MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

ANDRÉ CHARRUEAU

Complexes linéaires. Faisceaux de complexes linéaires. Suites et cycles de complexes linéaires conjugués

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 120 (1952)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1952__120__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXX

Complexes linéaires. Faisceaux de complexes linéaires. Suites et cycles de complexes linéaires conjugués

Par André CHARRUEAU,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,
Docteur ès sciences mathématiques.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1952

COMPLEXES LINÉAIRES
FAISCEAUX DE COMPLEXES LINÉAIRES
SUITES ET CYCLES
DE COMPLEXES LINÉAIRES CONJUGUÉS

Par M. André CHARRUEAU,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,
Docteur ès sciences mathématiques.

INTRODUCTION.

Nous allons exposer d'importantes propriétés des complexes linéaires et, surtout, des faisceaux de tels complexes.

Certaines de ces propriétés apparaissent dans une étude, plus approfondie, de problèmes anciens ou dans l'examen de questions se rattachant directement aux théories classiques.

D'autres propriétés, les plus importantes, concernent des problèmes qui ne sont pas envisagés dans ces théories.

Nous étudierons notamment des ensembles de complexes linéaires que nous avons appelés des *suites* ou, quand celles-ci se ferment, des *cycles* de complexes linéaires conjugués. Si l'on désigne par $\mathcal{C}_j$ le complexe de rang j d'une suite $\mathcal{S}$ de complexes linéaires conjugués, $\mathcal{C}_{j+2}$ est, par définition de $\mathcal{S}$, le conjugué (polaire réciproque) de $\mathcal{C}_j$ par rapport à $\mathcal{C}_{j+1}$, quel que soit j. Dans un cycle de p complexes linéaires conjugués, ceux-ci possèdent la propriété précédente, et, en outre, $\mathcal{C}_1$ est le conjugué de $\mathcal{C}_{p-1}$ par rapport à $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_2$ est le conjugué de $\mathcal{C}_p$ par rapport à $\mathcal{C}_1$. Chaque suite ou cycle appartient à un faisceau.

Nous étudierons aussi les produits de transformations par polaires réciproques relatives à des complexes non spéciaux d'un faisceau de complexes linéaires.

Les résultats auxquels on aboutit dans les divers domaines envisagés peuvent être mis sous une forme *très simple*.

Dans la première partie de ce travail, nous préciserons et étendrons des propriétés des complexes linéaires et nous en signalerons de nouvelles.

Dans la seconde partie, nous considérerons les faisceaux de complexes linéaires. Nous y indiquerons des propriétés de ces faisceaux et nous y étudierons notamment :

le lieu des conjuguées d'une droite par rapport aux complexes d'un faisceau ;

les suites et cycles de complexes linéaires conjugués ;

les produits de transformations par polaires réciproques relatives à des complexes non spéciaux d'un faisceau.

Dans la troisième partie, nous donnerons des indications succinctes sur des cas particuliers intéressants relatifs aux faisceaux de complexes linéaires.

Nous ne nous proposons donc pas d'exposer ici toutes les propriétés des complexes linéaires et des faisceaux de tels complexes, mais d'en indiquer de nouvelles, d'une grande importance, après en avoir précisé ou étendu certaines propriétés connues.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPLEXES LINÉAIRES.

CHAPITRE UNIQUE.

PROPRIÉTÉS DIVERSES.

1. Remarque préliminaire sur l'orientation d'un trièdre. — Pour éviter des confusions, nous dirons qu'un trièdre $Oxyz$ a l'orientation *de gauche à droite* quand un observateur placé, les pieds en O et la tête sur la demi-droite Oz et regardant l'angle xOy, voit Ox à sa gauche et Oy à sa droite. Si une demi-droite d'origine O tourne autour de O, dans le plan xOy et dans l'angle xOy, de Ox vers Oy et toujours dans le même sens, l'observateur la voit se déplacer *de sa gauche vers sa droite*.

Un trièdre $Oxyz$ a l'orientation *de droite à gauche* dans le cas contraire.

Lorsque nous utiliserons des axes de référence, ils seront trirectangles et les échelles seront les mêmes pour les trois axes.

2. Remarques préliminaires sur quelques points du calcul vectoriel. — Si un vecteur quelconque $\vec{a}$ (libre, glissant ou lié) et un autre vecteur quelconque $\vec{b}$ ont même direction, même sens et même longueur, nous dirons qu'ils sont *égaux* et nous écrirons $\vec{a} = \vec{b}$. Nous n'emploierons donc pas l'expression « équipollent ».

Certains auteurs adoptent une définition du *produit vectoriel* telle que, pour des axes de coordonnées d'orientations opposées, les formules donnant les composantes du produit vectoriel suivant les axes doivent être changées de signe. Il en résulte une complication qu'il vaut mieux éviter.

De même que le font d'autres auteurs, nous appellerons *produit* *vectoriel* d'un vecteur quelconque $\vec{U}_1$ par un vecteur quelconque $\vec{U}_2$ un vecteur libre $\vec{V}$, représenté par $\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2$ et défini comme suit :

1° il est perpendiculaire à $\vec{U}_1$ et à $\vec{U}_2$ et son sens est tel que le trièdre formé à partir d'une même origine par des vecteurs égaux à $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$ et $\vec{V}$ ait même orientation que le trièdre $Oxyz$ des axes ;

2° sa longeur est égale à la surface du parallélogramme construit sur des vecteurs, de même origine, égaux à $\vec{U}_1$ et à $\vec{U}_2$.

Soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes de $\vec{U}_1$ suivant les axes de coordonnées et X_2, Y_2, Z_2 celles de $\vec{U}_2$. Les composantes de $\vec{V}$ sont

$$Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, \qquad Z_1 X_2 - X_1 Z_2, \qquad X_1 Y_2 - Y_1 X_2,$$

quelle que soit l'orientation des axes.

Ces expressions définissent $\vec{V}$ dans le cas où les composantes X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 *ne sont pas toutes réelles.*

Le *moment* d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ en un point C est un vecteur lié à C, égal à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Soient x, y, z les coordonnées du point A et X, Y, Z les composantes de $\overrightarrow{AB}$ suivant les axes de coordonnées. Le moment de $\overrightarrow{AB}$ à l'origine O des coordonnées a pour composantes

$$yZ - zY, \qquad zX - xZ, \qquad xY - yX.$$

Le *produit scalaire* $\vec{U}_1 . \vec{U}_2$ de deux vecteurs quelconques, de composantes X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2, est

$$\vec{U}_1 . \vec{U}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2, \tag{1}$$

quelle que soit l'orientation des axes.

3. Coordonnées plückériennes d'une droite. — 1° *Droite passant par un point donné et dont on connaît les paramètres directeurs* X, Y, Z. — Soient L, M, N les composantes suivant les axes du moment, par rapport à l'origine O des coordonnées, du vecteur (X, Y, Z), d'origine (x, y, z), placé sur la droite. On a

$$L = yZ - zY, \qquad M = zX - xZ, \qquad N = xY - yX. \tag{2}$$

L, M, N, X, Y, Z sont les *coordonnées plückériennes* de la droite par rapport au trièdre trirectangle de référence.

Supposons donné un système de six nombres L, M, N, X, Y, Z *non tous nuls,* satisfaisant à

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Il détermine une droite. Si $X = Y = Z = 0$, cette droite est la droite à l'*infini* du plan $L\mathfrak{X} + M\mathfrak{Y} + N\mathfrak{Z} = 0$, où $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sont les coordonnées courantes.

2° *Droites passant par deux points donnés.* — Soient x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées cartésiennes des deux points; x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 et x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 leurs coordonnées *homogènes.* On déduit facilement de (2) que les coordonnées plückériennes de la droite passant par ces deux points sont

$$\begin{gathered} y_1 z_2 - z_1 y_2, \qquad z_1 x_2 - x_1 z_2, \qquad x_1 y_2 - y_1 x_2, \\ x_2 - x_1, \qquad y_2 - y_1, \qquad z_2 - z_1 \end{gathered}$$

ou encore

$$\begin{gathered} y'_1 z'_2 - z'_1 y'_2, \qquad z'_1 x'_2 - x'_1 z'_2, \qquad x'_1 y'_2 - y'_1 x'_2, \\ x'_2 t'_1 - x'_1 t'_2, \qquad y'_2 t'_1 - y'_1 t'_2, \qquad z'_2 t'_1 - z'_1 t'_2. \end{gathered}$$

3° *Intersection de deux plans.* — Soient

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0, \qquad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0$$

les équations des deux plans, que nous supposons d'abord *non parallèles.* Comme leur intersection est perpendiculaire aux deux directions $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, on peut prendre

$$(3) \qquad X = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2, \qquad Y = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2, \qquad Z = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2.$$

De ces trois quantités, une au moins est différente de zéro, Z par exemple. L'intersection des deux plans donnés perce le plan xOy au point de coordonnées $\frac{-\beta_2\delta_1 + \beta_1\delta_2}{Z}$, $\frac{\alpha_2\delta_1 - \alpha_1\delta_2}{Z}$, 0. Au moyen de (2), on obtient

$$(4) \qquad L = \alpha_2\delta_1 - \alpha_1\delta_2, \qquad M = \beta_2\delta_1 - \beta_1\delta_2, \qquad N = \gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2.$$

Quand les deux plans sont *parallèles*, leur intersection est la droite à l'infini du plan $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0$ et ses coordonnées plückériennes sont

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0,$$

d'après la fin du paragraphe 3, 1°. Ces dernières valeurs sont égales, à un même coefficient près, aux limites des précédentes pour α_2, β_2, γ_2 tendant simultanément vers α_1, β_1, γ_1.

4° *Droite définie par ses équations paramétriques.* — Soient

$$x = \frac{a_1 u + b_1}{cu + d}, \qquad y = \frac{a_2 u + b_2}{cu + d}, \qquad z = \frac{a_3 u + b_3}{cu + d}$$

les équations paramétriques de la droite. Si l'on considère les deux points de la droite correspondant à $u = 0$ et à $u = \infty$, on voit, d'après le paragraphe 3, 2°, que

$$(5) \qquad L = a_2 b_3 - a_3 b_2, \qquad M = a_3 b_1 - a_1 b_3, \qquad N = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$
$$(6) \qquad X = b_1 c - a_1 d, \qquad Y = b_2 c - a_2 d, \qquad Z = b_3 c - a_3 d.$$

5° *Condition de rencontre de deux droites définies par leurs coordonnées plückériennes.* — Soient $L_1, \ldots, Z_1$ les coordonnées plückériennes d'une droite ; $L_2, \ldots, Z_2$ celles de l'autre. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux droites se rencontrent (à distance finie ou à l'infini) est

$$(7) \qquad L_1 X_2 + M_1 Y_2 + N_1 Z_2 + L_2 X_1 + M_2 Y_1 + N_2 Z_1 = 0.$$

4. Complexes linéaires. — Soient L, M, N, X, Y, Z les coordonnées plückériennes d'une droite par rapport a un système d'axes trirectangles, d'origine O. Un *complexe linéaire* est un ensemble de droites, dépendant de trois paramètres, défini par

$$(8) \qquad AL + BM + CN + DX + EY + FZ = 0.$$

A, B, C, D, E, F sont des constantes, *réelles ou imaginaires,* non toutes nulles.

Si, conservant les axes de coordonnées Ox, Oz, on changeait le sens de Oy, ce qui inverserait l'*orientation* des axes, L, N et Y changeraient de signe et, par suite, pour avoir encore le même complexe, il faudrait changer le signe de A, C, E dans (8). Faute de quoi, le complexe défini par (8) serait le symétrique du précédent par rapport au plan zOx.

Le complexe est dit *spécial* quand $AD + BE + CF = 0$. Il est alors formé des droites rencontrant la droite de coordonnées plückériennes D, E, F, A, B, C, appelée *axe* du complexe spécial. Il comprend la dite droite.

Si $A = B = C = 0$, avec D, E, F non tous nuls, cette droite est l'intersection du plan $Dx + Ey + Fz = 0$ et du plan de l'infini. Le complexe est formé des droites parallèles au plan $Dx + Ey + Fz = 0$.

Si $D = E = F = 0$, avec A, B, C non tous nuls, l'axe du complexe spécial passe par l'origine.

Nous supposerons toujours, sauf mention spéciale, que A, B, C ne sont pas nuls ensemble et, en outre, pour le cas où A, B, C ne sont pas tous réels, que l'on a

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

5. Système de vecteurs associé à un complexe linéaire. — Considérons *un* des systèmes *équivalents* de vecteurs dont la résultante générale est le vecteur (A, B, C) et dont le moment résultant en O est le vecteur (D, E, F). Soit $\mathfrak{S}$ ce système de vecteurs.

Le moment résulant de $\mathfrak{S}$ en un point quelconque (x, y, z) a pour composantes

$$D - Cy + Bz, \qquad E - Az + Cx, \qquad F - Bx + Ay.$$

L'axe central de $\mathfrak{S}$ a donc pour équations

$$D - Cy + Bz = \nu A, \qquad E - Az + Cx = \nu B, \qquad F - Bx + Ay = \nu C,$$

en posant

$$\nu = \frac{AD + BE + CF}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

On voit immédiatement que *les coordonnées plückériennes de l'axe central de* $\mathfrak{S}$ sont

$$D - \nu A, \quad E - \nu B, \quad F - \nu C, \quad A, \quad B, \quad C.$$

Considérons *les droites par rapport auxquelles le moment de* $\mathfrak{S}$ *est nul.* Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ les vecteurs libres dont les composantes suivant les axes sont A, B, C et D, E, F; $\vec{\mathcal{R}}$ un vecteur placé sur une des droites considérées; P un point de cette droite; $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ le moment de $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ en O. On a

$$\left(\vec{V}+\vec{U}\wedge\overrightarrow{OP}\right).\vec{\mathcal{R}}=0,$$

d'où

$$\vec{V}.\vec{\mathcal{R}}+\vec{U}.\left(\overrightarrow{OP}\wedge\vec{\mathcal{R}}\right)=0$$

et

$$\vec{U}.\overrightarrow{\mathcal{M}}+\vec{V}.\vec{\mathcal{R}}=0.$$

C'est l'équation, sous une forme vectorielle, du *complexe linéaire*, $\mathcal{C}$, dont nous sommes parti.

Cette propriété subsisterait évidemment si, dans la définition de $\mathcal{S}$, on remplaçait A, B, ... F par ces quantités multipliées par un *même coefficient* non nul. Mais, pour la commodité du langage, nous dirons que $\mathcal{S}$, tel qu'il a été défini au début du paragraphe, est le système de vecteurs *associé* à $\mathcal{C}$.

Quand $\vec{U}.\vec{V}=AD+BE+CF=0$, on a $\nu=0$; le système de vecteurs $\mathcal{S}$ se réduit à un vecteur *unique*, dont le support constitue, par suite, l'axe central du système.

6. **Effet sur l'équation d'un complexe linéaire d'un changement de système d'axes trirectangles de coordonnées.** — Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ les vecteurs libres dont les composantes suivant les premiers axes sont A, B, C et D, E, F; $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ un vecteur placé sur une droite du complexe $\mathcal{C}$; O′ la nouvelle origine des axes; $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}'}$ les moments de $\vec{\mathcal{R}}$ en O et O′. Les nouveaux axes ont même orientation que les premiers.

Par rapport aux axes primitifs, l'équation du complexe $\mathcal{C}$ est

$$\varphi \equiv AL+BM+\ldots+FZ=0,$$

avec

$$\varphi=\vec{U}.\overrightarrow{\mathcal{M}}+\vec{V}.\vec{\mathcal{R}}=0.$$

Mais

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}=\overrightarrow{\mathcal{M}'}-\vec{\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{OO'}.$$

D'où

$$\varphi=\vec{U}.\overrightarrow{\mathcal{M}'}-\vec{U}.\left(\vec{\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{OO'}\right)+\vec{V}.\vec{\mathcal{R}}=0$$

et

$$\varphi = \vec{U}.\overrightarrow{\mathfrak{M}'} + \vec{\mathfrak{R}}.(\vec{U} \wedge \overrightarrow{OO'} + \vec{V}). \tag{9}$$

Soient L', M', N' et X', Y', Z' les composantes de $\overrightarrow{\mathfrak{M}'}$ et de $\vec{\mathfrak{R}}$ suivant les nouveaux axes. On a

$$\varphi = A'L' + B'M' + C'N' + D'X' + E'Y' + F'Z',$$

où A', B', ..., F' sont de nouveaux coefficients constants à déterminer.

On voit, par (9), que A', B', C' sont les composantes de $\vec{U}$ suivant les nouveaux axes et que D', E', F' sont les composantes suivant les nouveaux axes de

$$\vec{V} + \vec{U} \wedge \overrightarrow{OO'}.$$

On en déduit d'abord que

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = A^2 + B^2 + C^2. \tag{10}$$

De plus,

$$A'D' + B'E' + C'F' = \vec{U}.(\vec{V} + \vec{U} \wedge \overrightarrow{OO'}) = \vec{U}.\vec{V}.$$

Donc

$$A'D' + B'E' + C'F' = AD + BE + CF. \tag{11}$$

La quantité

$$\nu = \frac{AD + BE + CF}{A^2 + B^2 + C^2} \tag{12}$$

s'appelle le *paramètre* du complexe. Nous avons déjà rencontré cette quantité au paragraphe 5.

$A^2 + B^2 + C^2$, $AD + BE + CF$ et ν sont donc des *invariants* pour les changements considérés d'axes de coordonnées.

Le système de vecteurs $\mathfrak{S}$ dont la résultante générale et le moment résultant en O ont pour composantes A, B, C et D, E, F suivant les premiers axes, et le système de vecteurs dont la résultante générale et le moment résultant en O′ ont pour composantes A', B', C' et D', E', F', suivant les nouveaux axes, sont équivalents.

Le système de vecteurs *associé* au complexe linéaire, défini pour chaque système d'axes d'après l'équation du complexe relative à ces axes, est donc *invariant* pour les changements d'axes considérés. D'ailleurs, φ est le moment de $\mathfrak{S}$ et $\vec{\mathfrak{R}}$.

Supposons que les cosinus directeurs des nouveaux axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, par rapport aux premiers, soient donnés par le tableau

	Ox	Oy	Oz
$O'x'$	α	α'	α''
$O'y'$	β	β'	β''
$O'z'$	γ	γ'	γ''

Appelons a, b, c les coordonnées de O' par rapport à $Oxyz$. On a

$$A' = A\alpha + B\alpha' + C\alpha'', \quad \ldots, \quad \ldots; \tag{13}$$

$$D' = (D + Bc - Cb)\alpha + (E + Ca - Ac)\alpha' + (F + Ab - Ba)\alpha'', \quad \ldots, \quad \ldots. \tag{14}$$

En remplaçant α, α', α'' respectivement par β, β', β'' dans A' et D', on obtient B' et E', et en les remplaçant par γ, γ', γ'' dans A' et D' encore, on obtient C' et F'.

7. **Plan polaire d'un point par rapport à un complexe linéaire.** — Nous appelons :

plan polaire d'un point, un plan contenant ce point et tel que toutes les droites du plan qui passent par ce point appartiennent au complexe ;

pôle d'un plan, un point de ce plan tel que toutes les droites du plan qui passent par ce point appartiennent au complexe.

Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes d'un point. Toute droite passant par ce point et appartenant au complexe est telle que

$$A(y\mathfrak{Z} - z\mathfrak{Y}) + B(z\mathfrak{X} - x\mathfrak{Z}) + \ldots + D(\mathfrak{X} - x) + \ldots = 0,$$

équation dans laquelle $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sont les coordonnées courantes.

Cette équation peut s'écrire

$$u\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + w\mathfrak{Z} + r = 0, \tag{15}$$

avec

$$
(16) \qquad \left\{\begin{aligned}
u &= \mathrm{B}z_0 - \mathrm{C}y_0 + \mathrm{D}t_0,\\
v &= \mathrm{C}x_0 - \mathrm{A}z_0 + \mathrm{E}t_0,\\
w &= \mathrm{A}y_0 - \mathrm{B}x_0 + \mathrm{F}t_0,\\
r &= -\mathrm{D}x_0 - \mathrm{E}y_0 - \mathrm{F}z_0,
\end{aligned}\right.
$$

x_0, y_0, z_0, t_0 étant les coordonnées *homogènes* du point considéré.

On a

$$\mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \mathrm{C}w = (\mathrm{AD} + \mathrm{BE} + \mathrm{CF})t_0.$$

Le déterminant des coefficients de x_0, y_0, z_0, t_0 dans les membres de droite de (16) est égal à $(\mathrm{AD} + \mathrm{BE} + \mathrm{CF})^2$.

1° Si le complexe *n'est pas spécial*, on a $\mathrm{AD} + \mathrm{BE} + \mathrm{CF} \neq 0$. u, v, w, r ne peuvent pas être nuls ensemble, puisque x_0, y_0, z_0, t_0 ne sont pas tous nuls. L'équation (15) définit donc *un plan*, qui est le plan polaire du point par rapport au complexe non spécial considéré. Pour $t_0 \neq 0$, u, v, w ne peuvent pas être nuls ensemble.

2° Si le complexe est *spécial*, on a $\mathrm{AD} + \mathrm{BE} + \mathrm{CF} = 0$.

Le complexe est formé des droites rencontrant la droite de coordonnées plückériennes D, E, F, A, B, C appelée axe du complexe spécial. Il comprend la dite droite.

Quand le point considéré n'est pas placé sur cet axe, il a un plan polaire *unique*, qui est le plan passant par le point et par l'axe du complexe; ce plan est encore défini par (15) et (16).

Dans le cas contraire, tout plan passant par le point est un plan polaire de ce point; les équations (15) et (16) ne définissent plus de plan, car les formules (16) donnent alors $u = v = w = r = 0$.

8. **Pôle d'un plan par rapport à un complexe linéaire.** — 1° Si le complexe *n'est pas spécial*, un plan d'équation (15) a *un* pôle bien déterminé, dont les coordonnées homogènes se déduisent de (16) et sont

$$
(17) \qquad \left\{\begin{aligned}
x_0 &= \mathrm{F}v - \mathrm{E}w - \mathrm{A}r,\\
y_0 &= \mathrm{D}w - \mathrm{F}u - \mathrm{B}r,\\
z_0 &= \mathrm{E}u - \mathrm{D}v - \mathrm{C}r,\\
t_0 &= \mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \mathrm{C}w.
\end{aligned}\right.
$$

Toutes les droites d'un complexe *non spécial* qui passent par le pôle d'un plan sont situées dans ce plan et toutes les droites d'un tel complexe qui sont situées dans un plan passent par le pôle de ce plan.

