

ANDRÉ CHARRUEAU

Sur des congruences de droites ou de courbes et sur une transformation de contact liée à ces congruences

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 115 (1950)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1950__115__1_0

© Gauthier-Villars, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BSM 3957

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXV

Sur des congruences de droites ou de courbes
et sur une transformation de contact liée à ces congruences

Par M. ANDRÉ CHARRUEAU

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées,
Docteur ès Sciences mathématiques.

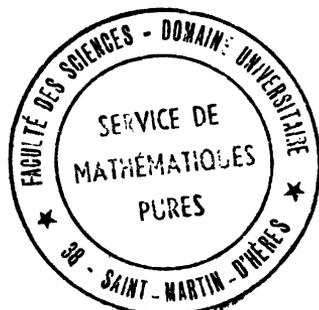


PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1950



Copyright by Gauthier-Villars, 1950.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

SUR DES CONGRUENCES
DE DROITES OU DE COURBES
ET
SUR UNE TRANSFORMATION DE CONTACT
LIÉE A CES CONGRUENCES

Par M. André CHARRUEAU

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées,
Docteur ès Sciences mathématiques.

INTRODUCTION.

L'étude de certains couples de congruences de droites conduit à la découverte de faits géométriques d'un grand intérêt.

Ce résultat est dû, essentiellement, à une transformation de contact que l'on rencontre dans cette théorie et qui se révèle remarquable à de nombreux titres.

La transformation dont il s'agit est déterminée par deux points O_1 , O_2 et deux vecteurs libres \vec{I}_1 , \vec{I}_2 .

Son étude fait intervenir, en particulier, un système de vecteurs \mathfrak{S} constitué par un couple de moment égal à $\overrightarrow{O_1 O_2}$ et par deux vecteurs

glissants équipollents à $-\vec{I}_1$ et à \vec{I}_2 et dont les supports passent respectivement par O_1 et O_2 . On est ainsi conduit à distinguer trois cas :

- 1° le cas général de \mathcal{S} quelconque ;
- 2° le cas particulier de O_1 et O_2 confondus, \mathcal{S} étant, par suite, formé par un vecteur unique ;
- 3° le cas particulier de \mathcal{S} réductible à un vecteur unique, mais O_1 et O_2 étant distincts.

Nous allons exposer un ensemble de résultats que nous avons obtenus dans ce domaine et dont certains ont été publiés dans un Mémoire et dans diverses Notes ⁽¹⁾.

Les trois Parties du présent travail sont relatives respectivement aux trois cas dont nous venons de parler.

(1) André CHARRUEAU, *C. R. Acad. Sc.*, t. 221, 1945, p. 274; *Bull. Sc. math.*, 2^e série, t. 70, 1946, p. 127; *C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 620, 792, 1052, 1262 et 1396; *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 155 et 364.

PREMIÈRE PARTIE

CAS GÉNÉRAL.

CHAPITRE I.

COUPLES DE CONGRUENCES DE DROITES

A SURFACE MOYENNE PLANE, DÉDUITES D'UNE MÊME SURFACE QUELCONQUE.

1. **Congruences de droites déduites d'une surface par des constructions de Guichard.** — Soient s une surface non développable quelconque, a l'un de ses points, ϖ son plan tangent en a , \vec{n} un vecteur unitaire normal à ϖ . Considérons un point O_1 quelconque et un vecteur \vec{I}_1 quelconque. Soit M_1 l'extrémité du vecteur

$$(1) \quad \overrightarrow{O_1 M_1} = \vec{I}_1 \wedge \overrightarrow{O_1 a}.$$

Par le point M_1 menons une droite D_1 parallèle à \vec{n} . Quand a se déplace sur s , D_1 engendre une congruence \mathcal{C}_1 . Nous dirons que \mathcal{C}_1 a été déduite de s par la *construction de Guichard* ⁽¹⁾ relative au point O_1 et au vecteur \vec{I}_1 .

A tout élément linéaire de s , la construction précédente fait correspondre un élément linéaire orthogonal du plan passant par O_1 et perpendiculaire à \vec{I}_1 . En raison de propriétés des congruences de Ribaucour ⁽²⁾, \mathcal{C}_1 jouit notamment des propriétés suivantes. Elle admet pour surface moyenne le plan passant par O_1 et perpendiculaire

⁽¹⁾ GUICHARD, *Sur les congruences dont la surface moyenne est un plan* (C. R. Acad. S., t. 114, 1892, p. 723).

⁽²⁾ DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Gauthier Villars, Paris, t. 4, nouveau tirage, p. 13 et 61.

à \vec{I}_1 . Ses développables correspondent aux asymptotiques de s . Chaque plan focal de D_1 est perpendiculaire à la tangente asymptotique de s , relative à a , correspondant à la développable à laquelle il est tangent.

Considérons maintenant un autre point O_2 quelconque et un autre vecteur \vec{I}_2 quelconque. Soit M_2 l'extrémité du vecteur

$$(2) \quad \overrightarrow{O_2 M_2} = \vec{I}_2 \wedge \overrightarrow{O_2 a}.$$

Par le point M_2 menons une droite D_2 parallèle à \vec{n} . Quand a se déplace sur s , D_2 engendre une congruence \mathcal{C}_2 , déduite de s par la construction de Guichard relative au point O_2 et au vecteur \vec{I}_2 . \mathcal{C}_2 jouit de propriétés analogues à celles de \mathcal{C}_1 .

Soient F_1 et G_1 les points focaux de D_1 , F_2 et G_2 ceux de D_2 . F_1 et F_2 , d'une part, G_1 et G_2 , d'autre part, correspondent à une même ligne asymptotique de s ⁽¹⁾. M_1 et M_2 sont respectivement les points moyens de D_1 et de D_2 .

D'après ce qui précède, chaque plan focal de D_1 et le plan focal correspondant de D_2 sont parallèles.

Comme les congruences \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont engendrées par *deux droites parallèles* et que *leurs développables se correspondent*, elles jouissent, d'abord, des propriétés suivantes ⁽²⁾.

Les droites $F_1 F_2$ et $G_1 G_2$ qui joignent les points focaux correspondants de D_1 et de D_2 se coupent en un point A qui est celui où le plan Π des deux droites D_1 et D_2 touche son enveloppe, S .

Les droites $F_1 F_2$ et $G_1 G_2$ sont deux tangentes conjuguées de S et les courbes conjuguées de S qu'elles enveloppent correspondent aux deux familles de développables de \mathcal{C}_1 et de \mathcal{C}_2 , donc *aux asymptotiques* de s . Quand le point a se déplace sur une ligne asymptotique de s , la tangente à la courbe décrite sur S par le point A passe par les points focaux de D_1 et de D_2 correspondant à l'autre ligne asymptotique de s .

⁽¹⁾ Pour D_1 ou D_2 , le point focal correspondant à une ligne asymptotique de s est le point focal où la droite est tangente à l'arête de rebroussement de la développable correspondant à cette ligne asymptotique, c'est-à-dire engendrée par la droite quand le point se déplace sur la dite ligne asymptotique.

⁽²⁾ DARBOUX, *loc. cit.*, p. 106 et 129.

Décrivons du point A comme centre deux sphères de rayons R et R + d, d étant une constante arbitraire et R une quantité variable définie par

$$(3) \quad \frac{\overrightarrow{AM_1}}{\overrightarrow{AM_2}} = \frac{R}{R+d}.$$

Menons par la droite D₁ deux plans tangents à la première sphère. Les points de contact de ces plans et de cette sphère sont également les points de contact de celle-ci et de son enveloppe. Propriété analogue de D₂ et de la deuxième sphère.

2. Relations entre les éléments de contact (a, ω) et (A, Π). —

Puisque le plan Π est parallèle à \vec{n} , les plans ω et Π sont perpendiculaires.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires quelconques de coordonnées; x₁, y₁, z₁ et x₂, y₂, z₂ les coordonnées des points O₁ et O₂; α₁, β₁, γ₁ et α₂, β₂, γ₂ les composantes de \vec{I}_1 et de \vec{I}_2 ; x, y, z et X, Y, Z les coordonnées de a et de A; u₁, v₁, w₁ et u₂, v₂, w₂ celles de M₁ et de M₂; v₁ et v₂ les produits scalaires $\vec{I}_1 \cdot \vec{n}$ et $\vec{I}_2 \cdot \vec{n}$. Nous avons

$$(4) \quad \begin{cases} u_1 = x_1 + \beta_1(z - z_1) - \gamma_1(y - y_1), \\ v_1 = y_1 + \gamma_1(x - x_1) - \alpha_1(z - z_1), \\ w_1 = z_1 + \alpha_1(y - y_1) - \beta_1(x - x_1) \end{cases}$$

et des valeurs analogues pour u₂, v₂, w₂.

Pour la surface s, les dérivées parallèles premières de z par rapport à x et à y seront désignées par p et q et, pour la surface S, les dérivées partielles premières de Z par rapport à X et à Y seront désignées par P et Q.

La droite D₁ a pour équations

$$(5) \quad \mathcal{X} = -p\mathcal{Z} + u_1 + p w_1, \quad \mathcal{Y} = -q\mathcal{Z} + v_1 + q w_1$$

et la droite D₂,

$$(6) \quad \mathcal{X} = -p\mathcal{Z} + u_2 + p w_2, \quad \mathcal{Y} = -q\mathcal{Z} + v_2 + q w_2.$$

Dans (5) et (6), \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{Z} sont les coordonnées d'un point courant. Soient h₁ et h₂ les cotes par rapport au plan xOy d'un point focal

de D_1 et d'un point focal de D_2 correspondant à la même ligne asymptotique de s , pour laquelle $\frac{dy}{dx} = \mu_1$. Une formule classique donne

$$(7) \quad h_1 = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(u_1 + p w_1) + \mu_1 \frac{\partial}{\partial y}(u_1 + p w_1)}{\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial p}{\partial y}}$$

et, pour h_2 , une expression analogue. Développant, on obtient

$$(8) \quad \frac{h_1 - w_1}{h_2 - w_2} = \frac{-p\alpha_1 - q\beta_1 + \gamma_1}{-p\alpha_2 - q\beta_2 + \gamma_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

De (8) on déduit que

$$(9) \quad X = \frac{\nu_2 u_1 - \nu_1 u_2}{\nu_2 - \nu_1}, \quad Y = \frac{\nu_2 v_1 - \nu_1 v_2}{\nu_2 - \nu_1}, \quad Z = \frac{\nu_2 w_1 - \nu_1 w_2}{\nu_2 - \nu_1},$$

ou encore que

$$(10) \quad \overrightarrow{OA} = \frac{\nu_2 \overrightarrow{OM_1} - \nu_1 \overrightarrow{OM_2}}{\nu_2 - \nu_1}.$$

En outre, comme le plan Π est perpendiculaire à $\overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{n}$, on a

$$(11) \quad P = -\frac{q(w_2 - w_1) + \nu_2 - \nu_1}{p(\nu_2 - \nu_1) - q(u_2 - u_1)}, \quad Q = \frac{p(w_2 - w_1) + u_2 - u_1}{p(\nu_2 - \nu_1) - q(u_2 - u_1)}.$$

X, Y, Z, P, Q ne dépendent que de x, y, z, p, q . Comme, de plus, Π est tangent en A à la surface S , on voit que (a, ϖ) et (A, Π) sont liés par une *transformation de contact*, qui est déterminée par O_1, O_2, \vec{I}_1 et \vec{I}_2 . Nous dirons que les *centres* O_1, O_2 et les vecteurs \vec{I}_1, \vec{I}_2 sont les *éléments fondamentaux* de la transformation. Nous la désignerons par $\mathfrak{C}(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$ ou par \mathfrak{C} .

D'après (8), la formule (3) peut s'écrire

$$(12) \quad \frac{R}{R + d} = \frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

D'où

$$(13) \quad R = \frac{\nu_1 d}{\nu_2 - \nu_1}.$$

Quand les supports de \vec{I}_1 et de \vec{I}_2 sont *parallèles*, $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ est constant

quel que soit (a, ϖ) et l'on voit aisément que le point A est *fixe* quel que soit (a, ϖ) . Nous supposons que les supports de \vec{I}_1 et de \vec{I}_2 ne sont pas parallèles.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS VECTORIELLES ET ÉQUATIONS ANALYTIQUES DE \mathfrak{C} . RÉDUCTION.

3. Équations vectorielles relatives à \mathfrak{C} , l'origine étant quelconque. — Prenons pour origine un point O quelconque.

Soient D_1 la droite, orientée, passant par les extrémités I_1, I_2 de deux vecteurs, d'origine O, équipollents à \vec{I}_1 et à \vec{I}_2 ; OH la droite, orientée, passant par O, perpendiculaire à D_1 et rencontrant D_1 ; \vec{u} et \vec{v} les vecteurs unitaires correspondant à D_1 et à OH; $i_1 \vec{u}$ et $i_2 \vec{u}$ les projections de \vec{I}_1 et \vec{I}_2 sur D_1 ; $h\vec{v}$ la projection commune de \vec{I}_1 et de \vec{I}_2 sur OH; \vec{V}_1 et \vec{V}_2 les vecteurs $\vec{OO}_1 - \vec{I}_1 \wedge \vec{OO}_1$ et $\vec{OO}_2 - \vec{I}_2 \wedge \vec{OO}_2$; \vec{U} et \vec{V} les vecteurs $\frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{i_2 - i_1}$ et $\frac{i_1 \vec{V}_2 - i_2 \vec{V}_1}{i_2 - i_1}$; I_n le point où le plan parallèle à ϖ et passant par O coupe D_1 ; \vec{I}_n le vecteur \vec{OI}_n ; $i_n \vec{u}$ sa projection sur D_1 .

Par définition, la droite D_1 est donc *déterminée par rapport à l'origine*.

Nous avons

$$(14) \quad \vec{OM}_1 = \vec{OO}_1 + \vec{I}_1 \wedge \vec{O}_1 \vec{a} = \vec{V}_1 + \vec{I}_1 \wedge \vec{O} \vec{a},$$

$$(15) \quad \vec{OM}_2 = \vec{OO}_2 + \vec{I}_2 \wedge \vec{O}_2 \vec{a} = \vec{V}_2 + \vec{I}_2 \wedge \vec{O} \vec{a}.$$

La formule (10) devient

$$(16) \quad \vec{OA} = \frac{v_2 \vec{V}_1 - v_1 \vec{V}_2}{v_2 - v_1} + \frac{v_2 \vec{I}_1 - v_1 \vec{I}_2}{v_2 - v_1} \wedge \vec{O} \vec{a}.$$

On remarque d'abord que $\frac{v_2 \vec{I}_1 - v_1 \vec{I}_2}{v_2 - v_1}$ est toujours perpendiculaire à \vec{n} .

En effet,

$$(\nu_2 \vec{I}_1 - \nu_1 \vec{I}_2) \cdot \vec{n} = \nu_2 \nu_1 - \nu_1 \nu_2 = 0.$$

D'autre part, l'extrémité de ce vecteur, que nous supposons lié au point O , est placée sur la droite D_1 .

En effet,

$$(17) \quad \vec{I}_1 = i_1 \vec{u} + h \vec{v}, \quad \vec{I}_2 = i_2 \vec{u} + h \vec{v}.$$

D'où

$$\frac{\nu_2 \vec{I}_1 - \nu_1 \vec{I}_2}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{\nu_2 i_1 - \nu_1 i_2}{\nu_2 - \nu_1} \vec{u} + h \vec{v}.$$

Donc l'extrémité du vecteur en question est placée sur D_1 .

On voit ainsi que

$$(18) \quad \frac{\nu_2 \vec{I}_1 - \nu_1 \vec{I}_2}{\nu_2 - \nu_1} = \vec{I}_n.$$

De plus, on a

$$(19) \quad i_n = \frac{\nu_2 i_1 - \nu_1 i_2}{\nu_2 - \nu_1} = -h \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\vec{u} \cdot \vec{n}}$$

et

$$(20) \quad \frac{\nu_2 \vec{V}_1 - \nu_1 \vec{V}_2}{\nu_2 - \nu_1} = -\vec{q} + i_n \vec{u}.$$

La formule (16) devient

$$(21) \quad \vec{O\bar{A}} + \vec{q} = i_n \vec{u} + \vec{I}_n \wedge \vec{O\bar{a}}.$$

D'autre part, le plan Π est perpendiculaire à $\vec{M_1 M_2} \wedge \vec{n}$.

4. Système de vecteurs \mathfrak{S} . — Considérons le système de vecteurs, \mathfrak{S} , constitué par un couple de moment égal à $\vec{O_1 O_2}$ et par les deux vecteurs glissants ⁽¹⁾ — \vec{I}_1 et \vec{I}_2 dont les supports passent respectivement par O_1 et O_2 .

⁽¹⁾ Pour la commodité du langage et comme c'est sans effet, quant au fond, sur ce qui nous occupe, nous regarderons par la suite — \vec{I}_1 et \vec{I}_2 comme liés respectivement à O_1 et à O_2 .

Soient R l'axe central de \mathfrak{S} , \vec{M} son moment résultant en O . R est parallèle à D_1 . On a

$$\vec{M} = \overrightarrow{O_1 O_2} - \vec{I}_1 \wedge \overrightarrow{O_1 \vec{O}} + \vec{I}_2 \wedge \overrightarrow{O_2 \vec{O}}.$$

D'où

$$(22) \quad \vec{M} = \vec{V}_0 - \vec{V}_1.$$

Le moment résultant de \mathfrak{S} au point a est équipollent à

$$\overrightarrow{O_1 \vec{O}} - \overrightarrow{O_1 M_1} + \overrightarrow{O_2 M_2} = \overrightarrow{M_1 M_2}.$$

Des définitions de \vec{u} et de \vec{v} il résulte que

$$(23) \quad \vec{V}_1 = i_1 \vec{u} - \vec{v}, \quad \vec{V}_2 = i_2 \vec{u} - \vec{v}.$$

Nous désignerons par $\nu(i_2 - i_1)$ la valeur algébrique de la projection de \vec{M} sur D_1 . Pour tout système de vecteurs, la projection du moment résultant en un point sur la résultante générale est un invariant. Comme la résultante générale de \mathfrak{S} est parallèle à D_1 , la quantité $\nu(i_2 - i_1)$ est donc *invariable quel que soit* O , et il en est de même de ν .

§. **Autres équations vectorielles relatives à \mathfrak{C} .** — Supposons que O soit maintenant *un point quelconque de l'axe central*, R , de \mathfrak{S} . Le moment résultant \vec{M} de \mathfrak{S} en O est alors dirigé suivant R . On a donc, *dans ce cas*,

$$\vec{M} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \nu(i_2 - i_1) \vec{u}.$$

On en déduit les formules

$$(24) \quad \vec{u} = \nu \vec{u},$$

$$(25) \quad \vec{v} = -\vec{V}_1 + \nu i_1 \vec{u} = -\vec{V}_2 + \nu i_2 \vec{u}.$$

L'équation (21) prend ici les formes équivalentes

$$(26) \quad \overrightarrow{O \vec{A}} - \vec{V}_1 = \nu(i_n - i_1) \vec{u} + \vec{I}_n \wedge \overrightarrow{O \vec{a}},$$

$$(27) \quad \overrightarrow{O \vec{A}} - \vec{V}_2 = \nu(i_n' - i_2) \vec{u} + \vec{I}_n \wedge \overrightarrow{O \vec{a}}.$$

6. **Équations analytiques de \mathcal{C} et réduction.** — 1° Prenons trois axes rectangulaires, d'origine O *quelconque*, tels que Ox est placé sur OH et a le même sens et que Oz est parallèle à D_1 et a le même sens.

