

PAUL LÉVY

**Analyse fonctionnelle, fonctions de lignes et
équations aux dérivées fonctionnelles**

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 5 (1951)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1951__5__1_0

© Gauthier-Villars, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BSM 3432

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIE SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COIMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

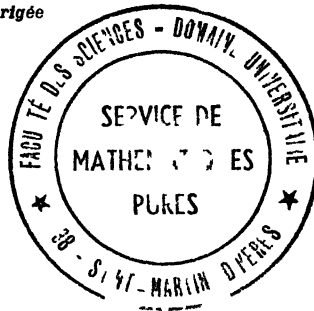
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE V

Analyse fonctionnelle

Par M PAUL LEVY

Deuxième édition revue et corrigée



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1951

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule.

Les numéros figurant entre crochets dans le courant du texte renvoient à cette Bibliographie.

RENSEIGNEMENTS

SUR LA DEUXIÈME ÉDITION

L'expression « analyse fonctionnelle », qui constituait le titre de la première édition, étant de plus en plus employée pour désigner l'analyse générale, ou calcul fonctionnel abstrait, nous l'avons fait suivre d'un sous-titre qui précise la nature des problèmes concrets traités dans ce fascicule.

La première édition se terminait par un paragraphe consacré à l'espace différentiel de N. Wiener; nous l'avons supprimé, les travaux parus depuis 1925 sur cette question nous paraissant mériter d'être l'objet d'un fascicule spécial.

Les n^{os} 2, 6, 20 et 21 de la présente édition sont en grande partie nouveaux. Les autres proviennent de la première édition avec des changements de détail.

La Bibliographie est celle de la première édition, dont la numérotation a été conservée (n^{os} 1 à 42), suivie de l'indication de quelques travaux omis dans la première édition, ou plus récents (n^{os} 43 à 49).

ANALYSE FONCTIONNELLE

FONCTIONS DE LIGNES

ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES

Par M. Paul LÉVY.



CHAPITRE I.

NOTIONS FONDAMENTALES SUR LES FONCTIONNELLES ET LEURS VARIATIONS.

1. **Notions générales.** — Le *calcul fonctionnel*, dans le sens le plus large, comprend l'étude des fonctions qui dépendent d'éléments de nature quelconque. Le *calcul fonctionnel abstrait* comprend les résultats que l'on peut obtenir sans préciser la nature de ces éléments, en ne faisant à leur sujet que des hypothèses très générales; il a été étudié notamment par M. Fréchet [7, 13, 14, 15], E. H. Moore [49], P. J. Daniell [5], N. Wiener [39, 41].

L'application concrète la plus importante, après l'étude des fonctions d'une ou plusieurs variables, et à laquelle est consacré le présent fascicule, est l'étude des *fonctions de lignes ou de surfaces*, c'est-à-dire, au point de vue analytique, des quantités qui dépendent de la donnée d'une ou plusieurs fonctions ordinaires; une telle quantité est une *fonctionnelle*; les fonctions dont elle dépend sont ses *arguments*. Pour fixer les idées, nous ne considérerons, sauf avis contraire, que des fonctions réelles $x(t)$ d'une seule variable t comprise entre 0 et 1, et n'étudierons que les fonctionnelles

dépendant d'une telle fonction $x(t)$. Ces fonctionnelles seront représentées par des notations telles que $U[x(t)]$ ou plus simplement $U[x]$. La notation $U[x, y | \lambda, \mu]$ désignera une fonctionnelle dépendant de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ et de deux paramètres λ et μ .

L'analyse fonctionnelle, qui a pour objet l'étude de ces fonctionnelles, apparaît naturellement comme une généralisation de la théorie des fonctions ordinaires, et s'en déduit par un procédé de passage à la limite bien connu dans un cas particulier, celui qui consiste à définir une intégrale définie comme limite d'une somme. D'une manière générale, si nous divisons l'intervalle $(0, 1)$ dans lequel t varie en n intervalles partiels égaux, et si nous représentons d'une manière approchée une fonction $x(t)$ par une fonction $X_n(t)$ constante dans chacun de ces intervalles, une fonctionnelle $u[x]$ se réduit pour $X_n(t)$ à une fonction $u_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables $[x_i$ désignant la valeur constante de $X_n(t)$ dans l'intervalle $(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})]$, et peut dans des cas étendus être définie comme limite de cette fonction pour n infini. Ce procédé, s'il ne suffit pas toujours à donner des démonstrations rigoureuses, constitue une remarquable méthode d'induction pour obtenir les résultats fondamentaux de l'analyse fonctionnelle. Volterra, qui l'a utilisé systématiquement, l'a appelé *passage du fini à l'infini*; nous l'appellerons aussi, d'une manière plus précise, *passage du discontinu au continu*, pour le distinguer d'une autre méthode d'induction, que nous indiquerons plus loin.

2. Espaces fonctionnels en général. L'espace des fonctions de carrés sommables. — Un *espace fonctionnel* E est un ensemble de fonctions; chacune de ces fonctions $x(t)$ est un *élément* de cet espace; nous dirons aussi que c'est un *point* $[x]$ de E . Une fonctionnelle $U[x(t)]$ définie dans E devient une fonction $U[x]$ du point $[x]$.

Nous ne considérerons que des *espaces de Banach*, c'est-à-dire des espaces *vectoriels*, *distanciés*, et *fermés*. Rappelons les définitions de ces termes.

Un espace fonctionnel est *vectériel* si, $x(t)$ et $y(t)$ désignant deux quelconques de ses éléments, il contient toutes les fonctions de la forme $ax(t) + by(t)$, a et b étant deux constantes quelconques

(comme ici nous ne considérons que des fonctions *réelles*, il s'agit bien entendu de constantes *réelles* quelconques).

Un espace E est *distancié* si l'on y a défini une *distance* $r[x, y]$ qui : 1° soit bien définie pour tout couple d'éléments $[x]$ et $[y]$ de E et dépende symétriquement de $[x]$ et $[y]$; 2° soit nulle si $[x]$ et $[y]$ sont confondus et positive dans le cas contraire; 3° vérifie, quels que soient les éléments $[x], [y], [z]$ de E , l'inégalité triangulaire

$$(1) \quad r[x, y] \leq r[x, z] + r[y, z],$$

dont M. Fréchet a montré l'importance (1). Pour un espace vectoriel, nous supposons en outre que la distance ne dépende que de $y(t) - x(t)$. Dans un espace distancié, un point variable $[x]$ a pour *limite* un point fixe $[x_0]$ si $\lim r[x_0, x] = 0$. Les définitions des mots *convergences*, *voisinages*, ensembles *ouverts* ou *fermés* dans E résultent immédiatement de celle de la limite. Il en est de même de celle de la *continuité d'une fonctionnelle* $U[x]$. L'espace E lui-même est dit *fermé* si la *convergence mutuelle* (ou convergence *au sens de Cauchy*) d'une suite de points $[x_n]$ ($n = 1, 2, \dots$) entraîne sa convergence vers une limite $[x]$, en d'autres termes si, quand $r[x_p, x_q]$ tend vers zéro pour p et q infinis, il existe un point $[x]$ tel que la suite des $[x_n]$ tende vers $[x]$.

Donnons quelques exemples d'espaces fonctionnels qui sont des espaces de Banach.

1° *L'espace des fonctions continues ou espace C.* — On peut y définir $r[x, y]$ comme le maximum de $|y(t) - x(t)|$ pour $x \leq t \leq 1$. Le lecteur vérifiera aisément que l'inégalité (1) est bien vérifiée, et que cet espace est bien fermé; il est évidemment vectoriel, donc de Banach.

(1) Cette importance provient surtout de ce que, grâce à cette inégalité,

$$(a) \quad \lim r[x, z] = \lim r[y, z] = 0 \quad \text{entraîne} \quad \lim r[x, y] = 0.$$

Il peut alors y avoir intérêt à considérer des distances généralisées, dans la définition desquelles l'inégalité triangulaire serait remplacée par une autre inégalité de la forme

$$r[x, y] \leq \varphi \{ r[x, z], r[y, z] \},$$

où $\varphi(r_1, r_2)$ tend vers zéro avec $r_1^2 + r_2^2$. La propriété (a) reste vraie pour les distances ainsi généralisées.

D'autres définitions de la distance sont évidemment possibles; on pourrait prendre le maximum de $f(t)|y(t) - x(t)|$, $f(t)$ étant une fonction positive et continue, choisie une fois pour toutes. Mais l'introduction de cette fonction est assez artificielle, et la définition initiale, si elle ne s'impose pas absolument, semble plus naturelle que toute autre. On remarque que la définition ainsi modifiée est équivalente à la précédente, en ce sens que, dans les deux cas, dire que $[y]$ tend vers $[x]$ revient à dire que $y(t)$ tend uniformément vers $x(t)$.

2° *L'espace des fonctions continues et à dérivées continues, ou espace C_1 .* — On ne peut pas prendre comme distance le maximum de $|y'(t) - x'(t)|$, puisque, si ce maximum est nul, cela veut seulement dire que la différence $y(t) - x(t)$ est constante. Si l'on veut éviter de faire jouer un rôle particulier à certains points choisis arbitrairement dans l'intervalle $(0, 1)$, on pourra prendre

$$r[x, y] = \text{Max} \left| \frac{d[y(t) - x(t)]}{dt} \right| + \text{Max} |y(t) - x(t)| \quad (1).$$

Si, dans cet espace, $[y]$ tend vers $[x]$, la convergence de $y(t)$ vers $x(t)$ est la *convergence uniforme d'ordre un*; elle est évidemment plus restrictive que la *convergence uniforme* (d'ordre zéro) ou convergence dans l'espace C . En introduisant des dérivées jusqu'à l'ordre p , on peut de même définir une *convergence uniforme d'ordre p* , liée par exemple à la distance

$$r[x, y] = \sum_{h=0}^p \text{Max}_{0 \leq t \leq 1} |x^{(h)}(t) - y^{(h)}(t)|,$$

où $x^{(0)}(t)$, $x^{(1)}(t)$, ..., $x^{(p)}(t)$ désignent $x(t)$ et ses p premières dérivées. On obtient ainsi des espaces C_p d'autant plus restreints et des définitions de la convergence d'autant plus restrictives que p est plus grand. Les conditions imposées à une fonctionnelle $U[x]$, soit en affirmant seulement son existence en tout point de C_p , soit en

(1) On peut aussi remplacer le second terme par $\left| \int_0^1 [y(t) - x(t)] dt \right|$. On a ainsi plusieurs définitions distinctes, mais équivalentes au point de vue de la définition de la limite qui en résulte.

exigeant sa continuité, sont évidemment, au contraire, de moins en moins restrictives.

3° L'espace L_α , ou espace des fonctions $x(t)$ mesurables et telles que $|x(t)|^\alpha$ soit sommable ($\alpha > 0$) (1). — Nous nous contenterons d'indiquer qu'on peut dans tous les cas y définir une distance par l'une des formules

$$(2) \quad r[x, y] = \int_0^1 |y(t) - x(t)|^\alpha dt \quad (0 < \alpha \leq 1),$$

$$(3) \quad r^\alpha[x, y] = \int_0^1 |y(t) - x(t)|^\alpha dt \quad (\alpha \geq 1).$$

Deux cas particulièrement importants sont celui de l'espace L_1 des fonctions sommables, et de l'espace L_2 , qu'on appelle généralement [en sous-entendant que $x(t)$ doit être mesurable] l'espace des fonctions de carrés sommables.

On remarque que les définitions (2) et (3) de la distance impliquent que deux fonctions dont la différence, sans être identiquement nulle, est presque partout nulle, ne soient pas considérées comme distinctes. Une fonctionnelle ne sera donc bien définie dans L_α que si elle a la même valeur pour ces deux fonctions; tel sera le cas par exemple pour la fonctionnelle

$$(4) \quad U[x(t)] = \int_0^1 f(t)x(t)|x(t)|^{\alpha-1} dt,$$

où $f(t)$ est une fonction mesurable bornée.

Naturellement, si α croît, on obtient des champs fonctionnels de plus en plus restreints dans l'espace des fonctions mesurables, et par là même, pour la convergence d'une suite de fonctions, des définitions de plus en plus restrictives. On obtient une condition plus restrictive encore en supposant la précédente vérifiée quel que soit α ; elle est cependant encore moins restrictive que la convergence uniforme.

Dans les formules (2) et (3), on pourrait, sans rien changer d'essentiel, introduire sous le signe d'intégration un multipli-

(1) La seconde condition ne suffit pas; il faut de plus que l'ensemble des t pour lesquels $x(t) > 0$ soit mesurable. Nous admettrons ici que les L_α sont bien des espaces de Banach. Nous reviendrons sur ce point dans le cas de L_2 .

cateur $f(t)$, positif et continu. La distance serait changée, mais non la définition de la convergence d'une suite de fonctions (puisque la distance serait multipliée par un facteur compris entre deux limites fixes). Mais cette introduction serait assez artificielle. Dans ces espaces, comme dans celui des fonctions continues, il y a une définition de la distance qui, sans s'imposer absolument, paraît particulièrement indiquée ⁽¹⁾. Inversement, une définition de la distance étant donnée, elle convient dans un espace défini sans ambiguïté : l'espace des fonctions dont la distance à l'origine est finie.

3. L'espace L_2 et l'espace de Hilbert. — L'espace L_2 , dans lequel la formule (4) devient

$$(5) \quad r^2 = \int_0^1 [y(t) - x(t)]^2 dt,$$

joue en analyse un rôle particulièrement important. On remarque que la définition (5) de la distance r est celle que l'on obtient en partant de la distance r_n définie dans l'espace euclidien E_n à n dimensions, et en appliquant la méthode du passage du fini à l'infini; plus précisément, r_n augmente indéfiniment, mais $\frac{r_n}{\sqrt{n}}$ tend vers la distance r définie par la formule (5). On est ainsi conduit à une géométrie de l'espace L_2 , découverte par E. Fischer [6] et Fr. Riesz [33], qui généralise d'une manière remarquable la géométrie à n dimensions. Pour l'exposer, considérons d'abord les fonctions

$$(6) \quad x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots + a_n x_n(t),$$

qui dépendent linéairement de n paramètres. Dans l'espace L_2 , les points qui les représentent définissent une *variété linéaire* à n dimensions, dans laquelle a_1, a_2, \dots, a_n sont des coordonnées, et, si les

(1) Il n'en est pas toujours ainsi (exemples : l'espace des fonctions mesurables, dans lequel la définition de la distance donnée par M. Fréchet dépend du choix de l'unité sur l'échelle des x ; l'espace des lois de probabilité, pour lequel la même circonstance se présente pour la définition de la distance que j'ai indiquée autrefois; c'est bien un espace fonctionnel, puisqu'une loi est définie par sa fonction de répartition)

fonctions $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ sont *orthogonales et normales*, c'est-à-dire si

$$\int_0^1 x_i(t) x_j(t) dt = 0 \quad (i \neq j),$$

$$\int_0^1 x_i^2(t) dt = 1,$$

on trouve pour le carré de la distance du point $[x]$ à l'origine la valeur

$$\int_0^1 x^2(t) dt = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Faisant maintenant croître n indéfiniment, considérons une suite de fonctions

$$(7) \quad x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots,$$

orthogonales deux à deux et normales, et une suite de coefficients a_n tels que la somme Σa_n^2 soit finie. MM. Fischer et Riesz ont démontré que la série

$$(8) \quad a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots + a_n x_n(t) + \dots$$

converge *en moyenne quadratique* (c'est-à-dire au sens qui résulte de la définition de la distance dans L_2) vers une fonction de carré sommable $x(t)$, et l'on a

$$(9) \quad \int_0^1 x^2(t) dt = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots$$

Inversement, si une fonction $x(t)$ est représentable par une série du type (8) convergente en moyenne quadratique, les coefficients a_n sont définis par la formule

$$(10) \quad a_n = \int_0^1 x(t) x_n(t) dt.$$

Si maintenant, partant d'une fonction $x(t)$, de carré sommable, dont on ne sait pas si elle est représentable par une série du type (8), on forme cette série avec les coefficients a_n déduits de $x(t)$ par la formule (10), on ne retrouve pas en général $x(t)$, mais une autre fonction de carré sommable $X(t)$, et la différence $h(t) = x(t) - X(t)$

est orthogonale à toutes les fonctions $x_n(t)$, et par suite à $X(t)$. On peut donc dire que la formule (8) définit dans l'espace fonctionnel une variété linéaire à une infinité de dimensions, et qu'un vecteur quelconque est décomposé par le procédé indiqué en un vecteur situé dans cette variété et un vecteur qui lui est orthogonal.

On dit qu'une suite de fonctions orthogonales est *complète* si l'on ne peut pas trouver une fonction de carré sommable, orthogonale à toutes les fonctions de cette suite, et qui ne soit pas presque partout nulle. Si la suite (7) est complète, la fonction $h(t)$ que nous venons de définir est alors nulle, et la variété linéaire définie par la formule (8) constitue tout l'espace L_2 ; elle n'en constitue qu'une partie si la suite (7) est *incomplète*. Ces deux cas sont d'ailleurs effectivement possibles; ainsi il est bien connu que les fonctions

$$\sin \pi t, \sin 2\pi t, \dots, \sin n\pi t, \dots$$

constituent une suite complète dans l'intervalle $(0, 1)$; si l'on enlève certains termes d'une suite complète, on obtient naturellement une suite incomplète.

