MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

KARL MENGER

Géométrie générale

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 124 (1954)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1954__124__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXXIV

Géométrie générale

Par M. Karl MENGER
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
ILLINOIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1954

GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE

Par M. Karl MENGER

AVANT-PROPOS

Ce fascicule contient des idées présentées dans une série de conférences faites à la Sorbonne pendant le printemps de 1951. Je tiens à remercier vivement MM. Bouligand et Fréchet de leur intérêt amical. Je suis très reconnaissant à M. Revuz d'avoir sacrifié une si grande part de son temps à mettre au point ce manuscrit.

INTRODUCTION.

L'objet de ce fascicule est de résumer brièvement quelques chapitres de cette Géométrie générale que nous avons édifiée durant ces 25 dernières années, avec l'aide de nombreux collaborateurs, sur la notion introduite par Fréchet d'espace métrique et de présenter d'une manière plus détaillée plusieurs idées qui sont actuellement en cours de développement.

Avant d'entrer dans les détails, examinons quelques aspects généraux de la question. Les traits caractéristiques de ces recherches sur lesquels on a le plus souvent et le plus énergiquement mis l'accent, sont leur généralité, leur abstraction et leur parenté avec la théorie des ensembles : « *General Analysis* » est le nom sous lequel l'œuvre de E. H. Moore, de Chicago, s'est rendue célèbre; « *Théorie des espaces abstraits* » est le titre du livre de Fréchet; c'est dans sa « *Mengenlehre* » que Hausdorff développa la notion d'espace topologique et introduisit le terme « metrischer Raum ».

N. B. — Les renvois entre parenthèses sont relatifs à la bibliographie que le lecteur trouvera à la page 77.

Mais n'a-t-on pas été trop loin en généralisant les concepts particuliers de la Géométrie classique ? La recherche fondée sur les notions abstraites n'a-t-elle pas perdu contact avec les espaces concrets les plus importants de la Géométrie : les espaces euclidiens à n dimensions, E_n, dont les points sont définis comme des suites de n nombres réels, tandis que la distance entre deux points dépend de leurs coordonnées par la formule de Pythagore ? Les classes générales de Fréchet ne sont-elles pas hors du royaume des objets spatiaux ordinaires, ce royaume qui commença par n'être dans l'Antiquité qu'une petite province ne comprenant que quelques objets simples, qui fut agrandi grâce aux méthodes de la Géométrie analytique découvertes par Descartes et Fermat et qui fut étendu à ses plus lointaines frontières quand Georg Cantor y fit entrer tous les sous-ensembles de E_n ? Toutes ces questions nous furent souvent posées.

Ces questions ne sont évidemment pas de nature mathématique, mais appartiennent à la méthodologie, domaine dans lequel trop de discussions n'ont abouti qu'à des affirmations sur des goûts et des préférences personnelles ([1]). C'est pourquoi il est heureux que le problème méthodologique particulier posé par l'étude des espaces abstraits puisse être résolu une fois pour toutes à partir d'un théorème mathématique rigoureux. Une courte digression nous préparera à saisir cette solution assez inattendue.

Le premier principe de classification des objets géométriques est sans doute la considération de leur dimension. Dans l'espace euclidien ordinaire, nous distinguons des solides, des surfaces, des courbes et des objets sans cohésion. Ces concepts correspondent à des différences dans la réalité physique, quoique à parler rigoureusement, tout objet physique soit un solide. Notre notion de solide idéal est réalisée par un morceau de bois, tandis qu'une feuille de papier représente notre notion de surface, qu'un modèle en fil de fer est assez proche de notre notion de courbe et que du sable représente un objet sans cohésion.

Une expérience simple met en lumière les différences entre ces divers objets physiques ([2]). Le but de l'expérience est de détacher un point et un morceau entourant le point du reste de l'objet. Pour cela, nous aurons besoin de différents outils dans les différents cas. Une scie est nécessaire pour détacher un morceau de bois du reste de la bûche et avec cette scie nous couperons la bûche le long de surfaces.

Une paire de ciseaux suffit pour détacher un morceau de papier du reste de la feuille et avec eux nous couperons la feuille le long de lignes. Il nous suffit d'une pince coupante dans le cas du fil de fer et avec cette pince nous devrons couper le fil en des points séparés. Enfin, dans le cas du tas de sable, aucun instrument n'est nécessaire. Il suffit de prendre le grain et les grains voisins sans rien couper. Nous voyons que, pour détacher un point et un morceau entourant ce point d'un objet à k dimensions, nous devons couper cet objet le long d'objets à au plus $k-1$ dimensions.

Dans notre espace à trois dimensions, la dimension k des sous-ensembles prend une des valeurs 3, 2, 1, 0, -1. (Nous disons que les objets sans cohésion sont à 0 dimension, et le vide à -1 dimension.) D'autre part, tout sous-ensemble est à 3 ou 2 ou 1 ou 0 ou -1 dimension.

Il n'y a pas de difficulté à étendre cette notion aux sous-ensembles des espaces euclidiens à plus de trois dimensions. La classification que nous obtenons comprend tous les sous-ensembles de E_n. Le royaume tout entier des objets géométriques est divisé en provinces d'objets à $-1, 0, \ldots, n$ dimensions.

Il est tout aussi simple de formuler cette définition pour les sous-ensembles d'un espace métrique séparable et même pour des espaces plus généraux. De la sorte, notre expérience sur la dimension a permis de donner à une idée de Poincaré le contenu précis et la forme définitive, semble-t-il, suivante ([3]) : Un sous-ensemble S d'un espace est au plus à n dimensions si tout point de S se trouve dans des voisinages arbitrairement petits dont les frontières ont avec S des intersections au plus à n dimensions. Un ensemble qui est au plus à n dimensions sans être au plus à $n-1$ dimensions est à n dimensions. Un ensemble qui, pour une valeur finie n, est à n dimensions est dit de dimension finie.

Or, nous avons démontré que toute courbe située dans un espace euclidien de dimension quelconque, est homéomorphe à une courbe située dans l'espace euclidien à trois dimensions ([4]); c'est-à-dire qu'il existe une transformation topologique (biunivoque et bicontinue) qui transforme la courbe donnée dans un sous-ensemble de notre espace ordinaire à trois dimensions (et même dans un sous-ensemble d'une courbe universelle située dans notre espace ordinaire). Nous avons étendu cet énoncé aux sous-ensembles à une dimension d'un espace métrique séparable quelconque. Notre courbe universelle dans l'espace ordinaire contient donc une image topologique de tout sous-ensemble à une dimension contenu dans un espace métrique séparable quelconque (ou, ce qui est équivalent, d'un espace séparable métrisable quelconque, c'est-à-dire homéomorphe d'un espace métrique). D'après un théorème bien connu de la théorie de la dimension, démontré pour la première fois par G. Nöbeling ([5]), l'énoncé relatif aux ensembles de dimension 1 peut être étendu aux ensembles de dimension finie quelconque. Tout sous-ensemble à n dimensions d'un espace métrisable et séparable est homéomorphe à un sous-ensemble de l'espace euclidien à $2n+1$ dimensions (et même d'un ensemble universel à n dimensions de E_{n+1}). Il s'ensuit que *tout espace métrisable séparable de dimension finie est homéomorphe à un sous-ensemble d'un espace euclidien.*

Après cette digression, nous sommes en mesure d'examiner la question de savoir si les espaces métrisables séparables sont des généralisations déraisonnables des objets ordinaires de la Géométrie. Nous voyons, que du point de vue topologique, tant qu'ils sont de dimension finie, les espaces métrisables séparables et leurs sous-ensembles ne sont nullement des généralisations. Topologiquement, les sous-ensembles de dimension finie des espaces métrisables séparables sont identiques aux sous-ensembles des espaces euclidiens des diverses dimensions.

Bien entendu, la topologie générale ne restreint nullement son étude aux espaces à un nombre fini de dimensions ou aux espaces métrisables séparables et, dans la mesure où elle déborde ce domaine, elle généralise effectivement les objets de notre Géométrie ordinaire. Mais le domaine géométrique extrêmement étendu et important de tous les espaces métrisables séparables à un nombre fini de dimensions, ne représente, en réalité, aucune généralisation topologique de ce qui, depuis l'œuvre immortelle de Cantor, est devenu le domaine de la Géométrie.

Ayant réfuté l'opinion que les espaces abstraits pouvaient être jetés dans le Charybde des généralisations vides, il nous faut prévenir l'erreur qu'ils pourraient faire naufrage sur le Scylla de la trivialité. Car, pourrait-on demander, si la notion d'espace métrique séparable de dimension finie n'est pas une généralisation, quel est le mérite de cette notion ?

La réponse est que, *à la lumière de la notion moderne de dimension, l'idée d'espace métrisable séparable a révélé d'énormes redites dans la définition traditionnelle des objets de la Géométrie classique.* Il n'est pas nécessaire de définir les points comme suites de n nombres réels : d'après les résultats de la théorie de la dimension, on peut automatiquement introduire des coordonnées. Il n'est pas nécessaire non plus de préciser que la distance entre deux points dépend des coordonnées suivant la formule de Pythagore : on peut automatiquement introduire une telle distance sans changer la topologie. Nous n'avons pas à postuler les propriétés spécifiques des sous-ensembles des espaces euclidiens : elles sont les conséquences logiques de la définition « abstraite » des espaces métrisables séparables de dimension finie.

On peut décrire la situation autrement. Avant Riemann, les variétés gauches de la Géométrie différentielle étaient étudiées en tant que parties d'espaces euclidiens. Riemann, en introduisant les espaces qui portent son nom, éleva (comme Weyl le fit remarquer) le concept d'espace exactement au degré de généralité des objets spatiaux étudiés en Géométrie différentielle. Avant Fréchet, les objets du monde géométrique de Cantor étaient étudiés uniquement en tant que sous-ensembles d'un espace euclidien qui, comme nous le voyons maintenant, est un cas très particulier d'espace de dimension finie. L'idée générale d'espace métrisable séparable de dimension finie a élevé la notion d'espace exactement au degré de généralité des objets spatiaux étudiés dans la Géométrie depuis Georg Cantor.

CHAPITRE I.

La géométrie dans les espaces métriques.

La définition des espaces métriques est une heureuse combinaison de concepts empruntés à la Géométrie axiomatique et à la Géométrie analytique. La première fournit la considération d'une classe d'éléments non définis appelés « points ». (Aussi bien Riemann que Minkowski qui ont généralisé la notion d'espace avant Fréchet, ont conservé la définition analytique ou au moins la caractérisation locale des points par des suites de n nombres.) La seconde fournit l'association d'un nombre réel, $d(p, q)$, à tout couple de points p et q. Ce nombre est appelé la distance de p à q. On suppose que

$$d(p, q) = d(q, p) \begin{cases} > 0 & \text{si } p \neq q, \\ = 0 & \text{si } p = q, \end{cases}$$

et que l'inégalité triangulaire

$$d(p, q) + d(q, r) \geqq d(p, r)$$

est satisfaite quels que soient les trois points p, q, r.

Tout sous-ensemble d'un espace métrique est un espace métrique. Deux espaces métriques sont appelés *congruents*, s'ils peuvent être appliqués l'un sur l'autre par une transformation isométrique (c'est-à-dire une transformation qui préserve les distances et, par suite, est biunivoque).

Bien que la distance entre points ne soit pas un invariant topologique, une métrique s'est montrée un des outils les plus commodes pour l'étude de nombreux problèmes topologiques. En fait, Fréchet et ses successeurs immédiats ont limité leur étude des espaces métriques aux propriétés et relations topologiques.

Il y a 25 ans, nous commençâmes à voir quelles grandes possibilités la métrique elle-même présentait comme objet de recherche, hors de son rôle auxiliaire en topologie. Nous développâmes une théorie systématique des propriétés et relations métriques sous le nom de *Géométrie métrique générale* ([1]). Cette théorie ayant été résumée à de nombreuses reprises, tant par l'auteur lui-même ([2]) que par ses collaborateurs, en particulier L. M. Blumenthal ([3]) et Christian Paul ([4]), nous ne rappellerons ici que quelques points qui ont de l'importance pour la suite du Mémoire.

1. La relation « entre » et la convexité. — Dans un espace métrique, nous disons que le point q est « *entre* » ([5]) les points p et r, si $p \neq q \neq r$ et si $d(p, q) + d(q, r) = d(p, r)$. On prouve aisément que cette relation possède les propriétés essentielles de la relation classique « être entre deux points ». En particulier :

1° si q est entre p et r, alors q est entre r et p;
2° si q est entre p et r, alors r n'est pas entre p et q;
3° si q est entre p et r et r entre p et s, alors q est entre p et s et r

est entre q et s; cependant, si q est entre p et r et si r est entre q et s, nous ne pouvons généralement conclure que q est entre p et s;

4° si $p \neq q \neq r$ et si q est la limite d'une suite de points entre p et r, alors q est entre p et r.

Nous disons qu'un espace métrique est *convexe* (6) si pour tout couple de points distincts p et r, il existe au moins un point q qui est entre p et r. Si un espace convexe est complet, alors pour tout couple de points distincts p et q, l'espace contient (7) un *segment* joignant p et q, c'est-à-dire, un sous-ensemble I contenant p et q qui est congruent à un segment de la ligne droite euclidienne.

Il en résulte que, dans le cas particulier des sous-ensembles fermés d'un espace euclidien, nos ensembles convexes sont identiques aux ensembles convexes classiques.

Nous disons qu'un ensemble A est *extérieurement convexe* si avec tout couple de points p et q, A contient un point r tel que q soit entre p et r. Dans un espace complet S qui est convexe et extérieurement convexe, tout couple de points est contenu dans au moins une *ligne droite*, c'est-à-dire un sous-ensemble L congruent avec l'espace euclidien à une dimension E_1. Une telle ligne droite peut être caractérisée comme il suit : c'est un sous-ensemble complet, convexe et extérieurement convexe de S avec la propriété que de trois points de L, un est entre les deux autres.

2. D'une métrique générale à l'espace euclidien. — L'étude des propriétés découlant de la notion d' « entre » permet, à partir de l'espace métrique complet, d'obtenir des espaces de plus en plus particularisés, et finalement certaines caractérisations des espaces linéaires et euclidiens.

Deux configurations sont d'un intérêt spécial :

1° La *fourchette* : réunion de trois segments pq, qr, qs n'ayant en commun deux à deux que le point q situé à la fois entre p et r, et entre p et s. Si q est aussi entre r et s, alors la fourchette est convexe et nous l'appellerons *trièdre*.

2° La *lentille* : réunion de deux segments n'ayant en commun que les extrémités. Si une lentille est convexe, elle est congruente à un cercle, dans lequel la distance de deux points est égale à la longueur de l'arc mineur. Dans ce cas nous parlerons d'un *cercle convexe*.

D'autre part, la lentille est un cas spécial de ce que nous appelons *étrier* : réunion de quatre segments pq, qr, rs, ps qui n'ont en commun que des extrémités et tels que q soit entre p et r et r entre q et s. Nous obtenons une lentille si q est entre p et s. Un cercle convexe peut être considéré comme une lentille entre deux points opposés quelconques et comme un étrier entre deux points p, s quelconques, pourvu que q et r soient choisis sur l'arc majeur entre p et s de façon que q soit entre p et r et r entre q et s.

Un progrès important dans la direction de l'espace linéaire est assuré par la notion d'espace métrique *dans lequel deux points sont toujours contenus dans exactement une droite*. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace complet, convexe et extérieurement convexe, jouisse de la propriété, est l'*absence de fourchettes*. Une condition équivalente est la suivante : *tout quadruplet de points dont deux triplets sont linéaires, est linéaire* ([8]). Ici nous appelons *linéaire* un ensemble congruent à un sous-ensemble de la droite euclidienne. (Un triplet de points est linéaire si un des trois points est entre les deux autres et dans ce cas seulement.)

Le problème suivant n'est, semble-t-il, pas résolu : peut-il arriver dans un tel espace complet avec unicité des droites que les points p_n et q_n convergent respectivemeut vers des points distincts p et q, sans que les lignes droites joignant p_n et q_n convergent vers la ligne droite joignant p et q ?

Mentionnons le résultat suivant de M. W. A. Wilson ([9]) : pour qu'un espace complet, convexe et extérieurement convexe soit congruent à un espace euclidien ou à l'espace de Hilbert, il est nécessaire et suffisant que tout quadruplet de points de l'espace soit congruent à quatre points de l'espace euclidien à trois dimensions.

Soit maintenant donné un espace complet et convexe (mais pas nécessairement extérieurement convexe). Pour que *deux points soient toujours contenus dans un seul segment*, il est nécessaire et suffisant que *l'espace ne contienne pas de lentilles*.

Dans un espace complet et convexe, on peut étudier de nombreux types de singularités. Mentionnons comme exemple les *points extrêmes*, c'est-à-dire les points qui ne sont pas entre deux points de l'espace ([10]). Un point qui n'est pas extrême sera appelé *point de passage*, car il est contenu dans l'intérieur d'au moins un segment. Or, par une transformation topologique de l'espace dans un autre espace, on peut transformer un point extrême dans un point de passage, et vice-versa. Bien que ces notions ne possèdent donc aucune invariance topologique, les points extrêmes présentent une analogie assez remarquable avec les points terminaux (end points) de la topologie des continus. (Dans la théorie des courbes ([11]), nous appelons *terminal* un point d'un continu C qui est contenu dans des voisinages aussi petits que l'on veut dont les frontières n'ont qu'un seul point en commun avec C.) Comme les points terminaux d'un continu, les points extrêmes d'un espace métrique forment toujours un G_δ, c'est-à-dire un produit d'une suite dénombrable d'ensembles ouverts. Les points de passage se comportent comme les points d'un continu qui ne sont pas terminaux : ils forment un F_σ (somme d'une suite dénombrable d'ensembles fermés) qui est connexe et dense dans l'espace.

3. Une caractérisation des espaces euclidiens et de l'espace de Hilbert. — I. *L'espace euclidien à n dimensions* E_n, *a l'*ordre de congruence $n+3$, *ce qui veut dire que si à chaque groupe de* $n+3$ *points d'un espace métrique S correspond un groupe de* $n+3$ *points de* E_n *qui lui soit congruent, alors l'espace* S *tout entier est congruent à un sous-ensemble de* E_n.

Par exemple, si tout quintuplet de points de S est congruent à un quintuplet du plan euclidien, alors S est congruent à un sous-ensemble du plan euclidien.

II. E_n *a le quasi-ordre de congruence* $n+2$, *ce qui veut dire que si tout* $(n+2)$*-tuplet de points d'un espace métrique* S', *contenant plus de* $n+3$ *points, est congruent à un* $(n+2)$*-tuplet de points de* E_n, *alors* S' *tout entier est congruent à un sous-ensemble de* E_n.

Par exemple, si chaque quadruplet de points d'un espace S' contenant plus de cinq points, est congruent à un quadruplet du plan euclidien, alors S' est congruent à un sous-ensemble du plan euclidien. Cependant, il existe des espaces métriques comprenant exactement cinq points et qui ne sont congruents à aucun quintuplet de E_2, bien que chacun des cinq quadruplets que l'on peut extraire de l'espace métrique considéré soit congruent à un quadruplet de E_2.

III. *Il existe pour tout n des espaces métriques comprenant* *exactement $n+3$ points qui ne sont congruents à aucun sous-ensemble de E_n, bien que chacun des $(n+2)$-tuplets de ces espaces soit congruent à un $(n+2)$-tuplet de E_n.*

De tels espaces, nous dirons que ce sont des $(n+3)$-tuplets pseudo-euclidiens. Pepper [14] a construit des espaces dans lesquels les $(n+3)$-tuplets pseudo-euclidiens peuvent être plongés de manière congruente. Par exemple, tous les quintuplets pseudo-euclidiens sont congruents à certains quintuplets d'un « trifolium », c'est-à-dire la réunion de trois demi-plans euclidiens ayant leur frontière en commun et métrisés de telle sorte que la réunion de deux quelconques d'entre eux forme un plan euclidien.

Il peut être intéressant de signaler qu'aucune démonstration algébrique n'a, semble-t-il, été donnée jusqu'à présent du théorème II pour $n > 1$ [15]. Une des difficultés qui s'opposent à une démonstration algébrique est le fait que pour les généralisations complexes des espaces euclidiens (mentionnées au chapitre III), le théorème II n'est pas valable, tandis que le théorème I peut être étendu à ces espaces complexes.

Remarquons que parmi les espaces complets, convexes et extérieurement convexes, E_1 est caractérisé [16] par la propriété d'avoir le quasi-ordre de congruence 3.

Les théorèmes précédents ramènent le problème à la caractérisation des $(n+3)$-tuplets et $(n+2)$-tuplets de E_n. Ce dernier problème peut être résolu en utilisant la notion suivante :

Pour k points $p_1, p_2, \ldots, p_k$, d'un espace métrique, nous notons par $D(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ le déterminant suivant d'ordre $k+1$:

$$D(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_{i,j}^2 \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k),$$

où d_{ij}^2 désigne le carré de la distance $d(p_i, p_j)$.

IV. *Pour que $n+2$ points d'un espace métrique soient congruents à $n+2$ points de E_n, il faut et il suffit que*

$$D(p_1, p_2, \ldots, p_{n+2}) = 0$$

et

$$\operatorname{sgn} D(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i}) = (-1)^k \quad \text{ou} \quad 0$$

pour tout k-tuplet qui peut être extrait des $n+2$ points et pour toutes les valeurs de $k = 2, 3, \ldots, n+1$.

Comme corollaire, nous obtenons la caractérisation des $(n+1)$-tuplets qui sont congruents aux $(n+1)$-tuplets de E_n. Car $n+1$ points $p_1, \ldots, p_{n+1}$ peuvent être considérés comme formant un $(n+2)$-tuplet dans lequel $p_{n+2}=p_{n+1}$, si bien que la condition

$$D(p_1, \ldots, p_{n+1}, p_{n+2}) = 0$$

est satisfaite. Les autres conditions sont

$$\operatorname{sgn} D(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}) = (-1)^k \quad \text{ou} \quad 0$$

pour tous les k-tuplets qui peuvent être extraits des $n+1$ points et $k = 2, 3, \ldots, n+1$.

V. *Pour que* $n+3$ *points d'un espace métrique soient congruents à* $n+3$ *points de* E_n, *il faut et il suffit que chaque* $(n+2)$-*tuplet qui peut être extrait des* $n+3$ *points soit congruent à* $n+2$ *points de* E_n *et, en outre, que*

$$D(p_1, \ldots, p_{n+3}) = 0.$$

VI (17). *Pour qu'un espace métrique* S *soit congruent à un sous-ensemble de l'espace de Hilbert, il faut et il suffit que* S *soit séparable et que pour tout entier* k *et pour tout* k-*tuplet de points* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *de* S, *on ait*

$$\operatorname{sgn} D(p_1, p_2, \ldots, p_k) = (-1)^k \quad \text{ou} \quad 0.$$

Il est remarquable que la séparabilité n'a pas besoin d'être supposée quand il s'agit de caractériser les sous-ensembles d'un espace euclidien. Si S est un espace métrique tel que

$$D(p_1, \ldots, p_{n+2}) = 0$$

pour tout $(n+2)$-tuplet de points, tandis que

$$\operatorname{sgn} D(p_1, \ldots, p_k) = (-1)^k \quad \text{ou} \quad 0$$

pour tout k-tuplet de points et tout entier qui est inférieur ou égal à $n+2$, alors S est congruent à un sous-ensemble de E_n et est *ipso facto* séparable.