Soient λ, μ, ν les composantes du vecteur \vec{u} relatif à O et λ', μ', ν' celles du vecteur \vec{v} relatif à O . La lettre ν a la même signification qu'au paragraphe 4. Nous désignerons encore par x, y, z, p, q les coordonnées de l'élément de contact (a, π) et par X, Y, Z, P, Q celles de l'élément de contact (A, Π) transformé du précédent par \mathcal{C} . Les composantes de \vec{u} étant $0, 0, 1$ et celles de \vec{v} étant $1, 0, 0$, on a, en vertu de (19),

$$(28) \quad i_n = hp.$$

D'où

$$(29) \quad \vec{I}_n = i_n \vec{u} + h\vec{v} = h(\vec{pu} + \vec{v}).$$

Les composantes de \vec{I}_n sont donc $h, 0, hp$.

Par suite, celles de $\vec{I}_n \wedge \vec{Oa}$ sont $-hpy, h(-z + px), hy$.

D'autre part

$$(30) \quad \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{M} + (\vec{I}_2 - \vec{I}_1) \wedge \vec{Oa}$$

et

$$(31) \quad \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{i_2 - i_1} = \vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{Oa}.$$

Les composantes de $\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{i_2 - i_1}$ sont donc $-y + \lambda, x + \mu, \nu$.

La formule (21) et le fait que Π est perpendiculaire à $\overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{n}$ conduit aux équations suivantes de \mathcal{C} :

$$(32) \quad \begin{cases} X + \lambda' = -hp(y - \lambda), & Y + \mu' = h[-z + p(x + \mu)], \\ & Z + \nu' = h(y + \nu p); \end{cases}$$

$$(33) \quad P = -\frac{x + \mu + \nu q}{p(x + \mu) + q(y - \lambda)}, \quad Q = \frac{-(y - \lambda) + \nu p}{p(x + \mu) + q(y - \lambda)}.$$

Notons que

$$P(y - \lambda) - Q(x + \mu) + \nu = 0.$$

Cette dernière relation correspond au fait que la droite $M_1 M_2$, de paramètres directeurs $-y + \lambda, x + \mu, \nu$, est située dans le plan Π .

2° Supposons *maintenant* que O soit *situé sur l'axe central*, R, du système \mathfrak{S} . L'axe Oz est placé sur R. Comme \vec{M} est alors dirigé suivant R, on a

$$\lambda = \mu = 0,$$

ν conservant la même valeur que précédemment. λ' , μ' , ν' étant les composantes du *nouveau vecteur* \vec{V} *relatif à la nouvelle origine*, on a, dans le cas présent,

$$(34) \quad X + \lambda' = -h\nu y, \quad Y + \mu' = h(-z + px), \quad Z + \nu' = h(y + \nu p);$$

$$(35) \quad P = -\frac{x + \nu q}{px + qy}, \quad Q = \frac{-y + \nu p}{px + qy}.$$

Les composantes de $\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{i, -i_1}$ sont ici $-y$, x , ν . Les équations de $M_1 M_2$ s'écrivent aisément et l'on démontre que cette droite est toujours *tangente au cylindre parabolique du second degré*, de génératrices parallèles à Oy, dont l'équation est

$$(z + \nu')^2 + 4h\nu(x + \lambda') = 0.$$

Les droites $M_1 M_2$ correspondant aux divers points de l'espace (x, y, z) forment un *complexe* du *second degré*, d'un type particulier.

Aux points de chacun des plans parallèles à la fois à \vec{I}_1 et à \vec{I}_2 , correspondent des droites $M_1 M_2$ placées dans un même plan tangent au cylindre sus-indiqué.

3° Soit $\overline{\mathfrak{C}}$ la transformation définie, par rapport aux mêmes axes, par

$$(36) \quad X = -py, \quad Y = -z + px, \quad Z = y + \nu p$$

et par (35).

Des calculs faciles montrent qu'on a, pour $\overline{\mathfrak{C}}$,

$$(37) \quad dZ - P dX - Q dY = Q(dz - p dx - q dy).$$

Considérons la transformation $\overline{\mathfrak{C}}_0$ telle que $h = 1$ et que les centres soient confondus en O, ce qui entraîne $\nu = 0$ dans (35) et (36). Nous dirons que $\overline{\mathfrak{C}}_0$ est à *centre unique* O. Soit $A_0(X_0, Y_0, Z_0)$ le point

du transformé (A_0, Π_0) de (α, ϖ) par $\overline{\mathcal{C}}_0$. On voit que, pour $\overline{\mathcal{C}}$ et $\overline{\mathcal{C}}_0$, on a

$$X = X_0, \quad Y = Y_0, \quad Z = Z_0 - v \frac{X_0}{Z_0}.$$

Donc $\overline{\mathcal{C}}$ est égale au produit de la transformation $\overline{\mathcal{C}}_0$, à centre unique O , et de la transformation ponctuelle définie par les dernières équations.

4° Ainsi, $\overline{\mathcal{C}}$ est égale au produit de la transformation $\overline{\mathcal{C}}_0$, à centre unique O , de la transformation ponctuelle dont nous venons de parler, de l'homothétie (O, h) et de la translation $-\vec{\mathcal{V}}$, de composantes $-\lambda'$, $-\mu'$, $-v'$.

7. Transformations $\overline{\mathcal{C}}$ équivalentes, relatives à une même droite D_1 . —

Donnons-nous les éléments fondamentaux $O_{1,0}$, $O_{2,0}$, $\vec{I}_{1,0}$, $\vec{I}_{2,0}$ d'une transformation $\overline{\mathcal{C}}$. Soient \mathcal{S}_0 le système de vecteurs constitué par $-\vec{I}_{1,0}$ lié à $O_{1,0}$, $\vec{I}_{2,0}$ lié à $O_{2,0}$ et un couple de moment égal à $\overrightarrow{O_{1,0}O_{2,0}}$; $I_{1,0}$ et $I_{2,0}$ les extrémités des vecteurs, d'origine O quelconque, équipollents à $\vec{I}_{1,0}$ et à $\vec{I}_{2,0}$; D_1 la droite orientée passant par $I_{1,0}$ et $I_{2,0}$; \vec{u}_0 et \vec{v}_0 les vecteurs, relatifs à \mathcal{S}_0 et à O , analogues aux vecteurs \vec{u} et \vec{v} précédemment définis.

Considérons un second ensemble d'éléments fondamentaux O_1 , O_2 , \vec{I}_1 , \vec{I}_2 tels que les extrémités I_1 et I_2 des vecteurs, d'origine O , équipollents à \vec{I}_1 et à \vec{I}_2 , soient situées sur D_1 , comme $I_{1,0}$ et $I_{2,0}$. Soient \mathcal{S} le système de vecteurs constitué par $-\vec{I}_1$ lié à O_1 , \vec{I}_2 lié à O_2 et un couple de moment égal à $\overrightarrow{O_1O_2}$; \vec{V}_1 et \vec{V}_2 les vecteurs $\overrightarrow{OO_1} - \vec{I}_1 \wedge \overrightarrow{OO_1}$ et $\overrightarrow{OO_2} - \vec{I}_2 \wedge \overrightarrow{OO_2}$; \vec{u} et \vec{v} les vecteurs, précédemment définis, relatifs à \mathcal{S} et à O .

Prenons comme système d'axes celui qui a été adopté au paragraphe 6, 1°. Soient h, o, i les coordonnées de I_1 et h, o, i_2 celles de I_2 ; λ_0, μ_0, ν_0 et $\lambda'_0, \mu'_0, \nu'_0$ les composantes de \vec{u}_0 et de \vec{v}_0 ; λ, μ, ν et λ', μ', ν' celles de \vec{u} et de \vec{v} .

D'après (32) et (33), les deux transformations $\overline{\mathcal{C}}$ relatives l'une

à \mathfrak{S}_0 , l'autre à \mathfrak{S} , sont *équivalentes*, c'est-à-dire donnent le même transformé pour chaque élément de contact (a, ϖ) *quelconque*, si

$$\vec{u} = \vec{u}_0, \quad \vec{v} = \vec{v}_0.$$

Ces conditions *suffisantes* sont *nécessaires*. En effet, pour que les deux transformations considérées donnent le même élément de contact (A, Π) pour chaque élément de contact (a, ϖ) quelconque, il faut, en vertu de (32), que l'on ait

$$\lambda' - \lambda'_0 = hp(\lambda - \lambda_0), \quad \mu' - \mu'_0 = hp(\mu - \mu_0), \quad \nu' - \nu'_0 = hp(\nu - \nu_0),$$

quel que soit p . Il faut donc que

$$\lambda = \lambda_0, \quad \mu = \mu_0, \quad \nu = \nu_0, \quad \lambda' = \lambda'_0, \quad \mu' = \mu'_0, \quad \nu' = \nu'_0.$$

La proposition est donc démontrée.

Comme toute transformation \mathfrak{C} est *indépendante de l'origine*, on voit que, lorsque les égalités $\vec{u} = \vec{u}_0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ sont satisfaites en un point O quelconque, elles doivent l'être en tout point.

On démontre, d'ailleurs, directement que, si \mathfrak{S} et \mathfrak{S}_0 sont tels que $\vec{u} = \vec{u}_0$ en O, on a

$$\vec{u}_C = \vec{u}_{0,C}$$

en un point C quelconque, \vec{u}_C et $\vec{u}_{0,C}$ étant, pour \mathfrak{S} et \mathfrak{S}_0 , les vecteurs analogues à \vec{u} et relatifs à C. On établit d'abord que

$$(38) \quad \vec{u}_C - \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{OC},$$

\vec{u} étant toujours le vecteur unitaire correspondant à D_1 . Le membre de droite de (38) étant indépendant de \mathfrak{S} , on a

$$\vec{u}_C - \vec{u} = \vec{u}_{0,C} - \vec{u}_0 = \vec{u} \wedge \vec{OC}.$$

Si donc $\vec{u} = \vec{u}_0$, on a

$$\vec{u}_C = \vec{u}_{0,C}.$$

On démontre directement, d'une manière analogue, que si \mathfrak{S} et \mathfrak{S}_0 sont tels que $\vec{v} = \vec{v}_0$ en O, on a

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{0,C},$$

en un point C quelconque, $\vec{\mathcal{V}}_C$ et $\vec{\mathcal{V}}_{0,C}$ étant, pour \mathcal{S} et \mathcal{S}_0 , les vecteurs analogues à $\vec{\mathcal{V}}$ et relatifs à C. On utilise la relation

$$(39) \quad \vec{\mathcal{V}}_C - \vec{\mathcal{V}} = \overrightarrow{OC} - h\vec{\nu} \wedge \overrightarrow{OC},$$

$\vec{\nu}$ étant toujours le vecteur unitaire correspondant à OH.

Les égalités $\vec{\mathcal{U}} = \vec{\mathcal{U}}_0$ et $\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}}_0$ entraînent, en raison de (23),

$$(40) \quad \vec{V}_1 = i_1 \vec{U}_0 - \vec{V}_0, \quad \vec{V}_2 = i_2 \vec{U}_0 - \vec{V}_0.$$

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de O_1 ; x_2, y_2, z_2 celles de O_2 . Les formules (40) donnent

$$(41) \quad \begin{cases} x_1 + i_1 y_1 & = i_1 \lambda_0 - \lambda'_0, \\ -i_1 x_1 + y_1 + h z_1 & = i_1 \mu_0 - \mu'_0, \\ -h y_1 + z_1 & = i_1 \nu_0 - \nu'_0 \end{cases}$$

et

$$(42) \quad \begin{cases} x_2 + i_2 y_2 & = i_2 \lambda_0 - \lambda'_0, \\ -i_2 x_2 + y_2 + h z_2 & = i_2 \mu_0 - \mu'_0, \\ -h y_2 + z_2 & = i_2 \nu_0 - \nu'_0. \end{cases}$$

Considérons les systèmes \mathcal{S} tels que la transformation \mathcal{T} relative à chacun d'eux est équivalente à celle qui correspond à \mathcal{S}_0 . D'après (41) et (42), ces systèmes \mathcal{S} sont tels que, lorsque i_1 et i_2 varient, O_1 se déplace en fonction de i_1 *seul* et O_2 , en fonction de i_2 *seul*. On voit aisément que O_1 et O_2 décrivent une même *cubique*.

La première équation (41) s'écrit

$$(43) \quad x_1 + \lambda'_0 + i_1(y_1 - \lambda_0) = 0$$

et les deux dernières équations (41) donnent

$$(44) \quad -i_1(x_1 + \mu_0 - h\nu_0) + (1 + h^2)y_1 + \mu'_0 - h\nu'_0 = 0.$$

Éliminant i_1 entre (43) et (44), on a

$$(45) \quad (x_1 + \lambda'_0)(x_1 + \mu_0 - h\nu_0) + [(1 + h^2)y_1 + \mu'_0 - h\nu'_0](y_1 - \lambda_0) = 0.$$

On déduit de (45) :

1° que le cylindre passant par la cubique et dont les génératrices sont parallèles à Oz est coupé suivant des *ellipses* par les plans parallèles à xOy ;

2° que ce cylindre est coupé suivant des *circonférences* par les plans parallèles aux plans $z = \pm hy$.

Remarquons, d'autre part, qu'en *tout* point, E, de l'axe central R de \mathcal{S}_0 , le moment résultant de chacun des systèmes \mathcal{S} considérés est dirigé suivant R. En effet, il est parallèle au vecteur \vec{u}_E relatif au même point E. De même, pour \mathcal{S}_0 , le moment résultant en E et le vecteur $\vec{u}_{0,E}$ relatif à E sont parallèles. De plus $\vec{u}_E = \vec{u}_{0,E}$. Donc les systèmes \mathcal{S} (parmi lesquels nous comprenons désormais \mathcal{S}_0) ont tous le même axe central R.

R perce le plan xOy au point $(-\mu_0, \lambda_0, 0)$.

(a, ϖ) étant donné quelconque, les lieux des extrémités M_1 et M_2 , des vecteurs

$$\vec{O_1M_1} = \vec{i}_1 \wedge \vec{O_1a} \quad \text{et} \quad \vec{O_2M_2} = \vec{i}_2 \wedge \vec{O_2a},$$

pour l'ensemble des \mathcal{S} considérés, sont confondus en une *même droite*. En effet, tous ces systèmes donnent la même transformation \mathcal{C} , donc le même transformé (A, Π) de (a, ϖ). Quand i_1 varie seul, M_2 reste fixe et, par suite, le lieu de M_1 est la droite AM_2 du plan Π , puisque la droite M_1M_2 passe par A et Π , par M_1M_2 . La même droite est aussi le lieu de M_2 quand i_2 varie. Donc les lieux de M_1 et de M_2 sont une même droite passant par A et située dans Π .

8. Remarques relatives à $\bar{\mathcal{C}}$. — Supposons l'origine O prise sur l'axe central commun, R, des systèmes \mathcal{S} relatifs à D_1 et donnant la même transformation \mathcal{C} . Prenons pour axes ceux qui ont été adoptés dans les paragraphes 6, 2° et 6, 3°. Cherchons les systèmes $\bar{\mathcal{S}}$, analogues à \mathcal{S} , donnant une transformation $\bar{\mathcal{C}}$, définie par (35) et (36) par rapport aux axes adoptés, les deux vecteurs ayant pour composantes 1, 0, i_1 et 1, 0, i_2 . Ces systèmes $\bar{\mathcal{S}}$ satisfont aux équations (41) et (42) dans lesquelles il faut faire

$$\lambda_0 = \mu_0 = \lambda'_0 = \mu'_0 = \nu'_0 = 0, \quad h = 1,$$

ν_0 conservant la valeur relative à la transformation \mathcal{C} . Les dits systèmes $\bar{\mathcal{S}}$ admettent, eux aussi, R comme axe central. Pour eux, l'équation (45) s'écrit

$$(46) \quad x_1^2 + 2y_1^2 - \nu_0 x_1 = 0.$$

L'ellipse du plan xOy , que cette équation représente, a pour centre le point $(\frac{\nu_0}{2}, 0, 0)$.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATION INVERSE, \mathfrak{C}^{-1} .

9. **Formules relatives à \mathfrak{C}^{-1} dans le cas général.** — Considérons une transformation \mathfrak{C} relative à des éléments fondamentaux $O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2$, auxquels correspond un système \mathfrak{S} .

Supposons l'origine O située sur l'axe central R de \mathfrak{S} et prenons pour axes ceux qui ont été adoptés au paragraphe 6, 2°.

Les équations de \mathfrak{C} sont constituées par (34) et (35).

Posons

$$(47) \quad \frac{X + \lambda'}{h} = X', \quad \frac{Y + \mu'}{h} = Y', \quad \frac{Z + \nu'}{h} = Z'.$$

Les équations de \mathfrak{C} s'écrivent

$$(48) \quad X' = -py, \quad Y' = -z + px, \quad Z' = y + \nu p;$$

$$(49) \quad P = -\frac{x + \nu q}{px + qy}, \quad Q = \frac{-\nu + \nu p}{px + qy}.$$

Nous considérons ici le cas de $\nu \neq 0$. De (48) on tire

$$(50) \quad \frac{X'}{-y} = \frac{Y' + z}{x} = \frac{Z' - y}{\nu}.$$

La valeur commune de ces rapports est p . La formule (50) nous donne les deux équations directrices de \mathfrak{C} , qui est donc une transformation de contact de la deuxième classe.

Les droites de l'espace (x, y, z) qui correspondent, par (50), aux divers points de l'espace (X, Y, Z) , forment le complexe des droites parallèles au plan zOx .

Partant d'un élément de contact (a, \mathfrak{w}) , de coordonnées x, y, z, p, q , la transformation \mathfrak{C} donnera un élément de contact (A, \mathfrak{II}) , de coordonnées X, Y, Z, P, Q .