On appelle *espace de Hilbert*, et nous désignerons avec M. Fréchet par Ω , l'espace à une infinité de dimensions dans lequel chaque point A représente une suite de nombres $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tels que $\sum a_n^2$ converge, la distance r de ce point A et d'un autre point B, de coordonnées $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, étant définie par la formule

$$(11) \quad r^2 = \sum (b_n - a_n)^2.$$

C'est donc un espace euclidien à une infinité de dimensions. D'après ce qui précède, l'espace Ω s'identifie avec l'espace L_2 , rapporté à un système convenable de coordonnées définies par la donnée d'une suite complète de fonctions orthogonales et normales; cela revient au même, un tel système de coordonnées étant défini, de se donner une suite de nombres a_n tels que $\sum a_n^2$ converge, ou une fonction de carré sommable $x(t)$.

Il résulte de cette identification des espaces L_2 et Ω que L_2 est, comme Ω , un espace fermé, donc de Banach (puisqu'il est évidemment vectoriel et distancié). Que l'on introduise ou non l'espace Ω , il importe de remarquer que cette propriété de L_2 n'est qu'un autre énoncé de l'important théorème de Fischer et Riesz énoncé plus haut dans un cas particulier.

Il n'y a alors aucune difficulté à généraliser le langage de la géométrie. En introduisant une nouvelle fonction $y(t)$, définie par les coordonnées $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, le *produit scalaire* $[xy]$ de x et y et leur angle θ sont définis par la formule

$$[xy] = \|x\| \times \|y\| \cos \theta = \int_0^1 x(t)y(t) dt = \Sigma a_n b_n,$$

dans laquelle $\|x\|$ et $\|y\|$ sont les longueurs des vecteurs allant de l'origine respectivement aux points $[x]$ et $[y]$; les fonctions $x(t)$ et $y(t)$, d'après la définition rappelée tout à l'heure, sont orthogonales si cette quantité est nulle. Naturellement, avec ces définitions, les relations établies dans la géométrie ordinaire, notamment les relations entre les côtés et les angles d'un triangle, sont vraies.

On remarque que ces considérations nous fournissent une méthode de passage du fini à l'infini qui n'a rien de commun avec celle de Volterra. La fonction $x(t)$ définie par la série (8) étant approchée en moyenne autant qu'on veut par la somme d'un nombre fini de termes, une fonctionnelle de $x(t)$, si elle est continue, peut être définie comme la limite d'une fonction de a_1, a_2, \dots, a_n . Tandis que la méthode du passage du discontinu au continu conduit à considérer des intégrales, celle-ci conduit à considérer des séries; on le voit bien en comparant les expressions (5) et (11) du carré de la distance.

4. Fonctionnelles linéaires. — Une fonctionnelle *linéaire* (il serait logique de dire : *linéaire et homogène*) est une fonctionnelle $U[x]$ pour laquelle, quelles que soient les fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et les constantes c_1 et c_2 , on a

$$(12) \quad U [c_1 x_1 + c_2 x_2] = c_1 U [x_1] + c_2 U [x_2].$$

Une telle fonctionnelle étant supposée définie dans un certain espace fonctionnel de Banach, et une définition de la distance, telle que la distance à l'origine du point $[\lambda x]$ soit proportionnelle à $|\lambda|$, étant donnée dans ce champ, on voit aisément que cela revient au même de dire que la fonctionnelle considérée est bornée dans toute région finie de cet espace, ou de dire qu'elle y est continue; la continuité en un point suffit d'ailleurs pour entraîner la continuité uniforme dans tout l'espace.

Le passage du discontinu au continu conduit à considérer comme

forme *normale* d'une fonctionnelle linéaire l'expression, étudiée par Volterra,

$$(13) \quad \int_0^1 f(t)x(t) dt.$$

Mais ce n'est pas bien entendu la forme la plus générale.

Le problème de déterminer la forme la plus générale d'une fonctionnelle linéaire n'a guère un sens précis que si l'on indique dans quel champ fonctionnel elle est continue, avec la définition de la distance liée à ce champ. En considérant le champ des fonctions de carrés sommables et la distance définie par la formule (5), en d'autres termes en se plaçant dans l'espace L_2 , M. Fréchet [8, 16] a, en même temps que F. Riesz [33], montré qu'une fonctionnelle linéaire continue est nécessairement de la forme (13), la fonction $f(t)$ étant de carré sommable; la représentation d'une telle fonctionnelle par cette formule est d'ailleurs unique. Au contraire, dans l'espace C , F. Riesz [34] a montré que toute fonctionnelle linéaire continue est représentable par l'intégrale de Stieltjes

$$(14) \quad \int_0^1 x(t) dF(t),$$

$F(t)$ étant une fonction à variation bornée. On peut interpréter ce résultat en considérant des masses, de signes quelconques, et dont les valeurs absolues aient une somme finie, réparties dans l'intervalle $(0, 1)$; on peut faire correspondre à chaque fonction à variation bornée une répartition de cette nature, de manière que l'intégrale (14) représente la somme des valeurs de $x(t)$, calculée en donnant à chaque intervalle élémentaire un poids, positif ou négatif, égal à la masse située dans cet intervalle. Dans le cas particulier de masses réparties avec une densité sommable, on retrouve la formule (13); mais d'autres répartitions sont possibles; si certaines masses μ_i sont concentrées en des points τ_i , elles donnent lieu à des termes de la forme

$$\Sigma \mu_i x(\tau_i)$$

dépendant spécialement de la valeur de $x(t)$ en ces points.

Dans les espaces C_p , on peut évidemment définir des fonctionnelles continues (c'est-à-dire ayant la continuité uniforme d'ordre p) qui ont un degré de généralité plus grand que celles définies par les

formules (13) et (14). Observons à ce sujet qu'une intégrale du type

$$\int_0^1 f(t) \frac{d^p x}{dt^p} dt,$$

si $f(t)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre p qui soient continues sauf en certains points singuliers, se ramène par une intégration par parties à une intégrale du type de Volterra et à des termes dépendant de ces points particuliers, et des points 0 et 1. Il arrivera ainsi souvent que ces fonctionnelles définies dans C_p ne se distinguent de celles qui sont représentables par les formules (13) et (14) que par des termes dépendant de tels points singuliers. Pour un point τ , ces termes sont en général de la forme

$$a_0 x(\tau) + a_1 x'(\tau) + \dots + a_p x^{(p)}(\tau).$$

Deux généralisations de cette forme sont possibles; l'une s'obtient en faisant augmenter τ indéfiniment, mais est parfois illusoire, au moins dans le champ des fonctions holomorphes sur le segment (0, 1) de l'axe réel, en ce sens qu'on risque ainsi d'obtenir des expressions telles que $x(0)$, ou $\int_0^1 x(t) dt$, qui par la formule Taylor peuvent être représentées par des séries de la nature considérée; l'autre généralisation s'obtient en considérant des intégrales singulière du type

$$\int_0^1 \left[x(t) - x(\tau) - (t - \tau)x'(\tau) - \dots - \frac{(t - \tau)^{p-1}}{(p-1)!} x^{(p-1)}(\tau) \right] f(t) dt,$$

$(t - \tau)^p f(t)$ étant sommable, mais non $f(t)$; on ne peut pas alors faire sortir du signe d'intégration les termes en $x(\tau)$, \dots , $x^{(p-1)}(\tau)$.

On peut conclure de ce qui précède que, pour les fonctionnelles linéaires considérées dans les applications, si rien dans leur définition ne fait prévoir l'existence d'un point (ou de plusieurs points) jouant ainsi un rôle particulier, on doit penser qu'elles seront de la forme (13), que nous avons considérée comme *normale*.

§. Fonctionnelles entières du second degré. — Une fonctionnelle $U[x]$ est homogène et du second degré si $U[cx]$ est proportionnel à c^2 ; elle est *entière, homogène et du second degré*, si elle se réduit, pour $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$, à une forme quadratique en c_1 et c_2 .

Par la méthode du passage du discontinu au continu, Volterra, en partant de la fonction de n variables

$$(15) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j} x_i x_j \quad (a_{i,j} = a_{j,i}),$$

a été conduit à considérer l'intégrale double

$$(16) \quad \int_0^1 \int_0^1 f(t_1, t_2) x(t_1) x(t_2) dt_1 dt_2 \quad [f(t_1, t_2) = f(t_2, t_1)].$$

Il était assez naturel de penser que cette intégrale pouvait être considérée comme la forme normale d'une fonctionnelle entière et du second degré. Mais le développement de l'analyse fonctionnelle, et notamment l'étude des dérivées fonctionnelles [30, p. 83 à 88, et 48, p. 55 à 69], montrent qu'il y a lieu de considérer l'expression un peu plus générale

$$(17) \quad \int_0^1 \varphi(t) x^2(t) dt + \int_0^1 \int_0^1 f(t_1, t_2) x(t_1) x(t_2) dt_1 dt_2,$$

que l'on obtient d'ailleurs comme limite de l'expression (15) si dans cette expression on considère séparément les termes carrés et les termes rectangles. C'est donc cette expression que nous considérerons comme la forme *normale* d'une fonctionnelle entière, homogène et du second degré. Nous supposons la fonction $f(t_1, t_2)$ symétrique, ce qui n'est pas restrictif, car en tout cas on ne change pas l'expression (17) en remplaçant $f(t_1, t_2)$ par $\frac{1}{2}[f(t_1, t_2) + f(t_2, t_1)]$; grâce à cette hypothèse une fonctionnelle de la forme (17) n'est représentable par cette forme que d'une seule manière.

Il est facile, en généralisant le résultat de Fr. Riesz sur les fonctionnelles linéaires, d'obtenir l'expression la plus générale d'une fonctionnelle homogène, entière et du second degré, qui soit bien définie et continue dans l'espace C. Le résultat obtenu est analogue à celui indiqué pour les fonctionnelles linéaires. Il y a lieu de considérer, dans le plan des t_1, t_2 , des masses de somme finie réparties dans le carré $0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1$. La fonctionnelle cherchée est alors définie comme étant l'intégrale du produit $x(t_1)x(t_2)$, chaque élément d'aire étant affecté d'un poids égal à la masse qui y est située. Deux points symétriques par rapport à la diagonale $t_1 = t_2$ jouant évidem-

ment le même rôle, on ne restreint rien en supposant les masses considérées réparties symétriquement par rapport à cette diagonale.

Il est assez naturel de penser que cette diagonale joue un rôle particulier. La forme (17), que nous avons appelée normale, correspond au cas où, en plus de masses réparties dans le carré avec la densité $f(t_1, t_2)$, il y a des masses situées sur la diagonale $t_1 = t_2$. Mais il n'y a de masses concentrées, ni sur aucune autre ligne, ni en des points singuliers.

Dans les applications, ces points singuliers ou ces lignes singulières, autres que la droite $t_1 = t_2$, sont généralement mis en évidence, s'ils existent, dès la définition de la fonctionnelle étudiée. Aussi une fonctionnelle homogène, entière et du second degré, *et de plus continue dans Ω* , sera-t-elle souvent de la forme normale si l'on n'a pas de raison de prévoir l'existence de points singuliers ou de lignes singulières.

L'extension obtenue en n'exigeant que la continuité dans un espace C_p est plus essentielle ici qu'à propos des fonctionnelles linéaires. Il existe en effet des fonctionnelles, telles que

$$\int_0^1 g(t)[x^{(p)}(t)]^2 dt,$$

pour lesquelles il n'y a aucun point jouant un rôle singulier et aucune ligne singulière autre que $t_1 = t_2$, et qui ne sont pas de la forme normale; cela tient à l'intervention des dérivées. Au contraire, pour les fonctionnelles linéaires, l'introduction des dérivées ne modifiait les résultats obtenus que s'il y avait des points singuliers.

Ces considérations s'étendent sans peine aux fonctionnelles homogènes, entières, de degré quelconque p ; il y a dans leur forme normale autant d'intégrales différentes à distinguer qu'il y a de types divers de termes dans une forme de degré p à n variables ($n \geq p$).

Nous ne pouvons qu'indiquer ici l'existence de travaux de M. Fréchet [10] et de Gâteaux [18] sur des séries de fonctionnelles qui généralisent les séries de polynômes. Le lecteur trouvera des indications sur ce sujet dans nos *Leçons d'Analyse fonctionnelle* [30, p. 100 à 115 et 48, p. 78 à 89].

6. Variations d'une fonctionnelle. — On a proposé différentes définitions de ces variations. Nous nous contenterons d'indiquer

celle donnée par M. Fréchet [45] qui implique essentiellement qu'il s'agisse d'une fonctionnelle $U[x]$ définie dans un espace distancié. Si l'on peut définir des fonctionnelles de δx , δU , $\delta^2 U$, ..., $\delta^p U$, définies et continues dans le même espace, entières, homogènes, et de degrés respectifs 1, 2, ..., p , et telles que, r désignant la distance des points $[x]$ et $[x + \delta x]$, ont ait, quand r tend vers zéro,

$$(18) \quad U[x + \delta x] - U[x] = \delta U + \frac{1}{2} \delta^2 U + \dots + \frac{1}{p!} \delta^p U + o(r^p),$$

δU , $\delta^2 U$, ..., $\delta^p U$ sont les variations de U , d'ordres respectifs 1, 2, ..., p , au point $[x]$.

On remarque que $\delta^p U$ peut être défini par la formule

$$(19) \quad \delta^p U = \left[\frac{d^p U[x(t) + \lambda \delta x(t)]}{d\lambda^p} \right]_{\lambda=0},$$

qui n'implique aucune définition préalable de la distance. Mais elle ne peut guère servir de définition. Il peut arriver qu'elle conduise à une valeur bien déterminée $\delta^p U_2$ et que cependant cette valeur n'ait pas les propriétés qu'on s'attend à trouver réalisées quand on parle de la $p^{\text{ième}}$ variation de U (Cf. M. Fréchet [45]) (1).

La forme *normale* des expressions des variations des divers ordres résulte immédiatement des considérations exposées aux nos 4 et 5, et l'on devra s'attendre à cette forme toutes les fois que la définition d'une fonctionnelle ne mettant en évidence aucun point ou groupe de points distincts qui joue un rôle particulier, cette fonctionnelle vérifie en outre certaines conditions de continuité (qui ne sont d'ailleurs essentielles que pour les variations d'ordre > 1).

Pour la variation première, la forme normale, ou forme de Volterra, est

$$(20) \quad \delta U = \int_0^1 U'_x \delta x \, dt,$$

et, pour la variation seconde, la forme normale est

$$(21) \quad \delta^2 U = \int_0^1 U''_{xx} \delta x^2 \, dt + \int_0^1 \int_0^1 U''_{x_1 x_2} \delta x_1 \delta x_2 \, dt \, dt_1,$$

(1) Dans la première édition de ce fascicule, j'avais adopté la définition (19) complétée par une condition restrictive : $\delta^p U$ devait être une fonctionnelle entière (donc entière, homogène, et d'ordre p). Le travail cité de M. Fréchet, montrant que cette restriction n'était pas suffisante, m'a fait renoncer à chercher une extension de sa définition (Cf. [48, p. 35 à 40]).

x et x_1 désignant respectivement $x(t)$ et $x(t_1)$ (¹). La fonction U'_x , ou d'une manière plus précise $U'_x[x(\tau)|t]$ pour indiquer qu'elle dépend de t , est la *dérivée fonctionnelle* de U ; elle indique l'influence de l'intervalle dt dans la variation de U . De même $U''_{x,t}$ (qui est une fonction de t), et U''_{x,t_1} (fonction de t et t_1 , essentiellement symétrique), sont les *dérivées fonctionnelles secondes*, analogues respectivement aux dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ d'une fonction d'un nombre fini de variables. On peut naturellement déduire $\delta^2 U$ de la formule (20) et de l'expression de $\delta U'_x$. La dérivée U'_x dépendant spécialement du point t , il est naturel de s'attendre à ce qu'elle dépende spécialement de ce point, et soit de la forme

$$(22) \quad \delta U'_t = U''_{t,t} \delta x + \int_0^1 U''_{t,t_1} \delta x_1 dt_1,$$

si elle est continue d'ordre zéro, et d'une forme plus générale telle que

$$(23) \quad \delta U'_x = A_0 \delta x + A_1 \delta x' + \dots + A_p \delta x^{(p)} + \int_0^1 U''_{x,t_1} \delta x_1 dt_1$$

(A_0, A_1, \dots, A_p étant des fonctions de t). si elle est continue d'ordre p . Si alors on calcule $\delta^2 U$, dans le premier cas on retrouve bien la formule (21), tandis que dans le second on trouve une expression plus générale.