Pour donner une application très simple des théorèmes généraux précédents, considérons le cas où quatre points p_1, p_2, p_3, p_4 d'un espace métrique sont congruents à quatre points d'un espace euclidien et donc à quatre points de E_3. Dans un espace métrique, nous avons

$$D(p_1, p_2) = 2d^2(p_1, p_2) \geqq 0$$

pour tout couple de points (car les distances sont réelles) et

$$D(p_1, p_2, p_3) \leqq 0$$

pour tout triplet (en vertu de l'inégalité triangulaire). Selon le corollaire du théorème IV, une condition à la fois nécessaire et suffisante pour que quatre points soient congruents à quatre points de E_3 est donc

$$D(p_1, p_2, p_3, p_4) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Une conséquence immédiate de cette condition, comme Blumenthal ([18]) l'a fait remarquer, est la condition formulée par Fréchet en 1935 ([18a]) que la forme quadratique ternaire suivante soit semi-définie positive :

$$\begin{gathered} d_{41}^2 x^2 + d_{42}^2 y^2 + d_{43}^2 z^2 - (d_{23}^2 - d_{42}^2 - d_{43}^2) yz \\ - (d_{31}^2 - d_{43}^2 - d_{41}^2) xz - (d_{12}^2 - d_{31}^2 - d_{32}^2) xy. \end{gathered}$$

D'après le théorème IV, $D(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$ est nécessaire et suffisant pour qu'un quadruplet de points soit congruent à un quadruplet de E_2. D'après le théorème V, pour qu'un quadruplet soit congruent à un quadruplet de E_1, il faut et il suffit que $D(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$ et que chacun des quatre triplets vérifie $D(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}) = 0$ ou, ce qui est équivalent, soit linéaire.

De nombreux espaces, autres que E_n, ont été caractérisés d'une manière analogue parmi les espaces métriques (ou même parmi des espaces plus généraux), en particulier par Blumenthal et ses élèves qui ont aussi appliqué les résultats à la théorie des déterminants ([19]) et dans les travaux de Klanfer ([20]) et Haantjes ([21]). Signalons dans ce domaine les travaux intéressants de M. H. Buseman ([21a]) qui cependant lient aux idées métriques, les idées de transformation et de groupe de transformation que nous avons essayé d'exclure de la géométrie métrique pure.

4. Arcs sans tangentes. — Une très intéressante conséquence de notre caractérisation des sous-ensembles d'un espace de Hilbert fut découverte par W. A. Wilson ([21b]). Soit S un espace métrique dans lequel $d_{ij} = d(p_i, p_j)$ désigne la distance entre les points p_i et p_j. Nous désignons par $\sqrt{S}$ l'ensemble de tous les points de S avec la distance $\sqrt{d_{ij}}$ pour le couple p_i, p_j. On voit aisément que $\sqrt{S}$ est un espace métrique qui est séparable si S est séparable. Wilson prouve de plus que si S est congruent à un sous-ensemble de l'espace de Hilbert, de telle sorte que nous avons nécessairement pour tout k-tuplet de points

$$\operatorname{sgn}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_{ij}^2 \end{vmatrix} = (-1)^k \quad \text{ou} \quad 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k),$$

alors, nous avons aussi

$$\operatorname{sgn}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_{ij} \end{vmatrix} = (-1)^k \quad \text{ou} \quad 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k).$$

Ces dernières conditions sont suffisantes pour que $\sqrt{S}$ soit congruent à un sous-espace de l'espace de Hilbert. Si l'on applique ce résultat au segment S de E_1 constitué des nombres $0 \leqq x \leqq 1$ avec la distance $d(x_i, y_j) = |x_i - y_j|$, nous voyons que $\sqrt{S}$, c'est-à-dire le segment $0 \leqq x \leqq 1$ avec la distance $\delta(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ est congruent à un sous-ensemble S^* de l'espace de Hilbert. Il est clair que S^* est un arc. Soient x^*, y^*, z^* trois points quelconques de S^*. En S un des trois points correspondants x, y, z, soit y, est entre les deux autres, c'est-à-dire

$$|y - x| + |z - y| = |z - x|.$$

On a, par suite, en S^*

$$\delta^2(x^*, y^*) + \delta^2(y^*, z^*) = \delta^2(x^*, z^*).$$

Il en résulte que, dans l'espace de Hilbert, *trois points quelconques de l'arc* S^* *forment un triangle rectangle.* Cette propriété de S^* est à l'antipode de l'existence de tangentes.

5. Problèmes topologiques. — Les notions métriques de point extrême, de point de passage, de convexité, etc. n'appartiennent pas à la topologie. Un espace métrique convexe peut être homéomorphe à un espace métrique non convexe. Pourtant ces notions métriques donnent lieu à des problèmes topologiques assez intéressants ([22]). Étant donné une propriété métrique, nous pouvons chercher des conditions topologiques qui soient à la fois nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse introduire dans un espace topologique une métrique pour laquelle l'espace jouisse de la propriété donnée. On peut, en d'autres termes, chercher l'équivalent topologique des propriétés métriques.

Par exemple, sous quelles conditions peut-on métriser un espace topologique compact de façon qu'il devienne convexe? Tout espace métrique compact et convexe étant un continu localement connexe, il est clair que continuité et connexité locale sont des conditions nécessaires. Ces conditions, demandais-je ([23]), sont-elles suffisantes?

Voilà un résultat partiel ([24]) dans cette direction que nous citerons à cause de l'importance de la notion de métrique interne qui y intervient. Soit E, un espace métrique tel que tout couple de points puisse être joint par un arc de longueur finie et même d'une longueur aussi petite que l'on veut, pourvu que la distance entre les deux points soit suffisament petite. Alors E peut être convexifié. On n'a qu'à associer à tout couple de points de E comme nouvelle distance la borne inférieure des longueurs de tous les arcs qui les joignent. De cette façon, on obtient un espace métrique convexe E' homéomorphe à E. On appelle souvent la métrique obtenue *la métrique interne* de E.

Récemment, MM. R. H. Bing et E. E. Moïse ([25]) ont réussi à démontrer que la réponse à notre question générale est affirmative. Tout continu localement connexe peut-être convexifié. On a su dès Hahn et Mazurkiewicz que les images continues d'un segment sont caractérisées par la continuité et la connexité locale. On voit maintenant qu'ils sont aussi caractérisés par l'homéomorphie à un espace compact et convexe.

Beaucoup de problèmes importants de ce genre attendent encore leur solution. Quel est, par exemple, l'équivalent topologique d'un espace complet et convexe? D'un espace complet, convexe et extérieurement convexe? Quels espaces compacts sont homéomorphes à des espaces convexes qui ne contiennent qu'un seul segment entre deux points quelconques? Quel est l'équivalent topologique des espaces métriques complets dans lesquels deux points peuvent toujours être joints par une droite unique ?

La géométrie métrique semble faire naître une nouvelle branche de la topologie.

CHAPITRE II.

Théorie générale de la courbure.

La renaissance de la géométrie commença avec l'introduction de la méthode de Descartes et Fermat d'après laquelle on construit des modèles arithmétiques pour les entités spatiales : des nombres (appelés coordonnées) définissant les points; des équations, les courbes et les surfaces. On développa d'abord des théories géométriques en appliquant l'algèbre à ces modèles arithmétiques. Et dès leur début ces théories ont enrichi d'un monde nouveau le domaine des entités spatiales, d'un monde qui dépassait complètement l'imagination d'Euclide et même d'Archimède.

Mais peut-être le plus grand triomphe de la méthode de Descartes et Fermat fut le fruit de l'application de l'analyse à leurs modèles. Ce fut le calcul différentiel fondé par Newton et Leibniz qui introduisit l'étude systématique des propriétés locales des courbes, des surfaces et, dès Riemann, des variétés de dimensions supérieures. Dans sa partie algébrique, la nouvelle méthode avait souvent comme compagne la méthode synthétique, une compagne parfois faible mais pleine d'inspiration; c'est à la méthode synthétique enfin que l'on doit le développement de la géométrie projective et des géométries non euclidiennes. Mais dans le champ des propriétés locales, la méthode analytique basée sur le calcul différentiel et intégral a été maîtresse absolue et presque exclusive. C'est pourquoi l'ensemble de tous les résultats algébriques et analytiques a reçu le nom Géométrie analytique. La partie consacrée aux propriétés locales a été appelée Géométrie différentielle.

Cependant, sous cette domination absolue de méthode analytique, les géomètres ont fini par se limiter à des recherches qui puissent être formulées dans le langage du calcul. On se borna à l'étude des propriétés différentielles des fonctions définissant les courbes et les surfaces; des points singuliers de ces fonctions bien que parfois aucune singularité géométrique ne leur correspondît; des relations entre des équations; etc. Une étude des propriétés locales hors du cadre de l'analyse devenait inconcevable. Un point devait être donné par des coordonnées, une variété par une fonction admettant des dérivées, etc.

Voilà un cas où, pour inverser le proverbe, la fin n'est justifiée que par les moyens. Car si l'on pense à une courbe ou à une surface, voit-on des nombres attachés aux points? Voit-on des fonctions? Voit-on des dérivées? Ces notions arithmétiques sont attachées aux entités spatiales par les analystes afin de pouvoir appliquer le calcul différentiel. Et après avoir suivi cette voie pendant trois siècles, les géomètres ne devraient-ils pas retourner au problème primordial, c'est-à-dire à l'étude des propriétés locales des objets spatiaux?

Ce furent sans doute des considérations de cette nature qui ont amené M. Bouligand à développer sa géométrie différentielle directe. Ce fut cette considération qui, en 1930, m'a suggéré de lancer le programme d'une géométrie métrique des propriétés locales, programme qui dans la vingtaine d'années écoulées depuis a été partiellement exécuté par quelques-uns de mes élèves et par moi-même.

Remarquons que dans mon Mémoire publié dans les *Mathematische Annalen*, vol. **103**, 1930, on s'affranchit complètement de l'espace euclidien et même de l'espace cartésien dont tout point est défini par des coordonnées. Comme point de départ on prend un espace métrique dont les points sont des éléments quelconques. Les courbes sont des arcs contenus dans l'espace, c'est-à-dire des images topologiques d'un intervalle. Il n'y a donc ni coordonnées, ni équations, ni fonctions. Évidemment, dans ce cadre on ne pourrait pas formuler des hypothèses de dérivabilité même si on le voulait.

Or, dans un espace métrique général (même s'il est convexe et complet de façon que deux points peuvent toujours être joints par un segment), deux points ne déterminent pas nécessairement un segment unique. C'est pourquoi on n'a pas étudié dans notre géométrie métrique de tangentes aux courbes ou ces généralisations intéressantes de la notion de tangente dont s'occupe M. Bouligand dans sa théorie qui est limitée aux espaces euclidiens ou au moins vectoriels dans lesquels deux points déterminent toujours une droite unique qui les joint.

D'autre part, on a développé dans le cadre extrêmement général de la géométrie métrique une théorie de la courbure des courbes et des sufaces.

1. La courbure des courbes. — Soient donnés trois points différents q, r, s d'un espace métrique. Grâce à l'inégalité triangulaire, le plan euclidien contient toujours trois points qui sont congruents à q, r, s et qui déterminent un cercle circonscrit ou une droite. L'inverse du rayon de ce cercle (o dans le cas de la droite) sera dénoté par $\varkappa(q, r, s)$ et sera appelé la *courbure* du triplet q, r, s. D'après le théorème II du chapitre I, un espace convexe et complet est congruent à un segment de la droite euclidienne si la courbure de trois points quelconques est o, et dans ce cas seulement.

Cet énoncé ne correspond cependant pas à celui de la géométrie différentielle, cette dernière faisant intervenir une courbure en chaque point. Or, nous avons introduit [1] une courbure $\varkappa(p)$ d'un espace métrique général au point p. C'est le nombre (s'il existe) tel que $|\varkappa(q, r, s) - \varkappa(p)|$ soit aussi petit que l'on veut pourvu que q, r, s soient trois points quelconques suffisamment voisins de p.

Bien que cette définition soit plus générale que la définition classique de la courbure en ce qu'elle est applicable aux espaces métriques généraux, elle est, comme MM. Haupt et Alt l'on remarqué [2], moins générale que cette dernière lorsqu'on l'applique aux arcs situés dans un espace euclidien, par exemple à la courbe $y = f(x)$ du plan. Si cette dernière admet une courbure métrique $\varkappa(p_0)$ au point $p_0 = [x_0, f(x_0)]$, alors on peut démontrer que $f''(x_0)$ existe et que $\varkappa(p_0)$ est égale à la courbure classique $f''(x_0)\left[1 + f'^2(x_0)\right]^{-\frac{3}{2}}$. D'autre part, $y = x^4 \sin\frac{1}{x}$ admet une courbure classique discontinue au point (o, o) sans y posséder une courbure métrique, cette dernière étant toujours une fonction continue du point.

La modification suivante, due à M. Alt [3], de la définition métrique n'a pas cet inconvénient et, en effet, donne une notion qui est plus générale que la courbure classique même dans le cas d'un arc euclidien. D'après M. Alt, la courbure au point p est le nombre (s'il existe) duquel $\varkappa(p, q, r)$ diffère aussi peu que l'on veut po que q et r soient suffisamment proches de p. Si dans le plan euclidien on considère les points

$$p_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad q_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$$

[situés sur la parabole $y = x^2$] et la somme des deux lignes polygonales $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ complétée par le point $(0, 0)$, on obtient un arc à courbure 2 au point $(0, 0)$, bien qu'il ne possède aucune courbure classique en ce point.

M. Gödel a proposé (4) la définition suivante encore plus générale de la courbure d'un arc A au point p : c'est le nombre (s'il existe) duquel les nombres $\varkappa(p, q, r)$ diffèrent aussi peu que l'on veut pourvu que q et r soient des points de l'arc suffisamment proches à p *et tels que* p *soit situé sur le segment de* A *entre* q *et* r.

On peut se demander si un arc dont la courbure est nulle en chaque point, est toujours congruent à un segment de la droite euclidienne. Nous avons montré par un exemple (5) qu'il n'en est pas nécessairement ainsi. Si l'on prend comme distance entre les points x et y de l'intervalle -1 et 1 :

$|x - y|$ si x et y ont le même signe;
$|x| + |y| - x^2y^2$ si x et y sont des signes contraires,

on obtient un espace métrique dont la courbure est nulle en chaque point. Pourtant aucun voisinage du point 0 n'est congruent à un segment euclidien. On a mal compris cet exemple en affirmant (6) qu'il puisse être remplacé par l'exemple plus simple d'un cercle convexe, c'est-à-dire d'un cercle dans lequel on prend comme distance entre deux points la longueur du plus petit des deux arcs du cercle joignant les deux points. Un cercle convexe a la courbure nulle en tout point sans être congruent à un segment, mais tout point est contenu dans un voisinage qui est congruent à un segment de la droite euclidienne.

D'autre part, nous avons développé une méthode purement métrique pour démontrer (7) qu'un arc de courbure métrique nulle en tout point *et situé dans un espace euclidien* est un segment d'une droite. Nous avons basé ce théorème sur l'existence, dans tout arc et pour tout n, d'une suite équilatérale de points $p_0, p_1, \ldots, p_n$ telle que p_0 et p_n coïncident avec les points extrêmes de l'arc.

Par équilatéral nous entendons que les n distances de points consécutifs sont égales :

$$d(p_0, p_1) = d(p_1, p_2) = \ldots = d(p_{n-1}, p_n).$$

Une démonstration rigoureuse de l'existence de suites équilatérales a été donnée par Alt et Baer ([8]) en 1935. Mais à partir de l'hypothèse que de telles suites existent, notre mémoire de 1930 contient une nouvelle démonstration du théorème classique d'après lequel dans un espace euclidien les droites sont les seules courbes à courbure nulle en chaque point, une démonstration qui n'utilise pas l'analyse classique, donc la résolution d'une équation différentielle sans appel au calcul différentiel et même sans l'intervention d'aucune hypothèse explicite concernant l'existence de dérivées.

Quels espaces, outre ceux d'Euclide, jouissent de la propriété que les courbes à courbure nulle en tout point soient congruentes à des segments d'une droite euclidienne? Nous avons remarqué que la condition suivante était suffisante; si deux triplets de points que l'on peut extraire de quatre points quelconques sont linéaires, les deux autres triplets sont toujours linéaires. M. Schœnberg a démontré ([9]) la suffisance d'une condition plus faible : la courbure nulle est caractéristique pour les segments de droite dans les espaces que M. Blumenthal a appelés *Ptolémiens* et qui sont définis par la validité de l'inégalité

$$d(p, q)\, d(r, s) + d(p, r)\, d(q, s) \geqq d(p, s)\, d(q, r)$$

pour tout système de quatre points p, q, r, s.

Pour un résumé des détails de la théorie de la courbure de courbes et une bibliographie de ce domaine de la géométrie moderne, nour renvoyons le lecteur aux livres de MM. Blumenthal et Pauc.

Ici, nous nous bornerons à ajouter quelques remarques concernant la *torsion* de courbes, notion dont M. Alexits avait donné ([10]) une définition purement métrique en 1939. Récemment, M. Blumenthal ([11]) est arrivé à une définition nouvelle très symétrique qui met en évidence des analogies avec la définition métrique de la courbure.

Rappelons d'abord les déterminants associés aux systèmes de n points $p_1, p_2, \ldots, p_n$ d'un espace métrique qui, au chapitre I, jouaient un rôle important dans la caractérisation des espaces euclidiens :

$$D(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & d^2(p_1, p_2) & \ldots & d^2(p_1, p_n) \\ 1 & d^2(p_2, p_1) & 0 & \ldots & d^2(p_2, p_n) \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & d^2(p_n, p_1) & d^2(p_n, p_2) & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

En vertu de la formule d'Heron, le carré de la courbure de trois points p_1, p_2, p_3 peut être exprimé par ces déterminants de la façon suivante :

$$\varkappa^2(p_1, p_2, p_3) = \frac{8 \mid D(p_1, p_2, p_3) \mid}{D(p_1, p_2) D(p_2, 3) D(p_3, p_1)}.$$

Soient p_1, p_2, p_3, p_4 quatre points tels qu'aucun point ne soit entre deux des autres points. Alors M. Blumenthal appelle torsion de ces quatre points la racine carrée positive du nombre suivant :

$$\tau^2(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{18 \mid D(p_1, p_2, p_3, p_4) \mid}{[\Pi D(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3})]^{\frac{1}{2}}},$$

où Π dans le dénominateur désigne le produit des déterminants formés pour les quatre triplets que l'on peut extraire des quatre points donnés.

D'après Blumenthal, la torsion d'un espace métrique au point p est le nombre $\tau(p)$ (s'il existe) duquel le nombre $\tau(p_1, p_2, p_3, p_4)$ diffère aussi peu que l'on veut pourvu que p_1, p_2, p_3, p_4 soient quatre points suffisamment proches de p, aucun n'étant situé entre deux autres.

Récemment, M. Blumenthal et ses élèves ont démontré d'une façon purement métrique que parmi les courbes de l'espace euclidien celles qui sont contenues dans un plan sont caractérisées par le fait que leur torsion est nulle en tout point. Ils ont d'ailleurs étudié les relations entre la courbure et la torsion. Il va sans dire qu'un des buts d'une théorie métrique de courbes serait le développement de théorèmes qui refléteraient les formules de Frénet.

2. La courbure des surfaces. — Au point de vue de la métrique interne (p. 14), les arcs ne présentent qu'un intérêt assez faible. Dans un arc de longueur finie, deux points suffisamment voisins peuvent toujours être joints par un segment de longueur aussi petite que l'on veut, et la distance interne entre deux points p et q (d'après laquelle un tel arc est convexe) peut être définie simplement comme la longueur du segment entre p et q. Or, il est clair que deux arcs convexes de même longueur finie sont toujours congruents et que tout arc à longueur finie doué de sa métrique interne est congruent à un segment de la droite euclidienne. L'étude de cette dernière peut donc remplacer l'étude des métriques internes de tous les arcs à longueur finie.

Par contre, l'intérêt de la métrique interne devient prépondérant pour les espaces de dimensions supérieures et déjà pour les surfaces. Il n'existe aucune surface dont l'étude pourrait remplacer celle des métriques internes de toutes les surfaces, puisqu'il y a une grande variété de métriques internes différentes. Pourtant, si S est une surface comme celles que l'on considère en géométrie différentielle, il correspond à chaque point p un nombre $k_S(p)$, appelé la courbure totale de S au point p, qui, d'après un résultat célèbre de Gauss, ne dépend que de la métrique interne de S et tel que cette dernière soit caractérisée par la fonction de point $k_S(p)$ définie sur S.

Formulons ce théorème dans la terminologie de la géométrie métrique générale ! Une surface classique S est contenue dans un espace euclidien et le nombre $k_S(p)$ est le produit des deux courbures principales des sections planes de S au point p. Si S_1 est une surface classique telle que les espaces métriques convexes S' et S'_1 portant les métriques internes de S et S_1 soient congruents, alors les nombres $k_S(p)$ et $k_{S_1}(p_1)$ sont toujours égaux si les points p de S et p_1 de S_1 se correspondent par cette congruence. Réciproquement, si S_1 est une surface classique admettant une homéomorphie sur S telle que l'on ait toujours $k_S(p) = k_{S_1}(p_1)$ si p et p_1 se correspondent par cette homéomorphie, alors les espaces métriques convexes S' et S'_1 portant les métriques internes de S et S_1 sont congruents.

On connaît d'ailleurs de nombreuses définitions de $k_S(p)$ se basant sur la métrique interne de S, dues à Gauss et à ses successeurs. Mais n'est-il pas possible demandais-je, de définir cette courbure par la simple considération de quadruplets de points de S, comme nous venons de définir la courbure d'une courbe C par la considération de triplets de points de C ?

La plus simple généralisation de cette dernière définition qui se présente pour une surface S, ne mène pas à la solution du problème. D'abord, même si S est contenue dans l'espace euclidien et si l'on fait correspondre à quatre points de S le rayon de la sphère circonscrite, le passage à la limite analogue à celui que nous avons employé pour les courbes, fournirait un nombre qui ne dépendrait pas uniquement de la métrique interne de S. Et si S' n'est pas contenu dans l'espace euclidien, alors quatre points de S ne sont pas nécessairement congruents à quatre points de cet espace.