Partant maintenant de (A, \mathfrak{II}) , les première et troisième équations (48) nous donnent

$$(51) \quad \nu p^2 - Z'p - X' = 0.$$

L'équation (51) a deux solutions p et p' telles que

$$(52) \quad p + p' = \frac{Z'}{\nu}, \quad pp' = -\frac{X'}{\nu}.$$

De la première équation (48) et des relations (52), on tire

$$(53) \quad y = \nu p' = -\frac{X'}{p}, \quad y' = \nu p = -\frac{X'}{p'}.$$

De la première formule (52) et des formules (53), on déduit que

$$(54) \quad yy' = \nu^2 pp' = -\nu X'.$$

Des deux équations (49), on tire

$$Py - Qx + \nu = 0.$$

D'où

$$(55) \quad x = \frac{Py + \nu}{Q}, \quad x' = \frac{Py' + \nu}{Q}.$$

On a aussi

$$Pp + Qq + 1 = 0.$$

D'où

$$(56) \quad q = -\frac{Pp + 1}{Q}, \quad q' = -\frac{Pp' + 1}{Q}.$$

De (55) et (56), on déduit que

$$(57) \quad P = \frac{\nu(x' - x)}{xy' - yx'}, \quad Q = \frac{\nu(y' - y)}{xy' - yx'}$$

et que

$$(58) \quad P = \frac{-q' + q}{pq' - qp'}, \quad Q = \frac{p' - p}{pq' - qp'}.$$

De (53), (55) et (56), on tire

$$(59) \quad x = -\nu q', \quad x' = -\nu q.$$

Notons qu'on a, en vertu de (53) et (59),

$$\frac{x}{-q'} = \frac{y}{p'} = \frac{x'}{-q} = \frac{y'}{p} = \nu.$$

La deuxième équation (48) donne

$$(60) \quad z' - z = p'x' - px.$$



De la dernière formule (58) et des formules (59) et (60), on tire

$$(61) \quad z' - z = \nu(pq' - qp') = \frac{\nu(p' - p)}{Q}.$$

Considérons les trois relations

$$(62) \quad x = -\nu q', \quad y = \nu p', \quad z' - z = \nu(pq' - qp').$$

Multipliant ces trois égalités respectivement par p , q et 1 et additionnant, on a

$$z' - z + px + qy = 0.$$

D'où

$$(63) \quad z' = z - px - qy$$

et, de même,

$$(64) \quad z = z' - p'x' - q'y'$$

De (53), (55) et (61), on tire

$$(65) \quad \frac{x' - x}{-P} = \frac{y' - y}{-Q} = \frac{z' - z}{1} = \frac{\nu(p' - p)}{Q} = \nu(pq' - qp').$$

Enfin, de (53) et (59), il vient

$$(66) \quad dp dx + dq dy = -(dp' dx' + dq' dy').$$

Ainsi donc, partant de l'élément de contact (A, II), la transformation \mathfrak{T}^{-1} nous donne, dans le cas de $\nu \neq 0$, deux éléments de contact (a, ϖ) , de coordonnées x, y, z, p, q , et (a', ϖ') , de coordonnées x', y', z', p', q' .

10. Indication de cas particuliers qui seront spécialement étudiés dans les deuxième et troisième Parties. — Nous verrons, dans le paragraphe 16, 1°, ce qui a lieu, pour \mathfrak{T} , quand ν tend vers zéro.

De plus, dans la deuxième Partie du présent travail, nous étudierons spécialement le cas où les deux centres O_1 et O_2 sont confondus. Le système \mathfrak{S} est constitué par un seul vecteur et l'on a $\nu = 0$. La transformation \mathfrak{T} correspondante sera désignée par \mathfrak{T}_0 . Nous dirons qu'elle est à *centre unique*. Pour $h = 1$, nous la désignerons à nouveau par \mathfrak{T}_0 , comme nous l'avons fait aux paragraphes 6, 3° et 4°.

Enfin, dans la troisième Partie, nous étudierons spécialement le cas où, les deux centres O_1 et O_2 étant distincts, le système \mathfrak{S} est

réductible à un vecteur unique, ce qui entraîne $\nu = 0$. La transformation \mathcal{C} correspondante sera désigné par \mathcal{C}_1 .

Nous allons maintenant *revenir au cas général*.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS DE \mathcal{C} ET DE \mathcal{C}^{-1} .

11. **Premières propriétés de \mathcal{C} et de \mathcal{C}^{-1} .** — 1° A une multiplicité de l'espace (x, y, z) formée du point $a(x, y, z)$ et de tous les plans passant par ce point correspond, dans l'espace (X, Y, Z) , une multiplicité formée de la droite M_1M_2 et de tous les plans passant par cette droite.

2° A une multiplicité de l'espace (x, y, z) formée des points d'une surface s et des plans tangents à cette surface correspond, dans l'espace (X, Y, Z) , par (48) et (49), une multiplicité dont le support est, *en général*, une autre surface S . On démontre que S et le cylindre parabolique du second degré dont il a été question au paragraphe 6, 2°, sont *tangents* le long de la transformée par \mathcal{C} de la ligne $y - \nu p = 0$ de s . S et ce cylindre, indépendant de s , constituent la surface focale de la congruence des droites M_1M_2 relatives aux divers points de s . On passe de s à ce cylindre par une transformation ponctuelle, sans intérêt en elle-même, qui n'est pas comprise dans \mathcal{C} , d'après la définition géométrique de \mathcal{C} .

3° Si, pour la surface s , on désigne par p, q, r les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, on a, pour S , en vertu de (47) et (48),

$$(67) \quad \begin{cases} \frac{D(X', Y')}{D(x, y)} = r(px + qy), & \frac{D(Y', Z')}{D(x, y)} = r(x + \nu q), \\ \frac{D(Z', X')}{D(x, y)} = r(y - \nu p). \end{cases}$$

La transformée de s par \mathcal{C} *dégénère* en une *courbe* quand la surface s est telle que $r = 0$. Dans ce cas particulier, s est une surface *réglée* dont les génératrices sont parallèles au plan zOx .

Pour les surfaces s telles que $y - \nu p = 0$, on a, d'après le paragraphe 9,

$$Z'' + 4\nu X' = 0, \quad Q = 0, \quad y = y', \quad p = p'.$$

S dégénère en une courbe puisqu'on a alors $r = 0$. Cette courbe appartient au cylindre parabolique du second degré dont il est question aux paragraphes 6, 2° et 11, 2°.

Nous laissons de côté le cas de dégénérescence. Notons toutefois qu'à un plan non parallèle à Oz correspond, à distance finie, une droite l perpendiculaire à ce plan, tangente au cylindre parabolique du second degré dont il vient d'être parlé. Les droites $M_1 M_2$ relatives aux divers points du plan considéré constituent la congruence des droites rencontrant la droite l et tangentes au cylindre parabolique sus-indiqué.

4° Aux asymptotiques d'une surface non développable quelconque, s , correspond un réseau conjugué sur la surface S transformée de s par \mathcal{C} . Cette propriété a été déjà signalée à l'avant-dernier alinéa du paragraphe 1 (1).

Mais, si deux surfaces sont telles qu'aux asymptotiques de l'une correspond un réseau conjugué de la seconde, réciproquement aux asymptotiques de la seconde correspond un réseau conjugué de la première.

Donc aux asymptotiques de S correspond un réseau conjugué de s .

5° D'après le paragraphe 9, si nous partons de la surface S , \mathcal{C}^{-1} nous donnera la surface s et, en général, une seconde surface s' .

De (66) il résulte que les asymptotiques se correspondent sur s et s' .

On voit donc qu'aux asymptotiques de s et de s' correspond un même réseau conjugué de S .

6° Considérons les deux éléments de contact (a, ϖ) et (a', ϖ') transformés de (A, Π) par \mathcal{C}^{-1} .

La formule (65) montre que la droite aa' est perpendiculaire au plan Π .

On peut aussi le démontrer de la manière suivante. Soient M'_1 et M'_2 les points analogues à M_1 et M_2 et relatifs à a' . De (1) et (2) et

(1) Pour des surfaces s particulières, les asymptotiques de s correspondent aux lignes de courbure de S . C'est lorsqu'on a, avec les notations du paragraphe 1, $M_1 F_1 = M_1 A$. On démontre que la courbure totale de s au point a est alors égale à $-\frac{(v_1 - v_2)^2}{M_1 M_2^2}$, dont la valeur en fonction de x, y, z, p, q se calcule immédiatement.

des deux formules analogues relatives à M'_1 et à M'_2 , on déduit que

$$\overrightarrow{M_1 M'_1} = \vec{I}_1 \wedge \overrightarrow{aa'}, \quad \overrightarrow{M_2 M'_2} = \vec{I}_2 \wedge \overrightarrow{aa'}.$$

Mais Π renferme les droites $M_1 M_2$ et $M'_1 M'_2$, donc $\overrightarrow{M_1 M'_1}$ et $\overrightarrow{M_2 M'_2}$. Il est donc perpendiculaire à la droite aa' .

Par construction, Π est perpendiculaire à ϖ . De même, Π est perpendiculaire à ϖ' . Comme le point a est situé dans ϖ et le point a' dans ϖ' , la droite aa' , perpendiculaire à Π , est l'intersection des plans ϖ et ϖ' , perpendiculaires à Π .

7° Les surfaces s et s' du paragraphe 11, 5° constituent donc la surface focale de la congruence qu'engendre la droite aa' quand a se déplace sur s . ϖ et ϖ' sont les plans focaux de aa' .

8° Prenons dans le plan xOy la droite $y = x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, α étant un angle quelconque, différent de zéro. Soit (l, m, n) le point symétrique de a par rapport à la dite droite. On a

$$(68) \quad l = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad m = x \sin \alpha - y \cos \alpha, \quad n = -z;$$

$$(69) \quad x = l \cos \alpha + m \sin \alpha, \quad y = l \sin \alpha - m \cos \alpha, \quad z = -n.$$

Considérons le *paraboloïde hyperbolique*

$$(70) \quad (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 - y^2 - 2vz \sin \alpha = 0,$$

dont l'équation s'écrit encore

$$(71) \quad x^2 \sin \alpha - 2xy \cos \alpha - y^2 \sin \alpha - 2vz = 0.$$

Il a pour axe Oz , pour sommet le point O et il est *équilatère*. Il passe par la droite $y = x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ du plan xOy et par la perpendiculaire en O à cette droite et à Oz .

Le plan polaire du point (l, m, n) par rapport à cette quadrique a pour équation

$$\mathcal{X}(l \sin \alpha - m \cos \alpha) - \mathcal{Y}(l \cos \alpha + m \sin \alpha) - v\mathcal{Z} + vn = 0,$$

\mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{Z} étant les coordonnées d'un point courant du plan.

Compte tenu de (69), cette équation s'écrit

$$(72) \quad \mathcal{X}y - \mathcal{Y}x - v\mathcal{Z} + vz = 0$$

et, en vertu de (62) et (64),

$$(73) \quad -p'(\mathcal{X} - x') - q'(\mathcal{Y} - y') + \mathcal{Z} - z' = 0.$$

C'est l'équation du plan ω' .

De même, ω est le plan polaire par rapport à la quadrique du point symétrique de a' par rapport à la droite considérée.

Notons que l'origine O est un point quelconque de l'axe central R.

Donc le symétrique de a (ou de a') par rapport à une droite quelconque perpendiculaire à R et rencontrant cet axe est le pôle de ω' (ou de ω) par rapport au paraboloid hyperbolique défini ci-dessus, qui ne dépend que de la droite en question perpendiculaire à l'axe central.

9° Considérons le *paraboloïde*

$$(74) \quad x^2 + y^2 - 2vz = 0$$

de révolution autour de Oz et de sommet O.

Prenons le symétrique de a par rapport à l'origine O et faisons tourner ce symétrique de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Oz. Nous obtenons le point $(y, -x, -z)$. Le plan polaire de ce point par rapport au paraboloid a pour équation

$$(75) \quad \mathcal{X}y - \mathcal{Y}x - v\mathcal{Z} + vz = 0,$$

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ étant les coordonnées d'un point courant du plan. Cette équation, identique à (72) et (73), est celle du plan ω' .

Remarque analogue pour a' et ω .

Donc le point qu'on obtient en prenant le symétrique de a (ou de a') par rapport à O (point quelconque de R), puis en faisant tourner ce symétrique de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Oz, est le pôle de ω' (ou de ω) par rapport au paraboloid de révolution sus-indiqué.

10° Soient Δ et Δ' les deux droites que définissent les équations directrices de \mathcal{C} quand on y regarde x, y, z comme donnés et égaux d'abord aux coordonnées de a puis à celles de a' .

Ces droites passent par A et sont situées dans Π ; Δ est perpendiculaire à ω' et Δ' , à ω .

En effet, comme pour x, y, z égaux aux coordonnées de a ou à celles de a' , les coordonnées X, Y, Z de A satisfont aux équations directrices, Δ et Δ' passent par A.

Les deux droites Δ et M_1M_2 sont confondues, puisque chacune d'elles constitue le lieu du point A pour a fixe et ϖ variable, la première en raison de sa définition analytique, la seconde d'après la construction géométrique du point A,

D'autre part, d'après le paragraphe 9,

$$\frac{-\gamma}{-p'} = \frac{x}{-q'} = \nu.$$

Il s'ensuit que Δ est perpendiculaire à ϖ' .

Donc, la droite Δ est confondue avec la droite M_1M_2 ; elle passe par A, est située dans Π et elle est perpendiculaire à ϖ' .

De même, la droite Δ' est confondue avec la droite $M'_1M'_2$ analogue à M_1M_2 et relative à a' ; elle passe par A, est située dans Π et elle est perpendiculaire à ϖ .

Ainsi, la normale à s en a , parallèle aux droites D_1 et D_2 des congruences \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 du paragraphe 1, est parallèle à la droite $M'_1M'_2$, confondue avec Δ' .

De même, la normale à s' en a' , parallèle aux droites D' et D'_2 , analogues à D_1 et D_2 et relatives à a' , est parallèle à la droite M_1M_2 , confondue avec Δ .

D'après les paragraphes 1 et 11, 5°, les droites M_1M_2 et $M'_1M'_2$, situées dans Π , se coupant en A, respectivement parallèles aux normales à s' en a' et à s en a , sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes conjuguées de S en A, correspondant à la fois aux directions asymptotiques de s en a et de s' en a' .

Quand a se déplace sur s , les droites M_1M_2 et $M'_1M'_2$ restent toutes deux tangentes à la surface S et au cylindre parabolique (indépendant de s), dont il a été parlé notamment aux paragraphes 6, 2° et 11, 2°.

11° Soient δ et δ' les deux droites, passant respectivement par a et a' , que définissent les équations directrices (50) quand on y regarde X, Y, Z comme donnés et égaux aux coordonnées de A.

On déduit de (50) que

$$(76) \quad \gamma'' - Z'\gamma - \nu X' = 0.$$

Donc δ et δ' sont parallèles au plan zOx . De plus, à la multiplicité constituée par le point A et les plans passant par ce point correspondent, dans l'espace (x, y, z) , une multiplicité formée par δ et les plans passant par δ et une multiplicité formée par δ' et les plans

passant par δ' . Comme les éléments de contact (a, ϖ) et (a', ϖ') correspondent à (A, Π) , le plan ϖ passe par δ et le plan ϖ' , par δ' .

δ et δ' sont donc respectivement les intersections des plans ϖ et ϖ' par des plans parallèles à zOx et passant l'un par a , l'autre par a' .

12° Soit a_1 le point pour lequel $(i_2 - i_1)\overrightarrow{Oa_1}$, avec O fixe quelconque, est équipollent à la vitesse du point a sous l'effet du système \mathcal{S} , considéré comme un système de rotations.

La vitesse du point a est le moment résultant de \mathcal{S} en a . Donc, d'après une indication du paragraphe 4, elle est équipollente à $\overrightarrow{M_1 M_2}$, qui, selon une remarque du paragraphe 11, 10°, est perpendiculaire à ϖ' . D'autre part, nous avons indiqué au paragraphe 6, 1° que, pour O quelconque, les composantes de $\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{i_2 - i_1}$ sont $-\gamma + \lambda$, $x + \mu$, ν . Il s'ensuit que $\overrightarrow{Oa_1}$ est perpendiculaire à ϖ' et que ses composantes sont $-\gamma + \lambda$, $x + \mu$, ν .

Quel que soit a , le point correspondant a_1 est donc situé dans un même plan, s_1 , perpendiculaire à R , d'équation $z = \nu$.

On vient ainsi d'établir une correspondance avec *orthogonalité des éléments linéaires* entre la surface s et le plan s_1 .

Considérons les douze surfaces ⁽¹⁾ relatives à s et s_1 (et les comprenant). La surface (Σ) de la théorie des douze surfaces est l'enveloppe du plan

$$(77) \quad (\mathcal{X} - x)x_1 + (\mathcal{Y} - y)y_1 + (\mathcal{Z} - z)z_1 = 0,$$

quand $a(x, y, z)$ se déplace sur s , les coordonnées \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{Z} étant celles d'un point courant du plan.

Mais ce plan passe par a et il est perpendiculaire à $\overrightarrow{Oa_1}$. C'est donc le plan ϖ' , dont l'enveloppe est s' .

La surface (Σ) relative à s et s_1 est donc la surface s' .

De même, la surface (Σ) relative à s' et s_1 est la surface s .

⁽¹⁾ DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 4, nouveau tirage, p. 48 et 52 notamment.

Nous rappelons, à ce sujet, que nous avons signalé et étudié des ensembles de systèmes de douze surfaces, qu'on peut déduire d'une surface quelconque et qui jouissent de remarquables propriétés. [ANDRÉ CHARRUEAU, *Sur la déformation infiniment petite des surfaces* (*Bul. Sc. math.*, 2^e série, t. 69, 1945, p. 92 à 108)].

12. **Complexe linéaire Γ .** — L'emploi du complexe linéaire Γ , que nous allons définir, va nous permettre de découvrir d'autres belles propriétés de \mathfrak{C} et de \mathfrak{C}^{-1} .

L'origine O est prise, à nouveau, *sur l'axe central*, R , du système \mathfrak{S} de rotations constitué par $-\dot{I}_1$ lié à O_1 , \dot{I}_2 lié à O_2 et un couple de moment égal à $\overrightarrow{O_1O_2}$. Les axes de coordonnées sont, à nouveau, ceux du paragraphe 6, 2°.

La vitesse d'un point quelconque $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ sous l'effet de \mathfrak{S} a pour composantes

$$-(i_2 - i_1)\mathfrak{Y}, \quad (i_2 - i_1)\mathfrak{X}, \quad (i_2 - i_1)v.$$

Si \mathfrak{X}' , \mathfrak{Y}' , \mathfrak{Z}' sont les coordonnées du point courant d'une droite passant par P et perpendiculaire à la vitesse de P , on a

$$(78) \quad -(\mathfrak{X}' - \mathfrak{X})\mathfrak{Y} + (\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y})\mathfrak{X} + v(\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}) = 0.$$

Désignons par L , M , N , ρ , σ , τ les coordonnées plückériennes de cette droite. On a

$$(79) \quad \frac{\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}}{\rho} = \frac{\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y}}{\sigma} = \frac{\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}}{\tau}$$

et

$$(80) \quad N = \sigma\mathfrak{X} - \rho\mathfrak{Y}.$$

L'équation (78) s'écrit

$$(81) \quad N + v\tau = 0.$$

C'est l'équation d'un *complexe linéaire*, Γ , dont l'axe est la droite Oz , confondue avec R , et dont le paramètre est égal à v . Cette quantité est égale au *pas réduit* du mouvement hélicoïdal correspondant à \mathfrak{S} .

La vitesse d'un point quelconque sous l'effet de \mathfrak{S} est perpendiculaire à toutes les droites qui passent par ce point et qui appartiennent au complexe linéaire Γ .

Γ est le *complexe des droites par rapport auxquelles le moment de \mathfrak{S} est nul*.