De l'expression de $\delta U'_x$, on peut déduire, non seulement celle de $\delta^2 U$, c'est-à-dire celle de $\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2}$, mais, en introduisant deux paramètres λ et μ , celle de $\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \partial \mu}$, et il faut naturellement que cette dérivée soit indépendante de l'ordre des dérivations; c'est la *condition d'intégrabilité*, qui jouera un grand rôle dans l'étude des équations aux dérivées fonctionnelles.

Dans le cas de l'expression (22), cette condition n'impose aucune

(¹) Dans ses recherches, Volterra réduisait $\delta^2 U$ à l'intégrale double. Nous avons, de 1919 à 1922, attiré l'attention sur la nécessité d'ajouter une intégrale en $\delta x^2 dt$. Gâteaux [19] avait déjà introduit la dérivée $U''_{t,t}$, et formé le laplacien (voir ci-dessous n° 23). Il faut remarquer que, si $U''_{t,t}$ est mesurable et borné, et U''_{x,t_1} de carré sommable, la forme (21) est bien définie et continue dans L_2 ; mais ce n'est pas la forme la plus générale d'une variation seconde définie et continue dans L_2 .

restriction à U''_{x^2} ; mais il faut que U''_{xx_1} soit une fonction symétrique de t et t_1 ; cette condition de symétrie, déjà indiquée, est donc essentielle. Dans l'expression (21) de $\delta^2 U$ on peut sans doute mettre en évidence, à la place de U''_{xx_1} , une fonction qui ne soit pas symétrique; mais cette fonction ne sera pas la dérivée fonctionnelle de U'_x .

Dans le cas de l'expression (23), en plus de la condition de symétrie de U''_{xx_1} (*première condition d'intégrabilité*), on trouve des conditions imposées aux coefficients A_0, A_1, \dots, A_p (*deuxième condition d'intégrabilité*); ces conditions peuvent s'exprimer en disant que l'expression

$$A_0 \delta x + A_1 \delta x' + \dots + A_p \delta x^{(p)}$$

est identique à son *adjointe* [30, p. 91-93, et 48, p. 62-69] (1). Il faut et il suffit pour cela qu'elle soit de la forme

$$B_0 \delta x + \frac{d(B_1 \delta x')}{dt} + \dots + \frac{d^q(B_q \delta x^{(q)})}{dt^q},$$

B_0, B_1, \dots, B_q étant des fonctions de t ; cela n'impose aucune restriction aux coefficients A_0, A_2, \dots d'indices pairs; mais il faut que p soit pair, et chacun des coefficients A_1, A_3, \dots, A_{p-1} d'indices impairs est bien déterminé en fonction des coefficients d'indices pairs supérieurs au sien.

7. Transformations linéaires dans les espaces fonctionnels. — Comme dans l'espace à un nombre fini de dimensions, une transformation peut, au point de vue infinitésimal et en première approximation, être assimilée à une transformation linéaire. Nous n'étudierons que les transformations linéaires, et nous bornerons à de brèves indications, ce sujet, auquel se rattache la théorie des équations intégrales linéaires, ne pouvant être traité complètement ici.

Supposons que la correspondance linéaire entre un point $[x]$ et un

(1) Rappelons que deux fonctionnelles linéaires $F[u]$ et $G[v]$, définies et continues dans C_p , sont *adjointes* l'une à l'autre si l'expression $vF[u] - uG[v]$ est une dérivée exacte, de sorte que son intégrale dans un intervalle (t_0, t_1) ne dépend que des valeurs de u, v et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$ aux points t_0 et t_1 . Si alors u et v sont des fonctions périodiques, de période 1, on a

$$\int_0^1 \{vF[u] - uG[v]\} dt = 0.$$

autre point $[y]$, ou en d'autres termes entre une fonction $x(s)$ et une autre fonction $y(t)$, soit résoluble par rapport à y , c'est-à-dire que

$$(24) \quad y(t) = U[x(s) | t],$$

U étant une fonctionnelle linéaire de $x(s)$, et s et t , pour fixer les idées, variant dans le même intervalle $(0, 1)$.

La première question qui se pose est relative à la forme de la fonctionnelle U . On pourrait être tenté de croire que la forme normale d'une telle relation est la forme

$$(25) \quad y(t) = \int_0^1 f(s, t) x(s) ds \quad (0 < t < 1),$$

déduite de l'expression (12) par l'introduction d'un paramètre. Mais il suffit de considérer le cas particulier de la relation

$$(26) \quad y(t) = \int_0^t x(s) ds$$

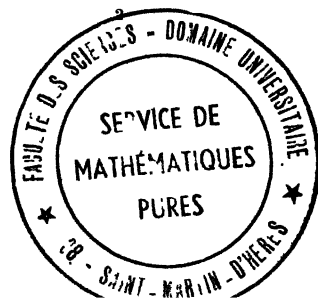
pour être assuré qu'il n'en est pas ainsi en général. La formule (26) fait en effet correspondre à une fonction $x(s)$ de l'espace C une fonction $y(t)$, nulle pour $t = 0$, à cela près quelconque dans C_1 ; $x(s)$ se déduit de $y(t)$ par la formule $x(s) = y'(s)$, qui a un sens dans C_1 .

D'une manière très générale, une formule du type (25) fait correspondre à une fonction $x(s)$ de C (ou de L_1 ou L_2), une fonction d'un espace E beaucoup plus restreint, et la résolution par rapport à $x(s)$ est donnée par une formule qui n'a de sens que dans E . On ne doit donc pas s'attendre à ce qu'une relation linéaire entre $[x]$ et $[y]$ puisse être à la fois résolue par rapport à $x(s)$ et $y(t)$ par des formules de la même forme (25). En fait, il résulte d'un théorème de E. Picard [32] que cette circonstance n'est pas possible.

Au point de vue des transformations continues dans l'espace L_2 , contentons-nous d'observer que dans le cas d'une relation de la forme

$$y(t) = \varphi(t) x[h(t)] + \int_0^1 f(s, t) x(s) ds,$$

les fonctions $\varphi(t)$ et $f(s, t)$ étant bornées, et $h(t)$ étant une fonction continue croissante et à dérivée bornée inférieurement (conditions pouvant être élargies), le point $[y]$ dépend d'une manière continue



du point $[x]$. Si, pour une valeur particulière de t , $x[h(t)]$, et par suite $y(t)$ ne sont pas des fonctionnelles continues du point $[x]$ et peuvent n'avoir pas de limite quand $[x]$ tend vers une limite, cela n'empêche pas la fonction $y(t)$ de tendre *en moyenne quadratique* vers une limite.

Dans de nombreuses applications, la signification physique des paramètres s et t exclut l'idée que $y(t)$ puisse dépendre spécialement de la valeur de $x(s)$ en un point autre que le point t lui-même. On est donc conduit à considérer spécialement les relations de la forme

$$(27) \quad y(t) = \varphi(t)x(t) + \int_0^1 f(s, t)x(s) ds \quad (0 < t < 1),$$

qui ont en effet une grande importance pratique.

Le problème qui se pose maintenant est de résoudre ces *équations intégrales* par rapport à la fonction $x(s)$.

Dans le cas des transformations linéaires dans l'espace à n dimensions, un point B qui dépend linéairement d'un autre point A dépend du même nombre de paramètres, et par suite on peut être assuré que, ou bien il décrit tout l'espace une fois et une seule, ou bien il décrit une variété linéaire définie par p conditions d'égalité et la décrit ∞^p fois. c'est-à-dire qu'à chaque point B de cette variété correspondent des points A dépendant de p paramètres. Dans un espace fonctionnel, qui a toujours une infinité de dimensions, des relations linéaires en nombre fini p (et même sous certaines conditions des relations en nombre infini) déterminent une variété qui a encore une infinité de dimensions, et il est possible d'établir une correspondance biunivoque entre un point $[y]$ de cette variété et un point $[x]$ quelconque, soit dans l'espace fonctionnel considéré, soit dans une autre variété définie elle-même par q conditions d'égalité. On doit donc trouver des cas où la résolution de l'équation étudiée par rapport à $x(s)$ ne sera possible que si $y(t)$ vérifie p conditions d'égalité, la solution dépendant alors de q paramètres, et les nombres p et q , contrairement à ce qui se passe pour les équations algébriques, n'étant généralement pas égaux.

C'est ce qui se produit en général pour l'équation (25). Si, pour une détermination particulière de $f(s, t)$, elle est résoluble à condition que $y(t)$ soit dans un certain champ fonctionnel E, défini seulement par des conditions de continuité, il ne saurait en être de même

pour $f(s, \lambda t)$ ($\lambda > 0$ et $\neq 1$). Le changement de λt en u ramène en effet l'équation à sa forme initiale, à cela près que u varie dans un intervalle augmenté ou diminué. L'ensemble de conditions qui était juste suffisant pour déterminer $x(s)$ se trouve ainsi étendu ou restreint. On obtient ainsi des conditions surabondantes et en général incompatibles, ou au contraire insuffisantes, pour déterminer $x(s)$.

L'équation (27), si $\varphi(t) = 1$ (cas auquel on peut toujours la réduire si cette fonction ne s'annule pas dans l'intervalle considéré), est dite *équation de Fredholm* ou *équation de deuxième espèce à limites fixes*. Fredholm [17] a montré que cette équation, si le noyau $f(s, t)$ est continu, et même dans certains cas où il est discontinu, est absolument analogue à un système d'équations algébriques linéaires; les nombres p et q , qui pour l'équation (25) sont indépendants, ont ici une même valeur, toujours finie, et en général nulle; la solution est dans ce cas donnée en fonction de $y(t)$ par une formule de même forme que celle qui donne $y(t)$ en fonction de $x(s)$; on sera d'ailleurs dans ce cas si une certaine expression, qu'on appelle le *déterminant* de l'équation, n'est pas nulle.

Sans démontrer ce résultat, observons seulement qu'il est lié au fait que $y(t)$ dépend spécialement de la valeur de $x(s)$ pour $s = t$; il existe donc une dépendance entre les variables s et t , qui varient nécessairement dans le même intervalle, et la remarque faite pour l'équation (25) ne s'applique plus.

La même dépendance entre s et t existe dans le cas de l'*équation de Volterra*, ou *équation à limite variable*, de première espèce

$$(28) \quad y(t) = \int_0^t f(s, t) x(s) ds.$$

qui est un cas particulier de l'équation (24), obtenu en supposant le noyau $f(s, t)$ nul pour $s > t$. Bien loin de compliquer le problème, le fait que la limite supérieure soit variable le rend plus facile: si la fonction $f(s, t)$ et sa dérivée f'_t sont continues, et si $f(0, 0) \neq 0$, pour que l'équation (28) ait une solution et une seule, il suffit que la fonction $y(t)$ soit continue, admette une dérivée continue, et s'annule pour $t = 0$.

Pour plus de détails sur ces questions, nous renvoyons le lecteur au livre de Volterra [37], ou à celui de Lalesco [25], qui contient une bibliographie complète des publications sur les équations inté-

grales antérieures à l'année 1911, ou encore au tome 3 du *Cours d'Analyse* de E. Goursat.

8. Exemples tirés de la théorie des fonctions harmoniques. — Considérons dans le plan une fonction harmonique $U(A)$ régulière à l'intérieur d'un contour C et sur ce contour. On peut la représenter à l'intérieur de C par le potentiel d'une double couche de densité $x(s)$, s désignant l'abscisse curviligne d'un point M du contour. En désignant par r la distance AM , par $\frac{d}{dn}$ une dérivée correspondant à un déplacement normal de M compté positivement vers l'intérieur, et, si A est sur le contour, par t et $u(t)$ les valeurs de s et de $U(A)$ en ce point, les fonctions $x(s)$ et $u(t)$ sont liées par la relation

$$(29) \quad u(t) = \pi x(t) + \int_C \frac{d}{dn} \left(\log \frac{1}{r} \right) x(s) ds.$$

C'est de cette équation que Fredholm a déduit la solution du problème de Dirichlet, qui consiste à déterminer la fonction harmonique $U(A)$ connaissant ses valeurs $u(t)$ sur le contour. Cette équation est une équation de Fredholm, et son déterminant n'est jamais nul. On peut donc en tirer $x(s)$ et par suite $U(A)$.

On résout d'une manière analogue le problème de Neumann, qui consiste à se donner la dérivée normale $\frac{dU}{dn_A} = v(t)$ ($\frac{d}{dn_A}$ désignant la dérivée normale relative au point A , lorsque celui-ci est sur le contour). En cherchant à représenter $U(A)$ par un potentiel de simple couche de densité $y(s)$, on est conduit à écrire l'équation

$$(30) \quad v(t) = -\pi y(t) + \int_C \frac{d}{dn_A} \left(\log \frac{1}{r} \right) y(s) ds,$$

que doit vérifier la fonction y . C'est encore une équation de Fredholm, mais ici son déterminant est nul. Il y a une condition de possibilité imposée à $v(t)$; il faut que la valeur moyenne de cette fonction soit nulle. On trouve alors pour y des solutions $y_0 + \lambda z$ dépendant d'une constante λ ; z est d'ailleurs la densité d'une couche donnant à l'intérieur un potentiel constant α , et l'on trouve pour U des solutions $U_0 + \lambda \alpha$ déterminées à une constante près, comme on pouvait s'y

attendre. Du moins, il en est ainsi en général; mais il existe des contours pour lesquels $a = 0$ (dans une famille de contours homothétiques cela arrivera toujours pour un contour et un seul); alors U est bien déterminé. Les fonctions obtenues par addition d'une constante arbitraire sont bien des solutions du problème de Neumann; mais, n'étant pas représentables par un potentiel de simple couche, elles échappent à la méthode de recherche précédente.

Étudions encore les formules qui relient les valeurs de $u(t)$ et $v(t)$ relatives à une même fonction harmonique $U(A)$. On sait qu'il y a une certaine réciprocité entre les fonctions $u'(t)$ et $v(t)$; si l'on remplace $U(A)$ par la fonction harmonique conjuguée $V(A)$, u' et v sont remplacés respectivement par v et $-u'$. Ces deux fonctions sont nécessairement des fonctions dont la valeur moyenne sur C est nulle, et il existe entre elles une relation biunivoque *dans le champ des fonctions de t dont la valeur moyenne est nulle*, puisque l'une comme l'autre est déterminée par $U(A)$ et le détermine à une constante près.

Pour préciser cette relation, introduisons par exemple la fonction de Neumann $\gamma(A, M)$, qui permet de mettre la solution du problème de Neumann sous la forme

$$(31) \quad U(A) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \gamma(A, M) v(s) ds + \text{const.}$$

Cette formule s'applique si A est sur le contour, et donne $u(t)$. Mais, dans ces conditions, l'intégrale devient singulière, la fonction intégrée devenant infinie logarithmiquement pour $s = t$. L'intégrale conserve un sens, mais celle obtenue en dérivant par rapport à t n'en a pas. On peut alors dans la formule (31) remplacer $v(s)$ par $v(s) - v(t)$, ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale, et l'on est conduit à écrire

$$(32) \quad u'(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{d\gamma(A, M)}{dt} [v(s) - v(t)] ds.$$

On peut aussi ne pas écrire $v(t)$, et prendre la valeur principale au sens de Cauchy. De toute façon, $u'(t)$, fonctionnelle de $v(s)$, dépend spécialement de l'allure de cette fonction dans le voisinage du point $s = t$, et cela donne à l'équation (32) le caractère d'une équation de seconde espèce, dont le déterminant est nul. Il y a une condition de

possibilité, $u'(t)$ devant avoir sa valeur moyenne nulle, et $v(s)$ est déterminé à une constante près, ce qui donne une seule fonction dont la valeur moyenne soit nulle.

Cette fonction, d'après ce que nous avons vu, s'obtient en remplaçant u' par v et v par $-u'$ dans la formule (32). On peut le vérifier en introduisant la fonction de Green $g(A, M)$; si l'on connaît cette fonction, on peut en fonction de u exprimer $U(A)$, puis $v(t)$ par la formule

$$(33) \quad v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{d^2 g(A, M)}{dn dn_A} [u(s) - u(t) - p u'(t)] ds,$$

où p désigne la distance de M à la normale en A , comptée positivement dans le sens des s croissants au point A . L'introduction des termes en $u(t)$ et $u'(t)$ est nécessaire pour que la fonction intégrée reste finie; mais on peut n'introduire que le premier et prendre la valeur principale au sens de Cauchy. On réduit alors aisément la formule (33) à la forme annoncée en utilisant la formule connue

$$(34) \quad \frac{d^2 g(A, M)}{dn dn_A} = - \frac{d^2 \gamma(A, M)}{ds dt}$$

[28, p. 310], et en intégrant par parties.

Si l'on considère $v(t)$ comme fonctionnelle de $u(s)$, sa dérivée fonctionnelle est donc $\frac{1}{2\pi} \frac{d^2 g(A, M)}{dn dn_A}$; si on la considère comme fonctionnelle de $u'(s)$, sa dérivée est $\frac{1}{2\pi} \frac{d^2 \gamma(A, M)}{ds dt}$. Dans un cas comme dans l'autre elle devient infinie pour $s = t$, et $v(t)$ dépend spécialement de l'allure de $u(s)$ ou $u'(s)$ dans le voisinage du point A .