Si $Au + Bv + Cw = 0$, le pôle est dans le plan de l'infini.

2° Considérons maintenant un *complexe spécial.*

Si $Au + Bv + Cw \neq 0$, le plan ne passe pas par l'axe du complexe spécial et ne lui est pas parallèle. Il a un pôle *unique,* qui est le point où ce plan coupe ledit axe. Ce pôle est encore défini par les formules (17).

Supposons maintenant $Au + Bv + Cw = 0$.

Quand le plan, qui est parallèle à l'axe du complexe spécial, ne contient pas cet axe, il a encore *un* seul pôle : c'est le point à l'infini de l'axe, qui satisfait à (17).

Quand le plan passe par ledit axe, chacun des points du plan est un pôle de ce dernier ; les formules (17) ne définissent plus un point, car elles donnent alors $x_0 = y_0 = z_0 = t_0 = 0$.

9. **Diamètres.** — Considérons les plans parallèles au plan P, d'équation

$$u\mathcal{X} + v\mathcal{Y} + w\mathcal{Z} = 0.$$

Le *diamètre* correspondant est le lieu des pôles de ces plans parallèles, c'est-à-dire la *droite* lieu du point défini, en général, par (17), où r varie seul.

1° Supposons d'abord $Au + Bv + Cw \neq 0$.

Les formules (5) et (6), dans lesquelles il faut faire ici $c = 0$, montrent que le diamètre a pour coordonnées plückériennes

$$D - ku, \quad E - kv, \quad F - kw, \quad A, \quad B, \quad C,$$

avec

$$k = \frac{AD + BE + CF}{Au + Bv + Cw}. \tag{18}$$

Le diamètre est donc *parallèle* au vecteur $\vec{U}$, de composantes A, B, C.

Si le complexe est *spécial*, $k = 0$, et le diamètre est confondu avec l'axe du complexe spécial.

2° Supposons maintenant $Au + Bv + Cw = 0$.

La droite à l'infini du plan P a pour coordonnées plückériennes u, v, w, o, o, o. Elle appartient donc au complexe.

Si ce dernier *n'est pas spécial*, la droite à l'infini de P est le diamètre cherché.

Si le complexe est *spécial*, celui des plans parallèles à P qui contient l'axe du complexe spécial admet pour pôle chacun de ses points.

10. Axe d'un complexe linéaire. — L'axe d'un complexe linéaire est le diamètre correspondant à la direction de plans perpendiculaire à $\vec{U}$, c'est-à-dire perpendiculaire au diamètre lui-même.

On peut donc prendre

$$u = A, \qquad v = B, \qquad w = C.$$

Les coordonnées plückériennes de l'axe sont

$$D - \nu A, \qquad E - \nu B, \qquad F - \nu C, \qquad A, \quad B, \quad C,$$

avec

$$\nu = \frac{AD + BE + CF}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Nous avons dit au paragraphe 6 que ν est le *paramètre* du complexe.

Si le complexe est *spécial*, on a $\nu = 0$ et l'on retrouve les coordonnées plückériennes de la droite que nous avons appelée axe du complexe spécial et qui rencontre toutes les autres droites de ce complexe.

L'axe du complexe linéaire, spécial ou non, est, d'après le paragraphe 5, confondu avec *l'axe central* du système de vecteurs *associé* au complexe.

11. Coordonnées plückériennes de la conjuguée d'une droite par rapport à un complexe linéaire. — Soient P_1 et P_2 deux points quelconques d'une droite D de coordonnées plückériennes L, M, N, X, Y, Z; x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 les coordonnées homogènes de P_1 et de P_2. On suppose que chacun de ces points n'a qu'un plan polaire par rapport au complexe.

Considérons l'intersection des plans polaires de P_1 et de P_2 et désignons ses coordonnées plückériennes par L', M', N', X', Y', Z'.

Les plans polaires sont définis par (15) et (16) et les coordonnées plückériennes de leur intersection sont données par (3) et (4). On a

$$(19)\qquad L' = D\theta - \omega L,\qquad M' = E\theta - \omega M,\qquad N' = F\theta - \omega N,$$

$$(20)\qquad X' = A\theta - \omega X,\qquad Y' = B\theta - \omega Y,\qquad Z' = C\theta - \omega Z,$$

avec

$$(21)\qquad \omega = AD + BE + CF,$$

$$(22)\qquad \theta = AL + BM + CN + DX + EY + FZ.$$

La droite ainsi obtenue, qui ne dépend pas de la position de P_1 et P_2 sur D, est la *conjuguée* de D par rapport au complexe.

Si le complexe n'est pas spécial, c'est-à-dire si $\omega \neq 0$, on peut résoudre (19) et (20) par rapport à L, M, ..., Z et l'on retrouve des expressions analogues aux premières. Cela correspond au fait qu'en raison de la définition géométrique de la conjuguée d'une droite, il y a réciprocité entre ces deux droites dans le cas présent.

Si le complexe est spécial, c'est-à-dire si $\omega = 0$, cette réciprocité n'existe plus. Les conjuguées de toutes les droites qui n'appartiennent pas au complexe sont confondues avec l'axe de ce dernier, ce qui est en accord avec les formules (19) à (22). Mais la droite conjuguée de cet axe est indéterminée.

12. Couples de complexes linéaires. — Les axes trirectangles de coordonnées sont toujours quelconques. Soit O leur origine.

Considérons les deux complexes linéaires

$$(23)\qquad \varphi_1 \equiv A_1L + B_1M + \ldots + F_1Z = 0,\qquad \varphi_2 \equiv A_2L + B_2M + \ldots + F_2Z = 0.$$

A_1, B_1, ..., F_1, A_2, B_2, ..., F_2 sont réels ou imaginaires.

Posons

$$(24)\qquad \sigma_1 = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2,\qquad \sigma_2 = A_2^2 + B_2^2 + C_2^2,$$

$$(25)\qquad \sigma_{1,2} = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2,$$

$$(26)\qquad \omega_1 = A_1D_1 + B_1E_1 + C_1F_1,\qquad \omega_2 = A_2D_2 + B_2E_2 + C_2F_2,$$

$$(27)\qquad \omega_{1,2} = A_1D_2 + B_1E_2 + C_1F_2 + A_2D_1 + B_2F_1 + C_2F_1.$$

Soient $\vec{U}_1$ et $\vec{V}_1$ les vecteurs libres dont les composantes suivant les axes sont A_1, B_1, C_1 et D_1, E_1, F_1 ; $\vec{U}_2$ et $\vec{V}_2$ les vecteurs libres dont les composantes suivant les axes sont A_2, B_2, C_2 et D_2, E_2, F_2.

Adoptons un nouveau système d'axes trirectangles, d'origine O′, ayant même orientation que le système primitif.

Soient A'_1, B'_1, ... F'_1, A'_2, B'_2, ..., F'_2 les coefficients des nouvelles équations des complexes.

D'après le paragraphe 6, A'_1, B'_1, C'_1 sont les composantes de $\vec{U}_1$ suivant les nouveaux axes; A'_2, B'_2, C'_2 celles de $\vec{U}_2$; D'_1, E'_1, F'_1 et D'_2, E'_2, F'_2 celles de

$$\vec{V}_1 + \vec{U}_1 \wedge \overrightarrow{OO'} \qquad \text{et de} \qquad \vec{V}_2 + \vec{U}_2 \wedge \overrightarrow{OO'}.$$

Les quantités σ_1, σ_2, $\sigma_{1,2}$, ω_1, ω_2, $\omega_{1,2}$ sont des *invariants pour les changements considérés d'axes de coordonnées.*

On le voit facilement pour les cinq premières. Par exemple,

$$\sigma'_{1,2} = A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2 = \vec{U}_1 . \vec{U}_2 = \sigma_{1,2}.$$

Pour la dernière, soit $\omega'_{1,2}$ la quantité nouvelle correspondante. On a

$$\omega'_{1,2} = \vec{U}_1 . \left(\vec{V}_2 + \vec{U}_2 \wedge \overrightarrow{OO'}\right) + \vec{U}_2 . \left(\vec{V}_1 + \vec{U}_1 \wedge \overrightarrow{OO'}\right).$$

Mais

$$\vec{U}_1 . \left(\vec{U}_2 \wedge \overrightarrow{OO'}\right) + \vec{U}_2 . \left(\vec{U}_1 \wedge \overrightarrow{OO'}\right) = 0.$$

Donc

$$\omega'_{1,2} = \vec{U}_1 . \vec{V}_2 + \vec{U}_2 . \vec{V}_1 = \omega_{1,2}.$$

Notons encore que

$$(B_1 C_2 - C_1 B_2)^2 + (C_1 A_2 - A_1 C_2)^2 + (A_1 B_2 - B_1 A_2)^2 = \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_{1,2}^2$$

est un *invariant* pour tout changement d'axes trirectangles de coordonnées.

13. Complexes linéaires conjugués par rapport à un autre. — 1° Considérons les deux complexes d'équations (23).

Cherchons les conjuguées par rapport au complexe $\mathcal{C}_2$, d'équation $\varphi_2 = 0$, supposé *non spécial*, des droites du complexe $\mathcal{C}_1$, d'équation $\varphi_1 = 0$.

Soient L , M′, ..., Z′ les coordonnées plückériennes de la conjuguée par rapport à $\mathcal{C}_2$ d'une droite quelconque, de coordonnées pluckériennes L, M, ..., Z. Cette dernière droite est aussi la conjuguée de la première par rapport à $\mathcal{C}_2$. On obtient donc L, M, ..., Z, en fonction de L', M', ..., Z', en remplaçant dans les formules (19) à (22) A, B, ..., F par A_2, B_2, ..., F_2; en permutant dans ces formules L et L', M et M', ..., Z et Z' et en y remplaçant, dans θ, les quantités L, M, ..., Z par L', M', ..., Z'.

Portant ces valeurs de L, M, ..., Z, en fonction de L', M', ..., Z', dans φ_1, on trouve que

$$-\varphi_1 \equiv (A_1\omega_2 - A_2\omega_{1,2})L' + \ldots + (F_1\omega_2 - F_2\omega_{1,2})Z'.$$

Le lieu cherché, qui correspond à $\varphi_1 = 0$, est donc le *complexe linéaire,* $\mathcal{C}_3$, d'équation

$$\omega_2\varphi_1 - \omega_{1,2}\varphi_2 = 0. \tag{28}$$

C'est le *conjugué* (polaire réciproque) du complexe $\mathcal{C}_1$ par rapport au complexe $\mathcal{C}_2$.

Si $\mathcal{C}_1$, non plus, n'est pas spécial, le conjugué de $\mathcal{C}_2$ par rapport à $\mathcal{C}_1$ a pour équation

$$\omega_1\varphi_2 - \omega_{1,2}\varphi_1 = 0.$$

2° Deux complexes *non spéciaux* sont en *involution* quand chacun d'eux est son propre conjugué par rapport à l'autre. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que

$$\omega_{1,2} = 0.$$

Considérons le cas où $\mathcal{C}_1$, par exemple, est *spécial,* sans que $\mathcal{C}_2$ le soit, et où l'on a $\omega_{1,2} = 0$. La relation $\omega_{1,2} = 0$ montre que l'axe de $\mathcal{C}_1$ appartient à $\mathcal{C}_2$. $\mathcal{C}_1$ est son propre conjugué par rapport à $\mathcal{C}_2$. Mais le conjugué de $\mathcal{C}_2$ par rapport à $\mathcal{C}_1$ comprend toutes les droites de l'espace, puisque tout plan passant par l'axe de $\mathcal{C}_1$ admet chacun de ses points comme pôle par rapport à $\mathcal{C}_1$. Il y a donc indétermination en ce qui concerne le conjugué de $\mathcal{C}_2$ par rapport au complexe spécial $\mathcal{C}_1$.

3° Considérons maintenant le cas où $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ *ne sont pas spéciaux et ne sont pas en involution.*

Le conjugué de $\mathcal{C}_1$ par rapport à $\mathcal{C}_2$ est identique à celui de $\mathcal{C}_2$ par rapport à $\mathcal{C}_1$ si

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_1 \omega_2.$$

Cette dernière remarque nous a conduit à la théorie des *suites* et *cycles* de complexes linéaires conjugués, que nous exposerons dans les chapitres IV et V de la seconde partie.

14. Équation réduite d'un complexe linéaire, l'axe des z étant placé sur l'axe du complexe. — Nous supposons désormais et jusqu'à la fin du paragraphe 21, que les coefficients A, B, C, D, E, F sont *réels. L'axe du complexe et son paramètre sont donc réels.*

Prenons l'axe des z sur l'axe du complexe.

En raison de ce choix, les coordonnées plückériennes de l'axe sont nulles sauf la dernière. On a donc

$$A = B = D = E = 0, \qquad \nu = \frac{F}{C};$$

et l'équation du complexe s'écrit

$$N + \nu Z = 0. \tag{29}$$

Nous supposerons le complexe *non spécial* ($\nu \neq 0$).

Un changement *d'orientation* des axes de coordonnées entraîne le changement de signe de ν.

15. Plan polaire d'un point dans le cas des axes de coordonnées du paragraphe 14. — Les formules (16) donnent

$$u = -y_0, \qquad v = x_0, \qquad w = \nu t_0, \qquad r = -\nu z_0. \tag{30}$$

Le plan polaire du point de coordonnées cartésiennes x, y, z est donc le plan

$$x\mathfrak{Y} - y\mathfrak{X} + \nu(\mathfrak{Z} - z) = 0, \tag{31}$$

comme on le déduit également de (29). $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sont des coordonnées cartésiennes courantes.

16. Pôle d'un plan dans le cas des axes de coordonnées du paragraphe 14. — Les formules (17) donnent

$$x_0 = \nu v, \qquad y_0 = -\nu u, \qquad z_0 = -r, \qquad t_0 = w. \tag{32}$$

17. Conjuguée d'une droite dans le cas des axes de coordonnées du paragraphe 14. — Appliquons les formules (19) à (22) en y faisant

$$A = B = 0, \qquad C = 1, \qquad D = E = 0, \qquad F = \nu.$$

D'où

$$\theta = N + \nu Z, \qquad \omega = \nu.$$

La conjuguée, d', d'une droite d a pour coordonnées plückériennes

$$L' = -\nu L, \qquad M' = -\nu M, \qquad N' = \nu^2 Z, \tag{33}$$

$$X' = -\nu X, \qquad Y' = -\nu Y, \qquad Z' = N. \tag{34}$$

Considérons un vecteur glissant (X, Y, Z) placé sur d et remarquons que, d'après (34), on peut placer sur d' un vecteur glissant $\left(-X, -Y, \frac{N}{\nu}\right)$ Le système formé par ces deux vecteurs a *pour axe central l'axe du complexe.*

On sait que la perpendiculaire commune à d et à d' rencontre l'axe du complexe et lui est perpendiculaire. Soient a, b, b' les points où elle coupe respectivement l'axe du complexe et les droites d et d'. On a

$$\frac{\overrightarrow{ab'}}{\overrightarrow{ab}} = -\frac{\nu Z}{N}.$$

La cote de la perpendiculaire commune à d et à d' est égale à $\frac{MX - LY}{X^2 + Y^2}$, pour $X^2 + Y^2 \neq 0$. Elle est indépendante de ν.

Signalons la propriété suivante : *les projections de deux droites conjuguées sur un plan quelconque* Q *passant par l'axe du complexe se coupent sur cet axe.* Leur intersection est la projection commune sur l'axe du complexe des deux points où le plan perpendiculaire à Q suivant cet axe coupe les deux droites conjuguées.

On vérifiera aussi que les droites

$$Ax + By + D = 0, \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0 \tag{35}$$

et

$$Ax + By - \frac{\nu(AB_1 - BA_1)}{C_1} = 0, \qquad A_1 x + B_1 y - \frac{\nu(AB_1 - BA_1)}{D} z = 0 \tag{36}$$

sont conjuguées par rapport au complexe.

18. Courbes d'un complexe linéaire. — Ce sont des courbes dont les tangentes appartiennent au complexe.

Nous supposons encore que l'axe des z est placé sur l'axe du complexe.

On sait que toute courbe d'un complexe linéaire, $\mathcal{C}$, a pour plan *osculateur* en un point P quelconque, de coordonnées cartésiennes x, y, z, le plan polaire de P par rapport au complexe et que le rayon de torsion en P est

$$\mathrm{T} = \frac{x^2 + y^2 + \nu^2}{\nu}, \tag{37}$$

ν étant toujours le paramètre du complexe. La formule est valable quelle que soit l'orientation des axes de coordonnées. ν change de signe quand cette orientation change [1].

Il convient d'ajouter quatre remarques importantes :

1° On voit d'abord que *la binormale à la courbe en* P *et le moment résultant en* P *du système de vecteurs* $\mathcal{S}$, *associé à* $\mathcal{C}$, *sont placés sur la même droite.*

2° Soit γ le cosinus d'un angle de cette droite et de celle qui porte l'axe des z. On a, d'après (30),

$$\gamma^2 = \frac{\nu^2}{x^2 + y^2 + \nu^2}. \tag{38}$$

D'où la formule *simple*

$$\mathrm{T}\gamma^2 = \nu. \tag{39}$$

Le produit du rayon de torsion par le carré du cosinus de l'angle de la binormale et de l'axe des z, placé sur l'axe du complexe, est donc constant en tous les points de toutes les courbes du complexe. Il est égal au paramètre ν du complexe.

---

[1] En ce qui concerne le signe du rayon de torsion, nous supposons, dans les deux cas d'orientation des axes de coordonnées, qu'on a $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{\mathrm{T}}$, ds étant l'élément d'arc compté positivement dans le sens positif de la tangente à la courbe, $\vec{n}$ et $\vec{b}$ les vecteurs unitaires correspondant aux sens positifs de la normale principale (vers le centre de courbure) et de la binormale.

3° Considérons *l'hélice* tracée sur un cylindre de révolution autour de Oz, ayant un pas réduit égal à ν et passant par le point P d'une courbe du complexe. On sait que son plan normal en P est le plan polaire de P par rapport au complexe. Il est donc confondu avec le plan osculateur en P à la courbe du complexe et, par suite, la binormale à cette dernière et la tangente à l'hélice sont placées sur la même droite.

Le rayon de torsion de l'hélice circulaire considérée, le même en tous ses points, et le rayon de torsion en P *de la courbe du complexe sont égaux en valeur absolue et de signes contraires.*

On vérifie, en particulier, que le rayon de torsion de ladite hélice, changé de signe, est égal au rayon de torsion des courbes du complexe situées sur le même cylindre de révolution et qui sont, elles aussi, des hélices, coupant la première à angle droit.

4° En coordonnées cylindriques r, θ, z (la droite des z étant toujours l'axe du complexe), on a, pour les courbes du complexe,

$$\nu\, dz + r^2\, d\theta = 0.$$

Il peut être fait de cette équation des applications très intéressantes. Elle montre que, le long d'une courbe du complexe, z est une fonction constamment croissante ou décroissante de θ suivant le signe de ν.

19. Transformation par polaires réciproques, $\mathcal{T}$, par rapport à un complexe linéaire. — Soient (a, ϖ) un élément de contact formé du point a et du plan ϖ passant par ce point; a' le pôle de ϖ par rapport au complexe linéaire $\mathcal{C}$ non spécial; ϖ' le plan polaire de a par rapport à $\mathcal{C}$. Les points a et a' sont placés dans ϖ. La droite aa' est située dans ϖ et passe par le pôle a' de ce plan; elle appartient donc au complexe. Comme elle passe par a, elle est située dans le plan polaire ϖ' de a. Donc ϖ' passe par a et les plans ϖ et ϖ' se coupent suivant la droite aa' du complexe.

Désignons par $\mathcal{T}$ *la transformation par polaires réciproques* relative à un complexe linéaire, $\mathcal{C}$, non spécial. Elle transforme donc un élément de contact (a, ϖ) en un autre élément de contact (a', ϖ').

Adoptons un système d'axes trirectangles dont l'origine O est un point quelconque de l'axe du complexe $\mathcal{C}$ et *dont l'axe des z est placé sur l'axe du complexe.*

Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes du point a; x', y', z' celles de a'. Puisque la droite aa' appartient au complexe, on a

$$xy' - yx' + \nu(z' - z) = 0. \tag{40}$$

La transformation *dualistique* $\mathfrak{T}$ est définie par (40), où, pour x, y, z donnés, on regarde x', y', z' comme des coordonnées courantes, et réciproquement.

Soient x, y, z, p, q et x', y', z', p', q' les coordonnées des éléments de contact (a, ϖ) et (a', ϖ'). Les équations de ϖ et de ϖ' sont

$$-p(\mathfrak{X} - x) - q(\mathfrak{Y} - y) + \mathfrak{Z} - z = 0, \tag{41}$$
$$-p'(\mathfrak{X} - x') - q'(\mathfrak{Y} - y') + \mathfrak{Z} - z' = 0, \tag{42}$$

formules dans lesquelles $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sont des coordonnées courantes.

On obtient, en comparant à (40),

$$x' = -\nu q, \qquad y' = \nu p, \qquad z' = z - px - qy; \tag{43}$$
$$x = -\nu q', \qquad y = \nu p', \qquad z = z' - p'x' - q'y'. \tag{44}$$

Si l'on prend (40) comme équation directrice d'une *transformation de contact* de la première classe, on retrouve (43) et (44). On a, quels que soient x, y, z, p, q, dx, dy, dz, dp, dq,

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = dz - p\,dx - q\,dy. \tag{45}$$

Soient s une surface; a un point de s et ϖ le plan tangent à s en a; ϖ' le plan polaire de a par rapport au complexe $\mathcal{C}$. Quand a se déplace sur s, ϖ' varie en fonction de deux paramètres et enveloppe, *en général*, une surface. Soit a' le point de contact de ϖ' et de s'.

Puisque $\mathfrak{T}$ est une transformation de contact, a' est le support ponctuel de l'élément de contact transformé de (a, ϖ) par $\mathfrak{T}$, donc le pôle de ϖ.