13. **Autres propriétés de \mathfrak{C} et de \mathfrak{C}^{-1} .** — 1° ω' est le plan polaire de a par rapport à Γ . — *Première démonstration.* — En vertu de (78), le plan polaire de a par rapport à Γ a pour équation

$$(82) \quad -(\mathfrak{X}' - x)\mathfrak{Y} + (\mathfrak{Y}' - y)\mathfrak{X} + v(\mathfrak{Z}' - z) = 0,$$

dans laquelle \mathcal{X}' , \mathcal{Y}' , \mathcal{Z}' sont les coordonnées d'un point courant du plan.

Cette équation prend la forme

$$(83) \quad \mathcal{X}'y - \mathcal{Y}'x - \nu\mathcal{Z}' + \nu z = 0,$$

identique à (72) et (73).

Le plan polaire de a par rapport à Γ est donc le plan ω' .

Seconde démonstration. — D'après une indication du paragraphe 4, la vitesse du point a , sous l'effet de \mathcal{S} , est équipollente à $\overrightarrow{M_1M_2}$. Nous avons vu, au paragraphe 11, 10°, que la droite M_1M_2 , confondue avec Δ , est perpendiculaire à ω' . Donc toutes les droites situées dans ω' et passant par a appartiennent au complexe Γ . Le plan ω' est donc le plan polaire de a par rapport à Γ .

2° De même, ω est le plan polaire de a' par rapport à Γ .

La vitesse du point a' , sous l'effet de \mathcal{S} , est équipollente à $\overrightarrow{M'_1M'_2}$ et perpendiculaire à ω .

3° La droite aa' appartient à Γ .

En effet, la droite aa' passe, en particulier, par a et elle est située dans le plan ω' polaire de a par rapport à Γ . Donc elle appartient à Γ .

4° Le plan polaire de chaque point de aa' par rapport à Γ passe évidemment par aa' . La vitesse de chaque point de aa' sous l'effet de \mathcal{S} est perpendiculaire à aa' .

5° Les droites δ et δ' sont conjuguées par rapport à Γ .

En effet, a' est le pôle du plan ω , qui passe par δ , et il est situé sur δ' . Il nous suffit donc de montrer que le pôle d'un autre plan passant par δ est placé sur δ' . Prenons, par exemple, le plan parallèle à Oy et passant par δ . Cette droite est située dans le plan $\mathcal{Y} = y$, \mathcal{Y} étant la deuxième coordonnée d'un point courant de δ et y , une des racines de l'équation (76); y est donc une quantité constante pour X , Y , Z donnés. Le plan parallèle à Oy et passant par δ satisfait, d'après (50), à l'équation

$$(84) \quad -\mathcal{X}'(Z' - y) + \nu(\mathcal{Z}' + Y') = 0,$$

dans laquelle les coordonnées \mathcal{X}' et \mathcal{Z}' sont relatives à un point courant de ce plan. Le pôle du plan (84) par rapport à Γ est,

d'après (78), le point de coordonnées o , $Z' - y$, $-Y'$. Or la droite δ' a pour équations

$$(85) \quad -X'(Z' - y') + v(Z' + Y') = 0, \quad Y' = y',$$

où X' , Y' , Z' sont les coordonnées d'un point courant de la droite et y' , la seconde racine de l'équation (76), avec $y + y' = Z'$. On voit que le pôle en question satisfait aux équations (85) de δ' .

6° Toute droite rencontrant δ et δ' appartient à Γ . Soient N et N' les points où cette droite coupe respectivement δ et δ' . Le pôle du plan (δ', NN') est N . En effet, les droites δ et δ' étant conjuguées, ce pôle est placé sur δ . De plus, il est situé dans le plan considéré. Il est donc confondu avec le point N où δ perce ce plan. Donc la droite NN' appartient à Γ .

Si NN' est *perpendiculaire* à R , elle est située dans un plan perpendiculaire à R , dont le pôle est, par suite, sur R . Donc NN' passe par ce pôle, donc rencontre R .

La *perpendiculaire commune* à δ et à δ' est parallèle à Oy . Étant normale à l'axe R , elle le rencontre. Elle est donc située dans le plan yOz .

7° A deux éléments de contact (a, ϖ) et (a', ϖ') *conjugués* par rapport à Γ (a pôle de ϖ' , a' pôle de ϖ) correspond par \mathfrak{C} un même élément de contact (A, Π) .

Soient E une droite quelconque; E' sa *conjuguée* par rapport à Γ ; a un point *quelconque* de E ; a' un point *quelconque* de E' ; ϖ le plan (E, a') ; ϖ' le plan (E', a) . (a, ϖ) et (a', ϖ') sont conjugués par rapport à Γ . A E et E' correspond par \mathfrak{C} un même *paraboloïde hyperbolique*, dont l'un des plans directeurs est *perpendiculaire* à E et l'autre, à E' . Les droites Δ et Δ' relatives respectivement à a et à a' sont les deux *génératrices rectilignes* de la quadrique, qui passent par le point A correspondant à (a, ϖ) et (a', ϖ') . E est perpendiculaire à Δ' et E' , à Δ . Le paraboloïde hyperbolique en question est *tangent* au cylindre parabolique dont nous avons parlé notamment à la fin du paragraphe 11, 10°, et l'axe de ce paraboloïde est perpendiculaire à R .

Si la droite E appartient à Γ , elle est confondue avec sa conjuguée et le paraboloïde hyperbolique se réduit à un *plan* perpendiculaire à E . Ce plan n'est donc tangent au cylindre parabolique sus-indiqué que si la droite E , appartenant à Γ , est, en outre, perpendiculaire à Oy .

En général, comme nous l'avons dit, \mathfrak{C} fait correspondre à une surface s une autre surface S , et \mathfrak{C}^{-1} , appliquée à S , donne s et une autre surface, s' . Des propriétés de s et s' ont été déjà indiquées aux paragraphes 11, 4°, 5°, 7°, 12°. D'autres relations entre s et s' se déduisent immédiatement de celles qui ont été indiquées pour (a, ϖ) et (a', ϖ') dans les paragraphes 11, 8° et 9° et 13, 1° et 2°. s et s' sont, en particulier, *polaires réciproques par rapport à Γ* . Il résulte de cette relation dualistique que les asymptotiques se correspondent sur s et s' , ce que nous savons déjà (§ 11, 5°).

Soient C et C' les courbures totales de s et s' , en a et a' ; θ l'un des angles des normales à s et s' en a et a' , égal à l'un des angles de Δ et de Δ' . On démontre que

$$(86) \quad CC' \overline{aa'} = \sin^4 \theta.$$

Pour $\nu = 1$, d'après le paragraphe 11, 9°, la surface s (ou s') est liée par une *transformation de Legendre* à la surface qu'on obtient en appliquant à la surface s' (ou s) le produit de la symétrie et de la rotation indiquées au dit paragraphe.

14. Relations entre la transformation \mathfrak{C} et la transformation de Lie. — Les axes Ox , Oy , Oz sont les mêmes qu'au paragraphe précédent. En particulier, l'axe Oz est placé sur R .

Considérons un trièdre trirectangle $\overline{Ox\overline{y}z}$, quelconque, et la *transformation de Lie*, T , correspondante.

La droite \overline{Ox} est l'axe du complexe linéaire, $\overline{\Gamma}$, qui intervient dans ce cas.

Partant de (a, ϖ) , nous obtenons, par T suivie de T^{-1} , (a, ϖ) et un autre élément de contact, (a'', ϖ'') , de même que, par \mathfrak{C} suivie de \mathfrak{C}^{-1} , nous obtenons (a, ϖ) et (a', ϖ') .

La droite $a' a''$ appartient à la congruence linéaire commune à Γ et à $\overline{\Gamma}$. En effet, a' est le pôle de ϖ par rapport à Γ et a'' , le pôle de ϖ par rapport à $\overline{\Gamma}$. La droite $a' a''$, qui est située dans ϖ et qui passe par a' , appartient à Γ . Comme elle passe aussi par a'' , elle appartient également à $\overline{\Gamma}$.

Les plans ϖ' et ϖ'' se coupent suivant la droite, passant par a , de la congruence linéaire commune à Γ et à $\overline{\Gamma}$.

Les points a' et a'' sont en relation homographique. En effet,

ω est le plan polaire de a' par rapport Γ et a'' , le pôle de ω par rapport à $\bar{\Gamma}$; et le produit de deux transformations dualistiques est une transformation homographique.

Celle-ci possède, dans le cas présent, des propriétés particulières remarquables. On le déduit aisément de nos Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 229, 1949, p. 334 et 608. C'est ainsi, notamment, qu'elle admet pour axe (ponctuel et tangentiel) chacun des axes des deux complexes spéciaux du faisceau de complexes linéaires comprenant Γ et $\bar{\Gamma}$.

Lorsque la droite \overline{Ox} est parallèle à R , la relation homographique entre a' et a'' est une affinité, et, de plus la droite $a' a''$ rencontre toujours une droite fixe, Δ_1 , parallèle à \overline{Ox} et à R , et reste parallèle à un plan fixe. Δ_1 est le diamètre conjugué de la direction de ce plan fixe pour tous les complexes du faisceau comprenant Γ et $\bar{\Gamma}$. Les complexes du dit faisceau ont leurs axes parallèles et situés dans un même plan. Le complexe d'axe Δ_1 de ce faisceau est spécial. Δ_1 est un axe (ponctuel et tangentiel) de l'affinité. Si b et φ sont les intersections par le plan xOy des droites \overline{Ox} et Δ_1 , parallèles à Oz , et c , le point où $a' a''$ coupe Δ_1 , on a

$$(87) \quad \vec{\varphi O} = \nu \vec{\varphi b}, \quad \vec{ca'} = \nu \vec{ca''}.$$

Lorsque la droite \overline{Ox} est placée sur R et que $\nu = 1$, Γ et $\bar{\Gamma}$ sont confondus. Il en est de même de (a', ω') et de (a'', ω'') , quel que soit (a, ω) .

Remarques. — Des relations du même genre existent pour tout ensemble de deux transformations de contact dont chacune fait intervenir un complexe linéaire de la même manière que \mathcal{C} , par exemple pour deux \mathcal{C} différentes.

Ces propriétés se rattachent, comme nous venons de le voir, à la théorie des faisceaux de complexes linéaires, que nous avons développée beaucoup et renouvelée, en particulier en considérant les suites et cycles de complexes linéaires conjugués et en en faisant l'étude (voir nos Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 227, 1948, p. 712; t. 228, 1949, p. 359, 803, 894 et 1076; t. 229, 1949, p. 334 et 608).

15. Remarque sur le parabolôïde hyperbolique. — Cette remarque nous sera utile plus tard.

Un parabolôïde hyperbolique étant donné, soient λ et λ' deux génératrices rectilignes orthogonales d'un même système; λ'' la génératrice du même système lieu des milieux des segments, compris entre λ et λ' , des génératrices de l'autre système. Considérons, en outre, le plan C perpendiculaire à λ'' et passant par la perpendiculaire commune à λ et à λ' ; la circonférence C située dans ce plan, ayant son centre sur λ'' et passant par les points N et N' où la

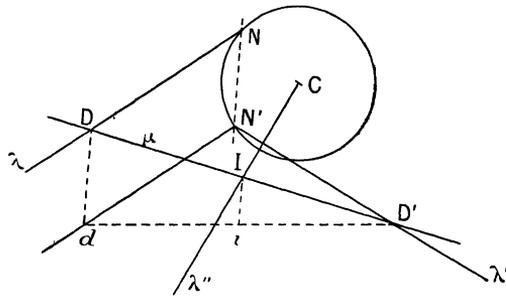


Fig. 1.

perpendiculaire commune à λ et à λ' les rencontre; enfin la sphère admettant comme diamètre le segment de droite, compris entre λ et λ' , d'une génératrice μ de l'autre système.

Cette sphère passe par la circonférence C, quelle que soit la génératrice μ .

En effet, soient D et D' les points de μ situés respectivement sur λ et λ' , et I le milieu de DD'. La génératrice λ'' est située dans le plan perpendiculaire à NN' en son milieu. La circonférence tracée dans le plan C, ayant son centre C sur λ'' et qui passe par N passe bien aussi par N'. Soient d et i les projections de D et de I sur le plan passant par λ' et parallèle à λ .

Comme $\widehat{dN'D'}$ est droit et que i est le milieu de D'd, on a

$$id = iN' = iD'$$

et, par suite,

$$ID = IN' = ID'.$$

Mais le point I est équidistant de tous les points de la circonférence C. Donc la sphère de diamètre DD' passe, quelle que soit la génératrice μ , par la circonférence invariable C.

En N passe une génératrice perpendiculaire à λ et en N' passe une génératrice perpendiculaire à λ' . Les points N et N' sont placés dans le plan de Monge du paraboloidé hyperbolique.

16. Remarques concernant $\bar{\mathcal{C}}$ et $\bar{\mathcal{C}}^{-1}$. — Nous avons défini $\bar{\mathcal{C}}$, au paragraphe 6, 3°, par les équations

$$(88) \quad X = -py, \quad Y = -z + px, \quad Z = y + \nu p;$$

$$(89) \quad P = -\frac{x + \nu q}{px + qy}, \quad Q = \frac{-y + \nu p}{px + qy}.$$

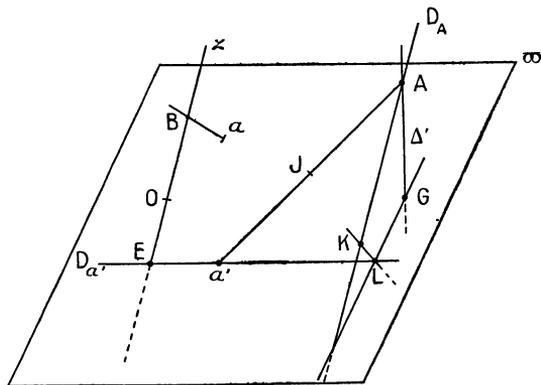


Fig. 2.

1° Supposons (α, ϖ) invariable et, les axes Ox, Oy, Oz étant fixes, faisons varier ν .

Les coordonnées du point a' sont, pour $\bar{\mathcal{C}}$, égales à $-\nu q, \nu p$ et $z - px - qy$ en vertu de (53), (59) et (63). Elles ont les mêmes valeurs pour $\bar{\mathcal{C}}^{-1}$. Quand ν varie, (α, ϖ) étant invariable, a' décrit une droite $D_{a'}$, perpendiculaire à l'axe Oz et le rencontrant, et située dans ϖ , puisque a' est toujours dans ϖ . $D_{a'}$ est donc l'intersection de ϖ et du plan perpendiculaire à Oz au point où cet axe perce ϖ .

On a

$$(90) \quad \overline{OE} = z - px - qy$$

Le point A, dont les coordonnées sont égales à $-py$, $-z + px$, $y + \nu p$, décrit une droite D_A parallèle à Oz , donc perpendiculaire à $D_{a'}$.

La droite Δ' , du paragraphe 11, 10°, confondue avec la droite $M'_1 M'_2$, passe par A et est perpendiculaire à ω . Le lieu de Δ' est donc le plan passant par D_A et perpendiculaire à ω . Ce lieu coupe ω suivant une perpendiculaire GL à $D_{a'}$.

Le plan Π passe par Δ' et il est perpendiculaire à la droite aa' . Sa trace sur ω est donc la perpendiculaire menée, dans ω , de G sur aa' .

Les coordonnées du milieu J de Aa' sont égales à

$$-\frac{p\nu + \nu q}{2}, \quad \frac{-z + px + \nu p}{2}, \quad \frac{y + \nu p + z - px - qy}{2}.$$

Le lieu de J est donc une droite, D_J , de paramètres directeurs $-q$, p , p . Elle est parallèle au plan passant par Oz et $D_{a'}$. En effet, les paramètres directeurs de Oz et de $D_{a'}$ sont $0, 0; 1$ et $-q, p, 0$. La perpendiculaire commune à ces deux droites a pour paramètres directeurs $-p, -q, 0$; elle est, par suite, perpendiculaire à D_J .

La droite Aa' engendre donc un *paraboloïde hyperbolique*.

Soient K et L les points où la perpendiculaire commune à $D_{a'}$ et à D_A rencontre ces droites; C la circonférence dont le centre est placé sur D_J , qui passe par K et L et dont le plan est perpendiculaire à D_J . D'après le paragraphe 15, la sphère de centre J, de diamètre Aa' , passe toujours par la circonférence, invariable, C.

On voit, d'après (53) et (59), qu'une des demi-normales au plan ω' a pour paramètres directeurs $-y, x, \nu$. La normale à ω' est donc perpendiculaire à la droite de paramètres directeurs $x, y, 0$, c'est-à-dire à la perpendiculaire aB menée de a sur Oz . Donc le plan ω' passe par aB . C'est le plan Baa' et il tourne autour de la droite aB quand ν varie.

Le plan de la circonférence C passe par O. En effet, le point K est dans le plan passant par $D_{a'}$ et perpendiculaire à Oz et à D_A . Les deux premières coordonnées de K sont donc égales à celles de A et la troisième coordonnée de K, égale à celle de a' . Les coordonnées de K sont donc $-py$, $-z + px$, $z - px - qy$. On en déduit que OK est perpendiculaire à D_J , dont les paramètres directeurs

sont $-q, p, p$. Il s'ensuit que le plan de la circonférence C, qui est perpendiculaire à D, et qui passe par K, contient le point O.

Le point O n'est pas, en général, sur la sphère de diamètre Aa' , car $\vec{Oa'} \cdot \vec{OA} = y(z - px - qy)$ est, en général, différent de zéro.

Cette sphère passe par G, point où la droite Δ' , perpendiculaire au plan ω , perce ce dernier.

Le point J se projette sur le plan AGL au milieu de AL, centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère AGKL.

Considérons les droites δ et δ' dont nous avons parlé au paragraphe 11, 11° notamment. Ce sont respectivement les intersections de ω et de ω' par des plans parallèles à zOx et passant l'un par a , l'autre par a' . La perpendiculaire commune à δ et à δ' est parallèle à Oy et située dans le plan yOz ; elle coupe Oz au point Q de coordonnées $0, 0, -Y = z - px = z' - p'x'$. \overline{OQ} est donc égal à la deuxième coordonnée, Y, de A changée de signe.

Lorsque, dans les équations de $\overline{\mathcal{C}}$, on fait $\nu = 0$ et que l'on considère ensuite $\overline{\mathcal{C}}^{-1}$, on voit que celle-ci ne donne qu'un transformé d'un élément de contact (A, II) quelconque. $\overline{\mathcal{C}}$ devient alors la transformation $\overline{\mathcal{C}}_0$, à centre unique, dont il a été question aux paragraphes 6, 3° et 4°, et 10 et dont il sera parlé plus en détail notamment aux paragraphes 18 et 21 de la deuxième Partie.

Mais si, partant des formules de $\overline{\mathcal{C}}^{-1}$ pour $\nu \neq 0$, on fait tendre ν vers zéro, on a toujours deux éléments de contact (a, ω) et (a', ω') . Pour (a, ω) invariable, le point a' tend vers le point E de la droite Oz et le plan ω' tend vers le plan aBE , passant par Oz (plan qui dépend de a , mais pas de ω).