La dérivée $\frac{d^2 g(A, M)}{dn dn_A}$ est la première dérivée de la fonction de Green qui ne s'annule pas sur le contour. Elle joue un rôle particulier dans l'étude du problème de Dirichlet, qui se résout immédiatement si l'on connaît cette fonction; la formule (33) donne en effet $v(t)$ en fonction de $u(s)$, et connaissant u et v , c'est-à-dire U et $\frac{dU}{dn}$ sur le contour, on obtient $U(A)$ à l'intérieur par la formule de Green, appliquée à cette fonction et à $\log r$.

9. Variation de la fonction de Green. — Les formules du n° 8 nous renseignent bien sur la manière dont les fonctions considérées, u et v

par exemple, dépendent l'une de l'autre. Ces formules étant linéaires, si ces fonctions varient, les relations entre δu et δv seront les mêmes qu'entre u et v . Mais il reste à étudier l'influence d'une déformation du contour sur les fonctions de Green et de Neumann qui interviennent dans ces relations. Nous nous contenterons d'indiquer les formules relatives à la fonction de Green $g(A, B)$.

Nous définirons la déformation infinitésimale du contour en nous donnant en chaque point M du contour initial le chemin δn qu'il faut décrire normalement à ce contour pour arriver sur le contour déformé. La fonction de Green, par définition, s'annule si B vient en M sur le contour. Le contour se déformant, il faut distinguer la variation $\delta g(A, M)$ calculée en supposant M fixe, et la variation $\delta_1 g(A, M)$ calculée en supposant que ce point ait un déplacement normal δn , de manière à rester sur le contour. Cette dernière variation étant nulle, on a

$$(35) \quad \delta_1 g(A, M) = \delta g(A, M) + \frac{dg(A, M)}{dn} \delta n = 0.$$

La variation $\delta g(A, B)$, qui est évidemment une fonction harmonique et régulière de B , est bien définie par ses valeurs sur le contour résultant de la formule précédente; il en résulte la formule

$$(36) \quad \delta g(A, B) = - \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{dg(A, M)}{dn} \frac{dg(M, B)}{dn} \delta n ds,$$

due à J. Hadamard [21].

Nous avons signalé [30, p. 192-197 et 48, p. 133-138], et nous venons de rappeler (fin du n° 8), l'intérêt particulier que présente la dérivée $\frac{d^2 g(A, B)}{dn_A dn_B}$, A et B étant sur le contour et $\frac{d}{dn_A}$ et $\frac{d}{dn_B}$ désignant des dérivées normales relatives à ces points; nous la désignerons par $\mathcal{G}(A, B)$. Pour lui donner un sens lorsque A et B sont voisins du contour mais non situés sur lui, nous considérerons des contours intérieurs les uns aux autres, de manière qu'un et un seul passe par chaque point A (ou B) d'une région voisine du contour initial, et le symbole $\frac{d}{dn}$ (ou $\frac{d}{dn'}$) représentera une dérivation normale à ce contour. On a alors, en dérivant la formule (36),

$$(37) \quad \delta \mathcal{G}(A, B) = - \frac{1}{2\pi} \int_C \mathcal{G}(A, M) \mathcal{G}(M, B) \delta n ds,$$

due également à J. Hadamard [23, p. 34-35].

Si les points A et B sont situés sur le contour, l'intégrale qui figure dans cette formule n'a pas de sens, la fonction intégrée devenant infinie en A et en B. L'expression de $\delta \mathcal{G}(A, B)$ s'obtient alors par un passage à la limite, analogue à celui qui nous a conduit à la formule (33); bien entendu, pour les points M distincts de A et B, la dérivée fonctionnelle de $\mathcal{G}(A, B)$ est $-\frac{i}{2\pi} \mathcal{G}(A, M) \mathcal{G}(M, B)$, les termes à ajouter à la formule (37) n'étant relatifs qu'au voisinage des points A et B.

Pour obtenir la variation $\delta_1 \mathcal{G}(A, B)$ (le symbole δ_1 indiquant que les points A et B se déplacent respectivement des longueurs δn_A et δn_B normalement au contour de manière à venir sur le contour déformé, et que, de plus, les directions normales varient de manière à devenir normales au contour déformé), il y a lieu d'ajouter des termes en $\delta n_A, \delta n_B, \delta n'_A, \delta n'_B$. En tenant compte de ce que la fonction de Green est harmonique et s'annule sur le contour, on voit aisément que ces termes se réduisent à

$$\mathcal{G}(A, B)(k_A \delta n_A + k_B \delta n_B),$$

k_A désignant la courbure du contour en A et k_B sa courbure en B. On peut ainsi calculer la variation $\delta_1 \mathcal{G}(A, B)$ si l'on connaît la détermination initiale de cette fonction, et cela par une formule qui ne suppose pas cette fonction définie en dehors du contour.

Un des avantages de la réduction de l'équation (36) à la forme (37) est à première vue que sous cette forme les dérivées par rapport aux paramètres ne figurent plus; on évite, semble-t-il, les difficultés que nous venons de signaler, et une fois la fonction $\mathcal{G}(A, B)$ formée, on en déduit $g(A, B)$ sans difficulté. Mais cet avantage n'est réel que si l'on cherche les solutions régulières de l'équation (37). Pour la fonction $\mathcal{G}(A, B)$ déduite de la fonction de Green, ou pour les solutions de l'équation (37) présentant la même singularité que cette fonction, l'intégrale qui figure dans cette équation devient singulière lorsque que les points A et B viennent sur le contour, et cesse d'être continue d'ordre zéro. La difficulté qui en résulte est la même que si $\frac{d\mathcal{G}(A, B)}{ds_A}$ et $\frac{d\mathcal{G}(A, B)}{ds_B}$ figuraient explicitement dans l'équation. Il ne semble possible de la résoudre qu'en appliquant les principes de la théorie des fonctions analytiques; la détermination initiale de $\mathcal{G}(A, B)$, pour $\lambda = 0$, doit être la somme de la détermination de cette

fonction liée à la fonction de Green et d'une fonction holomorphe. Pour les solutions sans singularité, au contraire, il suffit de prendre une fonction finie et continue.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES.

10. **Équations généralisant les équations aux différentielles totales.** — Les formules qui donnent les variations de $g(A, B)$ ou de $\mathcal{G}(A, B)$ sont des *équations aux dérivées fonctionnelles* vérifiées par ces fonctionnelles; il peut exister d'autres solutions de ces équations, c'est-à-dire d'autres fonctionnelles dont les variations soient données par des formules analogues; dans la suite nous emploierons les notations $g(A, B)$ et $\mathcal{G}(A, B)$ pour désigner ces solutions plus générales, et si nous voulons parler des fonctions particulières considérées au numéro précédent, nous le spécifierons.

D'une manière générale, si une fonctionnelle U dépend de la fonction $x(t)$, on appelle *équation aux dérivées fonctionnelles* une équation définissant δU en fonction de x , δx et U . Le type le plus simple d'une telle équation est donc

$$(38) \quad \delta U = \int_0^1 \Phi [x | U, t] \delta x(t) dt.$$

Les équations du n° 9 sont d'une forme différente; le fait que l'on considère une fonctionnelle dépendant d'une ligne et non d'une fonction ne change rien d'essentiel; mais elle dépend en outre de paramètres, qui sont les coordonnées des points A et B. Considérons de même une fonctionnelle $U[x(t) | s]$, que nous désignerons plus simplement par $U(s)$, dépendant de $x(t)$ et en outre d'un paramètre s ; elle pourra vérifier une équation de la forme

$$(39) \quad \delta U(s) = \int_0^1 \Phi [x, U | s, t] \delta x(t) dt,$$

Φ pouvant dépendre des valeurs de U , pour la détermination considérée de la fonction $x(t)$, mais pour toutes les valeurs de s , et pas seulement celle qui figure au premier membre. L'introduction du paramètre s conduit ainsi à considérer des équations d'un type plus

général. En outre, si ce paramètre a une signification qui puisse être en relation avec celle de t (ce qui a lieu dans les exemples du n° 8), il arrivera souvent que la variation δU ne soit pas de la forme (39), mais contienne un terme en $\delta x(s)$.

Une telle équation permet de définir une fonctionnelle si l'on connaît sa valeur initiale. On le voit aisément en considérant des fonctions x dépendant d'un paramètre λ . L'équation (38) donne alors $\frac{dU}{d\lambda}$ en fonction de U et λ ; c'est une équation différentielle du premier ordre qui conduit au résultat indiqué. L'équation (39) présente des circonstances différentes; $\frac{dU}{d\lambda}$ apparaît comme une fonctionnelle de $U(s)$, dépendant en outre de s et de λ , et au lieu d'une équation différentielle, on a une *équation intégro-différentielle*. Volterra a étudié ces équations, dont la théorie, dans des cas étendus, généralise celle des équations différentielles : connaissant sa détermination initiale, on peut définir une solution de cette équation soit par une série de Taylor en λ , soit par des approximations successives. soit encore par une méthode qui généralise celle de Cauchy-Lipschitz. Du moins il en est ainsi si Φ , et par suite $\frac{dU}{d\lambda}$, considérés comme fonctionnelles de $U(s)$, sont continus d'ordre zéro. Mais dans le cas contraire, si par exemple les dérivées $\frac{dU}{ds}$ et $\frac{d^2U}{ds^2}$ interviennent. on a un type d'équations qui généralisent, non une équation différentielle, mais l'équation aux dérivées partielles

$$(40) \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \varphi \left(\lambda, s, u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right).$$

On sait que dans ce cas la théorie présente plus de difficultés.

11. La condition d'intégrabilité. — En considérant des fonctions $x(t)$ ou des contours qui ne dépendent que d'un paramètre λ , on cache un aspect essentiel de la théorie des équations aux dérivées fonctionnelles. Pour ces équations, comme pour les équations aux différentielles totales dont elles sont la généralisation, la question se pose de savoir si, une solution étant définie par sa valeur initiale U_0 au point $[x_0]$, on trouve en un point $[x_1]$ une détermination indépendante du chemin décrit dans l'espace fonctionnel de $[x_0]$ à $[x_1]$.

C'est à cette condition seulement que l'on pourra parler d'une solution de l'équation étudiée égale à U_0 au point $[x_0]$ [30, p. 156, ou 48, p. 96-100 et 107-110].

Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que, pour des fonctions $x(t)$ dépendant de deux paramètres, on ait

$$(41) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial U}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial U}{\partial \lambda},$$

et cette condition, déjà considérée au n° 5 sous le nom de *condition d'intégrabilité*, est aussi suffisante. Elle l'est en effet dans les questions ne comportant que deux variables indépendantes, et le cas général se ramène à celui-là, deux chemins quelconques qui vont dans l'espace fonctionnel du point $[x_0]$ au point $[x_1]$ pouvant toujours être considérés comme situés sur une même surface. lieu de points à deux paramètres λ et μ .

Il peut arriver que la condition d'intégrabilité soit vérifiée identiquement, c'est-à-dire pour toutes les déterminations possibles de x , $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ et de U . On dit alors que l'équation étudiée est *complètement intégrable*. Elle admet sûrement une solution prenant une valeur initiale arbitrairement choisie, qui dépend par conséquent d'une constante arbitraire dans le cas de l'équation (38), et d'une fonction arbitraire de s dans le cas de l'équation (39).

Si l'équation n'est pas complètement intégrable, il faut préciser le sens de ce que nous avons dit en disant que la condition (41) était suffisante. Cela veut dire que si, en partant du point $[x_0]$ avec une valeur initiale U_0 , nous avons calculé U pour chaque point $[x]$ en suivant un chemin déterminé (par exemple en suivant des lignes droites dans toutes les directions en partant du point $[x_0]$), et si nous avons vérifié que la condition d'intégrabilité est vérifiée pour la fonctionnelle U ainsi formée, quelles que soient les déterminations de x , $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial x}{\partial \mu}$, alors nous pouvons affirmer que cette fonctionnelle U vérifie, pour un déplacement quelconque, l'équation aux dérivées fonctionnelles étudiée.

On pourra d'ailleurs souvent se contenter de vérifier qu'au point $[x_0]$ la condition d'intégrabilité est vérifiée, et le reste pour un déplacement infinitésimal partant de ce point, en ce sens que les variations de tous les ordres des deux membres sont égales, la variation

de U étant naturellement remplacée par sa valeur déduite de l'équation étudiée. Si la fonctionnelle U est développable en série de Taylor en λ , ou peut être définie en partant de $[x_0]$ par une méthode d'approximations successives, cela suffit. On aura donc à former des conditions successives, que nous appellerons conditions d'intégrabilité d'ordres 1, 2, ..., n, dont chacune peut être obtenue en prenant la variation de la précédente. On obtient ainsi des conditions de plus en plus restrictives imposées à la détermination initiale U_0 . Même dans le cas des équations du type (39), où U_0 est une fonction d'un paramètre, ces conditions seront le plus souvent incompatibles. Une équation formée au hasard, non seulement ne sera pas en général complètement intégrable, mais n'aura en général aucune solution.

Ces conditions peuvent naturellement être compatibles, de sorte que l'équation étudiée aura des solutions, ayant des degrés de généralité très différents suivant les cas. Il y a d'ailleurs deux circonstances possibles : ou bien les conditions d'intégrabilité d'ordres de plus en plus élevés, tout en étant compatibles, restreignent de plus en plus le choix de la détermination initiale de U_0 ; ou bien pour une valeur finie de p la condition d'ordre $p + 1$ apparaît comme une conséquence de celles formées antérieurement, qui sont alors suffisantes.

Appliquons ces considérations aux équations formées au n° 9. La condition d'intégrabilité (d'ordre 1) se forme comme il a été indiqué au n° 6, avec quelques différences provenant de ce que la longueur d'arc s n'est pas, comme le paramètre t considéré au n° 6, une variable variant dans un intervalle déterminé, et conservant la même valeur quand on passe d'un point au point correspondant du contour voisin. Mais il y a toujours lieu de former deux conditions distinctes, la seconde dépendant spécialement des points particuliers mis en évidence.

La première, pour toutes les équations du n° 9, est identiquement vérifiée. La seconde l'est aussi pour les équations qui donnent $\delta \mathcal{G}(A, B)$ et $\delta_1 \mathcal{G}(A, B)$, qui sont donc complètement intégrables. Dans le cas de l'équation (36), elle s'écrit

$$(42) \quad \frac{dg(A, M)}{dn} \frac{dg(M, B)}{ds} + \frac{dg(A, M)}{ds} \frac{dg(M, B)}{dn} = 0.$$

Pour former les conditions d'ordres 2, 3, ..., c'est-à-dire pour

écrire que cette condition d'ordre un reste vérifiée quand le contour se déforme, il est nécessaire de tenir compte de la singularité de la fonction de Green quand les deux points dont elle dépend sont voisins l'un de l'autre et du contour.

En faisant d'abord abstraction de cette singularité, c'est-à-dire en cherchant les équations régulières de l'équation (36), on trouve une infinité de conditions distinctes, de plus en plus restrictives, mais toujours compatibles [30, p. 187-189 et 48, p. 128-130]. En tenant compte au contraire de la singularité de $g(A, B)$, on n'a qu'un nombre fini de conditions, qui se réduisent aux formules

$$(43) \quad \frac{dg(A, M)}{ds} = \frac{dg(M, B)}{ds} = 0.$$

Ces formules constituent donc la condition nécessaire et suffisante imposée à une fonction de deux points ayant la même singularité que la fonction de Green, pour qu'elle puisse être considérée comme la valeur initiale d'une fonction du contour dont la variation soit définie, pour toutes les déformations du contour, par la formule (36).

12. Équations aux dérivées fonctionnelles partielles. Leurs conditions d'intégrabilité. — Ces équations sont à l'équation (38) ce que les équations aux dérivées partielles sont aux équations différentielles. Il nous suffira, pour indiquer leurs propriétés, de traiter le cas d'une fonctionnelle U de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$, définies l'une et l'autre dans l'intervalle $(0, 1)$; supposons sa variation de la forme normale

$$(44) \quad \delta U = \int_0^1 (U'_x \delta x + U'_y \delta y) dt.$$

Si l'on se donne U'_x et U'_y en fonction de $[x]$, $[y]$, t et U , on obtient un type d'équation analogue à l'équation (38) et qui, comme elle, se rattache aux équations aux différentielles totales. Mais si l'on se donne seulement l'une d'elles, U'_y par exemple, en fonction de U , $[U'_x]$, $[x]$, $[y]$ et t , par une formule de la forme

$$(45) \quad U'_y = \Phi[x, y, U'_x | U, t],$$

on a une *équation aux dérivées fonctionnelles partielles*. Par la méthode du passage du discontinu au continu, cette équation se

déduit à la limite d'un système de n équations aux dérivées partielles vérifiées par une fonction de $2n$ variables.