Wald a cependant réussi à résoudre le problème au moyen de l'idée suivante ([12]). Il dit qu'un espace métrique a la courbure de surface $\varkappa(p)$ au point p *lorsque aucun voisinage de* p *n'est linéaire et lorsque tout quadruplet* Q *de* S *est congruent à un quadruplet de la sphère* S_k *où* $|k - \varkappa(p)|$ *est aussi petit que l'on veut pourvu que* Q *soit suffisamment voisin de* p. Ici S_k dénote la sphère à courbure totale k portant la métrique interne. Pour $k > 0$, S_k est donc la surface d'une sphère au rayon $\frac{1}{k^2}$ située dans l'espace euclidien dans laquelle on prend comme distance entre deux points p et q la longueur du plus petit arc du grand cercle passant par p et q. La sphère S_0 est le plan euclidien. Pour $k < 0$, S_k est le plan hyperbolique de courbure k.

Étant donnés quatre points p_1, p_2, p_3, p_4 d'un espace métrique, appelons $K(p_1, p_2, p_3, p_4)$ l'ensemble de tous les nombres k tels que S_k contienne quatre points congruents et citons d'abord les résultats, d'ailleurs un peu fragmentaires, obtenus jusqu'à présent sur la structure de l'ensemble $K(p_1, p_2, p_3, p_4)$. Nous dénoterons la distance entre p_i et p_j par d_{ij}.

Il peut arriver que l'ensemble K soit vide, C'est, par exemple, le cas si

$$d_{12} = d_{13} = d_{14} = 1, \qquad d_{23} = d_{34} = d_{42} = 2.$$

Si quatre points donnés, sans être linéaires (c'est-à-dire congruents avec quatre points de la droite euclidienne), sont *dépendants* (c'est-à-dire contiennent trois points linéaires), alors l'ensemble K, s'il n'est pas vide, ne contient qu'un seul nombre ([13]).

Le plan euclidien contient des quadruplets de points qui sont en même temps congruents à des quadruplets de points d'une sphère S_k pour au moins un nombre $k > 0$ ([14]).

Pour le quadruplet de Groiss ([15]) dans lequel

$$d_{13} = d_{14} = d_{23} = d_{24} = \pi \qquad \text{et} \qquad d_{12} - d_{34} = \frac{3\pi}{2},$$

l'ensemble K consiste en deux nombres, dont l'un est 3 et l'autre est situé entre 1,5 et 2.

Pour quatre points linéaires, K consiste en tous les nombres réels $\leqq \left(\frac{\pi}{d}\right)^2$, où d dénote la plus grande des six distances d_{ij}.

Si le quadruplet donné est *pseudo-linéaire* (*cf.* p. 10), alors on peut numéroter les points de telle façon que ([15a])

$$d_{12} = d_{34}, \qquad d_{13} = d_{24}, \qquad d_{14} = d_{23} = d_{12} + d_{24}$$

et l'ensemble K ne contient que le nombre $\left(\frac{\pi}{d_{14}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Retournons à la définition de la courbure des surfaces due à Wald et appliquons-la au cas où S est une surface classique située dans l'espace euclidien. Wald a démontré ([12]) que dans ce cas sa courbure est identique à la courbure de Gauss.

En vue des résultats cités concernant les ensembles de nombres K, peut-être les remarques suivantes que nous avons déduites d'une analyse de la démonstration de Wald, seront utiles à éclaircir le contenu de son théorème fondamental.

Si S est une surface classique contenue dans l'espace euclidien et si q, r, s, t sont quatre points non linéaires de S situés dans un voisinage suffisamment petit d'un point p, alors on peut démontrer que l'ensemble $K(q, r, s, t)$ n'est pas vide et que tout nombre appartenant à cet ensemble (s'il en contient plusieurs) est aussi proche que l'on veut de la courbure gaussienne de S au point p. Pour définir cette dernière, il suffit d'ailleurs de considérer des quadruplets non linéaires qui soient dépendants, c'est-à-dire contiennent un triplet linéaire. Cette dernière remarque est importante, puisque pour de tels quadruplets l'ensemble K ne contient pas plus d'un nombre. Résumant ces remarques, on peut donc caractériser la courbure gaussienne d'une surface classique S au point p par la propriété suivante : *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe un* $\delta > 0$ *tel que pour chaque quadruplet* q, r, s, t *de* S *qui est dépendant sans être linéaire et dont les quatre points ont une distance* $< \delta$ *de* p, *il existe un quadruplet congruent dans une* *sphère S_k où le nombre k est uniquement déterminé par q, r, s, t et diffère de la courbure gaussienne de ε au plus.*

Pour déterminer le nombre k dont nous venons de parler, en fonction des six distances entre les points q, r, s, t, il faut résoudre une équation transcendante. M. Robinson a trouvé ([16]) un nombre k' qui dépend des six distances d'une façon rationnelle et pourtant est si proche du nombre k qu'il peut être substitué à ce dernier dans la caractérisation de la courbure de Gauss que nous venons de citer. On déduit du travail de M. Robinson la remarque suivante qui permet de calculer la courbure gaussienne d'une surface classique S au point p au moyen d'une famille à un paramètre de quadruplets. Menons par p une ligne géodésique quelconque et considérons, pour tout nombre d qui est assez petit, les deux points q_d et r_d de cette ligne qui sont à la distance géodésique d de p. Appelons s_d un des deux points de S dont la distance géodésique à q_d et à r_d est égale à $2d$. Les points q_d, r_d, s_d formeront donc un triangle équilatéral de côté $2d$. Appelons c_d la distance géodésique entre p et s_d. Alors la courbure gaussienne de S au point p est

$$2\sqrt{3}\lim_{d\to 0}\frac{c-\sqrt{3}\,d}{d^3}.$$

Retournons à la définition générale de la courbure des surfaces due à Wald. Comme notre définition de la courbure des courbes, cette définition est applicable aux espaces métriques généraux sans exiger une représentation des points par des coordonnées. En ne considérant que les quadruplets de points de la surface, comme nous n'avions considéré que des triplets de points de la courbe, et par le même passage à la limite, Wald a donc introduit d'une façon simple et naturelle la notion de la courbure des surfaces, notion si importante puisqu'elle appartient à la géométrie interne des surfaces, tandis que pour les courbes la trivialité de leur géométrie interne exclut l'existence d'une courbure interne. Dans le cas des surfaces classiques, nous retrouvons d'ailleurs la courbure de Gauss. Les surfaces classiques sont donc des espaces métriques compacts et convexes admettant en chaque point p une courbure $\varkappa(p)$.

Mais encore plus remarquable et plus important est, me semble-t-il, le théorème inverse démontré par Wald ([12]).

Tout espace compact et convexe qui en chaque point p admet *une courbure de surface p au sens de Wald, est une surface de Gauss.*

En se basant sur la seule hypothèse qu'un espace métrique général soit compact et convexe et qu'il possède en chaque point p une courbure $\varkappa(p)$ dans son sens, Wald a démontré d'abord que l'espace est localement homéomorphe à l'intérieur d'un cercle et qu'entre deux points suffisamment voisins il n'y a qu'un seul segment. Soient q et r deux points différents du point p. Pour tout nombre λ qui est inférieur à la distance entre p et q aussi bien qu'à la distance entre p et r, on peut former le point $q(\lambda)$ entre p et q et à la distance λ de p, et le point $r(\lambda)$, analogue. Si $d(\lambda)$ dénote la distance entre les points $q(\lambda)$ et $r(\lambda)$, Wald démontre l'existence de la limite

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{d(\lambda)}{\lambda} = \mathrm{L},$$

ce qui lui permet de définir l'angle $\widehat{qpr}$ comme $2 \arcsin \frac{\mathrm{L}}{2}$.

De cette façon, on obtient pour toute paire de points q, r différents de p un angle $\widehat{qpr}$ qui est $\geqq 0$ et $\leqq \pi$. Cet angle n'est égal à π que si p est entre q et r. Il n'est égal à o que dans le cas de $q = r$.

Il est maintenant facile d'associer à tout point du voisinage de p deux nombres ρ, φ, des coordonnées polaires, p étant le pôle et un segment quelconque issu de p nous servant comme axe. Or, on démontre ([12]) : Si $\rho(t)$ et $\varphi(t)$ sont deux fonctions dérivables définies pour $0 \leqq t \leqq 1$, alors la longueur de l'arc déterminé par ces fonctions est

$$\int_0^1 \sqrt{\rho'^2(t) + \mathrm{G}^2[\rho(t), \varphi(t)]\varphi'^2(t)}\, dt,$$

où $\mathrm{G}(\rho, \varphi)$ est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial r^2}(\rho, \varphi) + \varkappa(\rho, \varphi)\, \mathrm{G}(\rho, \varphi) = 0$$

satisfaisant aux conditions

$$\mathrm{G}(0, \varphi) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \rho}(0, \varphi) = 1$$

et où $\varkappa(\rho, \varphi)$ désigne la courbure au sens de Wald au point de coordonnées (ρ, φ). Cela complète la démonstration du fait que l'espace est une surface classique dont la courbure gaussienne en tout point p est identique avec la courbure de Wald au point p.

Combiné avec le premier théorème, ce dernier résultat donne le théorème fondamental suivant :

Pour qu'un espace métrique compact soit une surface de Gauss, il est nécessaire et suffisant qu'il soit convexe et admette une courbure de surface au sens de Wald en tout point. Cette dernière est égale à la courbure gaussienne de la surface.

Beaucoup de questions attendent une réponse. Peut-on remplacer la compacité par l'hypothèse que l'espace soit complet? Suffit-il dans le dernier théorème, de se borner dans l'espace métrique donné, à la considération des quadruplets dépendants, ce qui dans le premier théorème était permis pour définir la courbure d'une surface classique donnée? Peut-on modifier la définition de la courbure de Wald au point p de la même manière que M. Alt a modifié notre définition de la courbure des courbes, c'est-à-dire en se bornant à la considération des quadruplets p, q, r, s de points dont un est le point p en lequel on veut définir la courbure? (On n'ose guère espérer que ces deux restrictions puissent être appliquées à la fois et que la considération des quadruplets p, q, r, s avec p entre q et r soit suffisante). Peut-on appliquer les méthodes employées aux courbes et aux surfaces pour définir le tenseur riemannien de courbure des variétés à dimensions supérieures?

Quoi qu'il en soit, même les résultats déjà obtenus semblent justifier un grand optimisme concernant l'application des méthodes métriques aux problèmes qui jusqu'à maintenant étaient le monopole de la géométrie différentielle. Le théorème fondamental met en relief toute la redondance de la méthode classique comme, d'après ce que nous avons dit dans l'Introduction, un résultat de la théorie de dimension a mis en relief la redondance, du point de vue topologique, de la définition classique des sous-ensembles d'un espace euclidien : on n'a pas besoin de supposer que les points soient donnés par coordonnées, et que la distance entre deux points soit définie par la formule de Pythagore. Si l'on ne suppose comme donné qu'un espace séparable métrisable d'une dimension finie, le reste peut être déduit de cette hypothèse. Or, dans l'étude des propriétés métriques locales, on n'a pas besoin de supposer que les points soient donnés par des coordonnées, les surfaces par des fonctions admettant des dérivées, la courbure par des procédés basés sur ces hypothèses. Si l'on ne suppose comme donné qu'un espace métrique compact et convexe admettant en tout point p une courbure définie par les six distances entre quatre points près de p, le reste peut être déduit de cette hypothèse.

On ose formuler l'opinion que l'avenir de l'étude des propriétés métriques locales appartient aux méthodes de la géométrie métrique générale.

CHAPITRE III.

ANALYSE ET GÉNÉRALISATIONS DE LA NOTION D'ESPACE MÉTRIQUE.

Ce chapitre est consacré à une analyse de la notion d'espace métrique. Nous décomposons les postulats définissant cette notion en douze hypothèses. Pour chacune de ces hypothèses, nous montrons qu'il est possible de la remplacer par une autre plus faible, procédé nécessaire dans la plupart des cas pour inclure des notions importantes antérieurement considérées dans la géométrie et l'analyse classique.

1. Points et morceaux. — La définition des espaces métriques est fondée sur la notion primitive de point. Aucune hypothèse n'est admise sur la nature des éléments d'un espace métrique général.

Cependant, on pourrait se servir en géométrie métrique d'une méthode employée dans plusieurs théories topologiques où l'on prend comme base la notion de morceau et où l'on définit les points comme suites particulières de morceaux [1]. En élaborant une idée formulée par l'auteur, Wald introduisit de cette façon tous les espaces séparables et métrisables [2] dont l'ensemble a une puissance qui surpasse celle du continu. Mentionnons ici brièvement comment nous avons simplifié la méthode de Wald dans le but restreint de développer une définition des espaces compacts et métrisables dont l'ensemble a la puissance du continu.

Comme point de départ nous prenons un ensemble dénombrable d'éléments U, V, W, ..., appelés *morceaux* et une relation binaire $V < W$: V est *contenu* dans W. Nous supposons qu'en vertu de cette relation l'ensemble des morceaux soit partiellement ordonné et que deux morceaux V et W soient identiques si $U < V$ entraîne toujours $U < W$ et si $U < W$ entraîne $U < V$, et dans ce cas seulement. V et W sont appelés *disjoints* s'il n'existe aucun morceau qui est à la fois $< V$ et $< W$.

Par *point* nous entendons une suite $\{U_1, U_2, \ldots\}$ de morceaux telle que :

1° tout morceau U_i contient U_{i+1};

2° tout morceau W qui ne contient aucun des U_i est disjoint de presque tous les U_i (c'est-à-dire de tous excepté un nombre fini). Deux points $\{U_1, U_2, \ldots\}$ et $\{V_1, V_2, \ldots\}$ sont considérés comme *identiques* si chaque V_j contient presque tous les U_i et chaque U_i contient presque tous les V_j.

L'ensemble de tous les points est appelé *espace*. A tout morceau V nous associons deux sous-ensembles de l'espace :

a. l'ensemble (V) de tous les points $\{U_1, U_2, \ldots\}$ tels que presque tous les U_i soient contenus en V;

b. l'ensemble [V] de tous les points $\{U_1, U_2, \ldots\}$ tels qu'aucun U_i soit disjoint de V.

Évidemment, $(V) \subseteq [V]$, où $\subseteq$ dénote la relation d'être sous-ensemble. D'ailleurs il est clair que $V < W$ entraîne $[V] \subseteq (W)$. Afin d'obtenir de cette façon les espaces compacts et métrisables, il faut que nous admettions les hypothèses suivantes :

I. Pour tout V, l'ensemble (V) n'est pas vide;

II. $[V] \subseteq (W)$ entraîne $V < W$.

Chaque (V) est un ensemble ouvert. L'ensemble de tous les ensembles (V) est une base dénombrable des ensembles ouverts de l'espace. [V] est la fermeture de (V).

Or il serait désirable d'avoir une théorie analogue des espaces métriques complets basée sur les notions de morceau et de distance approximative entre deux morceaux : un intervalle de nombres associé à tout couple de morceaux. Les points seraient certaines suites de morceaux. A un couple de points serait donc associée une suite d'intervalles qui devraient converger vers un nombre : la distance entre les deux points.

Peut-être une telle théorie pourrait être appliquée à la physique et se prêterait d'ailleurs à des généralisations de la notion d'espace métrique.

2. **Couples et n-tuplets de points.** — Dans la définition des espaces métriques interviennent des couples de points. Indiquons trois directions dans lesquelles la notion d'espace métrique peut être généralisée en partant de cette remarque :

a. Dans un espace aréolaire (qui peut être ou non un espace métrique), nous associons un nombre soumis à certains postulats, à chaque triplet de points ([3]). D'une manière analogue, on peut associer un volume à $n-1$ dimensions à chaque n-tuplet de points. Il reste beaucoup à faire dans cette direction.

b. B. J. Topel ([3a]) a associé à chaque triplet de points un nombre soumis à des conditions qui rappellent les propriétés d'un rapport. De cette manière, il obtient une théorie qui est aux espaces affines ce que la géométrie dans les espaces métriques est aux espaces euclidiens.

c. Nous avons associé à tout quadruplet de points un nombre soumis à des conditions qui rappellent les propriétés d'un rapport anharmonique. Cette théorie, qui a été continuée par F. B. Stauder, est une généralisation *projective* de la géométrie métrique ([3b]).

3. **Espaces métriques et partiellement métriques.** — Pour que cette analyse soit complète, nous mentionnerons brièvement la possibilité de considérer des *espaces partiellement métriques* qui sont aux espaces métriques ou à leurs généralisations, ce que les espaces partiellement ordonnés sont aux espaces ordonnés. Par exemple, on pourrait admettre qu'il y eût un ou plusieurs points p tels que $d(p, q)$ soit définie pour tout point q, tandis que $d(q, p)$ ne le serait pas, ou vice-versa.

4. **Fonctions de couples de points et relation de congruence.** — Dans un espace métrique, en postulant qu'une distance est associée à deux points, nous supposons qu'une fonction de couples de points a été donnée. En 1931, en développant une remarque antérieure, nous avons introduit la notion de *système de congruence* ([4]) : un ensemble d'éléments (« points ») et une relation binaire réflexive,

symétrique et transitive entre les couples non ordonnés d'éléments. Si la relation a lieu entre les couples p, q et p', q', nous disons que p, q et p', q' sont congruents.

Nous avons étendu les théorèmes I et II sur la caractérisation des sous-ensembles de E_n (*cf.* chap. II, § 2) des espaces métriques aux systèmes de congruence ([5]). De cette manière, la géométrie métrique est mise en rapport avec la géométrie élémentaire et, en particulier, avec la théorie de Pieri relative à E_3, qui est exprimée en termes de relation de congruence entre couples tels que p, q et p', q' dont les premiers points sont identiques ([6]). Dans un système de congruence, nous pouvons réunir dans une classe tous les couples de points qui sont congruents à un même couple. De cette manière, nous décomposons l'ensemble de tous les couples de points en classes disjointes de couples. On se rapproche beaucoup des espaces métriques en supposant que l'ensemble de toutes ces classes est ordonné.

Indépendamment de ces notions, Kurepa a introduit en 1934 ([7]) les « espaces pseudo distanciés » et en 1946, Fréchet publia ([8]) une intéressante Note : *De l'écart numérique à l'écart abstrait.*

5. **Distances numériques et non numériques.** — Dans un espace métrique, un nombre est associé à tout couple de points. Mais nous pouvons postuler qu'une fonction de couples de points est donnée, sans supposer que les valeurs de cette fonction sont des nombres.

A ce sujet, il faut citer l'emploi des éléments d'un groupe abstrait comme valeurs de la fonction distance ([9]). A tout couple d'éléments d'un ensemble, nous pouvons associer comme distance $d(p, q)$ un élément d'un groupe abstrait G. Plus intéressant encore est l'emploi de couples d'éléments inverses de G comme distances. En particulier, à deux éléments, a et b, de G lui-même nous associons comme distance $d(a, b)$ le couple d'éléments $(b - a, a - b)$ si l'opération de groupe est notée additivement, ou le couple $(b.a^{-1}, a.b^{-1})$ si l'opération est notée multiplicativement. De cette manière, G lui-même et ses sous-groupes sont métrisés au moyen de G. On voit ([10]) que tout groupe abélien a l'ordre de congruence 4 et le quasi-ordre de congruence 3. Tout groupe (même un groupe continu) présente donc certains caractères essentiels de E_1, ligne droite euclidienne.

Nous pensons qu'il reste beaucoup à faire avec les distances de groupe ainsi définies. Une notion qui paraît particulièrement pleine de promesses est celle de *longueur* dans les groupes continus ([11]). Par la longueur du polygone (ensemble fini ordonné) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nous entendons l'ensemble des 2^{n-1} éléments

$$\pm(a_2 - a_1) \pm (a_3 - a_2) \pm \ldots \pm (a_n - a_{n-1}).$$

Si A est un arc contenu dans un groupe continu, nous appelons longueur de A et nous dénotons par L(A), la fermeture de la somme des longueurs de tous les sous-polygones de A.

Par exemple, dans le groupe des translations du plan, L(A) est un domaine convexe et symétrique par rapport à o dont le contour a une longueur euclidienne $4l(A)$, où $l(A)$ est la longueur euclidienne de A. De cette façon, une relation intéressante peut être établie entre quelques-uns des arcs ayant la même longueur euclidienne; d'avoir la même longueur au sens mentionné. On a $L(A) = L(A')$ si A' peut être obtenu de A en permutant, pour ainsi dire, les éléments de A.

Réciproquement, tout domaine convexe et symétrique par rapport à o est la longueur L (A) d'une infinité d'arcs A.

Remarquons qu'un voisinage de o dans un sous-groupe à un paramètre est un arc A caractérisé par la propriété « géodésique » $L(A) = A$. Dans certains groupes compacts on pourrait donc démontrer l'existence d'un tel arc en vertu du théorème de réduction.

Très récemment, D. Ellis ([12]) a appliqué aux algèbres de Boole une méthode analogue à celle que nous avons développée pour les groupes.

6. Distances à une ou plusieurs valeurs. — A tout couple de points, p et q, d'un espace métrique est associé exactement un nombre, la distance entre p et q. Deux points d'un cercle ou d'une sphère de rayon 1 ont, en un certain sens, un ensemble de distances puisqu'à deux tels points est associée une classe de nombres qui sont mutuellement congruents modulo 2π. On pourrait développer une théorie générale dans laquelle à tout couple de points serait associé un ensemble de nombres, soumis à certaines conditions.

Nous attachons une importance particulière au cas où la distance entre deux points est une fonction de répartition plutôt qu'un nombre. Le dernier chapitre de ce fascicule sera consacré à cette question.

7. Distances réelles et complexes. — A tout couple de points on peut associer une distance numérique sans que cette distance appartienne au corps des nombres réels. Les éléments de n'importe quel corps peuvent être utilisés comme valeurs de la fonction distance. En particulier, Wald ([13]) et Flexer ([14]) ont étudié les ensembles munis de distances complexes. L'espace euclidien complexe à n dimensions C_n a été caractérisé. Comme E_n, C_n a l'ordre de congruence $n+3$; mais en opposition à E_n, C_n n'a pas le quasi-ordre de congruence $n+2$. Taussky ([14a]) a étudié le cas général où les distances appartiennent à un corps abstrait.

8. Distances non négatives et distances des deux signes. — Les distances dans un espace métrique sont non négatives. Mais on peut étudier des espaces dont les distances réelles sont négatives pour certains couples de points. L'exemple le plus simple est la droite orientée, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres réels avec $d(x, y) = y - x$. D'autres exemples, comme nous le verrons au chapitre IV, sont fournis par les problèmes non définis du calcul des variations. Les plus remarquables de ces espaces à distances négatives sont ceux pour lesquels l'inégalité triangulaire est satisfaite. Le chapitre VI sera consacré aux espaces vectoriels de cette nature.

9. Séparation métrique et annexes. — Dans un espace métrique, $p \neq q$ implique $d(p, q) \neq 0$. Des points distincts sont, peut-on dire, métriquement séparés. Dans les chapitres IV, V, VI, en même temps que des distances des deux signes, nous étudierons des espaces généraux pouvant contenir des points possédant des *annexes* métriques. Nous disons que le point p a une annexe s'il existe un ensemble contenant des points q qui sont à une distance nulle de p.

