MAURICE PARODI

Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 118 (1952)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1952__118__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIÉW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXVIII

Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées

Par M. Maurice PARODI

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCO
Quai des Grands-Augustins, 55
—
1952

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS
DES VALEURS CARACTÉRISTIQUES
DES MATRICES CARRÉES

Par M. Maurice PARODI.

INTRODUCTION.

Dans ce travail, nous tentons de donner un exposé d'ensemble des recherches qui ont été effectuées ces dernières années pour déterminer dans le plan complexe, les régions où se situent les valeurs caractéristiques d'une matrice carrée.

Le point de départ de ces investigations est un théorème, déjà ancien, dû à M. J. Hadamard qui a donné, en 1903, dans les *Leçons sur la propagation des ondes*, des conditions suffisantes pour qu'un déterminant ne puisse être nul. Depuis, des travaux de MM. Janet et Brauer, Müller et Ostrowski ont permis d'étendre et de compléter le résultat de M. Hadamard.

C'est à l'exposé de ces travaux et des applications que nous avons été amené à faire qu'est consacré le présent Mémoire.

Nous exprimons toute notre gratitude à MM. L. de Broglie et A. Ostrowski qui ont bien voulu s'intéresser à ce travail ainsi qu'à M. H. Villat qui nous a fait l'honneur de l'accepter dans la collection qu'il anime.

CHAPITRE I.

CRITÈRES DE RÉGULARITÉ DES MATRICES CARRÉES.

I. — Théorème de M. J. Hadamard.

1. M. J. Hadamard dans ses *Leçons sur la propagation des ondes* a énoncé le théorème suivant [5] :

Pour qu'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ *d'ordre* n, *à éléments réels ou complexes, soit régulière, il suffit que soient satisfaites les* n *inégalités*

$$(1) \qquad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour établir cette proposition, nous adopterons le mode d'exposition de M. Ostrowski [13] qui conduit de plus à trouver une limite inférieure du module du déterminant de A.

Posons

$$\sigma_i = |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

nous allons montrer que l'on a

$$|\Delta| = |\text{dét } A| > \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n.$$

Si donc tous les facteurs $\sigma_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sont positifs, c'est-à-dire si les inégalités (1) sont satisfaites, $|\Delta|$ ne pourra être nul et la matrice A sera régulière.

On peut supposer, sans restreindre la généralité de la démonstration, que $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n = 1$; il suffit, en effet, de diviser chaque ligne de A par le coefficient σ_i correspondant.

Posons donc $\sigma_i = 1 (i = 1, 2, \ldots, n)$ et considérons l'équation caractéristique afférente au déterminant Δ' qui représente ce qu'est devenu Δ après division de ses lignes par les σ_i correspondants,

$$\|\delta_{ij}\lambda - a_{ij}\| = 0,$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les n racines de cette équation; on a évidemment

$$|\Delta'| = |\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n|.$$

Considérons l'une quelconque de ces racines, soit λ'; le système d'équations linéaires et homogènes

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda' x_i$$

possède alors un ensemble non nul de solutions $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ pour lequel

$$\max |x_i| = |x_k| > 0.$$

On a donc pour $i = k$, en divisant par $|x_k|$,

$$|\lambda'| \geqq |a_{kk}| - \sum_{j \neq k} \left| a_{kj} \frac{x_j}{x_k} \right| > |a_{kk}| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}| = 1.$$

Ainsi

$$|\lambda'| > 1$$

et finalement

$$|\lambda_1| > 1, \qquad |\lambda_2| > 1, \qquad \ldots, \qquad |\lambda_n| > 1.$$

Il s'en suit

$$|\Delta'| > 1 \qquad \text{et} \qquad |\Delta| > \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n.$$

Le déterminant Δ, dans le cas où les conditions (1) sont réalisées, possède ainsi, en module, une limite inférieure positive; il ne peut donc être nul et A est régulière.

Remarquons qu'en posant

$$\tau_i = |a_{ii}| - \sum_{i \neq j} |a_{ji}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

on démontrerait de la même manière que si tous les $\tau_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sont positifs, la matrice A est régulière.

Notons que le résultat de M. Hadamard avait été obtenu pour la première fois, dans le champ réel, par L. Lévy [9], mais avec les hypothèses restreintes

$$a_{ii} > 0, \qquad a_{ij} \underset{j \neq i}{<} 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

Minkowski [10], à propos d'un problème de théorie des nombres, avait d'autre part, sous les mêmes hypothèses, obtenu un résultat analogue.

Toute matrice carrée dont les éléments satisfont aux conditions (1) sera dite matrice d'Hadamard ou de type H.

Le théorème de M. Hadamard implique le corollaire suivant [14]:

Dans le champ réel, toute matrice carrée $A = (a_{ij})$ *d'ordre n, dont les éléments satisfont aux relations*

$$(1') \qquad a_{ii} > 0, \qquad a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

a un déterminant positif.

Posant toujours

$$\sigma_i = a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

le déterminant Δ de la matrice A s'écrit

$$\Delta = \begin{vmatrix} |a_{12}| + \ldots + |a_{1n}| + \sigma_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & |a_{21}| + \ldots + |a_{2n}| + \sigma_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & |a_{n1}| + \ldots + |a_{n,n-1}| + \end{vmatrix}$$

Montrons que ce déterminant est toujours positif si les $\sigma_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sont positifs.

A cet effet, considérons la fonction des $n(n-1)$ variables x_{ij}

$$F(x_{ij}) = \begin{vmatrix} |x_{12}| + \ldots + |x_{1n}| + \sigma_1 & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & |x_{21}| + \ldots + |x_{2n}| + \sigma_2 & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & |x_{n1}| + \ldots + |x_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

D'après le théorème de M. Hadamard, la fonction $F(x_{ij})$ n'est jamais nulle tant que les $\sigma_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sont positifs et que les x_{ij} ont des valeurs telles que les conditions (1') soient satisfaites, car elles ne sont qu'un cas particulier des conditions (1).

En égalant à zéro tous les x_{ij}, il vient dans cette hypothèse

$$F(x_{ij}) = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n > 0 \qquad (x_{ij} = 0).$$

En partant alors de valeurs nulles des variables x_{ij} et en faisant varier ces dernières de façon continue jusqu'à ce qu'elles atteignent les valeurs a_{ij} correspondantes et en leur donnant constamment au cours de cette variation, le signe des éléments de Δ qu'elles doivent finalement égaler, la fonction $F(x_{ij})$ qui est continue et est partie d'une valeur positive, ne s'est jamais annulée d'après le théorème de M. Hadamard; elle est donc demeurée constamment positive; ainsi Δ est positif.

Si nous considérons maintenant la chaîne des mineurs principaux de Δ, pour chacun d'eux les conditions de M. Hadamard sont également satisfaites d'après (1'); ils sont donc tous positifs.

Ainsi les conditions (1') impliquent que, dans le champ réel, si la matrice A est symétrique elle est définie positive. Nous étendrons plus loin ce résultat.

Théorème d'O. Taussky [29]. — *Soit (a_{ik}) une matrice carrée d'ordre n telle que*

$$(a)\qquad |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

avec l'égalité pour $(n-1)$ de ces relations; si la matrice (a_{ik}) ne peut, par une même permutation des lignes et des colonnes, se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} P & U \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

P *et* Q *étant des matrices carrées et* 0 *la matrice nulle, alors la matrice (a_{ik}) est régulière.*

La démonstration est analogue à celle du théorème de M. Hadamard.

Supposons la matrice (a_{ik}) singulière; le système d'équations linéaires et homogènes

$$(b)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

admet alors un ensemble de solutions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non toutes nulles.

Supposons, par exemple, que la première des relations (a) se présente comme une inégalité; on a

$$|a_{11}| > \sum_{j \neq 1} |a_{1j}|.$$

La première des relations (b) donne, d'autre part,

$$|a_{11} x_1| \leq \sum_{k \neq 1} |a_{1k} x_k|$$

et il en résulte que, pour au moins une valeur de j, on a $|x_r| > |x_j|$.

Considérons alors la $r^{\text{ième}}$ équation (b); elle donne

$$|a_{rr}|.|x_r| \leq \sum_k |a_{rk}|.|x_k|$$

et il y a contradiction avec les relations (a) pourvu que tous les a_{rk} pour lesquels $|x_r| > |x_k|$ ne soient pas nuls.

Si cela était la $r^{\text{ième}}$ ligne du système (b) contiendrait $n - s$ coefficients nuls, s étant le nombre des indices k pour lesquels $|x_r| = |x_k|$; mais alors les s lignes correspondantes de la matrice (a_{ik}) contiendrait s zéros aux mêmes places et la matrice serait du type qui a été exclu.

Le théorème est donc établi.

2. Application du théorème de M. Hadamard à l'étude des zéros d'un déterminant particulier. — Dans certains problèmes, on a à rechercher les conditions que doivent satisfaire les coefficients, réels, d'une équation du type

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_{11} + b_{11} z}{\alpha_{11} + \beta_{11} z} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \dfrac{a_{22} + b_{22} z}{\alpha_{22} + \beta_{22} z} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \dfrac{a_{nn} + b_{nn} z}{\alpha_{nn} + \beta_{nn} z} \end{vmatrix} = 0$$

pour que ses racines soient à partie réelle négative; nous nous proposons de donner des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

D'après le théorème de M. Hadamard, l'équation envisagée ne pourra avoir de racines lorsque seront vérifiées les n inégalités

$$\left|\frac{a_{ii}+b_{ii}z}{\alpha_{ii}+\beta_{ii}z}\right|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|=h_i>0 \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n).$$

Posons $z=x+iy$ (x, y réels), les relations précédentes s'écrivent

$$\text{(A)}\quad \left\{\begin{array}{c}(x^2+y^2)[b_{ii}^2-h_i^2\beta_{ii}^2]+2x[a_{ii}b_{ii}-h_i^2\alpha_{ii}\beta_{ii}]+a_{ii}^2-h_i^2\alpha_{ii}^2>0\\ (i=1, 2, \ldots, n).\end{array}\right.$$

Si l'on considère une racine à partie réelle positive ($x>0$), l'inégalité précédente est toujours vérifiée si l'on a

$$a_{ii}^2-h_i^2\alpha_{ii}>0, \qquad b_{ii}^2-h_i^2\beta_{ii}^2>0, \qquad a_{ii}b_{ii}-h_i^2\alpha_{ii}\beta_{ii}>0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Notons que, compte tenu des deux premières, la dernière des inégalités précédentes se réduit à

$$a_{ii}b_{ii}>0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

En effet, supposons $a_{ii}b_{ii}<0$; la dernière inégalité implique alors

$$0\geqq a_{ii}b_{ii}>h^2\alpha_{ii}\beta_{ii},$$

soit

$$h^4\alpha_{ii}^2\beta_{ii}^2<a_{ii}^2b_{ii}^2;$$

résultat qui est en contradiction avec les deux premières inégalités.

D'autre part, si $a_{ii}b_{ii}>0$, ou bien

$$a_{ii}b_{ii}>h^2\alpha_{ii}\beta_{ii},$$

ou bien

$$0<a_{ii}b_{ii}\leqq h^2\alpha_{ii}\beta_{ii} \qquad \text{et} \qquad a_{ii}^2b_{ii}^2\leqq h^4\alpha_{ii}^2\beta_{ii}^2,$$

ce qui est impossible, donc

$$a_{ii}b_{ii}>h^2\alpha_{ii}\beta_{ii}.$$

Ainsi, des conditions suffisantes pour que l'équation envisagée n'ait pas de racines à partie réelle positive sont [15]

$$a_{ii}^2-h_i^2\alpha_{ii}^2>0, \qquad b_{ii}^2-h_i^2\beta_{ii}^2>0, \qquad a_{ii}b_{ii}>0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Remarquons enfin que si l'on prend a_{ii}, b_{ii}, α_{ii} et β_{ii} positifs, les deux premières relations précédentes s'écrivent

$$\frac{a_{ii}}{\alpha_{ii}} > h_i, \qquad \frac{b_{ii}}{\beta_{ii}} > h_i$$

et impliquent la troisième.

Dans ces conditions, il apparaît que les matrices

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\alpha_{11}} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \frac{a_{nn}}{\alpha_{nn}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \frac{b_{11}}{\beta_{11}} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & \frac{b_{nn}}{\beta_{nn}} \end{pmatrix}$$

sont du type H définies positives.

Remarque. — La distribution des racines de l'équation envisagée, dans le plan complexe, peut être étudiée en traçant les cercles $C_i(i = 1, 2, \dots, n)$ que réprésentent les premiers membres des inégalités (A) égalés à zéro, les racines de l'équation se trouvant à l'intérieur du domaine D limité par l'ensemble des circonférences C_i.

Ce résultat est à rapprocher de ceux que nous établissons au chapitre suivant où nous traitons le problème général de la localisation dans le plan complexe, des valeurs caractéristiques des matrices.

3. Conditions suffisantes pour que les modules des zéros d'un polynome de degré n soient tous inférieurs à n. — Considérons le polynome de degré n

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Nous allons donner une relation entre les modules de ses coefficients, suffisante pour que les modules de ses zéros admettent n comme limite supérieure.

C. Bourlet [3] a montré que l'on avait

$$n!\,f(x) = \begin{vmatrix} n!\,a_0 & (n-1)!\,a_1 & (n-2)!\,a_2 & \dots & 2!\,a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & \dots\dots\dots & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Le théorème de M. Hadamard montre que le déterminant ne peut s'annuler si

$$n!\,|a_0| > (n-1)!\,|a_1| + (n-2)!\,|a_2| + \ldots + 2!\,|a_{n-2}| + |a_{n-1}| + |a_n|,$$
$$|x| > n, \qquad |x| > n-1, \qquad \ldots, \qquad |x| > 2, \qquad |x| > 1.$$

Donc si

$$|a_0| > \frac{|a_1|}{n} + \frac{|a_2|}{n(n-1)} + \ldots + \frac{|a_{n-2}|}{n(n-1)\ldots 4.3} + \frac{|a_{n-1}| + |a_n|}{n!},$$

les modules des zéros de $f(x)$ seront tous inférieurs à son degré n.

Cette condition est moins restrictive que celle bien connue : la somme des modules des coefficients de $f(x)$ doit être inférieure à l'unité, et qui résulte de l'expression de la limite supérieure des modules des valeurs caractéristiques d'une matrice, que nous donnons plus loin (*cf.* chap. II, p. 21).

4. Applications physiques du théorème de M. Hadamard. — *a.* Considérons un réseau électrique passif sans mutuelles inductances, formé par n mailles indépendantes numérotées de 1 à n, chaque maille étant affectée d'un sens de parcours.

A chaque branche, la nature électrique du réseau fait correspondre trois nombres réels positifs l, r et s représentant respectivement la self-inductance, la résistance et l'élasticité (inverse d'une capacité) de la branche.