Quant au point A et au plan II, ils tendent vers le point $A_0(-py, -z + px, y)$ et le plan Π_0 passant par A_0 et perpendiculaire à la droite aE . Ce point A_0 et ce plan Π_0 sont ceux que donne $\overline{\mathcal{C}}_0$.

Considérons l'intersection de ω par le plan passant par a et parallèle au plan zOx . Comme ω a pour équation

$$(91) \quad -p(\mathcal{X} - x) - q(\mathcal{Y} - y) + \mathcal{Z} - z = 0,$$

où $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ sont les coordonnées d'un point courant du plan, l'inter-

section en question, pour laquelle $\mathcal{Y} = y$, perce yOz en un point m tel que

$$(92) \quad \mathcal{X} = 0, \quad \mathcal{Y} = y, \quad \mathcal{Z} = z - px.$$

On obtient donc la projection A' de A_0 sur yOz en faisant tourner m de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox .

De plus, les droites Oa et OA_0 sont perpendiculaires.

Donc, si nous menons par A' une parallèle à Ox et si nous la coupons par le plan perpendiculaire à Oa en O , nous avons A_0 . Notons que

$$\overrightarrow{A_0A} = \nu p \vec{u},$$

\vec{u} étant toujours le vecteur unitaire correspondant à Oz .

2° Soient X_0, Y_0, Z_0, P_0, Q_0 les coordonnées de l'élément de contact (A_0, Π_0) transformé de (a, ϖ) par $\overline{\mathcal{C}}_0$. On a

$$(93) \quad X = X_0, \quad Y = Y_0, \quad Z = Z_0 - \nu \frac{X_0}{Z_0}.$$

Donc, comme il a été dit au paragraphe 6, 3°, $\overline{\mathcal{C}}$ est égale au produit de la transformation $\overline{\mathcal{C}}_0$, à centre unique O , et de la transformation ponctuelle définie par les équations (93).

Soient, de même, $X'_0, Y'_0, Z'_0, P'_0, Q'_0$ les coordonnées de l'élément de contact (A'_0, Π'_0) transformé de (a', ϖ') par $\overline{\mathcal{C}}_0$. On a

$$Z = y + \nu p = \nu p' + y' = y + y' = \nu(p' + p) = Z_0 + Z'_0.$$

$Z_0 = y$ et $Z'_0 = y'$ sont les racines de l'équation du second degré $Z_0^2 - ZZ_0 - \nu X = 0$.

On voit que l'élément de contact (A, Π) , transformé commun de (a, ϖ) et de (a', ϖ') par $\overline{\mathcal{C}}$, est tel que

$$\begin{aligned} X &= X_0 = X'_0, & Y &= Y_0 = Y'_0, & Z &= Z_0 + Z'_0; \\ P &= P_0 + P'_0, & Q &= Q_0 + Q'_0. \end{aligned}$$

Ce sont là des relations remarquablement simples entre les transformés de (a, ϖ) et de (a', ϖ') par la transformation $\overline{\mathcal{C}}_0$, à centre unique O , et le transformé commun de (a, ϖ) et de (a', ϖ') par $\overline{\mathcal{C}}$.

Les surfaces S_0 et S'_0 , lieux respectifs de A_0 et de A'_0 pour a se

déplaçant sur s , s'obtiennent par l'application à S des *deux transformations ponctuelles* en lesquelles se décompose l'inverse de la transformation (93). s et s' peuvent être déduites respectivement de S_0 et de S'_0 par $\overline{\mathcal{C}}_0^{-1}$, qui est équivalente à une transformation à *centre unique* O , comme nous le verrons dans la deuxième Partie.

Chacune des deux transformations en lesquelles se décompose $\overline{\mathcal{C}}^{-1}$ est donc égale au produit d'une transformation ponctuelle et de la transformation à centre unique O , équivalente à $\overline{\mathcal{C}}_0^{-1}$.

Les réseaux conjugués de S , S_0 , S'_0 correspondant aux asymptotiques de s et s' (lesquelles se correspondent) ont la *même projection* sur le plan xOy .

Soient Δ_0 la droite, analogue à Δ , correspondant au point a et à $\overline{\mathcal{C}}_0$; Δ'_0 la droite, analogue à Δ , correspondant au point a' et à $\overline{\mathcal{C}}_0$.

Les droites Δ_0 et Δ'_0 , perpendiculaires à $\vec{I}_2 - \vec{I}_1$, sont perpendiculaires à Oz . Elles sont donc respectivement parallèles aux traces sur xOy de Π_0 et de Π'_0 .

Π_0 et Π , tous deux perpendiculaires à ω , se coupent suivant une parallèle à Δ' . Π'_0 et Π , tous deux perpendiculaires à ω' , se coupent suivant une parallèle à Δ .

La trace de Π sur xOy passe par l'intersection des traces de Π_0 et Π'_0 sur xOy .

Soient $M_{1,0}$, $M_{2,0}$ les points situés sur Δ_0 , tels que

$$\overrightarrow{OM_{1,0}} = \vec{I}_1 \wedge \vec{Oa}, \quad \overrightarrow{OM_{2,0}} = \vec{I}_2 \wedge \vec{Oa};$$

$M'_{1,0}$, $M'_{2,0}$ les points analogues, relatifs à a' , situés sur Δ'_0 . On a

$$\overrightarrow{M_{1,0}M_1} = \overrightarrow{M'_{1,0}M'_1} = \vec{V}_1, \quad \overrightarrow{M_{2,0}M_2} = \overrightarrow{M'_{2,0}M'_2} = \vec{V}_2.$$

Mais, d'après (25) et comme, par définition de $\overline{\mathcal{C}}$, $\vec{\mathcal{C}} = o$, on voit que

$$\vec{V}_1 = \nu i_1 \vec{u}, \quad \vec{V}_2 = \nu i_2 \vec{u}.$$

\vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont donc parallèles à Oz . Il s'ensuit que *les points M_1 , M_2 , M'_1 , M'_2 du plan Π ont respectivement les mêmes projections sur xOy que $M_{1,0}$, $M_{2,0}$, $M'_{1,0}$, $M'_{2,0}$* . On voit aussi que Δ et Δ' ont respectivement les mêmes projections sur xOy que Δ_0 et Δ'_0 .

$\overrightarrow{M_1 M'_1}$ et $\overrightarrow{M_{1,0} M'_{1,0}}$ sont équipollents et il en est de même de $\overrightarrow{M_2 M'_2}$ et de $\overrightarrow{M_{2,0} M'_{2,0}}$.

Les points focaux des deux droites perpendiculaires à ω , donc parallèles à Δ' , passant respectivement par M_1 et $M_{1,0}$, ont les mêmes projections sur xOy . Remarques analogues pour les droites perpendiculaires à ω passant respectivement par M_2 et $M_{2,0}$; pour les droites perpendiculaires à ω' passant respectivement par M'_1 et $M'_{1,0}$; pour les droites perpendiculaires à ω' passant respectivement par M'_2 et $M'_{2,0}$.

Pour (a, ω) invariable et pour les systèmes $\overline{\mathcal{S}}$ relatifs à la même droite $D_1(x=1, y=0)$ et donnant la même transformation $\overline{\mathcal{C}}$, les droites $M_{1,0} M'_{1,0}$ et $M_{2,0} M'_{2,0}$ sont parallèles au plan Π invariable et rencontrent toujours les deux droites fixes Δ_0 et Δ'_0 . Elles engendrent donc un même paraboloides hyperbolique.

$A, \Pi, S, \Delta, \Delta', \vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ sont ici, bien entendu, relatifs à $\overline{\mathcal{C}}$ et non à la transformation \mathcal{C} dont nous l'avons déduite.

Quand $\nu \rightarrow 0$, les surfaces S_0, S'_0, s' viennent se confondre respectivement avec S , avec le plan xOy et avec la droite Oz .

3° (a, ω) et (a', ω') , transformés d'un même élément de contact (A, Π) par $\overline{\mathcal{C}}^{-1}$ étant supposés *invariables*, faisons *tourner* le trièdre $Oxyz$ d'un angle α quelconque autour de Ox . Appelons trièdre α le trièdre des axes correspondants; $\overline{\mathcal{C}}_\alpha$ la transformation définie par (88) et (89) mais par rapport au trièdre α ; $\overline{\mathcal{C}}_{0,\alpha}$ la transformation, à centre unique, définie par rapport au trièdre α par les mêmes équations mais où l'on fait $\nu = 0$; $A_{0,\alpha}, A'_{0,\alpha}$ et A_α, A'_α les points des éléments de contact transformés de (a, ω) et (a', ω') par $\overline{\mathcal{C}}_{0,\alpha}$ et $\overline{\mathcal{C}}_\alpha$. Pour $\alpha = 0$, A_α et A'_α sont confondus avec le point A . On démontre que, pour α variable :

a. les lieux de $A_{0,\alpha}$ et de $A'_{0,\alpha}$ sont *deux droites* ayant la même projection sur le plan xOy initial et situées l'une dans le plan perpendiculaire à Oa en O , l'autre dans le plan perpendiculaire à Oa' en O ;

b. les lieux de A_α et de A'_α sont constitués par une même droite passant par A .

Il sera question plus en détail, notamment au paragraphe 21, 2°, des lieux analogues à ceux de $A_{0,\alpha}$ ou de $A'_{0,\alpha}$.

Les quatre droites indiquées ci-après sont *concourantes* : le lieu de $A_{0,\alpha}$; celui de $A'_{0,\alpha}$; l'intersection des plans perpendiculaires en O respectivement à Oa et à Oa' ; la parallèle à Ox menée par le point qu'on obtient en faisant tourner de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox l'intersection de la droite aa' et du plan yOz .

CHAPITRE V.

CONGRUENCES DE DROITES OU DE COURBES DÉDUITES D'UNE SURFACE QUELCONQUE A L'AIDE DE \mathfrak{C} .

17. **Étude de ces congruences.** — Prenons pour origine O un point arbitraire et considérons une surface s non développable, quelconque. O et s étant invariables, supposons que $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{OO}_1, \vec{OO}_2$ soient fonctions d'un même paramètre. Nous avons, d'après (10),

$$\vec{OA} = \frac{\nu_2 \vec{OM}_1 - \nu_1 \vec{OM}_2}{\nu_2 - \nu_1}.$$

1° Pour a fixe sur s , les points $M_1, F_1, G_1, M_2, F_2, G_2, A$ décrivent des courbes. Soient I_{n_1} et I_{n_2} deux points où le plan passant par O et parallèle à ω coupe respectivement les deux courbes décrites par I_1 et I_2 ; O_{n_1} et O_{n_2} les positions de O_1 et de O_2 correspondant respectivement à I_{n_1} et à I_{n_2} . Rappelons que I_1 et I_2 sont les extrémités de deux vecteurs, d'origine O, équipollents à \vec{I}_1 et à \vec{I}_2 . Les lieux de M_1, F_1, G_1 et le lieu C_A de A passent par l'extrémité de

$$\vec{O_{n_1}A_{n_1}} = \vec{OI_{n_1}} \wedge \vec{O_{n_1}a}.$$

Les lieux de M_2, F_2, G_2 et la courbe C_A passent par l'extrémité de

$$\vec{O_{n_2}A_{n_2}} = \vec{OI_{n_2}} \wedge \vec{O_{n_2}a}.$$

2° Quand a se déplace sur s , on a une famille de surfaces S à un paramètre et une congruence de courbes C_A . Les deux familles à un paramètre qui, dans cette congruence, correspondent aux asymptotiques de s , découpent sur chaque surface S un réseau conjugué.

Si \vec{I}_1 et \vec{I}_2 sont invariables et si les composantes de \vec{OO}_1 et de \vec{OO}_2

suivant trois axes fixes sont des trinômes du *second degré* du paramètre, C_A est une *parabole* ⁽¹⁾.

Examinons des cas pour lesquels chacun des vecteurs $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{OO}_1, \vec{OO}_2$, s'il n'est pas indiqué comme *invariable*, a ses composantes égales à des expressions *linéaires* du paramètre.

a. Supposons que $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{OO}_1, \vec{OO}_2$ varient. Pour a fixe sur s , les lieux de M_1, F_1, G_1 et M_2, F_2, G_2 sont des droites $D_{M_1}, D_{F_1}, D_{G_1}$, situées dans un même plan et concourantes, et des droites $D_{M_2}, D_{F_2}, D_{G_2}$, situées dans un même plan et concourantes. C_A est une *cubique*.

b. Si \vec{I}_1 est invariable, $D_{M_1}, D_{F_1}, D_{G_1}$, toujours situées dans un même plan, sont parallèles au vecteur

$$\vec{OV}_1 = \vec{v}_1 - \vec{I}_1 \wedge \vec{v}_1,$$

\vec{v}_1 étant un vecteur constant parallèle à la droite décrite par O_1 . C_A est une *hyperbole*. \vec{OV}_1 est indépendant de (a, ϖ) .

c. Supposons \vec{I}_1 et \vec{I}_2 invariables. Pour a fixe sur s , C_A est ici une *droite* D_A parallèle au plan OV_1V_2 , avec

$$\vec{OV}_2 = \vec{v}_2 - \vec{I}_1 \wedge \vec{v}_2,$$

\vec{v}_2 étant un vecteur constant parallèle à la droite décrite par O_2 . Les droites $M_1M_2A, F_1F_2A, G_1G_2A$ engendrent trois *paraboloïdes hyperboliques*, dont D_A est une génératrice commune. \vec{OV}_2 , comme \vec{OV}_1 , est indépendant de (a, ϖ) .

Si \vec{OV}_1 et \vec{OV}_2 ont le même support, les droites $D_{M_1}, D_{F_1}, D_{G_1}, D_{M_2}, D_{F_2}, D_{G_2}, D_A$ relatives à *tous* les points de s sont *parallèles* au support commun de \vec{OV}_1 et de \vec{OV}_2 et les paraboloides deviennent des *plans*.

d. Supposons \vec{I}_1, \vec{I}_2 et \vec{OO}_1 invariables. Pour a fixe sur s , $M_1, F_1,$

(1) Nous ne parlons, pour chaque cas envisagé, que de ce qui concerne les conditions les plus générales correspondantes.

Rappelons qu'on détermine aisément les centres, sommets et foyers de coniques définies par leurs équations paramétriques.

G_1 sont fixes et tous les plans Π passent par la droite $F_1 G_1$. Les paraboloides deviennent encore des *plans*. Les droites $D_{M_1}, D_{F_1}, D_{G_1}, D_A$ relatives à *tous* les points de s sont *parallèles* à \vec{OV}_2 .

e. Supposons \vec{OO}_1 et \vec{OO}_2 invariables.

Pour a fixe sur s , $M_1 M_2 A, F_1 F_2 A, G_1 G_2 A$ engendrent trois *paraboloides hyperboliques* et C_A est une *hyperbole* commune à ces quadriques.

Quand l'unité de longueur varie, le point A correspondant à un élément de contact (a, ϖ) donné, décrit une *droite*. C'est un cas particulier du cas actuel.

f. Supposons \vec{I}_1, \vec{OO}_1 et \vec{OO}_2 invariables.

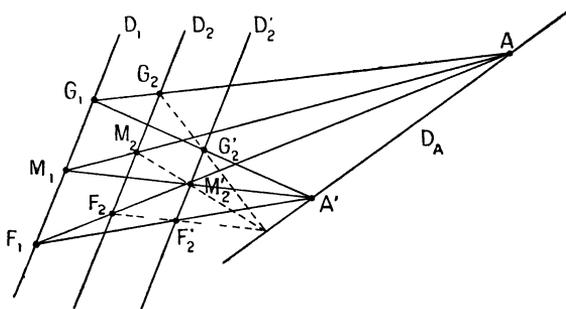


Fig. 3.

Pour a fixe sur s , M_1, F_1, G_1 sont fixes et tous les plans Π passent par la droite $F_1 G_1$. Les paraboloides deviennent respectivement des *plans* P, P', P'' et le lieu de A est une droite D_A . Soit I_{n_2} le point où le plan passant par O et parallèle à ϖ coupe la droite lieu de I_2 . La droite D_A passe par l'extrémité de

$$\vec{O_2 A_{n_2}} = \vec{OI_{n_2}} \wedge \vec{O_2 a}.$$

Quand a se déplace sur s , cette droite engendre une *congruence*, dont les *développables* correspondent aux *asymptotiques* de s et les plans P' et P'' sont les *plans focaux* de la droite.

En effet, soient A et A' deux positions du point A correspondant à un même point a de s et à deux valeurs du paramètre, c'est-à-dire à

deux vecteurs \vec{I}_1 et \vec{I}_2 différents. La droite D'_2 , perpendiculaire à ϖ comme D_1 et D_2 , passe par le point M'_2 tel que

$$\overrightarrow{O_2 M'_2} = \vec{I}_1 \wedge \overrightarrow{O_2 a}.$$

En général, les droites D_1 et D_M , ne sont pas dans un même plan.

Lorsque le point a se déplace sur s , A et A' engendrent respectivement les surfaces S et S' .

Considérons, dans la congruence des droites D_A , la surface réglée relative à l'asymptotique de s à laquelle correspondent les points focaux G_1, G_2, G' , des droites D_1, D_2, D' , perpendiculaires à ϖ . Quand a se déplace sur cette asymptotique, les déplacements de A et de A' sur S et S' sont respectivement tangents à AF_1 et à $A'F_1$, d'après l'avant-dernier alinéa du paragraphe 1. Le plan tangent, en A comme en A' , à la surface réglée considérée est donc le plan AF_1A' , c'est-à-dire le plan P' . Il en est de même en tout point de D_A . La surface réglée en question est donc développable.

Il s'ensuit que les développables de la congruence des droites D_A correspondent aux asymptotiques de s et que les plans P' et P'' sont les plans focaux de D_A .

De plus, les développables découpent un *réseau conjugué* sur chaque surface S de la famille à un paramètre.

Remarque. — Quand a se déplace sur s , les deux droites lieux des points $A_{0,a}$ et $A'_{0,a}$, dont il est question au paragraphe 16, 3°, engendrent deux congruences \mathcal{E} , selon une notation du paragraphe 22 où nous étudions spécialement ces congruences.

DEUXIÈME PARTIE

TRANSFORMATION \mathfrak{C}_0 , A CENTRE UNIQUE.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DE \mathfrak{C}_0 ET DE \mathfrak{C}_0^{-1} .

18. Équations de \mathfrak{C}_0 . — Dans le cas actuel, O_1 et O_2 sont confondus en un centre unique.

Prenons l'origine O en ce centre. Reportons-nous au paragraphe 3. Ici

$$\vec{V}_1 = \vec{V}, = 0, \quad \vec{u} = \vec{v} = 0.$$

Les formules (14), (15) et (21) s'écrivent

$$(94) \quad \overrightarrow{OM}_1 = \vec{I}_1 \wedge \overrightarrow{Oa},$$

$$(95) \quad \overrightarrow{OM}_2 = \vec{I}_2 \wedge \overrightarrow{Oa},$$

$$(96) \quad \overrightarrow{OA} = \vec{I}_n \wedge \overrightarrow{Oa}.$$

On a

$$(97) \quad \overrightarrow{M_1M_2} = (\vec{I}_2 - \vec{I}_1) \wedge \overrightarrow{Oa}.$$

Adoptons les axes du paragraphe 6, 2°.