On le verrait facilement par un raisonnement géométrique direct.

Si s est développable, la surface polaire réciproque s' dégénère en une courbe.

20. Relations entre $\mathfrak{T}$ et des transformations par polaires réciproques relatives à des quadriques. — Conservons les axes du paragraphe précédent. L'axe Oz est placé sur l'axe, R, du complexe linéaire, $\mathcal{C}$.

1° Prenons dans le plan xOy la droite $y = x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, α étant un angle quelconque différent de zéro. Soit (l, m, n) le point symétrique de $a(x, y, z)$ par rapport à ladite droite. On a

$$(46) \qquad l = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad m = x\sin\alpha - y\cos\alpha, \qquad n = -z;$$

$$(47) \qquad x = l\cos\alpha + m\sin\alpha, \qquad y = l\sin\alpha - m\cos\alpha, \qquad z = -n.$$

Considérons le *paraboloïde hyperbolique*

$$(48) \qquad (\mathfrak{X}\sin\alpha - \mathfrak{Y}\cos\alpha)^2 - \mathfrak{Y}^2 - 2\nu\mathfrak{Z}\sin\alpha = 0,$$

dont l'équation s'écrit encore

$$(49) \qquad \mathfrak{X}^2\sin\alpha - 2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\cos\alpha - \mathfrak{Y}^2\sin\alpha - 2\nu\mathfrak{Z} = 0.$$

Ce paraboloïde hyperbolique a ses deux plans directeurs parallèles à Oz et perpendiculaires. Il est donc *équilatère*. *Il a pour sommet le point* O *et pour axe celui du complexe*. Il passe par la droite $y - x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0$ du plan xOy et par la perpendiculaire en O à cette droite et à Oz.

Le plan polaire du point (l, m, n) par rapport à cette quadrique a pour équation

$$(l\sin\alpha - m\cos\alpha)\mathfrak{X} - (l\cos\alpha + m\sin\alpha)\mathfrak{Y} - \nu\mathfrak{Z} - \nu n = 0.$$

Compte tenu de (47), on a

$$(50) \qquad y\mathfrak{X} - x\mathfrak{Y} - \nu\mathfrak{Z} - \nu z = 0$$

et, en vertu de (44),

$$(51) \qquad -p'(\mathfrak{X} - x') - q'(\mathfrak{Y} - y') + \mathfrak{Z} - z' = 0.$$

C'est l'équation (42) du plan ϖ'.

De même, ϖ est le plan polaire par rapport à la quadrique du point symétrique de a' par rapport à la droite considérée.

Donc *le symétrique de a (ou de a'), par rapport à une droite quelconque perpendiculaire à* R *et rencontrant cet axe, est le pôle de ϖ' (ou de ϖ) par rapport au paraboloïde hyperbolique défini ci-dessus.*

Si l'on prend un nouveau trièdre d'axes trirectangles $Ox_1y_1z_1$, déduit du premier par une rotation autour de Oz soit de $\frac{\alpha}{2}$, soit de $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$, le paraboloïde hyperbolique a pour nouvelle équation respectivement

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1+\nu\mathfrak{Z}_1=0 \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{X}_1^2-\mathfrak{Y}_1^2+2\nu\mathfrak{Z}_1=0.$$

Son axe, confondu avec l'axe R *du complexe, et sa forme, définie par le paramètre du complexe, ne dépendent donc que de ce dernier.*

Pour un complexe donné, si la droite dont on est parti subit une *translation parallèle à* Oz et une *rotation autour de* Oz, le paraboloïde hyperbolique *subit la même translation et la même rotation.*

2° Considérons maintenant le *paraboloïde*

$$\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2-2\nu\mathfrak{Z}=0, \tag{52}$$

de *révolution* autour de l'axe Oz, placé sur R, et de sommet O.

Prenons le symétrique de a par rapport à l'origine O et faisons tourner ce symétrique de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz, dans le sens positif correspondant à l'orientation, arbitraire, des axes. Nous obtenons le point $(y, -x, -z)$. Le plan polaire de ce dernier point par rapport au paraboloïde hyperbolique a pour équation

$$y\mathfrak{X}-x\mathfrak{Y}-\nu\mathfrak{Z}+\nu z=0 \tag{53}$$

Cette équation, identique à (50) et (51), est celle du plan ϖ'.

Remarque analogue pour a' et ϖ.

Donc *le point qu'on obtient en prenant le symétrique de* a (*ou de* a') *par rapport à* O (*point quelconque de* R), *puis en faisant tourner ce symétrique de* $+\frac{\pi}{2}$ *autour de* Oz, *est le pôle de* ϖ' (*ou de* ϖ) *par rapport au paraboloïde de révolution sus-indiqué.*

21. Remarques concernant les surfaces polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire. — L'axe Oz est encore placé sur l'axe, R, du complexe linéaire $\mathcal{C}$.

1° Soit a_1 le point tel que $\overrightarrow{Oa_1}$ soit égal au moment en $a(x, y, z)$ du système de vecteurs $\mathfrak{S}$ associé au complexe linéaire $\mathcal{C}$ (*voir* § 5).

L'axe central de $\mathfrak{S}$, qui est aussi l'axe de $\mathcal{C}$, est donc confondu avec la droite portant l'axe des z.

La résultante générale de $\mathfrak{S}$, parallèle à R, a pour composantes o, o, 1 et le moment résultant de $\mathfrak{S}$ en tout point de R est placé sur R et a pour composantes o, o, ν.

Le point a_1 a donc ses coordonnées x_1, y_1, z_1 respectivement égales à $-y$, x, ν. Quel que soit a, le point a_1 est situé dans le plan, s_1, perpendiculaire à Oz et de cote égale à ν. Nous avons ainsi établi une correspondance *avec orthogonalité des éléments linéaires* entre toute surface s et le plan s_1.

Supposons que s n'est pas développable.

Considérons les *douze surfaces* (¹) relatives à s et à s_1 (et les comprenant). La surface (Σ) de la théorie des douze surfaces est l'enveloppe du plan

$$(54) \qquad (\mathfrak{X} - x)x_1 + (\mathfrak{Y} - y)y_1 + (\mathfrak{Z} - z)z_1 = 0,$$

pour $a(x, y, z)$ se déplaçant sur s. $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sont les coordonnées courantes.

Mais le plan (54) passe par a et il est perpendiculaire à $\overrightarrow{Oa_1}$. Il est donc confondu avec le plan ϖ', puisque celui-ci, polaire de a par rapport à $\mathcal{C}$; est perpendiculaire au moment résultant de $\mathfrak{S}$ en a et, par suite, à $\overrightarrow{Oa_1}$. Et l'enveloppe du plan ϖ', quand le point a se déplace sur s, est la surface s', polaire réciproque de s par rapport à $\mathcal{C}$.

La surface (Σ) *relative à* s *et* s_1 *est donc la surface* s'.

De même, *la surface* (Σ) *relative à* s' *et* s_1 *est la surface* s.

2° Chaque direction asymptotique de s, en un point quelconque a

---

(¹) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, nouveau tirage, p. 48 et 52 notamment.

Nous avons signalé et étudié des *ensembles de systèmes de douze surfaces* qu'on peut déduire d'une surface quelconque et qui jouissent de remarquables propriétés [A. CHARRUEAU, *Sur la déformation infiniment petite des surfaces* (*Bull. Sc. math.*, 2ᵉ série, t. 69, mai-juin 1945, p. 92 à 108)].

de s, est la conjuguée par rapport au complexe $\mathcal{C}$ d'une des directions asymptotiques de s', au point correspondant a'.

Les conjuguées par rapport à $\mathcal{C}$ de deux tangentes conjuguées de s en a sont deux tangentes conjuguées de s' en a'.

C'est dû à ce que $\mathfrak{T}$ est une transformation dualistique.

Notons que, de (44), on déduit la relation

$$dp\,dx + dq\,dy = -(dp'\,dx' + dq'\,dy').$$

Les projections sur le plan xOy des tangentes asymptotiques correspondantes de s et de s' sont *parallèles*.

Les projections sur le plan xOy de deux tangentes conjuguées de s et celles des deux tangentes conjuguées correspondantes de s' forment des angles ayant leurs côtés *parallèles*.

C'est la conséquence de ce que deux droites conjuguées par rapport à un complexe linéaire se projettent suivant deux droites parallèles sur tout plan perpendiculaire à l'axe du complexe.

On déduit aussi de (44) que la projection sur le plan xOy de la normale à s en a (ou à s' en a') est *perpendiculaire* à la projection sur le plan xOy de la droite Oa' (ou de la droite Oa).

3° La droite aa', intersection des plans ϖ et ϖ', est tangente à s en a et à s' en a'. Elle appartient au complexe $\mathcal{C}$.

Considérons *les courbes du complexe $\mathcal{C}$ situées sur s*. Le plan ϖ tangent à s en un point a d'une de ces courbes, m, a son pôle par rapport à $\mathcal{C}$ en a' de s' et, d'autre part, le plan osculateur à la courbe m, en a, est le plan ϖ', polaire de a par rapport à $\mathcal{C}$. Donc la tangente à m en a est l'intersection des plans ϖ et ϖ', c'est-à-dire la droite aa'. Il s'ensuit que les courbes du complexe $\mathcal{C}$ situées sur s sont les arêtes de rebroussement d'une famille de *développables* de la congruence formée des droites de $\mathcal{C}$ tangentes à s et à s'.

Posons, pour la surface s,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Compte tenu de l'équation (29) du complexe $\mathcal{C}$, on voit que l'équation différentielle des courbes de $\mathcal{C}$ situées sur s est

$$x\,dy - y\,dx + \nu(p\,dx + q\,dy) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\nu p - y)\,dx + (\nu q + x)\,dy = 0. \tag{55}$$

Pour *les courbes du complexe* $\mathcal{C}$ *situées sur la surface* s', on a

$$(\nu p' - y')\,dx' + (\nu q' + x')\,dy' = 0,$$

d'où, en vertu de (44),

$$(\nu p - y)\,dq - (\nu q + x)\,dp = 0. \tag{56}$$

Les équations différentielles (55) et (56) définissent les deux familles de *développables* de la congruence des droites de $\mathcal{C}$ tangentes à s et à s'. Elles déterminent sur s un réseau *conjugué*, auquel correspond sur s' un réseau *conjugué*.

Dans le premier réseau, la famille définie par (55) est celle des courbes du complexe situées sur s et, dans le second réseau, la famille définie par (56) est celle des courbes du complexe situées sur s'.

4° Les deux surfaces s et s' ont *la même transformée par la transformation de contact*

$$X = -py, \qquad Y = -z + px, \qquad Z = y + \nu p,$$
$$P = -\frac{\nu q + x}{px + qy}, \qquad Q = \frac{\nu p - y}{px + qy},$$

que nous avons utilisée dans un autre travail (¹) et qui jouit de remarquables propriétés.

5° Soient C et C′ les courbures totales de s et s', en a et a' ; θ l'un des angles de demi-normales à s et s' en a et a', égal à l'un des angles des moments résultants de $\mathfrak{S}$ en a et a' ; γ_s et $\gamma_{s'}$ les cosinus des angles que ces demi-normales font avec Oz. On démontre que

$$CC' = \frac{\gamma_s^2 \gamma_{s'}^2}{\nu^4} = \frac{\sin^4\theta}{\overline{aa'}^4}. \tag{57}$$

6° Pour $\nu = 1$, d'après le paragraphe 20, 2°, la surface s (ou s') est liée par une *transformation de Legendre* à la surface qu'on obtient en appliquant à la surface s' (ou s) le produit de la symétrie et de la rotation indiquées audit paragraphe.

(¹) A. Charrueau, *Sur des congruences de droites ou de courbes et sur une transformation de contact liée à ces congruences* (*Mém. Sc. math.*, fasc. 115, 1950).

DEUXIÈME PARTIE.

FAISCEAUX DE COMPLEXES LINÉAIRES.

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS DIVERSES.

22. Définition. Complexes spéciaux d'un faisceau. — Soient $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = 0$ les équations (23) de deux complexes linéaires et

$$\varphi_1 + \lambda \varphi_2 = 0 \tag{58}$$

l'équation d'un *faisceau* Φ de complexes linéaires.

Les complexes $\varphi_1 = 0$ et les complexes $\varphi_2 = 0$ sont les *complexes de base* de Φ.

λ est un nombre variable, *réel ou imaginaire*.

Les coefficients de φ_1 et de φ_2 sont *réels ou imaginaires*.

Chaque complexe *spécial* de Φ correspond à une valeur de λ telle que, si A, B, ..., F sont les coefficients de l'équation de ce complexe, on a

$$AD + BE + CF = 0.$$

D'où

$$\omega_2 \lambda^2 + \omega_{1,2} \lambda + \omega_1 = 0. \tag{59}$$

ω_1, ω_2, $\omega_{1,2}$ ont les mêmes significations qu'au paragraphe 12. Nous y avons vu que les quantités ω_1, ω_2, $\omega_{1,2}$ sont des *invariants* pour tout changement d'axes trirectangles de coordonnées conservant le sens d'orientation des axes. Elles changeraient de signe ensemble si ce sens d'orientation était modifié.

Soient λ_1 et λ_2 les deux racines de l'équation (59), du second degré en λ. Elles correspondent aux deux complexes spéciaux de Φ.

Elles sont réelles ou imaginaires conjuguées quand les coefficients de φ_1 et de φ_2 sont réels.

Elles peuvent n'être pas toutes les deux réelles, sans être imaginaires conjuguées, quand les coefficients de φ_1 et de φ_2 ne sont pas tous réels.

Elles sont finies pour $\omega_2 \neq 0$.

Elles sont égales si

$$\omega_{1,2}^2 - 4\omega_1\omega_2 = 0.$$

Les axes, Δ_1 et Δ_2, des deux complexes spéciaux sont *alors* confondus en une droite unique et l'on démontre que cette dernière *appartient à tous les complexes du faisceau.*

Chaque fois que nous utiliserons les quantités λ_1 et λ_2 ou les droites Δ_1 et Δ_2, nous supposerons implicitement que ω_1, ω_2, $\omega_{1,2}$ ne sont pas nuls ensemble.

23. **Propriétés diverses.** — 1° Les deux complexes de base et l'équation correspondante d'un faisceau Φ étant donnés, *changeons de complexes de base.* Prenons, pour jouer ce rôle, les complexes de Φ correspondant à des valeurs μ_1 et μ_2 de λ ($\mu_1 \neq \mu_2$). On a

$$\varphi_1 + \lambda\varphi_2 \equiv \frac{\lambda - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}[\varphi_1 + \mu_1\varphi_2 + \lambda'(\varphi_1 + \mu_2\varphi_2)],$$

avec

$$\lambda' = -\frac{\lambda - \mu_1}{\lambda - \mu_2}. \tag{60}$$

L'équation (58) de Φ peut donc s'écrire

$$\varphi_1 + \mu_1\varphi_2 + \lambda'(\varphi_1 + \mu_2\varphi_2) = 0. \tag{61}$$

Dans le cas de $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\omega_2 \neq 0$, si nous choisissions pour nouveaux complexes de base les complexes spéciaux de Φ, nous aurions

$$\lambda' = -\alpha,$$

en posant

$$\alpha = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2}.$$

On déduit de (60) que les changements de complexes de base conservent le rapport anharmonique des quatre valeurs de λ correspondant à quatre complexes quelconques donnés de Φ.

2° Si l'on *change d'axes trirectangles de coordonnées*, en conservant les complexes de base, λ *n'est pas modifié*, c'est-à-dire qu'à toute valeur de ce coefficient correspond le *même* complexe de Φ par l'équation *primitive* de Φ et par son équation *nouvelle.*

Soient $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ les systèmes de vecteurs associés aux deux complexes de base, donc indépendants de la position des axes d'après le paragraphe 6. Le système de vecteurs associé à un complexe quelconque a de Φ, correspondant à la valeur a de λ, sera le système de vecteurs $\mathfrak{S}_1 + a\mathfrak{S}_2$, le signe d'addition exprimant ici que les résultantes générales de $\mathfrak{S}_1$ et de $\mathfrak{S}_2$, d'une part, et les moments résultants de $\mathfrak{S}_1$ et de $\mathfrak{S}_2$ en un point quelconque, d'autre part, doivent être additionnés géométriquement.

Ces propriétés se déduisent des paragraphes 5 et 6.

3° La transformation *homographique* ou *dualistique* la plus générale transforme une droite en une droite dont les coordonnées plückériennes sont des expressions linéaires et homogènes des coordonnées plückériennes de la première. Donc elle transforme un complexe linéaire en un complexe linéaire et un faisceau Φ de tels complexes en un faisceau analogue Φ'.

Prenons pour complexes de base de Φ' les transformés de ceux de Φ et pour équations de ces nouveaux complexes de base celles que fournit la transformation (sans multiplication ultérieure des premiers membres par des facteurs constants). En donnant au coefficient λ la même valeur dans les équations de Φ et de Φ', on obtient deux complexes dont le second est le transformé du premier.

4° D'après ce qui a été dit au paragraphe 23, 2°, on peut associer à un faisceau Φ de complexes linéaires, d'équation

$$\varphi_1 + \lambda\varphi_2 = 0, \tag{62}$$

un ensemble Ψ de systèmes de vecteurs $\mathfrak{S}_1 + \lambda\mathfrak{S}_2$, que nous appellerons *un faisceau de systèmes de vecteurs associé à* Φ.

Les systèmes $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ correspondent respectivement aux complexes de base $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$. Dans l'expression $\mathfrak{S}_1 + \lambda\mathfrak{S}_2$, le signe d'addition a le sens géométrique indiqué au paragraphe 23, 2°.

Un changement des complexes de base de Φ modifie, pour chaque complexe de Φ, la résultante générale et le moment résultant en un point quelconque du système de vecteurs associé à ce complexe, tel que ce système a été défini au paragraphe 5. Cette résultante et ce moment ont leurs longueurs multipliées par un *même coefficient*, *variable* avec le complexe de Φ, mais *conservent* leurs directions.

De sorte que l'axe central du système de vecteurs associé à un complexe déterminé de Φ avec le premier choix des complexes de base reste l'axe central du système de vecteurs associé à ce complexe avec le second choix des complexes de base; et il est confondu avec l'axe du complexe.

Le faisceau Ψ de systèmes de vecteurs *dépend donc du choix des complexes de base de* Φ. Il est même modifié par *l'interversion* des complexes de base. Mais la recherche des axes centraux des systèmes de tout faisceau Ψ *associé* à Φ et celle des axes des complexes de Φ constituent le *même problème*.

24. Complexes linéaires conjugués par rapport à un autre. — Soient les deux complexes

$$\varphi'_1 \equiv A'_1 L + \ldots + F'_1 Z = 0, \qquad \varphi'_2 \equiv A'_2 L + \ldots + F'_2 Z = 0. \tag{63}$$

Posons

$$\omega'_1 = A'_1 D'_1 + B'_1 E'_1 + C'_1 F'_1, \qquad \omega'_2 = A'_2 D'_2 + B'_2 E'_2 + C'_2 F'_2; \tag{64}$$

$$\omega'_{1,2} = A'_1 D'_2 + B'_1 E'_2 + C'_1 F'_2 + A'_2 D'_1 + B'_2 E'_1 + C'_2 F'_1. \tag{65}$$

On suppose que le complexe $\varphi'_2 = 0$ n'est pas spécial ($\omega'_2 \neq 0$).

D'après (28), le conjugué du complexe $\varphi'_1 = 0$ par rapport au complexe non spécial $\varphi'_2 = 0$ a pour équation

$$\omega'_2 \varphi'_1 - \omega'_{1,2} \varphi'_2 = 0. \tag{66}$$

Il appartient au faisceau déterminé par les complexes $\varphi'_1 = 0$ et $\varphi'_2 = 0$.

Soient Φ ce faisceau; $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = 0$ les équations, supposées représentées par (23), de deux autres complexes de Φ que nous prendrons comme complexes de base de Φ, le dernier, au moins, étant choisi non spécial.

Soient, en outre, μ_1, μ_2, μ_3 les valeurs du coefficient λ de Φ correspondant respectivement aux complexes $\varphi'_1 = 0$, $\varphi'_2 = 0$ et au conjugué du premier par rapport au second.

Si ω_1, ω_2, $\omega_{1,2}$, ω'_1, ω'_2, $\omega'_{1,2}$ ont les significations définies par (26), (27), (64) et (65), on trouve, au moyen de (59), que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{\omega_{1,2}}{\omega_2}, \qquad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \tag{67}$$

puis

(68) $$\omega'_1 = \omega_2\,(\mu_1 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2),$$

(69) $$\omega'_2 = \omega_2\,(\mu_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \lambda_2),$$

(70) $$\omega'_{1,2} = \omega_2[(\mu_1 - \lambda_1)(\mu_2 - \lambda_2) + (\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_1)].$$

Nous avons supposé $\omega_2 \neq 0$.

On voit que

(71) $$\omega'_{1,2} - 4\omega'_1\,\omega'_2 = (\omega^2_{1,2} - 4\omega_1\omega_2)(\mu_1 - \mu_2)^2.$$

L'équation (66) peut s'écrire

$$\omega'_2(\varphi_1 + \mu_1\varphi_2) - \omega'_{1,2}(\varphi_1 + \mu_2\varphi_2) = 0$$

ou

(72) $$(\omega'_2 - \omega'_{1,2})\,\varphi_1 + (\omega'_2\mu_1 - \omega'_{1,2}\mu_2)\,\varphi_2 = 0.$$

Il en résulte que

(73) $$\mu_3 = \frac{\omega'_2\mu_1 - \omega'_{1,2}\mu_2}{\omega'_2 - \omega'_{1,2}}.$$

Considérons d'abord le cas de $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Supposons maintenant que μ_1 est, comme μ_2, différent de λ_1 et de λ_2. Posons

(74) $$\alpha = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2}, \qquad \alpha_j = \frac{\mu_j - \lambda_1}{\mu_j - \lambda_2},$$

avec $j = 1, 2, 3$.

Chaque fois que nous utiliserons des quantités α, nous supposerons implicitement que le second complexe de base n'est pas spécial ($\omega_2 \neq 0$), condition bien facile à remplir [1].