10. Identification métrique. — Dans un espace métrique, on suppose que $d(p, q) = 0$ pour tout point p. C'est sans doute le plus naturel de tous les axiomes des espaces métriques. Pour être complet mentionnons cependant que dans la géométrie des ensembles, Hausdorff ([15]) abandonna cette condition en introduisant la *distance supérieure* d'un ensemble A à un ensemble B comme le maximum des distances des points de A à ceux de B. La distance supérieure d'un ensemble borné à lui-même est le diamètre de l'ensemble et est donc un nombre positif si l'ensemble contient plus d'un point. Dans la métrique des morceaux (citée dans le paragraphe 1 de ce chapitre), comme dans une géométrie aléatoire, on peut avoir pareillement à affaiblir l'axiome de l'identification métrique.

11. **Symétrie et dissymétrie.** — Dans un espace la distance est symétrique, $d(p, q) = d(q, p)$. Ceci nous permet de parler de la distance entre p et q au lieu de la distance de p à q. Sur la droite orientée, où $d(x, y) = y - x$, la distance est manifestement antisymétrique, $d(x, y) = -d(y, x)$. Comme nous le verrons au chapitre IV, le calcul des variations conduit à des espaces généralisés dans lesquels la distance n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

12. **L'inégalité triangulaire et les espaces semi-métriques.** — Le plus intéressant des axiomes des espaces métriques, le seul qui fasse intervenir simultanément plus de deux points, est l'inégalité triangulaire. Si nous le rayons de la liste de nos axiomes, nous obtenons ce que nous avons appelé un espace semi-métrique ([16]). Parmi les théorèmes valides pour les espaces semi-métriques, citons notre caractérisation des sous-ensembles des espaces euclidiens et de l'espace de Hilbert (*cf.* chap. I).

Car l'inégalité triangulaire équivaut à l'inégalité

$$D(p_1, p_2, p_3) \leqq 0,$$

ou, en d'autres termes, à la condition que tout triplet de points soit congruent à un triplet du plan euclidien E_2. D'ailleurs, cette remarque suggère que l'inégalité triangulaire pourrait être renforcée en postulant l'inégalité

$$D(p_1, p_2, p_3, p_4) \geqq 0,$$

ou la condition que tout quadruplet de points soit congruent à un quadruplet de E_3. Pour un espace complet, convexe et extérieurement convexe, cette condition renforcée implique (d'après le résultat de Wilson mentionné p. 8) la congruence de l'espace à un espace euclidien ou hilbertien.

Entre les espaces à écart fini et les espaces métriques se placent les espaces à écart continu ou uniformément continu. Un écart étant uniformément continu si $|d(p, q) - (dp', q')|$ est aussi petit que l'on veut dès que $d(p, p')$ et $d(q, q')$ sont suffisamment petits, on remarquera qu'il s'agit d'une continuité de l'écart par rapport à l'écart. L'inégalité triangulaire est une des hypothèses (et en un certain sens la plus simple) qui garantissent la continuité uniforme de l'écart.

Un autre rôle de l'inégalité triangulaire est, comme nous le verrons au chapitre V, de garantir l'existence et la semi-continuité inférieure de la longueur des arcs. Il est évident, par induction complète, que l'inégalité triangulaire est équivalente à l'*inégalité polygonale* suivante :

$$d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3) + \ldots + d(p_{n-1}, p_n) \geqq d(p_1, p_n),$$

ce qui peut s'énoncer : la longueur d'une ligne polygonale quelconque n'est pas inférieure à la corde correspondante. Au chapitre V, nous formulerons une forme extrêmement affaiblie de cette inégalité et qui représente l'essentiel de l'inégalité triangulaire dans la mesure où elle est nécessaire pour établir l'existence de la longueur des arcs. Car notre condition sera à la fois nécessaire et suffisante pour assurer l'existence d'une longueur d'arc finie.

CHAPITRE IV.

Calcul des variations et géométrie métrique.

Le problème de l'existence de courbes qui minimisent une intégrale curviligne donnée, appartient au fond à la géométrie métrique générale. Au calcul fonctionnel, on n'emprunte qu'une généralisation assez simple du théorème de Baire d'après lequel une fonction semi-continue inférieurement sur une classe limite compacte prend, pour au moins un élément de la classe, sa valeur minima. Les difficultés principales du problème de l'existence de courbes minimisantes se rencontrent quand il s'agit de démontrer que l'intégrale curviligne est une fonction semi-continue inférieurement des chemins et que certaines classes de chemins sont compactes. Or, ces problèmes peuvent être résolus par les méthodes de la géométrie métrique générale [1].

1. Précisons d'abord la généralisation nécessaire du théorème de Baire. Ce que l'on appelle méthode directe au calcul des variations,

c'est l'application à des cas spéciaux d'un théorème concernant deux fonctions : une fonction λ que l'on veut minimiser et une fonction λ_1 de comparaison. Puisque, implicitement, ce théorème ([1a]) est au fond des raisonnements de Tonelli, nous l'avons appelé :

Principe de Tonelli. — *Étant données une classe limite* L *et deux fonctions :* λ_1 *définie sur* L *et finie sur une sous-classe* L^f *de* L *et* λ *définie sur un ensemble* L_λ *tel que* $L^f \subseteq L_\lambda \subseteq L$. *Supposons :*

1° *que pour tout nombre fini* α_1, *l'ensemble des éléments e tels que* $\lambda_1(e) \leqq \alpha_1$ *est compact;*

2° *que pour tout nombre fini* α, *la fonction* λ_1 *est bornée supérieurement sur l'ensemble des éléments e tels que* $\lambda(e) \leqq \alpha$;

3° *que pour tout nombre* α_1 *fini, la fonction* λ *est semi-continue inférieurement sur l'ensemble des éléments e tels que* $\lambda_1(e) \leqq \alpha_1$.

Alors, tout sous-ensemble K *de* L *qui est fermé en* L^f, *contient au moins un élément* e_0 *qui minimise* λ *sur* K, *c'est-à-dire tel que* $\lambda(e_0) \leqq \lambda(e)$ *pour tout e appartenant à* K.

Dans tout problème classique du calcul des variations à une dimension on suppose comme donné un espace euclidien. Dans les applications classiques du principe de Tonelli, L est la classe des chemins situés dans l'espace (notion discutée aux § 4 et 5). Traditionnellement, des deux fonctions de chemins ou fonctionnelles, la fonctionnelle λ_1 de comparaison a été toujours la longueur euclidienne; la fonctionnelle λ que l'on veut minimiser, une intégrale curviligne.

On verra que la géométrie métrique s'occupe de situations beaucoup plus générales. λ_1 et λ auront des significations plus étendues et l'espace ne sera pas nécessairement euclidien ou même vectoriel. A la base de nos raisonnements, on trouvera un espace topologique T qui est localement compact et métrisable. Bien que dans les déductions préliminaires du paragraphe 2 nous douons T de métriques particulières, une analyse définitive des résultats obtenus par les méthodes métriques (§ 7 et 10) mettra en évidence qu'au fond ce n'est que la topologie de T qui y joue un rôle essentiel.

2. Considérons d'abord le cas où les éléments de L sont des mouvements qui se produisent dans l'espace T pendant le même intervalle de temps $[a, b]$. Un tel mouvement M est une association continue d'un point $p_M(t)$ de T à chaque instant t tel que $a \leqq t \leqq b$. On dit que les mouvements M_1, M_2, ... convergent vers le mouvement M si $\lim p_{M_n}(t) = p_M(t)$ pour tout t de $[a, b]$.

Supposons maintenant qu'une métrique particulière (compatible avec la topologie de T) soit introduite dans l'espace et que $d(p, q)$ dénote la distance entre les points p et q. Supposons d'ailleurs que L soit une famille normale au sens suivant : pour tout $\delta > 0$, il existe un $\varphi(\delta)$ tel que, si M appartient à la famille,

$$|t' - t''| < \varphi(\delta) \quad \text{entraîne toujours} \quad d[p_M(t'), p_M(t'')] < \delta.$$

Alors, de toute suite de mouvements appartenant à L on peut extraire une suite M_1, M_2, ... qui converge vers un mouvement qui cependant n'appartient pas nécessairement à la famille.

Par la longueur du mouvement M (relative à la métrique donnée), on entend la borne supérieure (finie ou ∞) des longueurs des polygones inscrits $\{p_M(t_1), p_M(t_2), \ldots, p_M(t_n)\}$, où

$$a \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqq b.$$

Nous appellerons un mouvement *uniforme*, si pendant deux intervalles $[\alpha, \beta]$ et $[\alpha', \beta']$ de même durée $\beta - \alpha = \beta' - \alpha'$, les mouvements partiels $M[\alpha, \beta]$ et $M[\alpha', \beta']$ ont toujours la même longueur. Ici nous dénotons par $M[\alpha, \beta]$ l'association de $p_M(t)$ avec tout t de l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

Soit α_1 un nombre fini donné. La famille des mouvements uniformes de longueur $\leqq \alpha_1$ est normale, car $|t' - t''| < \frac{\delta}{\alpha_1}$ entraîne que $M[t', t'']$ est de longueur $\leqq \delta$ et la longueur de $M[t', t'']$ n'est pas inférieure à la distance entre les points $p(t')$ et $p(t'')$. En outre, grâce à la semi-continuité inférieure de la longueur, on peut dire que le mouvement limite d'une suite convergente de mouvements uniformes de longueur $\leqq \alpha_1$ est de longueur $\leqq \alpha_1$, bien qu'il ne soit pas nécessairement uniforme.

Si $\lambda_1 M$ dénote la longueur de M, la classe des mouvements qui se produisent uniformément entre les instants a et b dans un espace métrique compact, jouit donc d'une propriété assez voisine de la condition 1° du principe de Tonelli : pour tout α_1 donné, de chaque suite de mouvements tels que $\lambda_1 M \leqq \alpha_1$ on peut extraire une suite qui converge vers un mouvement de longueur $\leqq \alpha_1$. Ce dernier n'étant pas toujours uniforme, on ne peut pourtant pas affirmer que l'ensemble de tous les M pour lesquels $\lambda_1 M \leqq \alpha_1$ soit compact.

3. L'uniformité d'un mouvement (qui n'est pas nécessairement préservée dans un passage à la limite) est une propriété purement cinématique. Elle disparaît si l'on utilise des horloges que l'on accélère pendant une partie de l'intervalle et que l'on retarde pendant une autre partie. La longueur du chemin, d'autre part, n'est pas affectée par ces changements d'horloge. Pourtant la longueur d'un mouvement n'est pas déterminée par la trajectoire de M, c'est-à-dire l'ensemble des positions du mobile. Par exemple, le segment $[x_0, x_1]$ de la droite euclidienne est la trajectoire de mouvements de longueur $x_1 - x_0$ et de mouvements de toutes longueurs $\geqq x_1 - x_0$.

La longueur est donc une propriété de quelque chose qui s'intercale entre les idées claires de mouvement et de trajectoire. Cette notion intermédiaire et un peu obscure a été appelée chemin. Or ce sont les chemins qui dans les problèmes à une dimension du calcul des variations, constituent la classe L dans le principe de Tonelli. On est donc amené à la question suivante :

4. **Qu'est-ce qu'un chemin ?** — Dans la théorie classique, on dérive les chemins des mouvements par un procédé d'abstraction. On néglige des propriétés cinématiques des mouvements et de cette façon arrive à des classes de mouvements « équivalents » qui sont appelées chemins.

Rappelons d'abord (à des modifications mineures près) la définition due à Fréchet de la distance entre les mouvements M : $p(t)\,(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ et N : $q(u)\,(u_1 \leqq u \leqq u_2)$ dans un espace métrique. Par une *quasi-similitude* des intervalles fermés $[t_1, t_2]$ et $[u_1, u_2]$, nous entendrons une relation telle que :

1° Tout élément t soit en relation avec au moins un élément u, et tout élément u soit en relation avec au moins un élément t;

2° Si t' est en relation avec u' et t'' avec u'', on a

$$(t' - t'')(u' - u'') \geqq 0.$$

La représentation graphique d'une quasi-similitude est donc un arc dans le plan cartésien des points (t, u), qui y joint (t_1, u_1) et (t_2, u_2) et qui n'est nulle part rétrograde, ni en t, ni en u, bien qu'il puisse contenir des segments horizontaux et verticaux.

Pour deux mouvements donnés M et N, formons l'ensemble de tous les nombres d pour lesquels il existe une quasi-similitude telle que, (t, u) étant une paire quelconque de nombres correspondants, la distance entre les positions $p(t)$ et $q(u)$ des mobiles soit $\leqq d$. La borne inférieure de cet ensemble de nombres est appelée *la distance* entre M et N. En vertu de cette distance, les mouvements dans un espace métrique forment un espace à écarts finis.

Si la distance entre M et N est o, alors on peut démontrer l'existence d'une quasi-similitude telle que les positions des mobiles $p(t)$ et $q(u)$ en instants correspondants soient toujours identiques. Dans ce cas, les mouvements M et N sont appelés *équivalents*. Par *chemin* on entend une classe de mouvements qui consiste en tous les mouvements qui sont équivalents à un mouvement quelconque de la classe. Les chemins dans un espace métrique forment un espace métrique.

Deux mouvements équivalents déterminent toujours la même trajectoire. Mais, sauf le cas d'une trajectoire ponctuelle qui n'appartient qu'au repos, la même trajectoire appartient à des chemins différents. Par exemple, le segment $0 \leqq x \leqq 1$ de la droite est la trajectoire des mouvements non équivalents M_1, M_2, M_3, ... suivants qui se produisent dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$:

$$p_{M_1}(t) = t, \qquad p_{M_2}(t) = 1 - t, \qquad p_{M_3}(t) = 4t(1 - t), \qquad \ldots$$

et dont les longueurs respectives sont 1, 1, 2, ...

5. Au lieu de partir de la notion cinématique de mouvement et de former des classes par abstraction, nous avons récemment défini le chemin sans aucune introduction d'éléments temporels en ajoutant des spécifications géométriques à la notion de trajectoire ([2]). Car tout mouvement détermine, outre la trajectoire (d'une façon que nous allons esquisser), un ensemble de polygones : des mouvements équivalents toujours le même ensemble; des mouvements non équivalents, même si leurs trajectoires sont identiques, des ensembles différents. L'ensemble de polygones déterminé par un mouvement peut donc nous servir comme définition de ce chemin.

C'est une définition intrinsèque, puisqu'elle ne contient aucune mention de temps, de paramètre ou d'autres facteurs extrinsèques.

Dans ce qui suit, pour simplifier la théorie, nous nous bornerons à la considération de mouvements *sans arrêt* (c'est-à-dire de mouvements où pendant aucun intervalle le mobile n'occupe une position constante; ce qui exclut, en particulier, le cas du repos). Mais on pourrait développer une théorie sans cette restriction.

Considérons le mouvement sans arrêt M : $p(t)\,(t_1 \leq t \leq t_2)$. Pour tout ensemble ordonné

$$T = \{t_1 = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n = t_2\},$$

nous formons le polygone correspondant de M, c'est-à-dire la suite de points

$$P = p(T) = \{p(\tau_1), p(\tau_2), \ldots, p(\tau_n)\}.$$

S'il y a des points multiples dans la trajectoire, c'est-à-dire si le mobile occupe la même position à différents instants, alors les points de P ne sont pas nécessairement différents. Le polygone P, tout en étant une suite de points, n'est donc pas nécessairement un ensemble ordonné comme on le dit à tort parfois. Par exemple, il peut arriver que P contienne un *point d'arrêt*, c'est-à-dire un point p_i identique au point consécutif p_{i+1}. On remarque d'ailleurs que le même polygone

$$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$$

peut correspondre à plusieurs ensembles ordonnés

$$P = p(T) = p(T') = \ldots.$$

L'ensemble $\mathfrak{P}(M)$ des polygones $p(T)$ de M formés pour tous les ensembles ordonnés T, caractérise, comme on voit aisément, le chemin de M : Si M' est un mouvement sans arrêt qui est équivalent à M, alors $\mathfrak{P}(M') = \mathfrak{P}(M)$, tandis que $\mathfrak{P}(M'') \neq \mathfrak{P}(M)$ pour tout mouvement M'' non équivalent à M. Nous dénotons $\mathfrak{P}(M) = \mathfrak{P}(M') = \ldots$ brièvement par $\mathfrak{P}$ et appelons $\mathfrak{P}$ le chemin qui, dans la théorie classique, est défini comme l'ensemble des mouvements M, M', ...

Par un *segment* du polygone $P' = \{p'_1, p'_2, \ldots, p'_m\}$, nous entendons une suite de points $\{p'_h, p'_{h+1}, \ldots, p'_{j-1}, p'_j\}$. Si p'_h et p'_j

sont des points consécutifs d'un polygone $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$,

$$p'_h = p_i \quad \text{et} \quad p'_j = p_{i+1},$$

alors la suite $p'_h, \ldots, p'_j$ est appelée un segment intérieur de P' relatif à P. Nous parlons d'un segment initial de P' relatif à P si $p'_h = p'_1$ et $p'_j = p_1$; d'un segment terminal de P' relatif à P si

$$p'_h = p_n \quad \text{et} \quad p'_j = p'_m.$$

Nous appelons P' un *amincissement* de P si tout point de P' est élément d'au moins un segment [intérieur, initial, ou terminal (*)] de P' relatif à P. Par « norme de P relative à P' » nous entendons le plus grand diamètre d'un segment de P' relatif à P. Si, par exemple, dans le plan euclidien

$$a = (-1, 0), \; b = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad c = (0, 0),$$
$$d = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad e = (1, 0),$$

alors $P' = \{a, b, c, d, c, d, e\}$ est un amincissement de $P = \{a, c, e\}$. Bien que P' puisse être représenté comme somme de deux segments relatifs à P qui ont le diamètre 1, notamment de $\{a, b, c\}$ et $\{c, d, c, d, e\}$, la norme de P relative à P' est 2 : le diamètre du segment $\{a, b, c, d, c\}$.

Par *norme* du polygone P relative à une famille de polygones, nous entendrons la borne supérieure des normes de P relatives à tous les amincissements de P qui appartiennent à la famille.

Si la famille $\mathfrak{P}$ est un chemin, alors $\mathfrak{P}$ jouit des propriétés suivantes :

1° $\mathfrak{P}$ *contient des polygones dont les normes relatives à* $\mathfrak{P}$ *sont aussi petites que l'on veut;*

2° P_1 *et* P_2 *étant deux polygones de la famille* $\mathfrak{P}$, *cette dernière contient un polygone sans point d'arrêt, qui est un amincissement commun de* P_1 *et* P_2*;*

3° *La famille* $\mathfrak{P}$ *est saturée par rapport aux propriétés* 1° *et* 2° *dans le sens suivant : Il n'existe aucune famille* $\mathfrak{P}'$ *plus étendue*

(*) La considération des amincissements dont les segments initiaux et terminaux peuvent contenir plusieurs points m'a été suggérée par M. V. S. Parter.

contenant pour tout couple de polygones de $\mathfrak{P}'$ *un amincissement commun sans point d'arrêt et telle que* $\mathfrak{P}$ *contienne des polygones dont les normes relatives à* $\mathfrak{P}'$ *sont aussi petites que l'on veut*, bien qu'il existe des familles $\mathfrak{P}'$ plus étendues jouissant de la propriété 2° et contenant, elles-mêmes, des polygones dont les normes relatives à $\mathfrak{P}'$ sont arbitrairement petites.

Réciproquement, toute famille $\mathfrak{P}$ jouissant des trois propriétés ci-dessus est un chemin, c'est-à-dire il existe un mouvement sans arrêt M tel que $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(M) = \mathfrak{P}(M') = \ldots$ pour tout mouvement sans arrêt M′ qui est équivalent à M.

On peut donc définir le chemin comme *famille de polygones jouissant des propriétés* 1°, 2°, 3°. La *distance* entre les chemins $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ est $< d$ si pour tout polygone $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ de $\mathfrak{P}$ il existe un polygone $P' = \{p'_1, p'_2, \ldots, p'_n\}$ de $\mathfrak{P}'$ ayant de P une distance $< d$ et si pour tout polygone de $\mathfrak{P}'$ il existe un polygone de $\mathfrak{P}$ ayant une distance $< d$ du premier. Ici nous entendons par la distance entre deux polygones P et P′ contenant le même nombre de points, la plus grande distance entre deux points correspondants, p_i et p'_i.

6. On vérifie aisément l'énoncé du paragraphe 3 que deux mouvements équivalents ont toujours la même longueur (finie ou ∞) qu'on appelle donc la longueur du chemin au sens du paragraphe 4. Qu'un chemin au sens du paragraphe 5, défini comme famille de polygones, détermine une longueur, est évident puisque la longueur d'un mouvement ne dépend que des polygones inscrits.

Soit donné un mouvement M de longueur finie qui se produit entre les instants a et b. Dénotons le segment de M entre a et t (§ 2) par $M[a, t]$. Évidemment, nous définissons une quasi-similitude entre les intervalles $a \leqq t \leqq b$ et $0 \leqq u \leqq 1$ par la convention suivante :

(Q. S.) *t et u sont en relation pourvu que* $\dfrac{\lambda_1 M[a, t]}{\lambda_1 M} = u$, *et dans ce cas seulement.*

(Plusieurs t peuvent être en relation avec le même u, bien qu'un seul u soit en relation avec tout t entre a et b.) Voilà le mouvement M^* équivalent à M en vertu de cette quasi-similitude :

Pour tout $0 \leqq u \leqq 1$: $p_{M^*}(u) = p_M(t)$ pourvu que t et u soient en relation. Ce mouvement M^* est uniforme. Car le segment $M^*[\alpha, \beta]$ a la longueur $(\beta - \alpha)\lambda_1 M$. Nous avons donc démontré le lemme suivant :

Tout chemin de longueur finie, considéré comme classe de mouvements, en contient au moins un qui se produit d'une façon uniforme entre les instants o *et* 1.

Des définitions du paragraphe 4 il suit que les chemins $C_1, C_2, \ldots$ convergent vers le chemin C_0 si tout chemin C_n contient au moins un mouvement M_n tel que $M_1, M_2, \ldots$ converge vers M_0. De cette remarque, du lemme ci-dessus et des résultats du paragraphe 2, on déduit immédiatement le théorème connu de Carathéodory d'après lequel, *pour tout α_1 fini, l'ensemble des chemins de longueur $\leqq \alpha_1$ est compact.* En d'autres termes, si $\lambda_1 C$ dénote la longueur du chemin C, l'hypothèse 1° du principe de Tonelli est satisfaite.

C'est afin de pouvoir s'appuyer sur ce théorème de Carathéodory, que Tonelli, Hahn entre autres ont limité leurs recherches dans le calcul des variations au cas où $\lambda_1 C$ dénote la longueur de C dans l'espace euclidien qui est au fond de leurs raisonnements.