Pour former d'abord sa condition d'intégrabilité, nous représenterons les variations U'_x et U'_y par les formules

$$(46) \quad \begin{cases} \delta U'_x = E(\delta x) + F(\delta y), \\ \delta U'_y = \mathcal{F}(\delta x) + G(\delta y). \end{cases}$$

On voit aisément que, pour que l'on ait

$$(47) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial U}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial U}{\partial \lambda}$$

quelle que soit la manière dont x et y dépendent de λ et μ , en d'autres termes pour que la variation δU définie par la formule (44) soit une différentielle exacte, il faut et il suffit que chacune des expressions E et G soit identique à son adjointe, et que les expressions F et \mathcal{F} soient les adjointes l'une de l'autre.

Mais au point de vue de l'équation (45), ce ne sont pas des conditions d'intégrabilité distinctes; U étant donné au point $[\gamma_0]$ et quelle que soit la détermination de $x(t)$, U , U'_x et $E(\delta x)$ sont des données, et la condition relative à l'expression E , qui doit être identique à son adjointe, est certainement vérifiée. De ces données, on déduit $\mathcal{F}(\delta x)$ en utilisant l'équation (45), puis $F(\delta y)$, qui est l'expression adjointe de $\mathcal{F}(\delta x)$, et enfin $G(\delta y)$ en utilisant de nouveau l'équation (45). Il reste à écrire que l'expression $G(\delta y)$ ainsi obtenue est identique à son adjointe.

Pour effectuer les calculs, il faut connaître la variation de la fonctionnelle Φ ; δU étant remplacé par son expression (44), elle est nécessairement de la forme

$$(48) \quad \delta U'_y = H(\delta U'_x) + L(\delta x) + L_1(\delta y).$$

Nous désignerons respectivement par \mathcal{H} et \mathcal{L} les expressions adjointes de H et L . En faisant le calcul qui vient d'être indiqué [30, p. 212-214 et 48, p. 156-158], on trouve

$$G(\delta y) = H \{ E[\mathcal{H}(\delta y)] \} + H[\mathcal{L}(\delta y)] + L_1(\delta y),$$

et comme le premier terme est une expression identique à son adjointe, puisque E l'est, il reste à écrire que l'expression

$$(49) \quad H[\mathcal{L}(\delta y)] + L_1(\delta y)$$

est identique à son adjointe. Telle est la condition d'intégrabilité de l'équation (45).

13. Intégration par les caractéristiques. — Pour faciliter l'exposé, nous introduirons quelques termes géométriques. Nous considérerons un espace fonctionnel, dont chaque point représente un ensemble de déterminations de $x(t)$, $y(t)$, et U . Cet espace est, par rapport aux espaces fonctionnels déjà considérés, ce qu'est l'espace à $2n+1$ dimensions par rapport à l'espace à n dimensions.

Nous appellerons *variétés* des lieux de points plus ou moins étendus; nous aurons d'une manière précise à considérer deux sortes de variétés, les *surfaces* et les *hypercourbes*. Une *surface* est un lieu de points vérifiant une seule condition d'égalité; sur une telle surface, U sera une fonctionnelle déterminée de $x(t)$ et $y(t)$, qui peuvent être choisis arbitrairement (du moins en laissant de côté les *cylindres* définis par une relation qui ne contient pas U). Une surface est un *plan* si U est une fonctionnelle linéaire de $x(t)$ et $y(t)$. Pour une surface quelconque, ou du moins telle que U admette une variation δU , l'expression de δU en fonction de δx et δy définit en chaque point le *plan tangent*. L'ensemble d'un point et du plan tangent constitue l'*élément de contact* défini analytiquement, si δU est une fonctionnelle linéaire normale, par les données de $x(t)$, $y(t)$, U , U'_x , U'_y ; il dépend de quatre fonctions arbitraires et d'un paramètre. Mais les *éléments d'intégrales*, vérifiant l'équation (44), ne dépendent que de trois fonctions et d'un paramètre.

Nous appellerons *hypercourbe* un lieu de points dépendant d'une fonction arbitraire. que, pour fixer les idées, nous supposerons être $y(t)$; sur une hypercourbe, $x(t)$ et U sont donc des fonctionnelles dépendant de $y(t)$ suivant une loi bien déterminée. Si cette dépendance est linéaire, l'hypercourbe est une *hyperdroite*, et dans le cas général les expressions de δx et δU en fonction de δy définissent la *tangente* à l'hypercourbe. Enfin nous appellerons *multiplicité* l'ensemble des éléments de contact constitués chacun par un point d'une hypercourbe et un plan contenant la tangente à l'hypercourbe en ce point.

Le problème de Cauchy, que nous n'avons considéré au numéro précédent que dans un cas particulier, consiste dans la recherche d'une surface intégrale passant par une hypercourbe donnée. On peut le résoudre en déterminant successivement, en chaque point de l'hypercourbe, les éléments caractéristiques des divers ordres, c'est-à-dire ceux qui figurent dans les variations des divers ordres de U .

Les éléments du premier ordre, ceux qui définissent le plan tangent à la surface intégrale, c'est-à-dire les dérivées fonctionnelles U'_x et U'_y , sont définis par l'équation (45), et la condition que ce plan tangent contienne la tangente à l'hypercourbe, c'est-à-dire que l'équation (44) soit vérifiée pour tout déplacement infinitésimal situé sur l'hypercourbe; on obtient ainsi une multiplicité \mathcal{M} , contenant l'hypercourbe donnée, et dont les éléments de contact sont des éléments d'intégrales. Les dérivées fonctionnelles U'_x et U'_y étant ainsi déterminées, on déterminera de même les éléments du second ordre, c'est-à-dire les fonctionnelles linéaires $E(\delta x)$, $F(\delta y)$, $\mathcal{F}(\delta x)$, $G(\delta y)$, puis ceux d'ordres plus élevés.

Il peut arriver que les équations linéaires que l'on a ainsi à étudier successivement présentent des impossibilités ou des indéterminations. Si l'équation (45) est linéaire par rapport à U'_x et U'_y , cela peut se produire dès le calcul des dérivées fonctionnelles U'_x et U'_y ; il peut arriver que U'_x puisse être choisi arbitrairement, U'_y résultant alors de l'équation (45); l'hypercourbe donnée est alors *caractéristique*. Si l'équation (45) n'est pas linéaire, cette circonstance n'est pas possible, et la multiplicité \mathcal{M} pourra généralement être déterminée sans ambiguïté, ou du moins ses déterminations possibles ne dépendent pas d'une fonction arbitraire; mais une indétermination aussi complète que pour les caractéristiques des équations linéaires peut se présenter pour les éléments du second ordre, l'expression $E(\delta x)$ pouvant alors être choisie arbitrairement, à cela près bien entendu qu'elle doit être identique à son adjointe, et les expressions $F(\delta y)$, $\mathcal{F}(\delta x)$, $G(\delta y)$ s'en déduisant sans ambiguïté. La multiplicité \mathcal{M} est alors caractéristique.

Les calculs, que l'on trouvera dans nos *Leçons d'Analyse fonctionnelle* [30, p. 217-219 et 48, p. 161-164], ne présentent aucune difficulté. Une multiplicité est caractéristique si, ses éléments x , y , U , U'_x , U'_y étant supposés exprimés en fonction de $y(t)$, on a pour toute variation de $y(t)$

$$(50) \quad \begin{cases} \delta x = -\mathcal{H}(\delta y), \\ \delta U = \int_0^1 [U'_y - H(U'_x)] \delta y \, dt, \\ \delta U'_x = \mathcal{L}(\delta y), \\ \delta U'_y = \mathcal{L}_1(\delta y), \end{cases}$$

les symboles H , \mathcal{H} , \mathcal{L} et \mathcal{L}' , ayant la signification indiquée n° 12; ce sont des expressions introduites par la différentiation de l'équation étudiée. Ces équations conviennent d'ailleurs même dans le cas linéaire; mais dans ce cas l'expression H et la différence $U'_y - H(U'_x)$ étant indépendantes de U'_x et U'_y , les deux premières relations définissent les variations de x et U sans que l'on ait fait intervenir U'_x et U'_y ; on a alors des hypercourbes caractéristiques, communes à une infinité de multiplicités caractéristiques.

Ces équations des caractéristiques sont des équations se rattachant aux équations aux différentielles totales. Elles définissent parfaitement la manière dont l'élément de contact x, y, U, U'_x, U'_y varie en fonction de y . Elles sont d'ailleurs complètement intégrables, si l'équation (45) elle-même est complètement intégrable, de sorte qu'un élément de contact donné, à l'exception de certains éléments singuliers, appartient à une multiplicité bien déterminée qui vérifie les équations (50). Si l'élément de contact donné est un élément d'intégrale, cette multiplicité est une caractéristique de l'équation (45). Dans le cas contraire, c'est une caractéristique d'une des équations du même type obtenue en ajoutant au second membre une fonction de t , indépendante de x, y, U et U'_x . Une telle multiplicité dépend des déterminations initiales de x, U, U'_x, U'_y choisie pour la fonction initiale $y_0(t)$. Mais les caractéristiques de l'équation (45), U'_y étant défini par cette équation, ne dépendent que des déterminations initiales de x, U, U'_x ; elles dépendent donc de deux fonctions et d'un paramètre arbitraires.

On démontre [30, p. 220-221 et 48, p. 164-165] que, comme pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre, toute surface intégrale est un lieu de caractéristiques, et ce résultat conduit à l'intégration de l'équation étudiée et à la résolution du problème de Cauchy relatif à cette équation. La surface intégrale contenant une hypercourbe, dans le cas d'une équation non linéaire, s'obtient en déterminant d'abord en chaque point U'_x et U'_y comme il a été dit plus haut, puis en déterminant la caractéristique qui contient l'élément ainsi obtenu; la surface intégrale cherchée est nécessairement le lieu des caractéristiques ainsi définies en partant des divers points de l'hypercourbe donnée, et comme on peut vérifier que la surface ainsi formée est bien une surface intégrale, on a du même coup établi l'existence des intégrales et intégré l'équation.

Nous entendons par là qu'on a ramené son intégration à des problèmes théoriquement plus élémentaires : résolution des équations fonctionnelles donnant en chaque point x et y , ce qui est un problème d'analyse ordinaire, mais qui peut être très difficile; intégration des équations (50), qui peuvent s'intégrer par la méthode des approximations successives si les expressions \mathcal{H} , \mathcal{L} et L_1 sont des fonctionnelles linéaires de δy bien définies et continues dans l'espace L_2 .

14. La notion d'intégrale complète. — Pour montrer à quel point la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre se généralise, indiquons encore la généralisation de la notion d'intégrale complète [30, p. 227-229 et 48, p. 171-173]. Une *intégrale complète* sera toujours une famille de surfaces intégrales Σ contenant dans leur ensemble tous les éléments d'intégrales. Elles doivent dépendre d'une fonction arbitraire de t et d'un paramètre (par exemple les déterminations de U_x et U relatives, sur la surface considérée, à un système particulier de déterminations de x et y). Une surface intégrale quelconque S est l'*enveloppe* de surfaces Σ de l'intégrale complète ayant un plus ou moins grand degré de généralité, puisqu'en chaque point de S existe une surface Σ qui lui est tangente. La méthode d'intégration de Lagrange se généralise ainsi sans difficulté. Le problème de Cauchy se résout aussi aisément, la surface inconnue S étant l'enveloppe des surfaces Σ qui touchent l'hypercourbe donnée.

Il est essentiel de remarquer que l'intégrale complète n'existe que pour les équations complètement intégrables; la détermination d'une intégrale complète dispense de former la condition d'intégrabilité. Si l'on a pu intégrer une équation, c'est évidemment qu'elle est intégrable.

15. L'extension des équations de Jacobi-Hamilton. — Une application importante des théories précédentes est fournie par des équations qui généralisent les équations aux dérivées partielles de Jacobi-Hamilton liées au calcul des variations. Ces équations ont été étudiées par MM. Volterra [36], Fréchet [9], et par nous-même [29], [30, p. 233-241 et 48, p. 177-189]. Nous nous contenterons de traiter le cas particulier d'une équation liée au problème de Dirichlet relatif à l'équation de Laplace, problème qui nous a déjà fourni des exemples d'équations aux dérivées fonctionnelles ordinaires.

On sait que le problème de Dirichlet, qui consiste à déterminer une fonction $z(x, y)$ harmonique et régulière dans la région S intérieure à un contour C en connaissant ses valeurs $u(s)$ sur le contour, est lié à la recherche du minimum de l'intégrale

$$I = \iint_S \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Parmi toutes les fonctions $z(x, y)$ régulières et égales à $u(s)$ sur le contour, celle qui rend cette intégrale minima est précisément la fonction harmonique, dont la détermination constitue le problème de Dirichlet.

Le minimum de I , réalisé pour cette fonction, est une fonctionnelle Φ de C et de $u(s)$, dont la variation, lorsque C et $u(s)$ varient, est de la forme

$$(51) \quad \delta\Phi = \int_C (\Phi'_u \delta_1 u + \Phi'_n \delta n) ds,$$

avec

$$(52) \quad \Phi'_u = -2u_1, \quad \Phi'_n = u_1^2 - u'^2,$$

u_1 désignant la dérivée normale de la fonction harmonique $z(x, y)$, comptée positivement vers l'intérieur, et u' la dérivée par rapport à s ; δn et le symbole δ_1 ont la même signification qu'au n° 9.

L'élimination de u_1 donne l'équation

$$(53) \quad \Phi'_n = \frac{1}{4} \Phi_u'^2 - u'^2,$$

qui est du type (45), à cela près que Φ , au lieu de dépendre de deux fonctions, dépend d'un contour et d'une fonction donnée sur ce contour; cela nécessite certains changements de détail, mais aucune modification essentielle, à la théorie que nous venons d'exposer.

Il est facile de définir une intégrale complète de cette équation. Remplaçons à cet effet l'aire S par la région comprise entre C et un autre contour Γ sur lequel $z(x, y)$ doit prendre des valeurs $v(s)$, et ajoutons une constante arbitraire Φ_0 à la définition de Φ . Lorsque Γ , $v(s)$ et Φ_0 sont fixes, on obtient une fonctionnelle de C et $u(s)$ que nous désignerons encore par Φ , pour laquelle les formules (52) restent exactes et qui par suite est une solution de l'équation (53). On a ainsi des solutions d'un degré de généralité plus grand qu'il ne faut pour constituer une intégrale complète.

On vérifie d'ailleurs aisément que ces solutions, contenant un élément d'intégrale quelconque (du moins moyennant certaines restrictions sur la nature analytique du contour et des fonctions u et Φ'_u), permettent d'intégrer l'équation (53), qui est donc complètement intégrable. Un élément d'intégrale étant constitué par un ensemble de déterminations de C , $u(s)$, Φ , Φ'_u , Φ'_n qui vérifient l'équation (53), on en déduit u_1 par les formules (52); on prendra alors pour $z(x, y)$ la fonction harmonique, régulière dans le voisinage du contour C , égale à $u(s)$ sur ce contour, sa dérivée normale étant égale à $u_1(s)$; prenant ensuite pour Γ un contour assez voisin de C pour que la fonction $z(x, y)$ soit régulière entre C et Γ , pour $v(s)$ les valeurs de $z(x, y)$ sur Γ , et pour Φ_0 une valeur convenable, on obtient une fonctionnelle Φ qui contient l'élément d'intégrale donné.

Considérons maintenant, sur une des intégrales Φ , l'ensemble des éléments qui correspondent à une même fonction harmonique $z(x, y)$; ils ne dépendent que du choix du contour C , et constituent une multiplicité caractéristique.

On voit avec quelle facilité on peut intégrer l'équation (53), soit en partant d'une intégrale complète, soit par la méthode des caractéristiques. Ces résultats sont d'ailleurs aisés à vérifier par le calcul, par application des équations (50) convenablement modifiées.

CHAPITRE III.

L'INTÉGRATION DANS LE DOMAINE FONCTIONNEL.

16. **Notions générales.** — L'étude des équations aux dérivées fonctionnelles partielles d'ordres supérieurs au premier ne peut être abordée qu'après l'étude de l'intégration dans le domaine fonctionnel. Cette étude préalable n'était pas nécessaire pour les équations du premier ordre, qui peuvent être étudiées localement, c'est-à-dire que les données relatives à une très petite région, la donnée même d'un seul élément de contact, suffisent pour définir certaines parties de la surface intégrale loin de cette région ou de cet élément, comme le montre la théorie des caractéristiques. Il n'en est pas de même pour les équations du second ordre; si par exemple une fonction harmonique dans l'espace est définie par ses valeurs sur une surface à l'intérieur de laquelle elle est régulière, sa valeur en n'importe

quel point intérieur dépend de l'ensemble des données et ne peut être définie que par une intégrale de surface. L'étude des équations à seconds membres nécessite l'introduction d'une intégrale de volume. Il en est de même dans les espaces fonctionnels.

Or l'étude de l'intégration dans ces espaces présente des particularités que nous avons exposées dans nos *Leçons d'Analyse fonctionnelle* [30, p. 262-374 et 48, p. 209-298], en utilisant des indications données antérieurement par E. Borel [3], M. Fréchet [11] et R. Gâteaux [19, p. 48 à 53].

