log \frac{1}{r(x, y)}\, dy$$

pour $r(x, 0) < R$, $H(x)$ étant harmonique sur $\Gamma^0\{r(x, 0) < R\}$ et possédant les valeurs limites sur la circonférence $C\{r(x, 0) = R\}$ de sorte que $w(x)$ soit continu pour $r(x, 0) < R'$.

La dernière condition entraîne que

$$(1^\circ) \qquad H(z) = v(z) - P(z) = c \log \frac{1}{R} + v^0(z) - P(z)$$

sur C. Selon une formule bien connue

$$(2^\circ) \quad H(x) = H(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{r^2(z, x)} H(z)\, d\Phi \qquad [z = (R, \Phi)]$$

dans Γ^0. *Soit $\zeta = (R, \theta)$ un point quelconque fixe sur* Γ. Ci-après nous prendrons $x = (r, \theta)$ avec le même angle que ζ.

NOTATION 14'2. — Désignons par

$$(14'.2\,a) \qquad \frac{\partial^+}{\partial R}, \quad \frac{\partial^-}{\partial R}$$

les dérivées partielles par rapport à R (si elles existent), droite et gauche.

LEMME 14'.3. — *La fonction $w(x)$ définie dans* (14'.1-1 c) *possède la propriété qu'en tout point* $\zeta = (\mathrm{R}, \theta)$ *sur* C *la dérivée bilatérale*

$$(14'.3a) \qquad \frac{\partial}{\partial \mathrm{R}} w(\zeta) = \frac{\partial^+}{\partial \mathrm{R}} = \ldots \frac{\partial^-}{\partial \mathrm{R}} = \ldots$$

existe et est finie [*c'est-à-dire,* (n^+) *et* (n^-) *désignant les normales extérieures et intérieures à* Γ^0, *on a* $\frac{d}{dn^+} w(\zeta) = -\frac{d}{dn^-} w(\zeta)$ *pour* ζ *sur le pourtour* C]; *cette dérivée est continue spécialement à* C.

En vue de (**14'**.1*b*)

$$\frac{\partial^+}{\partial \mathrm{R}} w(\zeta) = \lim_{h>0} \frac{1}{h}(w(\mathrm{R}+h, \theta) - w(\mathrm{R}, \theta)) = \frac{\partial^+}{\partial \mathrm{R}} v(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{R}} v(\zeta) \qquad (h > 0);$$

d'où (**14'**.1*a*)

$$(3^\circ) \qquad \frac{\partial^+}{\partial \mathrm{R}} w(\zeta) = \frac{-c}{\mathrm{R}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{R}} v^0(\zeta);$$

c'est une fonction continue de θ. ψ (**14**.2) étant continu, borné, P (**14'**.1*c*) possède des dérivées premières uniques, s'obtenant par dérivation sous le signe d'intégration : ainsi

$$(4^\circ) \qquad \frac{\partial^-}{\partial \mathrm{R}} \mathrm{P}(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{R}} \mathrm{P}(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y) \frac{\mathrm{R} - \rho\cos(\varphi - \theta)}{r^2(\zeta, y)} dy;$$

de plus

$$\frac{\partial^-}{\partial \mathrm{R}} w(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{R}} \mathrm{P}(z) + \frac{\partial^-}{\partial \mathrm{R}} \mathrm{H}(\zeta).$$

Donc le lemme suivra, si l'on montre que

$$(14'.4) \qquad \frac{\partial^-}{\partial \mathrm{R}} \mathrm{H}(\zeta) = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{R}} \mathrm{P}(\zeta) - \frac{c}{\mathrm{R}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{R}} v^0(\zeta).$$

Soit $x = (\mathrm{R} - h, \theta)$ $h > 0$; alors (2°)

$$(5^\circ) \qquad \mathrm{H}(x) = \mathrm{H}(\mathrm{R} - h, \theta) = \mathrm{G}(h, \mathrm{H}) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(2\mathrm{R} - h)}{|x - z|^2} \mathrm{H}(z)\, d\Phi;$$

$\mathrm{G}(h, \ldots)$ est un opérateur linéaire, contenant un paramètre h; $\mathrm{G}(h, 1) = 1$; donc (1°)

$$\mathrm{H}(x) = \mathrm{G}\left(h, c\log\frac{1}{\mathrm{R}}\right) + \mathrm{G}(h, v^0) - \mathrm{G}(h, \mathrm{P}) = c\log\frac{1}{\mathrm{R}} + \mathrm{G}(h, v^0) - \mathrm{G}(h, \mathrm{P});$$

v^0 est harmonique sur le domaine circulaire de centre o et de rayon $R'(>R)$, d'où $G(h, v^0) = v^0(x)$, et l'on a

$$H(\zeta) - H(x) = v^0(\zeta) - v^0(x) + G(h, P) - P(\zeta)\, G(h, 1),$$

ce qui nous donne

$$\frac{\partial}{\partial R} H(\zeta) = \lim_h \frac{1}{h}(H(\zeta) - H(x)) = \frac{\partial}{\partial R} v^0(\zeta) + \lim_h \frac{1}{h} G(h, P - P(\zeta)),$$

pourvu que la limite indiquée au dernier membre existe. En vue de la constatation à propos de (14'.4) on voit que le lemme sera établi, si l'on montre que

$$\lim_h \frac{1}{h} G(h, P - P(\zeta)) = -\frac{\partial}{\partial R} P(z) - \frac{c}{R} \qquad (h > 0).$$

Vu (14'.1) et (4°) *il suffit donc de prouver que*

$$(14'.5) \qquad \lim_h \frac{1}{h} G(h, P - P(\zeta)) = \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y)\, K^*(y)\, dy,$$

$$(14'.5a) \qquad K^*(y) = -\frac{1}{R} + \frac{R - \rho\cos(\varphi - \theta)}{r^2(\zeta, y)}$$

nous n'indiquons pas la dépendance de $K^*(y)$ de ζ; $y = (\rho, \varphi)$]. En vertu de (5°), (14'.1c)

$$G(h, P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{|x - z|^2} \left[\frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y) \log \frac{1}{r(z, y)}\, dy \right] d\Phi.$$

Il est facile de justifier le changement d'ordre d'intégration; d'où

$$G(h, P) = \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y) \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{|x - z|^2} \log \frac{1}{r(z, y)}\, d\Phi \right] dy.$$

Pour obtenir $G(h, P(\zeta))$ on n'a que le besoin de remplacer $r(z, y)$ par $r(\zeta, y)$; dès lors

$$(6°) \quad \frac{1}{h} G(h, P - P(\zeta)) = \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y) \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{h|x - z|^2} \log \frac{r(\zeta, y)}{r(z, y)}\, d\Phi \right] dy$$
$$= \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y)\, K(h, y)\, dy \qquad \text{[voir (14.3}a\text{)]}.$$

D'après ($\mathbf{14}.3a$; 6_0, 7_0)

$$(7^o)\quad \begin{cases} |K(h,y)| = \left|\int_0^{2\pi} G_h(\Phi-\theta)\,d\Phi\right| \\ \qquad = \left|\int_\theta^{\theta+\pi} [G_h(\Phi-\theta)+G_h(\theta-\Phi)]\,d\Phi\right| \\ \qquad \leqq \int_\theta^{\theta+\pi} |\nu|\,d\Phi \leqq \pi c_1 = k_0(R-\rho)^{-2} \\ \qquad (k_0 > 0,\ \text{fini, indépendant de } h,\ y) \end{cases}$$