7. Or l'analyse de la démonstration que nous venons de présenter, nous a conduit (3) à la

Généralisation du théorème de Carathéodory. — *Soient donnés un espace compact et métrisable* T *et une fonctionnelle λ_1 à valeurs non négatives (finies ou ∞) définie pour tout chemin en* T *et jouissant des trois propriétés suivantes :*

A. *Additivité.* — Si le point terminal de C' coïncide avec le point initial de C'' et $C' + C''$ dénote le chemin composé (du point initial de C' au point terminal de C''), alors

$$\lambda_1(C' + C'') = \lambda_1 C' + \lambda_1 C''.$$

B. *Semi-continuité inférieure* :

$$\lim C_n = C \quad \text{entraîne} \quad \liminf \lambda_1 C_n \geqq \lambda_1 C.$$

C. *Régularité.* — Si pour tout n, C_n est un chemin de p à p_n tel que $\lim \lambda_1 C_n = 0$, alors $\lim p_n = p$.

Alors, pour tout α_1 fini, l'ensemble de tous les C *tels que* $\lambda_1 C \leqq \alpha_1$, *est compact.*

Ici, par fonctionnelle de chemins nous entendons, ou bien une fonction de mouvements qui prend toujours la même valeur pour deux mouvements équivalents, ou bien une fonction de familles de polygones jouissant des propriétés d'un chemin au sens du paragraphe 5. Les conditions A et B entraînent que le long d'un chemin C pour lequel $\lambda_1 C < \infty$, la fonctionnelle λ_1 est une fonction continue des segments. En vertu de l'hypothèse C, la convention (Q. S) du paragraphe 6 est encore une quasi-similitude. De ces faits, on déduit aisément notre théorème général.

En vertu de ce théorème, toute fonctionnelle de chemins satisfaisant aux conditions A, B, C peut nous servir comme fonctionnelle de comparaison ([4]). Remarquons que la condition C ne lie la fonctionnelle qu'à la topologie de l'espace, autre contraste avec la théorie classique où la seule fonctionnelle de comparaison considérée, la longueur euclidienne, est intimement liée à la métrique de l'espace.

8. Citons en passant un résultat que nous avons obtenu récemment ([5]) en nous basant sur le théorème du paragraphe 7. Si l'espace est λ_1-connexe et localement λ_1-connexe et la fonctionnelle non négative λ_1 est définie pour tous les chemins et jouit des propriétés A, B, C, alors λ_1 est la longueur des chemins relative à une distance particulière en T. Ici, nous disons que l'espace est λ_1-*connexe* s'il contient pour tout couple de points p, q un chemin C de p à q pour lequel $\lambda_1 C < \infty$. Nous appelons T *localement* λ_1-*connexe* si $\lim p_n = p$ entraîne l'existence d'une suite de chemins C_n de p à p_n tels que $\lim \lambda_1 C_n = 0$. La distance (en général non symétrique) relative à laquelle λ_1 est la longueur n'est rien autre que

$$d(p, q) = \text{borne inf } \lambda_1 C \quad \text{pour tous les chemins C de } p \text{ à } q.$$

Cette définition rappelle la convexification d'un espace métrique en vertu de la métrique interne. En effet, sous les conditions précisées, T est convexe pour la distance ci-dessus. Ce résultat nous fournit donc une caractérisation topologique des longueurs parmi les fonctionnelles de chemins contenus dans un espace compact métrisable : *Longueur* relative à une distance particulière *c'est* *une fonctionnelle à valeurs non négatives définie pour tous les chemins et qui est additive, semi-continue inférieurement et régulière* [6].

9. Abordons l'étude de la fonctionnelle λ que l'on veut minimiser. Dans la théorie classique, λ est une intégrale curviligne prise le long des chemins situés dans l'espace euclidien à n dimensions et admettant une tangente en presque tout point. Cette dernière propriété peut être garantie par l'hypothèse que le chemin ait une longueur finie. L'intégrant est une fonction $f(x, \dot{x})$ continue en

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{et en} \qquad \dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$$

dépendant de ce dernier système de n nombres de façon positivement semi-homogène; c'est-à-dire f satisfait à l'égalité

$$f(x, k\dot{x}) = kf(x, \dot{x})$$

pour tout x, $\dot{x}$ et tout $k > 0$. Pour le mouvement M : $x_M(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ admettant une vitesse à presque tout instant, on définit

$$\lambda M = \int_a^b f[x_M(t), \dot{x}_M(t)]\, dt.$$

La sémi-homogénéité de f en $\dot{x}$ entraîne que λ prend toujours la même valeur pour deux tels mouvements équivalents. C'est pourquoi nous appelons λ une *fonction de chemins*. Si M : $x_M(s)$ $(0 \leqq s \leqq L)$ est un mouvement uniforme (§ 2) de longueur L, alors

$$\dot{x}^2_{M_1}(s) + \ldots + \dot{x}^2_{M_n}(s) = 1$$

pour tout s. Pour l'étude des mouvements uniformes, il suffit donc de connaître f comme *fonction de points x et de directions $\dot{x}$*, c'est-à-dire de systèmes $\dot{x}$ tels que $\dot{x}_1^2 + \ldots + \dot{x}_n^2 = 1$. On a dans ce cas

$$\lambda M = \int_0^L f[x_M(s), \dot{x}_M(s)]\, ds.$$

Dans quel sens entendrons-nous dans la définition de λ le signe d'intégration ? Bien que Tonelli eût systématiquement introduit l'intégrale de Lebesgue dans le calcul des variations, nous sommes retournés [7] à une intégrale presque oubliée que Weierstrass avait définie. Elle est plus proche de l'intégrale de Riemann que de celle de Lebesgue et, en effet, est identique à la première dans le cas où $f(x, \dot{x})$ est indépendante de $\dot{x}$. Dans le cas contraire, l'intégrale de Weierstrass diffère de l'intégrale de Riemann aussi bien que de celle de Lebesgue en ce qu'on remplace dans les sommes de Riemann qui approximent l'intégrale, les dérivées $\dot{x}_{\mathrm{M}}(t)$ par des quotients de différences finies. On forme donc les sommes de Weierstrass

$$\sum_{k=1}^{m} f\left[x_{\mathrm{M}}(t_{k-1}), \frac{x_{\mathrm{M}}(t_k) - x_{\mathrm{M}}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right](t_k - t_{k-1})$$
$$= \sum_{k=1}^{m} f[x_{\mathrm{M}}(t_{k-1}), x_{\mathrm{M}}(t_k) - x_{\mathrm{M}}(t_{k-1})]$$

pour $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ ou

$$\sum_{k=1}^{m} f\left[x_{\mathrm{M}}(s_{k-1}), \frac{x_{\mathrm{M}}(s_k) - x_{\mathrm{M}}(s_{k-1})}{d\big(x_{\mathrm{M}}(s_{k-1}), x_{\mathrm{M}}(s_k)\big)}\right] d\big(x_{\mathrm{M}}(s_{k-1}), x_{\mathrm{M}}(s_k)\big)$$

pour $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = \mathrm{L}$, où $d(p, q)$ dénote la distance euclidienne entre les points p et q. On définit $\lambda\mathrm{M}$ comme la limite (si elle existe) de ces sommes lorsque $\max(t_k - t_{k-1})$ ou $\max(s_k - s_{k-1})$ converge vers 0.

Considérons l'exemple de la longueur dans le plan, c'est-à-dire le cas où $f(x, \dot{x}) = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$. Une transformation élémentaire de la somme de Weierstrass met en évidence que cette dernière est égale à la longueur euclidienne du polygone inscrit

$$\{x_{\mathrm{M}}(t_0), x_{\mathrm{M}}(t_1), \ldots, x_{\mathrm{M}}(t_n)\}.$$

Pour cet intégrant, la limite (finie ou ∞) des sommes de Weierstrass existe, quel que soit le mouvement M, et la valeur de la limite est égale à la longueur du mouvement au sens classique (formulé pour la première fois, il semble, par Duhamel). Pour cet intégrant, l'intégrale de Weierstrass est donc d'une généralité absolue : $\int_a^b \sqrt{\dot{x}_{\mathrm{M}_1}^2(t) + \dot{x}_{\mathrm{M}_2}^2(t)}\, dt$ existe pour *tout* chemin, en constraste avec l'intégrale de Lebesgue qui n'existe que si le mouvement admet une vitesse à presque tout instant, et le chemin admet une tangente en presque tout point. Mais, même si cette condition est remplie, l'intégrale de Lebesgue n'est égale à la longueur que si la fonction $x_M(t)$ est absolument continue. Pour la courbe connue de Cantor joignant les points (0, 0) et (1, 1) du plan euclidien, qui contient une suite dénombrable de segments horizontaux et qui ne croît que sur les points du discontinu de Cantor, l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{\dot{x}_{M_1}^2(t)+\dot{x}_{M_2}^2(t)}\,dt$ au sens de Lebesgue est égale à 1, ce qui est inférieur à la longueur $\sqrt{2}$ du segment droit entre les points (0, 0) et (1, 1). La même intégrale prise au sens de Weierstrass prend la valeur 2 qui est, en effet, la limite des longueurs euclidiennes de polygones inscrits dans la courbe de Cantor.

Nous pourrions multiplier les exemples où l'intégrale de Weierstrass est plus générale que celle de Lebesgue et prend des valeurs préférables du point de vue géométrique ([7a]).

10. C'étaient sans doute ces propriétés heureuses de l'intégrale de Weierstrass qui suggérèrent à M. Bouligand ([8]) d'en faire l'objet de ses méthodes directes en calcul des variations applicables aux chemins situés dans l'espace euclidien. Dans notre théorie métrique nous avions encore une autre raison pour réintroduire la définition de Weierstrass.

Soit donné un espace topologique compact métrisable. Afin de pouvoir formuler d'une façon plus simple les hypothèses qui sont au fond de la théorie, nous supposerons qu'il soit donné une distance $d(p, q)$ particulière en vertu de laquelle l'espace est métrique. Mais cette distance ne jouera aucun rôle métrique et l'on pourra la remplacer par une distance quelconque pourvu que cette dernière soit compatible avec la topologie de l'espace. Nous appellerons donc *d distance topologique*.

D'ailleurs, nous supposons qu'à toute paire de points soit associée une distance $\delta_1(p, q)$ qui n'est pas nécessairement symétrique, mais qui est compatible avec la topologie de l'espace. La longueur λ_1 des polygones et des chemins dérivée de cette distance δ_1 sera la fonctionnelle de comparaison.

Si l'espace n'est pas vectoriel, on ne peut pas, en général, parler de directions, ni, par conséquent, de fonctions de points et de directions. Cependant, on peut toujours considérer des fonctions de points et de couples ordonnés de points non identiques, $f(p; q, r)$ pour $q \neq r$. Nous supposerons qu'outre la distance δ_1 une telle fonction $f(p; q, r)$ soit donnée ([8a]). Alors, à tout point p, on peut associer un écart défini pour les couples ordonnés de points q, r

$$\delta_p(q, r) = \begin{cases} f(p; q, r)\,\delta_1(q, r) & \text{si } q \neq r, \\ 0 & \text{si } q = r. \end{cases}$$

Ce nombre sera appelé *l'écart, tangentiel en p, du point q au point r*. Les écarts, tangentiels en p, du point p même aux points r seront dénotés par

$$\delta(p, r) = \delta_p(p, r) = f(p; p, r)\,\delta_1(p, r) \quad \text{pour} \quad p \neq r; \qquad \delta(p, p) = 0.$$

Avec l'écart δ qui est, pour ainsi dire, la distance δ_1 tordue par f, on peut former la longueur λP de tout polygone P donné.

Pour tout chemin C donné, nous définissons la *longueur supérieure* $\bar{\lambda} C$ comme la borne supérieure des nombres L tels qu'il existe une suite distinguée de polygones de C dont les longueurs convergents vers L. (Il va sans dire qu'une suite de polygones de C est dite distinguée si les normes des polygones relatives à C convergent vers 0.) La *longueur inférieure* $\underline{\lambda} C$ est définie d'une façon analogue. Si pour un chemin C ces deux longueurs sont égales, alors leur valeur commune est appelée la *longueur* de C et elle est dénotée par λC. Il est clair que cette notion représente une généralisation de l'intégrale curviligne de f le long du chemin C au cas où l'espace est euclidien, pourvu que l'intégrale soit prise au sens de Weierstrass.

Deux problèmes fondamentaux se présentent : Étant données la distance δ_1 et la fonction f, sous quelles conditions peut-on affirmer qu'un chemin donné a une longueur ? Et quelles conditions sont suffisantes pour que cette fonctionnelle de chemins soit semi-continue inférieurement ?

11. Considérons le cas principal où C est un chemin tel que $\bar{\lambda} C$ soit $< \infty$ et que la borne supérieure F des nombres $f(p; q, r)$ formés pour les points p appartenant à C, soit $< \infty$. Soit donné un nombre ε positif, mais aussi petit que l'on veut. Nous choisissons un polygone $P = \{p_0, \ldots, p_n\}$ de C dont la longueur λP soit $> \bar{\lambda} C - \frac{\varepsilon}{3}$.

Pour résoudre les deux problèmes principaux, il faut que nous démontrions que, pour tout amincissement Q de tout polygone $P' = \{p'_0, \ldots, p'_n\}$ suffisamment proche de P, la longueur λQ ne soit pas beaucoup plus petite que $\bar{\lambda} C$, par exemple, $\lambda Q > \bar{\lambda} C - \varepsilon$, c'est-à-dire $> \lambda P - 2\frac{\varepsilon}{3}$. Pour la solution du premier problème principal (la démonstration de l'existence de λC), il suffit d'ailleurs de considérer des polygones Q et P' appartenant à C.

Supposons que P' soit si proche de P que

$$\delta_1(p_i, p'_i) < \frac{\varepsilon}{6nF} \quad \text{et} \quad \delta_1(p'_i, p_i) < \frac{\varepsilon}{6nF}.$$

Si

$$Q_i = \{q_{i0} = p'_i, q_{i1}, \ldots, q_{in_i} = p'_{i+1}\}$$

est le segment de Q entre p'_i et p'_{i+1}, nous formons les polygones auxiliaires

$$Q_i^* = \{p_i, q_{i0}, \ldots, q_{in_i}, p_{i+1}\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

A cause de la proximité de P' et de P, la différence entre $\lambda Q = \Sigma \lambda Q_i$ et $\Sigma \lambda Q_i^*$ est $< \frac{\varepsilon}{3}$. Il suffit donc de démontrer que

$$\Sigma \lambda Q_i^* > \lambda P - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Or, en vertu de certaines hypothèses sur la continuité de f dont nous parlerons au paragraphe 12, nous pouvons supposer que

$$|f(p; q, r) - f(p'; q, r)| < \zeta$$

pourvu que $d(p, p')$ soit suffisamment petit. Si l'on a choisi le polygone P suffisamment fin (c'est-à-dire la norme de P relative à C suffisamment petite) et si Q est assez proche de P pour que tout Q_i^* ait un diamètre topologique suffisamment petit, alors

$$|\lambda Q_i^* - \lambda_{p_i} Q_i^*| < \zeta \lambda_1 Q_i^* \quad \text{et} \quad |\Sigma \lambda Q_i^* - \Sigma \lambda_{p_i} Q_i^*| < \zeta \Sigma \lambda_1 Q_i^* < \zeta(\Sigma \lambda_1 Q_i + \varepsilon).$$

Si, pour un nombre α_1 fini (mais aussi grand que l'on veut) donné à l'avance, on se borne à la considération de polygones Q pour lesquels $\lambda_1 Q < \alpha_1$ et si l'on choisit $\zeta < \frac{\varepsilon}{4\alpha_1}$, on peut donc assurer l'inégalité

$$\Sigma \lambda Q_i^* > \Sigma \lambda_{p_i} Q_i - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Supposons d'ailleurs que tout écart tangentiel δ_p soit triangulaire,

$$\delta_p(p, q) + \delta_p(q, r) \geqq \delta_p(p, r)$$

et, par conséquent, satisfasse à l'inégalité polygonale

$$\lambda_{p_i} Q_i^* \geqq \delta_{p_i}(p_i, p_{i+1}).$$

Il s'ensuit que

$$\Sigma \lambda_{p_i} Q_i^* \geqq \Sigma \delta(p_i, p_{i+1}) = \lambda P.$$

Nous avons donc obtenu l'inégalité désirée

$$\lambda Q > \bar{\lambda} C - \varepsilon.$$

12. Résumons les hypothèses que l'on a admises pour obtenir le résultat du paragraphe **11**. D'abord on a supposé que la longueur supérieure $\bar{\lambda} C$ était finie. La fonction f devait être bornée et l'on n'a considéré que des polygones dont la longueur relative à la distance de comparaison soit inférieure à un nombre fini α_1 donné à l'avance.

Les deux hypothèses principales concernent la continuité de $f(p; q, r)$ par rapport à p et l'inégalité triangulaire pour les écarts tangentiels. Comme nous l'avons démontré ailleurs (9), des points exceptionnels sont admissibles par rapport à ces deux hypothèses pourvu que ces points exceptionnels ne soient pas trop nombreux.

Quant à la continuité, il suffit d'admettre l'hypothèse suivante qui rappelle la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de l'intégrale de Riemann : *L'ensemble des points du chemin* C *où l'oscillation de f est positive, est contenu dans une suite de segments de* C *dont la somme des diamètres relatifs à la distance de comparaison soit aussi petite que l'on veut.*

Par oscillation de f au point p, on entend la limite, lorsque d tend vers o, des nombres $|f(p'; q, r) - f(p''; q, r)|$ formés pour les points p', p'', q, r à des distances topologiques $< d$ du point p. On doit ajouter l'hypothèse (9) que *tout point où f a une oscillation positive, soit contenu dans un voisinage exempt de polygones cycliques* R (c'est-à-dire dont le point initial et le point terminal coïncident) *et tels que* $\lambda R < 0$. Comme MM. Aronszajn et McShane l'on remarqué (10), indépendamment l'un de l'autre, la continuité de f peut être remplacée par *la semi-continuité inférieure.* De même, dans l'énoncé concernant les points exceptionnels l'oscillation peut être remplacée par l'*oscillation inférieure* de f en p :

la limite supérieure des nombres $f(p; q, r) - f(p'; q, r)$ formés pour les points p', q, r à distances topologiques $< d$ de p.

En ce qui concerne l'inégalité triangulaire des écarts tangentiels, deux voies s'ouvrent à la recherche : On peut étudier la signification de l'inégalité, telle quelle, dans le cas ordinaire où l'espace est vectoriel. Et l'on peut tenter, lorsque l'espace ne satisfait pas l'inégalité triangulaire, de mesurer de combien il s'en écarte au point p, de même que, par l'oscillation au point p d'une fonction f, on mesure de combien elle s'écarte de la continuité.

L'une et l'autre de ces voies mènent à des résultats assez étendus pour justifier que des chapitres spéciaux leur soient consacrés.

13. Retournons d'abord à l'espace euclidien et à une fonction $f(x, \dot{x})$ de points et de directions au sens du paragraphe 9. Nous obtenons l'écart $\delta_x(y, z)$, tangentiel en x, de y à z $(\neq y)$ en formant ([1a]) $f\left(x; \overrightarrow{yz}\right) d(y, z)$ où $\overrightarrow{yz}$ dénote la direction de y à z, ou bien le vecteur $x + \frac{z - y}{|z - y|}$ sur la sphère de rayon 1 et de centre x. Pour tout z, cet écart $\delta_x(y, z)$ peut être interprété comme la norme du vecteur $z - y$ relative à x. Nous posons $\delta_x(y, y) = 0$. De cette façon, étant donné x, tout vecteur a une norme $|v| = \delta_x(y, z)$, où y et z sont des vecteurs quelconques tels que $z - y = v$. Évidemment cette norme jouit de la propriété suivante :

(I) $|kv| = k|v|$ pour tout vecteur v et tout nombre $k > 0$.

En particulier, o (le vecteur nul satisfaisant $v + 0 = v$ pour tout v) a la norme 0. On ne peut pas, en général, affirmer que toute norme soit non négative ni que o soit le seul vecteur dont la norme est 0. S'il y a une direction $\dot{x}$ telle que l'on ait $f(x, \dot{x}) < 0$ ou $= 0$, alors les normes des vecteurs en cette direction sont négatives ou 0. On ne peut pas dire, non plus, que la norme soit symétrique, car on a $|v| \neq |-v|$, pourvu que dans la direction $\dot{x}$ du vecteur v on ait

$$f(x, \dot{x}) \neq f(x, -\dot{x}).$$

Or si, outre l'hypothèse (I), les hypothèse suivantes sont satisfaites :

(II) $|v| \geqq 0$ pour tout vecteur v;
(III) si $v \neq 0$, alors $|v| \neq 0$;
(IV) $|-v| = |v|$ pour tout v;

alors, d'après un théorème célèbre de Minkowski, l'inégalité triangulaire

$$|v+w| \leqq |v| + |w|$$

équivaut à la convexité du corps d'étalonnage qui est l'ensemble des vecteurs dont la norme ne surpasse pas 1. Dans les espaces vectoriels normés introduits en 1922 par Banach, Hahn et Wiener, la norme jouit des mêmes propriétés (I), (II), (III), (IV) et satisfait à l'inégalité triangulaire. Le premier problème auquel nous avons fait allusion à la fin du paragraphe 12 suggère donc une extension du théorème de Minkowski et une généralisation de la notion d'espaces vectoriels normés par la suppression des hypothèses (II), (III), (IV). Le chapitre VI sera consacré à une étude systématique des espaces vectoriels normés généralisés.

14. Si un espace ne satisfait pas à l'inégalité triangulaire au point p, l'espace contient des points q et r tels que

$$\delta(p, q) + \delta(q, r) < \delta(p, r).$$

Mais il est difficile de mesurer de combien l'espace dévie de l'inégalité. Cependant, l'inégalité polygonale

$$\sum_{i=1}^{m} \delta(p_{i-1}, p_i) \geqq \delta(p_0, p_m),$$

bien qu'elle équivaille à l'inégalité triangulaire, se prête à une telle mesure. La quantité $\Sigma\delta(p_{i-1}, p_i)$ est la *longueur* λP du polygone $P = \{p_0, \ldots, p_m\}$, tandis que $\delta(p_0, p_m)$ est ce que nous appelons la *corde* χP de P. L'inégalité polygonale peut donc être exprimée dans la forme $\lambda P \geqq \chi P$ pour tout polygone P. Or, on peut affaiblir cette inégalité en supposant qu'on n'ait que $\lambda P \geqq \chi P - \varkappa |\chi P|$ pour un nombre $\varkappa$ positif. Nous avons appelé ([1a]) *contraction* de P et nous avons dénoté par $\varkappa P$ le nombre $\frac{\chi P - \lambda P}{|\chi P|}$. Nous dirons que l'espace a la contraction $\varkappa(p)$ au point p si $\varkappa(p)$ est la limite, lorsque d tend vers o, des bornes supérieures des contractions des polygones commençant en p et contenus dans une sphère de rayon topologique d et de centre p.