Soit alors une maille quelconque de rang i du réseau et supposons que cette maille comporte une branche n'appartenant à aucune autre maille et différentes branches communes à cette maille et aux mailles de rangs 1, 2, ..., $i-1$, $i+1$, ..., n. A cette maille de rang i, on fait correspondre :

— *Trois paramètres totaux* : self-inductance totale, élasticité totale, résistance totale.

La self-inductance totale est, par définition, la somme, positive, des nombres positifs qui mesurent la self-inductance de la branche non couplée et celles des branches communes à la maille i et aux mailles 1, 2, ..., $i-1$, $i+1$, ..., n.

L'élasticité totale et la résistance totale se définissent de façon analogue.

Ces paramètres totaux, essentiellement positifs, sont notés l_{ii}, s_{ii}, r_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

— *Des paramètres de couplage* : nombres réels positifs, négatifs ou nuls (ce dernier cas correspondant à l'absence de couplage), égaux respectivement aux nombres qui mesurent les self-inductances, les résistances et les élasticités des branches communes, affectés des signes plus ou moins, selon que ces branches sont décrites ou non dans le même sens dans la maille i et les mailles $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$.

Ces paramètres de couplage sont notés l_{ij}, r_{ij}, s_{ij} $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ et l'on a manifestement

$$l_{ij} = l_{ji}, \qquad r_{ij} = r_{ji}, \qquad s_{ij} = s_{ji}.$$

Il apparaît alors que le réseau peut être caractérisé par l'ensemble des trois matrices symétriques d'ordre n

$$T = (l_{ij}), \qquad U = (s_{ij}), \qquad F = (r_{ij}).$$

En représentant par q_i la quantité d'électricité qui circule dans la branche non couplée de la maille de rang i, par $\dot{q}_i = i_i$ (¹) l'intensité correspondante, qui est dite *l'intensité du courant de la maille i* et en comptant positivement ces grandeurs dans le sens de description choisi pour cette maille, à un ensemble de n mailles indépendantes, on peut faire correspondre les trois formes quadratiques

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j l_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j, \qquad \mathcal{U} = \frac{1}{2}\sum_i \sum s_{ij}\, q_i q_j,$$

$$\mathcal{F} = \sum_i \sum_j r_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

associées aux matrices T, U et F.

Ces formes quadratiques représentent les trois formes d'énergie qui peuvent se manifester dans le réseau [16] :

$\mathcal{T}$, l'énergie magnétique;
$\mathcal{U}$, l'énergie électrique;
$\mathcal{F}$, l'énergie de dissipation.

(¹) La notation $\dot{q}$ indique une dérivation par rapport au temps.

Ces formes quadratiques ne pouvant s'annuler que pour des valeurs nulles des variables q_i ou $\dot{q}_i$ et étant nécessairement positives pour tout autre jeu de valeurs des q_i ou des $\dot{q}_i$ doivent être définies positives.

Ainsi, quand on voudra choisir une matrice carrée pour définir un réseau, soit de self-inductances, soit d'élasticités, soit de résistances, il faudra tenir compte de cette condition nécessaire.

Le choix des mailles indépendantes d'un réseau passif comporte, d'autre part, comme on le sait, une large part d'arbitraire : un réseau peut donc être caractérisé par différentes matrices de self-inductances, d'élasticités et de résistances.

Un choix particulièrement intéressant de mailles indépendantes est celui où une branche d'un réseau n'est commune qu'à deux mailles indépendantes. Avec cette condition qui peut être satisfaite dans de très nombreux cas, en se reportant à la définition que nous en avons donnée, les paramètres d'un réseau à n mailles indépendantes satisfont aux inégalités :

$$(1'') \quad \left\{ \begin{array}{c} l_{ii} > 0, \qquad r_{ii} > 0, \qquad s_{ii} > 0, \\ l_{ii} > \sum_{j \neq i} |l_{ij}|, \qquad r_{ii} > \sum_{j \neq i} |r_{ij}|, \qquad s_{ii} > \sum_{j \neq i} |s_{ij}| \\ (i, j = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Ce sont précisément les conditions (1′) qui assurent aux matrices T, U et F la propriété d'être définies positives.

Inversement, des matrices symétriques T, U et F choisies arbitrairement, mais telles que leurs éléments satisfassent aux conditions (1″) pourront donc toujours caractériser des réseaux de self-inductances, de résistances et d'élasticités.

M. Clark [4], par des considérations topologiques, a montré, d'autre part, que les réseaux ainsi définis étaient physiquement réalisables. Le réseau complet résulte de la combinaison de ces réseaux partiels.

Notons que le théorème de M. Hadamard peut être utilisé à la résolution de problèmes, d'un genre différent du précédent, que pose l'Électricité théorique, celui de l'unicité des états d'équilibre électrostatique en particulier.

On sait en effet que les conditions d'équilibre d'un système de n

conducteurs, conduisent au système d'équations

$$(2) \qquad Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

Q_j et V_j représentant respectivement les charges et les tensions, les C_{ij} étant les capacités $(i=j)$ et les coefficients d'influence $(i \neq j)$.

Il est bien connu que les coefficients C_{ij} satisfont aux conditions

$$C_{ii} > 0, \qquad C_{ij} = C_{ji} < 0 \quad (i \neq j); \qquad C_{ii} > \sum_{j \neq i} |C_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce sont les conditions de L. Lévy signalées plus haut; d'après le théorème de M. Hadamard, le déterminant de la matrice (C_{ij}) est donc nécessairement différent de zéro; si donc on se donne les Q_i, le système (2) conduit à un ensemble unique de solutions $V_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

b. Le corollaire du théorème de M. Hadamard peut donner d'autre part, une justification de certaines règles empiriques auxquelles ont recours les utilisateurs de machines mathématiques électroniques.

L'emploi de telles machines conduit, en général, à afficher une matrice $A = (a_{ij})$ d'ordre n, dont les éléments ont des valeurs imposées par la nature du problème à résoudre et le fonctionnement est stable si la matrice A est définie positive.

En fait, il n'y a aucune raison *a priori* pour que la matrice A que fournit la mise en équation du problème satisfasse à cette condition, aussi, dans les machines modernes, a-t-on ménagé des dispositifs qui, au lieu de la matrice A, conduisent à afficher une matrice $A' = I_p A$, où I_p est une matrice, dite de permutation, déduite de la matrice-unité par permutation de lignes et de colonnes; si A' est définie positive le fonctionnement est stable [27].

De nombreux utilisateurs sont, dans ces conditions et *dans le champ réel,* parvenus au résultat empirique suivant : le fonctionnement est, en général, stable si l'on peut former une matrice de permutation telle que les éléments de la diagonale principale de A' soient positifs et supérieurs aux modules des éléments qui se trouvent sur les lignes et les colonnes correspondantes [8, 27].

Dans bien des cas on parvient ainsi à satisfaire aux conditions du théorème pour la partie symétrique de A′ et, d'après le théorème de Bendixson, cette dernière est définie positive; autrement la partie symétrique de A′ n'est pas du type des matrices H symétriques définies positives, les éléments de sa diagonale principale ayant des valeurs inférieures à celles des matrices H symétriques définies positives correspondantes; mais on peut montrer, en s'appuyant sur un théorème de M. Ostrowski (*cf.* chap. III, p. 44), que les matrices symétriques déduites d'une matrice H symétrique définie positive, par diminution de la valeur des éléments diagonaux et augmentation des modules des éléments non diagonaux, sont également définies positives, pourvu que ces variations demeurent, en module, inférieures à une limite que nous apprendrons à calculer.

Dans ces conditions, en choisissant une matrice H symétrique définie positive dont les éléments satisfont aux deux suites d'inégalités

$$(1''') \qquad a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \qquad a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ji}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

il apparaît que de nombreuses matrices, définies par le critère, rentrent dans le type de matrices définies positives déduites de cette matrice H particulière par l'opération précédente; la règle empirique reçoit ainsi une justification.

On peut d'ailleurs tenter de justifier le critère par une autre voie.

Considérons une matrice H symétrique d'ordre n, $A = (a_{ij})$ à éléments réels et soient $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ ses valeurs caractéristiques qui sont réelles en raison de la symétrie; envisageons la matrice également symétrique $B = (a_{ij} - \varepsilon\delta_{ij})$, ε étant une indéterminée réelle; soient x'_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ les valeurs caractéristiques de B; on a évidemment

$$x'_i = x_i - \varepsilon.$$

Il apparaît donc que si l'on retranche des éléments diagonaux d'une matrice H symétrique, définie positive, à éléments réels, une même quantité ε inférieure à la plus petite des ses valeurs caractéristiques, la matrice obtenue est encore définie positive.

Soit maintenant une matrice H, non symétrique, définie positive, dont les éléments réels, satisfont aux inégalités $(1''')$; il est clair, d'après le théorème de Bendixson, que si l'on retranche des éléments de sa diagonale principale une même quantité positive inférieure à la plus petite valeur caractéristique de sa partie symétrique, la matrice variée est encore définie positive; elle peut satisfaire aux conditions du critère qui se trouve ainsi justifié.

II. — Critère de M. Müller.

M. Müller a donné une généralisation des conditions de M. Hadamard qui assurent qu'une matrice carrée est régulière [12].

Théorème 1. — *Soit le déterminant d'ordre n, $A = \| a_{ij} \|$; il est différent de zéro s'il existe n^2 nombres $b_{\mu\nu}$ satisfaisant aux n inégalités*

$$(3) \qquad H_\mu = \left| \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\mu\varkappa} b_{\mu\varkappa} \right| - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{n} \left| \sum_{1}^{n} a_{\mu\varkappa} b_{\nu\varkappa} \right| > 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

et dans ces conditions, en posant $B = \| b_{\mu\nu} \|$, on a

$$(4) \qquad |A| \geqq \frac{H_1 H_2 \ldots H_n}{|B|}.$$

Formons le déterminant

$$D = \frac{AB}{H_1 H_2 \ldots H_n}$$

d'éléments

$$d_{\mu\nu} = \frac{1}{H_\mu} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\mu\varkappa} b_{\nu\varkappa} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

pour lequel

$$h_\mu = |d_{\mu\mu}| - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{n} |d_{\mu\nu}| = \frac{H_\mu}{H_\mu} = 1$$

et considérons le système d'équations linéaires et homogènes

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (d_{11} - \lambda) x_1 + d_{12} x_2 + \ldots + d_{1n} x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n1} x_1 + d_{n2} x_2 + \ldots + (d_{nn} - \lambda) x_n = 0. \end{array} \right.$$

Soit λ' une quelconque des racines de son équation caractéristique;

il existe une solution non nulle en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du système (5) pour laquelle

$$\max |x_i| = |x_k| > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et de la $k^{\text{ième}}$ équation du système (5), il découle

$$\lambda' x_k = d_{k1} x_1 + \ldots + d_{kn} x_n,$$

soit

$$\lambda' = d_{k1} \frac{x_1}{x_k} + \ldots + d_{kn} \frac{x_n}{x_k}.$$

On en déduit

$$|\lambda'| \geqq |d_{kk}| - \left| \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^{n} d_{k\nu} \frac{x_\nu}{x_k} \right| \geqq |d_{kk}| - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^{n} |d_{k\nu}| = 1.$$

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs caractéristiques afférentes au système (5), on a donc évidemment

$$|D| = |\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n| \geqq 1,$$

c'est-à-dire

$$|AB| \geqq H_1 H_2 \ldots H_n > 0.$$

Ainsi, si B est différent de zéro

$$|A| \geqq \frac{H_1 H_2 \ldots H_n}{|B|}.$$

Reste à montrer qu'il est possible de trouver n^2 nombres $b_{\mu\nu}$ satisfaisant aux relations (3), A étant différent de zéro.

Prenons $b_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}$, $A_{\mu\nu}$ étant le complément algébrique de $a_{\mu\nu}$ dans le déterminant A; il vient

$$H_\mu = |A| > 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

et les inégalités (3) sont satisfaites; par ce choix des $b_{\mu\nu}$, il vient d'autre part

$$B = A^{n-1} \neq 0$$

et

$$\frac{H_1 H_2 \ldots H_n}{|B|} = \frac{|A|^n}{|A|^{n-1}} = |A|.$$

La relation (4) devient une égalité.

Ce fait montre que l'inégalité (4) donne une limite inférieur de $|A|$ d'autant meilleure que les $b_{\mu\nu}$ ont des valeurs voisine des $A_{\mu\nu}$.

Du théorème de M. Müller, on peut déduire divers résultats.

1° Posons $b_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$ ($\delta_{\mu\nu}$ étant le symbole de Kronecker); dans ce conditions $B=1$ et

$$H_\mu=|a_{\mu\mu}|-\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n}|a_{\mu\nu}| \qquad (\mu=1,2,\ldots,n).$$

On retrouve le théorème de MM. Hadamard-Ostrowski.

2° Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des nombres positifs et posons

$$b_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}p_\mu.$$

On a

$$B=p_1\,p_2\,\ldots\,p_n$$

et

$$H_\mu=|a_{\mu\mu}|p_\mu-\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n}|a_{\mu\nu}|p_\nu \qquad (\mu=1,2,\ldots,n).$$

Ainsi

$$|A|\geqq\frac{H_1\,H_2\,\ldots\,H_n}{p_1\,p_2\,\ldots\,p_n}.$$

On établit ainsi une proposition de Von Koch [7].

3° Soit enfin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une permutation des n premier nombres entiers et posons

$$b_{\mu\nu}=1 \quad \text{pour} \quad \nu=x_\mu,$$
$$b_{\mu\nu}=0 \quad \text{pour} \quad \nu\neq x_\mu.$$

Avec ce choix des $b_{\mu\nu}$, $B=1$, et il vient le théorème :

Théorème 2. — *Le déterminant d'ordre n, A, est différent d zéro si les n inégalités*

$$H_\mu=|a_{\mu x_\mu}|-\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq x_\mu}}^{n}|a_{\mu\nu}|>0 \qquad (\mu=1,2,\ldots,n) \tag{6}$$

sont satisfaites.