Donc, $\psi(y)=\psi(\rho)$ *étant indépendant de* φ (= l'angle de y), on aura

$$\iint_\Gamma \psi(y)K(h,y)\,dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\int_{\rho=0}^{R}\psi(\rho)K(h,y)\rho\,d\rho\right]d\varphi,$$

où

$$|\psi(\rho)K(h,y)\rho| \leqq K_0|\psi(\rho)|(R-\rho)^{-2}\rho = \psi^*(\rho);$$

$$\nu^* = \int_0^R \psi^*(\rho)\,d\rho < \infty \qquad [\psi^*(\rho) \text{ indépendant de } h,\ \varphi;\ \textit{voir}\ (\mathbf{14}.2a)]$$

d'où

$$\lim_h \int_{\rho=0}^{R}\psi(\rho)K(h,y)\rho\,d\rho = \int_{\rho=0}^{R}\psi(\rho)\lim_h K(h,y)\rho\,d\rho,$$

$$\left|\int_0^R \psi(\rho)K(h,y)\rho\,d\rho\right| \leqq \nu^*$$

(ν^* fini, indépendant de h, φ), et

$$\begin{aligned}\lim_h \iint_\Gamma \psi(y)K(h,y)\,dy &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\lim_h\left[\int_{\rho=0}^{R}\psi(\rho)K(h,y)\rho\,d\rho\right]d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\int_{\rho=0}^{R}\psi(\rho)\lim K(h,y)\rho\,d\rho\right]d\varphi \\ &= \iint_\Gamma \psi(y)\lim K(h,y)\,dy.\end{aligned}$$

En conséquence du lemme $\mathbf{14}.3$, (6^o)

$$\lim_n \frac{1}{h}G(h,\ P-P(\zeta)) = \frac{1}{2\pi}\iint_\Gamma \psi(y)K(y)\,dy.$$

On observe que ($\mathbf{14}'.5$, $5a$) *s'ensuivra, s'il est vrai que*

$$(\mathbf{14}'.6)\qquad \iint_\Gamma \psi(y)(K(y)-K^*(y))\,dy = 0 \qquad [(\mathbf{14}.3b),\ \mathbf{14}'.5a)].$$

Pour établir la dernière formule remarquons d'abord que

$$(8^\circ)\qquad \begin{cases} K(y)-K^\star(y)=-2\rho\dfrac{\cos(\varphi-\theta)}{r^2(\zeta,y)}+\dfrac{2\rho^2}{R}\dfrac{1}{r^2(\zeta,y)}, \\ r^2(\zeta,y)=R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta); \end{cases}$$

avec

$$c=(R^2+\rho^2)(2R\rho^2)^{-1},$$

en vertu de (14.14$_0$) on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}(K(y)-K^\star(y))\,d\varphi &= \frac{2\rho^2}{R}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{r^2(\zeta,y)}-2\rho\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\varphi-\theta)}{r^2}d\varphi \\ &= \frac{\rho}{R^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{c-\cos\varphi}-\frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{c-\cos\varphi} \\ &= \frac{\rho}{R^2}\frac{4\pi R\rho}{R^2-\rho^2}-\frac{1}{R}\frac{4\pi\rho^2}{R^2-\rho^2}=0\end{aligned}$$

pour $0\leqq\rho<R$. En remplaçant dy par $\rho\,d\rho\,d\varphi$, on peut intégrer dans (14'.6) dans un ordre quelconque (c'est ce qu'on a déjà fait); ainsi

$$\iint_\Gamma\psi(y)(K(y)-K^\star(y))dy=\int_{\rho=0}^{R}\psi(\rho)\rho\left[\int_0^{2\pi}(K(y)-K^\star(y))\,d\varphi\right]d\rho=0,$$

ce qui est le résultat voulu. *Le lemme* 14'.3 *a été prouvé.*

La fonction w (14'.1 *b-c*) étant égale à v (une fonction harmonique dans un voisinage de C) sur C, on voit que la dérivée bilatérale (unique) $\dfrac{\partial w(\zeta)}{\partial\theta}=\dfrac{\partial v(\zeta)}{\partial\theta}$ $(\zeta=Re^{i\theta})$, existe sur C et constitue une fonction continue de θ; en vue du lemme 14'.3 cela signifie que les dérivées $\dfrac{\partial w(\zeta)}{\partial\zeta_1}$, $\dfrac{\partial w(\zeta)}{\partial\zeta_2}$ $(\zeta=\zeta_1+i\zeta_2)$ existent sur C et sont continues spécialement à C. En tenant compte de la construction de l'opérateur $L_x(\psi,\Omega)$ [11.10'), (13.6-6 d)] et de la fonction $w(x)$ (14'.1-1 c) et des résultats relativement aux dérivées premières de w, que nous venons d'établir, nous sommes amené au résultat suivant.

LEMME 14'.7. — $L_x(\psi,\Omega)$ (13.6-6d), *continu sur* Ω, *possède en tout point* $x=(x_1,x_2)$ *de* Ω *les dérivées bilatérales (uniques)*

$$(14'.7\,a)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}L_x(\psi,\Omega),\quad \frac{\partial}{\partial x_2}L_x(\psi,\Omega),$$

qui sont continues sur $\Omega-\Sigma\Gamma_i^0$ *et sont continues spécialement aux circonférences* $C(\Gamma_i)$ *des* Γ_i.

Le résultat ci-dessus n'entraîne nullement la continuité des dérivées ($14'.7a$) sur les pourtours $C(\Gamma_j)$, quand on considère ces dérivées comme des fonctions de point sur Ω.

Revenant à la fonction $w(x)$ ($14'.1$-$1c$) nous allons montrer :

($14'8$) *Si l'on pose* $\zeta^0 = (R, \theta^0)$ *fixe sur la circonférence* C, $x = (r, \theta)$ *avec* $0 \leqq r < R$, *on aura*

$$(14'.8a) \qquad \frac{\partial}{\partial r} w(x) - \frac{\partial}{\partial R} w(\zeta^0) \to 0 \qquad \text{pour} \quad x \to \zeta^0.$$

En écrivant $h = R - r$ et rappelant la notation ($14'.5$), nous obtenons ($14'.1c$) [puisque $G(h, 1) = 1$]

$$\left\{ \begin{array}{l} G(h, P) - P(\zeta^0) = G(h, P - P(\zeta^0)) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{2\pi r^2(z, x)} (P(z) - P(\zeta^0))\, d\Phi \\ \qquad\qquad (z = R\, e^{i\Phi}); \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} G(h, P) &= \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 + r^2)\cos(\Phi - \theta) - 2Rr}{\pi r^4(z, x)} R(P(z) - P(\zeta^0))\, d\Phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y)\, T(x, y)\, dy; \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x, y) = \displaystyle\iint_0^{2\pi} R \frac{(R - r)^2 - 2(R^2 + r^2)\sin^2 \dfrac{\Phi - \theta}{2}}{\pi r^4(z, x)} \log \frac{r(\zeta^0, y)}{r(z, y)}\, d\Phi \\ \qquad\qquad (y = \rho\, e^{i\varphi},\ \rho < R). \end{array} \right.$$

En opérant sur $T(x, y)$ comme nous l'avons fait sur $K(h, y)$ [le texte ($14.3a$)-($14.4b$)] et en tenant compte de (14.1-$1a$), on conclut que $\lim T(x, y)$ (pour x, sur Γ^0, $\to \zeta^0$) s'obtient comme l'intégrale au sens des valeurs principales, lorque dans l'expression pour $T(x, y)$ on met $x = \zeta^0$:

$$\lim_{x \to \zeta^0} T(x, y) = \text{Princ.} \int_0^{2\pi} \frac{-1}{4\pi R} \operatorname{cosec}^2 \frac{\Phi - \theta^0}{2} \log \frac{r(\zeta^0, y)}{r(z, y)}\, d\Phi;$$

donc (14.4-$4b$)

$$\lim T(x, y) = -K(y),$$

où $K(y)$ est précisément la fonction dans le lemme 14.3 pour ζ^0.