L'hypothèse que tout écart tangentiel soit triangulaire peut être affaiblie dans les démonstrations de l'existence et de la semi-continuité de λC. On peut admettre l'existence de points de contraction positive pourvu que ces points ne soient pas trop nombreux ([9]).

Mais l'idée de contraction est intéressante en soi, car elle nous permet de formuler des conditions qui sont à la fois suffisantes et nécessaires pour qu'un chemin ait une longueur finie relative à une distance extrêmement générale. Le chapitre V sera consacré à une étude systématique de ces questions.

15. Le hypothèses que f ne soit pas trop discontinue et que les écarts tangentiels ne dévient pas trop de l'inégalité triangulaire, ont été admises afin de pouvoir démontrer que pour tout α_1 fini la fonctionnelle (l'intégrale curviligne de f) est semi-continue inférieurement sur l'ensemble des chemins dont les longueurs de comparaison sont $\leqq \alpha_1$; en d'autres termes pour garantir la condition 3° du principe de Tonelli. Discutons en terminant le rôle de la condition 2° de ce principe, d'après laquelle, pour tout α fini, la longueur de comparaison est bornée supérieurement sur l'ensemble des chemins pour lesquels la fonctionnelle prend une valeur $\leqq \alpha$.

Hahn a remarqué que si cette condition n'est pas satisfaite, une classe fermée de chemins de longueur finie n'en contient pas nécessairement un qui donne à la fonctionnelle une valeur minima.

Il a établi cette remarque en présentant deux exemples ([11]) qui, bien qu'ils appartiennent, à notre avis, aux plus intéressantes découvertes dans le calcul des variations, ne sont apparemment pas très connus.

Dans l'un des exemples, on considère dans le plan avec les coordonnées polaires (R, Θ), l'intégrale

$$\int \frac{\sqrt{\dot{R}^2(t) + R^2(t)\dot{\Theta}^2(t)}}{R^6(t)}\,dt.$$

Parmi les courbes joignant les points du cercle $R = 1$ au point $R = \infty$, ce sont les rayons $\Theta = \text{const.}$ qui donnent à l'intégrale sa valeur minima $\left(\text{qui est } \frac{1}{5}\right)$. Si par $r = \frac{1}{R}$, $\theta = \Theta + R$ on transforme l'extérieur du cercle $R = 1$ en son intérieur, les rayons $\Theta = \text{const.}$ sont transformés en spirales de longueur infinie avec le pôle $r = 0$

comme point asymptote. Parmi les courbes joignant le pôle à un point du cercle $r = 1$, ce sont évidemment ces spirales qui donnent à l'intégrale transformée

$$\int r^3(t)\sqrt{\left(1+r^2(t)\right)\dot{r}^2(t)+2r(t)\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)+r^4(t)\dot{\theta}^2(t)}\,dt,$$

sa valeur minima $\left(\text{qui est encore } \frac{1}{5}\right)$. Hahn en conclut qu'entre le pôle et le point $r = 1$, $\theta = 0$, il n'existe aucun chemin de longueur finie qui minimise l'intégrale.

Remarquons que pourtant il existe un chemin de longueur infinie qui minimise l'intégrale, à savoir la spirale. De ce point de vue, l'exemple de Hahn est comparable au fameux exemple de Goldschmidt d'une ligne brisée qui minimise l'aire de la surface de révolution. En ce cas encore les géomètres auraient pu affirmer la non-existence d'une courbe minimisante s'ils s'étaient limités à la considération de courbes admettant une tangente en tout point. Au contraire, l'exemple de Goldschmidt inspira l'extension du domaine des courbes considérées en calcul des variations de façon à y embrasser les courbes composées d'un nombre fini d'arcs admettant une tangente en tout point. Plus récemment Tonelli, grâce à l'introduction de l'intégrale curviligne de Lebesgue, a étendu le domaine davantage en y admettant tous les chemins de longueur finie qui sont donnés par des fonctions absolument continues du paramètre. Grâce à l'introduction de l'intégrale de Weierstrass, nous avons encore élargi le domaine de chemins admissibles, comme on a remarqué au paragraphe 9. L'exemple de Hahn met en relief l'importance de cette dernière extension en montrant que la solution même de problèmes plans assez élémentaires peut se trouver parmi les chemins de longueur infinie. Évidemment, l'intégrale de Hahn peut être traduite en fonction algébrique très simple de x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$.

L'autre exemple de Hahn, interprété de cette façon, met en évidence la possibilité encore plus étonnante d'une intégrale algébrique minimisée par des spirales admettant un cercle asymptote, ce qui nécessite une extension nouvelle du domaine des objets considérés. D'abord on pourrait penser qu'il s'agit simplement de chemins généralisés qui sont les images continues des intervalles fermés, semi-ouverts ou ouverts, $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1)$. Mais dans ce qui suit nous présenterons un exemple analogue d'un mouvement généralisé qui cependant dépasse, pour ainsi dire, le cercle asymptote et n'est pas l'image continue d'un intervalle quel qu'il soit.

En posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, nous considérerons la fonction

$$f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - \frac{\dot{x}[x(r-1)^2+yr]+\dot{y}[y(r-1)^2-xr]}{r\sqrt{r^2+(r-1)^4}}.$$

Étant de la forme

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} + \dot{x}\sin\varphi(x, y) - \dot{y}\sin\varphi(x, y),$$

la fonction f ne prend que des valeurs non négatives. En tout point (x, y), il n'y a qu'une seule direction dans laquelle f prend la valeur o, à savoir la direction $\varphi(x, y)$ de la tangente au point (x, y) d'un mouvement $M_k(0 \leqq k < 2\pi)$ généralisé

$$M_k \begin{cases} \left.\begin{aligned} x &= (t+1)\cos\left(k-\frac{1}{t}\right) \\ y &= (t+1)\sin\left(k-\frac{1}{t}\right) \end{aligned}\right\} & (-1 \leqq t < 0 \text{ et } 0 < t \leqq 1), \\ x^2+y^2 = 1 & \text{pour } t = 0. \end{cases}$$

Si $x^2+y^2 \neq 1$, il existe exactement une spirale M_k passant par le point (x, y). Tous les mouvements M_k ont le cercle $x^2+y^2=1$ comme cercle asymptote. Parcourant ce cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, on a de même $f=0$. Par conséquent, le long de tout mouvement généralisé M_k (le cercle asymptote inclus), on a $\int f\,dt = 0$. Par exemple, on peut joindre le pôle $r=0$ au point $r=2$, $\theta=-1$ par le mouvement M_0 qui donne à l'intégrale la valeur o, tandis que tout autre mouvement entre ces points lui donne une valeur positive.

Il est facile de modifier cet exemple de la façon suivante : Il existe une intégrale curviligne minimisée par un continu irréductible entre le pôle et le point $r=1$, $\theta=0$ qui contient comme cercles asymptotes tous les cercles $r=c$ dont les rayons appartiennent au discontinu triadique de Cantor. Outre cette infinité indénombrable de cercles, C contient une infinité dénombrable de spirales : une spirale entre tout couple de cercles dont les rayons bordent un intervalle contigu au discontinu triadique. Tout autre continu irréductible entre le pôle et le point (1, 0) donne à l'intégrale une valeur supérieure.

Évidemment, çet exemple nécessite la considération en calcul des variations d'au moins ceux des continus C irréductibles entre deux points pour lesquels la somme des arcs libres (qui sont ouverts en C) est dense en C. Du point de vue mathématique, c'est une extension radicale de la notion d'objet de comparaison admissible exigeant peut-être même des développements de la théorie d'intégration. Pourtant, on se demande si la physique théorique n'en pourrait pas profiter [12].

CHAPITRE V.

Une théorie générale de la longueur.

En parlant de méthodes métriques en calcul des variations, nous prenions comme point de départ l'intégrale curviligne que le but traditionnel de cette branche de l'analyse est de minimiser. Peu à peu nous avons généralisé cette fonctionnelle jusqu'à ce qu'elle apparaisse comme la longueur λ relative à un écart δ très général, notamment relative à une distance δ_1 de comparaison, tordue par une fonction f de points et de paires de points. Dans le présent chapitre, nous nous proposons de développer une théorie générale de la longueur [1] et dans ce but nous partirons, pour ainsi dire, de l'autre bout de la voie. Nous commencerons avec un minimum d'hypothèses et nous en ajouterons d'autres lorsque nous en aurons besoin.

1. Nous supposons qu'il soit donné un espace topologique compact métrisable et une fonction $\delta(p, q)$ de couples ordonnés de points qui n'est assujettie qu'à une seule restriction, la faible condition suivante :

I. *Si* $\lim p_n = p$, *alors* $\lim \delta(p_n, p) = 0$ *et* $\lim \delta(p, p_n) = 0$.

Parfois une moitié de cette condition :

I^+. $\lim p_n = p$ *entraîne* $\limsup \delta(p_n, p) \leqq 0$ *et* $\limsup \delta(p, p_n) \leqq 0$,

ou la condition analogue I^- serait suffisante, mais nous n'insisterons pas sur ce point. Ce qui est important, c'est que $\delta(p, q)$ peut être négative ou $= 0$, même si $p \neq q$, et qu'on ne suppose ni la symétrie de δ, ni la validité de l'inégalité triangulaire. La seule propriété traditionnelle de la distance qui découle de l'hypothèse I, c'est que $\delta(p, p) = 0$ pour tout p.

Quant à la topologie de l'espace, il est souvent avantageux de la décrire au moyen d'une distance $d(p, q)$ qui cependant peut être remplacée par une distance quelconque compatible avec la topologie de l'espace et qui sera donc appelée la *distance topologique*.

2. Étant donné un polygone $P = \{p_0, \ldots, p_n\}$, nous définissons les quantités suivantes :

Longueur :

$$\lambda P = \Sigma \delta(p_i, p_{i+1});$$

Longueur absolue :

$$|\lambda| P = \Sigma |\delta(p_i, p_{i+1})|;$$

Corde :

$$\chi P = \delta(p_0, p_n);$$

Contraction :

$$\varkappa P = \begin{cases} \dfrac{\chi P - \lambda P}{|\chi P|} & \text{si} \quad \chi P \neq 0, \\ +\infty & \text{si} \quad \chi P = 0 > \lambda P, \\ -\infty & \text{si} \quad \chi P = 0 < \lambda P, \\ \text{indéfinie} & \text{si} \quad \chi P = 0 = \lambda P. \end{cases}$$

P a une contraction positive si le polygone viole l'inégalité triangulaire (c'est-à-dire si la longueur est inférieure à la corde), et dans ce cas seulement.

3. Soit donné un chemin C comme famille de polygones contenus dans l'espace ou comme ensemble de mouvements équivalents qui s'y produisent. On définit $\bar{\lambda} C$, $\underline{\lambda} C$ et λC (si cette longueur existe) de la façon habituelle.

Énumérons quelque cas spéciaux de cette notion générale de longueur. Supposons d'abord que l'espace soit l'ensemble des nombres x appartenant à l'intervalle $[a, b]$ et que C soit la famille de tous les polygones

$$a \leqq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqq b.$$

Si une fonction f est définie dans l'intervalle $[a, b]$ et nous posons

$$\delta(x, y) = f(x)(y - x),$$

alors $\bar{\lambda}C$ est l'intégrale supérieure de f au sens de *Darboux-Riemann*, et λC est l'intégrale *riemannienne* $\int_a^b f(x)\,dx$. En posant

$$\delta(x, y) = |f(y) - f(x)|,$$

nous obtenons comme longueur la *variation* de f dans l'intervalle $[a, b]$. L'intégrale de *Stieltjes* $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ est la longueur résultant de la distance ([1a])

$$\delta(x, y) = f(x)[g(y) - g(x)].$$

Dans le cas où l'espace est un intervalle, toute longueur est une intégrale au sens de *Burkill*. Évidemment, la longueur peut être formée pour un chemin quelconque (défini comme famille de polygones jouissant des propriétés mentionnées au paragraphe 5 du chapitre précédent) contenu dans un espace compact et métrisable quelconque. Par exemple, étant donnée une fonction $f(x, \dot{x})$ de points et de directions d'un espace vectoriel, on retrouvera aisément en λC une intégrale de *Weierstrass* en posant

$$\delta(x, y) = f\left(x, \frac{y - x}{|y - x|}\right)|y - x|.$$

Et si dans un espace métrique une fonction de points et de couples de points est donnée, λC sera notre *généralisation métrique* de l'intégrale de Weierstrass pourvu que l'on pose

$$\delta(p, q) = f(p; p, q)\,d(p, q).$$

4. On définit la *longueur absolue supérieure* $\overline{|\lambda|}C$ comme la limite supérieure des nombres L tels qu'il existe une suite distinguée de polygones de C pour lesquels les longueurs absolues convergent vers L.

Montrons d'abord qu'il existe *un chemin dont la longueur est finie bien que la longueur absolue supérieure soit* ∞, un phénomène comparable à l'existence d'une série qui converge sans converger absolument ([2]). Le chemin de l'exemple est le plus simple : l'ensemble de tous les polygones $\{0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq 1\}$ contenus dans l'intervalle $[0, 1]$. La distance est définie de la façon suivante : Posons

$$f(0) = f(2) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad f(1) = -\frac{1}{3}.$$

Soit x d'abord un nombre rationnel d'ordre n dans le système triadique, c'est-à-dire

$$x = \frac{i_1}{3} + \frac{i_2}{3^2} + \ldots + \frac{i_n}{3^n}, \qquad \text{où tout} \quad i_k = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \quad \text{ou} \quad 2$$

et

$$i_n \neq 0 \qquad \text{si} \quad n > 1.$$

Alors nous posons

$$\delta\left(x, x + \frac{1}{3^n}\right) = f(i_1)f(i_2)\ldots f(i_n).$$

Si x et $y > x$ sont deux nombres rationnels d'ordre $\leqq n$ (mais pas tous les deux d'ordre n) dans le système triadique, alors nous posons

$$\delta(x, y) = \delta\left(x, x + \frac{1}{3^n}\right) + \delta\left(x + \frac{1}{3^n}, x + \frac{2}{3^n}\right) + \ldots + \delta\left(y - \frac{1}{3^n}, y\right).$$

Enfin, si x et y ($> x$) sont deux nombres quelconques de l'intervalle $[0, 1]$, nous posons

$$\delta(x, y) = \lim \delta(x_n, y_n),$$

où x_n et y_n sont des nombres rationnels avec les limites respectives x et y. On voit aisément que $\lambda C = 1$, bien que $\bar{\lambda} C = \infty$. Pour tout nombre fini L (0 inclus), il est facile de modifier l'exemple, de sorte que

$$\lambda C = L \qquad \text{et} \qquad \bar{\lambda} C = \infty.$$

5. Dans cette situation extrêmement générale, notamment en ne supposant concernant δ rien que l'hypothèse I, nous allons formuler une condition qui est à la fois nécessaire et suffisante pour qu'un chemin C de longueur absolue supérieure finie ait une longueur finie ([3]). Nous obtiendrons cette condition en démontrant la nécessité d'une condition plus forte qui est une conséquence de l'existence de λC finie, sans faire allusion au fait que $\overline{|\lambda|} C$ soit finie.

Puis, nous esquisserons les raisons pour lesquelles une moitié de la condition nécessaire est suffisante pour l'existence d'une longueur λC finie, pourvu que $\overline{|\lambda|} C$ soit finie.

Deux notions auxiliaires de nature topologique nous seront utiles en formulant la condition dont nous avons parlé. Pour simplifier leurs définitions, nous préciserons ces notions pour un mouvement M : $p_M(t)\,(a \leqq t \leqq b)$ du chemin C. Par *étendue* du polygone $\{p(t_1), \ldots, p(t_n)\}$, où $a \leqq t_1 < \ldots < t_n \leqq b$, nous entendrons le diamètre topologique du segment $M[t_1, t_n]$ ou bien la borne supérieure des diamètres topologiques des polygones de ce segment.

Nous dirons que deux polygones

$$\{p(t_1), \ldots, p(t_m)\} \quad \text{et} \quad \{p(u_1), \ldots, p(u_n)\}$$

sont *non chevauchants* si les intervalles ouverts (t_1, t_m) et $(u_1 u_n)$ sont disjoints.

6. Voilà une condition nécessaire qui est satisfaite si un nombre fini λC existe :

Pour tout $\varepsilon > 0$ *et tout* $\varkappa > 0$, *il existe un nombre* $d(\varepsilon, \varkappa) = d > 0$ *avec la propriété suivante : si* $Q_1, \ldots, Q_k$ *sont des polygones non chevauchants de* C, *alors on a pour tout* Q_i *d'étendue* $< d$ *et de contraction* $> \varkappa$

$$\Sigma\,|\chi Q_i| < \varepsilon, \tag{1}$$

$$|\Sigma \lambda Q_i| < \varepsilon. \tag{2}$$

La dernière inégalité contient les deux inégalités suivantes :

$$\Sigma \lambda Q_i > -\varepsilon \tag{2+}$$

et

$$\Sigma \lambda Q_i < \varepsilon. \tag{2−}$$

Supposons que la condition (1) soit violée pour ε_0 et $\varkappa_0$. Alors on peut compléter les polygones $Q_1, \ldots, Q_k$ qui la violent en un polygone Q de norme $< d$ relative à C. Si de Q on omet les points intérieurs de $Q_1, \ldots, Q_k$, on obtient un polygone P qui, tout en ayant une norme $< d$ relative à C, a une longueur surpassant celle de Q d'au moins $\frac{\varkappa_0 \varepsilon_0}{2}$; cela montre qu'aucun nombre fini λC ne peut exister. Si la condition (1) est satisfaite, mais la condition (2) violée, alors pour les polygones Q et P ci-dessus, la longueur du dernier surpasse celle du premier d'au moins $\frac{\varepsilon_0}{2}$.

7. Si $\overline{|\lambda|}\,C$ est finie, alors la condition suivante est suffisante pour l'existence d'un nombre λC fini :

Pour tout ε *et* $\varkappa$, *il existe un nombre* $d(\varepsilon, \varkappa) = d > 0$ *tel que les conditions* (1) *et* (2^+) *soient satisfaites.*

La suffisance de cette condition est évidente lorsqu'on a démontré qu'elle entraîne le lemme suivant :

Soient ζ *et* $\varkappa$ *deux nombres positifs donnés. Pour tout polygone* P *dont la norme relative à* C *est suffisamment petite, il existe un nombre* $\nu > 0$ *tel que pour tout polygone* Q *d'une norme* $< \nu$ *relative à* C *on ait*

$$\lambda Q > \lambda P - \varkappa\,|\lambda|\,P - \zeta.$$

La démonstration de ce lemme ressemble dans sa phase initiale à la démonstration du paragraphe 11 du chapitre IV. Étant donné un polygone $P = \{p_0, \ldots, p_n\}$, tout polygone Q dont la norme est suffisamment petite peut être décomposé en segments $Q_1, \ldots, Q_n$ dont on dérive les polygones auxiliaires $Q_1^*, \ldots, Q_n^*$. Nous formons la somme $\Sigma' \lambda Q_i^*$ pour tous ceux des polygones Q_i^* qui sont d'une contraction $> \varkappa$. En vertu des hypothèses (1) et (2^+), cette somme est $> -\frac{\zeta}{2}$. La somme $\Sigma'' \lambda Q_i^*$ formée pour les Q_i^* de contraction $\leqq \varkappa$, est, comme on le démontre aisément, $> \lambda P - \varkappa\,|\lambda|\,P - \frac{\zeta}{2}$. De là, l'inégalité désirée du lemme.

8. En résumé : *Afin qu'un chemin* C *de longueur absolue supérieure finie ait une longueur finie, il est nécessaire et suffisant que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $\varkappa > 0$ *il existe un nombre* $d(\varepsilon, \varkappa) = d > 0$ *avec la propriété suivante : Si* $Q_1, \ldots, Q_k$ *sont des polygones non chevauchants de* C, *alors on a pour tout* Q_i *d'étendue* $< d$ *et de contraction* $> \varkappa$

$$\Sigma\,|\chi Q_i| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \Sigma\,\lambda Q_i > -\varepsilon.$$

De l'exemple présenté au paragraphe 3, il résulte que l'hypothèse que $\overline{|\lambda|}\,C$ soit finie ne peut pas être omise dans cet énoncé.

Remarquons que ce théorème est un des exemples pas trop nombreux dans cette branche de l'analyse d'une condition qui est à la fois nécessaire et suffisante.

Une condition suffisante pour que la fonctionnelle λ soit semi-continue inférieurement s'obtient de la condition suffisante pour l'existence de λC en y admettant comme $Q_1, \ldots, Q_k$ non seulement des polygones de C, mais des polygones dont le point initial et le point terminal appartiennent à C.

9. Si l'on compare la théorie générale développée dans ce chapitre avec la dernière phase de la théorie du chapitre IV, on s'aperçoit de deux différences.

D'abord la condition présente ne fait aucune allusion à une distance de comparaison. Il est improbable que l'on puisse formuler une condition qui soit à la fois nécessaire et suffisante lorsqu'on introduit une distance de comparaison. D'autre part, on peut formuler des conditions suffisantes pour qu'un nombre fini λC existe et que la fonctionnelle λ soit semi-continue inférieurement dans la famille de chemins de longueur $\leqq \alpha_1$, où α_1 est un nombre fini donné, conditions qui comprennent celles du chapitre IV comme cas spéciaux.

Dans le chapitre présent, la distance δ n'a pas été dérivée des écarts tangentiels. Or, on peut supposer qu'à tout point p un écart $\delta_p(q, r)$ soit associé sans supposer que cet écart soit une distance δ_1 tordue par une fonction f. On peut poser $\delta(p, r) = \delta_p(p, r)$ et dériver la fonctionnelle λ de cet écart δ. En ce cas, on peut limiter les hypothèses concernant la contraction aux écarts tangentiels. Les hypothèses de continuité prennent la forme peu commune que $\delta(q, r)$ ne soit pas beaucoup plus grand que $\delta_p(q, r)$ pourvu que la distance topologique entre p et q soit suffisamment petite.

CHAPITRE VI.

Espaces vectoriels généralisés.

1. **Les espaces vectoriels classiques.** — Les exemples sans doute les plus importants d'espaces métriques sont les espaces vectoriels qui furent introduits indépendamment par Banach, Hahn et Wiener (1) en 1922.

Un ensemble d'éléments v, w, ... (appelés vecteurs) est appelé espace vectoriel si :

a. L'ensemble est un groupe commutatif, dont l'opération sera notée $+$, l'élément neutre par o, de telle sorte que

$$v + 0 = v = 0 + v;$$

b. On définit une multiplication associative et doublement distributive des vecteurs par les nombres réels a, b, ... :

$$a(bv) = (ab)v, \quad (a + b)v = av + bv, \quad a(v + w) = av + aw,$$
$$1v = v, \quad -1v = -v, \quad 0v = 0;$$

c. A tout vecteur v est associé un nombre réel $|v|$, appelé la norme, satisfaisant aux cinq conditions suivantes :

(I) $|av| = a|v|$ pour tout vecteur v et tout $a \geqq 0$;
(II) $|v| \geqq 0$ pour tout v;
(III) $v \neq 0$ entraîne $|v| \neq 0$;
(IV) $|-v| = |v|$;
(V) $|v + w| \leqq |v| + |w|$.