Les droites Oa et OA sont perpendiculaires.

Il en est de même de la droite Δ , qui passe par M_1 et M_2 , et de $\vec{I}_2 - \vec{I}_1$, parallèle à Oz ; donc Δ est perpendiculaire à Oz .

Les composantes, parallèles à Oz , de \overrightarrow{OM}_1 et de \overrightarrow{OM}_2 sont égales à hy . On a

$$(98) \quad Xx + Yy + Zz = 0,$$

$$(99) \quad Z - hy = 0.$$

Ce sont les *deux équations directrices* de \mathfrak{C}_0 .

Faisant $\lambda = \mu = \nu = \lambda' = \mu' = \nu' = 0$ dans (32) et (33), on a, pour \mathfrak{C}_0 ,

$$(100) \quad X = -hpy, \quad Y = h(-z + px), \quad Z = hy;$$

$$(101) \quad P = -\frac{x}{px + qy}, \quad Q = -\frac{y}{px + qy}.$$

Notons que

$$Py - Qx = 0.$$

Cette dernière relation correspond au fait que la droite Δ , de paramètres directeurs $-y, x, 0$, est située dans le plan Π .

Soit \mathfrak{C}_0 la transformation définie par rapport aux mêmes axes par

$$(102) \quad X = -py, \quad Y = -z + px, \quad Z = y$$

et par (101).

\mathfrak{C}_0 est équivalente à $\bar{\mathfrak{C}}_0$ suivie de l'*homothétie* (O, h) .

19. **Équations de \mathfrak{C}_0^{-1} .** — Des formules (100) et (101) on tire

$$(103) \quad x = \frac{PZ}{Qh}, \quad y = \frac{Z}{h}, \quad z = -\frac{PX + QY}{Qh};$$

$$(104) \quad p = -\frac{X}{Z}, \quad q = \frac{PX - Z}{QZ}.$$

Par définition, la droite D_1 passe par les extrémités, J_1 et I_2 , des deux vecteurs, d'origine O , équipollents à \vec{I}_1 et à \vec{I}_2 . Elle est parallèle à Oz et située dans le plan zOx . Appelons D_1 la droite qu'on déduit de D_1 par l'*homothétie* $(O, -\frac{1}{h^2})$ et par une *rotation* de $\frac{\pi}{2}$ autour de Ox . Le plan passant par O et parallèle à Π coupe D_1 au point I'_n de coordonnées $-\frac{1}{h}, \frac{P}{Qh}, 0$. Désignons par \vec{I}'_n le vecteur \vec{OI}'_n : On a, en vertu de (103),

$$(105) \quad \vec{Oa} = \vec{I}'_n \wedge \vec{OA}.$$

Mais si, pour *deux transformations de contact* de l'espace, les trois équations donnant les coordonnées du point transformé sont les mêmes, les deux autres équations sont également communes aux deux transformations.

\mathfrak{C}_0^{-1} est donc équivalente à une transformation à centre unique

O, mais dans laquelle on emploie la droite D_1 , tandis que, dans \mathcal{C}_0 , de centre unique O également, on emploie la droite D_1 .

Notons que

$$\vec{I}_n \cdot \vec{I}'_n = -1.$$

En outre, Oa et \vec{I}'_n , d'une part, et OA et \vec{I}_n , d'autre part, sont perpendiculaires. Les plans AOI'_n et aOI_n se coupent suivant la perpendiculaire en O aux droites rectangulaires Oa et OA .

Enfin, \vec{I}'_n et Δ sont parallèles, puisque ce vecteur et cette droite sont tous les deux perpendiculaires à Oz et à Oa .

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES DE LA TRANSFORMATION A CENTRE UNIQUE.

20. Propriétés particulières de \mathcal{C}_0 . — 1° On remarque d'abord que, pour une droite D_1 donnée, \mathcal{C}_0 reste invariable si les points I_1 et I_2 se déplacent sur D_1 .

2° Soient \vec{I} un vecteur variable, d'origine O, dont l'extrémité I se déplace sur D_1 fixe; M l'extrémité de $\vec{OM} = \vec{I} \wedge \vec{Oa}$; D la droite passant par M et perpendiculaire à ϖ .

Quand a se déplace sur une surface s quelconque, D engendre, pour chaque position de I, une congruence \mathcal{C} , dont la surface moyenne est le plan perpendiculaire à \vec{I} en O et dont les développables correspondent aux asymptotiques de s . Soient F et G les points focaux de D. M en est le point moyen.

Pour a fixe sur s (avec $\vec{Oa} \neq 0$), les lieux respectifs de M, F, G, pour I mobile sur D_1 , sont trois droites D_M, D_F, D_G situées dans le plan Π et passant par A.

La droite D_M n'est autre que la droite $M_1 M_2$, que nous avons appelée aussi Δ dans le cas général. Ses équations sont constituées ici par (98) et (99) si l'on y regarde X, Y, Z comme les coordonnées d'un point courant de Δ . Cette droite Δ est située dans le plan perpendiculaire à Oa en O et elle est parallèle au plan xOy .

3° Le plan γOA mené par la droite OA perpendiculairement

au plan zOx est perpendiculaire à ϖ . En effet, on peut prendre pour paramètres directeurs de la normale au plan yOA les quantités $-Z, 0, X$. Et l'on voit, au moyen de (100), que cette normale est perpendiculaire à la droite de paramètres directeurs $-p, -q, 1$ perpendiculaire à ϖ .

De même, le plan zOa mené par la droite Oa perpendiculairement au plan xOy est perpendiculaire à Π .

4° Quand le point a se déplace sur une surface s , Δ engendre la congruence des droites tangentes à S et parallèles au plan xOy .

Lorsque a se déplace sur une courbe plane de s dont le plan est parallèle à zOx , la droite Δ se déplace dans un plan parallèle à xOy , en restant tangente à S .

Lorsque a se déplace sur une courbe plane de s dont le plan est parallèle à xOy , Δ engendre un *conoïde droit* dont la directrice est la droite lieu du point M_0 tel que

$$\overrightarrow{OM}_0 = h\vec{v} \wedge \overrightarrow{Oa},$$

\vec{v} étant le vecteur unitaire correspondant à Ox . Cette droite est située dans le plan yOz et est parallèle à Oz . Le plan directeur du conoïde est le plan xOy et son noyau est la surface S .

5° Les développables de la congruence qu'engendre Δ quand a se déplace sur s sont, d'une part, des plans parallèles à xOy et, d'autre part, des cylindres circonscrits à S . Le point focal de Δ autre que A est le point à l'infini de cette droite.

6° Considérons dans l'espace (x, y, z) une multiplicité formée d'une droite E et de tous les plans passant par cette droite. On démontre qu'à cette multiplicité correspond, dans le cas général, une multiplicité de l'espace (X, Y, Z) , dont le support est un *paraboloïde hyperbolique*. Cette quadrique passe par Oy . L'un de ses plans directeurs est parallèle au plan xOy et l'autre est perpendiculaire à la droite E .

21. Remarques concernant $\overline{\mathcal{C}}_0$. — 1° Les équations directrices de $\overline{\mathcal{C}}_0$ sont

$$(106) \quad Xx + Yy + Zz = 0, \quad Z - y = 0.$$

Considérons l'élément de contact formé par le point $a(x, y, z)$ et

le plan ϖ passant par ce point et l'élément de contact correspondant au précédent dans la transformation $\bar{\varpi}_0$ et formé par le point $A(X, Y, Z)$ et le plan Π passant par A .

Soient (*fig. 4*) an et AN les normales en a et A aux plans ϖ et Π ; a' et A' les projections sur yOz des points a et A ; Δ la droite de l'espace (X, Y, Z) définie par les deux équations (106) quand x, y, z sont égaux aux coordonnées du point a ; δ la droite de l'espace (x, y, z) définie par les deux équations (106) quand X, Y, Z sont égaux aux coordonnées du point A ; M et m les intersections de Δ et δ par le

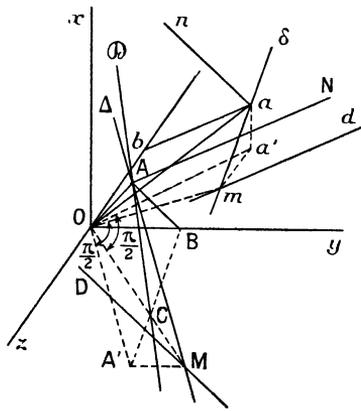


Fig. 4.

plan yOz ; D la droite parallèle à an et passant par M ; d la droite parallèle à AN et passant par m ; B le point où le plan Π coupe Oy ; b le point où le plan ϖ coupe Oz .

AB est l'intersection des plans Π et yOa , et ab , celle des plans ϖ et zOa .

Les droites Oa et OA sont perpendiculaires. Il en est de même des droites AN et an et des plans Π et ϖ .

La droite Δ passe par A et elle est perpendiculaire à Oa et à Oz , donc au plan zOa . Elle est située dans le plan Π . Elle constitue le support de la multiplicité de l'espace (X, Y, Z) correspondant à la multiplicité de l'espace (x, y, z) formée du point a et de tous les plans passant par ce point. Le plan Π contient les droites AB et D , en plus de la droite Δ .

Le plan zOa est, d'après le paragraphe 16, 1°, la limite du plan ϖ'

du cas d'une transformation $\bar{\mathcal{C}}$ lorsque $\nu \rightarrow 0$. Le fait que Δ est perpendiculaire au plan zOa est en accord avec une propriété signalée au paragraphe 14, 10°.

La droite δ passe par a et elle est perpendiculaire à OA et à Oy , donc au plan yOA . Elle constitue le support de la multiplicité de l'espace (x, y, z) correspondant à la multiplicité de l'espace (X, Y, Z) formée du point A et de tous les plans passant par ce point. Elle est située dans le plan ϖ . Celui-ci contient les droites ab et d , en plus de la droite δ .

Les coordonnées du point M sont $0, -z, y$ et celles du point m sont $0, Z, -Y$. Si $\vec{\nu}$ est toujours le vecteur unitaire correspondant à Ox , on a

$$\vec{OM} = \vec{\nu} \wedge \vec{Oa}, \quad \vec{OA'} = \vec{\nu} \wedge \vec{Om}.$$

Le vecteur $\vec{A'M}$, parallèle à Oy , se déduit donc du vecteur $\vec{ma'}$, parallèle à Oz , par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox .

Comme Δ est perpendiculaire au plan zOa et à AN , le plan zOa est parallèle à AN . Ce résultat concorde avec celui qui est indiqué à la fin du paragraphe 20, 3°.

Puisque le plan zOa est perpendiculaire au plan Π , la perpendiculaire menée de a sur Π rencontre toujours la droite Oz ; elle n'est autre que ab , intersection des plans zOa et ϖ perpendiculaires à Π .

Comme δ est perpendiculaire au plan yOA et à an , le plan yOA est parallèle à an . Ce résultat concorde avec celui qui est indiqué au début du paragraphe 20, 3°.

Puisque le plan yOA est perpendiculaire au plan ϖ , la perpendiculaire menée de A sur ϖ rencontre toujours la droite Oy ; elle n'est autre que AB , intersection des plans yOA et Π perpendiculaires à ϖ .

Les trois droites d, ab, AN , d'une part, et les trois droites D, AB, an , d'autre part, sont parallèles. Les trois premières sont perpendiculaires aux trois autres.

La droite bm , intersection des plans yOz et ϖ , et la droite $A'B$, projection de AB sur yOz , sont perpendiculaires, puisque la normale an au plan ϖ et la droite AB sont parallèles. De même, $a'b$ et

BM sont perpendiculaires. Comme une rotation du point a' de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox le transporte au point M, on voit qu'on obtient le point B en faisant subir au point b une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox . On vérifie que $\overline{Ob} = -\overline{OB} = z - px - qy$. Le point b de la figure 4 n'est autre que le point E de la figure 2.

Ainsi, par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox , le triangle $ba'm$ vient se placer sur le triangle BMA', les points b, a', m venant respectivement en B, M, A'.

Comme OA' est perpendiculaire à Om , il en est de même de OA . Le plan Oma est perpendiculaire à OA , de même que le plan OMA est perpendiculaire à Oa .

Partant du point a et du plan ϖ , on peut déterminer A et II au moyen, notamment, des constructions géométriques suivantes.

Traçons dans le plan ϖ la droite δ , passant par a et parallèle au plan zOx , qui perce le plan yOz en m . Faisons tourner le point m de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox . Nous avons ainsi le point A'. Le point A est le point où la parallèle à Ox menée par A' perce le plan perpendiculaire à Oa en O. La droite Δ est perpendiculaire au plan zOa . Quant au plan II, il passe par Δ et il est perpendiculaire au plan ϖ . On peut aussi le déterminer en remarquant qu'il passe par Δ et par le point B qu'on obtient en faisant tourner de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox l'intersection b de Oz et du plan ϖ .

Si le point a se déplace sur une surface s et si ϖ est le plan tangent à s en a , la droite D engendre la congruence \mathcal{C} . Le plan II touche son enveloppe S en A. Soient F et G les points focaux de D. Les droites AF et AG sont deux tangentes conjuguées de la surface S et le réseau des courbes conjuguées de S qu'elles enveloppent correspond aux asymptotiques de s .

Réciproquement, si le point A se déplace sur une surface S, II étant le plan tangent à S en A, la droite d engendre une congruence. Le plan ϖ touche son enveloppe s en a . Soient f et g les points focaux de d . Les droites af et ag sont deux tangentes conjuguées de la surface s et le réseau des courbes conjuguées de s qu'elles enveloppent correspond aux asymptotiques de S.

2° Supposant le point a et le plan ϖ donnés et fixes, faisons tour-

ner le trièdre $Oxyz$ autour de l'axe Ox , maintenu invariable. Pour chaque position du trièdre $Oxyz$, appliquons à l'élément de contact (a, ϖ) la transformation $\overline{\mathcal{C}}_0$ relative à cette position du trièdre. Le point M (*fig. 4*) reste fixe et la droite Δ tourne autour de M dans le plan perpendiculaire à Oa en O , lequel passe par M . Les points m et b se déplacent sur l'intersection des plans fixes ϖ et γOz et, par suite, le lieu des points A' et B est la droite qu'on obtient par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox de l'intersection des plans ϖ et γOz . Le lieu de A est donc une droite, \mathcal{D} , située dans le plan normal à Oa en O et dont on obtient la projection sur γOz par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox de l'intersection des plans ϖ et γOz . La projection de \mathcal{D} sur le plan γOz est parallèle aux projections sur γOz des droites D et an . Elle coupe l'intersection OM du plan perpendiculaire à Oa en O et du plan γOz en un point C , qui est le point où \mathcal{D} perce γOz . Le plan Π tourne autour de la droite D , qui est perpendiculaire au plan ϖ et qui est fixe.

22. Congruence \mathcal{E} . — La surface s étant invariable dans l'espace, faisons tourner le trièdre $Oxyz$ autour de l'axe Ox , maintenu fixe. La congruence \mathcal{C} ne varie pas. Nous obtenons une famille, Φ , à un paramètre, de surfaces S , en appliquant à s la transformation $\overline{\mathcal{C}}_0$ pour chaque position du trièdre ⁽¹⁾. D'après le paragraphe 21, 2°, si a est un point donné de s , le point A décrit la droite \mathcal{D} et le plan Π tourne autour de D .

1. *Quand le point a se déplace sur s , la droite \mathcal{D} engendre une congruence, \mathcal{E} , dont les développables correspondent aux asymptotiques de s .*

Première démonstration. — Considérons, dans la congruence \mathcal{E} , la surface réglée relative à l'asymptotique de s à laquelle correspond le point focal G de D . Pour la transformation $\overline{\mathcal{C}}_0$ relative à une position de $Oxyz$, quand a se déplace sur cette asymptotique, le déplacement de A sur une surface S est tangent à AF . Le plan tangent, en A , à la surface réglée considérée est donc le plan passant par la

⁽¹⁾ La surface S est la même pour deux positions telles que le trièdre passe de l'une à l'autre par une rotation de π autour de Ox .

droite \mathcal{O} et par le point F. Il en est de même pour tout autre point A de \mathcal{O} . Donc la surface réglée en question est une développable.

Seconde démonstration. — Désignons par P le plan perpendiculaire à Oa en O et par Q le plan projetant la droite \mathcal{O} sur le plan yOz . Supposons que le point a se déplace sur une ligne asymptotique de s et soit t le point où la tangente asymptotique correspondante at perce le plan yOz . La caractéristique de P est perpendiculaire à Oa et à at , donc au plan Oat . Celle de Q est la parallèle à Ox passant par le point qu'on obtient en faisant tourner le point t de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox . Donc les caractéristiques de P et de Q sont toutes deux situées dans le plan passant par Ox et perpendiculaire à Ot . Elles se rencontrent donc en un point de l'intersection \mathcal{O} des plans P et Q, qui, par suite, a une enveloppe pour le déplacement envisagé.

Remarques. — Prenons pour trièdre de référence la position initiale du trièdre $Oxyz$, par exemple. La droite \mathcal{O} est définie par les équations

$$(107) \quad \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z = 0,$$

$$(108) \quad \mathcal{Y} + q\mathcal{Z} + z - px - qy = 0,$$

dans lesquelles \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{Z} sont les coordonnées d'un point courant.

De (107) et (108) on tire

$$(109) \quad \mathcal{X} = A\mathcal{Z} + a, \quad \mathcal{Y} = B\mathcal{Z} + b,$$

en posant

$$(110) \quad u = \frac{z - px - qy}{x},$$

$$(111) \quad A = -u - p, \quad B = -q, \quad a = uy, \quad b = -ux.$$

On a facilement

$$(112) \quad dA db - dB da = u(dp dx + dq dy).$$

Cette formule constitue une démonstration analytique du théorème précédent.

A la relation $u = 0$, c'est-à-dire $z - px - qy = 0$, correspond un cône de sommet O qui est une développable *singulière* de \mathcal{E} .

D'autre part, on voit directement qu'à $x = 0$ correspond un cylindre,

de génératrices parallèles à Ox , qui est une *autre* développable singulière de \mathcal{E} .

Nous ne parlerons plus par la suite de ces développables singulières.

2. On obtient la projection sur le plan yOz de chacun des points focaux de \mathcal{D} en faisant tourner de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox le point où la tangente asymptotique correspondante de s , en a , perce le plan yOz .

Soient a' la projection du point a sur le plan yOz ; t et u les points où ce plan est percé par les tangentes asymptotiques at et au de s en a ; \mathcal{F} et \mathcal{G} les points focaux de \mathcal{D} correspondant respectivement à at et à au ; \mathcal{F}' et \mathcal{G}' les projections de ces points sur le plan yOz .