Ces particularités proviennent essentiellement de la circonstance suivante. Dans l'espace à n dimensions, le rapport de deux volumes semblables est, k^n , si k est le rapport de similitude. L'espace Ω , image de L_2 , s'obtient en faisant croître n indéfiniment; le rapport en question est en général nul ou infini. Il en résulte que deux volumes ne seront presque jamais comparables; l'un d'eux sera presque toujours négligeable devant l'autre. Quelle que soit l'unité de volume adoptée, un volume sera presque toujours nul ou infini, puisque parmi une infinité de volumes homothétiques les uns des autres par rapport à un point fixe, un au plus aura une mesure finie et non nulle.

Cela ne rend d'ailleurs pas impossible une théorie de la mesure et de l'intégration dans les espaces fonctionnels; mais les diverses parties d'un volume et par suite les valeurs des intégrales considérées seront mesurées, non par des nombres, mais par des symboles indiquant la croissance plus ou moins rapide de certaines fonctions de n , symboles pour lesquels on peut employer les notations de nombres transfinis introduites par E. Borel.

On échappe en partie à ces difficultés en considérant la notion de moyenne. Une fonctionnelle continue, définie dans un certain volume de L_2 , a souvent une moyenne bien déterminée, finie et non nulle, et en tout cas comprise entre les valeurs extrêmes de la fonctionnelle. Pourtant nous allons voir que cette moyenne a des caractères bien différents de ceux d'une moyenne dans l'espace ordinaire.

17. La notion de moyenne dans l'espace Ω . — Le passage du fini à l'infini peut être effectué de plusieurs manières différentes. Il en résulte plusieurs définitions de la moyenne dans l'espace Ω ou dans L_2 qui, comme nous le verrons, peuvent n'être pas équiva-

lentes. Mais pour toutes ces définitions, la moyenne a certaines propriétés qui résultent de ce que la moyenne d'une fonctionnelle U dans un volume V de l'espace de Ω est la limite de la moyenne d'une fonction U_n dans un volume V_n de l'espace E_n . Nous allons d'abord étudier ces propriétés. Nous étudierons surtout le cas où V est une *sphère* de rayon R ; V_n sera aussi une *sphère* de rayon R_n égal, suivant le point de vue où l'on se place, à R ou à $R\sqrt{n}$.

Supposons d'abord les volumes considérés de formes quelconques, et divisons chacun des volumes V_n et V en deux parties par une surface S_n ou S (S étant la limite de S_n pour n infini). Il arrivera en général, d'après les remarques du n° 16, qu'une de ces parties soit, n devenant infini, négligeable devant l'autre, et par suite les valeurs de la fonction étudiée dans ce volume partiel seront sans influence sur le calcul de la moyenne.

Supposons alors le volume V divisé en un nombre quelconque de parties par des surfaces de niveau $U = \text{const.}$ Une de ces parties l'emportera en général sur les autres et comptera seule pour le calcul de la moyenne. La subdivisant à nouveau, et recommençant indéfiniment, on arrive à cette conclusion qu'une seule valeur c de U compte pour le calcul de la moyenne; la surface $U = c$, ou du moins le volume compris entre les surfaces voisines $U = c - \varepsilon$ et $U = c + \varepsilon$, constitue presque tout le volume V , le reste pouvant être négligé. La valeur moyenne cherchée est donc c ; mais *ce n'est pas une moyenne véritable tenant compte effectivement de plusieurs valeurs distinctes affectées de poids convenables; une seule valeur l'emporte sur les autres et détermine à elle seule la moyenne.*

Il n'en sera pas toujours ainsi. Pour indiquer tout de suite un cas d'exception, considérons le *cylindre de révolution*

$$(54) \quad 0 < a_1 < 1, \quad a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 + \dots < 1$$

($a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ désignant des coordonnées orthogonales dans l'espace Ω). Si l'on divise ce cylindre en tranches par des plans $a_1 = \text{const.}$, les volumes de ces tranches seront proportionnels à leurs hauteurs, et la moyenne d'une fonctionnelle de la forme $U = f(a_1)$ est égale à la moyenne au sens ordinaire des valeurs de cette fonction quand a_1 varie de 0 à 1.

Considérons au contraire le cas de la sphère $r^2 < R^2$ et d'une fonctionnelle de la forme $U = f(r)$, r désignant la distance à l'origine définie par la formule

$$(55) \quad r^2 = \int_0^1 x^2(t) dt = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots$$

Les surfaces de niveau sont alors des sphères concentriques. Dans l'espace E_n , le volume de la sphère de rayon r est de la forme $k_n r^n$. Celui de la couronne comprise entre les sphères de rayons r et $r + dr$ est $n k_n r^{n-1} dr$. Il en résulte que, pour n infini, la couronne extérieure, qui correspond à $r = R$, l'emporte sur les autres. Cette valeur de r compte seule, et la moyenne cherchée est $f(R)$.

Du même raisonnement résulte évidemment que, pour une fonctionnelle uniformément continue dans le volume d'une sphère, sa valeur moyenne dans ce volume ne dépend que de ses valeurs sur la surface; l'intérieur du volume est négligeable par rapport aux parties voisines de la surface. On peut alors définir la moyenne sur la surface et montrer que *la moyenne dans la sphère est égale à la moyenne sur sa surface*.

Pour un volume de forme quelconque, les parties intérieures sont toujours négligeables par rapport aux parties voisines de la surface; *la valeur moyenne d'une fonctionnelle dans le volume ne dépend donc que de ses valeurs sur la surface*. Mais la moyenne d'une fonctionnelle dans le volume n'est pas toujours égale à sa moyenne sur la surface; on peut montrer [30, p. 329 et 48, p. 291-292] qu'elle se ramène à une moyenne sur la surface, mais calculée en donnant à chaque élément de surface un poids proportionnel à sa mesure et inversement proportionnel à la « courbure moyenne ». Les parties pour lesquelles cette courbure moyenne est négative peuvent d'ailleurs être négligées.

Revenons au cas de la sphère, et considérons maintenant le cas d'une fonctionnelle de la forme $f(a)$, a désignant la distance à un plan diamétral. Dans l'espace E_n , la section de la sphère V_n de rayon R_n par un plan $a = \text{const.}$ est une sphère d'un espace ou plan à $n - 1$ dimensions, dont le rayon est $\rho = \sqrt{R_n^2 - a^2}$. Le volume de la tranche comprise entre deux plans a et $a + da$ est alors $k_{n-1} \rho^{n-1} da$. Pour n infini, la tranche correspondant à la valeur maxima de ρ l'emportera, de sorte que presque toute la sphère est constituée par le voisi-

nage immédiat du plan $a = 0$. Le reste est négligeable. La moyenne cherchée, si la fonction $f(a)$ est continue pour $a = 0$, est $f(0)$.

De même, si a_1, a_2, \dots, a_p désignent les distances à plusieurs plans, on peut négliger les parties de la sphère qui ne sont pas voisines du plan $a_1 = 0$, celles qui ne sont pas voisines du plan $a_2 = 0$, et ainsi de suite. On peut donc ne tenir compte que des parties voisines de l'intersection de ces plans, et de la surface. La moyenne d'une fonction continue $f(a_1, a_2, \dots, a_p, r)$ sera donc $f(0, 0, \dots, 0, R)$.

Considérons maintenant une fonctionnelle U *uniformément continue* dans la sphère de rayon R , ce qui signifie qu'à tout ε positif on peut faire correspondre η tel que si la distance de deux points est $< \eta R$, la différence des valeurs correspondantes de U sera $< \varepsilon$. Sa moyenne sera la limite de la moyenne d'une fonction U_n de n variables définie dans une sphère de rayon R_n dans l'espace E_n , et si la distance de deux points de cette sphère est $< \eta R_n$, la différence des valeurs correspondantes de la fonction sera $< \varepsilon$.

Parmi les surfaces de niveau $U_n = \text{const.}$, il en existe une, soit $U_n = c_n$, qui divise la surface de la sphère en deux parties égales. Si nous considérons la bande, lieu des points de la surface de la sphère situés à une distance au plus égale à ηR_n de son intersection avec la surface $U_n = c_n$, les valeurs de U_n dans cette bande sont comprises entre $c_n - \varepsilon$ et $c_n + \varepsilon$. Or on peut montrer [30, p. 279 et 48, p. 226-228] que cette bande représente une fraction de la surface de la sphère équivalente pour n infini à la surface totale. Cela résulte de ce que l'aire de cette bande est maxima si la surface $U_n = c_n$ est un plan diamétral, et, d'après ce qui précède, le résultat est vrai dans ce cas. A la limite, dans l'espace fonctionnel, on peut donc négliger les parties de la surface et par suite du volume intérieur à la sphère pour lesquelles U n'est pas compris entre $c - \varepsilon$ et $c + \varepsilon$, c étant la limite de c_n . Cela montre que, si cette limite existe, point sur lequel nous n'insisterons pas, la moyenne de U dans la sphère est c et que *la fonctionnelle est presque partout presque égale à cette moyenne, les parties du volume pour lesquelles il n'en est pas ainsi étant négligeables*. Ce résultat suppose simplement, en plus de l'existence de la limite c , la continuité uniforme de U .

Il peut s'étendre à d'autres régions que la sphère. On peut montrer [30, p. 365-368 et 48, p. 279-287] qu'il s'étend à toutes les régions limitées par des surfaces convexes et telles que les rayons de

courbure des sections normales aient une limite supérieure finie R , indépendante du point et de la direction de la section considérée. Une telle surface sera nécessairement tout entière intérieure à n'importe quelle sphère de rayon R qu'elle touche intérieurement.

Pour toutes ces surfaces, on peut donc dire qu'une fonctionnelle uniformément continue a presque partout la même valeur. Cela est vrai en particulier de la courbure moyenne, si elle est uniformément continue, résultat dont nous concluons que la moyenne d'une fonctionnelle continue dans le volume limité par une telle surface est égale à la moyenne sur la surface. Ce résultat est d'ailleurs exact pour certains volumes dans lesquels on ne peut pas affirmer qu'une fonctionnelle uniformément continue est presque partout égale à sa moyenne, comme le cylindre de révolution défini par les formules (54). Il est donc très général. Mais on peut former des cas où il est en défaut [30, p. 374].

18. Formules relatives à la sphère. — Il est utile de préciser les résultats précédents par quelques formules relatives à la sphère.

On connaît la loi des grands nombres du calcul des probabilités (théorèmes de Bernoulli et de Moivre). Après n expériences effectuées dans des conditions identiques, la différence entre la fréquence d'un événement et sa probabilité théorique est presque sûrement très petite, si n est grand; mais cela n'empêche pas de mettre en évidence une loi de probabilité limite. Le produit de cette différence par \sqrt{n} obéit à une loi qui tend vers une loi limite bien déterminée, la loi *normale*, ou loi de *Laplace-Gauss*. Nous allons trouver exactement les mêmes circonstances en étudiant la loi de probabilité à laquelle obéit une des coordonnées a_i d'un point de la surface de la sphère

$$(56) \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = R^2.$$

Ce que nous trouverons pour la surface s'appliquera alors aussi, d'après le numéro précédent, au volume de la sphère.

Nous savons déjà que chacun des a_i est presque sûrement très petit, et nous pouvons ajouter que sa valeur quadratique moyenne étant $\frac{R}{\sqrt{n}}$, il est de l'ordre de grandeur de cette quantité. Posons donc $x_i = a_i \sqrt{n}$. Le point x_1, x_2, \dots, x_n sera alors un point choisi au hasard sur la sphère

$$(57) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = nR^2$$

de rayon $R\sqrt{n}$. Montrons que chacun des x_i obéit à une loi de probabilité qui tend, pour n infini, vers la loi normale, le paramètre qui intervient dans l'expression de cette loi étant évidemment défini par la condition que la valeur quadratique moyenne de x_i soit R .

Pour n fini, la probabilité que x_i soit compris dans un intervalle $(0, x)$ est évidemment

$$\lambda_n \int_0^{|x|} \left(1 - \frac{x^2}{nR^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} d \arcsin \frac{x}{R\sqrt{n}},$$

λ_n étant un coefficient, indépendant de x et R , facile à former. Il est d'ailleurs équivalent pour n infini à $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}$, de sorte que cette probabilité tend vers la valeur

$$(58) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{|x|} e^{-\frac{x^2}{2R^2}} \frac{dx}{R},$$

qui correspond bien à la loi normale.

On peut préciser ce résultat en montrant que la moyenne d'une fonction des x_i peut se calculer en supposant que ces variables obéissent indépendamment les unes des autres à cette loi. Il n'y a aucune difficulté si l'on ne considère que des x_i en nombre fini [30, p. 267 et 48, p. 215]. Mais cela est vrai aussi pour une fonction de tous les x_i . Pour n fini, on a évidemment des lois différentes en supposant le point x_1, x_2, \dots, x_n pris au hasard sur la surface de la sphère (57), ou à son intérieur, ou en supposant que les x_i soient des variables indépendantes obéissant à la loi (58). Mais à la limite cela revient au même, et donne, moyennant certaines conditions de continuité, la même valeur moyenne pour une fonctionnelle définie comme limite d'une fonction de x_1, x_2, \dots, x_n .

On vérifie en effet immédiatement que la probabilité d'un petit volume dV , en admettant que x_1, x_2, \dots, x_n soient des variables indépendantes obéissant à cette loi, ne dépend que de sa distance au centre. Si $\mu(R)$ désigne la moyenne d'une fonction sur la surface de la sphère (57), la moyenne de cette même fonction avec la loi considérée est donc de la forme

$$(59) \quad \int_0^\infty \varphi(\rho) \mu(\rho) d\rho, \quad \left[\int_0^\infty \varphi(\rho) d\rho = 1 \right].$$

C'est, comme d'ailleurs la moyenne dans le volume de la sphère, une moyenne entre les différentes moyennes $\mu(\rho)$.

D'autre part, chacune des quantités x_i^2 ayant R^2 comme valeur probable, leur moyenne ρ^2 diffère très peu de R^2 , si n est grand, et si l'on néglige des cas très peu probables. Cela veut dire que dans le calcul de la valeur moyenne (59), les valeurs de ρ voisines de R comptent seules à la limite, comme c'était le cas pour la moyenne dans le volume de la sphère, et l'expression (59) a, pour n infini, la même limite que $\mu(R)$,

C. Q. F. D.

19. **Définition de la moyenne d'après Gâteaux.** — Le procédé le plus naturel pour définir la moyenne d'une fonctionnelle $U[x]$ dans un volume V de l'espace L_2 repose sur le passage du discontinu au continu; c'est celui employé par Gâteaux [18, p. 48 à 53].

Il considère une fonction simple d'ordre n , c'est-à-dire une fonction ayant une valeur constante x_i dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$. Une telle fonction peut être représentée par un point x_1, x_2, \dots, x_n de l'espace E_n à n dimensions, que l'on peut considérer comme une variété linéaire de l'espace L_2 ; c'est la $n^{\text{ème}}$ section de cet espace. Mais il importe de remarquer que les définitions de la distance de deux points relatives à l'espace E_n et à l'espace L_2 ne coïncident pas; en désignant respectivement par ρ et r les distances à l'origine dans l'espace E_n et dans l'espace L_2 , on a

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \quad r^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n},$$

d'où $\rho = r\sqrt{n}$; la distance r relative à l'espace L_2 est ce qu'on peut appeler la *distance réduite* dans l'espace E_n . Si, n augmentant indéfiniment, deux points sont à une distance finie l'un de l'autre, leur distance réduite tend vers zéro, et ils sont confondus à la limite dans l'espace L_2 . De là vient qu'une fonctionnelle comme $x(t_1)$, t_1 désignant une valeur particulière de t , qui dans l'espace E_n se réduit à l'un des x_i , est continue dans E_n avec un module de continuité indépendant de n , et ne l'est pas dans l'espace L_2 , ou plus exactement n'a pas de sens dans cet espace.

La $n^{\text{ème}}$ section d'un volume V de l'espace L_2 sera sa section V_n par l'espace E_n . Si, par exemple, V est une sphère de rayon R ayant l'origine pour centre, V_n sera une sphère de rayon réduit R , et par suite

de rayon $R\sqrt{n}$. D'après Gâteaux, la moyenne d'une fonctionnelle $U[x]$ dans V sera par définition la limite, pour n infini, de sa moyenne dans V_n .