De tout espace vectoriel, on peut faire un espace métrique en définissant pour tout couple de vecteurs v et w, la distance comme le nombre $d(v, w) = |w - v|$. L'inégalité triangulaire pour la distance est équivalente au postulat (V) qui pour cette raison est appelé inégalité triangulaire pour la norme. La séparation de l'espace métrique est assurée par (III), le fait que la distance soit non négative par (IV), l'identification métrique [c'est-à-dire la condition $d(v, v) = 0$] est déduite du postulat (I) en posant $a = 0$.

Par *sphère unité* de centre v, nous entendons l'ensemble de tous les vecteurs w tels que $d(v, w) = 1$. En particulier, la sphère unité de centre o est l'ensemble de tous les vecteurs pour lesquels $|w| = 1$; par *rayon* (rayon ouvert), nous désignons un vecteur $v \neq 0$ et tous les vecteurs av, $a \geqq 0$, $(a > 0)$.

Un important exemple d'espace vectoriel est l'espace de Minkowski à n dimensions. Dans un tel espace, chaque vecteur est un n-tuplet de nombres réels $(x_1, \ldots, x_n)$; l'addition des vecteurs et la multiplication par les nombres réels sont définies par $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ et $(ax_1, \ldots, ax_n)$; les normes sont définies en choisissant sur chaque rayon ouvert un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ dont la norme est prise égale à 1, et en posant $|(ax_1, \ldots, ax_n)| = |a|$ pour tout nombre a.

Minkowski a prouvé le théorème fondamental suivant : *La norme ainsi définie satisfait l'inégalité triangulaire si, et seulement si le solide unité est convexe.* Le solide unité est l'ensemble de tous les vecteurs u tels que $|u| \leqq 1$. Sa convexité signifie que pour deux vecteurs quelconques v et w appartenant à sa frontière (qui est la sphère unité), le segment joignant v à w (c'est-à-dire l'ensemble de tous les vecteurs $av + bw$, avec $a + b = 1$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$) est un sous-ensemble du solide unité.

Nous allons encore décrire la convexité du solide unité de la manière suivante qui peut, au premier abord, paraître quelque peu artificielle, mais qui comme nous le verrons, conduit à d'importantes généralisations. Soient v et w deux vecteurs indépendants, alors $\frac{v}{|v|}$ et $\frac{w}{|w|}$ sont des vecteurs unités et nous désignons par L_{vw} la droite joignant ces deux vecteurs unités. Nous désignerons par X_{vw} le double secteur consistant en tous les vecteurs $av + bw$ pour lesquels $ab \geqq 0$. Avec cette terminologie, nous pouvons énoncer :

Le solide unité est convexe si et seulement si, pour tout couple de vecteurs indépendants v et w, l'intersection de la droite L_{vw} et du double secteur X_{vw} est un sous-ensemble du solide unité.

On obtient un intéressant exemple d'espace triangulaire de Minkowski en posant

$$|(x_1, \ldots, x_n)| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Dans ce cas, le solide unité est un cube à n dimensions.

2. Espaces vectoriels généralisés. — Dans le chapitre IV, la théorie métrique générale des problèmes indéfinis du calcul des variations nous a conduits à la généralisation suivante du concept classique d'espace vectoriel normé. Nous conservons l'addition et la multiplication satisfaisant aux postulats a et b; mais pour la norme, nous ne gardons que le premier des cinq postulats, c'est-à-dire :

(I) $|av| = a|v|$ pour tout vecteur v et tout $a > 0$.

Nous admettons des normes et des distances négatives, non séparantes et non symétriques. Nous dirons qu'un vecteur v est positif, nul ou négatif suivant que $|v|$ est > 0, $= 0$ ou < 0.

Nous devons postuler l'inégalité triangulaire, mais non sans avoir d'abord élucidé sa signification à la seule lumière du postulat (I).

Un important exemple d'espace vectoriel généralisé est ce que nous avons appelé un espace de Minkowski généralisé ([2]). Les vecteurs y sont encore des n-tuplets de nombres. Les normes sont définies en choisissant sur chaque rayon ouvert, un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ et en lui attribuant *ou bien la norme* 1, *ou la norme* 0 *ou la norme* -1. Pour tout vecteur de ce rayon ouvert, nous posons

$$|(ax_1, \ldots, ax_n)| = a|(x_1, \ldots, x_n)| \quad \text{pour} \quad a > 0.$$

Le théorème fondamental de Minkowski sur l'inégalité triangulaire peut alors être étendu aux espaces de Minkowski généralisés. Cette extension est due à Alt ([3]). Nous énonçons son théorème sous une forme quelque peu différente de la sienne. Par *solide unité*, nous entendrons l'ensemble de tous les vecteurs u, pour lesquels, ou bien $|u| \leqq 1$ ou $|-u| \leqq -1$. Nous dirons que le solide unité est *non-recouvrant* si pour aucun vecteur $|-v| < -|v|$. Comme précédemment, pour tout couple de vecteurs indépendants non-nuls, v et w, nous définissons le double secteur X_{vw} et la droite L_{vw}. Si $|v| = o \neq |w|$, L_{vw} sera l'ensemble des vecteurs $\frac{w}{|w|} + \lambda v$ pour tous λ.

Pour que l'espace généralisé de Minkowski satisfasse à l'inégalité triangulaire, il faut et il suffit que pour tout couple de vecteurs indépendants v et w, dont au moins un est non-nul, l'intersection de la droite L_{vw} et du double secteur X_{vw} soit un sous-ensemble du solide unité et que ce dernier soit non-recouvrant (*).

Pour des raisons évidentes, Alt appela cette propriété *convexité projective* du solide unité.

Nous terminerons cette section en donnant six exemples de plans généralisés de Minkowski. Dans chaque plan, un point est un couple (x_1, x_2) de nombres réels. Dans le premier exemple, nous définissons la norme comme il suit :

$$(1) \qquad |(x_1, x_2)| = \text{Max}(|x_1|, x_2).$$

(*) J'ai bénéficié du concours de M. R. E. Seall pour la mise au point de la démonstration de ce théorème.

Il est clair que les conditions (I) et (IV) sont satisfaites. Mais la norme n'est pas symétrique. Par exemple, nous avons

$$|(1, 0)| = 1 \quad \text{et} \quad |-(1, 0)| = |(-1, 0)| = 0.$$

Le vecteur $(0, -1)$ est un vecteur nul, différent de $(0, 0)$. La distance de $(0, 0)$ à $(0, -a)$ est égale à la norme de $(0, -a)$ et donc nulle si a est positif. Tous les vecteurs sur le rayon contenant $(0, -1)$ forment donc une *annexe* du vecteur $(0, 0)$ au sens introduit au chapitre III, paragraphe 9. Pour tout vecteur (x_1, x_2), le rayon formé des vecteurs $(x_1, x_2 - a)$ (pour les nombres positifs a) est une annexe métrique de (x_1, x_2).

Nous obtenons d'autres exemples de plans vectoriels généralisés en posant, pour tout couple x_1 et x_2 :

$$|(x_1, x_2)| = \operatorname{Max}(x_1, |x_2|), \tag{2}$$

$$|(x_1, x_2)| = \operatorname{Max}(0, x_1, x_2), \tag{3}$$

$$|(x_1, x_2)| = \operatorname{Max}(x_1, x_2), \tag{4}$$

$$|(x_1, x_2)| = |x_1|, \tag{5}$$

$$|(x_1, x_2)| = x_2, \tag{6}$$

$$|(x_1, x_2)| = 0. \tag{7}$$

La norme n'est symétrique que dans les exemples (5) et (7). Il y a des vecteurs nuls différents de $(0, 0)$ dans tous les exemples. Dans l'exemple (3), les vecteurs nuls remplissent tout le troisième quadrant. Tout vecteur (x_1, x_2) a une annexe métrique consistant de tous les vecteurs (x'_1, x'_2) avec $x'_1 < x_1$ et $x'_2 < x_2$.

3. Principaux types d'espaces vectoriels généraux [4]. — Outre les vecteurs positifs, négatifs et nuls, nous considérerons souvent une espèce particulière de vecteurs, savoir les vecteurs v pour lesquels $v \neq 0$ et $|v| = |-v| = 0$. De tels vecteurs seront dits *dégénérés*.

Nous dirons qu'un espace vectoriel général V, est *elliptique* ou *défini* si tout vecteur, sauf 0, est positif. Tout espace vectoriel au sens de Banach, Hahn et Wiener est elliptique; il en est de même de l'espace vectoriel *trivial* consistant de l'unique vecteur nul.

Nous dirons que V est *parabolique* ou *semi-défini* si V n'est pas défini et si aucun vecteur de V n'est négatif, tandis qu'au moins un vecteur est positif. L'emploi des termes défini et semi-défini au lieu de *positivement* défini et de *positivement* semi-défini ne conduira à aucune ambiguïté, puisque d'après l'inégalité triangulaire, aucun espace vectoriel général n'est négativement défini ou semi-défini. (De tels espaces existeraient si nous postulions (I) en même temps que l'inégalité contraire de l'inégalité triangulaire $|v+w| \geqq |v|+|w|$.) Les plans pourvus des normes (1), (2) et (3) au paragraphe précédent sont paraboliques.

Nous dirons que V est *hyperbolique* ou *indéfini*, si V contient à la fois des vecteurs positifs et des vecteurs négatifs. Le plan pourvu de la norme (4) est hyperbolique. Nous dirons que V est *dégénéré* s'il contient au moins un vecteur dégénéré. Les plans pourvus des normes (5) et (6) sont dégénérés, puisque

$$(0,\ x_2)=(0,\ -x_2)=0 \text{ et } (x_1,\ 0)=(-x_1,\ 0)=0, \text{ respectivement.}$$

Nous dirons que V est *totalement dégénéré* si tout vecteur de V est dégénéré et, par suite, si tout vecteur est nul. Un exemple en est fourni par le plan muni de la norme (7).

4. Structure des espaces vectoriels généraux. — Le premier théorème sur la structure d'un espace vectoriel V affirme la *possibilité de décomposer* V *en un sous-espace totalement dégénéré* D *et en un sous-espace non dégénéré* V'. Décomposer signifie ici que tout vecteur de V est la somme d'un vecteur appartenant à D et d'un vecteur appartenant à V'. Bien sûr, un de ces sous-espaces peut être vide. Mais si V contient à la fois des vecteurs dégénérés et des vecteurs non dégénérés, alors les deux sous-espaces D et V' sont non vides. Le sous-espace totalement dégénéré est déterminé sans ambiguïté (comme l'ensemble de tous les vecteurs dégénérés de V), le sous-espace non dégénéré ne jouit pas de la même propriété. Les deux sous-espaces D et V' n'ont en commun que le seul vecteur *o*.

Dans les exemples de plans avec les normes (1) à (7) du paragraphe 2, les quatre premiers ne contiennent pas de vecteurs dégénérés. Avec la norme (5), la partie dégénérée est l'espace à une dimension formé des multiples du vecteur (0, 1). Pour V', nous pouvons choisir n'importe quel espace à une dimension formé des vecteurs (ax_1, ax_2) pour tous les nombres réels a, pourvu que $x_1 \neq 0$. Dans le plan muni de la norme (6), la partie dégénérée est formée des vecteurs mutiples du vecteur (1, 0).

Puisque deux espaces totalement dégénérés de la même dimension sont toujours isomorphes, le premier théorème réduit la question à celle de la structure des espaces non dégénérés. Nous introduisons la notion de *cône* : c'est un sous-ensemble C d'un espace vectoriel, qui contient o et au moins un vecteur différent de o, et avec tout vecteur v, tous les vecteurs du rayon $av(a > 0)$. Le cône est dit convexe si avec tout couple de vecteurs indépendants v et w il contient tout vecteur de la forme $av + bw(a > 0, b > 0)$. Le cône est dit *propre* s'il ne contient pas deux vecteurs opposés. Le cône est dit *ouvert*, si tout vecteur de C, excepté o est un élément intérieur de C. Le cône C est dit *fermé* si l'ensemble de tous les vecteurs qui n'appartiennent pas à C est ouvert. Ici, nous disons que le vecteur w est un élément *intérieur* d'un sous-ensemble S de l'espace vectoriel V, si pour tout vecteur v de V, il existe un nombre positif a (dépendant de v) tel que pour tout b compris entre 0 et a, le vecteur $w + bv$ appartienne à S. Par *frontière* d'un cône ouvert C, nous entendons l'ensemble de tous les vecteurs w qui n'appartiennent pas à C, tandis que pour au moins un vecteur v de l'espace vectoriel et un nombre positif suffisamment petit, le vecteur $w + bv$ appartient à C.

On peut alors énoncer le second théorème suivant :

Dans un espace vectoriel non dégénéré V *qui n'est pas défini, l'ensemble de tous les vecteurs non positifs est un cône fermé. Si* V *est indéfini, alors l'ensemble formé de o et de tous les vecteurs négatifs est un cône ouvert, dont la frontière est l'ensemble de tous les vecteurs nuls.*

Dans le plan parabolique avec la norme (1), le cône des vecteurs non positifs se réduit au rayon contenant le vecteur $(0, -1)$. Dans l'exemple (2) aussi, le cône est un rayon. L'exemple (3) montre un espace parabolique dans lequel le cône non positif est le troisième quadrant fermé. Dans le plan hyperbolique avec la norme (4), le cône non positif est encore le troisième quadrant fermé. Mais dans cet exemple, le troisième quadrant ouvert est le cône ouvert des vecteurs négatifs; sa frontière, réunion des rayons contenant les vecteurs $(0, -1)$ et $(-1, 0)$ est l'ensemble de tous les vecteurs nuls.

Le troisième théorème affirme que *dans un espace non dégénéré à n dimensions* V, *si* V *n'est pas défini* (*elliptique*), *il existe certai-*

nement un sous-espace défini à $n - 1$ dimensions P, *tel que des deux moitiés en lesquels* P *décompose* V, *une moitié ne contient que des vecteurs positifs, tandis que l'autre moitié contient un vecteur non positif v' qui est* $X \neq 0$. *Tout vecteur de cette seconde moitié est la somme d'un multiple positif de v' et d'un vecteur appartenant à* P. *Le vecteur non positif v' peut toujours* (c'est-à-dire dans l'espace parabolique aussi bien que dans l'espace hyperbolique) *être choisi comme un vecteur nul; dans un espace hyperbolique, on peut aussi choisir un vecteur négatif pour v'.*

Ce théorème montre que tout espace parabolique ou hyperbolique à n dimensions a une base consistant en $n - 1$ vecteurs positifs et d'un vecteur non positif qui peut être choisi parmi les vecteurs nuls.

Un remarquable corollaire du troisième théorème concerne les plans vectoriels généralisés. Nous avons vu que les vecteurs nuls d'un plan parabolique peuvent remplir un secteur angulaire tout entier. Dans l'exemple (3), le troisième quadrant consiste de vecteurs nuls. *Mais si le plan est hyperbolique, il y a exactement deux rayons non opposés de vecteurs nuls.* Ils constituent la frontière du cône (ici, un secteur angulaire) des vecteurs non positifs, dont l'intérieur est l'ensemble des vecteurs négatifs. Par exemple, dans le plan hyperbolique avec la norme (4), les rayons contenant les vecteurs $(-1, 0)$ et $(0, -1)$ sont formés de vecteurs nuls et tout vecteur nul appartient à un de ces rayons.

Nous voyons aussi que *de tout espace hyperbolique on peut déduire un espace parabolique, en laissant inchangées les normes non négatives et en donnant à tout vecteur négatif la norme* 0.

D'autres problèmes concernent les trois sphères de base, c'est-à-dire, les ensembles de vecteurs de normes respectives $1, 0, -1$. Nous désignerons ces sphères par S_1, S_0, S_{-1} respectivement. S_0 est évidemment identique à l'ensemble de tous les vecteurs nuls. Dans un espace elliptique, S_0 consiste uniquement du vecteur o. S_{-1} est vide dans les espaces paraboliques et elliptiques. *La sphère S_0 d'un espace hyperbolique peut être déterminée à partir de la sphère S_1 et de la sphère S_{-1}.* D'autre part, étant donnée la sphère S_0 d'un espace non elliptique, on peut caractériser par une propriété intrinsèque de *convexité* les ensembles qui peuvent être des S_1 et par une propriété de *concavité* les ensembles qui peuvent être des S_{-1}.

5. Topologies paraboliques et hyperboliques. — Un espace vectoriel à n dimensions est elliptique, si et seulement si sa sphère S_1 est homéomorphe à une sphère euclidienne ordinaire. Du point de vue topologique, deux espaces vectoriels elliptiques à n dimensions sont équivalents au sens fort suivant : Si nous remplaçons la sphère S_1 d'un espace elliptique par une autre sphère S'_1 qui laisse l'espace elliptique, alors toute suite convergente de vecteurs pour la première métrique converge vers la même limite dans la seconde métrique, et vice versa. Nous disons ici que la suite v_n converge vers le vecteur v si et seulement si la suite numérique $d(v_n, v)$ converge vers o.

Nous appliquons la même définition de la convergence aux espaces non elliptiques. Mais dans de tels espaces nous voyons qu'une suite convergente de vecteurs peut avoir beaucoup d'éléments limites ou, comme nous dirons, un *ensemble limite* contenant plus d'un élément. Par exemple, dans le plan parabolique avec $|(x_1, x_2)| = \mathrm{Max}(|x_1|, x_2)$, nous voyons que la suite de vecteurs $(x_1^1, x_2^1), \ldots (x_1^k, x_2^k), \ldots$ converge vers le vecteur (x_1, x_2) si et seulement si $\lim x_1^k = x_1$ et $\liminf x_2^k = x_2$. Par conséquent, la suite ci-dessus a un ensemble limite non vide si et seulement si la suite numérique x_1^k converge et $\liminf x_2^k > -\infty$. Si ces conditions sont satisfaites, alors l'ensemble limite de la suite est la moitié d'une droite, à savoir l'ensemble de tous les vecteurs (x_1, x_2), avec $x_1 = \lim x_1^k$ et $x_2 \leqq \liminf x_2^k$, à moins que $\lim x_2^k = \infty$, auquel cas l'ensemble limite est la ligne droite formée de tous les vecteurs (x_1, x_2), avec $x_1 = \lim x_1^k$.

Dans les espaces non elliptiques, à côté de la convergence précédente, on a une convergence *inversée* selon laquelle la suite v_n converge vers v si et seulement si la suite numérique $d(v, v_n) = |v_n - v|$ converge vers o. On peut prouver que *dans tout espace parabolique ou hyperbolique non dégénéré, il existe des suites de vecteurs qui convergent vers le vecteur o sans converger inversement vers o, de même que des suites qui convergent inversement vers o sans converger vers o.* Toute suite formée de vecteurs appartenant à l'annexe métrique de o est du deuxième type; toute suite formée de vecteurs dont les opposés appartiennent à l'annexe métrique de o est du premier type.

On peut, d'autre part, prouver que si l'on dit qu'une suite de vecteurs est *strictement convergente* lorsqu'elle est à la fois convergente et inversement convergente, la convergence stricte conduit à une topologie elliptique.

Il y a divers types topologiques d'espaces paraboliques. Par exemple, si dans le plan pourvu de la norme $|(x_1, x_2)| = \mathrm{Max}(|x_1|, x_2)$, nous introduisons la norme $|(x_1, x_2)| = \mathrm{Max}(x_1, |x_2|)$, puisque les annexes métriques de o sont changées, des suites convergentes deviennent non convergentes et inversement. Cependant, il est clair dans ce cas qu'une rotation d'un angle droit amènera le deuxième plan sur le premier. Ainsi, les deux plans, bien que non identiques, sont homéomorphes.

D'autre part, le plan muni de la norme $|(x_1, x_2)| = \mathrm{Max}(0, x_1, x_2)$ représente un type topologique entièrement différent. *A priori*, on pourrait penser qu'il n'y a que deux types topologiques de plans paraboliques : ceux pour lesquels la sphère S_0 est un rayon, et ceux pour lesquels elle est un secteur angulaire. En fait, ce sont bien là les deux seuls types topologiques de sphères S_0.

Cependant, un examen plus attentif montre que la topologie d'un plan parabolique n'est pas déterminée par sa sphère S_0. Il y a de nombreux types topologiques de plans pour lesquels la sphère S_0 est un rayon et de nombreux types pour lesquels elle est un secteur angulaire. Un exemple va illustrer ces diverses possibilités.

Dans le plan muni de la norme $|(x_1, x_2)| = \mathrm{Max}(|x_1|, x_2)$, la sphère S_1 est une courbe en U ayant des asymptotes parallèles à la sphère S_0 formée des vecteurs $x_1 = 0$, $x_2 \leqq 0$. En fait S_1 est constituée du segment $-1 \leqq x_1 \leqq 1$, $x_2 = 1$ et de deux demi-droites $x_1 = 1$, $x_2 \leqq 1$ et $x_1 = -1$, $x_2 \leqq 1$. Ces dernières sont parallèles à S_0.

Si avec la même S_0, nous choisissons comme S_1 la parabole lieu des extrémités des vecteurs $(x_1, 1 - x_1^2)$, nous obtenons une topologie différente. Dans ce dernier cas, la suite de vecteurs $(1, 0)$, $\left(1, 2 - \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, 3 - \frac{1}{3}\right)$, $\ldots$, $\left(1, k - \frac{1}{k}\right)$, $\ldots$ converge vers le vecteur $(0, 0)$, car la distance du $k^{\text{ième}}$ vecteur de cette suite à $(0, 0)$ est $\frac{1}{k}$. Il est clair que cette suite ne converge pas vers $(0, 0)$ avec la norme (1).

Nous voyons que la topologie d'un plan parabolique est liée au comportement à l'infini de la sphère S_1. Cette remarque est valable pour des plans dans lesquels la sphère S_0 est un rayon, aussi bien que pour ceux pour lesquels elle est un secteur angulaire.

La théorie des espaces paraboliques et hyperboliques semble ouvrir un vaste domaine à la topologie. Mais, bien que l'on arrive à des topologies qui diffèrent très nettement de notre topologie elliptique classique, on n'a encore affaire qu'à des cas très particuliers de topologies généralisées. La situation est assez analogue à celle des espaces elliptique et hyperbolique de la géométrie élémentaire qui diffèrent essentiellement de notre géométrie euclidienne parabolique et sont cependant des cas très particuliers d'espaces de Riemann, le lien commun étant leur relation à l'espace projectif.

Le lien qui unit nos topologies paraboliques et hyperboliques entre elles et à la topologie elliptique ordinaire est l'existence d'une métrique satisfaisant l'inégalité triangulaire et compatible avec la topologie. Nous pourrions réunir toutes ces théories sous le nom de *topologies triangulaires*.