En procédant comme dans le texte ($14'.6^0$) on déduit

$$(9^0) \quad \lim_{x \to \zeta^0} \frac{\partial}{\partial r} G(h, P) - \lim \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y)\, T(x, y)\, dy = -\frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y) K(y)\, dy$$

(x sur Γ^0), le passage à la limite sous le signe d'intégration étant justifiable.

En conséquence de (**14**'.3°) et du lemme **14**'.3

$$\frac{\partial}{\partial R} w(\zeta^0) = \frac{-c}{R} + \frac{\partial}{\partial R} v^0(\zeta^0);$$

en tirant partie des développements qui suivent (**14**'.5°) et en notant que $G(h, v^0) = v^0(x)$, on voit que

$$\frac{\partial}{\partial r} H(x) = \frac{\partial}{\partial r} v^0(x) - \frac{\partial}{\partial r} G(h, P) \qquad (h = R - r);$$

d'où (**14**'.1 c)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} w(x) &= \frac{\partial}{\partial r} P(x) + \frac{\partial}{\partial r} H(x) \\
&= \frac{\partial v^0(x)}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} G(h, P) - \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y) \frac{r - \rho\cos(\varphi - \theta)}{r^2(x, y)} dy; \\
\frac{\partial}{\partial r} w(x) &- \frac{\partial}{\partial R} w(\zeta_0) = \nu_1 + \nu_2 - \frac{\partial}{\partial r} G(h, P),
\end{aligned}$$

$$\nu_1 = \frac{\partial v^0(x)}{\partial r} - \frac{\partial v^0(\zeta^0)}{\partial R}, \qquad \nu_2 = \frac{c}{R} - \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y) \frac{r - \rho\cos(\varphi - \theta)}{r^2(x, y)} dy.$$

Puisque v^0 est harmonique (**14**'.1 a) on a $\lim \nu_1 = 0$; ainsi (9°), (**14**'.1), (**14**'.5 a)

$$\begin{aligned}
\lim &\left[\frac{\partial}{\partial r} w(x) - \frac{\partial}{\partial R} w(\zeta^0)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y) K(y)\, dy + \frac{c}{R} - \lim \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y) \frac{r - \rho\cos(\varphi - \theta)}{r^2(x, y)} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y) K(y)\, dy + \frac{1}{2\pi} \iint_\Gamma \psi(y) \left[\frac{1}{R} - \frac{R - \rho\cos(\varphi - \theta^0)}{r^2(\zeta^0, y)}\right] dy \\
&= \iint_\Gamma \psi(y) [K(y) - K^*(y)]\, dy;
\end{aligned}$$

ici $K^*(y)$ est formé pour $\zeta = \zeta^0$; enfin, d'après (**14**'.6) le dernier membre ci-dessus est nul, *ce qui établit* (**14**'.8, 8 a).

De la même façon on trouve que

$$(\mathbf{14}'.8\,b) \qquad \frac{\partial}{\partial \theta} w(x) - \frac{\partial}{\partial \theta_0} w(\zeta^0) \to 0 \qquad \text{pour } x (\text{avec } r < R) \to \zeta^0.$$

Donc les premières dérivées bilatérales par rapport à r, θ, et par rapport à x_1, x_2 (si l'on met $x = re^{i\theta} = x_1 + ix_2$), sont continues pour $r = r(\text{o}, x) \leqq \text{R}$; elles le sont aussi pour $\text{R} \leqq r < \text{R}'$ [puisque $w(x)$ est harmonique pour $\text{R} \leqq r < \text{R}'$]; conséquemment ces dérivées sont continues en tout point du domaine $\{ r(\text{o}, x) < \text{R}' \}$. La portée de ces considérations sur $\text{L}_x(\Psi, \Omega)$ s'exprime ainsi.

Théorème **14'**.9. — $\text{L}_x(\Psi, \Omega)$ (**13**.6-6d), *où* $x = (x_1, x_2)$, *a ces dérivées* $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\text{L}_x(\Psi, \Omega)$, $\dfrac{\partial}{\partial x_2}\text{L}_x(\Psi, \Omega)$ (*bilatérales, uniques*) *continues sur* Ω, *au moins au cas où* (**11**.10') *a lieu.*

14''. Quelques détails relatifs à la preuve de (**14'**.8-8a). — Retenons la notation des sections **14**, **14'**. Pour simplifier (cela n'entraînant aucune perte de généralité) posons $\theta^0 = \text{o}$; d'où ζ^0 est le point (R, o); $x = re^{i\theta}$, $r < \text{R}$; $r \to \text{R}$, $\theta \to \text{o}$; $y = \rho e^{i\varphi}$, $\rho < \text{R}$; $z = \text{R}e^{i\Phi}$;

$$c = \frac{\text{R}^2 + r^2}{2\text{R}r}, \qquad c - \text{I} = \frac{(\text{R} - r)^2}{2\text{R}r}.$$

(**14''**.1) *Soit génériquement* c^* *une désignation pour une constante positive* (ci-dessous c^* sera indépendante de r, θ, ρ, φ, Φ, n).

Examinons la partie de l'épreuve de (**14'**.8-8a) qui nous a mené à (**14'**.9°). On a

$$\text{T}(x, y) = \int_0^{2\pi} \text{G}_{1,x}(\Phi)\, d\Phi,$$

où (**14**.3_0) (où l'on met $\theta = \theta^0 = \text{o}$, $\zeta = \zeta^0$)

$$\text{G}_{1,x}(\Phi) = f(\Phi, \theta) \sum_1^\infty \frac{\text{I}}{n} \rho^n \text{R}^{-n} [\cos n(\Phi - \varphi) - \cos n\varphi],$$

$$f(\Phi, \theta) = \frac{\text{I}}{2\pi r}\left[c - \text{I} - 2c \sin^2 \frac{\Phi - \theta}{2}\right]\left[c - \text{I} + 2 \sin^2 \frac{\Phi - \theta}{2}\right]^{-2};$$

$\text{G}_{1,x}(\Phi)$ est de période 2π en Φ; donc, en remplaçant Φ par $\Phi + \theta$,

$$(\text{I}^\circ) \quad \begin{cases} \text{T}(x, y) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \text{G}_x(\Phi)\, d\Phi, \\ \text{G}_x(\varphi) = f(\Phi) \displaystyle\sum_1^\infty \frac{\text{I}}{n} \rho^n \text{R}^{-n} [\cos n(\Phi + \theta - \varphi) - \cos n\varphi], \\ f(\Phi) = \dfrac{\text{I}}{2\pi r}\left[c - \text{I} - 2c \sin^2 \dfrac{\text{I}}{2}\Phi\right]\left[c - \text{I} + 2 \sin^2 \dfrac{\text{I}}{2}\Phi\right]^{-2}; \end{cases}$$

on note que

$$(2^{\circ})\qquad |f(\Phi)| \leqq c^{*}\left[c - 1 + 2\sin^{2}\frac{1}{2}\Phi\right]^{-1},$$

$$(3^{\circ})\qquad |f(\Phi)|\,\Phi^{2} \leqq c^{*} \qquad (\text{pour } -\pi \leqq \Phi \leqq \pi).$$