On a

(75) $$\alpha_3 = \frac{\omega'_2(\mu_1 - \lambda_1) - \omega'_{1,2}(\mu_2 - \lambda_1)}{\omega'_2(\mu_1 - \lambda_2) - \omega'_{1,2}(\mu_2 - \lambda_2)}$$

et, tenant compte de (69) et (70),

$$\alpha_3 = \frac{(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_1)^2}{(\mu_1 - \lambda_1)(\mu_2 - \lambda_2)^2} = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}.$$

---

[1] Nous ne prenons pas systématiquement comme complexes de base les deux complexes spéciaux de Φ, lorsqu'ils sont distincts, pour conserver à l'exposé une forme plus générale. Si nous prenions ces complexes spéciaux comme complexes de base, c'est le nouveau coefficient lui même, changé de signe, de la nouvelle équation de Φ qui remplacerait la quantité, égale, α du cas actuel (*voir* § 23, 1°).

Ainsi donc, on a

$$\alpha_1 \alpha_3 = \alpha_2^2. \tag{76}$$

La relation (76) reste valable si μ_1 ou μ_2 est infini.

Elle s'écrit encore

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = (\lambda_1, \lambda_2, \mu_2, \mu_3). \tag{77}$$

Nous la retrouverons au paragraphe 30, 1°, par une autre voie [1].

Notons les formules

$$\frac{\omega'_{1,2}}{\omega'_2} = (\alpha_1 + \alpha_2)\frac{\mu_1 - \lambda_2}{\mu_2 - \lambda_1}, \tag{78}$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \omega'^2_{1,2} = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \omega'_1 \omega'_2. \tag{79}$$

Considérons maintenant le cas de $\lambda_1 = \lambda_2$.

De (69), (70) et (73) on déduit que

$$\frac{1}{\mu_3 - \lambda_1} = \frac{2}{\mu_2 - \lambda_1} - \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} \tag{80}$$

ou

$$(\lambda_1, \mu_2, \mu_1, \mu_3) = -1. \tag{81}$$

Les quantités λ_1, μ_2, μ_1, μ_3 sont donc en *proportion harmonique*.

Posons

$$\beta = \frac{1}{\mu - \lambda_1}, \qquad \beta_j = \frac{1}{\mu_j - \lambda_1},$$

avec $j = 1, 2, 3$.

Chaque fois que nous utiliserons des quantités β, nous supposerons implicitement que le second complexe de base a été choisi de manière à n'être pas spécial (ce qui entraîne que λ_1 est fini).

La relation (80) s'écrit encore

$$\beta_1 + \beta_3 = 2\beta_2, \qquad \beta_2 - \beta_1 = \beta_3 - \beta_2. \tag{82}$$

Les formules (80) à (82) restent valables si μ_1 ou μ_2 est infini.

---

(1) On peut notamment déterminer μ_3 en prenant une valeur auxiliaire γ telle que $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_2, \gamma) = -1$, puis en prenant μ_3 tel que $(\gamma, \mu_2, \mu_1, \mu_3) = -1$. Quand λ_1 et λ_2 sont confondus, comme ils sont différents de μ_2, on a $\gamma = \lambda_1 = \lambda_2$ et l'on obtient ainsi un autre moyen de passer de la formule (77) à la formule (81) ci-après.

25. Complexes linéaires en involution. — La condition nécessaire et suffisante pour que des complexes $\varphi'_1 = 0$ et $\varphi'_2 = 0$, supposés non spéciaux, soient en *involution* est, d'après le paragraphe 13, 2°,

$$\omega'_{1,2} = 0. \tag{83}$$

Considérons à nouveau le faisceau Φ qui contient les deux complexes en question.

Cas de $\lambda_1 \neq \lambda_2$. — μ_1 et μ_2 sont différents, chacun, de λ_1 et λ_2. La condition d'involution s'écrit, d'après (78),

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \tag{84}$$

c'est-à-dire

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = -1. \tag{85}$$

Cas de $\lambda_1 = \lambda_2$. — La condition (83) d'involution s'écrit ici, compte tenu de (70),

$$(\mu_1 - \lambda_1)(\mu_2 - \lambda_1) = 0. \tag{86}$$

Il n'y a donc pas, dans ce cas, de couple de complexes de Φ *distincts en involution.*

26. Remarques sur les couples de complexes linéaires conjugués par rapport à un autre complexe linéaire. — *Supposons* $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

1° Considérons deux complexes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de Φ, qui sont supposés n'être pas spéciaux et n'être pas en involution.

Soient $\mathcal{C}_3$ le complexe conjugué de $\mathcal{C}_1$ par rappor à $\mathcal{C}_2$; $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'_2$, $\mathcal{C}'_3$ les complexes de Φ en involution respectivement avec $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$; α_1, α_2, α_3, α'_1, α'_2, α'_3 les quantités α relatives à $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'_2$, $\mathcal{C}'_3$. On a

$$\alpha'_1 = -\alpha_1, \qquad \alpha'_2 = -\alpha_2, \qquad \alpha'_3 = -\alpha_3,$$

et, par suite,

$$\alpha'_1 \alpha'_3 = \alpha_1 \alpha_3 = \alpha_2^2 = \alpha'^2_2.$$

Ainsi donc, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$, *conjugués* par rapport à $\mathcal{C}_2$, le sont *aussi* par rapport à $\mathcal{C}'_2$. $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_3$ sont *conjugués* par rapport à $\mathcal{C}_2$ et à $\mathcal{C}'_2$.

On voit également que les *conjugués* d'un complexe quelconque non spécial $\mathcal{C}_1$ de Φ par rapport à deux complexes d'un couple quelconque de Φ en *involution* sont *confondus*. Les droites conjuguées d'une droite de $\mathcal{C}_1$ par rapport aux deux complexes en involution ne sont pas, en général, confondues; mais elles appartiennent toutes deux à un complexe de Φ, qui reste le même quelle que soit la droite considérée de $\mathcal{C}_1$.

L'équation (76) montre encore que *deux complexes quelconques, non spéciaux, de Φ sont conjugués par rapport à deux complexes non spéciaux de Φ, qui sont en involution.*

2° Si $\mathcal{C}$ est un complexe linéaire spécial et $\mathcal{C}'$ un complexe linéaire non spécial quelconque, le conjugué $\mathcal{C}''$ de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{C}'$ est spécial et les axes de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}''$ sont des droites conjuguées par rapport à $\mathcal{C}'$.

On en déduit que *les deux complexes spéciaux* d'un faisceau Φ sont *conjugués* par rapport à tous les complexes non spéciaux de Φ.

27. Droites principales relatives à un faisceau de complexes linéaires. — Nous *excluons* maintenant, jusqu'à la fin du paragraphe 50, le cas où les axes des deux complexes de base sont *parallèles ou confondus*.

Ces cas *particuliers* seront examinés dans les deux derniers paragraphes de ce travail (§ 51 et 52).

Les équations des complexes de base sont supposées représentées par (23).

Par hypothèse, les quantités

$$B_1 C_2 - C_1 B_2, \quad C_1 A_2 - A_1 C_2, \quad A_1 B_2 - B_1 A_2,$$

ne sont donc pas nulles ensemble. De plus, lorsqu'elles ne sont pas toutes réelles, nous supposons que la somme de leurs carrés n'est pas nulle.

Pour un complexe quelconque [1] de Φ, les trois dernières coordonnées plückériennes de l'axe, égales, d'après le paragraphe 10, à $A_1 + \lambda A_2$, $B_1 + \lambda B_2$, $C_1 + \lambda C_2$, *ne sont pas nulles ensemble.*

---

(1) Nous laissons ici de côté les complexes de Φ correspondant aux valeurs de λ qui annulent

$$(A_1 + \lambda A_2)^2 + (B_1 + \lambda B_2)^2 + (C_1 + \lambda C_2)^2.$$

Cet axe sera toujours bien déterminé par ses six coordonnées plückériennes, et il ne sera pas rejeté dans le plan de l'infini.

Dans les Ouvrages classiques, on traite généralement la question relative au lieu des axes des complexes de Φ, après avoir adopté des axes particuliers de coordonnées.

Mais il y a intérêt à faire diverses remarques en conservant des axes trirectangles quelconques.

L'équation de Φ est donnée par (58), où les expressions φ_1 et φ_2 sont, comme nous l'avons dit, représentées par (23).

1° Soient $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ les résultantes générales de $\mathfrak{S}_1$ et de $\mathfrak{S}_2$ dont les composantes sont A_1, B_1, C_1 et A_2, B_2, C_2; $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ les moments résultants en O de $\mathfrak{S}_1$ et de $\mathfrak{S}_2$, moments dont les composantes sont D_1, E_1, F_1 et D_2, E_2, F_2. Posons

$$\vec{U} = \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2.$$

La droite, H, perpendiculaire commune aux axes des deux complexes de base est parallèle à $\vec{U}$, puisque ces axes sont parallèles respectivement à $\vec{U}_1$ et à $\vec{U}_2$. De plus, elle appartient à ces complexes de base, puisqu'elle rencontre l'axe de chacun d'eux et lui est perpendiculaire. Elle appartient donc à tous les complexes de Φ.

L'axe d'un complexe quelconque de Φ a pour paramètres directeurs $A_1 + \lambda A_2$, $B_1 + \lambda B_2$, $C_1 + \lambda C_2$, donc est parallèle au vecteur $\vec{U}_1 + \lambda \vec{U}_2$. Il est, par suite, perpendiculaire à H.

La droite H, étant perpendiculaire à l'axe de *tout* complexe de Φ et appartenant à ce complexe, rencontre le dit axe (le fait d'appartenir au complexe intervient seul ici pour un complexe spécial).

Le moment résultant de $\mathfrak{S}_1$ au point d'intersection de H et de l'axe du premier complexe de base est dirigé suivant l'axe de ce complexe. Il est donc perpendiculaire à H. De même pour $\mathfrak{S}_2$ et le second complexe de base. Désignons par $\vec{M}_{1,P}$ et $\vec{M}_{2,P}$ les moments résultants de $\mathfrak{S}_1$ et de $\mathfrak{S}_2$ en un point quelconque de l'espace. Les équations

$$(87) \qquad \vec{U}.\vec{M}_{1,P} = 0, \qquad \vec{U}.\vec{M}_{2,P} = 0$$

sont celles de deux plans, que satisfait tout point de H.

Ce sont donc *les équations de* H.

Le plan défini par la première équation (87) passe par l'axe du premier complexe de base de Φ, confondu avec l'axe central de $\mathfrak{S}_1$. Le plan défini par la deuxième équation (87) passe par l'axe du second complexe de base de Φ, confondu avec l'axe central de $\mathfrak{S}_2$,

Si l'on pose

$$a = B_1 C_2 - C_1 B_2, \qquad b = C_1 A_2 - A_1 C_2, \qquad c = A_1 B_2 - B_1 A_2,$$

les équations (87) peuvent s'écrire notamment sous la forme

$$x(B_1 c - C_1 b) + y(C_1 a - A_1 c) + z(A_1 b - B_1 a) = D_1 a + E_1 b + F_1 c,$$
$$x(B_2 c - C_2 b) + y(C_2 a - A_2 c) + z(A_2 b - B_2 a) = D_2 a + E_2 b + F_2 C.$$

Les déterminants du second degré que l'on déduit du tableau des coefficients de x, y, z sont égaux à

$$a(a^2 + b^2 + c^2), \quad -b(a^2 + b^2 + c^2), \quad c(a^2 + b^2 + c^2).$$

Les axes des complexes de Φ et les axes centraux des systèmes de vecteurs du faisceau associé Ψ, qui sont confondus avec les premiers, rencontrent donc tous la droite H, réelle ou imaginaire, définie par les équations (87) et lui sont perpendiculaires.

Cette droite est indépendante des axes de coordonnées et du choix des complexes de base de Φ. Elle ne dépend que de Φ. *Elle appartient à la congruence linéaire* B *base de* Φ.

2° Cherchons maintenant s'il existe deux complexes λ' et λ'' de Φ, correspondant à des valeurs λ' et λ'' de λ, tels que leurs axes soient *perpendiculaires et concourants.*

Posons

$$(88) \quad A' = A_1 + \lambda' A_2, \qquad B' = B_1 + \lambda' B_2, \qquad \ldots, \qquad F' = F_1 + \lambda' F_2;$$
$$(89) \quad A'' = A_1 + \lambda'' A_2, \qquad B'' = B_1 + \lambda'' B_2, \qquad \ldots, \qquad F'' = F_1 + \lambda'' F_2.$$

Soient ν' et ν'' les paramètres des deux complexes. D'après le paragraphe 10, les coordonnées plückériennes des axes de ces complexes sont

$$D' - \nu' A', \quad E' - \nu' B', \quad F' - \nu' C', \quad A', \quad B', \quad C';$$
$$D'' - \nu'' A'', \quad E'' - \nu'' B'', \quad F'' - \nu'' C'', \quad A'', \quad B'', \quad C''.$$

La condition d'orthogonalité des axes est

$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0. \tag{90}$$

La condition de rencontre est, d'après (7),

$$\begin{aligned}(D' - \nu' A')A'' + (E' - \nu' B')B'' + (F' - \nu' C')C''&\\ + (D'' - \nu'' A'')A' + (E'' - \nu'' B'')B' + (F'' - \nu'' C'')C' &= 0,\end{aligned} \tag{91}$$

ou, compte tenu de (90),

$$D'A'' + E'B'' + F'C'' + D''A' + E''B' + F''C' = 0. \tag{92}$$

On voit, d'après (65) et (83), que les complexes de Φ cherchés, s'ils existent et ne sont pas spéciaux, sont en *involution*.

Posons, comme au paragraphe 12,

$$\sigma_1 = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2, \qquad \sigma_2 = A_2^2 + B_2^2 + C_2^2, \tag{93}$$

$$\sigma_{1,2} = A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2, \tag{94}$$

$$\omega_1 = A_1 D_1 + B_1 E_1 + C_1 F_1, \qquad \omega_2 = A_2 D_2 + B_2 E_2 + C_2 F_2, \tag{95}$$

$$\omega_{1,2} = A_1 D_2 + B_1 E_2 + C_1 F_2 + A_2 D_1 + B_2 E_1 + C_2 F_1. \tag{96}$$

Les conditions (90) et (92) s'écrivent

$$\sigma_1 + \sigma_{1,2}(\lambda' + \lambda'') + \sigma_2 \lambda' \lambda'' = 0, \tag{97}$$

$$2\omega_1 + \omega_{1,2}(\lambda' + \lambda'') + 2\omega_2 \lambda' \lambda'' = 0. \tag{98}$$

En général, il y aura un système unique de solutions en $\lambda' + \lambda''$ et $\lambda'\lambda''$, et une équation du second degré donnera λ' et λ''. Nous désignerons par g_1 et g_2 les axes des complexes ainsi déterminés. Les droites g_1, g_2, H seront appelées les *droites principales* relative à Φ.

28. Remarque sur le rapport anharmonique. — Considérons, sur une droite, quatre points *réels ou imaginaires*

$$P_1(x_1, y_1\ z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2), \quad P_3(x_3, y_3, z_3), \quad P_4(x_4, y_4, z_4).$$

Si la droite n'est pas perpendiculaire à l'axe Ox, par exemple, nous définirons (P_1, P_2, P_3, P_4) par l'égalité

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{99}$$

Dans le cas où la droite n'est perpendiculaire à aucun des axes de coordonnées, les trois rapports anharmoniques suivants sont déterminés et égaux

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (z_1, z_2\, z_3, z_4).$$

Et (P_1, P_2, P_3, P_4) est égal à leur valeur commune.

29. Lieu des pôles des plans passant par une même droite par rapport à tous les complexes d'un faisceau. — A partir de maintenant, et sauf dans le chapitre IV de la deuxième partie, nous supposerons que *les coefficients des équations des complexes de base sont réels* (¹).

Soit D une droite quelconque, réelle. Considérons l'ensemble des plans passant par D. Ces plans dépendent d'un paramètre l. D'après les formules (17), on voit que les coordonnées du pôle d'un tel plan sont des fractions rationnelles dont les numérateurs et le dénominateur commun sont des expressions linéaires de λl, λ et l. Le lieu des pôles des plans passant par D, par rapport à tous les complexes de Φ, est donc, *en général*, une *surface du second degré*. Nous désignerons cette quadrique par Q.

Pour λ constant et l variable, le pôle du plan décrit la *droite conjuguée* de D par rapport au complexe correspondant à la valeur constante donnée á λ. L'ensemble des droites conjuguées de D relatives à tous les complexes de Φ est une *semi-quadrique*, Q_1, de Q. Q_1 comprend Δ_1 et Δ_2, puisque ces droites sont les conjuguées de D par rapport aux complexes spéciaux de Φ.

Pour une position fixe du plan et pour λ variable, le pôle du plan décrit une *droite*, qui doit appartenir à tous les complexes de Φ, puisqu'elle est située dans le plan et passe par le pôle de ce plan par rapport à tout complexe de Φ. C'est donc une droite de la *congruence linéaire* B *base de* Φ. L'ensemble des droites analogues rencontrant D est la *semi-quadrique*, Q_2, de Q, *complémentaire* de Q_1.

Nous reviendrons sur la quadrique Q notamment aux paragraphes 35 à 37, où nous en donnerons l'équation par rapport à des axes

(¹) On pourrait étudier toujours le cas général, mais il est préférable de traiter d'une manière aussi précise que possible le cas le plus intéressant (en particulier, pour rendre facile la distinction entre le réel et l'imaginaire).

trirectangles particuliers et où nous en signalerons les propriétés principales et les cas de dégénérescence.

30. Relations entre les conjuguées d'une droite par rapport à des complexes d'un faisceau. — *Supposons* $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Nous désignerons chaque complexe de Φ par la valeur correspondante de λ.

1° Soient D une droite quelconque, réelle, qui *ne rencontre ni* Δ_1, *ni* Δ_2 [1]; m la valeur de λ correspondant au complexe m de Φ comprenant D.

Cette valeur est unique, sans quoi D appartiendrait à la congruence linéaire B base de Φ, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Considérons deux droites de la congruence linéaire B base de Φ qui rencontrent D, l'une, MM_2, coupant D, Δ_1, Δ_2 respectivement en M, M_1, M_2, l'autre, PP_2, coupant D, Δ_1, Δ_2 respectivement en P, P_1, P_2.

La droite D' conjuguée de D par rapport à un complexe non spécial λ' de Φ rencontre la droite MM_2 en un point M', pôle du plan (D, MM_2) par rapport au complexe λ' de Φ, et rencontre la droite PP_2 en un point P', pôle du plan (D, PP_2) par rapport au même complexe.

De même, la conjuguée de D par rapport à un autre complexe non spécial λ'' de Φ rencontre la droite MM_2 en un point M'', pôle du plan (D, MM_2) par rapport au complexe λ'' de Φ, et rencontre la droite PP_2 en un point P'' pôle du plan (D, PP_2) par rapport au même complexe.

Les valeurs λ' et λ'' sont réelles ou imaginaires.

Le plan (D, MM_2) a pour pôles, par rapport aux complexes m, λ', λ'', λ_1, λ_2 de Φ, les points M, M', M'', M_1, M_2 de la droite MM_2. De même, le plan (D, PP_2) a pour pôle, par rapport aux mêmes complexes, les points P, P', P'', P_1, P_2 de la droite PP_2.

Comme les coordonnées cartésiennes du pôle de chacun de ces plans sont, d'après (17), des fonctions homographiques de λ, on a

$$(M_1, M_2, M, M'') = (P_1, P_2, P, P'') = (\lambda_1, \lambda_2, m, \lambda'').$$

---

[1] A distance finie ou à l'infini.

Considérons maintenant les plans (D', MM_2) et (D', PP_2), qui se coupent suivant D'. Cette droite ne rencontre ni Δ_1, ni Δ_2, même à l'infini, car si, par exemple, D' et Δ_1 étaient situées dans un même plan, leurs conjuguées D et Δ_2 par rapport au complexe λ' de Φ se rencontreraient (au pôle de ce plan par rapport audit complexe), ce qui est contraire à l'hypothèse. Les pôles M''' et P''' de ces plans par rapport à un complexe λ''' de Φ sont placés respectivement sur les droites MM_2 et PP_2 de la congruence linéaire B et l'on a

$$(100)\qquad (M_1, M_2, M, M''') = (P_1, P_2, P, P''') = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda', \lambda''').$$

On voit que, si l'on prend λ''' de manière que

$$(101)\qquad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda', \lambda''') = (\lambda_1, \lambda_2, m, \lambda''),$$

les points M''' et P''' sont respectivement confondus avec les points M'' et P''. Donc la droite $M'''P'''$, conjuguée de D' par rapport au complexe λ''' de Φ tel que (101) est satisfaite, est confondue avec $M''P''$, c'est-à-dire D''.

Les droites D' *et* D'' *sont donc conjuguées par rapport au complexe non spécial de* Φ *correspondant à la valeur* λ''' *de* λ, satisfaisant à (101).

Soient m' et m'' les valeurs de λ correspondant aux complexes de Φ qui comprennent respectivement D' et D''.

Considérons les quatre points M_1, M_2, M, M' et évaluons (M_1, M_2, M, M') de trois manières, à l'aide des trois plans (D, MM_2), (D', MM_2), (D'', MM_2). On a

$$(102)\qquad (\lambda_1, \lambda_2, m, \lambda') = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda', m') = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda'', \lambda''').$$

Considérons maintenant les quatre points M_1, M_2, M, M'' et évaluons (M_1, M_2, M, M'') de trois manières, à l'aide encore des trois plans (D, MM_2), (D', MM_2), (D'', MM_2). On a

$$(103)\qquad (\lambda_1, \lambda_2, m, \lambda'') = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda', \lambda''') = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda'', m'').$$

Considérons enfin les quatre points M_1, M_2, M', M'' et évaluons $(M_1, M_2. M', M'')$ de trois manières, à l'aide des mêmes plans que précédemment. On a

$$(104)\qquad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda', \lambda'') = (\lambda_1, \lambda_2, m', \lambda''') = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda''', m'').$$

Les relations (102), (103) et (104) subsistent, avec les mêmes valeurs m', m'', λ''', pour *toute* droite du complexe m de Φ, qui ne rencontre ni Δ_1, ni Δ_2.