6. **Transformations linéaires généralisées.** — Nos espaces vectoriels généralisés donnent lieu à une théorie des transformations linéaires généralisées.

D'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, on voit clairement comment les *applications continues* d'un espace vectoriel généralisé sur un autre (ou sur lui-même) doivent être définies. Si chaque vecteur v est appliqué sur un vecteur $f(v)$, nous exigerons que si la suite v_n converge vers v (c'est-à-dire que v est élément de son ensemble limite), alors la suite $f(v_n)$ converge (au même sens) vers $f(v)$.

Il est indispensable d'adapter aussi la notion d'additivité aux espaces généralisés. Dans un espace elliptique, l'application f est dite additive si pour tout couple de vecteurs

$$f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2).$$

Dans nos espaces généralisés, nous dirons : L'application f est *additive à gauche, si l'égalité ci-dessus a lieu, pourvu que* v_1, v_2 *et* $a_1v_1+a_2v_2$ (*pour* $a_1>0$ *et* $a_2>0$) *soient de même signe*, c'est-à-dire soient tous positifs, tous négatifs ou tous nuls. Nous dirons que f est *additive à droite* si l'égalité ci-dessus a lieu, pourvu que $-v_1$, $-v_2$ et $-(a_1v_1+a_2v_2)$ (*pour* $a_1>$ *et* $a_2>0$) *soient de même signe*.

A titre d'exemple, donnons la forme de toutes les applications linéaires (c'est-à-dire continues et additives) du plan parabolique avec la norme $|(x_1, x_2)| = \mathrm{Max}(|x_1|, x_2)$ sur lui-même. C'est une famille dépendant de quatre paramètres de la manière suivante :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} (0, dx_2), & \text{où } d \geqq 0, \quad \text{si } x_1 = 0 \text{ et } x_2 > 0; \\ (ax_1, bx_1 + cx_2), & \text{où } c \geqq d, \quad \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Un aspect de ces applications qui est caractéristique pour les transformations linéaires généralisées est qu'elles sont formées, peut-on dire, de morceaux qui sont des transformations partielles, linéaires au sens classique; l'une agissant sur les vecteurs dont les opposés sont positifs, l'autre sur les vecteurs dont les opposés sont nuls. Grâce à l'inégalité $c \geqq d$, la combinaison des deux transformations est bien continue.

Dans le plan hyperbolique avec la norme $|(x_1, x_2)| = \mathrm{Max}(x_1, x_2)$, toute transformation linéaire est la combinaison de trois transformations :

1° L'opposée de la partie positive (c'est-à-dire des trois premiers quadrants) subit une homothétie ou un échange des axes suivi d'une homothétie;

2° L'opposée de la partie nulle subit une homothétie ou un échange des axes suivi d'une homothétie;

3° L'opposée de la partie négative subit une homothétie ou un échange des axes suivi par une homothétie.

Il suffit d'imposer des inégalités simples aux rapports des homothéties pour que la « combinaison » de ces trois transformations soit continue.

CHAPITRE VII.

Esquisse d'une géométrie métrique aléatoire.

Dans ce chapitre, nous présenterons brièvement une dernière généralisation de la notion d'espace métrique ([1]). Soit donné un ensemble E quelconque. Au lieu d'un écart numérique, nous associons à tout couple d'éléments p, q de E une fonction de répartition Δ_{pq}. La valeur $\Delta_{pq}(t)$ que cette fonction prend pour t peut être interprétée comme la probabilité que l'écart entre p et q (ou, plus précisément, l'écart de p à q) soit $< t$. Mais nous signalons qu'il n'est pas nécessairement donné un écart numérique entre p et q dont Δ_{pq} représenterait une évaluation. Par exemple, si E est un ensemble de cinq éléments, tout ce que l'on suppose donné est une matrice de 25 fonctions de répartition.

Si pour la fonction Δ_{pq} il existe un nombre non négatif $d(p, q)$ tel que $\Delta_{pq}(t)$ soit égale à 0 ou à 1 selon que $t \leqq d(p, q)$ ou $t > d(p, q)$, alors nous dirons que $d(p, q)$ est l'*écart certain* entre p et q. Dans le cas très spécial où il existe un écart certain entre tout couple d'éléments, nous retrouvons essentiellement un espace à écarts finis au sens classique.

Mais nous admettons des fonctions Δ_{pq} beaucoup plus générales. En effet, nous n'imposons aux Δ_{pq} que des conditions correspondant à celles que vérifie l'écart dans la théorie classique.

1. L'écart est toujours positif. Nous supposerons donc que pour tout $t \leqq 0$ la probabilité $\Delta_{pq}(t)$ est égale à zéro quels que soient les points p et q. Dans la version probabiliste du monde de la théorie de la relativité, la fonction de répartition du carré de la distance ne serait pas assujettie à cette condition.

2. L'écart est symétrique. Nous supposerons donc que l'on ait toujours

$$\Delta_{pq}(t) = \Delta_{qp}(t).$$

3. Si $p = q$, alors $d(p, q) = 0$. Une condition correspondante serait que l'*écart entre p et p soit certainement zéro*; c'est-à-dire que $\Delta_{pp}(t)$ soit égale à 0 ou à 1, selon que $t \leqq 0$ ou $t > 0$. Une condition 3' plus faible serait $\lim\limits_{t=+0} \Delta_{pp}(t) > 0$.

4. Si $p \neq q$, alors l'écart entre p et q est > 0. Il y a plusieurs hypothèses probabilistes correspondant à ce fait. Nous choisissons la suivante : *$p \neq q$ implique que la distance entre p et q n'est pas nécessairement zéro;* en d'autres termes, qu'il existe un nombre $t > 0$ tel que $\Delta_{pq}(t) < 1$. La borne supérieure des nombres t tels que $\Delta_{pq}(t) < 1$, mérite le nom d'*écart supérieur*. L'hypothèse 4 peut donc être exprimée en disant que l'écart supérieur entre deux points différents est toujours positif. Évidemment, c'est une hypothèse assez faible. D'autre part, l'hypothèse suivante serait très forte et pour

beaucoup de desseins trop forte : l'écart inférieur entre deux points différents est toujours positif, où par *écart inférieur* nous entendons la borne supérieure des nombres t tels que $\Delta_{pq}(t) = 0$.

5. Une très grande variété d'hypothèses correspondantes s'offre pour l'inégalité triangulaire. Étant donnés trois points p, q, r, on pourrait envisager une inégalité triangulaire pour les moyennes, pour les médianes, etc., des fonctions de répartition Δ_{pq}, Δ_{qr}, Δ_{pr}. Ici, nous nous contenterons d'étudier l'hypothèse par laquelle Wald ([2]) a remplacé celle que nous avions formulée en 1942 : *pour tout t, la probabilité que la somme de la distance entre p et q et la distance entre q et r soit $< t$, est inférieure à la probabilité que la distance entre p et r soit $< t$.* Or la fonction de répartition de la somme des distances aléatoires distribuées d'après les lois Δ_{pq} et Δ_{qr}, est la composition $\Delta_{pq} \star \Delta_{qr}$, où

$$[\Delta_{pq} \star \Delta_{qr}](x) = \iint_{u+v<x} dF(u)G(v),$$

l'intégrale double étant prise au sens de Stieltjes. On a donc toujours

$$[\Delta_{pq} \star \Delta_{qr}](t) \leqq \Delta_{pr}(t).$$

Il est clair que cette hypothèse de Wald est très forte. Pourtant, nous avons trouvé de nombreux exemples de métriques aléatoires satisfaisant aux hypothèses 1 à 5. En effet, aucune fonction de répartition compatible avec l'hypothèse 1 n'est exclue par l'hypothèse 5, de même qu'aucun écart positif n'est exclu par l'inégalité triangulaire classique. Pour tout nombre d positif, il existe un espace métrique E « équilatéral » dans lequel la distance entre deux points différents quelconques est égale à d, l'ensemble E n'étant d'ailleurs assujetti à aucune restriction. Or, sans violer l'hypothèse 5, à tout couple d'éléments différents d'un ensemble donné quelconque E, on peut associer toute fonction de répartition donnée (la même pour tout couple d'éléments !) pourvu que la fonction satisfasse à l'hypothèse 1. Il est aisé de voir que, par exemple, les distributions normales violeraient l'hypothèse 5. Mais, évidemment, les distributions normales ne satisfont pas à l'hypothèse 1.

Mentionnons quatre métrisations probabilistes de la droite cartésienne où tout point est caractérisé par un nombre réel x. En chaque exemple nous ne définirons $\Delta_{xy}(t)$ que pour $t > 0$, car il est entendu que l'hypothèse **1** est satisfaite, et pour $x \neq y$, car nous admettons l'hypothèse **2**.

$$(1)\quad \Delta_{xy}(t) = 1 - e^{-t} - e^{-t-|y-x|};$$

$$(2)\quad \Delta_{xy}(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{|y-x|^{\frac{1}{2}}} & \text{pour } t \leqq |y-x|^{\frac{1}{2}}, \\ 1 & \text{pour } t \geqq |y-x|^{\frac{1}{2}}; \end{cases}$$

$$(3)\quad \Delta_{xy}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leqq \dfrac{1}{2}|y-x|^{\frac{1}{2}}, \\ \dfrac{2t}{|y-x|^{\frac{1}{2}}} & \text{pour } \dfrac{1}{2}|y-x|^{\frac{1}{2}} \leqq t \leqq |y-x|^{\frac{1}{2}}, \\ 1 & \text{pour } |y-x|^{\frac{1}{2}} \leqq t; \end{cases}$$

$$(4)\quad \Delta_{xy}(t) = \Delta_{yx}(t) = \begin{cases} \dfrac{\left(y - \frac{x}{2}\right)t}{(y-x)y} & \text{pour } t \leqq \dfrac{(y-x)y}{y - \frac{x}{2}} \\ 1 & \text{pour } t > \dfrac{(y-x)y}{y - \frac{x}{2}} \end{cases} \quad \text{si } x < y.$$

Les distributions (1), (2), (3) sont homogènes par rapport à la métrique euclidienne; c'est-à-dire $\Delta_{xy}(t)$ ne dépend que de la différence $|y - x|$ et deux couples de points sont congruents au sens aléatoire s'ils le sont au sens euclidien et réciproquement. La distribution (4) n'est pas homogène en ce sens.

La distance supérieure entre deux points est toujours ∞ dans l'exemple (1) et toujours finie dans les autres exemples. La distance inférieure est toujours positive dans l'exemple (3) et toujours zéro dans les autres exemples. Dans l'exemple (1) (et dans cet exemple seulement), on a même toujours

$$\lim_{t \to +0} \Delta_{pq}(t) > 0.$$

Dans cet exemple, il y a possibilité de confondre deux points quelconques.

Wald [2] a appliqué aux métriques aléatoires la définition de la relation « entre » étudiée au chapitre I. Il dit que q est entre p et r si $p \neq q \neq r$ et si l'on a pour tout t

$$[\Delta_{pq} \star \Delta_{qr}](t) = \Delta_{pr}(t),$$

c'est-à-dire le signe d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Il a démontré que cette relation jouit des mêmes propriétés que la relation « entre » définie dans les espaces métriques classiques : si q est entre p et r, alors q est entre r et p, tandis que r n'est pas entre p et q. Si q est entre p et r et r est entre p et s, alors q est entre p et s et r est entre q et s.

Cette définition suggère d'étendre aux métriques probabilistes la notion de convexité. Nous dirons qu'un espace aléatoire est *convexe* si, p et r étant deux points définis quelconques, il existe un point q entre p et r. Est-ce qu'il existe des espaces aléatoires convexes en ce sens, outre ceux où il y a toujours une distance certaine entre deux points et dans lesquels nous retrouvons essentiellement les espaces convexes classiques ?

Récemment, M. Hadwiger m'a donné une réponse affirmative à cette question. Si, dans la droite cartésienne, on définit

$$\Delta_{xy}(t) = \frac{1}{\Gamma(|y-x|)} \int_0^t \tau^{|y-x|-1} e^{-\tau} \, d\tau,$$

on obtient une distribution dont la moyenne est $|y-x|$, donc égale à la distance euclidienne entre les points x et y. Or si l'on pose

$$E_a(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t \tau^{a-1} e^{-\tau} \, d\tau,$$

on sait que $E_a \star E_b = E_{a+b}$. Donc si $x < y < z$, on a toujours

$$[\Delta_{xy} \star \Delta_{yz}](t) = \Delta_{xz}(t),$$

et y est entre x et z.

BIBLIOGRAPHIE

Introduction.

([1]) Cf. *The New Logic* (*Phil. Sc.*, t. 4, 1937, p. 299-336, surtout p. 331 et suiv.).

([2]) Cette expérience est décrite dans notre livre *Dimensionstheorie*, 1928, p. 78. *Cf.* aussi *What is Dimension ?* (*Amer. Math. Monthly*, t. 50, 1943, p. 2).

([3]) *Cf.*, par exemple, HUREWICZ and WALLMAN, *Dimension Theory*, 1941, p. 4.

([4]) *Proc. Acad. Amsterdam*, t. 29, 1926, p. 1125.

([5]) *Math. Ann.*, t. 104, 1930, p. 71-80.

Chapitre I.

([1]) *Untersuchungen ueber allgemeine Metrik* (*Math. Ann.*, t. 100, 1928).

([2]) *La géométrie des distances et ses relations avec les autres branches des mathématiques* (*L'Enseignement mathématique*, t. 35, 1936, p. 348-372); *Bericht ueber metrische Geometrie* (*Jahresber. D. M. V.*, t. 40, 1931, p. 201-219).

([3]) *Distance Geometries* (*University of Missouri Studies*, t. 13, 1938) et son livre *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, 1953.

([4]) *Les méthodes directes en Calcul des variations et en Géométrie différentielle* Paris, 1941.

([5]) *Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 77 et suiv.

([6]) *Ibid.*, p. 81 et suiv.

([7]) *Ibid.*, p. 87 et suiv. *Cf.* aussi ARONSZAJN, *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 4, 1932, p. 4 et MENGER and MILGRAM, *Reports of a Math. Colloquium*, 2e série, t. 1, 1939, p. 16-17.

([8]) *Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 111.

([9]) *Amer. J. Math.*, t. 54, 1932, p. 505-517.

([10]) *Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 99 et suiv.

([11]) *Kurventheorie*, Leipzig, 1932.

([12]) *Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 115 et suiv. et *Proc. Acad. Amsterdam*, t. 30, 1927, p. 710-714.

([13]) *Ibid* et *Amer. J. Math.*, t. 53, 1931, p. 721-745.

([14]) *Reports of a Math. Colloquium*, 2e série, 3, 1941, p. 34-46.

([15]) Le cas $n = 1$ a été traité par les méthodes de la théorie de groupes dans notre Mémoire *Math. Z.*, t. 33, 1931, p. 396-418.

([16]) *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 4, 1932, p. 41-43. *Cf.* aussi le théorème semblable de Blumenthal d'après lequel E_1 est caractérisé parmi les espaces complets, convexes et extérieurement convexes par l'absence de triangles équilatéraux, *loc. cit.* ([3]), 1953, p. 56.

([17]) *Anzeiger d. Akademie d. Wissensch. Wien* (*Math.-Naturw. Klasse*), t. 65, 1928, p. 159.

([18]) *Cf.* BLUMENTHAL, *loc. cit.* ([3]), 1938, p. 65.

(18a) *Ann. Math.*, t. 36, 1935, p. 705-718.

(19) *loc. cit.* (3), 1953, chap. XIII.

(20) *Ergebnisse e. math. Kolloquiums*, t. 4, 1932, p. 43-45.

(21) *Cf.* surtout *Proc. Acad. Amsterdam*, t. 50, 1947, p. 403-405, en collaboration avec J. SEIDEL, et *Nieuw Archief voor Wiskunde* (2), t. 22, 1948, p. 355-362.

(21a) Surtout le Mémoire dans *Amer. J. Math.*, t. 68, 1946, p. 340-344, son livre *Metric Methods in Finsler Spaces and in the Foundations of Geometry*, Princeton, 1942.

(21b) *Amer. J. Math.*, t. 57, 1935, p. 64.

(22) *Verhandlungen Internat. Math. Kongress*, Zuerich, 1932, vol. 1, p. 322.

(23) *Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 98.

(24) *Loc. cit.* (23), p. 96.

(25) R. H. BING, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 55, 1949, p. 1101-1110 et E. E. MOISE, *ibid.*, p. 1111-1121.

Chapitre II.

(1) *Math. Ann.*, t. 103, 1930, p. 480-491.

(2) *Ergebnisse eines mathem. Kolloquiums*, t. 3, 1932, p. 4.

(3) *Ibid.*, t. 4, 1932, p. 4.

(4) *Ibid.*, t. 4, 1932, p. 4.

(5) *Loc. cit.* (1), p. 482 et suiv.

(6) SCHOENBERG, *Ann. Math.*, t. 41, 1940, p. 715-726.

(7) *Loc. cit.* (1), p. 485-490.

(8) *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 6, 1935, p. 7.

(9) *Ann. Math.*, t. 41, 1940, p. 715-726. *Cf.* aussi HAANTJES, *Proc. Akad. Amsterdam*, t. 50, 1947, p. 496.

(10) *Compositio Math.*, t. 6, 1938-1939, p. 471-477.

(11) *Cf.* son livre *Theory and Applications of Distance Geometry*, 1953, p. 84.

(12) *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 6, 1935, p. 29-39. *Cf.* aussi *C. R. Acad. Sc.*, t. 201, 1935, p. 918.

(13) *Wald*, *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 7, 1936, p. 28.

(14) *Loc. cit.* (12), p. 31.

(15) *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 7, 1936, p. 14.

(15a) *Cf.* MENGER, *Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 126 et suiv.

(16) *Reports of a Math. Colloquium*, 2e série, t. 5-6, 1944, p. 16-24.

Chapitre III.

(1) *Cf.* mon livre *Dimensionstheorie*, 1928, p. 15 et suiv. et surtout *Topology without Points* (*The Rice Institute Pamphlet*, t. 27, 1940, p. 80-107).

(2) *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 3, 1932, p. 6.

(3) *Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 147-163.

(3a) *Reports of a Math. Colloquium*, 2e série, t. 1, 1938, p. 31-44.

(3b) *Ibid.*, t. 5-6, 1943, p. 60-67 et STAUDER, *ibid.*, t. 8, 1948, p. 49-57.

(4) *Amer. J. Math.*, t. 53, 1931, p. 217-745. *Cf.* aussi *Proc. Acad. Amsterdam*, t. 30, 1927, p. 710-714.

(5) *Loc. cit.* (4), 1931.

(6) *Torino Mem.*, (2), t. 49, 1899, p. 173.

(7) *C. R. Acad. Sc.*, t. 198, 1934, p. 1564.

(8) *Portugaliae Math.*, t. 5, 1946, p. 121-130.

(9) *Math. Z.*, t. 33, 1931, p. 396-418.

(10) *Loc. cit.* (9).

(11) *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 5, 1933, p. 1-6 et t. 6, 1935, p. 12.

(12) *Canadian J. Math.*, t. 3, 1951, p. 87-93. *Cf.* surtout le chapitre XV du livre *Theory and Applications of Distance Geometry* par Blumenthal.

(13) *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 5, 1933, p. 32-42.

(14) *Ibid.*, t. 5, 1933, p. 10.

(14a) *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 6, 1935, p. 20-23.

(15) *Mengenlehre*, 2e édit., 1927, p. 145.

(16) *Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 115.

Chapitre IV.

(1) *Cf.* Pauc, *Les méthodes directes en Calcul des variations*, Paris, 1941.

(1a) *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 8, 1937, p. 12 et suiv. et *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 23, 1937, p. 245.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 221, 1945, p. 739-741 et *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 38, 1952, p. 66 et suiv.

(3) *Loc. cit.* (1a).

(4) *Loc. cit.* (1a).

(5) *Loc. cit.* (2), 1952.

(6) *Loc. cit.* (2), 1952.

(7) *Loc. cit.* (1a). *Cf.* aussi notre Mémoire *Analysis and Metric Geometry* (*The Rice Institute Pamphlets*, t. 27, 1940, p. 1-40.

(7a) Signalons dans ce domaine la Note intéressante de M. N. Aronszajn, *Quelques recherches sur l'intégrale de Weierstrass* (*Revue Scientifique*, août 1939).

(8) *Essai sur les méthodes directes*, Bruxelles, 1933. Ce Mémoire classique a été reproduit dans les *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége*, 3e série, t. 19, 1934.

(8a) *Loc. cit.* (1a). *Cf.* aussi *C. R. Acad. Sc.*, t. 202, 1936, p. 1007.

(9) *Loc. cit.* (1a) et (7).

(10) Mc Shane, *Duke Math. J.*, t. 2, 1936, p. 597-616 et Aronszajn cité dans le Mémoire *loc. cit.* (1a), 1937, p. 17.

(11) *Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. Wien, Math.-Naturw. Klasse*, Abt. II*a*, t. 234, 1925, p. 437-447. Pour une modification du premier exemple de Hahn *voir* Carathéodory, *Variationsrechnung*, 1935, p. 310.

(12) Pour applications des méthodes métriques à la théorie des intégrales curvilignes, cf. *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 25, 1939, p. 621 ; t. 26, 1940, p. 660-664 ; *Reports of a Math. Colloquium*, 2e série, t. 2, 1940, p. 44-48 et le Mémoire *loc.*

cit. (7), p. 30-39. Signalons dans ce domaine les Notes intéressantes de FUBINI, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 26, 1940, p. 199-201 et MILGRAM, *Reports of a Math. Colloquium.*, 2e série, t. 7, 1945, p. 37-45.

Chapitre V.

(1) Cf. *Fund. Math.*, t. 36, 1949, p. 109-118.

(1a) Cf. *Ann. Soc. Math. Polon. de Math.*, t. 21, 1948, p. 173-175.

(2) *Loc. cit.* (1), p. 117 et suiv.

(3) *Loc. cit.* (1).

Chapitre. VI.

(1) BANACH, *Fund. Math.*, t. 3, 1922, p. 133-181; HAHN, *Monats Math. Phys.*, t. 32, 1922, p. 1-81; WIENER, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 150, 1922, p. 124-134.

(2) *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 8, 1937, p. 25 et surtout *Canadian J. Math.*, t. 1, 1949, p. 94-104 et *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 2176-2178.

(3) *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, t. 8, 1937, p. 32 et suiv.

(4) Pour les démonstrations des résultats des paragraphes 3, 4 et 5, cf. *Canadian J. Math.*, t. 1, 1949, p. 94-104.

Chapitre VII.

(1) Cf. *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 28, 1942, p. 535-537; t. 37, 1951, p. 178-180, et surtout p. 226-229. *Voir* aussi *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 2001-2003.

(2) *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 28, 1942, p. 535 et *Reports of a Math. Colloquium.* 2e série, t. 5-6, 1943, p. 76-79.

TABLE DES MATIÈRES