ısi une matrice carrée sera régulière si dans chaque ligne un :nt est plus grand que tous les autres au sens précisé par l'iné- (6) et si, dans chaque ligne, cet élément privilégié se trouve une colonne différente de celles où se trouvent les éléments égiés des autres lignes.

critère de M. Hadamard n'est qu'un cas particulier de ce er.

nséquence du théorème 2 : *formation de déterminants fs* [17]. — Soit une matrice à éléments réels $A = (a_{\mu\nu})$ dont e n est égal à 3 ou à un multiple de 3, dont les éléments de la nale principale sont positifs et considérons la permutation :ulière :

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \ldots & x_n \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 & 7 & 9 & \ldots & n \end{matrix}$$

a

$$a_{1x_1} = a_{12}, \qquad a_{2x_2} = a_{21}, \qquad a_{3x_3} = a_{33}, \qquad \ldots, \qquad a_{nx_n} = a_{nn}.$$

supposant satisfaites les inégalités (6) de Müller, il vient

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} |a_{1+3\lambda,\,2+3\lambda}| > \displaystyle\sum_{\substack{\nu \\ \nu \neq 2+3\lambda}} |a_{1+3\lambda,\,\nu}| \\ |a_{2+3\lambda,\,1+3\lambda}| > \displaystyle\sum_{\substack{\nu \\ \nu \neq 1+3\lambda}} |a_{2+3\lambda,\,\nu}| \end{array}\right\} \left(\lambda = 0, 1, \ldots, \dfrac{n-3}{3}\right) \\ \qquad a_{3\lambda,\,3\lambda} > \displaystyle\sum_{\substack{\nu \\ \nu \neq 3\lambda}} |a_{3\lambda,\,\nu}| \qquad \left(\lambda = 1, 2, \ldots, \dfrac{n}{3}\right) \\ \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right.$$

faisant les hypothèses supplémentaires

a. $a_{1+3\lambda,\,2+3\lambda}\,a_{2+3\lambda,\,1+3\lambda} < 0 \qquad \left(\lambda = 0, 1, \ldots, \dfrac{n-3}{3}\right)$;

b. Les éléments diagonaux principaux des lignes 4, 7, 10, ..., $(n-2)$ sont supérieurs à la somme des modules des éléments de ces lignes qui se trouvent à leur gauche;

·araît immédiatement, par continuité, que le déterminant de la :e A, ainsi que tous ses mineurs principaux sont positifs.

En effet, en égalant à zéro tous les éléments du déterminant de la matrice A, sauf ceux qui constituent les membres de gauche des inégalités (7) et les éléments diagonaux des lignes 4, 7, 10, ..., $(n-2)$, il est facile de vérifier que le déterminant obtenu est positif ainsi que tous ses mineurs principaux; faisons ensuite varier de façon continue et toujours dans le même sens à partir de zéro, les valeurs des éléments de A que nous venons d'annuler jusqu'à celles qu'ils prennent dans A, en opérant de telle manière que les conditions (7) de M. Müller et (8), (6) soient constamment satisfaites; il apparaît que les différents déterminants que nous venons de considérer, ne pouvant s'annuler au cours de cette opération, conservent les signes qu'ils avaient initialement; ils demeurent donc tous positifs et la matrice A est de déterminant positif.

Ainsi un déterminant dont l'ordre est multiple de 3, *les éléments réels et les termes diagonaux positifs, est positif ainsi que ses mineurs principaux si les conditions* (7) *et* (8) *sont satisfaites.*

On pourrait généraliser ce résultat. Par exemple, considérons des matrices réelles carrées, d'ordre égal à 4 ou à un multiple de 4, à éléments de la diagonale principale positifs et choisissons la permutation

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 9,\ 11,\ 12,\ \ldots,\ (n-1),\ n.$$

Les conditions de M. Müller étant remplies et en supposant de plus

a. $a_{1+4\lambda,\,2+4\lambda}\,a_{2+4\lambda,\,1+4\lambda} < 0$;

b. Les éléments diagonaux des lignes 5, 9, 13, ..., $(n-4)$ supérieurs à la somme des modules des éléments de ces lignes qui se trouvent à leur gauche;

on obtiendra des déterminants positifs.

La loi de formation est immédiate.

A titre d'exemple, considérons la matrice carrée d'ordre 6 (où sont écrits en caractères gras les éléments privilégiés)

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{-6} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Les conditions (7) et (8) étant satisfaites, son déterminant est positif.

Nous désignerons par « matrice M » les matrices construites à partir des considérations précédentes.

Il est à remarquer que la considération des matrices M peut être utile quand on forme la matrice définie positive $A' = I_p A$ dont nous avons signalé l'emploi dans le fonctionnement des machines mathématiques.

CHAPITRE II.

LOCALISATION DES VALEURS CARACTÉRISTIQUES D'UNE MATRICE DANS LE PLAN COMPLEXE.

I. — Méthode générale.

Étant donné une matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{ij})$, nous allons voir que l'on peut définir dans le plan complexe un ensemble de domaines circulaires à l'intérieur desquels se trouvent les valeurs caractéristiques de A [1], [18].

Posons

$$P_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \qquad Q_i = \sum_{i \neq j} |a_{ji}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

et représentons par $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ les valeurs caractéristiques de A ; ces dernières sont solutions de l'équation

$$\|a_{ij} - \lambda \delta_{ij}\| = 0; \tag{1}$$

soit λ_k l'une d'entre elles; la relation (1), écrite pour $\lambda = \lambda_k$, exprime que le système d'équations linéaires et homogènes en x_i

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \lambda_k \delta_{ij}) x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

admet un ensemble de solutions non nulles $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit x_l la plus grande de ces solutions en module; l'équation de rang l du système (2) donne

$$(a_{ll} - \lambda_k) x_l = -\sum_{j \neq l} a_{lj} x_j$$

et l'on en déduit

$$|a_{ll}-\lambda_k|.|x_l| \leq \sum_{j\neq l} |a_{lj}x_j|,$$

d'où

$$|a_{ll}-\lambda_k| \leq \sum_{j\neq l} \left|a_{lj}\frac{x_j}{x_l}\right| \leq \sum_{j\neq l} |a_{lj}| = P_l.$$

Ainsi la valeur caractéristique λ_k se trouve à l'intérieur de la circonférence

$$|a_{ll}-z| \leq P_l.$$

Il apparaît donc que les valeurs caractéristiques de la matrice A se trouvent dans le domaine du plan complexe constitué par les n circonférences C_i ($i=1, 2, \ldots, n$) d'équations

$$(3) \qquad |a_{ii}-z| \leq P_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Notons qu'en considérant les grandeurs Q_i, on montrerait de la même façon que les valeurs caractéristiques de A se trouvent dans le domaine formé par l'ensemble des circonférences C'_i ($i=1, 2, \ldots, n$)

$$(3') \qquad |a_{ii}-z| \leq Q_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

O. Taussky [29] a, d'autre part, montré que lorsque la matrice A ne peut par une même permutation des lignes et des colonnes se ramener à la forme $\begin{pmatrix} P & 0 \\ U & Q \end{pmatrix}$, où P et Q sont des matrices carrées et o la matrice nulle, une valeur caractéristique ne peut se trouver sur la frontière du domaine limité par les cercles C_i (ou C') que si toutes ces circonférences ont un point commun.

Ces résultats permettent de généraliser les conditions suffisantes obtenues plus haut dans le domaine réel, pour qu'une matrice A soit définie positive.

Il suffit que les circonférences (3) ou (3') se trouvent tout entières à droite de l'axe imaginaire du plan complexe; ceci exige

$$(4) \qquad \mathcal{R}(a_{ii}) > 0, \qquad \mathcal{R}(a_{ii}) > P_i \ \text{(ou } Q_i) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

Ils permettent également de donner une limite supérieure des modules des valeurs caractéristiques de A; on obtient immédiatement

$$(5) \qquad |\lambda_k| \leq \max \{|a_{ii}| + P_i\} \ \text{(ou } Q_i) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Une conséquence immédiate de ce résultat est que les valeurs caractéristiques d'une matrice seront toutes dans le cercle de rayon n centré sur l'origine, si ses éléments sont tous, en module, inférieurs à l'unité.

Ces considérations permettent de plus de donner des limites, supérieure et inférieure, des parties réelles et imaginaires des valeurs caractéristiques de A; il vient

$$(5') \quad \left\{\begin{array}{l} \min\{\mathcal{R}(a_{ii}) - P_i\} \leq \mathcal{R}(\lambda_k) \leq \max\{\mathcal{R}(a_{ii}) + P_i\} \\ \min\{\mathcal{I}(a_{ii}) - P_i\} \leq \mathcal{I}(\lambda_k) \leq \max\{\mathcal{I}(a_{ii}) + P_i\} \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right. \quad (\text{ou } Q_i)$$

De plus, quand les conditions (4) sont satisfaites, c'est-à-dire quand la matrice est définie positive, une limite intérieure des modules de ses valeurs caractéristiques s'écrit

$$(6) \qquad \min\{|a_{ii}| - P_i\} \quad (\text{ou } Q_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il est à noter que la limite supérieure des modules des valeurs caractéristiques d'une matrice donnée par (5) est un cas particulier d'un résultat dû à Perron [25, 28]; ce dernier a, en effet, établi qu'étant donné une matrice $A = (a_{ij})$ d'ordre n, si $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des nombres positifs, une limite supérieure des modules des valeurs caractéristiques de A est

$$\max \frac{\sum_{1}^{n} {}_j C_j |a_{ij}|}{C_i} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Cette limite peut d'ailleurs se déduire des considérations qui précèdent; considérons, en effet, la matrice

$$B = C^{-1} AC,$$

où C est une matrice diagonale d'éléments $C_1, C_2, \ldots, C_n > 0$; elle possède les mêmes valeurs caractéristiques que A; en raisonnant sur B comme on l'a fait sur A, on trouve immédiatement le résultat de Perron.

La limite (5) donnée plus haut correspond au choix

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 1.$$

Applications. — *Quelques propriétés des matrices* H *réelles définies positives* [20]. — Considérons la matrice H d'ordre n, $H = (a_{ij})$ dont les éléments supposés *réels*, satisfont aux inégalités

$$a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Elle est définie positive; soient $|x_1|$, $|x_2|$, ..., $|x_n|$ les modules de ses valeurs caractéristiques rangés par ordre de grandeur croissante; nous allons montrer que l'on a

$$\min \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |x_n| < \max \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Le fait que $|x_n|$ est inférieur à $\max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ résulte des considérations qui ont précédé; montrons maintenant que l'hypothèse

$$|x_n| < \min \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

conduit à une contradiction.

On a

$$\sum_1^n a_{ii} = \sum_1^n x_i,$$

d'où

$$\sum_1^n a_{ii} \leq \sum_1^n |x_i| < n |x_n|$$

et l'hypothèse envisagée donnerait

$$\sum_1^n a_{ii} < n \min \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,$$

soit

$$\sum_1^n a_{ii} - n \min \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < 0,$$

ce qui est manifestement en contradiction avec les inégalités définissant une matrice H définie positive.

Ainsi

$$\min \sum_{j\neq i} | a_{ij} | < | x_n | < \max \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |,$$

relation qui est à rapprocher de celle établie par Frobenius pour les matrices réelles à éléments positifs.

Ce résultat peut être complété par le suivant; soient $|x_{n-1}|$ et $|x_n|$ les modules des deux plus grandes valeurs caractéristiques d'une matrice H définie positive; nous allons montrer que l'on a

$$(7)\quad \min [a_{ii} - | a_{jk} |] \leqq | x_{n-1} | \leqq | x_n | \qquad (j \neq k;\ i, j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Posons

$$A = \max | a_{ij} | \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

et supposons que la relation précédente ne soit pas satisfaite. On pourrait avoir

$$(8)\qquad | x_1 | \leqq | x_2 | \leqq \ldots \leqq | x_n | < \min a_{ii} - A.$$

Nous allons voir que cette dernière relation conduit à une contradiction, on a en effet

$$(9)\qquad \sum_1^n | x_i | \geqq \sum_1^n a_{ii}$$

et, d'après (8), il viendrait

$$n [\min a_{ii} - A] > \sum_1^n a_{ii},$$

soit

$$n \min a_{ii} - \sum_1^n a_{ii} > n A.$$

Le membre de gauche de cette inégalité est négatif; comme nA est positif, il y a contradiction et l'on ne peut avoir la suite d'inégalités (8).

Supposons maintenant que l'on ait

$$(10)\qquad | x_1 | \leqq | x_2 | \leqq \ldots \leqq | x_{n-1} | < \min a_{ii} - A \leqq | x_n |;$$

montrons que ces inégalités conduisent également à une contradiction; de (9) et (10) on peut tirer

$$|x_n| \geqq \sum_1^n a_{ii} - \sum_1^{n-1} |x_i| > \sum_1^n a_{ii} - (n-1)\min a_{ii} + (n-1)A$$

et comme

$$\sum_1^n a_{ii} - (n-1)\min a_{ii} \geqq \max a_{ii},$$

on aurait

$$(11)\qquad \begin{cases} |x_n| > \max a_{ii} + (n-1)A \geqq \max\left[a_{ii} + \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right] \\ (i, j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Mais nous avons vu qu'une limite supérieure des modules des valeurs caractéristiques d'une matrice est

$$\max[a_{ii} + P_i] \qquad (i, j = 1, \ldots, n);$$

il y a donc contradiction avec le résultat qu'implique l'inégalité (11); ainsi on a

$$\min[a_{ii} - |a_{jk}|] \leqq |x_{n-1}| \leqq x_n \qquad (j \neq k;\ i, j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où le théorème :

Une matrice H, *à éléments réels, définie positive a toujours deux valeurs caractéristiques supérieures en module à la différence entre le plus petit élément de sa diagonale principale et le module maximum de ses éléments non diagonaux.*

Nous trouvons ainsi une méthode de calcul d'une limite inférieure des modules des deux plus grandes valeurs caractéristiques d'une matrice H définie positive quand on se fixe le plus petit élément de sa diagonale principale et le module maximum de ses éléments non diagonaux.

Ces résultats sont à rapprocher de ceux de M. Montel relatifs aux modules des zéros des polynomes [11] et qui comportent, en particulier, le corollaire suivant :

Le polynome

$$(12)\qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

dont les coefficients a_i sont tous différents de zéro, a toujours un zéro de module supérieur à

$$\frac{1}{n}\left|\frac{a_1}{a_0}\right|.$$

En s'appuyant sur ce résultat, on peut d'ailleurs établir la première partie de notre proposition

$$\min a_{ii} - \mathrm{A} \leqq |x_n|.$$

En effet, les conditions de M. Hadamard impliquent que les mineurs principaux de tous ordres de dét(H), comme dét(H) lui-même, sont différents de zéro; le polynome caractéristique de la matrice H satisfait donc aux conditions imposées aux coefficients a_i du polynome (12). Comme dans le cas présent

$$|a_0| = 1, \qquad |a_1| = \sum_1^n a_{ii},$$

il résulte du théorème de M. Montel

$$\frac{1}{n}\sum_1^n a_{ii} \leqq |x_n|,$$

c'est-à-dire

$$\min[a_{ii} - |a_{jk}|] \leqq \min a_{ii} \leqq \frac{1}{n}\sum_1^n a_{ii} \leqq |x_n| \qquad (j \neq k;\ i, j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

b. Remarque sur la stabilité des systèmes physiques [18]. — On sait que la stabilité d'un système physique se ramène, en général, à trouver les conditions que doivent satisfaire les coefficients, réels ou complexes, d'une équation algébrique de degré n pour que cette dernière ne possède pas de racines à partie réelle positive. De telles conditions ont été énoncées par Routh et Hurwitz dans le cas de coefficients réels, par Franck dans l'éventualité de coefficients complexes.