Posons

$$\alpha_m = \frac{m - \lambda_1}{m - \lambda_2},$$

et désignons par $\alpha_{\lambda'}$, $\alpha_{\lambda''}$, $\alpha_{\lambda'''}$, $\alpha_{m'}$, $\alpha_{m''}$ les quantités analogues relatives à λ', λ'', λ''', m', m''.

Les équations (102), (103) et (104) permettent de calculer immédiatement λ''', m' et m'' pour m, λ', λ'' donnés. On a

$$(105) \qquad \alpha_{\lambda'''} = \frac{\alpha_{\lambda'}\alpha_{\lambda''}}{\alpha_m},$$

$$(106) \qquad \alpha_{m'} = \frac{\alpha_{\lambda'}^2}{\alpha_m}, \qquad \alpha_{m''} = \frac{\alpha_{\lambda''}^2}{\alpha_m}.$$

Signalons la relation

$$(107) \qquad \alpha_m\,\alpha_{m'}\,\alpha_{m''} = \alpha_{\lambda'}\,\alpha_{\lambda''}\,\alpha_{\lambda'''}.$$

Elle sera généralisée dans le paragraphe 48, 2°.

Comparons ces résultats à ceux qu'on peut déduire de (76). Cette formule donne

$$\alpha_{m'}\alpha_{m''} = \alpha_{\lambda'''}^2, \qquad \alpha_m\,\alpha_{m'} = \alpha_{\lambda'}^2, \qquad \alpha_m\,\alpha_{m''} = \alpha_{\lambda''}^2,$$

d'où l'on tire

$$\alpha_{\lambda'''}^2 = \frac{\alpha_{\lambda'}^2\,\alpha_{\lambda''}^2}{\alpha_m^2}$$

et les deux relations (106).

La formule (76) ne nous aurait donné λ''' qu'au signe près. C'est que les complexes m' et m'' de Φ sont conjugués par rapport aux deux complexes de Φ en *involution*, dont les α correspondants sont égaux à $\pm\frac{\alpha_{\lambda'}\alpha_{\lambda''}}{\alpha_m}$. Mais, grâce à l'indication supplémentaire que fournit (105), on voit que D′ et D″ sont conjuguées par rapport au complexe λ''' de Φ correspondant à la valeur $\alpha_{\lambda'''} = \frac{\alpha_{\lambda'}\alpha_{\lambda''}}{\alpha_m}$.

2° Soient D′ et D″ les conjuguées de D par rapport aux complexes non spéciaux λ' et λ'' de Φ, que nous supposons maintenant n'être pas en involution; D'_1 et D''_1 les conjuguées de D par rapport aux complexes λ'_1 et λ''_1 de Φ en *involution* respectivement avec les complexes λ' et λ'' de Φ; m', m'', m'_1, m''_1 les valeurs de λ correspondant aux complexes de Φ qui comprennent respectivement D', D'', D'_1, D''_1; λ''' la valeur de λ correspondant au complexe de Φ par rapport auquel les droites D' et D'' sont conjuguées.

D, D', D'', D'_1, D''_1 appartiennent à la semi-quadrique Q_1, relative à D et à Φ.

Nous allons démontrer les propriétés suivantes :

D'_1 appartient, comme D', au complexe m' de Φ et D''_1 appartient, comme D'', au complexe m'' de Φ. D'_1 et D''_1 sont conjuguées, comme D' et D'', par rapport au complexe λ''' de Φ. D' et D''_1 sont conjuguées par rapport à un autre complexe λ'''_1 de Φ, et D'' et D'_1 aussi sont conjuguées par rapport à ce dernier complexe. Et les complexes λ''' et λ'''_1 de Φ sont en *involution*.

Conservons les notations α_m, $\alpha_{\lambda'}$, $\alpha_{\lambda''}$, $\alpha_{\lambda'''}$, $\alpha_{m'}$, $\alpha_{m''}$ et désignons par $\alpha_{\lambda'_1}$, $\alpha_{\lambda''_1}$, $\alpha_{\lambda'''_1}$, $\alpha_{m'_1}$, $\alpha_{m''_1}$ les quantités analogues relatives aux complexes λ'_1, λ''_1, λ'''_1, m'_1, m''_1 de Φ.

Puisque les complexes λ' et λ'_1 de Φ sont en involution et qu'il en est de même des complexes λ'' et λ''_1 de Φ, on a, en vertu de (84),

$$(108) \qquad \alpha_{\lambda'_1} = -\alpha_{\lambda'}, \qquad \alpha_{\lambda''_1} = -\alpha_{\lambda''}.$$

Les formules (106), écrites pour D, D'_1, D''_1, donnent

$$(109) \qquad \alpha_{m'_1} = \frac{\alpha_{\lambda'_1}}{\alpha_m}, \qquad \alpha_{m''} = \frac{\alpha_{\lambda''_1}}{\alpha_m}.$$

De (106), (108) et (109) on déduit que

$$m'_1 = m', \qquad m''_1 = m''.$$

Donc D'_1 appartient, comme D', au complexe m' de Φ, et D''_1 appartient, comme D'', au complexe m'' de Φ.

La formule (105), écrite pour D'_1 et D''_1, montre que ces droites sont, comme D' et D'', conjuguées par rapport aux complexes λ''' de Φ, puisque

$$\alpha_{\lambda'''} = \frac{\alpha_{\lambda'}\alpha_{\lambda''}}{\alpha_m} = \frac{\alpha_{\lambda'_1}\alpha_{\lambda''_1}}{\alpha_m}.$$

La même formule, écrite pour D' et D''_1, montre que le complexe λ'''_1

de Φ par rapport auquel ces droites sont conjuguées est tel que

$$\alpha_{\lambda_1'''} = \frac{\alpha_{\lambda'}\alpha_{\lambda_1''}}{\alpha_m} = -\frac{\alpha_{\lambda'}\alpha_{\lambda''}}{\alpha_m} = -\alpha_{\lambda'''}.$$

Donc le complexe λ_1''' de Φ est en *involution* avec le complexe λ''' de Φ.

Enfin, on voit encore par (105) que D$''$ et D$'_1$ aussi sont conjuguées par rapport au complexe λ_1''' de Φ.

Si les complexes λ' et λ'' de Φ étaient en involution, on aurait $\alpha_{\lambda''} = -\alpha_{\lambda'}$ et des formules (106) on déduirait que $m' = m''$. Les droites D$'$ et D$''$ appartiendraient à un même complexe de Φ.

Les questions relatives au *cas de* $\lambda_1 = \lambda_2$, correspondant aux problèmes étudiés dans le présent paragraphe 30, seront examinées au paragraphe 38, 1°.

CHAPITRE II.

FAISCEAU DE COMPLEXES LINÉAIRES RAPPORTÉ A DES AXES DE COORDONNÉES TRIRECTANGLES PLACÉS SUR LES DROITES PRINCIPALES.

31. **Réduction de l'équation du faisceau.** — Nous continuons à supposer dans ce chapitre que les équations des complexes de base $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, données pour un système quelconque d'axes trirectangles, ont leurs coefficients *réels*.

Les valeurs λ_1 et λ_2 de λ, relatives aux complexes spéciaux de Φ, sont alors *réelles* ou *imaginaires conjuguées*.

Nous supposons, en outre, *sauf indication contraire*, que les valeurs λ_1 et λ_2 peuvent être distinctes ou confondues.

La droite principale H, dont il a été question au paragraphe 27, est réelle.

On peut toujours choisir deux nouveaux complexes de base de manière que leurs axes soient réels et perpendiculaires, sans s'imposer pour le moment qu'ils se rencontrent.

Adoptons maintenant un autre système d'axes trirectangles de coordonnées. Prenons l'axe des x sur l'axe d'un des nouveaux complexes de base et l'axe des z sur la droite H. Le plan yOz passera par l'axe du second complexe de base. Nous aurons alors, pour le faisceau Φ, une équation de la forme

$$(110) \qquad A_1 L + D_1 X + \lambda(B_2 M + D_2 X + E_2 Y) = 0,$$

dans laquelle les nouveaux coefficients A_1, D_1, B_2, D_2, E_2 sont encore réels. On suppose $A_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$.

Nous allons, en appliquant la méthode du paragraphe 27, 2°, déterminer deux complexes λ' et λ'' de Φ tels que leurs axes soient *perpendiculaires et concourants.*

Les formules (97) et (98) s'écrivent ici

$$(111) \qquad A_1^2 + B_2^2 \lambda' \lambda'' = 0,$$

$$(112) \qquad 2 A_1 D_1 + A_1 D_2(\lambda' + \lambda'') + 2 B_2 E_2 \lambda' \lambda'' = 0.$$

Considérons d'abord le cas de $D_2 \neq 0$.

On a

$$(113) \qquad \lambda' \lambda'' = -\frac{A_1^2}{B_2^2}, \qquad \lambda' + \lambda'' = 2\frac{A_1 E_2 - D_1 B_2}{B_2 D_2}.$$

Une équation du second degré détermine λ' et λ''. Elle a son discriminant positif. Donc les deux racines sont *réelles* et *inégales.*

Considérons maintenant le cas de $D_2 = 0$.

Les deux complexes de base ont leurs axes perpendiculaires et concourants, puisque celui qui est placé dans le plan yOz rencontre Ox. Ils répondent à la question.

Si, en plus, de $D_2 = 0$, on a $A_1 E_2 - D_1 B_2 = 0$, le problème est indéterminé. Il y a une infinité de couples de complexes de Φ ayant leurs axes réels, perpendiculaires et concourants [1].

Appelons g_1 et g_2, comme au paragraphe 27, 2°, les axes de deux complexes de Φ satisfaisant aux conditions imposées, dans l'un ou l'autre des cas envisagés.

Les droites g_1 et g_2 sont ici réelles.

Soient C_{p_1} et C_{p_2} les deux complexes de Φ dont les axes sont g_1 et g_2; ν_1 et ν_2 les paramètres, réels, de ces complexes. D'après une remarque du paragraphe 27, 2°, C_{p_1} et C_{p_2} sont en involution, si aucun d'eux n'est spécial.

---

[1] Nous étudierons spécialement ce cas particulier au paragraphe 50.

Si $D_2 \neq 0$, nous prendrons de nouveaux axes trirectangles Ox, Oy, Oz respectivement sur les droites g_1, g_2, H et nous choisirons C_{p_1} et C_{p_2} comme complexes de base.

Dans tous les cas, nous aurons, avec ce choix d'axes et de complexes de base, ramené l'équation de Φ à une forme analogue à (110), mais avec un coefficient de λX égal à zéro, puisque l'axe g_2 de C_{p_2} rencontre Ox. On a alors, d'après (12),

$$(114) \qquad \nu_1 = \frac{D_1}{A_1}, \qquad \nu_2 = \frac{E_2}{B_2},$$

A_1, D_1, B_2, E_2 étant les coefficients des équations de C_{p_1} et de C_{p_2} par rapport aux axes de coordonnées placés sur g_1, g_2 et H.

L'équation réduite de Φ peut s'écrire

$$(115) \qquad L + \nu_1 X + \lambda(M + \nu_2 Y) = 0.$$

Le paramètre d'un complexe quelconque de Φ est

$$(116) \qquad \nu = \frac{\nu_1 + \lambda^2 \nu_2}{1 + \lambda^2},$$

fonction homographique de λ^2, et les coordonnées plückériennes de l'axe sont

$$\nu_1 - \nu, \quad \lambda(\nu_2 - \nu), \quad 0, \quad 1, \quad \lambda, \quad 0.$$

Appelons II le plan (g_1, g_2), qui est ici le plan xOy.

λ est le *coefficient angulaire* de la projection sur II de l'axe du complexe de Φ considéré. On voit que la cote de cet axe est

$$(117) \qquad z = \frac{\lambda(\nu_2 - \nu_1)}{1 + \lambda^2},$$

et l'on trouve, pour la surface lieu de l'axe, un *cylindroïde* S, d'équation

$$(118) \qquad z(x^2 + y_2) + (\nu_1 - \nu_2)xy = 0.$$

g_1 et g_2 sont les deux *génératrices principales* de S; et H en est la *droite double*. L'origine O des coordonnées est le *point principal* de S et les deux génératrices *singulières* de S, qui correspondent à $\lambda = 1$ et à $\lambda = -1$, ont pour cotes $\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}$ et $-\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}$.

Si l'on pose $\lambda = \operatorname{tg}\theta$, *on a pour le cylindroïde* S

(119) $$y = x \operatorname{tg}\theta, \qquad z = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} \sin 2\theta.$$

Les valeurs λ_1 et λ_2 relatives aux deux complexes spéciaux de Φ sont données par l'équation

(120) $$\nu_1 + \lambda^2 \nu_2 = 0.$$

Nous supposons $\nu_2 \neq 0$.

Nous avons

(121) $$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = -\frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

λ_1 et λ_2 sont des nombres réels ou imaginaires *purs* conjugués, selon que les paramètres ν_1 et ν_2 de C_{p_1} et de C_{p_2} sont de signes contraires ou de même signe.

Les cotes des axes Δ_1 et Δ_2 des complexes spéciaux de Φ sont égales, d'après (117), à $\pm \lambda_1 \nu_2$.

32. **Congruence linéaire base du faisceau.** — Toutes les droites de la congruence linéaire B base de Φ satisfont, en particulier, à

(122) $$L + \nu_1 X = 0, \qquad M + \nu_2 Y = 0,$$

équations des deux complexes de base de Φ.

Si x, y, z sont les coordonnées cartésiennes d'un point d'une droite de B, les coordonnées plückériennes de cette droite sont

$$-\nu_1(zx - \nu_2 y), \quad -\nu_2(\nu_1 x + yz), \quad \nu_1 x^2 + \nu_2 y^2,$$
$$zx - \nu_2 y, \quad \nu_1 x + yz, \quad \nu_1 \nu_2 + z^2.$$

Ces expressions ne sont pas valables pour $\nu_1 = 0$, $y = z = 0$, car elles deviennent toutes nulles.

La droite de B *qui passe en un point quelconque d'une génératrice de* S, *autre que* Δ_1 *et* Δ_2, *la coupe à angle droit.* En effet, comme cette droite appartient à B, elle appartient à tous les complexes de Φ, donc au complexe non spécial de Φ ayant pour axe la génératrice de S considérée. Rencontrant cet axe, elle lui est perpendiculaire.

Distinguons maintenant deux cas.

Cas de $\nu_1 \neq 0$. — On a $\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0$. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont distinctes, réelles ou imaginaires conjuguées et symétriques par rapport à g_1 et par rapport à g_2. Ce sont deux génératrices *associées* de S.

Cas de $\nu_1 = 0$. — On a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont confondues avec g_1. C_{p_1} est spécial. Toute droite de B rencontre g_1.

B *est alors l'ensemble des droites tangentes à* S *en tous les points de la génératrice principale* g_1. En effet, la normale à S en un point $(x_0, 0, 0)$ de g_1 a pour paramètres directeurs $0, -\nu_2, x_0$. Si (x, y, z) est un point d'une droite de B passant par $(x_0, 0, 0)$, on déduit de $M + \nu_2 Y = 0$ que ses paramètres directeurs $x - x_0, y, z$, sont tels que

$$-x_0 z + \nu_2 y = 0,$$

La droite de B considérée est donc tangente à S au point $(x_0, 0, 0)$.

La génératrice g_1 *appartient alors à* B, c'est-à-dire *à tous les complexes de* Φ, car elle satisfait aux deux équations (122), où $\nu_1 = 0$.

33. **Faisceau Ψ_0 de systèmes de vecteurs associé à un faisceau Φ de complexes linéaires.** — Soit Ψ un faisceau de systèmes de vecteurs associé au faisceau Φ de complexes linéaires (*voir* § 23, 4°). Δ_1 et Δ_2 sont les axes centraux des deux systèmes de vecteurs de Ψ qui se réduisent à un vecteur.

Considérons maintenant le faisceau Ψ_0 de systèmes de vecteurs, associé à Φ, correspondant à l'équation (115) de Φ.

Portons sur chaque génératrice du cylindroïde S, *à partir de la droite* H, deux vecteurs respectivement égaux à la résultante générale et au moment résultant en un point de cette génératrice du système de vecteurs de Ψ_0 dont elle est l'axe central. Soient P et P′ les extrémités des deux vecteurs portés sur ladite génératrice. Comme le moment résultant de ce système est le même en tout point de la génératrice, qui est son axe central, on peut le calculer au point $(0, 0, z)$ de H, z étant la cote de la génératrice, donnée par (117). D'après le paragraphe 5, les composantes de la résultante générale sont $1, \lambda, 0$ et celles du moment à l'origine O sont $\nu_1, \lambda\nu_2, 0$.

Le lieu de P est l'intersection de S et du plan $x = 1$, perpendiculaire à Ox. C'est une *cubique* à centre, dont les équations sont

$$x = 1, \qquad z = \frac{(\nu_2 - \nu_1) y}{1 + y^2}. \tag{123}$$

Les coordonnées de P′ sont

$$x = \nu_1 + \lambda z = \nu, \qquad y = \lambda\nu_2 - z = \lambda\nu, \quad z.$$

Tenant compte de (119), on a

$$x - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}\cos 2\theta$$

et

$$(124) \qquad \left(x - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{(\nu_1 - \nu_2)^2}{4}.$$

Ainsi, *le lieu de la projection de* P′ *sur le plan* zOx *est une circonférence* dont le centre, situé sur Ox, a pour coordonnées $\frac{\nu_1+\nu_2}{2}$, o, o, et qui passe par les points (ν_1, o, o) et (ν_2, o, o).

Le lieu de P′ est donc *l'intersection du cylindre circulaire* (124) *et du cylindroïde* S. Ce cylindre est tangent à S en des points des génératrices singulières de S.

Si l'on faisait jouer à C_{p_2}, et non à C_{p_1}, le rôle de premier complexe de base de Φ, c'est-à-dire si l'on écrivait l'équation de Φ sous la forme

$$(125) \qquad M + \nu_2 Y + \lambda(L + \nu_1 X) = o,$$

les lieux analogues aux précédents se déduiraient de ceux-ci par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz.

34. Couples de complexes de Φ en involution. — Conservons les axes de coordonnées et complexes de base qui viennent d'être utilisés, C_{p_1} étant le premier complexe de base. Supposons $\nu_1 \neq o$, $\nu_2 \neq o$.

Nous avons dit que C_{p_1} et C_{p_2} sont en involution.

On déduit de (83), (115) et (120) qu'à tout couple de valeurs μ et μ' telles que

$$(126) \qquad \mu\mu' = \lambda_1^2 = -\frac{\nu_1}{\nu_2}$$

et différentes de $\pm\lambda_1$ correspondent deux complexes de Φ en *involution*.

CHAPITRE III.

CONJUGUÉES D'UNE DROITE PAR RAPPORT AUX COMPLEXES D'UN FAISCEAU.

35. **Conjuguées d'une droite par rapport aux complexes d'un faisceau.** — Nous continuons à supposer dans ce chapitre que les équations des complexes de base, données pour un système quelconque d'axes trirectangles, ont leurs coefficients réels.

Prenons ensuite, comme au chapitre précédent, les axes de coordonnées sur les droites principales réelles g_1, g_2, H, et pour complexes de base les complexes C_{p_1} et C_{p_2}, d'axes g_1 et g_2.

Le plan Π est donc confondu avec le plan xOy.

Considérons une droite quelconque, réelle, D, *qui ne rencontre ni* Δ_1, *ni* Δ_2. D'après le paragraphe 29, le lieu des conjuguées de D par rapport aux complexes de Φ est une *semi-quadrique* Q_1, qui comprend D, Δ_1 et Δ_2. La *semi-quadrique complémentaire* Q_2 est formée des droites de la congruence B rencontrant D.

Nous allons écrire l'équation de la quadrique Q, qui comprend Q_1 et Q_2.

Soient L_0, M_0, N_0, X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées pluckériennes de D. Celles d'une droite quelconque de B ont été données au paragraphe 32. Posons

$$l = L_0 - \nu_1 X_0, \qquad m = M_0 - \nu_2 Y_0. \tag{127}$$

La condition de rencontre de D et de droites de B se met facilement sous la forme

$$Z_0(\nu_1 x^2 + \nu_2 y^2) + N_0 z^2 + myz + lzx + m\nu_1 x - l\nu_2 y + \nu_1\nu_2 N_0 = 0. \tag{128}$$

Cette équation à coefficients réels est celle de la quadrique Q.

Cette surface passe par Ox, *pour* $\nu_1 = 0$, c'est-à-dire quand Δ_1 et Δ_2 sont confondus. Et, dans ce cas *particulier*, elle est *tangente au cylindroïde* S le long de Ox, puisque les droites de la congruence B sont alors tangentes à S aux divers points de Ox.

Si D *n'est pas perpendiculaire à* H, les trois droites D, Δ_1, Δ_2 de la semi-quadrique Q_1, lorsque Δ_1 et Δ_2 sont réelles et distinctes, ne sont pas parallèles à un même plan et Q est un *hyperboloïde à une* *nappe*. Cette conclusion subsiste quand Δ_1 et Δ_2 sont réelles et confondues ou imaginaires.

Les coordonnées du *centre* de Q sont

$$(129) \qquad x = -\frac{m}{2Z_0}, \qquad y = \frac{l}{2Z_0}, \qquad z = 0.$$

Le centre de Q est donc *placé dans le plan* Π.

Si D *est perpendiculaire à* H, on a $Z_0 = 0$; Q est un *paraboloïde hyperbolique*, dont l'un des plans directeurs est parallèle au plan Π.

36. **Propriétés de la quadrique** Q. — 1° *La semi-quadrique* Q_1 *est sa propre figure polaire réciproque par rapport à tout complexe non spécial de* Φ.

C'est la conséquence de ce que toute droite de la semi-quadrique complémentaire Q_2 appartient à la congruence linéaire base de Φ, donc à tous les complexes de Φ, et, par suite, est sa propre conjuguée par rapport à tout complexe non spécial de Φ.