Puisque

$$\cos n(\Phi+\theta-\varphi)+\cos n(\Phi-\theta+\varphi)-2\cos n\varphi$$
$$= -4\sin n\left(\frac{\theta}{2}-\varphi\right)\sin\frac{n\theta}{2} - 4\cos n(\theta-\varphi)\sin^{2}\frac{n\Phi}{2},$$

on a

$$(4^{\circ})\qquad G_{x}(\Phi)+G_{x}(-\Phi) = Q^{0}(\Phi)+Q(\Phi);$$

$$(5^{\circ})\qquad Q^{0}(\Phi) = f(\Phi)\sum_{1}^{\infty}\frac{-4}{n}\rho^{n}R^{-n}\sin n\left(\frac{\theta}{2}-\varphi\right)\sin\frac{n\theta}{2};$$

$$(6^{\circ})\qquad Q(\Phi) = f(\Phi)\sum_{1}^{\infty}\frac{-4}{n}\rho^{n}R^{-n}\cos n(\theta-\varphi)\sin^{2}\frac{n\Phi}{2}$$
$$[= G''_{x}(\Phi)+G''_{x}(-\Phi)].$$

Puisque $|\sin u| \leqq |u|$, on obtient (3°)

$$(7^{\circ})\qquad |Q(\Phi)| \leqq |f(\Phi)|\,\Phi^{2}\sum_{1}^{\infty} n\rho^{n}R^{-n} \leqq c^{*}(R-\rho)^{-2} \qquad (|\Phi| \leqq \pi):$$

donc $|Q(\Phi)|$ est borné par rapport à x, Φ. Aussi (1°), (4°)

$$T(x,y) = \int_{0}^{\pi}[G_{x}(\Phi)+G_{x}(-\Phi)]\,d\Phi = \int_{0}^{\pi}Q^{0}(\Phi)\,d\Phi + \int_{0}^{\pi}Q(\Phi)\,d\Phi,$$

où $[(14.3_{0})$, avec $\theta = \theta^{0} = 0$, $\zeta^{0} = \zeta]$, en écrivant $z^{0} = Re^{i\theta}$,

$$\int_{0}^{\pi}Q^{0}(\Phi)\,d\Phi = \int_{0}^{2\pi}f(\Phi)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\rho^{n}}{R^{n}}[\cos n(\theta-\varphi)-\cos n\varphi]\,d\Phi$$
$$= \log\frac{|\zeta^{0}-y|}{|z^{0}-y|}\int_{0}^{2\pi}f(\Phi)\,d\Phi;$$

or (1°)

$$2\pi r\int_{0}^{2\pi}f(\Phi)\,d\Phi = \int_{0}^{2\pi}\frac{c\cos\Phi-1}{(c-\cos\Phi)^{2}}\,d\Phi = 0;$$

dès lors (6°)

$$(8^{\circ})\quad \left\{\begin{aligned} T(x, y) &= \int_0^{\pi} Q(\Phi)\,d\Phi = \int_0^{\pi} [G''_x(\Phi) + G''_x(-\Phi)]\,d\Phi \\ &= \int_0^{2\pi} G''_x(\Phi)\,d\Phi; \\ G''_x(\Phi) &= f(\Phi) \sum_n^{\infty} \frac{1}{n} \rho^n R^{-n} [\cos n(\Phi + \theta - \varphi) - \cos n(\theta - \varphi)]; \end{aligned}\right.$$

en remplaçant Φ par $\Phi - \theta$ et en notant que $f(\Phi - \theta) = f(\Phi, \theta)$, nous observons que

$$T(x, y) = \int_0^{2\pi} G'_x(\Phi)\,d\Phi;$$

$$\begin{aligned} G'_x(\Phi) &= f(\Phi, \theta) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \rho^n S^{-n} [\cos n(\Phi - \varphi) - \cos n(\theta - \varphi)] \\ &= f(\Phi, \theta) \log \frac{|z^0 - y|}{|z - y|} \qquad [z^0 = Re^{i\theta}, (\mathbf{14}.3_0)]; \end{aligned}$$

d'où

$$(9^{\circ})\qquad T(x, y) = \int_0^{2\pi} R \frac{(R - r)^2 - 2(R^2 + r^2)\sin^2\dfrac{\Phi - \theta}{2}}{\pi r^4(z, x)} \frac{r(z_0, y)}{r(z, y)}\,d\Phi$$

[*voir* l'intégrale pour $T(x, y)$ suivant ($\mathbf{14'}.8a$)], où l'expression sous le signe d'intégration est $G'_x(\Phi)$. Or 7° et 6° signifient que

$$|G''_x(\Phi) + G''_x(-\Phi)| \leqq c^*(R - \rho)^{-2} \qquad \text{pour} \quad |\Phi| \leqq \pi.$$

Grâce à cette formule on peut appliquer ($\mathbf{14}.1\text{-}1a$) à (8°), ce qui nous donne

$$\lim_{x \to \zeta^0} T(x, y) = \text{Princ.} \int_0^{2\pi} G''_{\zeta^0}(\Phi)\,d\Phi.$$

Mais $G''_x(\Phi) = G'_x(\Phi + \theta)$ et, comme $\theta \to 0$ pour $x \to \zeta^0$, on a $G''_{\zeta^0}(\Phi) = G'_{\zeta^0}(\Phi)$; de là

$$\lim_{x \to \zeta^0} T(x, y) = \text{Princ.} \int_0^{2\pi} G'_{\zeta^0}(\Phi)\,d\Phi,$$

où $G'_{\zeta^0}(\Phi)$ représente la fonction sous le signe d'intégration dans (9°), où x est égal à ζ^0 (alors $z^0 = \zeta^0$); *cela est exactement ce que nous avons indiqué dans le texte avant* ($\mathbf{14'}.9$); *de là nous sommes conduit à* ($\mathbf{14'}.8\text{-}8a$).

15. Généralités pour les diverses opérations et classes. — Rappelons (8.3) que

(15.1) $F(x) = J^{-1}T_0 f + h(x)$ [$h(x)$ harmonique sur S^0],

quand les fonctions

$$f \in [c_0], \quad F(x) \in (K_0)$$

se correspondent; de plus (sur S^0)

(15.1 *a*) $$T_0 f = \Phi(I) = J(F:I) \in [C_0]$$
[pour les intervalles (rectangles ouverts) I dans S^0],

$J(F:I)$ étant le flux de F à travers de (I). Donc en vertu du théorème 13.9 et parce que

(15.2) $f(x) = \mathrm{Der}^x \Phi$ (la dérivée ordinaire de la fonction Φ d'intervalle) partout sur S^0, *on a sur* $\Omega (= S^0 - F)$:

(1°) $$J^{-1}T_0 f = T_x(f, \Omega) + H(x),$$

où $H(x) [= Q(x) - h(x)]$ *est harmonique sur* Ω;

(2°) $$\begin{cases} T_0 f = J T_x(f, \Omega); \\ J^{-1}\Phi = T_x(\mathrm{Der}^x \Phi, \Omega) + H(x); \\ \Phi = J T_x(\mathrm{Der}^x \Phi, \Omega); \end{cases}$$

(3°) $$F(x) = T_x(\mathrm{Der}^x \Phi, \Omega) + Q(x) = T_x(\mathrm{Der}^x J(F), \Omega) + Q(x),$$

où $J(F) = J(F:I)$ *et* $Q(x)$ *est harmonique sur* Ω.