Avec cette définition, bien que la fonctionnelle $x(t_1)$ ne soit pas quelque chose de bien défini en chaque point de L_2 , sa moyenne dans un volume, par exemple dans la sphère de rayon R ayant l'origine pour centre, a une valeur bien définie. Cette fonctionnelle se réduisant dans E_n à l'un des x_i , non seulement nous voyons que sa moyenne dans la sphère considérée est nulle, mais il résulte du n° 18 que l'on peut dire qu'elle obéit à la loi de probabilité définie par la formule (58); cela veut dire que la probabilité que $x(t_1)$, dans la $n^{\text{ième}}$ section de cette sphère, soit compris entre deux nombres donnés, tend pour n infini vers la valeur résultant de cette loi. De même plusieurs fonctionnelles $x(t_1)$, $x(t_2)$, ..., $x(t_p)$, d'après le n° 18, peuvent être considérées comme des variables indépendantes obéissant à cette même loi. De là résultent immédiatement la valeur moyenne dans la sphère considérée de la fonctionnelle

$$(60) \quad \varphi[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_p)]$$

et par suite (moyennant certaines conditions de continuité imposées à la fonction φ), celle d'une intégrale du type

$$(61) \quad \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_p), t_1, t_2, \dots, t_p] dt_1 dt_2 \dots dt_p.$$

Mais il y a une différence essentielle entre les expressions (60) et (61). La première n'est pas une fonctionnelle continue, et a des valeurs différentes les unes des autres dans une tranche d'épaisseur réduite très faible du volume V_n , qui constitue à la limite presque tout le volume V ; elle peut donc obéir, et obéit en fait d'après ce qui précède, à une véritable loi de probabilité. Au contraire, la fonctionnelle (61) est, d'après le n° 17, presque partout égale ou presque égale à sa moyenne, les valeurs différentes ayant une probabilité nulle. Bien entendu cela ne veut pas dire que si, sans rien connaître des considérations précédentes, on forme au hasard une fonction $x(t)$, on ait chance d'obtenir la valeur moyenne de la fonctionnelle (61); on ne peut la déduire que de la loi de probabilité à laquelle obéit l'expression (60).

De la moyenne de l'expression (61), on déduit aisément celle de

fonctionnelles plus générales, sommes d'expressions de la forme (61) en nombre fini ou infini. La définition de la moyenne, ainsi obtenue d'abord pour certaines fonctionnelles, peut s'étendre à une classe de fonctionnelles beaucoup plus étendue.

20. **La notion de mesure dans les ensembles abstraits.** — 1° Dans l'espace euclidien, la notion de la moyenne est liée à une mesure. Le passage à la limite sur lequel reposent les considérations développées dans les nos 17 à 20 fait disparaître les caractères essentiels de la mesure dans les espaces à un nombre fini de dimensions. Une circonstance analogue se produit dans un problème plus élémentaire, quand pour définir la moyenne d'une fonction d'un nombre entier N , on suppose N choisi au hasard entre 1 et n (chaque valeur possible ayant pour probabilité $\frac{1}{n}$), et qu'on fait ensuite croître n indéfiniment.

Il existe une théorie de la mesure dans les espaces abstraits, qui évite cet inconvénient, et peut s'appliquer à certains espaces fonctionnels. Elle a été créée en 1915 par M. Fréchet [13], puis développée par P. J. Daniell [5] et N. Wiener [39]. Nous avons montré en 1924 [31] que cette théorie de la mesure ne s'appliquait, ou du moins ne pouvait donner des résultats satisfaisants, que dans des espaces ayant au plus la puissance du continu (ce qui est le cas pour les espaces Ω , C , L_2 , à condition de faire pour ces derniers la convention indiquée au n° 2, 3°). Après avoir rappelé ce qu'il y a d'essentiel pour la suite dans ces résultats, nous verrons les difficultés qui se présentent si l'on essaye de rattacher à une telle mesure la moyenne au sens de Gâteaux.

2° L'idée de mesure implique avant tout qu'étant donné un ensemble E , que nous appellerons un *volume*, auquel on attribue une mesure positive α . on puisse le partager en volumes partiels V_1, V_2, \dots, V_p , auxquels on attribuera des mesures $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, non négatives et de somme α . Chaque volume partiel V_h sera à son tour divisé en volumes partiels $V_{h,k}$ ($k = 1, 2, \dots, q_h$), que l'on subdivisera à leur tour. et ainsi de suite indéfiniment. Nous appellerons *partition* un mode de division de V en volumes partiels subdivisés à leur tour comme il vient d'être dit. La partition sera dite *pondérée* si l'on associe à chacun des volumes v successivement mis

en évidence une mesure $m(\nu)$; la mesure de n'importe quelle réunion E de volumes ν disjoints sera la somme $\Sigma m(\nu)$ étendue à tous ces volumes ν .

Il est évidemment possible de réaliser l'image de la partition sur une droite, ou un segment de droite D ; on le divisera en p intervalles partiels I_1, I_2, \dots, I_p qui correspondront chacun à un volume V_h ; on divisera ensuite chaque I_h en intervalles partiels $I_{h,k}$ qui correspondront chacun à un $V_{h,k}$, et ainsi de suite. On obtiendra ainsi l'*image linéaire* de la partition. Cette représentation établit une correspondance biunivoque entre les points du segment D et certains sous-ensembles e de l'ensemble donné E . C'est donc seulement si E a la puissance du continu qu'il peut arriver que chaque e contienne un élément et un seul de E . Si E a une puissance supérieure à celle du continu, il arrivera nécessairement qu'au moins certains des e aient eux-mêmes une puissance supérieure à celle du continu; la partition n'aura pas réussi à *séparer* tous les éléments de E . Si au contraire E a une puissance inférieure à celle du continu, presque tous les e sont vides. C'est ce qui arrivera par exemple si E est l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1, et que les e soient des intervalles, de sorte qu'on peut prendre chaque e lui-même pour son image linéaire. Bien entendu, cela n'empêche pas de définir une mesure pour un ensemble fini ou dénombrable en se donnant la mesure de chaque élément. Mais l'emploi d'une partition apparaît essentiellement comme un procédé pour définir des mesures dans un ensemble ayant la puissance du continu, en faisant correspondre à chaque élément e de E un point x du segment D .

Une même partition, si l'on fait varier les poids $\alpha_h, \alpha_{h,k}, \dots$, permet de définir une infinité de mesures. On peut alors utiliser sa représentation linéaire de deux manières différentes. On peut, en faisant varier les poids, conserver une même image linéaire; alors à chaque mesure définie sur D correspond une mesure dans E ; en d'autres termes les différentes lois de probabilité que l'on peut définir dans E à l'aide de la partition considérée ont pour images les différentes lois que l'on peut définir sur D .

L'autre manière d'utiliser la représentation linéaire de la partition consiste à la faire varier avec les poids, de manière à faire correspondre à chaque volume ν distingué par la partition un intervalle de longueur précisément égale à la mesure $m(\nu)$. Alors la mesure (ou,

si l'on préfère, la probabilité) définie dans E correspond exactement à la mesure géométrique, au sens de Lebesgue, sur le segment D .

D'une manière ou de l'autre, on voit que, *du moins au point de vue où nous nous plaçons, il n'y a pas d'autres lois de probabilité que celles dont on peut faire l'image sur une droite* (ou un segment de droite).

Les ensembles *mesurables* seront ceux dont l'image est mesurable. Il faut distinguer naturellement les ensembles *mesurables-B* et les ensembles *mesurables* (au sens de Lebesgue). Les premiers sont les éléments du plus petit corps de Borel comprenant tous les ν ; ce corps ne dépend que de la partition, et non des poids choisis. La définition des ensembles de mesure nulle, et par suite celle des ensembles mesurables les plus généraux, dépend au contraire des poids.

Une fonction $f(e)$ définie pour chaque élément e de E devenant une fonction $\mu(x)$ de l'image linéaire de x , l'intégration dans E se ramène à l'intégration dans D . Si nous nous sommes placés dans le cas où la mesure définie dans E est la mesure géométrique dans D , on est ramené à l'intégrale de Lebesgue ordinaire (autrement ce serait une intégrale de Lebesgue-Stieltjes).

3° On peut d'autre part, sans utiliser la représentation linéaire de la partition, développer une théorie analogue à celle de Riemann-Darboux : c'est ce qu'a fait M. Fréchet dans son mémoire de 1915. La fonction $f(e)$ est dite *intégrable-R* si, pourvu que la division du volume V en volumes partiels ν soit poussée assez loin, on peut rendre l'oscillation de $f(e)$ dans chaque ν inférieure à un nombre donné ε , positif et arbitrairement petit. M. Fréchet, suivant la théorie de Riemann-Darboux, définit alors des sommes inférieures et des sommes supérieures, dont la différence est $< \varepsilon m(V)$, et dont la limite commune est l'intégrale.

Ce qui nous intéresse ici, c'est l'intégration des fonctions continues. Nous admettrons, non seulement la continuité de $f(e)$, mais sa *continuité uniforme* qui, dans un espace à une infinité de dimensions (même si l'on se borne à un volume fini), ne résulte pas de la continuité simple. Une telle fonction apparaîtrait comme intégrable si les volumes ν distingués par la partition pouvaient être très petits dans tous les sens. Or, cela n'est possible que dans un espace à n dimensions où le volume qui généralise le cube se décompose en 2^n

volumes semblables, et linéairement deux fois plus petits. Dans un espace à une infinité de dimensions, il en faudrait une infinité non dénombrable, que la partition ne saurait distinguer. La théorie de la mesure, au sens de M. Fréchet, n'en a pas moins des applications intéressantes. Nous allons en indiquer deux.

4° La première est précisément relative au *cube* à une infinité de dimensions. Pour parler d'un tel cube, il faut naturellement se placer, non dans Ω , mais dans l'espace E_ω , dans lequel un point A (ou B) est défini par une suite de nombres a_n (ou b_n) bornés dans leur ensemble, la distance AB étant la borne supérieure de $|b_n - a_n|$. Le cube de côté l est alors le lieu des points dont la distance au centre du cube est $\leq \frac{l}{2}$. La théorie de l'intégration dans un tel cube a été développée par B. Jessen [46].

On peut y définir une partition de la manière suivante : après n opérations, les régions distinguées sont des *parallélépipèdes* dont les n premiers côtés (parallèles aux n premiers axes) auront respectivement pour longueurs

$$\frac{l}{2^n}, \frac{l}{2^{n-1}}, \dots, \frac{l}{2},$$

tous les autres restant égaux à l . Les dimensions se réduiront ainsi successivement, et, si loin qu'on pousse les opérations, il n'y en aura qu'un nombre fini qui seront devenues très petites.

On ne peut pas, dans ces conditions, espérer intégrer n'importe quelle fonction uniformément continue. Ainsi la borne supérieure de $|\sin \pi a_n|$ (pour $n = 1, 2, \dots$) est sommable, mais non intégrable-R. Mais on voit aisément que les fonctions de la forme $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sont intégrables-R (pour la partition qui vient d'être définie); il en est donc de même de la limite de n'importe quelle suite uniformément convergente de fonctions de cette forme.

5° Considérons maintenant, encore dans E_ω , un volume dont les dimensions successives soient de plus en plus étroites; par exemple le volume $|a_n| < c_n$ ($c_n > 0$; $c_n \rightarrow 0$ pour n infini). Alors une partition analogue à celle que nous venons de définir pour le cube donne des volumes élémentaires qui seront tous, à partir d'un certain moment, très petits dans tous les sens. Alors n'importe quelle fonctionnelle uniformément continue est intégrable-R.

Cette remarque a deux applications importantes en calcul fonctionnel.

L'une est relative au champ des fonctions $x(t)$, définies dans $(0, 1)$, bornées par un nombre donné, et vérifiant une condition de Lipschitz donnée $|x(t+h) - x(h)| \leq \varphi(|h|)$, $\varphi(h)$ tendant vers zéro avec h . Ce champ définit dans C un volume compact, qui se ramène au type que nous venons de considérer si l'on prend comme coordonnées successives

$$x(0), \quad x(1), \quad x\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{x(0) + x(1)}{2}, \quad x\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left[x(0) + x\left(\frac{1}{2}\right)\right], \\ x\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\left[x\left(\frac{1}{2}\right) + x(1)\right], \quad x\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2}\left[x(0) + x\left(\frac{1}{4}\right)\right], \quad \dots;$$

une fonctionnelle uniformément continue dans C y est donc intégrable-R.

L'autre application est relative aux espaces de Wiener, dont l'étude doit faire l'objet d'un autre fascicule (en attendant, voir dans P. Lévy [47], les chapitres consacrés aux mouvements browniens).

21. Cas des espaces Ω et L_2 . — Nous allons voir qu'au contraire, dans les sphères de ces espaces, si l'on cherche à y définir, non une mesure arbitraire, mais celle qu'il est naturel de considérer comme la mesure géométrique, qui notamment doit être invariante par un déplacement quelconque (la notion de rotation étant, comme celle de translation, bien définie dans ces espaces), le choix d'une partition ne permet pas d'échapper aux difficultés signalées aux nos 16 à 19.

1° Plaçons-nous d'abord dans Ω , et prenons pour V la sphère $r \leq R$ (r étant la distance à l'origine). Sa $n^{\text{ième}}$ section V_n , définie par $a_\nu = 0$ pour $\nu > n$, sera aussi une sphère de rayon R . On définit une partition à la fois dans V et dans tous les V_n en prenant pour surfaces de séparation tous les plans $x_h = \pm c_k$ [$h, k = 1, 2, \dots$, les c_k formant un ensemble partout dense dans $(0, R)$]; on les rangera dans un ordre quelconque]. Une région ainsi distinguée à la $N^{\text{ième}}$ opération aura d'abord un poids positif; mais ce poids varie avec n , et les régions séparées de l'origine par des plans $a_h = c_k$ ont à la limite un poids nul. Ce qu'on obtient ainsi comme limite d'une mesure n'est donc pas une mesure, car le voisinage de l'origine doit être considéré comme ayant un poids nul, et tout point autre que

l'origine appartient, à partir du moment où la division de la sphère en volumes partiels est poussée assez loin, à une région de poids nul. A la limite, les poids positifs ne se retrouvent nulle part.

La partition qui vient d'être définie n'en permet pas moins de considérer comme intégrables-R les fonctions continues de la forme $f_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$, et par suite aussi les limites uniformes de telles fonctions. Mais la moyenne d'une telle fonction ne sera pas une *vraie moyenne*, comme dans le cas du cube : *la région contenant le centre est prépondérante, et la moyenne de la valeur de la fonction considérée est sa valeur au centre de la sphère* ⁽¹⁾. Il peut y avoir intérêt à définir une autre partition dans la même sphère V en introduisant à la fois, pour limiter les volumes partiels ν , des plans $a_n = \pm c_k$ et des sphères $r = c_k$. Alors n'importe quel point de V est à partir d'un certain moment intérieur à un volume ν très petit *dans tous les sens*, mais toujours sans que cela ait lieu uniformément dans toute la sphère. Une fonction de la forme $\varphi(r)$, qui n'était pas intégrable-R dans la sphère, le devient, et sa valeur moyenne est $\varphi(R)$; ce n'est plus sa valeur au centre. Le champ des fonctions qui sont intégrables-R est ainsi plus étendu; mais il existe toujours des fonctions uniformément continues qui ne sont pas intégrables-R.

Une remarque très simple montre d'ailleurs qu'il est impossible d'échapper aux conséquences du fait qu'il ne s'agit pas là d'une théorie de l'intégration au sens de M. Fréchet, et que la limite d'une mesure n'est pas ici une mesure. Considérons la fonction

$$u = \sum_1^{\infty} c_n \alpha_n^2, \quad \text{où } c_{2p} = 0, \quad c_{2p+1} = 2.$$

Elle est bien continue dans Ω , et uniformément continue dans V, et sa valeur moyenne dans cette sphère est R^2 . Mais il suffit de changer l'ordre des axes pour obtenir comme limite de sa moyenne dans la $n^{\text{ième}}$ section de V n'importe quelle valeur donnée entre

(1) La même propriété est vérifiée, plus généralement, par les fonctionnelles harmoniques. Mais la classe des fonctionnelles harmoniques, comme on le verra plus loin, n'est pas invariante par un changement d'axes, ni même par un simple changement de l'ordre des axes. La classe définie dans le texte est celle des fonctionnelles qui restent harmoniques pour n'importe quel changement de l'ordre des axes.

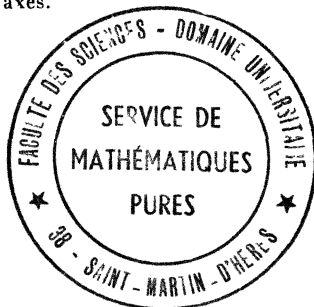
0 et $2R^2$ (inclus), ou pour obtenir des oscillations sans qu'il y ait de limite. Il n'en serait pas ainsi si la théorie de M. Fréchet était applicable (1).

2° Revenons maintenant à l'espace L_2 et à la moyenne dans une sphère au sens de Gâteaux. La théorie de Gâteaux est tout à fait analogue à celle que nous venons d'exposer pour l'espace Ω . Elle présente ce même caractère qu'on y considère la sphère comme limite d'une $n^{\text{ième}}$ section qui, quelque grand que soit n , n'en donne pas plus une bonne approximation que l'ensemble des n premiers nombres entiers ne donne une idée d'une suite infinie. On y poursuivra donc en vain une limite, dont on ne sera jamais sûr d'approcher si l'on ne sait rien d'autre, sur la fonction dont on cherche la moyenne, que son mode de continuité.