2° Soit $\overline{\Phi}$ le faisceau des complexes symétriques de ceux de Φ par rapport au plan Π. Une droite (L, M, N, X, Y, Z) a pour symétrique par rapport à Π la droite $(\overline{L}, \overline{M}, \overline{N}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$ telle que

$$\overline{L} = -L, \qquad \overline{M} = -M, \qquad \overline{N} = N, \qquad \overline{X} = X, \qquad \overline{Y} = Y, \qquad \overline{Z} = -Z.$$

Donc, au faisceau Φ correspond le faisceau $\overline{\Phi}$ tel que

$$-\overline{L} + \nu_1\overline{X} + \lambda(-\overline{M} + \nu_2\overline{Y}) = 0.$$

En revenant aux notations ordinaires, on voit que $\overline{\Phi}$ a pour équation

$$-L + \nu_1 X + \lambda(-M + \nu_2 Y) = 0.$$

ou

$$(130) \qquad L - \nu_1 X + \lambda(M - \nu_2 Y) = 0.$$

On peut regarder $\overline{\Phi}$ comme ayant pour complexes de base les complexes d'axes g_1 et g_2, de paramètres $-\nu_1$ et $-\nu_2$, formés des symétriques par rapport à Π des droites de C_{p_1} et de C_{p_2}. Son cylindroïde est symétrique de celui de Φ par rapport à Π.

On déduit de (28), (115) et (130) que *tout complexe de* Φ (*ou de* $\overline{\Phi}$)

est son propre conjugué par rapport à tout complexe non spécial de $\overline{\Phi}$ (*ou de* Φ). Tout complexe non spécial de Φ est en *involution* avec tout complexe non spécial de $\overline{\Phi}$.

Considérons, à nouveau, la droite $D(L_0, M_0, \ldots, Z_0)$, qui ne rencontre pas, même à l'infini, Δ_1 ni Δ_2, et la quadrique Q correspondante, d'équation (128). La symétrique, $\overline{D}$, de D par rapport à Π a pour coordonnées plückériennes $-L_0$, $-M_0$, N_0, X_0, Y_0, $-Z_0$

Le complexe $\mathcal{C}$ de Φ qui contient $\overline{D}$ est tel que

$$-L_0 + \nu_1 X_0 + \lambda(-M_0 + \nu_2 Y_0) = 0,$$

d'où

(131) $$\lambda = -\frac{l}{m}.$$

Le complexe $\overline{\mathcal{C}}$ de $\overline{\Phi}$ qui contient D est tel que

$$L_0 - \nu_1 X_0 + \lambda(M_0 - \nu_2 Y_0) = 0,$$

d'où

(132) $$\lambda = -\frac{l}{m}.$$

Il s'ensuit que les axes de $\mathcal{C}$ et de $\overline{\mathcal{C}}$ ont des projections sur Π *confondues*, puisqu'elles passent toutes deux par O et ont même coefficient angulaire par rapport à la droite des x. Ces axes sont symétriques l'un de l'autre par rapport à Π.

Compte tenu de (129), on voit que *le centre de* Q *appartient à la projection commune sur* Π *des axes de* $\mathcal{C}$ *et de* $\overline{\mathcal{C}}$ et il en est *encore ainsi* pour toute droite, analogue à D, du même complexe $\overline{\mathcal{C}}$.

3° *Toutes les droites de* Q_1 *appartiennent au complexe* $\overline{\mathcal{C}}$.

On voit d'abord que *toute* droite D' de Q_1, autre que Δ_1 et Δ_2, est la conjuguée de D par rapport à un complexe non spécial $\mathcal{C}'$ de Φ. Mais D appartient au complexe $\overline{\mathcal{C}}$ de $\overline{\Phi}$ et tout complexe de $\overline{\Phi}$ est son propre conjugué par rapport à tout complexe non spécial de Φ, donc par rapport à $\mathcal{C}'$. Donc D', conjuguée de D par rapport à $\mathcal{C}'$, appartient à $\overline{\mathcal{C}}$. On vérifie directement que Δ_1 et Δ_2 appartiennent à tout complexe de $\overline{\Phi}$ et, par suite, en particulier à $\overline{\mathcal{C}}$.

37. Cas particuliers. — 1° D *n'est pas perpendiculaire à* H *et rencontre* H.

Il faut alors faire $N_0 = 0$ dans (128). On a $Z_0 \neq 0$.

Dans ce cas, la surface Q, qui est un *hyperboloïde à une nappe*, passe par la droite double H de S, qui est la droite des z. On déduit de (118) et de (128) (avec $N_0 = 0$ dans cette dernière) que Q rencontre S suivant une *ellipse*, dont la projection sur Π est la *circonférence*

$$Z_0(x^2+y^2) + mx - ly = 0. \tag{133}$$

Cette circonférence passe par O, et son centre a pour coordonnées

$$-\frac{m}{2Z_0}, \quad \frac{l}{2Z_0}, \quad 0.$$

On voit, compte tenu de (129), que *le centre de cette circonférence est confondu avec le centre de l'hyperboloïde*.

2° D *est perpendiculaire à* H *et ne rencontre pas* H.

On a alors

$$Z_0 = 0 \quad \text{et} \quad N_0 \neq 0.$$

La quadrique Q est un *paraboloïde hyperbolique*. Son cône asymptote se décompose en deux plans

$$z = 0, \qquad lx + my + N_0 z = 0. \tag{134}$$

L'axe de Q, parallèle à l'intersection de ces plans, a donc pour paramètres directeurs m, $-l$, 0. D'après (132), on voit qu'il *est parallèle à l'axe du complexe* $\overline{\mathcal{C}}$ *de* Φ *qui contient* D *et à l'axe du complexe* $\mathcal{C}$ *de* Φ *qui contient* $\overline{\mathrm{D}}$.

Cette propriété subsiste pour le paraboloïde relatif à Φ et à *toute* droite remplissant les mêmes conditions que D et appartenant, comme elle, à $\overline{\mathcal{C}}$.

3° D *est perpendiculaire à* H *et rencontre* H.

On a

$$N_0 = Z_0 = 0.$$

Q est encore un *paraboloïde hyperbolique* et il *passe par* H. Il a pour équation

$$myz + lzx + m\nu_1 x - l\nu_2 y = 0. \tag{135}$$

Il est *équilatère*. Un de ses plans directeurs est parallèle à Π et l'autre perpendiculaire à Π.

On démontre que Q jouit des propriétés suivantes :

a. le sommet de Q est placé sur H;

b. la génératrice de Q perpendiculaire à H en ce sommet appartient au cylindroïde S relatif à Φ;

c. l'axe de Q est perpendiculaire à cette génératrice et à H;

d. il est confondu avec l'axe du complexe $\overline{\mathcal{C}}$ de $\overline{\Phi}$ qui contient D.

4° *Autres cas particuliers.* — Quand D rencontre Δ_1 ou Δ_2, ou ces deux droites, on a des cas de *dégénérescence* de Q, dont l'étude ne présente aucune difficulté.

38. **Remarques diverses.** — 1° Prenons des complexes de base *quelconques*, à coefficients réels, et envisageons le problème qui a été traité dans le paragraphe 30 pour le cas de $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Nous allons examiner le *cas de* $\lambda_1 = \lambda_2$.

Supposons que, des deux paramètres ν_1 et ν_2 des complexes C_{p_1} et C_{p_2}, ce soit ν_1 qui soit nul (avec $\nu_2 \neq 0$).

Les droites Δ_1 et Δ_2 sont alors confondues avec g_1. C_{p_1} est spécial.

La congruence linéaire B est formée des tangentes au cylindroïde S aux différents points de g_1 (§ 32).

Soient D une droite quelconque, réelle, *qui ne rencontre pas* Δ_1; m la valeur de λ correspondant au complexe m de Φ qui contient D; D′ et D″ les conjuguées de D par rapport à des complexes non spéciaux λ' et λ'' de Φ; M_1, M, M′, M″ les points où une droite MM_1 de la congruence B rencontre respectivement Δ_1, D, D′, D″; m' et m'' les valeurs de λ correspondant aux complexes m' et m'' de Φ comprenant respectivement D′ et D″.

La quadrique Q relative à D est tangente au cylindroïde S le long de Δ_1 (§ 35).

Considérons le plan (D′, MM_1) tangent à Q en M′. Si l'on prend λ''' tel que

$$(M_1, M, M', M'') = (\lambda_1, \lambda', m', \lambda'''),$$

D′ et D″ sont conjuguées par rapport au complexe non spécial λ''' de Φ.

Posons, d'une manière générale,

$$\beta_k = \frac{1}{k - \lambda_1}.$$

La formule (82) nous donne

$$(136) \qquad \beta_m + \beta_{m'} = 2\beta_{\lambda'}, \qquad \beta_m + \beta_{m''} = 2\beta_{\lambda''}$$

et

$$(137) \qquad \beta_{m'} + \beta_{m''} = 2\beta_{\lambda'''}.$$

On déduit de (136) et (137) la relation

$$(138) \qquad \beta_m + \beta_{m'} + \beta_{m''} = \beta_{\lambda'} + \beta_{\lambda''} + \beta_{\lambda'''}.$$

Elle sera généralisée dans le paragraphe 49, 2°.

Les formules (136) donnent $\beta_{m'}$ et $\beta_{m''}$ pour β_m, $\beta_{\lambda'}$ et $\beta_{\lambda''}$ donnés.

Portant les valeurs de $\beta_{m'}$ et $\beta_{m''}$ dans (137), on a

$$(139) \qquad \beta_{\lambda'''} = \beta_{\lambda'} + \beta_{\lambda''} - \beta_m.$$

Des remarques analogues à celles du paragraphe 30, 2° (relatives au cas de $\lambda_1 \neq \lambda_2$) ne peuvent pas être faites ici, puisque, pour $\lambda_1 = \lambda_2$, il n'y a pas dans Φ de couple de complexes en involution.

2° Supposons maintenant que λ_1 et λ_2 peuvent être *distincts ou confondus*.

Soient D une droite quelconque, réelle, *qui ne rencontre ni* Δ_1, *ni* Δ_2, *ni* H; D′ et D″ les conjuguées de D par rapport aux complexes non spéciaux λ' et λ'' de Φ; P′ et P″ les plans parallèles à H passant respectivement par D′ et D″; L′ et L″ les droites de la congruence linéaire B situées respectivement dans les plans P′ et P″.

D′ et D″ appartiennent à la semi-quadrique Q_1 relative à D. Elles ne sont donc pas situées dans un même plan et ne rencontrent pas H. D′ perce le plan P″ en un point E et D″ perce le plan P′ en un point F. La droite EF, intersection des plans P′ et P″, est parallèle à H.

L′ passe par F. En effet, L′ appartenant au plan P′ et à la congruence B, passe par les pôles de P′ par rapport à tous les complexes de Φ, donc en particulier par le pôle de P′ relatif au complexe λ' de Φ. Ce dernier pôle est situé sur D. Donc L′ rencontre D et, par suite, appartient à la semi-quadrique Q_2, complémentaire de Q_1. Elle rencontre D'' qui appartient à Q_1. Elle passe donc par F.

De même L'' passe par E.

Soit λ''' la valeur de λ correspondant à la génératrice AC du cylindroïde S passant par le point A où la droite EF perce S. EF étant perpendiculaire à l'axe AC du complexe λ''' de Φ et le rencontrant appartient à ce complexe.

Le pôle du plan P' par rapport au complexe λ''' de Φ est donc placé sur EF. Il doit être aussi sur L', droite de la congruence B située

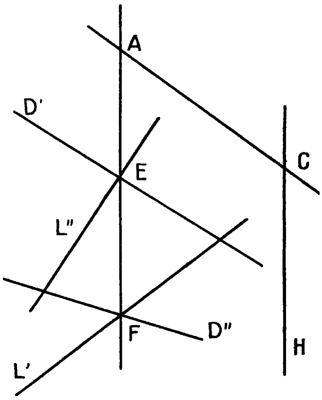

Fig. 1.

dans P', puisque L' appartient au complexe λ''' de Φ. Donc ce pôle est F.

De même le pôle du plan P'' est E.

D'après les hypothèses faites, le complexe λ''' de Φ n'est pas spécial.

La conjuguée de D' par rapport au complexe λ''' de Φ est la droite de la semi-quadrique Q_1, qui passe par F. C'est donc D''.

D' et D'' sont donc conjuguées par rapport au complexe λ''' de Φ que nous venons de déterminer géométriquement.

Les projections sur Π des axes des complexes λ', λ'', λ''' de Φ passent respectivement par les intersections des projections sur Π de D et D', D et D'', D' et D''.

On peut vérifier, par le calcul, que cette détermination de λ''' donne le même résultat que (105) pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et (139) pour $\lambda_1 = \lambda_2$.

3° Prenons des axes de coordonnées sur les droites principales g_1, g_2 et H, et adoptons C_{p_1} et C_{p_2} comme complexes de base.

Supposons $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ce qui, avec les axes particuliers de coordonnées et complexes de base choisis, correspond à

$$\nu_1 \neq 0, \qquad \nu_2 \neq 0, \qquad \lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0.$$

Considérons le cas où les complexes λ' *et* λ'' *de* Φ *ont pour axes deux génératrices associées de* S. On a alors

$$\lambda' = -\lambda'',$$

avec, d'après (121),

$$\lambda_2 = -\lambda_1, \qquad \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = -\frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

Soit m la valeur de λ correspondant au complexe non spécial de Φ comprenant D. On a

$$\alpha_{\lambda'} = \frac{\lambda' - \lambda_1}{\lambda' - \lambda_2} = \frac{\lambda' - \lambda_1}{\lambda' + \lambda_1},$$

$$\alpha_{\lambda''} = \frac{\lambda'' - \lambda_1}{\lambda'' - \lambda_2} = \frac{\lambda' + \lambda_1}{\lambda' - \lambda_1},$$

$$\alpha_{\lambda'}\alpha_{\lambda''} = 1.$$

D'où, en vertu de (105),

$$\alpha_{\lambda'''} = \frac{1}{\alpha_m}$$

et

(140) $$\lambda''' = -m$$

λ''' est donc *indépendant de* λ' et les axes des complexes m et λ''' de Φ sont des génératrices *associées* de S.

Pour les deux complexes de base C_{p_1} et C_{p_2}, on a $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, et les coefficients $\alpha = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2}$ correspondants sont égaux à -1 et à 1. On voit, compte tenu de (76), que les complexes λ' et λ'' de Φ sont *conjugués par rapport à* C_{p_1} *et par rapport à* C_{p_2}. D'ailleurs, le complexe λ' de Φ est alors le symétrique du complexe λ'' de Φ par rapport à g_1 et par rapport à g_2.

Considérons maintenant le cas où $\lambda'\lambda'' + \lambda_1^2 = 0$.

On a alors

$$\alpha_{\lambda'}\alpha_{\lambda''} = -1,$$

$$\alpha_{\lambda'''} = -\frac{1}{\alpha_m},$$

(141) $$\lambda''' = -\frac{\lambda_1^2}{m}.$$

Cette quantité est indépendante de λ'. Les deux complexes $-m$ et $-\frac{\lambda_1^2}{m}$ de Φ sont en *involution*, ainsi que le montre (126).

4° Conservons les axes de coordonnées et complexes de base du paragraphe précédent.

Supposons

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \nu_1 = 0, \qquad \nu_2 \neq 0.$$

Dans le cas de $\lambda' = -\lambda''$, on a *encore* $\lambda''' = -m$, ainsi qu'on le déduit de (139). Le complexe λ' de Φ, symétrique du complexe λ'' de Φ par rapport à g_1 et par rapport à g_2, est le *conjugué* de ce dernier par rapport à C_{p_2}, comme on le voit par (82).

CHAPITRE IV.

SUITES ET CYCLES DE COMPLEXES LINÉAIRES CONJUGUÉS. CAS OU LES ÉQUATIONS DES COMPLEXES DE BASE ONT LEURS COEFFICIENTS RÉELS.

39. **Définition des suites et cycles de complexes linéaires conjugués.** — Dans ce chapitre, le système des axes trirectangles de coordonnées est *quelconque*.

Supposons donné un complexe linéaire non spécial quelconque, $\mathcal{C}_1$, dont l'équation a ses coefficients *réels*. Parmi les ∞^4 faisceaux comprenant $\mathcal{C}_1$, prenons un faisceau Φ quelconque, mais dont les complexes de base ont des équations à coefficients *réels*, le second complexe de base au moins n'étant pas spécial.

λ_1 et λ_2 sont réels ou imaginaires conjugués.

Soit μ_1 la valeur *réelle* de λ correspondant au complexe $\mathcal{C}_1$. Donnons-nous arbitrairement une autre valeur *réelle* μ_2, différente de λ_1 et de λ_2, à laquelle correspond un autre complexe non spécial $\mathcal{C}_2$ de Φ.

Cherchons le complexe linéaire $\mathcal{C}_3$ conjugué (polaire réciproque) de $\mathcal{C}_1$ par rapport à $\mathcal{C}_2$. De (28) on déduit que $\mathcal{C}_3$ aussi appartient au faisceau Φ et n'est pas spécial.

Cherchons maintenant le complexe linéaire $\mathcal{C}_4$ conjugué de $\mathcal{C}_2$ par rapport à $\mathcal{C}_3$. Il appartient également à Φ et n'est pas spécial.

En continuant à procéder ainsi, nous obtenons une *suite* ou, quand celle-ci se ferme, un *cycle* de complexes linéaires conjugués.

Si donc l'on désigne par $\mathcal{C}_j$ le complexe de rang j d'une *suite* $\mathcal{S}$ de complexes linéaires conjugués, $\mathcal{C}_{j+2}$ est, par définition de $\mathcal{S}$, le conjugué de $\mathcal{C}_j$ par rapport à $\mathcal{C}_{j+1}$, quel que soit j.

Dans un *cycle* de p complexes linéaires conjugués, ceux-ci possèdent la propriété précédente, et, en outre, $\mathcal{C}_1$ est le conjugué de $\mathcal{C}_{p-1}$ par rapport à $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_2$ le conjugué de $\mathcal{C}_p$ par rapport à $\mathcal{C}_1$.

Chaque suite ou cycle appartient à un faisceau.

40. Suites de complexes linéaires conjugués dans le cas de $\lambda_1 \neq \lambda_2$. — Partant de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$, déterminons dans Φ une *suite* $\mathcal{S}$ de complexes linéaires conjugués $\mathcal{C}_j$ correspondant à des valeurs μ_j de λ.

Posons, d'une manière générale,

$$\alpha_j = \frac{\mu_j - \lambda_1}{\mu_j - \lambda_2}. \tag{142}$$

On a, d'après (76) et (77), quel que soit j,

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu_j, \mu_{j+1}) = (\lambda_1, \lambda_2, \mu_{j+1}, \mu_{j+2}) = (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2), \tag{143}$$

$$\alpha_j \alpha_{j+2} = \alpha^2_{j+1}. \tag{144}$$

Les α_j forment donc une progression géométrique, dont le premier terme est α_1 et la *raison*, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Aucun des complexes $\mathcal{C}_j$ n'est spécial.

Quels que soient j et un autre entier positif m, $\mathcal{C}_j$ *et* $\mathcal{C}_{j+2m}$ *de* $\mathcal{S}$ *sont conjugués par rapport à* $\mathcal{C}_{j+m}$.

De $\mathcal{S}$ on déduit des suites analogues, appartenant à Φ, notamment en remplaçant chaque complexe de $\mathcal{S}$ par le complexe de Φ en *involution* avec lui, ou en ne faisant ce changement que de deux en deux complexes.

Si λ_1 *et* λ_2 *sont réels*, comme nous nous donnons μ_1 et μ_2 réels, tous les α_j sont réels et il en est de même des μ_j. Une suite *infinie* de complexes de Φ tend alors vers le complexe *spécial* λ_1 de Φ si $\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right| < 1$, et vers le complexe *spécial* λ_2 de Φ si $\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right| > 1$.

Supposons maintenant λ_1 *et* λ_2 *imaginaires conjugués*. Nous nous donnons encore μ_1 et μ_2 réels. Les *modules* de α_1 et de α_2 sont donc *égaux à* 1. Il en est, par suite, *de même* des modules de tous les α_j. Et à chaque α_j correspond un μ_j réel. Posons

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$
$$\mu_1 - \lambda_1 = a(\cos\psi + i\sin\psi) = ae^{i\psi},$$

avec φ, a, ψ réels. On trouve

$$\mu_1 - \lambda_2 = ae^{-i\psi}, \qquad \alpha_1 = e^{2i\psi}, \qquad \alpha_{j+1} = e^{i(2\psi+j\varphi)}$$

et

$$(145) \qquad \mu_{j+1} = \mu_1 - \frac{a\sin\frac{j\varphi}{2}}{\sin\left(\frac{j\varphi}{2} + \psi\right)}.$$

41. Cycles de complexes linéaires conjugués dans le cas de $\lambda_1 \neq \lambda_2$. — Imposons-nous que la suite $\mathfrak{S}$ *comprenne p complexes distincts et se ferme*, c'est-à-dire que

$$\alpha_{p+1} = \alpha_1, \qquad \alpha_{p+2} = \alpha_2, \qquad \ldots.$$

Il en est ainsi quand la *raison* ρ de la progression géométrique des α_j est une *racine primitive* $p^{\text{ième}}$ *de* 1, c'est-à-dire quand

$$(146) \qquad \rho = \cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p},$$

avec k entier positif *premier* avec p.

$\mathfrak{S}$ est alors un *cycle* de complexes linéaires conjugués, de p complexes distincts.

On ne peut avoir un tel cycle, avec des valeurs réelles pour μ_1, μ_2, ..., μ_p, que si λ_1 et λ_2 sont imaginaires conjugués, puisqu'il faut que la raison soit imaginaire et de module égal à 1.

Donnons-nous μ_1 quelconque et employons d'abord la racine

$$(147) \qquad \rho_1 = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}.$$

Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_1$ les complexes ainsi obtenus successivement. On a, par (79), pour deux complexes quelconques $\mathcal{C}_j$ et $\mathcal{C}_{j+m}$ de ce cycle,

$$(148) \qquad \omega_{j,j+m}^2 = 4\omega_j\omega_{j+m}\cos^2\frac{m\pi}{p},$$

ω_j, ω_{j+m}, $\omega_{j,j+m}$ étant les quantités relatives à $\mathcal{C}_j$ et $\mathcal{C}_{j+m}$ et analogues à ω_1, ω_2, $\omega_{1,2}$ des formules (26) et (27).

Employons maintenant la racine $\rho_k = \rho_1^k$, avec k premier avec p. Nous retrouvons tous les complexes obtenus avec ρ_1, mais, en partant de $\mathcal{C}_1$, dans l'ordre $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{k+1}$, $\mathcal{C}_{2k+1}$, ...