Dans certaines études, le premier membre de l'équation algébrique considérée se présente sous la forme d'un déterminant d'ordre n et cette dernière s'écrit

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{F}(z) = \| a_{ij} + \delta_{ij} z \| = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Les conditions (4) sont encore des conditions suffisantes pour que l'équation (13) n'ait pas de racines à partie réelle positive : on s'en rend compte en y changeant z en $-z$. Si donc elles sont satisfaites, $F(z)$ aura toutes ses racines à partie réelle négative et il ne sera pas nécessaire pour s'en rendre compte de développer le déterminant dans le but d'utiliser les critères de Routh, Hurwitz ou Franck.

On sait, d'autre part, que dans les problèmes de stabilité il est non seulement utile de connaître des critères assurant à la partie réelle

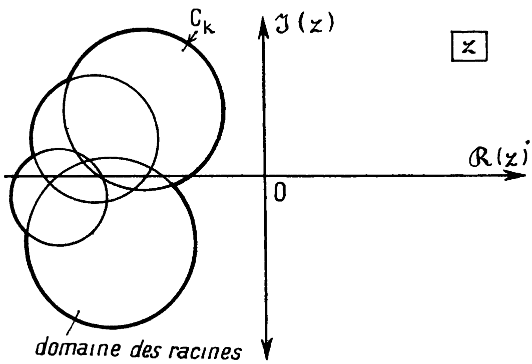

Fig. 1.

des racines une valeur négative, mais aussi de préciser la distribution de ces racines au voisinage de l'axe imaginaire du plan complexe; problème que l'on étudie habituellement en ayant recours au critérium de Nuyquist.

La connaissance des domaines circulaires où peuvent se trouver les racines de l'équation (13) permet d'aborder cette question.

Supposons la stabilité assurée par les conditions (4); en traçant les circonférences délimitant le domaine des racines de (13), on obtiendra une figure analogue à celle que nous schématisons ci-dessus (*fig.* 1) et l'on repérera la circonférence, ici C_k, qui avoisine le plus l'axe imaginaire du plan des z. Pour améliorer éventuellement la qualité de la stabilité, il faudra écarter cette circonférence de l'axe des imaginaires; on pourra le faire en jouant sur les éléments a_{kj} de la $k^{\text{ième}}$ ligne du déterminant (13), éléments dont la signification physique est souvent immédiate et certainement plus facile à déceler que celle des coefficients du polynome obtenu par le développement du déterminant.

Nous avons donc là un moyen de parvenir à une stabilité aussi satisfaisante qu'on le souhaite.

II. — Théorème de M. A. Brauer [1].

Étant donné la matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{ij})$; si pour un entier m donné $(1 \leqq m \leqq n)$, on a

$$(14) \qquad |a_{mm} - a_{\lambda\lambda}| > P_m + P_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

pour tout λ différent de m, le cercle

$$(15) \qquad |z - a_{mm}| \leqq P_m$$

contient une, et une seule, valeur caractéristique de A.

En premier lieu, remarquons que la condition (14) implique que la circonférence (15) n'a aucun point commun avec les circonférences

$$(16) \qquad |z - a_{\lambda\lambda}| \leqq P_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda \neq m).$$

Ceci posé, considérons la matrice B, d'éléments b_{ij} définis comme suit :

$$b_{k\lambda} = a_{k\lambda} \quad (k \neq m), \qquad b_{mm} = a_{mm}, \qquad b_{m\lambda} = 0 \quad (\lambda \neq m).$$

Il est clair que a_{mm} est une valeur caractéristique de B, représentons-la par ξ_1 et soient $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ les autres valeurs caractéristiques qui sont aussi celles du mineur principal B_{mm} de B. Les éléments de la diagonale principale de B_{mm} sont $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{m-1,m-1}; a_{m+1,m+1}, \ldots, a_{nn}$; d'autre part, les sommes des modules des éléments non diagonaux de chaque ligne de B_{mn} sont au plus égales à $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_{m+1}, \ldots, P_n$, donc

$$\sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq m, k}}^{n} |b_{k\lambda}| \leqq \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^{n} |a_{k\lambda}| = P_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n)$$

et il en résulte que $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ se trouvent dans le domaine délimité par les circonférences d'équation (16).

Introduisons alors un paramètre réel t compris entre zéro et un et posons

$$b_{k\lambda}(t) = b_{k\lambda} \quad (k \neq m), \qquad b_{mm}(t) = b_{mm},$$
$$b_{m\lambda}(t) = t\,a_{m\lambda} \quad (\lambda \neq m),$$

puis faisons varier t de façon continue de zéro à un. Les éléments de la matrice B, ainsi que les coefficients de son équation caractéristique, varient d'une manière continue et, par suite, les valeurs caractéristiques $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ varient de façon continue, chacune de ces dernières se déplaçant sur une courbe continue allant d'un point ξ_ν à un point λ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ représentant une valeur caractéristique de la matrice A.

Tous les points de ces courbes doivent se trouver dans l'un des cercles (15) ou (16), puisque la somme des modules des éléments non diagonaux de la $m^{\text{ième}}$ ligne reste inférieure à P_m et que les sommes des modules des éléments non diagonaux des autres lignes demeurent inchangées.

Il s'en suit que chacune des courbes joignant ξ_ν à λ_ν $(\nu \geqq 2)$ doit rester extérieure à la circonférence d'équation (15), alors que la courbe joignant ξ_1 à λ_1 demeure dans cette circonférence.

Ainsi la circonférence d'équation (15) ne contient qu'une et une seule valeur caractéristique de A.

Corollaire 1. — *Si l'élément a_{mm} et les coefficients de l'équation caractéristique de* A *sont des nombres réels et si* (14) *est satisfaite, la valeur caractéristique située dans la circonférence* (15) *est réelle.*

Supposons que sous les hypothèses indiquées, la circonférence (15) contienne une valeur caractéristique complexe λ_1; sa grandeur conjuguée $\bar{\lambda}_1$ est également une valeur caractéristique de A. Puisque a_{mm} est réel et que λ_1 est dans le cercle (15), $\bar{\lambda}_1$ doit s'y trouver également; ceci est impossible d'après le théorème de Brauer. Ainsi la valeur caractéristique λ_1 est nécessairement réelle.

Corollaire 2. — *Si tous les éléments de la diagonale principale de* A, *ainsi que les coefficients de son équation caractéristique* *sont réels et si pour chaque k et λ on a*

$$|a_{kk} - a_{\lambda\lambda}| > P_k + P_\lambda,$$

toutes les valeurs caractéristiques de A *sont réelles et distinctes.*

Cette proposition résulte immédiatement du corollaire 1.

Elle permet dans le champ réel de construire des matrices carrées non symétriques dont les valeurs caractéristiques sont réelles.

Application du théorème de Brauer à un problème d'algèbre. — On sait qu'étant donné un polynome de degré n

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (a_n \neq 0)$$

dont tous les coefficients sont des entiers réels, ce polynome est irréductible sur le corps des nombres rationnels quand les modules de $(n-1)$ de ses zéros sont inférieurs à l'unité.

Nous trouverons donc des conditions d'irréductibilité du polynome caractéristique d'une matrice régulière $A = (a_{ij})$ d'ordre n, à éléments réels entiers, en exprimant que $(n-1)$ de ses valeurs caractéristiques se trouvent dans le cercle-unité.

Les valeurs caractéristiques de A sont solutions de l'équation

$$\| a_{ij} - \delta_{ij} x \| = 0$$

et, dans le plan complexe, elles se trouvent à l'intérieur du domaine limité par les n circonférences

$$(17) \qquad |a_{ii} - z| \leqq \sum_{j \neq i}^{j} |a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après le théorème de Brauer, le polynome caractéristique de la matrice A sera irréductible si $(n-1)$ des circonférences d'équation (17) sont situées tout entières à l'intérieur du cercle-unité et si le $n^{\text{ième}}$ est extérieur à ce cercle (et ne le contient pas).

Pour généraliser les résultats que nous avons signalés dans un travail antérieur [19], nous pouvons remarquer qu'étant donné la matrice $A = (a_{ij})$, il est loisible de lui associer une matrice carrée également régulière $C = (c_{ij})$, d'ordre n à éléments réels, pour former la matrice

$$B = (b_{ij}) = C^{-1} A C \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

qui possède le même polynome caractéristique que A et dont le domaine des valeurs caractéristiques est constitué par l'ensemble des n circonférences

$$|b_{ii}-z| \leq \sum_{j \neq i} |b_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

En appliquant à B le théorème de M. Brauer, on peut alors énoncer la proposition suivante :

Le polynome caractéristique de la matrice carrée régulière d'ordre n. $A = (a_{ij})$, *à éléments entiers est irréductible sur le corps des nombres rationnels, s'il est possible de déterminer une matrice régulière* $C = (c_{ij})$ *d'ordre n, à éléments réels, telle que le domaine des valeurs caractéristiques de* $B = C^{-1}AC$ *soit constitué par* $(n-1)$ *circonférences situées tout entières à l'intérieur du cercle-unité, la* $n^{\text{ième}}$ *étant à l'extérieur de cette circonférence et ne la contenant pas.*

Ainsi des conditions suffisantes d'irréductibilité du polynome caractéristique de A s'écrivent

$$(18) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1 & (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq m); \\ \displaystyle |b_{mm}| > 1 + \sum_{j \neq m} |b_{mj}| & (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Pour des matrices d'ordre élevé, ces conditions s'avèrent rapidement d'une écriture difficile; nous allons voir cependant que cette méthode permet de trouver simplement des conditions d'irréductibilité des polynomes à coefficients entiers sur le corps envisagé.

Soit la matrice $A = (a_{ij})$ régulière, d'ordre n, à éléments entiers et prenons

$$C = (c_i \delta_{ij}), \qquad C^{-1} = \left(\frac{1}{c_i}\delta_{ij}\right),$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker.

Il vient

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dfrac{c_2}{c_1} & \ldots & a_{1n}\dfrac{c_n}{c_1} \\ a_{21}\dfrac{c_1}{c_2} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\dfrac{c_n}{c_2} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}\dfrac{c_1}{c_n} & a_{n2}\dfrac{c_2}{c_n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et les inégalités (18) conduisent au critère d'irréductibilité du polynome caractéristique de A

$$|a_{jj}| + \sum_{\substack{k \\ k \neq j}} \left| a_{jk} \frac{c_k}{c_j} \right| < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq m);$$

$$|a_{mm}| > 1 + \sum_{\substack{l \\ l \neq m}} \left| a_{ml} \frac{c_l}{c_m} \right| \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Les premières des inégalités précédentes montrent que le critère ne vaut que pour des matrices de forme très spéciale, en particulier pour celles du type

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

pour lequel le critère d'irréductibilité s'écrit

$$\left|\frac{c_2}{c_1}\right| < 1, \qquad \left|\frac{c_3}{c_1}\right| < 1, \qquad \ldots, \qquad \left|\frac{c_n}{c_{n-1}}\right| < 1,$$

$$|a_{nn}| > 1 + \sum_{j=1}^{n} |a_{nj}| \left|\frac{c_j}{c_n}\right|, \qquad (j \neq n).$$

soit alors le polynome

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (a_n \neq 0);$$

on sait que ses zéros sont les valeurs caractéristiques de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

qui rentre dans le type précédent.

Un polynome à coefficients entiers sera donc irréductible sur le corps envisagé s'il est possible de déterminer une suite décroissante de n nombres positifs c_k $(c_k < c_{k-1})$ tels que

$$|a_1| > 1 + \sum_{j=\bullet}^{n} |a_j| \left|\frac{c_{n-j+1}}{c_n}\right|.$$

Remarquons qu'en prenant tous les c_k égaux on retrouve le critère d'O. Perron [26],

$$a_1 > 1 + \sum_{j=2}^{n} | a_j |,$$

à condition que le polynome n'ait pas de zéros sur le cercle-unité.

Notons de plus que ces considérations permettent de définir des familles de matrices carrées régulières à éléments entiers dont les polynomes caractéristiques sont irréductibles [19].

Généralisation du théorème de Brauer. — *Soit une matrice d'ordre* n, $A = (a_{ij})$ *et supposons-la telle que le domaine de ses valeurs caractéristiques se décompose en divers domaines* D_ν $(\nu \leqq n)$ *formés respectivement par* K_ν *circonférences* $\left(\sum_k K_\nu = n\right)$; *dans ces conditions la matrice* A *possède* K_ν *valeurs caractéristiques dans chacun des domaines* D_ν.

La démonstration de cette proposition s'obtient sans difficulté en utilisant une méthode calquée sur celle utilisée pour établir le théorème de Brauer.

Une conséquence immédiate de ce nouvel énoncé est que si les éléments diagonaux a_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont réels et les coefficients du polynome caractéristique de A également réels, tout domaine D_ν formé par un nombre impair de circonférences contient au moins une valeur caractéristique réelle.

III. — Extension des résultats précédents.

On doit à M. A. Brauer [2] une importante généralisation des résultats précédents qui se trouve précisée par les théorèmes suivants :

Théorème 1. — *Étant donné une matrice carrée* $A = (a_{ij})$ *d'ordre* n, *ses valeurs caractéristiques se trouvent dans le domaine formé par les* $\frac{n(n-1)}{2}$ *ovales de Cassini :*

$$| z - a_{kk} | . | z - a_{\lambda\lambda} | \leqq P_k P_\lambda \qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq \lambda)$$

et aussi dans celui formé par les ovales

$$|z - a_{kk}|.|z - a_{\lambda\lambda}| \leqq Q_k Q_\lambda \qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq \lambda),$$

P_k *et* Q_k *ayant la signification indiquée plus haut.*

Nous établirons ce théorème en raisonnant sur les P_k.

Soit ω une valeur caractéristique de A; en raisonnant comme dans les paragraphes antérieurs, il apparaît que le système d'équations linéaires et homogènes

$$(19) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} a_{k\lambda} x_\lambda = \omega x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

admet un ensemble de solutions non nulles $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soient x_r et x_s les solutions de plus grand module et supposons $|x_r| > |x_s|$.

Les équations de rangs r et s du système (19) s'écrivent

$$(20) \qquad \begin{cases} (\omega - a_{rr}) x_r = \sum\limits_{\nu \neq r} a_{r\nu} x_\nu, \\ (\omega - a_{ss}) x_s = \sum\limits_{\nu \neq s} a_{s\nu} x_\nu. \end{cases}$$

Si $x_s = 0$, alors $x_\nu = 0$ pour tout ν différent de r; il en résulte, compte tenu de la première équation (20), $\omega = a_{rr}$ si x_r est différent de zéro. Ainsi ω se trouve dans l'ovale

$$|z - a_{rr}|.|z - a_{ss}| \leqq P_r P_s.$$

Le théorème est donc établi pour $x_s = 0$.