La manière naturelle de comparer la théorie de Gâteaux à celle que nous venons d'exposer pour une sphère de l'espace Ω repose sur les deux règles suivantes : d'une part on ne considérera les $n^{\text{èmes}}$ sections d'une sphère V de l'espace L_2 que pour les valeurs $2, 4, \dots, 2^k, \dots$ de n ; d'autre part pour la $k^{\text{ème}}$ des approximations ainsi obtenues, chaque fonction $x(t)$ sera représentée par sa *projection orthogonale* $x_n(t)$ sur la variété linéaire des fonctions simples d'ordre $n = 2^k$, c'est-à-dire par la fonction égale, dans chacun des intervalles $\left(\frac{\nu-1}{n}, \frac{\nu}{n}\right)$, à la moyenne de $x(t)$ dans cet intervalle. Ainsi modifiée, la moyenne au sens de Gâteaux est exactement celle qu'on obtient en utilisant les fonctions orthogonales de Rademacher pour définir dans L_2 un système d'axes complets, puis, la sphère V de L_2 étant devenue une sphère de Ω , en y définissant la moyenne comme il a été indiqué au 1° ci-dessus.

Un problème qui se pose tout naturellement, puisque la moyenne ainsi définie n'est pas invariante par un changement des axes de coordonnées, est le suivant : quelles conditions doit remplir une suite complète de fonctions orthogonales pour que la moyenne dans une sphère au sens de Gâteaux coïncide avec celle obtenue en utilisant ces

(1) Les fonctionnelles harmoniques dans l'espace Ω étant caractérisées par un théorème de la moyenne (Voir n° 23 ci-dessous), cette remarque suffit à montrer que, comme nous l'avons annoncé (note de la p. 50), la notion de fonctionnelle harmonique n'est pas invariante par un changement d'axes.



fonctions orthogonales pour définir des axes dans L_2 et être ramené à la moyenne dans une sphère de Ω ? Comme ces conditions dépendent de l'ordre des termes de la suite, nous avons proposé de dire, quand elles sont vérifiées, que cet ordre est *normal*. Cette expression n'est d'ailleurs pas tout à fait correcte. Si en général ce caractère est invariant seulement par les permutations d'un groupe bien déterminé, facile à définir, il existe des suites pour lesquelles tous les ordres sont normaux et d'autres pour lesquelles aucun ordre n'est normal. Nous ne pouvons ici que renvoyer le lecteur à l'exposé plus complet de cette question que nous avons publié ailleurs [48, p. 247-261].

D'autre part, comme dans le cas d'une sphère de L_2 , il y aura une classe importante de fonctionnelles dont la moyenne est toujours égale à leur valeur au centre; ce sont celles pour lesquelles, dans la sphère V , il y a convergence uniforme de $U[x_n(t)]$ vers $U[x(t)]$. On peut, si leur variation seconde est de la forme normale (21), les caractériser par la propriété

$$(62) \quad U''_s(t) = 0.$$

La propriété ci-dessus, relative à la moyenne dans une sphère, est d'ailleurs vérifiée par une classe plus étendue de fonctionnelles, les fonctionnelles harmoniques, dont nous allons maintenant nous occuper. La classe plus restreinte définie par la condition (62) coïncide avec la classe invariante par les changements de coordonnées considérée plus haut (voir la note de la p. 50).

22. Application aux fonctionnelles harmoniques. — Une fonction $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables est harmonique si la quantité

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

est nulle. On démontre aisément que cette quantité Δu , en un point où u prend la valeur u_0 , peut être définie comme limite, pour r infiniment petit, de la moyenne de $2 \frac{u - u_0}{r^2}$ sur une sphère de rayon réduit r , c'est-à-dire de rayon $r\sqrt{n}$. À la limite, dans l'espace Ω , ou dans L_2 , nous définirons ΔU comme limite de la moyenne de $2 \frac{U - U_0}{r^2}$ sur une sphère de rayon infiniment petit r . Une fonctionnelle harmonique est une fonctionnelle pour laquelle $\Delta U = 0$.

Cette définition implique l'existence de la moyenne considérée et de sa limite.

Comme dans l'espace à n dimensions, on démontre que la valeur moyenne d'une fonctionnelle harmonique à la surface d'une sphère, ou à son intérieur, ce qui revient au même, est égale à sa valeur au centre. Si la sphère est infiniment petite cela est vrai par définition; mais cela est vrai aussi pour une sphère de rayon fini.

L'expression de ΔU ne dépend naturellement en chaque point que de la variation seconde de U .

Si, se plaçant dans l'espace L_2 , on introduit les dérivées fonctionnelles secondes U''_{x^i} et $U''_{x^i x^j}$, la forme normale de $\delta^2 U$ étant alors donnée par la formule (21), on trouve, par application des formules du n° 19 pour la moyenne dans une sphère,

$$\Delta U = \int_0^1 U''_{x^i} dt.$$

Si, au contraire, on se place dans l'espace Ω , on trouve

$$\Delta U = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial a_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial a_n^2} \right],$$

et il est clair que ces deux définitions de ΔU coïncident lorsque les définitions de la moyenne dans une sphère, dont elles sont déduites, coïncident, c'est-à-dire lorsque l'ordre des coordonnées a_n est normal, et dans ce cas seulement.

La théorie des fonctionnelles harmoniques est à certains points de vue beaucoup plus simple que la théorie des fonctions harmoniques de n variables. Les particularités assez curieuses de cette théorie résultent de ce fait que sur une sphère une fonctionnelle continue a presque partout la même valeur. Nous nous contenterons d'en indiquer quelques-unes, renvoyant pour le reste à nos *Leçons d'Analyse fonctionnelle* [30, p. 375-420 et 48, p. 299-356]. *Précisons bien que tous ces énoncés supposent l'existence des moyennes qui y interviennent (voir dans le second des Ouvrages cités leur extension au cas où ces moyennes n'existent pas).*

1° On établit aisément la relation

$$\Delta f(U, V, W) = f'_U \Delta U + f'_V \Delta V + f'_W \Delta W,$$

qui montre qu'une fonction de plusieurs fonctionnelles harmoniques est elle-même une fonctionnelle harmonique. En particulier U et $f(U)$ étant harmoniques en même temps, cette propriété ne dépend que des surfaces de niveau $U = \text{const.}$

2° En chaque point d'une surface, on peut définir la *courbure moyenne*, moyenne des courbures des différentes sections normales; ces courbures sont d'ailleurs, pour presque toutes les directions, égales à leur moyenne. Si K est en chaque point la courbure moyenne de la surface de niveau qui passe en ce point, et si $\frac{dU}{dn}$ est la dérivée normale à cette surface, on a

$$\Delta U = -K \frac{dU}{dn}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonctionnelle soit harmonique est donc que les surfaces de niveau soient minima, c'est-à-dire aient partout leur courbure moyenne nulle.

3° Le potentiel de double couche, étudié par Gâteaux [19. p. 53-63], est un exemple de fonctionnelle harmonique. Dans l'espace à n dimensions, à un facteur près, égal à la surface de la sphère de rayon unité, le potentiel d'une double couche étalée sur une surface convexe S est égal en chaque point intérieur à la moyenne de la densité u , vue de ce point, c'est-à-dire que l'on donne à chaque élément de surface un poids égal à l'angle solide sous lequel il est vu de ce point; cette moyenne est donc égale à la moyenne sur une sphère ayant ce point pour centre et sur laquelle on ferait la perspective de la surface. Cette définition a été étendue par Gâteaux à l'espace fonctionnel.

Comme il s'agit d'une moyenne sur une sphère, la densité, vue du point considéré A , a presque partout la même valeur. Parmi les régions $u = c$, une seule, vue de A , paraît constituer presque toute la surface S ; mais, naturellement la valeur de c , qui sera alors celle du potentiel en A , dépend de ce point.

Lorsque A tend vers un point M de la surface S , la section de cette surface par le plan passant par A et parallèle au plan tangent en M , vue de A , paraît constituer presque toute la surface. Comme elle est très petite et voisine de M , les valeurs de u sur cette section sont très peu différentes de la valeur de u en M ; la valeur du potentiel U en A , moyenne des valeurs de u sur cette section, tend donc vers $u(M)$. La

valeur limite du potentiel, sur la surface, est donc la densité de la couche attirante. Comme le potentiel est une fonctionnelle harmonique, il résout le problème de la détermination d'une fonctionnelle harmonique par ses valeurs sur une surface fermée convexe S (problème de Dirichlet). Naturellement, ce problème n'est ainsi résolu que si les moyennes qui interviennent dans la définition du potentiel de double couche existent.

Ces résultats subsistent sans modification si S est une surface non convexe, mais à courbure moyenne toujours dirigée vers l'intérieur et ne s'annulant pas (ou même ne s'annulant qu'exceptionnellement).

4° Les surfaces de niveau étant minima, le problème de Dirichlet peut être résolu par la détermination de la surface minima $U = c$, bien définie par son intersection avec S . D'après ce qui précède, c'est le lieu des points d'où cette intersection paraît constituer presque toute la surface.

Dans l'espace à n dimensions, le lieu des points tels qu'une telle intersection, vue de ces points, partage l'espace en deux angles solides égaux, n'a rien de commun avec la surface minima limitée à cette intersection; sa détermination est beaucoup plus élémentaire. Pour n infini, ces deux surfaces se confondent; donc les problèmes de Dirichlet et de Plateau se confondent entre eux, et se confondent aussi avec un problème plus élémentaire (qui, pour n fini, n'implique pas l'intégration d'une équation aux dérivées partielles).

5° Le problème de Dirichlet reste bien posé si l'on enlève une partie de la surface S que nous venons de définir, et si l'on se donne les valeurs de U sur la portion de surface S' qui reste. La fonctionnelle harmonique U est alors bien définie dans la région comprise entre S' et la surface minima limitée au contour de S' .

Pour les surfaces dont la courbure moyenne change de signe, il peut arriver, même si elles ne sont pas fermées, que certaines parties apparaissent comme intérieures aux autres. La donnée de U sur ces parties de surface est alors surabondante.



BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ARZELA (C.). — Funzioni di linee (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, vol. V, 1^{er} sem., 1889, p. 342-348).
- [2] ARZELA (C.). — Sulle funzioni di linee (*Memorie della R. Accademia delle Scienze delle Istituto di Bologna, sezione delle Scienze e matematiche*, serie 5, t. V, 1895, p. 55-74).
- [3] BOREL (Émile). — Introduction géométrique à quelques théories physiques Paris, Gauthier-Villars, 1914.
- [4] BOULIGAND (G.). — Sur les modes de continuité de certaines fonctionnelles (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XLVII, 1923).
- [5] DANIELL (P. J.). — A General form of Integral (*Annals of Mathematics*, Series 2, vol. 19, p. 279-294. Voir aussi vol. 20).
- [6] FISCHER (E.). — Notes présentées à l'Académie des Sciences, notamment t. 144, 1907, p. 1022 et 1148.
- [7] FRÉCHET (M.). — Sur quelques points du calcul fonctionnel (*Thèse*, Paris, 1906, et *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXII, 1906, 2^e semestre, p. 1-74).
On trouvera à la fin de ce Mémoire une bibliographie des ouvrages et mémoires relatifs au Calcul fonctionnel abstrait, parus avant 1906.
- [8] FRÉCHET (M.). — Sur les opérations linéaires (*Transactions of the American Mathematical Society*, t. V, 1904, p. 493-499, et t. VI, 1905, p. 134-140).
- [9] FRÉCHET (M.). — Sur une extension de la méthode de Jacobi-Hamilton (*Annali di Matematica pura ed applicata*, serie III, t. XI, 1905, p. 187-199).
- [10] FRÉCHET (M.). — Sur les fonctionnelles continues (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. 27, 1910, p. 193-216).
- [11] FRÉCHET (M.). — Les singularités des espaces à un très grand nombre de dimensions (*Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences*, Le Havre, 29 juillet 1914).
- [12] FRÉCHET (M.). — Sur les fonctionnelles bilinéaires (*Transactions of the American Mathematical Society*, vol. XVI, n^o 3, p. 215-234, juillet 1915).
- [13] FRÉCHET (M.). — Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLIII, 1915, p. 248-265).
- [14] FRÉCHET (M.). — Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits (*Fundamenta Mathematicæ*, t. IV, 1922, p. 329-365, et t. V, 1923, p. 206-251).

- [15] FRÉCHET (M.). — Prolongement des fonctionnelles continues sur un ensemble abstrait (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XLVIII, mai 1924).
- [16] FRÉCHET (M.). — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, passim; notamment, t. 144 (1907), p. 1414; t. 148 (1909), p. 155 et 279; t. 150 (1910), p. 1231 et t. 152 (1911), p. 845 et 1050.
- [17] FREDHOLM (I.). — Sur une classe d'équations fonctionnelles (*Acta mathematica*, t. 27, 1903, p. 365-390).
- [18] GÂTEAUX (R.). — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences et Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1913-1914, passim.
- [19] GÂTEAUX (R.). — Sur la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel et sur la théorie du potentiel (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLVII, 1919, p. 47-67).
- [20] GÂTEAUX (R.). — Fonctions d'une infinité de variables indépendantes (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLVII, 1919, p. 70-96).
- [21] HADAMARD (J.). — Sur les opérations fonctionnelles. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 136, 1^{er} sem., 1903, p. 351-354).
- [22] HADAMARD (J.). — Sur les dérivées des fonctions de lignes (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXX, 1902, p. 40-43).
- [23] HADAMARD (J.). — Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, t. XXIII, n^o 4, p. 1-128.
- [24] HADAMARD (J.). — Leçons sur le Calcul des variations. Paris, Hermann, 1910.
- [25] LALESKO (T.). — Introduction à la théorie des équations intégrales. Paris, Gauthier-Villars, 1912.
- [26] LEBESGUE (H.). — Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris, Gauthier-Villars, 1904.
- [27] LÉVY (Paul). — Sur les équations intégral-différentielles définissant des fonctions de lignes (d'après la terminologie adoptée depuis, le titre serait : *Sur les équations aux dérivées fonctionnelles*) (Thèse, Paris, 1911, p. 1 à 120, et *Journal de l'École Polytechnique*, 2^e série, 17^e cahier, 1913).
- [28] LÉVY (Paul). — Sur les équations aux dérivées fonctionnelles et leur application à la physique mathématique (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXXIII, 1^{er} sem., 1912, p. 281-312).
- [29] LÉVY (Paul). — Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXXVII, 1^o sem., 1914, p. 113-168).
- [30] LÉVY (Paul). — Leçons d'Analyse fonctionnelle. Paris, Gauthier-Villars, 1922, p. 1-442.
- [31] LÉVY (Paul). — Sur les lois de probabilité dans les ensembles abstraits (*Revue de Métaphysique et de Morale*, t. 33, 1925, p. 149 à 174).

- [32] PICARD (Émile). — Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXIX, 1^{er} sem., 1910, p. 79-97).
- [33] RIESZ (F.). — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Passim, Notamment, t. 144 (1907), p. 615, 734 et 1409; t. 148 (1909), p. 1303 et t. 150 (1910), p. 674.
- [34] RIESZ (F.). — Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. 28, 1911, p. 33-62).
- [35] TRICOMI (F.). — Una classe di equazioni alle derivate funzionali (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 5^a serie, t. XXX, 1921, 2^o sem., p. 402-405 et 456-460).
- [36] VOLTERRA (V.). — *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, depuis 1887, *passim*. Notamment 1887-1890, 1896, 1914.
- [37] VOLTERRA (V.). — Leçons sur les équations intégrales et intégréo-différentielles. Paris, Gauthier-Villars, 1913.
- [38] VOLTERRA (V.). — Leçons sur les fonctions de lignes. Paris, Gauthier-Villars, 1913.
- [39] WIENER (N.). — The mean of a functional of arbitrary elements (*Publications of the Massachusetts Institute of Technology*, series II, n^o 14, janvier 1921).
- [40] WIENER (N.). — Differential space (*Publications of the Massachusetts Institute of Technology*, Series II, n^o 60, juin 1923).
- [41] WIENER (N.). — The average value of a functional (*Publication of the Massachusetts Institute of Technology*, Series II, n^o 83, mai 1924).
- [42] WIENER (N.). — Un problème de probabilités dénombrables (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. L, 1924).
- [43] FRÉCHET (M.). — Sur la notion de différentielle dans le calcul fonctionnel (*Congrès des Sociétés savantes*, 1912).
- [44] FRÉCHET (M.). — Les espaces abstraits (Paris, Gauthier-Villars, 1928).
- [45] FRÉCHET (M.). — Sur la notion de différentielle (*Journal de mathématiques* (102, 1937, p. 233-250).
- [46] JESSEN (B.). — The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions (*Acta mathematica*, 63, 1934, p. 249-323).
- [47] LÉVY (P.). — Processus stochastiques et mouvement brownien (Paris, Gauthier-Villars, 1948).
- [48] LÉVY (P.). — Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle (réédition du [30] avec quelques changements, et addition d'une quatrième partie, rédigée par F. Pellegrino. Paris, Gauthier-Villars, 1951).
- [49] MOORE (E. H.). Introduction to a form of general analysis. (The New-Haven Colloquium, 1910).