Si nous utilisions une racine $\rho_{k'} = \rho_1^{k'}$, avec k' non premier avec p, nous ne retrouverions plus tous les complexes obtenus avec ρ_1. En particulier, pour p pair et $k' = \frac{p}{2}$, on n'obtient, en partant de $\mathcal{C}_1$, que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{\frac{p}{2}+1}$, en *involution*.

En faisant dans (148), $p = 3$, $j = 1$, $m = 1$, on retrouve la dernière formule du paragraphe 13.

42. Suites de complexes linéaires conjugués dans le cas de $\lambda_1 = \lambda_2$. — Posons, d'une manière générale,

$$\beta_j = \frac{1}{\mu_j - \lambda_1}.$$

Reportons-nous aux formules (82)

Nous voyons que *les quantités β_j relatives à une suite de complexes linéaires conjugués appartenant à Φ forment une progression arithmétique.*

Il n'y a pas alors dans Φ de cycle de complexes linéaires conjugués, car l'égalité $\mu_{p+1} = \mu_1$ entraîne $\mu_1 = \mu_2 = \ldots \mu_p$.

CHAPITRE V.

SUITES ET CYCLES DE COMPLEXES LINÉAIRES CONJUGUÉS. CAS OU LES ÉQUATIONS DES COMPLEXES DE BASE ONT LEURS COEFFICIENTS RÉELS OU IMAGINAIRES.

43. Suites de complexes linéaires conjugués dans le cas de $\lambda_1 \neq \lambda_2$. — Dans ce chapitre, le système des axes trirectangles de coordonnées est quelconque et les complexes de base sont quelconques, le second au moins n'étant pas spécial.

La théorie exposée dans le chapitre précédent reste applicable, mais on suppose, ici, que les équations des complexes de base ont leurs coefficients *réels ou imaginaires*. Les valeurs λ_1 et λ_2, quand elles ne sont pas toutes deux réelles, peuvent donc n'être pas imaginaires conjuguées.

Dans ce paragraphe, nous *envisageons le cas de* $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Posons toujours, d'une manière générale,

$$(149) \qquad \alpha_j = \frac{\mu_j - \lambda_1}{\mu_j - \lambda_2}.$$

Si les α_j forment une *progression géométrique*, nous avons encore une *suite* de complexes linéaires conjugués.

Considérons une suite de valeurs μ_j telle que

$$(150) \qquad 2\mu_j = \lambda_1 + \lambda_2 - i(\lambda_1 - \lambda_2)\operatorname{tg}\theta_j,$$

les angles θ_j formant une *progression arithmétique* de raison γ quelconque. On a

$$(151) \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \mu_j, \mu_{j+1}) = (i, -i, \operatorname{tg}\theta_j, \operatorname{tg}\theta_{j+1}) = e^{-2i\gamma}.$$

Cette dernière quantité est une *constante*, indépendante de j. La relation (151) montre que les complexes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_{j+1}, \ldots$ forment une *suite* de complexes linéaires conjugués

La raison de la progression géométrique constituée par les α_j est alors $e^{2i\gamma}$.

Quand λ_1 et λ_2 sont *imaginaires conjugués*, $\lambda_1 + \lambda_2$ et $i(\lambda_1 - \lambda_2)$ sont réels et l'on a des μ_j réels pour des θ_j réels. C'est ce qui a lieu, *en particulier*, quand les équations des complexes de base ont leurs coefficients réels et ce résultat est en accord avec ceux du chapitre précédent.

Revenons au cas général.

Soient H la perpendiculaire commune aux axes de tous les complexes de Φ; $\Pi_1, \Pi_2, P_1, P_2, \ldots, P_j, \ldots$ les plans passant par H et respectivement par les axes des deux complexes spéciaux de Φ et par les axes des complexes d'une suite $\mathfrak{S}$; A, A', $B_1, B_2, \ldots, B_j \ldots$ les intersections de ces plans et d'une droite δ parallèle au plan Π_2 sans l'être à la droite H.

Les paramètres directeurs de l'axe d'un complexe quelconque λ de Φ sont des fonctions linéaires du coefficient λ.

Le plan passant par H et par l'axe de ce complexe aura donc une équation de la forme

$$\varpi_1 + \lambda\varpi_2 = 0, \tag{152}$$

$\varpi_1 = 0$ et $\varpi_2 = 0$ étant les équations (87) des plans qui passent par H et, en outre, respectivement par les axes des complexes de base de Φ.

Le point où δ perce le plan (152) est tel que chacune de ses coordonnées cartésiennes est une fonction homographique de λ. On a, compte tenu du paragraphe 28,

$$(A, A', B_j, B_{j+1}) = (\lambda_1, \lambda_2, \mu_j, \mu_{j+1}) = \text{const.}$$

A' étant à l'infini, il vient

$$\frac{\overrightarrow{AB}_{j+1}}{\overrightarrow{AB}_j} = \text{const.}, \qquad \frac{\overrightarrow{AB}_{j+1}}{\overrightarrow{AB}_1} = \left(\frac{\overrightarrow{AB}_2}{\overrightarrow{AB}_1}\right)^j \tag{153}$$

44. Cycles de complexes linéaires conjugués dans le cas de $\lambda_1 \neq \lambda_2$. — Si l'on prend $\gamma = \frac{k\pi}{p}$, avec k entier positif premier avec p, on a un *cycle* de p complexes linéaires conjugués. La raison de la progression géométrique des α_j est alors $e^{\frac{2k\pi i}{p}}$, qui est une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de 1.

45. Cas de $\lambda_1 = \lambda_2$. — Les indications du paragraphe 42 restent applicables.

Les plans Π_1 et Π_2 du paragraphe 43 sont ici confondus. Les coordonnées cartésiennes des points $B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots$, relatives à chacun des trois axes de coordonnées, forment une *progression arithmétique* et, si la droite δ n'est pas isotrope, les points $B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots$ sont *régulièrement espacés.*

46. Remarque sur la transformation homographique ou dualistique. — Nous avons signalé au paragraphe 23,3°, que la transformation homographique ou dualistique la plus générale transforme un complexe linéaire en un complexe linéaire et un faisceau Φ de tels complexes en un faisceau Φ' analogue. Nous avons dit également que si l'on prend pour complexes de base de Φ' les transformés de ceux de Φ et si l'on donne à λ la même valeur dans les équations de Φ et de Φ', on obtient deux complexes dont le second est le transformé du premier. Les complexes spéciaux de Φ se transforment en les complexes spéciaux de Φ', puisque la transformation homographique ou dualistique transforme des droites concourantes en droites concourantes. Le rapport anharmonique constant $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_j, \mu_{j+1})$ d'une suite ou d'un cycle de complexes conjugués de Φ, dans le cas de $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ou le rapport anharmonique constant $(\lambda_1, \mu_{j+1}, \mu_j, \mu_{j+2}) = -1$ d'une suite de complexes linéaires conjugués de Φ, dans le cas de $\lambda_1 = \lambda_2$, se conserve dans la transformation. *Le transformé d'une suite ou d'un cycle de complexes linéaires conjugués de Φ est donc une suite ou un cycle analogue de Φ'.*

CHAPITRE VI.

PRODUITS DE TRANSFORMATIONS PAR POLAIRES RÉCIPROQUES RELATIVES A DES COMPLEXES LINÉAIRES D'UN FAISCEAU.

47. **Produits de transformations par polaires réciproques relatives à des complexes linéaires d'un faisceau.** — Dans ce chapitre, sauf indication contraire, le système des axes trirectangles et les deux complexes de base sont quelconques. On suppose toutefois que ces complexes de base ont des équations à coefficients réels et que le second, au moins, n'est pas spécial.

Soient $\mathfrak{T}_{\mu_1}$ $\mathfrak{T}_{\mu_2}$, ..., $\mathfrak{T}_{\mu_j}$, ... les transformations par polaires réciproques relatives respectivement aux complexes non spéciaux μ_1, μ_2, ..., μ_j, ... de Φ correspondant à des valeurs $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_j, \ldots$ de λ; $T_j = \mathfrak{T}_{\mu_1}\mathfrak{T}_{\mu_2}\ldots\mathfrak{T}_{\mu_j}$ le produit des transformations $\mathfrak{T}_{\mu_1}$, $\mathfrak{T}_{\mu_2}$, ..., $\mathfrak{T}_{\mu_j}$ utilisées dans cet ordre.

T_j est une transformation homographique ou dualistique selon que j est pair ou impair.

Elle transforme chaque droite de la congruence B en cette droite.

On a

$$T_j^{-1} = \mathfrak{T}_{\mu_j}\mathfrak{T}_{\mu_{j-1}}\ldots\mathfrak{T}_{\mu_1}.$$

Nous utiliserons surtout les formules (105) et (139). Nous les avons établies, aux paragraphes 30, 1° et 38, 1°, en considérant une droite D réelle, pour que l'équation de la quadrique Q soit à coefficients réels. Mais le principe de *continuité* est évidemment applicable. Les formules (105) et (139) expriment qu'en calculant les coordonnées plückériennes de D″ soit en partant de D, soit en partant de D′ (les notations étant celles des paragraphes précités), on obtient les mêmes résultats. On n'a à calculer que des expressions rationnelles de λ', λ'', λ''' et des coordonnées plückériennes de D. Rien n'est changé dans ces expressions quand la droite D est imaginaire. Les formules (105) et (139) sont donc valables pour une droite réelle ou imaginaire, qui ne rencontre, même à l'infini, ni Δ_1, ni Δ_2.

Nous allons traiter séparément les cas de $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et de $\lambda_1 = \lambda_2$.

48. Cas de $\lambda_1 \neq \lambda_2$. — Les axes Δ_1 et Δ_2 des complexes spéciaux de Φ sont distincts.

1° Soit D_j la transformée par T_j d'une droite quelconque D_0 qui ne rencontre ni Δ_1, ni Δ_2.

Posons encore, d'une manière générale,

$$\alpha_j = \frac{\mu_j - \lambda_1}{\mu_j - \lambda_2} \tag{154}$$

et soit α_0 la quantité analogue correspondant au complexe μ_0 de Φ qui comprend D_0.

Considérons d'abord D_0 et D_2 comme les conjuguées de D_1 par rapport aux complexes μ_1 et μ_2 de Φ. D_0 et D_2 sont donc conjuguées par rapport à un certain complexe non spécial k_2 de Φ. Posons

$$\alpha_{k_2} = \frac{k_2 - \lambda_1}{k_2 - \lambda_2}. \tag{155}$$

Considérons maintenant D_1 et D_2 comme conjuguées de D_0 par rapport aux complexes μ_1 et k_2 de Φ et appliquons (105) en y faisant

$$\lambda' = \mu_1, \qquad \lambda'' = k_2, \qquad \lambda''' = \mu_2,$$

puisque D_1 et D_2 sont conjuguées par rapport au complexe μ_2 de Φ. On a donc

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 \alpha_{k_2}}{\alpha_0}$$

et

$$(156)\qquad \alpha_{k_2} = \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_1}.$$

De même, D_0 et D_3 sont conjuguées par rapport au complexe non spécial k_3 de Φ tel que, si l'on pose

$$\alpha_{k_3} = \frac{k_3 - \lambda_1}{k_3 - \lambda_2},$$

on a

$$\alpha_{k_3} = \frac{\alpha_0 \alpha_3}{\alpha_{k_2}}.$$

Tenant compte de (156), il vient

$$(157)\qquad \alpha_{k_3} = \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2}.$$

Cette dernière formule ne renferme pas α_0. Elle est donc *indépendante de* D_0.

Elle a été établie avec l'hypothèse que D_0 ne rencontre ni Δ_1, ni Δ_2. Mais, puisque la transformation $\mathfrak{T}_{k_3}$ relative au complexe k_3 de Φ et la transformation $T_3 = \mathfrak{T}_{\mu_1}\mathfrak{T}_{\mu_2}\mathfrak{T}_{\mu_3}$ donnent la même transformée pour chaque droite remplissant les mêmes conditions que D_0, on voit d'abord qu'elles transforment en un même plan tout point qui n'est placé ni sur Δ_1, ni sur Δ_2, et en un même point tout plan qui ne renferme ni Δ_1, ni Δ_2,. On remarque ensuite qu'elles transforment toutes les deux un point P quelconque de Δ_1, par exemple, en le plan (P, Δ_2) et un plan quelconque passant par Δ_1, par exemple, en le point où ce plan coupe Δ_2. Les équations de ces deux transformations dualistiques sont donc identiques.

On a ainsi

$$(158)\qquad T_3 = \mathfrak{T}_{k_3}.$$

De même

$$T_5 = \mathfrak{T}_{k_3}\mathfrak{T}_{\mu_4}\mathfrak{T}_{\mu_5}.$$

On a donc

$$(159)\qquad T_5 = \mathfrak{T}_{k_5},$$

avec

$$\alpha_{k_5} = \frac{k_5 - \lambda_1}{k_5 - \lambda_2} = \frac{\alpha_{k_3}\alpha_5}{\alpha_4}$$

et, compte tenu, de (157)

$$\alpha_{k_5} = \frac{\alpha_1\alpha_3\alpha_5}{\alpha_2\alpha_4}. \tag{160}$$

Soit un élément de contact constitué par un point P_0 qui n'est situé ni sur Δ_1 ni sur Δ_2 et par un plan (P_0, d) ne passant ni par Δ_1 ni par Δ_2, d étant la droite de la congruence B située dans ce plan. $\mathcal{T}_1$ donne un plan (P_1, d') et un point P_1, d' étant la droite de B passant par P_0. Adoptant des indices correspondant à ceux des produits T_j de transformations, on a les transformés sucessifs de P_0 et (P_0, d) indiqués sur les deux lignes suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} P_0, & (P_1, d'), & P_2, & (P_3, d'), & \ldots; \\ (P_0, d), & P_1, & (P_2, d), & P_3, & \ldots. \end{array}$$

P_0, P_2, P_4, ... sont situés sur d' et P_1, P_3, P_5, ..., sur d. Les plans (P_1, d'), (P_3, d'), ..., passent par d' et les plans (P_0, d), (P_2, d), ..., par d, ainsi que le rappellent les notations.

2° *Supposons n impair quelconque* > 1.

Considérons la quantité k_n telle que

$$\alpha_{k_n} = \frac{k_n - \lambda_1}{k_n - \lambda_2} = \frac{\alpha_1\alpha_3\alpha_5\ldots\alpha_n}{\alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_{n-1}}. \tag{161}$$

On voit que la *transformation* $T_n = \mathcal{T}_{\mu_1}\mathcal{T}_{\mu_2}\ldots\mathcal{T}_{\mu_n}$, ici *dualistique* puisque n est *impair*, est *égale à la transformation par polaires réciproques* $\mathcal{T}_{k_n}$, relative au complexe non spécial k_n de Φ correspondant à la valeur k_n de λ définie par (161). Donc

$$T_n = \mathcal{T}_{k_n}. \tag{162}$$

T_n est *réciproque*, c'est-à-dire que $T_n = T_n^{-1}$.

Comme les équations des complexes de base sont supposées à coefficients réels, λ_1 et λ_2 sont imaginaires conjugués ou réels.

Si μ_1, μ_2, ..., μ_n sont réels, α_1, α_2, ..., α_n et, par suite, α_{k_n} sont des quantités imaginaires de module égal à 1 ou des quantités réelles, et, dans les deux cas, la quantité k_n est réelle.

Revenons au cas de μ_1, μ_2, ..., μ_n réels ou imaginaires.

Soient α_0, α'_1, α'_2, ..., α'_n les quantités α relatives aux complexes de Φ qui comprennent respectivement D_0, D_1, D_2, ..., D_n.

D'après (161), on a

$$\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_n = \alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_{n-1}\alpha_{k_n}.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par le produit $\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_n$ et, tenant compte de (76), remplaçons dans le membre de gauche $\alpha_1^2, \alpha_3^2, \ldots, \alpha_n^2$ par $\alpha_0\alpha'_1, \alpha'_2\alpha'_3, \ldots, \alpha'_{n-1}\alpha'_n$. Il vient

$$\alpha_0\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{k_n}.$$

Cette relation étend la formule (107).

3° *Supposons maintenant n pair.*

T_n est alors une transformation *homographique*. On a

(163) $$T_n = T_{n-1}\mathfrak{T}_{\mu_n}.$$

Comme $n - 1$ est impair, on a

(164) $$T_{n-1} = \mathfrak{T}_{k_{n-1}},$$

avec

$$\alpha_{k_{n-1}} = \frac{k_{n-1}-\lambda_1}{k_{n-1}-\lambda_2} = \frac{\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}}{\alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_{n-2}}.$$

Donc

(165) $$T_n = \mathfrak{T}_{k_{n-1}}\mathfrak{T}_{\mu_n}.$$

On voit, en appliquant (156), que D_0 et D_n sont conjuguées par rapport à un complexe non spécial k de Φ tel que

$$\alpha_k = \frac{k-\lambda_1}{k-\lambda_2} = \frac{\alpha_0\alpha_n}{\alpha_{k_{n-1}}},$$

donc tel que

$$\alpha_k = \frac{\alpha_0\alpha_2\ldots\alpha_n}{\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}}.$$

Ce complexe varie avec α_0, mais si l'on se donne

(166) $$a_n = \frac{\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}}{\alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_n},$$

la transformée de chaque droite D_0 par T_n est déterminée.

On peut, en prenant les complexes spéciaux de Φ comme complexes de base et en utilisant (165), mettre les équations de T_n, en coordonnées homogènes, sous une forme telle que leurs coefficients soient des expressions linéaires de a_n.

Pour n pair, la transformation homographique T_n *ne dépend donc que de* a_n.

Les valeurs de a_n, pour T_n et T_n^{-1}, ont un produit égal à 1, d'après (166), puisque

$$T_n = \mathcal{C}_{\mu_1}\mathcal{C}_{\mu_2}\ldots\mathcal{C}_{\mu_n} \quad \text{et que} \quad T_n^{-1} = \mathcal{C}_{\mu_n}\ldots\mathcal{C}_{\mu_2}\mathcal{C}_{\mu_1}.$$

$\mathcal{C}_{\lambda_{n-1}}$ transforme Δ_1 en Δ_2 et $\mathcal{C}_{\mu_n}$ transforme ensuite Δ_2 en Δ_1. De même pour Δ_2. D'autre part, chacune de ces transformations et, par suite, T_n transforment toute droite de la congruence B en elle-même. Donc, dans T_n, chaque point de Δ_1 et de Δ_2 se transforme en lui-même.

Chacune des droites Δ_1 et Δ_2 est donc un *axe* (ponctuel et tangentiel) de T_n.

On sait qu'un élément (point, droite ou plan) qui se transforme en lui-même est appelé, par certains auteurs, *élément uni* de la transformation homographique.

Prenons les axes de coordonnées sur les droites principales g_1, g_2, H *relatives à* Φ *et choisissons* C_{p_1} *et* C_{p_2} *comme complexes de base.*

On a alors

$$\lambda_2 = -\lambda_1, \qquad \nu_1 = -\lambda_1^2\nu_2, \qquad \text{avec} \quad \nu_1 \neq 0, \qquad \nu_2 \neq 0.$$

D'après les paragraphes **23**, 1° et 2°, le changement d'axes de coordonnées et de complexes de base ne modifie pas a_n.

Les équations de T_n, déduites de (165), sont, en coordonnées homogènes,

$$\begin{aligned}
x' &= \lambda_1(a_n+1)x + (a_n-1)y,\\
y' &= \lambda_1^2(a_n-1)x + \lambda_1(a_n+1)y,\\
z' &= \lambda_1(a_n+1)z - \nu_1(a_n-1)t,\\
\nu_2 t' &= (a_n-1)z + \lambda_1\nu_2(a_n+1)t.
\end{aligned}$$

Pour $a_n \neq 1$, on peut poser

$$c_n = \lambda_1\frac{a_n+1}{a_n-1}$$

et les équations de T_n peuvent s'écrire

$$(167) \qquad \left\{\begin{aligned}
x' &= c_n x + y,\\
y' &= \lambda_1^2 x + c_n y,\\
z' &= c_n z - \nu_1 t,\\
\nu_2 t' &= z + \nu_2 c_n t.
\end{aligned}\right.$$

L'équation caractéristique de T_n a deux racines égales à $c_n + \lambda_1$ et deux racines égales à $c_n - \lambda_1$, valeurs auxquelles correspondent respectivement les droites Δ_1 et Δ_2.

Tout plan P perpendiculaire à H (donc parallèle au plan Π) se transforme en un plan P' perpendiculaire à H. Deux droites parallèles quelconques de P se transforment en deux droites parallèles de P'.

Considérons le *tétraèdre* (ce terme étant pris dans le sens général) formé par *les deux plans passant par* H *et respectivement par* Δ_1 *et* Δ_2 et *les deux plans perpendiculaires à* H *et passant respectivement par* Δ_1 *et* Δ_2. Avec le système particulier d'axes de coordonnées qui vient d'être adopté, ces plans ont pour équations

$$y - \lambda_1 x = 0, \qquad y + \lambda_1 x = 0, \qquad z - \lambda_1 \nu_2 t = 0, \qquad z + \lambda_1 \nu_2 t = 0.$$

Les coordonnées *tétraédriques* correspondantes du point $A(x, y, z, t)$ et de son transformé $A'(x', y', z', t')$ peuvent être prises égales, à un *facteur commun arbitraire près* pour chacun de ces points, aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} X &= y - \lambda_1 x, & Y &= y + \lambda_1 x, & Z &= z - \lambda_1 \nu_2 t, & T &= z + \lambda_1 \nu_2 t, \\ X' &= y' - \lambda_1 x', & Y' &= y' + \lambda_1 x', & Z' &= z' - \lambda_1 \nu_2 t', & T' &= z' + \lambda_1 \nu_2 t'. \end{aligned}$$

Et *les équations* de la transformation homographique T_n deviennent

$$(168) \qquad X' = X, \qquad Y' = a_n Y, \qquad Z' = Z, \qquad T' = a_n T.$$

On obtient les équations de T_n^{-1} en remplaçant a_n par $\frac{1}{a_n}$ dans les équations de T_n, ce qui revient à remplacer c_n par $-c_n$ dans (167).

Pour $\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ réels, $\lambda_1^2 = -\frac{\nu_1}{\nu_2}$ est réel, a_n est une quantité imaginaire de module égal à 1 ou une quantité réelle, c_n est réel et l'on vérifie que, pour $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ réels, on a $\frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'}$ réels.