Supposons maintenant x_s différent de zéro. Par multiplication, les équations (20) donnent

$$(\omega - a_{rr})(\omega - a_{ss}) x_r x_s = \Bigg(\sum_{\nu \neq r} a_{r\nu} x_\nu\Bigg)\Bigg(\sum_{\nu \neq s} a_{s\nu} x_\nu\Bigg),$$

d'où

$$|\omega - a_{rr}|.|\omega - a_{ss}|.|x_r x_s| \leqq |x_s| \Bigg(\sum_{\nu \neq r} |a_{r\nu}|\Bigg) |x_r| \Bigg(\sum_{\nu \neq s} |a_{s\nu}|\Bigg)$$
$$= |x_r|.|x_s| P_r P_s.$$

Ainsi

$$|\omega - a_{rr}|.|\omega - a_{ss}| \leqq P_r P_s$$

et il en résulte que la valeur caractéristique ω se trouve dans l'ovale

$$|z - a_{rr}|.|z - a_{ss}| \leqq P_r P_s. \tag{21}$$

Le théorème est donc démontré. Il est à remarquer qu'il donne une meilleure localisation des valeurs caractéristiques que celle obtenue par les considérations du paragraphe 1, car l'ovale (21) se trouve dans l'un des deux cercles

$$|z - a_{rr}| \leqq P_r, \qquad |z - a_{ss}| \leqq P_s.$$

Notons que si $a_{rr} = a_{ss}$, l'ovale (21) dégénère en la circonférence

$$|z - a_{rr}| \leqq \sqrt{P_r P_s}.$$

Conséquence. — 1° Ce théorème permet de donner une limite supérieure des modules des valeurs caractéristiques d'une matrice d'ordre n, $A = (a_{ij})$, elle s'écrit

$$\left\{\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}\max\left\{ |a_{kk}| + |a_{\lambda\lambda}| + \sqrt{[|a_{kk}| - |a_{\lambda\lambda}|]^2 + 4P_k P_\lambda} \right\} \\ &\qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq \lambda). \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Soit en effet ω une valeur caractéristique de A; il résulte de la relation (21) que

$$|\omega - a_{rr}|.|\omega - a_{ss}| \leqq P_r P_s. \tag{23}$$

Supposons $|a_{rr}| > |a_{ss}|$ [2]; si $|\omega| < |a_{rr}|$, alors

$$\begin{aligned} |\omega| &\leqq \frac{1}{2}[|a_{rr}| + |a_{ss}|] + \frac{1}{2}[|a_{rr}| - |a_{ss}|] \\ &\leqq \frac{1}{2}\Big\{ |a_{rr}| + |a_{ss}| \\ &\qquad\quad + \sqrt{[|a_{rr}| - |a_{ss}|]^2 + 4P_r P_s} \Big\} \leqq M. \end{aligned} \tag{24}$$

Envisageons maintenant le cas où $|\omega| > |a_{rr}| \geqq |a_{ss}|$; nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} 0 &< |\omega| - |a_{rr}| \leqq |\omega - a_{rr}|, \\ 0 &< |\omega| - |a_{ss}| \leqq |\omega - a_{ss}| \end{aligned}$$

et, compte tenu de (23), on a

$$[|\omega| - |a_{rr}|][|\omega| - |a_{ss}|] \leqq |\omega - a_{rr}|.|\omega - a_{ss}| \leqq P_r P_s,$$

---

[2] Si $|a_{rr}| < |a_{ss}|$ la démonstration serait la même.

soit

$$|\omega|^2 - [|a_{rr}| + |a_{ss}|]|\omega| + |a_{rr}a_{ss}| - P_r P_s \leqq 0. \tag{25}$$

Ainsi

$$|\omega| \leqq \frac{1}{2}\left\{|a_{rr}| + |a_{ss}| + \sqrt{[|a_{rr}| - |a_{ss}|]^2 + 4P_r P_s}\right\} \leqq M. \tag{26}$$

Les relations (24) et (26) établissent le théorème.

On peut établir que la limite M donnée par (22) est meilleure que celle (5) obtenue au premier paragraphe de ce chapitre si

$$\max[|a_{\nu\nu}| + P_\nu] = |a_{kk}| + P_k > \max[|a_{\nu\nu}| + P_\nu]$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \nu \neq k).$$

2° Avec l'hypothèse supplémentaire

$$|a_{kk}a_{\lambda\lambda}| > P_k P_\lambda \qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq \lambda), \tag{27}$$

on peut également donner une limite inférieure du module des valeurs caractéristiques de A, elle s'écrit

$$m = \frac{1}{2}\min\left\{|a_{kk}| + |a_{\lambda\lambda}| - \sqrt{[|a_{kk}| - |a_{\lambda\lambda}|]^2 + 4P_k P_\lambda}\right\}$$
$$(k, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq \lambda).$$

De la relation (25) on tire en effet

$$\omega > \frac{1}{2}\left\{|a_{rr}| + |a_{ss}| - \sqrt{[|a_{rr}| - |a_{ss}|]^2 + 4P_r P_s}\right\} \geqq m.$$

3° De cette dernière hypothèse (27), on peut déduire de nouvelles conditions suffisantes pour que la matrice d'ordre n, $A = (a_{ij})$ à éléments réels soit définie positive; on a, en effet, le théorème :

Théorème 2. — *Pour que la matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{ij})$ à éléments réels soit définie positive, il suffit que l'on ait*

$$|a_{kk}a_{\lambda\lambda}| > P_k P_\lambda \qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq \lambda);$$
$$a_{kk} > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Établissons cette proposition.

On sait que les valeurs caractéristiques de A se trouvent dans le domaine délimité par les ovales

$$|z - a_{kk}|.|z - a_{\lambda\lambda}| \leqq P_k P_\lambda \qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq \lambda),$$

où

$$P_k P_\lambda > 0. \tag{28}$$

En coordonnées cartésiennes, l'équation des ovales s'écrit

$$f(x, y) = [(x - a_{kk})^2 + y^2][(x - a_{\lambda\lambda})^2 + y^2] - P_k^2 P_\lambda^2 = 0.$$

Posons

$$(x - a_{kk})^2 + y^2 = K, \qquad (x - a_{\lambda\lambda})^2 + y^2 = L \tag{29}$$

et l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - a_{kk}) L + 2(x - a_{\lambda\lambda}) K, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(L + K),$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x - a_{kk}) L + (x - a_{\lambda\lambda}) K}{y(L + K)}. \tag{30}$$

Ceci posé, considérons le point de coordonnées

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[a_{kk} + a_{\lambda\lambda} - \sqrt{(a_{kk} - a_{\lambda\lambda})^2 + 4 P_k P_\lambda}\right], \qquad y_1 = 0, \tag{31}$$

c'est le point où l'ovale considéré est le plus près de l'origine des coordonnées.

Si l'on suppose $a_{kk} > a_{\lambda\lambda}$, de (31) et (28) on tire

$$x_1 < \frac{1}{2}\left[a_{kk} + a_{\lambda\lambda} - \sqrt{(a_{kk} - a_{\lambda\lambda})^2}\right] = a_{\lambda\lambda} \leqq a_{kk},$$

ainsi

$$x_1 - a_{kk} \leqq x_1 - a_{\lambda\lambda} < 0.$$

Comme par (29), K et L sont positifs, l'équation (30) montre que la tangente au point (x_1, y_1) est parallèle à l'axe des y. Cette tangente ne rencontre l'ovale en aucun autre point, donc

$$(x_1 - a_{kk})^2 (x_1 - a_{\lambda\lambda})^2 = P_k^2 P_\lambda^2$$

et par suite,

$$[(x_1 - a_{kk})^2 + y^2][(x_1 - a_{\lambda\lambda})^2 + y^2] > P_k^2 P_\lambda^2 \qquad (y \neq 0).$$

Il en résulte que tous les points de l'ovale et ceux situés sur sa frontière ont une abscisse x supérieure ou égale à $x_1 > 0$; ainsi les valeurs caractéristiques de A ont leurs parties réelles positives.

Ce théorème conduit aux corollaires suivants :

a. Si l'on a

$$|a_{kk} a_{\lambda\lambda}| > P_k P_\lambda \qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq \lambda),$$

si les a_{kk} sont positifs ($k = 1, 2, \ldots, n$) et si les coefficients du polynome caractéristique de A *sont des nombres réels, le déterminant* A *est positif.*

En effet, si $x + iy$ est une valeur caractéristique de A, $x - iy$ en est une également et leur produit est positif; comme A, d'après le théorème 2, n'a pas de valeurs caractéristiques négatives ou nulles, le produit de toutes les valeurs caractéristiques est positif et le déterminant de A l'est également.

5. *Toute matrice hermitique satisfaisant aux conditions du théorème 2 a ses valeurs caractéristiques positives.*

On sait, en effet, que les valeurs caractéristiques d'une matrice hermitique sont réelles.

Application des théorèmes précédents à la recherche d'une limite supérieure ou inférieure des modules des zéros d'un polynome. — Nous avons rappelé que les zéros d'un polynome sont les valeurs caractéristiques d'une matrice dont nous avons donné plus haut la forme (*cf.* p. 31); on peut donc déduire des limites pour les modules des zéros d'un polynome de celles (5) et (22) obtenues pour les valeurs caractéristiques des matrices [17].

Ces limites supérieures s'écrivent respectivement :

$$M_1 = \max[|a_{ii}| + P_i] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$M_2 = \frac{1}{2}\max\left\{|a_{ii}| + |a_{jj}| + \sqrt{[|a_{ii}| - |a_{jj}|]^2 + 4P_iP_j}\right\}$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j).$$

La première de ces limites, calculée à partir de la matrice associée au polynome

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

donne la limite supérieure

$$L_1 = \max\left\{1, \sum_1^n |a_j|\right\}. \tag{32}$$

On retrouve une limite classique [31].

En faisant $z = \frac{1}{u}$ dans $f(z)$, on obtient par des considérations analogues, une limite inférieure des zéros de $f(z)$

$$(33) \qquad l_1 = \frac{|a_n|}{1 + \sum_{1}^{n} |a_j|}.$$

De même, la limite M_2 de Brauer conduit aux limites, supérieure et inférieure,

$$(34) \qquad L_2 = \max\left\{1, \frac{1}{2}\left[|a_1| + \sqrt{|a_1|^2 + 4\sum_{2}^{n} |a_j|}\right]\right\},$$

$$(35) \qquad l_2 = \min\left\{1, \frac{2|a_n|}{|a_{n-1}| + \sqrt{|a_{n-1}|^2 + 4|a_n|\left[1 + \sum_{2}^{n} |a_j|\right]}}\right\}.$$

A titre d'exemple, considérons le polynome

$$z^{13} - z^{9} - z - 1$$

dont les modules des zéros extrêmes s'écrivent

$$0,891184 \quad \text{et} \quad 1,096129.$$

Les relations (34) et (35) donnent

$$l_2 = 0,5, \qquad L_2 = 1,73.$$

L'encadrement est assez satisfaisant et meilleur que celui auquel conduisent les relations (32) et (33); dans le cas présent, ces dernières prennent en effet les valeurs

$$l_1 = 0,25, \qquad L_1 = 3.$$

Ce résultat était à prévoir d'après le critère de comparaison des limites (5) et (22).

Notons de plus que les relations (5′) permettent de donner des limites, inférieure et supérieure, des parties réelles et imaginaires des zéros d'un polynome; en représentant par λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$

les zéros de $f(z)$, il vient ainsi

$$\min\left\{\overset{-1}{\mathcal{R}(-a_1)-\sum_{2}^{n}|a_j|}\right\} \leqq \mathcal{R}(\lambda_k) \leqq \max\left\{\overset{1}{\mathcal{R}(-a_1)+\sum_{2}^{n}|a_j|}\right\},$$

$$\min\left\{\overset{-1}{\mathcal{I}(-a_1)-\sum_{2}^{n}|a_j|}\right\} \leqq \mathcal{I}(\lambda_k) \leqq \max\left\{\overset{1}{\mathcal{I}(-a_1)+\sum_{2}^{n}|a_j|}\right\}.$$

IV. — Remarque sur la localisation des valeurs caractéristiques des matrices M.

Considérons une matrice M; pour trouver le domaine de ses valeurs caractéristiques on pourrait avoir recours aux méthodes indiquées aux paragraphes I et III, mais les conditions de M. Müller qui les caractérisent [*cf.* relation (7), chap. I] permettent également de définir de nouvelles zones où elles peuvent se trouver. La conjonction des ces diverses méthodes permettra donc de délimiter avec une plus grande précision le domaine des valeurs caractéristiques.

Soit, par exemple, une matrice M d'ordre multiple de 3; il est facile de montrer que les conditions (7) impliquent que ses valeurs caractéristiques se situent *à l'extérieur* des circonférences

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{l} |a_{1+3\lambda,1+3\lambda}-z| = |a_{1+3\lambda,2+3\lambda}| - \sum\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq 2+3\lambda}}^{n} |a_{1+3\lambda,\nu}|, \\ |a_{2+3\lambda,2+3\lambda}-z| = |a_{2+3\lambda,1+3\lambda}| - \sum\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq 1+3\lambda}}^{n} |a_{2+3\lambda,\nu}| \\ \qquad\left(\lambda = 0,\ 1,\ \ldots,\ \dfrac{n-3}{3}\right), \end{array}\right.$$

ou à *l'intérieur* des cercles

$$(37)\qquad |a_{3\lambda,3\lambda}-z| = \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq 3\lambda}}^{n} |a_{3\lambda,\nu}| \qquad \left(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n}{3}\right).$$

Nous allons préciser ces considérations sur un exemple; soit la matrice M d'ordre 6, déjà envisagée

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les considérations du paragraphe I montrent que ses valeurs

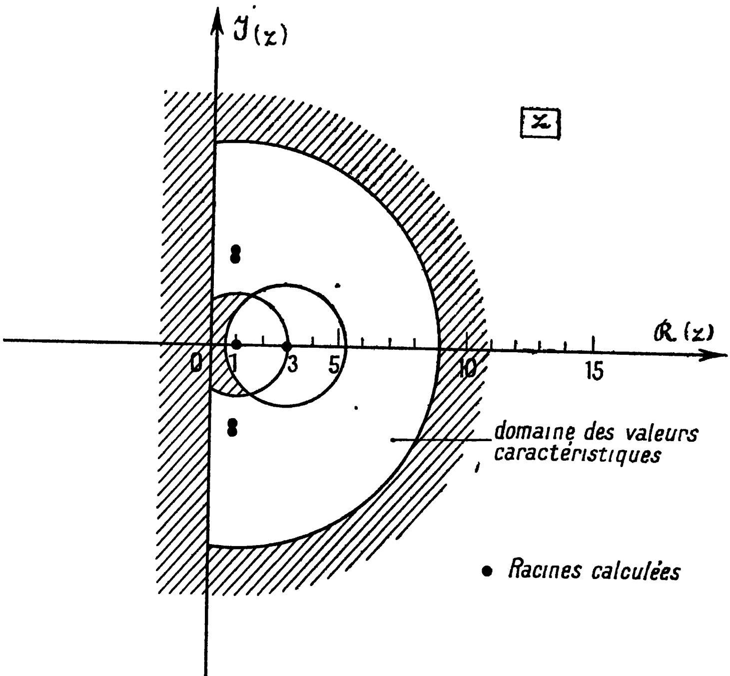

Fig. 2

caractéristiques se trouvent à l'intérieur du cercle

$$|1 - z| = 8.$$

Les conditions de M. Müller impliquent que ces mêmes valeurs caractéristiques se trouvent, soit dans les circonférences

$$|1 - x| = 0,5, \qquad |3 - x| = 2,5,$$

c'est-à-dire, en fait, dans le cercle de centre (3,0) et de rayon 2,5, soit à *l'extérieur* des circonférences

$$|1-x|=2, \qquad |1-x|=4, \qquad |1-x|=6, \qquad |1-x|=2,$$

c'est-à-dire, en fait, à l'extérieur de la circonférence de centre $(1,0)$ et de rayon 2.