Ces résultats peuvent être exprimés en disant que *sur* Ω *on a*

(15.3) $J^{-1}T_0 = T_x$ (sauf pour une fonction harmonique sur Ω)

dans le champ de $[c_0]$;

(15.3 *a*) $$T_0 = JT_x$$

dans le champ de $[c_0]$;

(15.3 *b*) $J^{-1} = T_x \mathrm{Der}^x$ (sauf pour une fonction harmonique sur Ω)

dans le champ de $[C_0]$;

(15.3 *c*) $$\text{Id.} = \text{identité} = J T_x \mathrm{Der}^x$$

dans le champ de $[C_0]$;

(15.3 *d*) Id. $= T_x \mathrm{Der}^x J$ (sauf pour une fonction harmonique sur Ω)

dans le champ de (K_0).

Ci-dessus T_x est l'opérateur $T_x(\ldots, \Omega)$ dont il s'agit dans le théorème 13.9.

En conséquence de (13.2-2c) et la relation (13.9a)

$$F(x) = T_x(f, \Omega) + Q(x) \qquad (\text{sur } \Omega);$$

on obtient le résultat suivant.

(15.4) *Si* $f(x) \in [c_0]$ *et* $F(x) \in (K_0)$ *se correspondent, il s'ensuivra que*

$$(15.4a) \qquad \nabla^0 F(x) = -f(x) \qquad (\textit{laplacien } \nabla^0)$$

sur* A, *où* A *est l'ensemble de points de continuité approximative de* f *sur* Ω*;* A *est une plénitude de* Ω *et en contient un résiduel.

Considérons le cas d'une fonction particulière $f(x)$ de $[c_0]$ (sur S_0). *La première conséquence* serait l'existence d'un ensemble fermé $F \leqq S'$ (rectangle fermé S), non dense sur S, tel que dans tout sous-ensemble fermé de

$$(15.5) \qquad \Omega = S^0 - F \qquad (\text{l'intérieur } S^0 \text{ de } S),$$

$|f(x)|$ soit uniformément borné. En procédant comme indiqué depuis l'hypothèse 11.1 jusqu'au théorème 11.4, on trouve des cercles

$$(15.5a) \qquad \Gamma_j = S(x_j, r_j)$$

en nombre fini ou dénombrablement infini, ayant leurs centres x_j sur Ω, tel que $\Gamma_i \Gamma_j = 0 \; (i \neq j)$, $\Gamma_j < \Omega$, les Γ_j ne s'accumulant que vers la frontière de Ω; il y a une décomposition correspondante

$$(15.5b) \qquad f = f_0 + \psi \qquad (\text{sur } \Omega),$$

où ψ est de type-B sur Ω (*voir* la définition 11.12; à noter un certain changement de notation pour les cercles et leurs rayons), et f_0 est sommable sur Ω (et uniformément borné sur tout sous-ensemble fermé de Ω). Cette décomposition 15.5b) de f est *la deuxième conséquence* de la supposition que $f \in [c_0]$. Soit $v(x)$ une fonction particulière (13.6,6a) harmonique sur Ω pour $x \neq x_i$ ($i = 1, 2, \ldots$) et ayant en x_i la partie principale

$$(15.5c) \qquad c_i \log \frac{1}{r(x_i, x)}, \qquad \text{où } c_i = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_i} \psi(y)\, dy$$

(une telle fonction existe comme il est indiqué dans la Note de Brelot); rappelons (13.6*b*-6*d*) que

$$(15.5d) \qquad L_x(\psi, \Omega) = v(x) \qquad (\text{sur } \Omega - \Sigma\Gamma_i^0);$$

$$L_z(\psi, \Omega) = H_i(x) + \frac{1}{2\pi}\iint_{\Gamma_i} \psi(y) \log \frac{1}{r(x, y)} dy \qquad (\text{sur } \Gamma_i^0);$$

$H_i(x)$, harmonique sur Γ_i^0, est choisi de sorte que $L_x(\psi, \Omega)$ soit continu sur Ω. Enfin, on pose

$$(15.5e) \qquad T_x(f, \Omega) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} f_0(y) \log \frac{1}{r(x, y)} dy + L_x(\psi, \Omega).$$

Grâce au théorème 13.9 on conclut qu'il existe une fonction $Q(x)$, *harmonique sur* Ω, telle que sur Ω

$$(15.5f) \qquad T_x(f, \Omega) + Q(x)$$

est une fonction $F(x)$ de classe (K_0); c'est une fonction correspondant à $f(\in [c_0])$ donné. Puisque $v(x)$ est harmonique sur Ω, pour $x \neq x_i$ ($i = 1, 2, \ldots$), on peut joindre $Q(x)$ à $v(x)$ ce qui ne changerait pas pour la fonction [encore désignée par $v(x)$] les propriétés que nous avions auparavant exigées de cette fonction [ainsi, les parties principales (15.5*c*) resteront les mêmes]. Alors *on aura* $T_x(f, \Omega)$ (15.5*e*) *représentant sur* Ω *une fonction, soit* $F(x)$, *qui est de la classe* (K_0) (*sur* S^0).

DÉFINITION 15.6. — *Si* $f(x) \in [c_0]$ (*sur* S_0), *il existe une opération* $T_x(f, \Omega)$ (15.5*e*), *définie sur l'ensemble* Ω (15.5) *et correspondant à un choix de* $v(x)$, *comme il est indiqué ci-dessus. Posons*

$$(15.6a) \qquad T_x(f, S^0) = T_x(f, \Omega) \qquad (x \text{ sur } \Omega);$$

$$(15.6b) \qquad T_{x'}(f, S^0) = \lim_{x \to x'} T_x(f, \Omega) \qquad (x' \text{ sur } F;\ x \text{ variant sur } \Omega - \Sigma\Gamma_i^0).$$

Cette définition est justifiée en vertu de l'affirmation en italiques qui la précède, et parce que, $F(x)$ étant continu sur S^0 et F étant non dense (sur S^0), la limite, ci-dessus, existe uniquement en tout point x' de F (à noter que tout point de F est un point limite de Ω et en effet, de $\Omega - \Sigma\Gamma_i^0$); d'ailleurs *partout sur* S^0 *on aura*

$$(15.6c) \qquad F(x) = T_x(f, S^0) \qquad (\text{sur } S^0),$$

$f(x)$ de $[c_0]$ et $F(x)$ de (K_0) se correspondant. En vue des propriétés des fonctions de (K_0), on conclut que les dérivées premières de $T_x(f, S^0)$ existent (et sont finies) en tout point de S^0 et que *les fonctions*

$$(15.7) \qquad T_x(f, S^0), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} T_x(f, S^0) \qquad (j = 1, 2)$$

sont continues sur S^0; en particulier, les limites (uniques et finies)

$$(15.7\,a) \quad \lim T_x(f, S^0)[= T_{x'}(f, S^0)], \qquad \lim \frac{\partial}{\partial x_j} T_x(f, S^0)\left[= \frac{\partial}{\partial x'_j} T_{x'}(f, S^0)\right] \quad (j = 1, 2)$$

existent en tout x' sur F quand x, $\in \Omega$, $\to x'$. Posons

$$(15.8) \qquad G(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_\Omega f_0(y) \log \frac{1}{r(x, y)} dy.$$

Puisque on peut laisser x tendre vers x', en variant sur $\Omega - \Sigma\Gamma_i^0$, on conclut (15.7$a$, 5$e$, 5$d$) que les limites

$$(15.9) \quad \begin{cases} \lim (G(x) + v(x)) & [= T_{x'}(f, S^0)], \\ \lim \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} G(x) + \dfrac{\partial}{\partial x_j} v(x)\right) & \left[= \dfrac{\partial}{\partial x'_j} T_{x'}(f, S^0)\right], \quad (j = 1, 2) \end{cases}$$

existent (étant uniques et finies) pour x, $\in \Omega - \Sigma\Gamma_i^0$, $\to x'$ en tout point x' de F.