Pour un déplacement du point a le long de la ligne asymptotique tangente à at , la caractéristique du plan P , perpendiculaire à Oa en O , passe par O et par \mathcal{F} et elle est normale au plan Oat . Donc $O\mathcal{F}$ et Ot et, par suite, $O\mathcal{F}'$ et Ot sont perpendiculaires. Mais la projection de \mathcal{D} sur yOz se déduit de la droite tu par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox . La proposition en résulte immédiatement.

Remarques. — On sait qu'une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Ox transporte les points a' , m , b en M , A' , B (*fig. 4*). On voit donc que, par une telle rotation, le point a' et les quatre points en ligne droite m , b , t , u viennent se placer respectivement en M , A' , B , \mathcal{F}' , \mathcal{G}' .

Pour le déplacement d'un point sur s considéré dans la démonstration précédente, les caractéristiques des plans P et Q se coupent au point focal \mathcal{F} de leur intersection \mathcal{D} . Les enveloppes de ces deux plans, pour le déplacement considéré, sont donc respectivement le cône engendré par $O\mathcal{F}$ et le cylindre engendré par $\mathcal{F}\mathcal{F}'$.

3. Les développables de la congruence \mathcal{E} découpent un réseau conjugué sur chaque surface de la famille Φ et les plans focaux de \mathcal{D} passent l'un par le point focal F de D , l'autre par le second point focal G de cette même droite D .

Rappelons que la droite D est la parallèle menée par le point

$M(0, -z, y)$ à la normale an à s . Pour toute surface, S , de la famille Φ , les droites AF et AG sont les tangentes, au point A commun à \mathcal{O} et à S , de deux courbes d'un réseau conjugué de S qui correspond aux lignes asymptotiques de s . Ce réseau conjugué n'est donc autre, en vertu du théorème 1 du présent paragraphe 22, que l'intersection de la surface considérée S par les développables de la congruence \mathcal{E} .

Le plan focal de \mathcal{O} tangent à la développable engendrée par \mathcal{O} quand le point a se déplace sur une ligne asymptotique de s passe par le point focal de D correspondant à l'autre ligne asymptotique de s .

Remarque. — Le plan parallèle à Ox et passant par D est coupé par les deux plans focaux de \mathcal{O} suivant deux droites parallèles à \mathcal{O} , symétriques par rapport au point M . Cette propriété résulte de ce que les plans parallèles à Ox et passant respectivement par D et \mathcal{O} sont parallèles et de ce que les points focaux de D sont symétriques par rapport à M .

4. *Les plans passant par le point O et parallèles respectivement aux plans focaux de D , c'est-à-dire perpendiculaires respectivement aux tangentes asymptotiques de s en a , passent l'un par un point focal de \mathcal{O} , l'autre par le second point focal de cette droite.*

Soient toujours F et \mathcal{F} les points focaux de D et de \mathcal{O} correspondant à une même ligne asymptotique de s et t le point où la tangente asymptotique at correspondante de s , en a , perce le plan γOz . La droite $O\mathcal{F}$, étant la caractéristique du plan P perpendiculaire à Oa en O , est perpendiculaire à at . Considérons le plan focal de D tangent à la développable correspondant à la même ligne asymptotique de s . Il est perpendiculaire à at et, par suite, le plan parallèle à ce plan focal et passant par O contient la droite $O\mathcal{F}$ et, par conséquent, le point focal \mathcal{F} .

Les théorèmes qui viennent d'être démontrés à l'aide de considérations géométriques peuvent aussi être démontrés entièrement par la voie analytique.

23. **Transformations \mathcal{C}_0 correspondant à des droites D_1 passant par un même point, J .** — Les plans Π correspondants relatifs à un même élément de contact (a, ϖ) contiennent tous la droite perpendiculaire

culaire à ϖ passant par l'extrémité du vecteur d'origine O équipollent à $\vec{OJ} \wedge \vec{Oa}$.

24. Transformations \mathcal{C}_0 correspondant à des droites D_1 parallèles.

— 1° Pour des droites D_1 parallèles, les plans Π relatifs à un même élément de contact (a, ϖ) sont parallèles à un même plan.

2° Considérons maintenant le cas de droites D_1 parallèles et situées dans un même plan passant par le centre unique O. Soient OH une droite orientée, perpendiculaire commune à tous les droites D_1 et les rencontrant; \vec{I}_1 et \vec{I}_2 des vecteurs d'origine O, symétriques par rapport à OH et de longueur invariable. Faisons tourner \vec{I}_1 et \vec{I}_2 autour de O, dans le plan des droites D_1 , de manière qu'ils restent symétriques par rapport à OH. Leurs extrémités I_1 et I_2 sont donc telles que la droite D_1 , variable, qui passe par I_1 passe aussi par I_2 . Soient toujours M_1 et M_2 les extrémités des vecteurs

$$\vec{OM}_1 = \vec{I}_1 \wedge \vec{Oa}, \quad \vec{OM}_2 = \vec{I}_2 \wedge \vec{Oa};$$

F_1, G_1 et F_2, G_2 les points focaux des droites passant respectivement par M_1 et M_2 et parallèles à la normale en a à la surface s ; L le milieu du segment de droite M_1M_2 .

On démontre que, pour a fixe sur s ,

- a. les lieux de L et de A sont des droites passant par O;
- b. les points M_1 et M_2 ont pour lieu commun une *ellipse* réelle située dans le plan P perpendiculaire à Oa en O et dont le centre est Q;
- c. la droite M_1M_2 se déplace dans P, par translation, en restant parallèle à une direction conjuguée du lieu de L par rapport à l'ellipse sus-indiquée;
- d. les points focaux F_1 et F_2 ont pour lieu commun une *ellipse*, réelle ou imaginaire, de centre O, et il en est de même des points focaux G_1 et G_2 .

25. Transformations \mathcal{C}_0 correspondant aux génératrices d'une surface réglée gauche. — Prenons pour droites D_1 les génératrices d'une surface réglée gauche quelconque R_1 .

Pour a fixe sur s , le lieu du point A est une courbe, C_A , du plan P

perpendiculaire à Oa en O . La relation (96) transforme en la ligne plane C_A l'intersection de la surface R_1 et du plan passant par O et parallèle au plan tangent ω à s en a .

Quand a se déplace sur s , on a une famille de surfaces S à un paramètre et une congruence de courbes planes C_A . Les deux familles de courbes à un paramètre qui, dans cette congruence, correspondent aux asymptotiques de s découpent sur chaque surface S un réseau conjugué.

26. Transformations \mathfrak{C}_0 correspondant aux positions d'une droite variant, en fonction de deux paramètres, dans un plan fixe P_1 . — Soit I_0 le pied de la perpendiculaire menée de O sur P_1 .

Pour a fixe sur s , les lieux respectifs des points M, F, G (définis au paragraphe 20, 2°) sont trois plans P, P_F, P_G . Le premier est perpendiculaire à Oa en O . Les trois plans P, P_F, P_G se coupent suivant une même droite D_A , lieu de A .

La relation (96) transforme en la droite D_A l'intersection du plan P_1 et du plan parallèle à ω et passant par O . Posons

$$\vec{a} = \vec{Oa}, \quad \vec{I}_0 = \vec{OI}_0.$$

Soit \vec{n} un vecteur perpendiculaire à ω . La droite D_A est parallèle à

$$(113) \quad (\vec{I}_0 \wedge \vec{n}) \wedge \vec{a} = (\vec{I}_0 \cdot \vec{a}) \vec{n} - (\vec{a} \cdot \vec{n}) \vec{I}_0.$$

On peut obtenir la projection de D_A sur le plan H parallèle à P_1 et passant par O en faisant tourner de $+\frac{\pi}{2}$ autour de \vec{I}_0 l'intersection des plans ω et H et en appliquant à la droite ainsi obtenue l'homothétie (O, OI_0) .

Quand a se déplace sur s , la droite D_A engendre une congruence qui se déduit, par l'homothétie (O, OI_0) , de la congruence \mathfrak{C} du paragraphe 22, l'axe Ox étant dirigé suivant OI_0 . On a une famille de surfaces S à deux paramètres. Les développables de la congruence des droites D_A correspondent aux asymptotiques de s et elles découpent sur toute surface S un réseau conjugué. Les plans focaux de D_A sont les plans P_F et P_G . Chacun des points focaux de D_A est situé dans le plan passant par O et perpendiculaire à une tangente asymptotique de s relative à a .

27. Particularités de \mathfrak{C}_0 en ce qui concerne \mathfrak{S} et Γ . — Dans le cas général, le système \mathfrak{S} est constitué par le vecteur $-\vec{I}_1$ lié à O_1 , le vecteur \vec{I}_2 lié à O_2 et un couple de moment égal à $\overrightarrow{O_1 O_2}$. Puisque, ici, O_1 et O_2 sont confondus en O , \mathfrak{S} se réduit à un vecteur dont le support est la droite Oz . Celle-ci est donc l'axe central R de \mathfrak{S} dans le cas actuel.

Pour $\nu = 0$ (cas de \mathfrak{C}_0 et de \mathfrak{C}_1), le complexe linéaire Γ est le complexe spécial d'axe Oz . Nous avons vu, au paragraphe 21, 1°, que, pour \mathfrak{C}_0 , la perpendiculaire menée de a sur Π rencontre toujours la droite Oz . Il en est de même pour \mathfrak{C}_1 . C'est en concordance avec le fait que, dans le cas général, la droite aa' appartient au complexe Γ et est perpendiculaire à Π et que, pour $\nu = 0$, Γ est formé des droites rencontrant Oz .

Considérons un système \mathfrak{S}' constitué par des vecteurs $-\vec{I}'_1$ et \vec{I}'_2 , liés à O , les extrémités I'_1 et I'_2 de \vec{I}'_1 et de \vec{I}'_2 étant placées sur la droite D_1 définie au paragraphe 19. \mathfrak{S}' se réduit à un vecteur unique dont le support est la droite Oy . Celle-ci est donc l'axe central de \mathfrak{S}' . Nous avons vu, au paragraphe 21, 1°, que, pour \mathfrak{C}_0^{-1} , la perpendiculaire menée de A sur ω rencontre toujours la droite Oy . Et il en est de même pour \mathfrak{C}_1^{-1} .

28. Transformations \mathfrak{C}_0 relatives à une même droite D_1 et dont les centres sont placés sur une même parallèle à D_1 . — Partons d'une transformation \mathfrak{C}_0 , de centre O , relative à une droite D_1 . Choisissons le point O pour origine des axes de coordonnées et considérons sur la droite Oz , parallèle à D_1 , un point quelconque, O' , de coordonnées $0, 0, m$.

Soient \vec{V}'_1 et \vec{V}'_2 , les vecteurs $\overrightarrow{O'O} - \vec{I}_1 \wedge \overrightarrow{O'O}$ et $\overrightarrow{O'O} - \vec{I}_2 \wedge \overrightarrow{O'O}$, avec, toujours,

$$\vec{I}_1 = i_1 \vec{u} + h \vec{v}, \quad \vec{I}_2 = i_2 \vec{u} + h \vec{v}.$$

On a

$$(114) \quad \vec{V}'_1 = \vec{V}'_2 = \overrightarrow{O'O} - h \vec{v} \wedge \overrightarrow{O'O}.$$

Comme, ici, $\nu = 0$, la formule (26) nous donne pour la transformation \mathfrak{C}_0 , de centre O , relative à D_1

$$(115) \quad \overrightarrow{O'A} - \vec{V}'_1 = \vec{I}_n \wedge \overrightarrow{O'a}.$$

Soit O'' l'extrémité du vecteur, d'origine O' , équipollent à \vec{V}'_1 . Les composantes de $\vec{v} \wedge \overrightarrow{O'O}$ sont o, m, o . Celles de \vec{V}'_1 sont, d'après (114), égales à $o, -hm, -m$, et les coordonnées de O'' sont égales à $o, -hm, o$. O'' est donc situé sur la droite Oy .

La formule (115) peut s'écrire

$$(116) \quad \overrightarrow{O''A} = \vec{I}_n \wedge \overrightarrow{O'a}.$$

Il s'ensuit que la transformation à centre unique O , relative à la droite D_1 , est équivalente à la transformation à centre unique O' , relative aussi à D_1 , suivie de la translation $\overrightarrow{O'O''}$.

Soient \vec{V}'_1 et \vec{V}'_2 les vecteurs $\overrightarrow{O''O} - \vec{I}'_1 \wedge \overrightarrow{O''O}$ et $\overrightarrow{O''O} - \vec{I}'_2 \wedge \overrightarrow{O''O}$, \vec{I}'_1 et \vec{I}'_2 étant les vecteurs dont il est question à la fin du paragraphe 27.

On a

$$(117) \quad \vec{V}'_1 = \vec{V}'_2 = \overrightarrow{O''O} + \frac{1}{h} \vec{v} \wedge \overrightarrow{O''O}.$$

Les composantes de $\frac{1}{h} \vec{v} \wedge \overrightarrow{O''O}$ sont égales à o, o, m et celles de $\vec{V}'_1 = \vec{V}'_2$ sont égales à o, hm, m . Donc

$$(118) \quad \overrightarrow{O'O''} = \vec{V}'_1 = \vec{V}'_2 = -\vec{V}'_1 = -\vec{V}'_2.$$

De (105) il vient

$$(119) \quad \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'a} = \vec{I}'_n \wedge (\overrightarrow{OO''} + \overrightarrow{O''A}).$$

Mais $\vec{I}'_n \wedge \overrightarrow{OO''}$ se réduit à $-\frac{1}{h} \vec{v} \wedge \overrightarrow{OO''}$, de composantes o, o, m , qui est donc égal à $\overrightarrow{OO'}$. On voit que

$$(120) \quad \overrightarrow{O'a} = \vec{I}'_n \wedge \overrightarrow{O''A}.$$

Il s'ensuit que la transformation inverse de la transformation à centre unique O relative à D_1 est équivalente à la transformation à centre unique O'' , relative à la droite D_1 , suivie de la translation $\overrightarrow{O''O'}$.

Quand O' se déplace sur Oz , O'' se déplace sur Oy et la droite $O'O''$ est soumise à une translation dans le plan yOz . Le lieu du milieu du segment $O'O''$ est la droite située dans le plan yOz , passant par O et perpendiculaire à la droite $x = o, z - hy = o$.

TROISIÈME PARTIE.

TRANSFORMATION \mathfrak{S}_1 .

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DE \mathfrak{S}_1 ET DE \mathfrak{S}_1^{-1} .

29. Particularités de \mathfrak{S}_1 en ce qui concerne \mathfrak{S} et Γ . — Le cas actuel est, par définition, celui où l'on a $\nu = 0$, les centres O_1 et O_2 étant distincts.

D'après la fin du paragraphe 4, comme $\nu = 0$, la projection du moment résultant de \mathfrak{S} sur son axe central R est nulle, en particulier lorsqu'on prend le moment résultant en un point de R. Donc en tout point de R, le moment résultant de \mathfrak{S} est nul. \mathfrak{S} se réduit donc à un vecteur unique dirigé suivant R.

Γ est le complexe linéaire spécial d'axe R.

30. Équations de \mathfrak{S}_1 . — 1° Si l'origine O est quelconque et si les axes sont ceux du paragraphe 6, 1°, on a les équations analytiques de \mathfrak{S}_1 en faisant $\nu = 0$ dans (32) et (33).

2° Si l'origine O est située sur l'axe central R de \mathfrak{S} et si les axes sont ceux du paragraphe 6, 2°, on a, par (22), où $\vec{M} = 0$, et par (26)

$$(121) \quad \vec{V}_1 = \vec{V}_2,$$

$$(122) \quad \vec{OA} - \vec{V}_1 = \vec{I}_n \wedge \vec{Oa}.$$

Les équations (34) et (35) s'écrivent

$$(123) \quad X + \lambda' = -hpy, \quad Y + \mu' = h(-z + px), \quad Z + \nu' = hy;$$

$$(124) \quad P = -\frac{x}{px + qy}, \quad Q = -\frac{y}{px + qy}.$$

Rappelons que $\vec{\mathfrak{V}}$, de composantes λ', μ', ν' , est relatif à l'origine O prise ici sur R. Comme, en ce point, $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$, on voit que

$$\vec{\mathfrak{V}} = -\vec{V}_1 = -\vec{V}_2.$$

\mathfrak{C}_1 est donc équivalente à une transformation \mathfrak{C}_0 , de centre unique O , suivie de la translation \vec{V}_1 , ou encore équivalente à une transformation $\bar{\mathfrak{C}}_0$, de centre unique O , suivie de l'homothétie (O, h) et de la translation \vec{V}_1 .

31. **Équations de \mathfrak{C}_1^{-1} .** — Prenons l'origine O sur l'axe central R de \mathfrak{S} . Les axes sont ceux du paragraphe 6, 2°.

Des équations (123) et (124) on tire

$$(125) \quad x = \frac{P(Z + v')}{Qh}, \quad y = \frac{Z + v'}{h}, \quad z = -\frac{P(X + \lambda') + Q(Y + \mu')}{Qh},$$

$$(126) \quad p = -\frac{X + \lambda'}{Z + v'}, \quad q = \frac{P(X + \lambda') - (Z + v')}{Q(Z + v')}.$$

Si l'on compare (125) et (126) à (103) et (104), on voit que \mathfrak{C}_1^{-1} est équivalente à une transformation \mathfrak{C}_0^{-1} , relative à l'extrémité du vecteur d'origine O équipollent à \vec{V}_1 , suivie de la translation $-\vec{V}_1$.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS DIVERSES DE \mathfrak{C}_1 ET DE \mathfrak{C}_1^{-1} .

32. **Propriétés de \mathfrak{C}_1 .** — Les propriétés de \mathfrak{C}_1 se déduisent immédiatement de celles de \mathfrak{C}_0 , puisque \mathfrak{C}_1 est équivalente à une transformation \mathfrak{C}_0 suivie d'une translation. Et la transformation \mathfrak{C}_0 a été étudiée dans la deuxième Partie.

On voit, en particulier, que la perpendiculaire menée de a sur Π (laquelle est située dans ω) rencontre toujours l'axe central R .

C'est en concordance avec le fait que, dans le cas général, la droite aa' appartient au complexe Γ et est perpendiculaire à Π et que, dans le cas particulier de $v = 0$, le complexe Γ est formé de droites rencontrant R .

La droite M_1M_2 , appelée aussi Δ , est parallèle au plan xOy .

33. **Propriétés de \mathfrak{C}_1^{-1} .** — Lorsqu'on part des équations de \mathfrak{C} écrites pour $v \neq 0$, qu'on y fait $v = 0$ pour avoir celles de \mathfrak{C}_1 , puis qu'on en déduit celles de \mathfrak{C}_1^{-1} , on voit que \mathfrak{C}_1^{-1} fait correspondre à (A, Π) un seul élément de contact (a, ω) , déterminé par (125) et (126).

Partons maintenant des équations de \mathcal{C} écrites, pour $\nu \neq 0$ et déduisons-en celles de \mathcal{C}^{-1} ; puis, dans ces dernières, faisons tendre ν vers zéro ainsi que nous l'avons dit vers la fin du paragraphe 16, 1°. Alors \mathcal{C}_1^{-1} fait correspondre à (A, Π) , en plus de (a, ϖ) , un autre élément de contact (a', ϖ') . Le point a' est le point E de la figure 2, dont les coordonnées sont égales à 0, 0, $z - px - qy$ d'après (53), (59) et (63). Le plan ϖ' est le plan aBE de la figure 2, pour lequel p' et q' sont infinis d'après (62). Il passe par Oz et par le point a ; il est indépendant de ϖ .