La conjonction de ces divers domaines donne la figure 2, où les zones hachurées sont celles où ne peuvent se trouver les valeurs caractéristiques; notons que leurs valeurs sont 1, 3, $1 \pm i\sqrt{12}$, $1 \pm i\sqrt{11,5}$.

CHAPITRE III.

Quelques applications d'un théorème de M. Ostrowski.

I. — Théorèmes de M. Ostrowski.

Au cours de recherches sur l'intégration des équations différentielles, M. Ostrowski a établi deux propositions qui conduisent à des résultats pratiques importants [13].

1. *Étant donné une matrice carrée régulière d'ordre n, $A=(a_{\mu\nu})$, si l'on ajoute aux $a_{\mu\nu}$ de petites quantités $\varepsilon_{\mu\nu}$ formant une matrice* E, *une condition suffisante pour que la matrice $A'=A+E$ soit régulière est que*

$$\max|\varepsilon_{\mu\nu}| < \frac{1}{\sum\limits_{\mu,\nu}|\alpha_{\mu\nu}|} \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots,n), \tag{1}$$

$\lambda(A)$

les $\alpha_{\mu\nu}$ étant les éléments de la matrice inverse A^{-1} de A.

Considérons la matrice $A'=A+E=(a_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu})$ et posons $\max|\varepsilon_{\mu\nu}|=\varepsilon$; il s'agit de trouver une borne $d>0$ de ε telle que si $\varepsilon<d$, $A+E$ soit régulière.

Posons $\text{dét}(A)=A_0$, $\text{dét}(A')=A'_0$; en développant A'_0 en fonction des $\varepsilon_{\mu\nu}$ et en négligeant les termes d'ordre supérieur à l'unité, on obtient

$$A_0+\sum_{\mu,\nu}\varepsilon_{\mu\nu}A_{\mu\nu} \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots,n), \tag{2}$$

où les $A_{\mu\nu}$ sont les mineurs de A_0.

Or

$$\left| A_0 + \sum_{\mu, \nu} \varepsilon_{\mu\nu} A_{\mu\nu} \right| \geqq | A_0 | - \varepsilon \sum_{\mu, \nu} | A_{\mu\nu} |,$$

donc si

$$\varepsilon \sum_{\mu, \nu} | A_{\mu\nu} | < | A_0 |,$$

l'expression (2) est différente de zéro.

Montrons que cette condition est suffisante pour que le déterminant complet A'_0 soit différent de zéro, c'est-à-dire qu'en désignant par $\alpha_{\mu\nu}$ les éléments de A^{-1}, on peut poser

$$(3) \qquad d = \frac{1}{\sum_{\mu, \nu} | \alpha_{\mu\nu} |} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

La démonstration résulte immédiatement du théorème de M. Hadamard; il suffit de montrer que le déterminant de la matrice

$$A^{-1} [A + E] = I + A^{-1} E,$$

où I est la matrice-unité est différent de zéro.

D'après le théorème précité, il suffit que les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\mu i} \varepsilon_{i\nu} \right| \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

soient inférieures à l'unité.

Or, si $| \varepsilon_{\mu\nu} | < d$, on a évidemment

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\mu i} \varepsilon_{i\nu} \right| < d \sum_{\mu, \nu} | \alpha_{\mu\nu} | < 1.$$

Le théorème est ainsi établi.

Ce théorème de M. Ostrowski permet de montrer facilement qu'une limite supérieure de modules des valeurs caractéristiques d'une matrice d'ordre n est nM, M étant le module maximum de ses éléments, limite donnée par Hirsch [6]; ce résultat se déduit d'ailleurs des considérations générales du chapitre II (§ I).

Soit, en effet, la matrice $A = (a_{ij})$ d'ordre n; son équation caractéristique s'écrit

$$\| a_{ij} - x\,\delta_{ij} \| = 0,$$

et, en posant $x = \frac{1}{z}$, elle devient

$$\| a_{ij} z - \delta_{ij} \| = 0.$$

Soit alors la matrice-unité d'ordre n, $I_n = (\delta_{ij})$, la limite de M. Ostrowski s'écrit pour cette dernière $d = \frac{1}{n}$ et il est clair que tant que

$$| a_{ij} | . | z | < \frac{1}{n},$$

la dernière équation ne pourra être vérifiée.

Une limite *inférieure* des racines en z de cette équation s'écrit donc

$$\frac{1}{nM} \qquad (M = \max | a_{ij} |)$$

et, par suite, en revenant à la variable x, une limite *supérieure* des modules des valeurs caractéristiques de A est nM.

2. *Étant donné la matrice carrée régulière* $A = (a_{\mu\nu})$, *d'ordre* n, *si l'on ajoute aux* $a_{\mu\nu}$ *de petites quantités* $\varepsilon_{\mu\nu}$ *formant une matrice* E, *une condition suffisante pour que la matrice* $A' = A + E$ *soit régulière est que*

$$\sum_{\mu,\nu} | \varepsilon_{\mu\nu} |^2 < \frac{1}{\sum_{\mu,\nu} | \alpha_{\mu\nu} |^2} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

les $\alpha_{\mu\nu}$ *étant les éléments de* A^{-1}.

La démonstration est analogue à la précédente.

II. — Applications.

Nous nous bornons à indiquer les applications qui nous ont conduit à utiliser le premier théorème de M. Ostrowski; le second pourrait d'ailleurs être utilisé pour traiter des questions analogues.

1. Formation de matrices définies positives. — Le premier théorème de M. Ostrowski va nous permettre de préciser l'assertion faite au premier chapitre à propos de la stabilité de fonctionnement des machines mathématiques, qu'étant donné une matrice symétrique H à éléments réels, définie positive, la matrice symétrique H′ obtenue en diminuant de petites quantités réelles les éléments de la diagonale principale de H, était également positive.

Nous allons voir que cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une propriété plus générale, qui vaut d'ailleurs pour toute matrice définie positive symétrique à éléments réels, qu'elle soit du type H ou non, en donnant une limite supérieure des modules de quantités réelles dont on peut faire varier ses éléments pour qu'elle demeure définie positive.

Soit, en effet, une matrice symétrique A, d'ordre n, définie positive : la chaîne de ses mineurs principaux est formée par des matrices définies positives.

Dans ces conditions, supposons que l'on ait calculé les limites d de M. Ostrowski afférentes à chacune des matrices de la chaîne et à la matrice A elle-même; en faisant varier les éléments de A de quantités inférieures en valeur absolue à *la plus petite* de ces limites, il apparaît, par continuité, que, toutes les matrices envisagées demeurant régulières, les signes de leurs déterminants ne changent pas. La matrice variée symétrique est donc aussi définie positive ([3]).

Pour illustrer ces considérations, montrons sur un exemple pour lequel le calcul des limites de M. Ostrowski est particulièrement simple, comment on peut à partir d'une matrice définie positive, construire une famille de matrices également définies positives [11].

Considérons la matrice carrée d'ordre n à éléments réels positifs

$$M_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha \end{pmatrix}.$$

Si α est supérieur à l'unité, ce que nous supposerons dans ce qui

([3]) Depuis la rédaction de ce Mémoire, nous avons montré que l'on pouvait considérablement simplifier le calcul en utilisant le second théorème de M. Ostrowski (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 2390).

$H = \{1\}$ $\langle Hx|x\rangle = \sum y_i x_i = \sum_n (x_1 + \dots + x_n) x_n$

$= (x_1 + \dots + x_n)^2$

$M_\alpha = H + (\alpha - 1)$ $\mathrm{Fix}(H) = [1, \dots, n]$

va suivre, $M_n(\alpha)$ est définie positive : ses valeurs caractéristiques sont en effet $\alpha + n - 1$, qui est simple et $\alpha - 1$, qui est d'ordre $n - 1$.

Calculons la limite $d_n(\alpha)$ de M. Ostrowski afférente à cette matrice. Déterminons la matrice inverse de $M_n(\alpha)$; pour l'obtenir, le plus simple est de résoudre le système en x_i

$$\alpha x_i + \sum_{j \neq i} x_j = y_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

que l'on peut écrire

$$(\alpha - 1) x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Posons $\sum_1^n x_j = S$ et additionnons les équations (5); nous obtenons immédiatement

$$S = \frac{\sum_1^n y_i}{n + \alpha - 1},$$

d'où

$$x_i = \frac{y_i}{\alpha - 1} - \frac{\sum_1^n y_i}{(\alpha - 1)(\alpha + n - 1)},$$

Les éléments diagonaux de la matrice inverse de $M_n(\alpha)$ ont ainsi pour expression

$$\frac{1}{\alpha - 1} \frac{\alpha + n - 2}{\alpha + n - 1}$$

et les éléments non diagonaux

$$-\frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha + n - 1)}.$$

La limite d_n relative à $M_n(\alpha)$ s'écrit donc

$$d_n = \frac{\alpha - 1}{n} \frac{\alpha + n - 1}{\alpha + 2n - 3}$$

et il est à remarquer que $d_n(\alpha)$ décroît avec $\frac{1}{n}$.

Si donc on fait varier les éléments de $\mathbf{M}_n(\alpha)$ de quantités, positives ou négatives, inférieures en valeur absolue à $d_n(\alpha)$, tous les mineurs principaux du déterminant de la matrice symétrique ainsi obtenue, comme son déterminant lui-même, demeureront positifs d'après la remarque qui précède et la matrice variée sera définie positive.

Par exemple, soit la matrice

$$\mathrm{M}_6(4)=\begin{pmatrix} 4 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & \dots & 4 \end{pmatrix},$$

il vient

$$d_6(4)=\frac{9}{26}\approx 0,346$$

et une famille de matrices symétriques définies positives peut être définie comme suit : ses éléments diagonaux principaux sont compris entre $4+0,346$ et $4-0,346$; les autres éléments entre $1+0,346$ et $1-0,346$.

2. A propos d'un problème de vibrations. — En théorie de vibration on est souvent amené à considérer l'équation

$$\| a_{ij}z+b_{ij} \| = 0 \qquad (i, j=1, 2, \dots, n), \tag{6}$$

le déterminant qui figure au premier membre étant *symétrique* et d'ordre n, les coefficients a_{ij} et b_{ij} étant réels. Sylvester [32] a établi que les racines de cette équation étaient réelles et que si, de plus, les matrices carrées (a_{ij}) et (b_{ij}) étaient définies positives, elles étaient toutes négatives.

Nous nous proposons, dans cette éventualité, de donner une méthode de calcul d'une limite supérieure de ces racines [22].

Considérons le déterminant d'ordre n

$$\| u_{ij}+b_{ij} \|, \tag{7}$$

les u_{ij} étant supposés petits.

En utilisant le premier théorème de M. Ostrowski, on sait trouver une limite supérieure d des modules des u_{ij}, telle que pour $|u_{ij}|<d$, le déterminant (7) ne puisse s'annuler et, par suite, demeure positif comme $\| b_{ij} \|$ auquel il se réduit quand tous les u_{ij} sont nuls.

Ayant ainsi déterminé d, il suffira de résoudre les $\frac{n(n+1)}{2}$ inégalités

$$|a_{ij}z| < d$$

pour en déduire une limite *inférieure* du module des racines de l'équation (6). En fait, en représentant par $|a_{ij}^m|$ le module maximum des éléments a_{ij}, cette limite inférieure est

$$|z_m| = \frac{d}{|a_{ij}^m|}$$

et comme toutes les racines sont réelles et négatives, elles sont bornées supérieurement par $-\frac{d}{|a_{ij}^m|}$.

Au chapitre IV, où nous étudions une équation qni généralise (6), nous donnerons d'autres méthodes de résolution de ce problème.

Pour préciser le résultat précédent donnons un exemple numérique simple.

Soit l'équation en z.

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} 3z+4 & z+1 & z+2 \\ z+1 & 3z+2 & z \\ z+2 & z & 3z+3 \end{vmatrix} = 0.$$

On a

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

ces matrices étant définies positives, d'après le corollaire du théorème de M. Hadamard; les racines de (8) sont donc réelles et négatives.

La matrice inverse de (b_{ij}) s'écrit

$$(b_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{4}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{8}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{4}{13} & \frac{2}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}$$

et il vient

$$d = \frac{13}{39}.$$

Comme $\| a_{ij}^m \| = 3$, une limite supérieure des racines de (8) est

$$-\frac{d}{|a_{ij}^m|} = -\frac{13}{3 \times 39} \approx -0,111.$$

Nous pouvons remarquer que le théorème de M. Ostrowski permet de résoudre un autre problème lié au précédent :

Considérons à nouveau l'équation (6)

$$(6) \qquad \| a_{ij} z + b_{ij} \| = 0$$

et supposons que ses racines soient toutes négatives, les matrices (a_{ij}) et (b_{ij}) étant définies positives.

Proposons-nous de déterminer une limite supérieure des valeurs absolues des petites variations réelles et symétriques $\eta_{ij} = \eta_{ji}$ et $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ que l'on peut faire subir aux coefficients a_{ij} et b_{ij} pour que l'équation ainsi obtenue ait encore toutes ses racines réelles et négatives.

Il suffit que les matrices $(a_{ij} + \eta_{ij})$ et $(b_{ij} + \mu_{ij})$ soient définies positives, c'est-à-dire que les chaînes des mineurs principaux de leurs déterminants respectifs ne comportent que des termes positifs.

Comme, par hypothèse, les chaînes des mineurs principaux de $\| a_{ij} \|$ et $\| b_{ij} \|$ ne comportent que des termes positifs, un raisonnement analogue à celui de la première application montre qu'il suffit de prendre les η_{ij} et les μ_{ij} respectivement inférieurs, en valeur absolue, à la plus petite des limites d de M. Ostrowski, calculées pour chaque terme de l'une et l'autre des chaînes de mineurs principaux de $\| a_{ij} \|$ et $\| b_{ij} \|$.

La connaissance des limites supérieures des $|\eta_{ij}|$ et $|\mu_{ij}|$ permet ainsi de préciser la mesure dans laquelle on pourra faire varier les paramètres physiques d'un système dont le comportement est régi initialement par l'équation (6) pour que la stabilité se conserve.