La supposition que $f(x) \in [c_0]$ nous a mené à la première et à la deuxième conséquence [*voir* le texte à propos de (15.4a)-(15.5c)]. *La troisième conséquence* est qu'une fonction $v(x)$ [harmonique sur Ω, pour $x \neq x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, et ayant les parties principales (15.5c)] existe de façon que les limites uniques (15.9) existent sur F, comme il est indiqué à propos de (15.9). Définissons les fonctions $\mathcal{V}(x)$, $\mathcal{V}_j(x)$ par les relations

$$(15.10) \quad \mathcal{V}(x) = G(x) + v(x), \qquad \mathcal{V}_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} G(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} v(x) \quad (\text{sur } \Omega - \Sigma\Gamma_i^0),$$

et

$$(15.10\,a) \quad \mathcal{V}(x') = \lim_{x \to x'} \mathcal{V}(x), \qquad \mathcal{V}_j(x') = \lim_{x \to x'} \mathcal{V}_j(x) \qquad (\text{sur F}),$$

pour x tendant vers x', en variant sur $\Omega - \Sigma\Gamma_i^0$. Cela posé, on peut dire que *la quatrième conséquence* est que les fonctions $\mathcal{V}(x)$,

$\mathcal{V}_1(x)$, $\mathcal{V}_2(x)$, définies partout sur $S^0 - \Sigma\Gamma_i^0$ par les relations (15.10-10a) sont *continues sur* $S^0 - \Sigma\Gamma_i^0$ *spécialement à* $S^0 - \Sigma\Gamma_i^0$ [pour quelque fonction $v(x)$ harmonique sur Ω, sauf en x_1, x_2, ..., où elle possède les parties principales (15.5 c)].

On peut remplacer la quatrième conséquence par la suivante, qui l'inclut et va plus loin que la quatrième :

la cinquième conséquence est qu'il existe une fonction $v(x)$, pour laquelle la troisième conséquence a lieu, et qu'il existe corrélativement une fonction $P(x)$, telle que

$$P(x), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} P(x) \qquad (j = 1, 2),$$

soient continus sur S^0, de sorte qu'on ait

$$\text{(15.11)} \quad \mathcal{V}(x) = P(x), \qquad \mathcal{V}_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} P(x) \quad (j = 1, 2) \quad (\text{sur } S^0 - \Sigma\Gamma_i^0),$$

$\mathcal{V}(x)$, $\mathcal{V}_1(x)$, $\mathcal{V}_2(x)$ étant les fonctions définies sur $S^0 - \Sigma\Gamma_i^0$ par (15.10-10a).

Remarquons que, si $f(x) \in [c_0]$, $F(x)$ [$= T_x(f, S^0)$ de (K_0)], sera une fonction $P(x)$ dont nous venons de parler.

THÉORÈME 15.12. — *Les cinq conséquences, indiquées ci-dessus, constituent un ensemble de conditions nécessaires afin que $f(x)$ soit de la classe $[c_0]$ (sur S^0). D'où, la classe $[c_0]$ est contenue dans la classe $[\gamma_5]$ de fonctions satisfaisant ces cinq conditions.*

L'étude des circonstances explicites [et la construction effective des diverses fonctions harmoniques, ainsi que $P(x)$], dans lesquelles les cinq conditions ont lieu, mènerait à quelques problèmes très intéressants dans la théorie des fonctions harmoniques.

Supposons que nous ne savons de f que ceci, qu'elle satisfait aux cinq conditions (nommées, ci-dessus, « les cinq conséquences »). Ainsi, il y a un ensemble Ω (15.5), $F = S^0 - \Omega$ non dense sur S^0, les cercles Γ_j (15.5a), une décomposition correspondante $f(x) = f_0(x) + \psi(x)$ (15.5b); de plus il existe une fonction $v(x)$, harmonique sur Ω pour $x \neq x_i (i = 1, 2, \ldots)$, avec les parties principales (15.5 c) en les x_i, de sorte qu'on puisse former (pour x sur Ω)

$$(15.13) \quad \begin{cases} \mathrm{T}_x(f, \Omega) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{L}_x(\psi, \Omega) \\ [\mathrm{L}_x(\psi, \Omega) \text{ défini dans } (15.5\,d);\ \mathrm{G}(x), \text{ le potentiel dans } (15.8)], \end{cases}$$

tandis que les limites (15.9) existent et l'on peut définir sur $\mathrm{S}^0 - \Sigma\Gamma_i^0$ les fonctions $\mathcal{V}(x)$, $\mathcal{V}_j(x)$ (15.10-10 a), ces fonctions étant continues sur $\mathrm{S}^0 - \Sigma\Gamma_i^0$ spécialement à $\mathrm{S}^0 - \Sigma\Gamma_i^0$; d'ailleurs, il existe une fonction $\mathrm{P}(x)$, continue sur S_0, ainsi que les $\dfrac{\partial \mathrm{P}(x)}{\partial x_j}$, de façon que (15.11) soit valable.

Qu'est-ce qu'on peut dire de $\mathrm{T}_x(f, \Omega)$?

D'abord, en vertu du théorème 14'.9, on sait que les fonctions

$$(15.14) \quad \mathrm{L}_x(\psi, \Omega), \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{L}_x(\psi, \Omega), \quad \mathrm{T}_x(f, \Omega), \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{T}_x(f, \Omega) \qquad (j = 1, 2)$$

sont continues sur Ω. En vue de (15.13-5 d-9) on voit que les limites uniques (15.10 a)

$$(1^\circ) \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \succ x'} \mathrm{T}_x(\psi, \Omega) = \lim\limits_{x \succ x'} (\mathrm{G}(x) + v(x)) \qquad [= \mathcal{V}(x')], \\ \lim\limits_{x \succ x'} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{T}_x(\psi, \Omega) = \lim\limits_{x \succ x'} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{G}(x) + \dfrac{\partial}{\partial x_j} v(x)\right) \qquad [= \mathcal{V}_j(x')] \end{cases}$$

$(j = 1, 2)$ existent en tout point x' de F, pourvu que x varie sur $\Omega - \Sigma\Gamma_i^0$. Donc en accord avec la définition 15.6 on peut définir $\mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0)$, en écrivant

$$(2^\circ) \quad \mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0) = \mathrm{T}_x(f, \Omega) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{T}_x(f, \Omega)\right] \quad (\text{sur } \Omega),$$

et (15.10 a)

$$(3^\circ) \qquad \mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0) = \mathcal{V}_x \qquad (\text{sur F}).$$