Revenons à des axes de coordonnées et à des complexes de base *quelconques*, dans les conditions indiquées au début de ce chapitre.

Dans tout plan passant par Δ_1 (ou Δ_2), il y a un *axe d'homologie* qui est Δ_1 (ou Δ_2) et un *centre d'homologie* placé sur Δ_2 (ou Δ_1).

Soient A un point quelconque non situé sur Δ_1 ni sur Δ_2; *d* la droite de la congruence B passant par A; A_1 et A_2 les points où *d* coupe Δ_1 et Δ_2. L'homologue A' de A dans T_n est situé sur *d*.

Considérons le plan polaire ϖ de A par rapport au complexe k_{n-1} de Φ. Au point A correspond, dans $\mathfrak{T}_{k_{n-1}}$, le plan ϖ. Dans $\mathfrak{T}_{\mu_n}$, au plan ϖ correspond son pôle par rapport au complexe μ_n de Φ, pôle qui est l'homologue A' de A dans T_n, en raison de (165). Ainsi, pour des valeurs de λ égales à k_{n-1}, μ_n, λ_1, λ_2, le pôle du plan ϖ est placé respectivement aux points A, A', A_1, A_2 de d. Donc

$$(A_1, A_2, A, A') = (\lambda_1, \lambda_2, k_{n-1}, \mu_n).$$

Mais le dernier rapport anharmonique est égal à $\frac{\alpha_{k_{n-1}}}{\alpha_n}$, donc à a_n. Par suite,

$$(A_1, A_2, A, A') = a_n. \tag{169}$$

On peut aussi déduire cette relation de (168).

Pour d fixe, A et A' forment sur d deux divisions homographiques, dont A_1 et A_2 sont les points doubles.

T_n est une *homologie biaxiale* ou *homographie biaxiale* (*elliptique* si les droites Δ_1 et Δ_2 sont imaginaires conjuguées; *hyperbolique* si elles sont réelles).

Pour $a_n = 1$, on a la transformation *identique*.

Pour $a_n = -1$, la transformation T_n est *involutive* (c'est-à-dire réciproque).

4° Supposons que les complexes non spéciaux $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ de Φ soient les 1^er^, 2^e^, ..., $n^{\text{ième}}$ complexes d'une *suite* $\mathfrak{S}$ de complexes linéaires conjugués appartenant à Φ.

Pour n impair > 1, on a

$$k_n = \mu_{\frac{n+1}{2}}. \tag{170}$$

En effet, dans une suite $\mathfrak{S}$, les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots$ sont en progression géométrique de raison $\rho = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Donc, d'après (161),

$$\alpha_{k_n} = \alpha_1 \rho^{\frac{n-1}{2}} = \alpha_{\frac{n+1}{2}}.$$

Et (170) en résulte.

5° Supposons maintenant que les complexes non spéciaux μ_1,

$\mu_2, \ldots, \mu_n$ de Φ soient les 1^{er}, 2^e, ..., n^{ieme} complexes d'un *cycle* Γ d'un nombre *pair* n de complexes linéaires conjugués.

On a ici $\rho^{\frac{n}{2}} = -1$ et, par suite, en vertu de (166),

$$a_n = -1. \tag{171}$$

A et A' sont alors *conjugués harmoniques* par rapport à A_1 et A_2. La transformation homographique T_n est *involutive*.

Posons $T_n = H_\Gamma$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des *cycles* de Φ dont le nombre des complexes est *pair*.

$\mathcal{E}$ comprend *notamment* tous les couples de complexes de Φ en *involution*.

La transformation homographique H_Γ *est la même pour tous les cycles de* $\mathcal{E}$, puisqu'elle admet toujours les mêmes axes Δ_1 et Δ_2 et que a_n est toujours égal à -1.

49. Cas de $\lambda_1 = \lambda_2$. — Les axes Δ_1 et Δ_2 des complexes spéciaux de Φ sont alors confondus.

1° Posons encore, d'une manière générale,

$$\beta_j = \frac{1}{\mu_j - \lambda_1}. \tag{172}$$

Soit β_0 la quantité analogue correspondant au complexe μ_0 de Φ comprenant la droite D_0, qui ne rencontre pas Δ_1.

Considérons d'abord D_0 et D_2 comme les conjuguées de D_1 par rapport aux complexes μ_1 et μ_2 de Φ. D_0 et D_2 sont donc conjuguées par rapport à un certain complexe non spécial k_2 de Φ, d'après le paragraphe 38, 1°. Posons

$$\beta_{k_2} = \frac{1}{k_2 - \lambda_1}. \tag{173}$$

Considérons maintenant D_1 et D_2 comme conjuguées de D_0 par rapport aux complexes μ_1 et k_2 de Φ et appliquons (139) en y faisant

$$\lambda' = \mu_1, \qquad \lambda'' = k_2, \qquad \lambda''' = \mu_2, \qquad m = \mu_0.$$

On a

$$\beta_{k_2} = \beta_0 + \beta_2 - \beta_1. \tag{174}$$

De même, D_0 et D_3 sont conjuguées par rapport au complexe non spécial k_3 de Φ tel que, si l'on pose

$$(175)\qquad \beta_{k_3} = \frac{1}{k_3 - \lambda_1},$$

on a

$$\beta_{k_3} = \beta_0 + \beta_3 - \beta_{k_2}.$$

D'où, tenant compte de (174),

$$(176)\qquad \beta_{k_3} = \beta_1 + \beta_3 - \beta_2.$$

Cette dernière formule ne renferme pas β_0. Elle est donc *indépendante de* D_0.

Elle a été établie avec l'hypothèse que D_0 ne rencontre pas Δ_1. Mais, puisque la transformation $\mathfrak{C}_{k_3}$ relative au complexe k_3 de Φ et la transformation $T_3 = \mathfrak{C}_{\mu_1}\mathfrak{C}_{\mu_2}\mathfrak{C}_{\mu_3}$ donnent la même transformée pour chaque droite ne rencontrant pas Δ_1, on voit d'abord qu'elles transforment en un même plan tout point qui n'est pas placé sur Δ_1 et en un même point tout plan qui ne renferme pas Δ_1. On lève ensuite facilement les restrictions. Les équations de ces deux transformations dualistiques sont donc identiques.

2° *Supposons n impair quelconque* > 1.

Considérons la quantité k_n telle que

$$(177)\qquad \beta_{k_n} = \frac{1}{k_n - \lambda_1} = (\beta_1 + \beta_3 + \ldots + \beta_n) - (\beta_2 + \beta_4 + \ldots + \beta_{n-1}).$$

On déduit, par des applications de (176), que la *transformation* $T_n = \mathfrak{C}_{\mu_1}\mathfrak{C}_{\mu_2}\ldots\mathfrak{C}_{\mu_n}$, ici *dualistique* puisque n est *impair*, est *égale à la transformation par polaires réciproques* $\mathfrak{C}_{k_n}$, relative au complexe non spécial k_n de Φ correspondant à la valeur k_n de λ définie par (177).

Donc

$$(178)\qquad T_n = \mathfrak{C}_{k_n}.$$

T_n est *réciproque*.

Soient β_0, β'_1, ..., β'_n les quantités β relatives aux complexes de Φ qui comprennent respectivement D_0, D_1, ..., D_n.

D'après (177), on a

$$\beta_1 + \beta_3 + \ldots + \beta_n = \beta_2 + \beta_4 + \ldots + \beta_{n-1} + \beta_{k_n}.$$

Ajoutons $\beta_1+\beta_3+\ldots+\beta_n$ aux deux membres de cette égalité et, tenant compte de (82), remplaçons dans le membre de gauche $2\beta_1$, $2\beta_3$, ..., $2\beta_n$ par $\beta_0+\beta'_1$, $\beta'_2+\beta'_3$, ..., $\beta'_{n-1}+\beta'_n$. Il vient

$$\beta_0+\beta'_1+\beta'_2+\ldots+\beta'_n=\beta_1+\beta_3+\ldots+\beta_n+\beta_{k_n}.$$

Cette relation étend la formule (138).

Si l'on prend de nouveaux complexes de base (dont le second au moins n'est pas spécial), k_n prend une nouvelle valeur, mais on vérifie que le complexe de Φ correspondant reste le même.

3° *Supposons maintenant n pair.*

T_n est alors une transformation *homographique*. On a

$$T_n=T_{n-1}\mathfrak{T}_{\mu_n}. \tag{179}$$

Comme $n-1$ est impair. on a

$$T_{n-1}=\mathfrak{T}_{k_{n-1}}, \tag{180}$$

avec

$$\beta_{k_{n-1}}=\frac{1}{k_{n-1}-\lambda_1}=(\beta_1+\beta_3+\ldots+\beta_{n-1})-(\beta_2+\beta_4+\ldots+\beta_{n-2}). \tag{181}$$

Donc

$$T_n=\mathfrak{T}_{k_{n-1}}\mathfrak{T}_{\mu_n}. \tag{182}$$

On voit, en appliquant (174), que D_0 et D_n sont conjuguées par rapport à un complexe non spécial k de Φ tel que

$$\beta_k=\frac{1}{k-\lambda_1}=\beta_0+\beta_n-\beta_{k_{n-1}}, \tag{183}$$

donc tel que

$$\beta_k=(\beta_0+\beta_2+\ldots+\beta_n)-(\beta_1+\beta_3+\ldots+\beta_{n-1}). \tag{184}$$

Ce complexe varie avec β_0, mais si l'on se donne

$$b_n=(\beta_2+\beta_4+\ldots+\beta_n)-(\beta_1+\beta_3+\ldots+\beta_{n-1}), \tag{185}$$

la transformation à faire subir à chaque droite analogue à D_0, pour effectuer T_n, est parfaitement déterminée.

Si l'on prend de nouveaux complexes de base (dont le second au moins n'est pas spécial), β_0 et b_n prennent de nouvelles valeurs, mais on vérifie que le complexe défini par (184) reste le même.

Δ_1 appartient ici à la congruence linéaire B (*voir* fin du paragraphe 32) et, par suite, à tous les complexes de Φ.

Donc $\mathfrak{T}_{k_{n-1}}$ et $\mathfrak{T}_{\mu_n}$ et, par suite, T_n transforment la droite Δ_1 en elle-même.

Toute droite de la congruence B est située dans le plan tangent au cylindroïde S au point où elle rencontre l'axe Δ_1, confondu ici avec g_1.

Dans T_n, elle se transforme en elle-même et, par suite, tout point de Δ_1 se transforme en lui-même; il en est ainsi également pour tout plan passant par Δ_1.

La droite Δ_1 est donc un *axe* (ponctuel et tangentiel) de T_n.

Dans tout plan passant par Δ_1, il y a un *axe d'homologie*, qui est Δ_1, et un *centre d'homologie*, qui est le point de Δ_1 où le plan considéré est tangent au cylindroïde S.

Soient A un point quelconque non situé sur Δ_1; *d* la droite de la congruence B passant par A, c'est-à-dire la droite joignant A au point C de Δ_1 où le plan (A, Δ_1) est tangent au cylindroïde S; ϖ le plan polaire de A par rapport au second complexe de base de Φ, pour lequel la quantité correspondante β est nulle. Ce plan passe par *d*. On obtient le transformé, A′, de A par T_n en prenant le pôle de ϖ par rapport au complexe non spécial de Φ pour lequel $\beta = \frac{1}{\lambda - \lambda_1} = b_n$, pôle qui est situé sur *d*. Toutes les droites de ϖ passant par A ont, en effet, pour transformées par T_n leurs conjuguées par rapport à ce dernier complexe, en raison de (184), où l'on doit faire $\beta_0 = 0$.

On peut déterminer facilement *les équations* de T_n en se servant des indications de l'alinéa précédent ou en utilisant (179).

Prenons les axes trirectangles de coordonnées sur les droites principales g_1, g_2, H *et choisissons* C_{p_1} *et* C_{p_2} *comme complexes de base de* Φ. Le plan Π est donc confondu avec le plan xOy.

On a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \nu_1 = 0, \qquad \nu_2 \neq 0.$$

Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes du point A; x', y', z' celles de son transformé A′.

On voit, en utilisant un résultat du paragraphe 32, que le point C a pour coordonnées $\frac{\nu_2 y}{z}$, 0, 0.

On obtient, pour les équations de T_n,

$$\frac{x'}{\nu_2} = \frac{x + b_n y}{b_n z + \nu_1}, \qquad \frac{y'}{\nu_2} = \frac{y}{b_n z + \nu_0}, \qquad \frac{z'}{\nu_1} = \frac{z}{b_n z + \nu_0},$$

avec, ici,

$$b_n = \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_4} + \ldots + \frac{1}{\mu_n}\right) - \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_3} + \ldots + \frac{1}{\mu_{n-1}}\right).$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont les valeurs du coefficient λ de (115) relatives aux complexes de Φ considérés.

Tout plan P *parallèle au plan* Π *se transforme en un plan* P′ *parallèle à* Π.

Deux droites parallèles quelconques de P *se transforment en deux droites parallèles de* P′.

Toute parallèle à g_1 *se transforme en une parallèle à* g_1.

On a la relation *remarquable*

$$\frac{1}{z'} - \frac{1}{z} = \frac{b_n}{\nu_1}.$$

Sur toute droite d autre que g_1 et appartenant à la congruence B, un point variable et son transformé forment deux divisions homographiques, dont les points doubles sont confondus avec le point C où d rencontre g_1.

Avec des coordonnées homogènes, on voit que l'équation caractéristique de l'homographie T_n a ses quatre racines égales à 1 si, pour la quatrième coordonnée homogène de A′, l'on prend $t' = \frac{b_n}{\nu_0} z + t$. Et la droite Δ_1, confondue ici avec g_1, correspond à cette racine quadruple.

T_n est une *homographie biaxiale parabolique*.

On obtient les équations de T_n^{-1} en remplaçant b_n par $-b_n$ dans les équations de T_n.

Partant des équations (167) et faisant tendre λ_1 vers zéro, on a $\lim \frac{1}{c_n} = b_n$ et l'on retrouve les formules du cas présent.

Pour $b_n = 0$, on a la transformation identique.

TROISIÈME PARTIE.

FAISCEAUX DE COMPLEXES LINÉAIRES. CAS PARTICULIERS.

CHAPITRE UNIQUE.

50. Cas où les paramètres des complexes de Φ sont égaux. — Dans la réduction indiquée au paragraphe 31, on peut rencontrer le cas où il y a une infinité de couples de complexes de Φ ayant leurs axes perpendiculaires et concourants.

On voit, avec les notations du paragraphe 31 et d'après (111) et (112), qu'il en est ainsi pour

$$D_2 = 0, \qquad \nu_1 = \nu_2 = \frac{D_1}{A_1} = \frac{E_2}{B_2}.$$

Prenons les axes Ox et Oy sur un couple quelconque d'axes de complexes de Φ perpendiculaires et concourants, Oz étant sur la droite principale H perpendiculaire à ces axes.

L'équation de Φ est alors

$$L + \nu_1 X + \lambda(M + \nu_1 Y) = 0.$$

On déduit de (116) et (117) que *tous les complexes de Φ ont le même paramètre* ν_1 et que la partie réelle du cylindroïde S se réduit au *plan xOy*.

On obtient les coordonnées pluckériennes des droites de la congruence linéaire B en faisant $\nu_1 = \nu_2$ dans les expressions données au paragraphe 32. B est de *révolution* autour de Oz.

1° *Cas de* $\nu_1 = \nu_2 \neq 0$. — Les complexes spéciaux sont définis par

$$\nu_1(1 + \lambda^2) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad 1 + \lambda^2 = 0.$$

Leurs axes sont *parallèles* aux doites *isotropes* du plan xOy. Les cotes de ces axes sont égales à

$$\begin{array}{lll} i\nu_1 & \text{pour} & \lambda_1 = i, \\ -i\nu_1 & \text{pour} & \lambda_2 = -i. \end{array}$$

Les complexes à axes réels de Φ sont les positions d'un complexe linéaire, de paramètre ν_1, *tournant autour de* Oz.

Deux complexes non spéciaux de Φ sont en *involution* quand leurs axes sont *perpendiculaires*.

Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ sont deux complexes quelconques de Φ, à axes réels, ils sont *conjugués* par rapport aux deux complexes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}'_2$ de Φ dont les axes sont les *bissectrices* des angles formés par les axes de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_3$.

La détermination dans Φ de *suites* ou de *cycles* de complexes linéaires conjugués est donc immédiate.

2° *Cas de* $\nu_1 = \nu_2 = 0$. — Tous les complexes de Φ sont *spéciaux*. La congruence linéaire B est formée des droites passant par O et des droites du plan xOy.

51. Cas où les axes des complexes de base du faisceau sont parallèles. — Supposons que les axes des deux complexes de base de Φ soient réels et parallèles.

Prenons pour axe des z l'axe d'un de ces complexes et pour plan zOx le plan des axes des deux complexes. L'axe du second complexe de base coupe Ox au point $(a, 0, 0)$.

Si k_1 et k_2 sont les paramètres des deux complexes de base, supposés différents de zéro, leurs équations sont

$$N + k_1 Z = 0, \tag{186}$$

$$N - aY + k_2 Z = 0. \tag{187}$$

L'équation de Φ est donc

$$N + k_1 Z + \lambda(N - aY + k_2 Z) = 0. \tag{188}$$

Les coefficients A, B, C, D, E, F de l'équation d'un complexe quelconque de Φ sont

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 1 + \lambda, \quad D = 0, \quad E = -a\lambda, \quad F = k_1 + \lambda k_2.$$

On a

$$AD + BE + CF = (1 + \lambda)(k_1 + k_2 \lambda). \tag{189}$$

Les deux complexes spéciaux correspondent donc à

$$\lambda_1 = -\frac{k_1}{k_2}, \qquad \lambda_2 = -1.$$

Supposons $k_1 \neq k_2$.

Le paramètre d'un complexe quelconque de Φ, tel que $1+\lambda \neq 0$, est égal à

$$\frac{AD+BE+CF}{A^2+B^2+C^2}=\frac{k_1+k_2\lambda}{1+\lambda} \tag{190}$$

et les coordonnées plückériennes de son axe sont

$$0, \quad -a\lambda, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1+\lambda.$$

L'axe coupe Ox au point $\left(\frac{a\lambda}{1+\lambda}, 0, 0\right)$.

Les axes sont donc tous parallèles aux axes des complexes de base et situés, avec eux, dans un même plan, le plan zOx.

Pour $\lambda_1=-\frac{k_1}{k_2}$, l'axe Δ_1 coupe Ox au point $\left(\frac{ak_1}{k_1-k_2}, 0, 0\right)$.

Pour $\lambda_2=-1$, le complexe correspondant est le complexe des droites parallèles au plan

$$ay+(k_1-k_2)z=0 \tag{191}$$

ou situées dans ce plan.

La *congruence linéaire* B base de Φ est formée des droites rencontrant l'axe Δ_1 du complexe spécial λ_1 et parallèles au plan (191).

On démontre que *la direction de plan* (191) *a pour diamètre conjugué Δ_1 par rapport à tout complexe de Φ.*

En ce qui concerne les *suites* et *cycles* de complexes linéaires conjugués, les formules (28), (76) et (77) sont valables, que les axes des complexes du faisceau soient ou non parallèles. On pourra donc se servir des résultats des paragraphes **40** et **41**.

On démontre que le produit d'un nombre *pair* de transformations par polaires réciproques relatives à des complexes non spéciaux quelconques de Φ est alors une *affinité*. Δ_1 est un *axe* (ponctuel et tangentiel) de l'*affinité*. *Le plan* (191) *se transforme en lui-même et il en est ainsi également de chacun des plans qui lui sont parallèles.*

Il y a lieu, à ce sujet, de faire la remarque suivante. Deux droites *parallèles* n'ont pas, en général, pour conjuguées par rapport à un complexe linéaire des droites parallèles. Mais si l'on prend les conjuguées de deux droites *parallèles* par rapport à un complexe linéaire non spécial, puis les conjuguées de ces conjuguées par rapport à un autre complexe linéaire non spécial, d'axe parallèle à celui du premier, on obtient deux droites parallèles.

52. Cas où les axes des complexes du faisceau sont confondus. — Dans ce cas, si l'on considère deux complexes non spéciaux $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de Φ et si l'on cherche le conjugué de $\mathcal{C}_1$ par rapport à $\mathcal{C}_2$, on trouve un complexe $\mathcal{C}_3$, dont l'axe est confondu avec l'axe commun des deux premiers. Et l'on a

$$k_1 k_3 = k_2^2, \tag{192}$$

k_1, k_2, k_3 étant les paramètres de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$,

BIBLIOGRAPHIE.

LUIGI CREMONA, *Les figures réciproques en statique graphique.*

G. KOENIGS, *La géométrie réglée.*

VESSIOT, *Leçons de Géométrie supérieure.*

D'OCAGNE, *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. I, 1917, p. 246 à 258.

BRICARD, *Leçons de Cinématique*, t. I, 1926, p. 87 à 122.

GARNIER, *Leçons d'Algèbre et Géométrie*, t. III, 1937, p. 74 à 152.

MICHEL, *Compléments de Géométrie moderne*, 1941, p. 247 à 264.

JULIA, *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique*, 1941, p. 239 à 248.

A. CHARRUEAU :

Sur les faisceaux de complexes linéaires (*C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, p. 712 à 714).

Sur les faisceaux de complexes linéaires (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 359 et 360).

Sur les faisceaux de complexes linéaires (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 803 à 805).

Sur les suites et cycles de complexes linéaires conjugués (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 894 à 896)

Sur les faisceaux de complexes linéaires et sur les suites et cycles de complexes linéaires conjugués (*C R. Acad. Sc.*, t. 229, 1949, p. 334 à 336).

Nota. — En ce qui concerne diverses formules matricielles relatives aux complexes linéaires et aux faisceaux de complexes linéaires, *voir* A. CHARRUEAU, *C. R. Acad. Sc*, t. 234, 1952, p. 2252 à 2254 et 2656

Pour les sytèmes linéaires de complexes linéaires, dépendant de plus d'un paramètre, *voir* A. CHARRUEAU, *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 144-145 et 202 à 204.

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

Faisceaux de Complexes linéaires.