Montrons sur un exemple, la mise en œuvre de la méthode.

$$\begin{vmatrix} 2z+2 & z+1 & z+1 \\ z+1 & 3z+2 & z+1 \\ z+1 & z+1 & 2z+3 \end{vmatrix} 0.$$

On a

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et ces matrices sont définies positives.

La chaîne des mineurs principaux de (a_{ij}) est

$$2, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et les inverses des matrices s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

Les limites de M. Ostrowski relatives à (a_{ij}) sont donc

$$2, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{1}{3}$$

et il apparaît qu'il faut prendre $|\eta_{ij}| < \frac{1}{3}$.

La chaîne des mineurs principaux de (b_{ij}) s'écrit

$$2, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et les inverses des matrices sont

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Il vient pour les limites d

$$2, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}$$

et l'on doit prendre $|\mu_{ij}| < \frac{1}{3}$.

3. Détermination d'une limite supérieure des parties réelles des racines de l'équation aux fréquences propres d'un réseau électrique passif [22]. — Considérons un réseau électrique à n mailles indépendantes et représentons, comme nous l'avons indiqué, par l_{ij}, r_{ij}, s_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ les paramètres de ce dernier.

On sait que l'équation aux fréquences propres s'écrit

$$(9) \qquad \| l_{ij} z^2 + r_{ij} z + s_{ij} \| = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

le déterminant qui figure au premier membre étant symétrique et d'ordre n.

Nous avons indiqué que les matrices (l_{ij}), (r_{ij}) et (s_{ij}) étaient définies positives et l'on peut montrer que, dans ces conditions, les racines de (9) sont toutes à partie réelle négative.

Nous nous proposons de donner une méthode de calcul d'une limite supérieure des parties réelles de ces racines.

On pourrait songer à utiliser une méthode analogue à celle du paragraphe 2, mais elle ne nous conduirait à aucune limitation des parties réelles des racines complexes, aussi allons-nous opérer différemment.

Faisons le changement de variable

$$(10) \qquad z = u - a,$$

où a est *un nombre réel positif;* l'équation (9) devient

$$(11) \qquad \| l_{ij} u^2 + (r_{ij} - 2 l_{ij} a) u + l_{ij} a^2 - r_{ij} a + s_{ij} \| = 0.$$

S'il est possible de définir un intervalle $(0, a_m)$ de variation de a, tel que pour tout a de ce dernier les matrices $(r_{ij} - 2 l_{ij} a)$ et $(l_{ij} a^2 - r_{ij} a + s_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ soient définies positives, l'équation (11) aura toutes ses racines à partie réelle négative et puisque $z = -a + u$, les parties réelles des racines de l'équation (9) admettront $-a_m$ comme borne supérieure.

Tout revient à déterminer a_m.

A. *Méthode générale.* — Considérons la matrice $(r_{ij} - 2 l_{ij} a)$; en posant $-2 l_{ij} a = u_{ij}$, elle s'écrit $(r_{ij} + u_{ij})$ et pour qu'elle soit définie positive, il faut que la chaîne des mineurs principaux de $\| r_{ij} + u_{ij} \|$ soit à termes positifs.

Puisque la matrice (r_{ij}) est définie positive, on est ramené au problème du premier paragraphe : pour chaque mineur de la chaîne, on déterminera la limite d de M. Ostrowski; soit d_r la plus petite des limites ainsi obtenues, la matrice $(r_{ij}+u_{ij})$ répondra à la question si

$$|u_{ij}|<d_r$$

et l'on en déduira une première limite supérieure de a

$$a_r=\frac{d_r}{2\,|l_{ij}^m|},$$

$|l_{ij}^m|$ étant le module maximum des l_{ij}.

Passons maintenant à la matrice $(l_{ij}a^2-r_{ij}a+s_{ij})$ qui, en posant $l_{ij}a^2-r_{ij}a=v_{ij}$ s'écrit $(v_{ij}+s_{ij})$; il faut que les mineurs principaux de $\|v_{ij}+s_{ij}\|$ soient tous positifs; le théorème de M. Ostrowski permettra, comme plus haut, de déterminer une limite supérieure, soit d_s, des $|v_{ij}|$ pour qu'il en soit ainsi et, en résolvant les inégalités

$$|l_{ij}a^2-r_{ij}a+s_{ij}|<d_s \qquad (a>0),$$

on saura trouver un intervalle de variation de $a(0,\ a_s)$ tel que pour tout a y appartenant, la matrice $(l_{ij}a^2-r_{ij}a+s_{ij})$ soit définie positive.

La limite supérieure cherchée $-a_m$ *des parties réelles des racines de l'équation* (9) *sera égale au plus petit des nombres* a_r *et* a_s *changé de signe.*

Donnons un exemple simple pour préciser la marche du calcul.

Soit l'équation

$$(9')\qquad \begin{vmatrix} 4z^2+2z+2 & 2z^2+z+1 & z^2+z+1 \\ 2z^2+z+1 & 4z^2+3z+2 & z^2+z+1 \\ z^2+z+1 & z^2+z+1 & 3z^2+2z+3 \end{vmatrix}=0,$$

à laquelle correspondent les matrices définies positives

$$(l_{ij})=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\qquad (r_{ij})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\qquad (s_{ij})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La chaîne des mineurs principaux de $\|r_{ij}\|$ est

$$2,\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

elle est identique à celle de l'exemple précédent et il apparaît que la plus petite limite d'Ostrowski est $d_r = \frac{1}{3}$; comme $|\, l_{ij}^m \,| = 4$, il vient

$$a_r = \frac{1}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{24}.$$

La chaîne des mineurs principaux de $\|\, s_{ij} \,\|$ s'écrit

$$2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

et les inverses de matrices qui correspondent aux déterminants ont pour expressions

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Il leur correspond respectivement les limites d'Ostrowski $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$; nous aurons donc $a_s = \frac{1}{3}$.

Restent à résoudre les inégalités ($a > 0$)

$$|\, 4a^2 - 2a \,| < \frac{1}{3}, \qquad |\, 4a^2 - 3a \,| < \frac{1}{3}, \qquad |\, 3a^2 - 2a \,| < \frac{1}{3},$$

$$|\, 2a^2 - a \,| < \frac{1}{3}, \qquad |\, a^2 - a \,| < \frac{1}{3}$$

et seules les hypothèses respectives

$$a < \frac{1}{2}, \qquad a < \frac{3}{2}, \qquad a < \frac{2}{3}, \qquad a < \frac{1}{2}, \qquad a < 1$$

présentent un intérêt; elles conduisent aux inégalités

$$4a^2 - 2a + \frac{1}{3} > 0, \qquad 4a^2 - 3a + \frac{1}{3} > 0,$$

$$3a^2 - 2a + \frac{1}{3} > 0,$$

$$2a^2 - a + \frac{1}{3} > 0, \qquad a^2 - a + \frac{1}{3} > 0.$$

Elles sont toujours vérifiées, sauf la seconde qui est satisfaite pour

$$0 < a < \frac{1}{8}\left[3 - \sqrt{9 - \frac{16}{3}}\right] \approx 0{,}136.$$

Ainsi $a_s = 0{,}136$; cette limite est supérieure à $a_r = \frac{1}{24}$; une limite supérieure des parties réelles des racines de l'équation (9') est donc

$$-a_m = -a_r = -\frac{1}{24}.$$

B. *Méthode particulière.* — Dans certaines circonstances que nous allons préciser, il existe une méthode plus simple pour déterminer la limite cherchée.

Nous avons indiqué qu'il existe des réseaux qui, par un choix convenable des mailles indépendantes, sont tels que les éléments des matrices (l_{ij}), (r_{ij}) et (s_{ij}) satisfont non seulement aux conditions

$$(12) \qquad l_{ii} > 0, \qquad r_{ii} > 0, \qquad s_{ii} > 0,$$

mais aussi aux inégalités de M. Hadamard,

$$(13) \qquad l_{ii} > \sum_{j \neq i} |l_{ij}|, \qquad r_{ii} > \sum_{j \neq i} |r_{ij}|, \qquad s_{ii} > \sum_{j \neq i} |s_{ij}|$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

les conditions (12) et (13) étant, d'autre part, suffisantes pour que les matrices (l_{ij}), (r_{ij}) et (s_{ij}) soient définies positives.

Pour définir l'intervalle $(0, a_m)$ de variation de $a (a > 0)$ tel que pour tout a de ce dernier, les matrices $(r_{ij} - 2 l_{ij} a)$ et $(l_{ij} a^2 - r_{ij} a + s_{ij})$ soient définies positives, il suffira de résoudre les inégalités

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} r_{ii} - 2 l_{ii} a &> \sum_{j \neq i} |r_{ij} - 2 l_{ij} a|, \\ l_{ii} a^2 - r_{ii} a + s_{ii} &> \sum_{j \neq i} |l_{ij} a^2 - r_{ij} a + s_{ij}| \end{aligned} \right.$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

En remarquant que

$$|r_{ij} - 2 l_{ij} a| < |r_{ij}| + 2a |l_{ij}|,$$
$$|l_{ij} a^2 - r_{ij} a + s_{ij}| < |l_{ij}| a^2 + |r_{ij}| a + |s_{ij}|,$$

le problème se ramène à la résolution des suivantes :

$$(15)\quad \begin{cases} r_{ii} - 2 l_{ii} a > \sum_{j \neq i} |r_{ij}| + 2a \sum_{j \neq i}' |l_{ij}|, \\ l_{ii} a^2 - r_{ii} a + s_{ii} > a^2 \sum_{j \neq i}' |l_{ij}| + a \sum_{j \neq i}' |r_{ij}| + \sum_{j \neq i}' |s_{ij}|, \end{cases}$$

qui impliquent (14) et qui peuvent admettre des solutions en raison des relations (13).

Le plus petit intervalle de variation de $a(0, a_m)$ qui permet, pour tout a y appartenant, de satisfaire aux inégalités (15) est l'intervalle cherché.

Donnons un exemple très simple; considérons l'équation

$$(16)\quad \begin{vmatrix} 4z^2 + 2z + 2 & z^2 + z + 1 \\ z^2 + z + 1 & 4z^2 + 2z + 2 \end{vmatrix} = 0.$$

On a

$$(l_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (s_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et les premières inégalités (15) s'écrivent

$$2 - 8a > 1 + 2a,$$

qui demandent

$$0 < a < \frac{1}{10}.$$

Les secondes donnent

$$4a^2 - 2a + 2 > a^2 + a + 1,$$

soit

$$3a^2 - 3a + 1 > 0,$$

qui est toujours vérifiée.

On a donc $a_m = 0,1$ et les parties réelles des racines de l'équation étudiée admettent pour borne supérieure

$$-a_m = -0,1.$$

Il est facile de calculer les parties réelles des racines de (16); leurs valeurs sont $-\frac{3}{10}$ et $-\frac{1}{6}$; la limite trouvée est assez satisfaisante.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DES ZÉROS D'UN DÉTERMINANT DONT LES ÉLÉMENTS SONT DES POLYNOMES.

Dans divers problèmes de Mécanique quantique et de la théorie des petits mouvements, on est amené à considérer des équations de la forme

$$(1) \qquad \| a_{jk}^{(0)} z^m + a_{jk}^{(1)} z^{m-1} + \ldots + a_{jk}^{(m)} \| = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

le déterminant étant d'ordre n et ses éléments constitués par des polynomes en z de degré m.

Nous nous proposons d'indiquer quelques propriétés des racines de ce type d'équation [23] en donnant, en particulier, un procédé permettant d'utiliser les résultats qui ont été établis précédemment.

1. Conditions suffisantes pour que les racines de l'équation (1) se trouvent à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle-unité. — Supposons que l'équation (1) soit satisfaite pour une certaine valeur de z, alors le système d'équations linéaires et homogènes en $x_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{jk}^{(0)} z^m + \ldots + a_{jk}^{(m)}) x_k^{(1)} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

admet un ensemble de solutions non nulles en $x_j^{(1)}$.

En posant

$$z^p x_k^{(1)} = X_k^{(p+1)} \qquad (p = 0, 1, \ldots, m);$$

ce système est équivalent au suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^{(0)} X_k^{(m+1)} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^{(1)} X_k^{(m)} + \ldots + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^{(m)} X_k^{(1)} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\left.\begin{array}{rr} -X_k^{(m+1)} + z X_k^{(m)} & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -X_k^{(2)} + z X_k^{(1)} & = 0 \end{array}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

qui admet un ensemble de solutions non nulles en $X_k^{(1)}, \ldots, X_k^{(m+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} (a_{jk}^{(0)}) & (a_{jk}^{(1)}) & \dots & (a_{jk}^{(m-1)}) & (a_{jk}^{(m)}) \\ I_n & zI_n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & zI_n \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

la notation $(a_{jk}^{(\lambda)})(\lambda = 1, 2, \dots, m)$ représentant la matrice formée avec les coefficients $a_{jk}^{(\lambda)}$, I_n la matrice-unité d'ordre n et zéro la matrice nulle.

D'après le théorème de M. Hadamard, ce déterminant ne peut s'annuler si

$$\left\{\begin{array}{l} |z| > 1, \\ |a_{jj}^{(0)}| > \sum_{k \neq j} |a_{jk}^{(0)}| + \sum_k |a_{jk}^{(1)}| + \dots + \sum_k |a_{jk}^{(m)}| \\ (j, k = 1, 2, \dots, n). \end{array}\right. \tag{3}$$

Ainsi, des conditions suffisantes pour que l'équation (1) ait ses racines à l'intérieur du cercle-unité sont

$$\left\{\begin{array}{l} |a_{jj}^{(0)}| > \sum_{k \neq j} |a_{jk}^{(0)}| + \sum_k |a_{jk}^{(1)}| + \dots + \sum_k |a_{jk}^{(m)}| \\ (j, k = 1, 2, \dots, n). \end{array}\right. \tag{4}$$

On en déduirait immédiatement des conditions suffisantes pour que les racines de l'équation (1) soient inférieures, en module, à un nombre donné M positif.

La même méthode permet de donner également des conditions suffisantes pour que l'équation (1) ait ses racines à l'extérieur du cercle-unité; elles s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} |a_{jj}^{(m)}| > \sum_{j \neq k} |a_{jk}^{(m)}| + \sum_k |a_{jk}^{(m-1)}| + \dots + \sum_k |a_{jk}^{(0)}| \\ (j, k = 1, 2, \dots, n). \end{array}\right. \tag{5}$$

et l'on peut en déduire immédiatement des conditions suffisantes pour que les racines de l'équation (1) soient supérieures, en module, à un nombre donné $m > 0$.

Les quantités m et M étant données ($0 < m < M$), on pourra de plus, compte tenu des résultats précédents, caractériser les équations (1) dont les racines sont en module comprises entre m et M.

2. Domaine du plan complexe où se trouvent les racines de l'équation (1). — Supposons que l'on veuille déterminer le domaine du plan complexe de la variable z où se trouvent les racines de l'équation (1); nous allons, à cet effet, définir une matrice dont les valeurs caractéristiques sont des fonctions simples de ces racines, ce qui nous permettra d'utiliser les résultats des chapitres précédents.