Puisque $\mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}_0)$ est égal à $\mathrm{T}_x(f, \Omega)$, c'est-à-dire, à $\mathrm{G}(x) + v(x)$ sur $\Omega - \Sigma\Gamma_i^0$, on a (15.11)

$$(15.14\,a) \qquad \mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0) = \mathcal{V}(x) \qquad (\text{sur } \mathrm{S}^0 - \Sigma\Gamma_i^0),$$

Notons que (15.11-10)

$$(4^\circ) \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{G}(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} v(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{P}(x) \qquad (\text{sur } \Omega - \Sigma\Gamma_i^0)$$

et, en vue de (1°),

$$(5^{\circ}) \qquad \lim_{x \succ x'} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0) = \mathcal{V}_j(x') = \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{P}(x') \quad (15.11)$$

pour x' sur F, x variant sur $\Omega - \Sigma\Gamma_i^0$. On observe que (15.14 *a*) entraîne que $\mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0)$ (fini en tout point de S^0) *est continu sur* $\mathrm{S}^0 - \Sigma\Gamma_i^0 (\geqq \mathrm{F})$ *spécialement à* $\mathrm{S}^0 - \Sigma\Gamma_i^0$; selon (15.14) $\mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0)$ *est aussi continu sur l'ensemble ouvert* $\Omega (= \mathrm{S}^0 - \mathrm{F})$; mais cela ne suffit pas pour que $\mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0)$ soit cóntinu sur F spécialement à S^0. Quant aux dérivées $\frac{\partial \mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0)}{\partial x_j}$ ($j = 1, 2$), on remarque qu'elles sont continues sur Ω et qu'elles ont des limites uniques, finies en tout point x' de F pour $x, \in \Omega - \Sigma\Gamma_i^0, \to x'$ [(15.14), (5°), nous ne savons nullement si ces dérivées existent sur F] ; *ces limites constituent des fonctions définies sur* F, *et y continues* (5°) *spécialement à* F ; de plus (4°, 5°), les fonctions

$$(15.14\,b) \qquad \begin{cases} \mathcal{V}_j(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0) & (\text{sur } \Omega - \Sigma\Gamma_i^0), \\ \mathcal{V}_j(x') = \lim\limits_{x \succ x'} \mathcal{V}_j(x) & (x' \text{ sur F} ; x \text{ variant sur } \Omega - \Sigma\Gamma_i^0), \end{cases}$$

définies sur $\mathrm{S}^0 - \Sigma\Gamma_i^0, \geqq \mathrm{F}$, sont continues sur $\mathrm{S}^0 - \Sigma\Gamma_i^0$ spécialement à $\mathrm{S}^0 - \Sigma\Gamma_i^0$. *Telles sont les conséquences de la supposition que les cinq conditions nécessaires ont lieu.*

Revenons maintenant au cas de $f \in [c_0]$. Nous ajouterons une autre conséquence (condition nécessaire) en outre des cinq conditions, dont nous venons de parler. On peut maintenant supposer que $v(x)$ a été choisi de façon que

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0) \quad [\textit{voir}\ (15.6\,a\,6\,b)] \qquad (\text{sur } \mathrm{S}^0).$$

Définition 15.15. — *Désignons par*

$$(15.15\,a) \qquad \mathrm{O}_i, \quad \mathrm{O}_{j,i} \qquad (j = 1, 2 ; i = 1, 2, \ldots)$$

les oscillations sur le cerle fermé $\Gamma_i = \mathrm{S}(x_i, r_i)$ *des fonctions*

$$\mathrm{T}_x(f, \Omega), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{T}_x(f, \Omega).$$

Ci-dessus on peut remplacer $\mathrm{T}_x(f, \Omega)$ par $\mathrm{T}_x(f, \mathrm{S}^0)$ (15.6 *a*).

On a

$$(15.15\,b)\quad \begin{cases} O_i = \max(z',\ z'' \text{ sur } \Gamma_i)\,|\,T_{z'}(f,\ \Omega) - T_{z''}(f,\ \Omega)\,|, \\ O_{j,i} = \max(z',\ z'' \text{ sur } \Gamma_i)\left|\dfrac{\partial}{\partial z'_j} T_{z'}(f, \Omega) - \dfrac{\partial}{\partial z''_j} T_{z''}(f,\ \Omega)\right| \\ [z' = (z'_1,\ z'_2),\ z'' = (z''_1,\ z''_2)] \end{cases}$$

Si $f \in [c_0]$, on note que les limites uniques (finies)

$$(15.16)\quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to x'} T_x(f,\ \Omega) = T_{x'}(f,\ S^0) = F(x'), \\ \lim\limits_{x \to x'} \dfrac{\partial}{\partial x_j} T_x(f,\ \Omega) = \lim\limits_{x \to x'} \dfrac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \dfrac{\partial}{\partial x'_j} F(x') \\ [j = 1,\ 2;\ x' = (x'_1,\ x'_2);\ x = (x_1,\ x_2)] \end{cases}$$

existant en tout x' de F, quand x, $\in \Omega$, tend d'une façon quelconque vers x'. *Soit x' un point limite des cercles* Γ_i (c'est-à-dire, des points d'une suite infinie de Γ_i; $\Gamma_i < \Omega = S^0 - F$); *la sixième conséquence* (de $f(x)$ appartenant à $[c_0]$) est que pour les oscillations O_i, $O_{j,i}$ (15.15 a) on a

$$(15.17)\qquad \lim_i O_i = 0, \qquad \lim_i O_{j,i} = 0 \qquad (j = 1,\ 2),$$

quand Γ_i tend vers le point x'. En effet, soient z', z'' deux points quelconques sur Γ_i; notons que

$$|\,T_{z'}(f,\ \Omega) - T_{z''}(f,\ \Omega)\,| \leq |\,T_{z'}(f,\ \Omega) - F(x')\,| + |\,F(x') - T_{z''}(f,\ \Omega)\,|;$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z'_j} T_{z'}(f,\ \Omega) - \frac{\partial}{\partial z''_j} T_{z''}(f,\ \Omega)\right|$$
$$\leq \left|\frac{\partial}{\partial z'_j} T_{z'}(f,\ \Omega) - \frac{\partial}{\partial x_j} F(x')\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x'_j} F(x') - \frac{\partial}{\partial z''_j} T_{z''}(f,\ \Omega)\right|;$$

quand Γ_i tend vers x', les points z' et z'' (restant dans $\Gamma_i < \Omega$) tendront aussi vers x'; donc (15.16) les seconds membres ci-dessus $\to 0$ pour $\Gamma_i \to x'$; *la conclusion* (15.17) *découle*, puisque les premiers membres sont des fonctions de z', z'', continues, par rapport à ces variables, sur le cercle fermé Γ_i.

Quant aux oscillations O_i, $O_{j,i}$, on devrait remarquer (15.5 e-5 d) que

$$(15.18)\quad \begin{cases} O_i = \max(z',\ z'' \text{ sur } \Gamma_i) \\ \qquad \times \left| G(z') - G(z'') + H_i(z') - H_i(z'') \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_{\Gamma_i} \Psi(y) \log \frac{r(z'',\ y)}{r(z',\ y)}\, dy \right| \\ \qquad [\text{le potentiel } G(\ldots),\ (15.8)], \end{cases}$$

$O_{j,i}$ étant donné par une pareille formule.