Pour y parvenir nous utiliserons un artifice dû à M. H. Wayland [30], légèrement modifié.

Si l'équation (1) est satisfaite pour une certaine valeur de z, le système différentiel en $x_k (k = 1, 2, \ldots, n)$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{jk}^{(0)} D^m + a_{jk}^{(1)} D^{m-1} + \ldots + a_{jk}^{(m)}) x_k = 0, \tag{6}$$

où l'on a posé $D = \dfrac{d}{dt}$, admet un ensemble de solutions non nulles.

Représentons, pour simplifier l'écriture, par A_μ la matrice carrée d'ordre n $(a_{jk}^{(\mu)}) (\mu = 0, 1, \ldots, m)$ et par x la matrice à une colonne dont les éléments sont les $x_k (k = 1, 2, \ldots, n)$; le système (6) peut alors s'écrire

$$(A_0 D^m + A_1 D^{m-1} + \ldots + A_m) x = 0. \tag{7}$$

Supposons la matrice A_0 régulière, A_0^{-1} existe et, en multipliant à gauche le système (7) par A_0^{-1}, il vient

$$(I_n D^m + A_0^{-1} A D^{m-1} + \ldots + A_0^{-1} A_m) x = 0, \tag{8}$$

I_n étant la matrice-unité d'ordre n.

Introduisons maintenant les nouvelles variables

$$x_k^{(0)} = x_k, \qquad x_k^{(1)} = D x_k^{(0)}, \qquad x_k^{(2)} = D x_k^{(1)} = D^2 x_k^{(0)}, \qquad \ldots,$$
$$x_k^{(n)} = D x_k^{(n-1)} = \ldots D^n x_k^{(0)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système (8) est équivalent au suivant :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} - I_n D x^{(n-1)} + A_0^{-1} A x^{(n-1)} + A_0^{-1} A_2 x^{(n-2)} + \ldots + A_0^{-1} A_m x^{(0)} = 0, \\ \quad - x^{(n-1)} I_n + D x^{(n-2)} I_n \hfill = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hfill - x^{(1)} I_n + D x^{(0)} I_n = 0, \end{array} \right.$$

où $x^{(\mu)}$ représente la matrice à une colonne dont les éléments sont $x_1^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}$.

Posons $x^{(\mu)} = q^{(\mu)}e^{zt}$, où $q^{(\mu)}$ est une matrice unicolonne d'éléments $q_1^{(\mu)}, q_2^{(\mu)}, \ldots, q_n^{(\mu)}$; le système (9) s'écrit

$$(10) \quad \begin{cases} (A_0^{-1}A_1 + I_n z)q^{(n-1)} + A_0^{-1}A_2 q^{(n-2)} + \ldots + A_0^{-1}A_m q^{(0)} = 0, \\ \qquad - q^{(n-1)}I_n + z q^{(n-2)}I_n = 0, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad - q^{(1)}I_n + z q^{(0)}I_n = 0. \end{cases}$$

Comme (10) admet un ensemble non nul de solutions en $q^{(\mu)}$, on a

$$(11) \quad \begin{vmatrix} A_0^{-1}A_1 + I_n z & A_0^{-1}A_2 & \ldots & A_0^{-1}A_{m-1} & A_0^{-1}A_m \\ -I_n & zI_n & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -I_n & zI_n \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines de (1) *sont donc les valeurs caractéristiques, changées de signe, de la matrice*

$$(12) \quad \begin{pmatrix} A_0^{-1}A_1 & A_0^{-1}A_2 & \ldots & A_0^{-1}A_{m-1} & A_0^{-1}A_m \\ -I_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les méthodes données au chapitre II, on pourra donc déterminer le domaine des racines de l'équation (1).

Ainsi, en représentant par $\alpha_{jk}^{(\mu)}$ les éléments de la matrice $A_0^{-1}A_\mu (\mu = 1, 2, \ldots, m;\ j, k = 1, 2, \ldots, n)$, il apparaît que les racines de (1) peuvent se trouver dans le domaine limité par le cercle-unité et les n circonférences d'équations

$$(13) \quad \begin{cases} |z + \alpha_{jj}^{(1)}| = \displaystyle\sum_{k \neq j} |\alpha_{jk}^{(1)}| + \sum_k |\alpha_{jk}^{(2)}| + \ldots + \sum_k |\alpha_{jk}^{(m)}| \\ \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Notons de plus que ces considérations permettent de donner une limite supérieure M des modules des racines de cette équation; on obtient, par exemple,

$$(14) \quad M = \max \left\{ 1, \sum_k |\alpha_{jk}^{(1)}| + \ldots + \sum_k |\alpha_{jk}^{(m)}| \right\} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

et l'on en déduit que les racines de l'équation (1) se trouvent toutes à l'intérieur du cercle-unité si l'on a

$$\max \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}^{(\mu)}| < 1 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Nous obtenons ainsi une nouvelle condition, cependant plus difficile à expliciter que celles trouvées plus haut, pour que toutes les racines de (1) se trouvent à l'intérieur du cercle-unité.

A titre d'exemple, considérons l'équation, à coefficients réels,

$$\begin{vmatrix} z^3+z^2+z+1 & z^2+z & z+1 \\ z^2+z & z^3-2z^2+1 & z^2+1 \\ z+1 & z^2+1 & z^3+4z^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On a

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_0 étant la matrice-unité, le calcul est très simplifié et l'équation (11) prend la forme

$$\begin{vmatrix} 1+z & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2+z & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4+z & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix} = 0.$$

Le domaine des racines est constitué par le cercle-unité et les trois circonférences

$$|1+z| = 6, \qquad |-2+z| = 5, \qquad |4+z| = 4.$$

La mise sous forme (11) de l'équation (1) permet parfois, ainsi que nous allons le voir, de préciser plus nettement encore la région du domaine que nous venons de définir par les relations (13) où se trouvent certaines racines de (1). Nous avons vu, en effet, que M. Brauer a montré qu'étant donné une matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{ij})$, telle que pour une certaine valeur de $i (1 \leqq i \leqq n)$ et pour tout k différent de $i (1 \leqq k \leqq n)$,

$$|a_{ii} - a_{kk}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| + \sum_{l \neq k} |a_{kl}|, \tag{16}$$

l'équation $\|A - z I_n\| = 0$ a une racine et une seule à l'intérieur de la circonférence.

$$|a_{ii} - z| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,$$

cette valeur étant réelle si, en particulier, les éléments a_{ij} de A le sont.

Si donc la relation (16) est satisfaite pour certains éléments de la matrice (12), on saura préciser la position de certaines racines de (1) dans le domaine précédemment défini et, de ce fait, avoir des indications sur la situation des autres racines et même sur leur nature, comme va le montrer l'exemple suivant :

Soit l'équation à coefficients réels

$$\begin{vmatrix} z^2 + 12z & z + 1 \\ z + 1 & z^2 + 5z + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On a

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'équation (11) s'écrit

$$\begin{vmatrix} 12 + z & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 + z & 1 & 1 \\ -1 & 0 & z & 0 \\ 1 & -1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0.$$

Pour la première ligne, on a

$$|12 - 5| > 5, \qquad |12 - 0| > 3, \qquad |12 - 0| > 3$$

et pour la seconde

$$|5 - 12| > 5, \qquad |5 - 0| > 4, \qquad |5 - 0| > 4.$$

Il en résulte que l'équation susvisée aura nécessairement une racine réelle et une seule dans chacun des deux cercles C_1 et C_2 de centres $(-12,0)$, $(-5,0)$ et de rayons respectifs 2 et 3; les deux autres racines se trouveront nécessairement dans le cercle-unité.

Comme le produit des racines est égal au déterminant de la matrice A_2 de valeur -1, le produit des racines situées dans le cercle-unité doit être négatif; elles ne peuvent donc qu'être réelles et de signes contraires.

3. **Conséquence des résultats précédents.** — Le procédé de calcul que nous venons d'utiliser permet de donner une solution au problème suivant :

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (a_{ij} + \varepsilon_{ij})$ deux matrices carrées *symétriques* d'ordre n, définies positives, à éléments réels, les quantités $|\varepsilon_{ij}|$ étant petites comparées aux $|a_{ij}|$; en représentant par χ_j et $\eta_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ leurs valeurs caractéristiques respectives, trouver une limite supérieure des rapports $\mu_j = \frac{\eta_j}{\chi_j} (j = 1, 2, \ldots, n)$ [24].

On sait [33] que les grandeurs μ_j sont les racines de l'équation

[illegible] An. Dyn.

$$\| a_{ii}\mu - (a_{ij} + \varepsilon_{ij}) \| = 0.$$

Le problème revient donc à trouver une limite supérieure de ces racines qui sont d'ailleurs réelles et de mêmes signes.

Les considérations du paragraphe 2 montrent que l'équation susvisée est équivalente à la suivante :

$$\| A^{-1} B + I_n \mu \| = 0,$$

I_n étant la matrice-unité.

D'après la relation (14), une limite supérieure des quantités μ_j sera donc la valeur maximum des sommes des modules des éléments de la matrice $A^{-1}B$, sommes effectuées pour chaque ligne.

En représentant par $\alpha_{ij} (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ les éléments de cette matrice, on pourra écrire

$$\mu < 1 + n\varepsilon \max \sum_j |\alpha_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$\varepsilon = \max |\varepsilon_{ij}|.$$

4. Conditions pour que les racines réelles de l'équation (1) soient négatives. — Supposons que le déterminant qui constitue le premier membre de l'équation (1) soit *symétrique* et les coefficients $a_{ij}^{(\lambda)}$ *réels*. Nous allons montrer que si les matrices $(a_{jk}^{(\lambda)})(\lambda = 1, 2, \ldots, m;$ $j, k = 1, 2, \ldots, n)$ sont définies positives, l'équation (1) a toutes ses racines réelles, s'il en existe, négatives.

Rappelons que dans le cas où $m = 2$, ces conditions sont suffisantes pour que les racines de l'équation (1) soient toutes, à partie réelle négative.

L'équation (1) signifie que le système d'équations linéaires et homogènes en $x_k (k = 1, 2, \ldots, n)$

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_{jk}^{(0)} z^m + a_{jk}^{(1)} z^{m-1} + \ldots + a_{jk}^{(m)}) x_k = 0 \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right.$$

admet un ensemble de solutions non nulles en x_k quand z est égal à une des racines de (1).

Considérons une racine *réelle* de (1) à laquelle correspond un ensemble de solutions $x_k = u_k$, nécessairement réelles ; introduisons les formes quadratiques T_λ associées aux matrices $(a_{jk}^{(\lambda)})$, le système (17) peut s'écrire

$$(18) \qquad z^m \frac{\partial T_0}{\partial u_k} + z^{m-1} \frac{\partial T_1}{\partial u_k} + \ldots + \frac{\partial T_m}{\partial u_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où, compte tenu des relations d'Euler,

$$(19) \qquad z^m T_0 + z^{m-1} T_1 + \ldots + T_m = 0.$$

Puisque les formes T_λ sont définies positives, les coefficients de (19) sont tous positifs et les racines réelles nécessairement négatives.

BIBLIOGRAPHIE.

1. Brauer (A.). — *Duke math. Journ.*, t. 13, 1946, p. 387.
2. Brauer (A.). — *Duke math. Journ.*, t. 14, 1947, p. 21.
3. Bourlet (C.). — *Ann. de Math.*, t. 16, 1897, p. 369.
4. Clark (M.). — *Bull. am. math. soc.*, t. 47, 1941, p. 769.

5. Hadamard (J.). — *Leçons sur la propagation des ondes* (Herman, Paris, 1903, p. 13).
6. Hirch (A.). — *Acta mathematica*, t. 25, 1902, p. 367.
7. Koch (Von). — *Jahr. Deutsch. Math. Vereinigung*, t. 22, 1913, p. 285.
8. Korn. — *P. I. R. E.*, t. 9, 1949, p. 1000.
9. Lévy (L.). — *C. R. Acad. Sc.*, t. 93, 1881, p. 236.
10. Minkowski (H.). — *Œuvres complètes*, t. I, p. 316.
11. Montel (P.). — *Ann. scient. Éc. Norm. sup.*, t. 40, 1923, p. 1.
12. Müller (M.). — *Math. Zeits.*, t. 51, 1948, p. 291.
13. Ostrowski (A.). — *Bull. Sc. math.*, t. 61, 1937, p. 19.
14. Parodi (M.). — *C. R. Acad. Sc.*, t. 223, 1946, p. 236.
15. Parodi (M.). — *C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 807.
16. Parodi (M.). — *Introduction à l'étude des réseaux électriques* (S.E.D.E.S., Paris, 1948).
17. Parodi (M.). — *Bull. Sc. math.*, t. 73, 1949, p. 192.
18. Parodi (M.). — *J. Phys. Rad.*, t. 10, 1949, p. 200.
19. Parodi (M.). — *C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 97 et *Ann. soc. scient. Bruxelles*, t. 15, 1951, p. 15.
20. Parodi (M.). — *Ann. soc. scient. Bruxelles*, t. 64, 1950, p. 22.
21. Parodi (M.). — *Ann. soc. scient. Bruxelles*, t. 63, 1949, p. 127.
22. Parodi (M.). — *J. Phys. Rad.*, t. 10, 1949, p. 348.
23. Parodi (M.). — *Bull. Sc. math.*, t. 74, 1950, p. 121.
24. Parodi (M.). — *C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 705.
25. Perron (O.). — *Algebra*, 2^e^ éd., Berlin, 1933, p. 36.
26. Perron (O.). — *J. de Crelle*, t. 132, 1906, p. 288.
27. Raymond (F. H.). — *Ann. Télécomm.*, t. 5, 1950, p. 1.
28. Speckt (Von). — *Jahr. Deutsch. Math. Vereinigung*, t. 48, 1938, p. 142.
29. Taussky (O.). — *Duke math. Journ.*, t. 15, 1948, p. 1043.
30. Wayland (A.). — *Quart. appl. Math.*, t. 2, 1945, p. 277.
31. Weber (H.). — *Traité d'algèbre supérieure*, Paris, 1898, p. 379.
32. Whittaker (E. T.). — *Analytical Dynamics*, 2e éd., Cambridge, 1917, p. 177.
33. Whittaker (E. F.). — *Analytical Dynamics*, 2e éd., Cambridge, 1917, p. 181.

Cette liste, très limitative, ne contient que les Mémoires dont les résultats ont été utilisés dans ce travail.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Critères de régularité des matrices carrées.

CHAPITRE II.

Localisation des valeurs caractéristiques d'une matrice carrée dans le plan complexe.

CHAPITRE III.

Quelques applications d'un théorème de M. Ostrowski.

CHAPITRE IV.

139850 Paris. — Imprimerie Gauthier Villars, 55, quai des Grands Augustins.