Il faut que nous notions que la sixième condition est semblable à une condition signalée par A. Denjoy (D; p. 330-331) *à propos de la totalisation simple.*

Considérons encore le cas où $f(x)$, pas nécessairement de la classe $[c_0]$, satisfait aux six conditions nécessaires. Les cinq premières de ces conditions nous ont déjà mené à la situation décrite dans (15.14 a) — (15.14 b). Ainsi :

(I) $T_x(f, S^0)$ est continue sur $S^0 - \Sigma\Gamma_k^0 (> F)$ spécialement à $S^0 - \Sigma\Gamma_k^0$;

(II) $T_x(f, S^0)$ est continue sur l'ensemble ouvert Ω.

Grâce à (I), si x' est un point de F, on aura

$$d_{x,x'} = | T_{x'}(f, S^0) - T_x(f, S^0) | < \varepsilon \tag{15.19}$$

pour $x, \in S^0 - \Sigma\Gamma_k^0$, tel que

$$r(x, x') < \delta = \delta(x', \varepsilon).$$

Supposons que x' de F est un point limite des Γ_i. Nous venons d'indiquer (15.19). Dans le cas de x, avec $r(x, x') < \delta$, n'appartenant pas à $S_0 - \Sigma\Gamma_k^0$, il y a un cercle Γ_i^0, ayant des points dans le cercle $S(x', \delta)$, tel que x est dans Γ_i^0. Soit x^0 un point quelconque de $S(x', \delta)$ sur la circonférence de Γ_i. On a

$$d_{x,x'} \leqq | T_{x'}(f, S^0) - T_{x^0}(f, S^0) | + | T_{x^0}(f, S^0) - T_x(f, S^0) |;$$

x^0, x étant sur Γ_i, il s'ensuit (15.15 b-19) que

$$d_{x,x'} \leqq d_{x^0,x'} + O_i < \varepsilon + O_i,$$

puisque x^0 est sur $S^0 - \Sigma\Gamma_k^0$. La sixième conséquence entraîne qu'il existe $\eta(x', \delta) > 0$, $\to 0$ avec δ, de sorte que $O_i < \eta(x', \delta)$ [pour tous i pour lesquels Γ_i^0 a des points dans $S(x', \delta)$]; d'où $d_{x,x'} < \varepsilon + \eta(x', \delta)$; $\delta \to 0$ avec ε. Donc en tenant compte de (15.19), on conclut que $T_x(f, S^0)$ *est continu en* x' (x' sur F, un point limite des Γ_i) *spécialement à* S^0; *on arrive à la même conclusion quand* x' *de* F *n'est pas un point limite des* Γ_i [alors il ne nous faudrait qu'employer (15.19), $\delta = \delta(x', \varepsilon)$, > 0, suffisamment petit].

DÉFINITION (15.20). — *Soit* $T_{x,j}(f, S^0)$ $(j=1, 2)$, *défini sur* S^0 *par les relations*

$$T_{j,x}(f, S^0) = \frac{\partial}{\partial x_j} T_x(f, S^0) \qquad (\text{sur } \Omega);$$

$$T_{j,x'}(f, S^0) = \lim_{x \to x'} \frac{\partial}{\partial x_j} T_x(f, S^0) \qquad \text{pour } x' \text{ sur F, quand } x, \in \Omega - \Sigma\Gamma_k^0, \to x'.$$

Remarquons (15.14 *b*) que

(15.20 *a*) $\qquad T_{j,x}(f, S^0) = V_j(x) \qquad$ pour x sur $S^0 - \Sigma\Gamma_k^0$.

Quand f satisfait les cinq premières conditions nécessaires, nous avons vu que (en employant la désignation ci-dessus) :

(1_0) $T_{j,x}(f, S^0)$ est continu sur $S^0 - \Sigma\Gamma_k^0 (> F)$ spécialement à $S^0 - \Sigma\Gamma_k^0$;

(2_0) $T_{j,x}(f, S^0)$ est continu sur l'ensemble ouvert Ω.

Avec (1_0), (2_0) au lieu de (I), (II), en reprenant le raisonnement donné suivant (I), (II), enfin en utilisant la sixième condition [pour les oscillations $O_{j,i}$ (15.17)], on conclut que $T_{j,x}(f, S^0)$ *est continu sur* F *spécialement à* S^0. Grâce à (II), (2_0), Ω étant ouvert, on peut donc formuler le résultat suivant.

THÉORÈME 15.21. — *Soit* $[\gamma_6]$ *s la classe de fonctions* $f(x)$ *satisfaisant les six conséquences* (conditions nécessaires afin que $f(x) \in [c_0]$) *décrites ci-dessus. On a* (théorème 15.12)

(15.21 *a*) $$[\gamma_5] \supset [\gamma_6] \supset [c_0].$$

Si $f(x) \in [\gamma_6]$, *il existe une fonction harmonique* $v(x)$ [15.5 *c*-5 *d*] *de sorte que les fonctions*

(15.21 *b*) $\quad T_x(f, S^0), \; T_{j,x}(f, S^0) \quad$ (*définitions* 15.6, 15.20)

soient continues sur S^0. *Si* $f(x) \in [\gamma_6]$ *sans appartenir à* $[c_0]$, *il peut arriver qu'il n'y a pas de dérivées uniques (finies)* $\frac{\partial T_x(f, S^0)}{\partial x_j}$ $(j=1, 2)$ *en tout point de* F. *Au cas où* $f \in [c_0]$ *ces dérivées existent sur* F (*en effet partout sur* S^0) *et l'on aura* (*nécessairement*)

(15.21 *c*) $\quad \frac{\partial}{\partial x_j} T_x(f, S^0) = T_{j,x}(f, S^0) \quad$ *partout sur* S^0.

On peut appeler la condition (15.21 c) *la septième* (afin que $f(x) \in [c_0]$). *Pour que une fonction* $f(x)$, définie sur le rectangle ouvert S^0, *soit de la classe* $[c_0]$ *il est nécessaire et suffisant* que les sept conditions soient valables et que le flux $\Phi(I)$ (rectangles I dans S^0) de

$$(15.21\,d) \qquad F(x) = T_x(f, S^0) \quad (15.21\,c)$$

ait une dérivée ordinaire, unique et finie, au sens de fonctions d'intervalle en tout point x de S^0 [la dérivée étant $f(x)$]. Lorsque toutes ces conditions ont lieu, $F(x)$ (15.21 d) sera une fonction de la classe (K_0), correspondant à $f(x)$.

Notons la relation (15.3 b), valable sur Ω dans le champ de $[C_0]$. Dire qu'une fonction $\Phi(I)$ d'intervalle (rectangle I), définie sur S^0, appartient à la classe $[C_0]$ équivaut à dire que :

(i) l'équation $J(F:I) = \int_{(I)} \frac{dF}{dn} ds(x) = \Phi(I)\,(I < S^0)$ a une solution $F(x)$ continue, ainsi que les $\frac{\partial F(x)}{\partial x_j}$, sur $S^0[F(x)$ sera de la classe $(K_0)]$;

(ii) unique et fini $\mathrm{Der}^x\Phi$ existe partout sur S^0 (c'est-à-dire, Φ est une totale (T_0), sur S^0; $f(x)$ sera de la classe $[c_0]$).

En tenant compte de (15.21 a-21 d) on voit que *l'opérateur* J^{-1}(15.1) *est exprimable dans le champ de* $[C_0]$ *par la formule*

$$(15.22) \qquad J^{-1}\Phi = [T_x(f, S^0) =]\, T_x(\mathrm{Der}^x\,\Phi, S^0) \quad \textit{partout sur } S^0.$$

TABLE DES MATIÈRES