Nous regarderons dans ce qui suit la transformation \mathcal{C}_1^{-1} comme définie conformément aux indications du premier alinéa du présent paragraphe 33. A (A, Π) ne correspondra donc, par \mathcal{C}_1^{-1} , qu'un seul élément de contact.

34. Propriétés de \mathcal{C}_1 et de \mathcal{C}_1^{-1} considérées ensemble. — Donnons-nous une transformation $\mathcal{C}_1(\vec{O}_1, \vec{O}_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$. Soient O' un point quelconque de l'axe central R de \mathcal{S} ; \vec{V}'_1 et \vec{V}'_2 les vecteurs

$$\overrightarrow{O'O_1} - \vec{I}_1 \wedge \overrightarrow{O'O_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O'O_2} - \vec{I}_2 \wedge \overrightarrow{O'O_2}.$$

Comme le moment résultant \vec{M}' de \mathcal{S} en O' est nul et que, d'après (22), $\vec{M}' = \vec{V}'_2 - \vec{V}'_1$, on voit que \vec{V}'_1 et \vec{V}'_2 sont égaux.

De (122) il vient

$$(127) \quad \overrightarrow{O'A} - \vec{V}'_1 = \vec{I}_n \wedge \overrightarrow{O'a}.$$

Soit O'' l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{O'O''} = \vec{V}'_1 = \vec{V}'_2$. On a

$$(128) \quad \overrightarrow{O_1O''} = \vec{I}_1 \wedge \overrightarrow{O_1O'}, \quad \overrightarrow{O_2O''} = \vec{I}_2 \wedge \overrightarrow{O_2O'}.$$

Prenons l'origine O en O_1 .

Désignons toujours par D_1 une droite orientée passant par les extrémités I_1 et I_2 des vecteurs, d'origine O, équipollents à \vec{I}_1 et à \vec{I}_2 .

$\mathcal{C}_1(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$ est équivalente à une transformation à centre unique O' (dans laquelle on emploie la droite D_1) suivie de la translation $\overrightarrow{O'O''}$.

Adoptons des axes trirectangles fixes, dont l'origine est le point O

placé en O_1 , dont l'axe Ox est perpendiculaire à D_1 et la rencontre et dont l'axe Oz est parallèle à D_1 et de même sens.

Soient h, o, γ_1 les coordonnées de I_1 ; h, o, γ_2 celles de I_2 ; a_2, b_2, c_2 celles de O_2 ; \vec{V} le vecteur $\overrightarrow{O_1O_2} - \vec{I}_2 \wedge \overrightarrow{O_1O_2}$, équipollent au moment résultant de \mathcal{S} en O_1 . Dans le cas présent, le moment résultant de \mathcal{S} est nul en tout point de l'axe central R de \mathcal{S} (qui est parallèle à D_1) et il est perpendiculaire à l'axe central en tout point non situé sur cet

axe. Désignons par λ_0, μ_0, o les composantes de $\frac{\vec{V}}{\gamma_2 - \gamma_1} \cdot O_1$ a

$$(129) \quad \lambda_0(\gamma_2 - \gamma_1) = a_2 + \gamma_1 b_2, \quad \mu_0(\gamma_2 - \gamma_1) = -\gamma_2 a_2 + b_2 + h c_2,$$

avec $c_2 = h b_2$.

Si \vec{u} et \vec{v} sont les vecteurs relatifs à \mathcal{S} et à O_1 , analogues à ceux qui ont été définis au paragraphe 3, les composantes de $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\gamma_2 - \gamma_1}$ sont égales à λ_0, μ_0, o et les composantes $\lambda'_0, \mu'_0, \nu'_0$ de $\vec{v} = \frac{\gamma_1 \vec{V}}{\gamma_2 - \gamma_1}$ sont égales à $\gamma_1 \lambda_0, \gamma_1 \mu_0, o$.

Considérons, comme au paragraphe 7, des systèmes analogues à \mathcal{S} , relatifs à la même droite D_1 et donnant la même transformation. Chacun d'eux est déterminé par deux centres $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ et par deux points (h, o, i_1) et (h, o, i_2) de D_1 jouant des rôles analogues à ceux de I_1 et I_2 relatifs à \mathcal{S} . Nous appellerons *systèmes* \mathcal{S} le système \mathcal{S} et les systèmes analogues considérés.

Les équations (41) deviennent

$$(130) \quad \begin{cases} x_1 + i_1 y_1 & = (i_1 - \gamma_1) \lambda_0, \\ -i_1 x_1 + y_1 + h z_1 & = (i_1 - \gamma_1) \mu_0, \\ -h y_1 + z_1 & = 0. \end{cases}$$

Il existe entre x_2, y_2, z_2, i_2 des relations analogues.

Nous les appellerons équations (131).

La cubique du paragraphe 7 se réduit ici à une *circonférence* C définie par

$$(132) \quad (x + \gamma_1 \lambda_0)(x + \mu_0) + [(1 + h^2)y + \gamma_1 \mu_0](y - \lambda_0) = 0, \quad z - h y = 0.$$

Le centre de C a pour coordonnées

$$-\frac{\mu_0 + \gamma_1 \lambda_0}{2}, \quad \frac{1}{2} \left(\lambda_0 - \frac{\gamma_1 \mu_0}{1 + h^2} \right), \quad \frac{h}{2} \left(\lambda_0 - \frac{\gamma_1 \mu_0}{1 + h^2} \right).$$

La circonférence C passe par l'origine O (confondue avec O_1), par O_2 et aussi par les centres de tous les autres systèmes \mathcal{S} .

L'axe central R est commun à tous les systèmes \mathcal{S} . Il est perpendiculaire au plan xOy et le perce au point $(-\mu_0, \lambda_0, 0)$.

Les coordonnées de O' , qui est un point quelconque de R, sont $-\mu_0, \lambda_0, m$, avec m arbitraire.

Celles de O'' sont données par (128), Elles sont égales à $-\gamma_1 \lambda_0, -hm - \gamma_1 \mu_0, h\lambda_0$.

Quand le point O' se déplace sur R, c'est-à-dire quand m varie, le point O'' décrit une droite R' , perpendiculaire au plan zOx au point $(-\gamma_1 \lambda_0, 0, h\lambda_0)$.

Les coordonnées du milieu, I, du segment de droite $O'O''$ sont égales à

$$-\frac{\mu_0 + \gamma_1 \lambda_0}{2}, \quad \frac{\lambda_0 - hm - \gamma_1 \mu_0}{2}, \quad \frac{m + h\lambda_0}{2}.$$

Quand m varie, le point I se déplace sur une droite parallèle au plan yOz et perpendiculaire au plan $z, -hy = 0$. La dite droite perce ce dernier plan au point de coordonnées

$$-\frac{\mu_0 + \gamma_1 \lambda_0}{2}, \quad \frac{1}{2} \left(\lambda_0 - \frac{\gamma_1 \mu_0}{1+h} \right), \quad \frac{h}{2} \left(\lambda_0 - \frac{\gamma_1 \mu_0}{1+h} \right),$$

c'est-à-dire au centre de la circonférence C.

Comme les trois droites R, R' et le lieu de I sont parallèles au plan yOz , la droite $O'O''$ engendre un *paraboloïde hyperbolique*. R et R' sont deux génératrices perpendiculaires d'un même système de cette quadrique.

Soient $N(-\mu_0, \lambda_0, h\lambda_0)$ et $N'(-\gamma_1 \lambda_0, \lambda_0, h\lambda_0)$ les points où la perpendiculaire commune à R et R' rencontre respectivement ces droites.

Les points N et N' sont situés sur la circonférence C. On le voit immédiatement au moyen des formules (132).

Ainsi la circonférence C, indépendante de m , est située dans un plan perpendiculaire à la droite lieu de I, elle a son centre placé sur ce lieu et elle passe par N et N' . On voit, en raison de la propriété du paraboloid hyperbolique indiquée au paragraphe 15, que la *sphère admettant pour diamètre le segment de droite $O'O''$ passe toujours par la circonférence invariable C.*

D'après le paragraphe 31, $\mathfrak{C}_1^{-1}(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$ est équivalente à une transformation \mathfrak{C}_0^{-1} relative au point O'' , suivie de la translation $\vec{O}''\vec{O}'$.

Soit encore $D_{I'}$ la droite déduite de D_I par l'homothétie $(O, -\frac{1}{h^2})$ suivie d'une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Ox .

Compte tenu du paragraphe 19, on voit que $\mathfrak{C}_1^{-1}(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$ est équivalente à une transformation à centre unique O'' (dans laquelle on emploie la droite $D_{I'}$) suivie de la translation $\vec{O}''\vec{O}'$.

D'après (105), il vient

$$(133) \quad \vec{O}''\vec{a} = \vec{I}'_n \wedge \vec{O}''\vec{A} + \vec{O}''\vec{O}',$$

c'est-à-dire

$$(134) \quad \vec{O}'\vec{a} = \vec{I}'_n \wedge \vec{O}'\vec{A}.$$

Nous rappelons que le point I'_n , extrémité du vecteur $\vec{I}'_n = \vec{O}\vec{I}'_n$, est l'intersection de la droite $D_{I'}$ par le plan passant par l'origine O (confondue avec O_1) et parallèle à Π .

Considérons un système \mathfrak{S}' constitué par des vecteurs $-\vec{I}'_1$ lié à un point O'_1 et \vec{I}'_2 lié à un point O'_2 et par un couple de moment égal à $\vec{O}'_1\vec{O}'_2$. Imposons à \mathfrak{S}' les conditions suivantes :

1° les vecteurs, d'origine O , respectivement équipollents à \vec{I}'_1 et à \vec{I}'_2 ont leurs extrémités, I'_1 et I'_2 , sur $D_{I'}$;

2° le moment résultant de \mathfrak{S}' en O'' est nul, c'est-à-dire que

$$\vec{V}'_1 = \vec{O}''\vec{O}'_1 - \vec{I}'_1 \wedge \vec{O}''\vec{O}'_1 \quad \text{et} \quad \vec{V}'_2 = \vec{O}''\vec{O}'_2 - \vec{I}'_2 \wedge \vec{O}''\vec{O}'_2$$

sont égaux;

$$3^\circ \quad \vec{V}'_1 = \vec{V}'_2 = -\vec{V}'_1 = -\vec{V}'_2 = \vec{O}''\vec{O}'.$$

Tout système \mathfrak{S}' satisfaisant à ces conditions a donc, en tout point, sa résultante générale parallèle à $D_{I'}$ et à R' et, au point O'' , un moment résultant nul. Donc il a pour axe central la droite R' et il est réductible à un vecteur unique, dirigé suivant R' . Il correspond donc à une transformation \mathfrak{C}_1 .

Pour un élément de contact (A, Π) , transformé d'un élément de

contact (a, ϖ) quelconque par $\mathfrak{C}_1(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$, la transformation $\mathfrak{C}_1(O'_1, O'_2, \vec{I}'_1, \vec{I}'_2)$ relative à un système \mathcal{S}' nous donnera, d'après (122), un point A' tel que

$$\overrightarrow{O''A'} - \vec{V}_1'' = \vec{I}_n \wedge \overrightarrow{O''A},$$

donc tel que

$$(135) \quad \overrightarrow{O'A'} = \vec{I}_n \wedge \overrightarrow{O''A}.$$

On déduit de (134) et (135) que les points a et A' sont confondus. Ce fait, qui a lieu quel que soit (a, ϖ) , entraîne que les deux transformations de contact $\mathfrak{C}_1(O'_1, O'_2, \vec{I}'_1, \vec{I}'_2)$, relatives à un système \mathcal{S}' , et $\mathfrak{C}_1^{-1}(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$ sont identiques.

Il en résulte que la perpendiculaire menée de A sur ϖ rencontre toujours la droite R' . Rappelons qu'elle est située dans Π .

D'après les définitions de \vec{V}_1'' et de \vec{V}_2'' et comme ces deux vecteurs sont équipollents à $\overrightarrow{O''O'}$, on a

$$(136) \quad \overrightarrow{O'_1O'} = \vec{I}'_1 \wedge \overrightarrow{O'_1O''}, \quad \overrightarrow{O'_2O'} = \vec{I}'_2 \wedge \overrightarrow{O'_2O''}.$$

Il existe une double infinité de systèmes \mathcal{S}' et ils sont indépendants de m .

En effet, soient x'_1, y'_1, z'_1 et x'_2, y'_2, z'_2 les coordonnées de O'_1 et de O'_2 ; $-\frac{1}{h}, i'_1, 0$ et $-\frac{1}{h}, i'_2, 0$ celles de I'_1 et de I'_2 . Les composantes de $\overrightarrow{O'_1O'}$ sont égales à $-\mu_0 - x'_1, \lambda_0 - y'_1, m - z'_1$ et celles de $\overrightarrow{O'_2O'}$ sont égales à $-\gamma_1 \lambda_0 - x'_1, -hm - \gamma_1 \mu_0 - y'_1$ et $h \lambda_0 - z'_1$.

La première formule (136) nous donne les trois équations :

$$(137) \quad \begin{cases} -x'_1 & + i'_1 z'_1 = h \lambda_0 i'_1 + \mu_0, \\ & -h y'_1 + z'_1 = 0, \\ h i'_1 x'_1 + y'_1 & + h z'_1 = -\gamma_1 (h \lambda_0 i'_1 + \mu_0). \end{cases}$$

Le déterminant des coefficients de x'_1, y'_1, z'_1 est égal à

$$1 + h^2(1 + i'^2_1) \neq 0.$$

La deuxième formule (136) donne trois équations identiques sauf remplacement de x'_1, y'_1, z'_1, i'_1 par x'_2, y'_2, z'_2, i'_2 .

Nous les appellerons équations (138).

Si i'_1 et i'_2 varient, O'_1 se déplace en fonction de i'_1 seul et O'_2 , en fonction de i'_2 seul. On a bien une *double infinité* de systèmes \mathcal{S}' , qui ne dépendent pas de m , puisque les équations (137) et (138) en sont indépendantes.

Éliminant i'_1 entre les première et troisième équations (137), on voit, compte tenu de la deuxième, que le point O'_1 satisfait aux équations (132).

Donc le point O'_1 est situé sur la circonférence C. Il en est de même de O'_2 .

Ainsi, *les centres* (tels que O'_1 et O'_2) *des systèmes \mathcal{S}' sont, comme ceux des \mathcal{S} , placés sur la circonférence C.*

Soit \bar{O}_1 la position du centre (x_1, y_1, z_1) d'un système \mathcal{S} tel que \bar{I}_1 est parallèle à Ox . Nous aurons les coordonnées de \bar{O}_1 en faisant $i_1 = 0$ dans (130). Elles sont égales à

$$-\gamma_1 \lambda_0, \quad -\frac{\gamma_1 \mu_0}{1+h^2}, \quad -\frac{h \gamma_1 \mu_0}{1+h^2}.$$

Soit \bar{O}'_1 la position du centre (x'_1, y'_1, z'_1) d'un système \mathcal{S}' tel que \bar{I}'_1 est parallèle à Ox . Nous aurons les coordonnées de \bar{O}'_1 en faisant $i'_1 = 0$ dans (137). Elles sont égales à

$$-\mu_0, \quad -\frac{\gamma_1 \mu_0}{1+h^2}, \quad -\frac{h \gamma_1 \mu_0}{1+h^2}.$$

Comme les coordonnées de N et de N' sont égales à $-\mu_0, \lambda_0, h\lambda_0$ et à $-\gamma_1 \lambda_0, \lambda_0, h\lambda_0$, le quadrilatère $NN' \bar{O}_1 \bar{O}'_1$ est un *rectangle*, inscrit dans la circonférence C. Les segments de droites $N\bar{O}_1$ et $N'\bar{O}'_1$ sont deux *diamètres* de C.

On démontre, en utilisant (129), (137) et (138), que, *si O'_1 est confondu avec O_1 et O'_2 avec O_2 , on a*

$$(139) \quad \frac{1+h(h+\gamma_2 i'_1)}{\gamma_2-h i'_1} = \frac{1+h(h+\gamma_1 i'_2)}{\gamma_1-h i'_2} = \frac{a_2}{b_2}.$$

La relation entre i'_1 et $-i'_2$, pour différentes valeurs de $\frac{a_2}{b_2}$, est *involutionne*. Elle ne dépend que de h, γ_1 et γ_2 .

Si O_2 est placé sur la droite Ox (O étant toujours confondu avec O_1), on a $b_2 = 0$ et

$$(140) \quad i'_1 = \frac{\gamma_2}{h}, \quad i'_2 = \frac{\gamma_1}{h}.$$

35. Les systèmes \mathcal{S} obtenus au paragraphe précédent sont les seuls qui répondent à la question. — Plaçons-nous d'abord dans le cas général de ν quelconque.

Soient $\mathcal{C}(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$ une transformation \mathcal{C} donnée; \mathcal{S} le système de vecteurs correspondant; O l'origine, *quelconque*; D_1 une droite orientée passant par les extrémités I_1 et I_2 des vecteurs, d'origine O , équipollents à \vec{I}_1 et à \vec{I}_2 ; OH une droite orientée passant par O , perpendiculaire à D_1 et rencontrant D_1 ; \vec{u} et \vec{v} les vecteurs unitaires correspondant à D_1 et à OH ; $i_1 \vec{u}$ et $i_2 \vec{u}$ les projections de \vec{I}_1 et \vec{I}_2 sur D_1 ; $h \vec{v}$ la projection commune de \vec{I}_1 et \vec{I}_2 sur OH ; \vec{u} et \vec{v} les vecteurs, définis au paragraphe 3, relatifs à \mathcal{S} et à O .

Considérons un élément de contact (a, ϖ) et son transformé (A, Π) par \mathcal{C} .

Soient toujours I_n le point où le plan passant par O et parallèle à ϖ coupe D_1 ; \vec{I}_n le vecteur \vec{OI}_n ; $i_n \vec{u}$ la projection de \vec{I}_n sur D_1 . On a, d'après (21),

$$(141) \quad \vec{OA} = -\vec{v} + i_n \vec{u} + \vec{I}_n \wedge \vec{Oa}.$$

Existe-t-il une transformation $\mathcal{C}(O'_1, O'_2, \vec{I}'_1, \vec{I}'_2)$ permettant, lorsqu'on part de (A, Π) , transformé de (a, ϖ) quelconque par $\mathcal{C}(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$, d'obtenir (a, ϖ) ?

Soient D_r une droite orientée passant par les extrémités I'_1 et I'_2 des vecteurs, d'origine O , équipollents à deux vecteurs libres \vec{I}'_1 et \vec{I}'_2 ; OH' une droite orientée passant par O , perpendiculaire à D_r et la rencontrant; \vec{u}' et \vec{v}' les vecteurs unitaires correspondant à D_r et à OH' ; $h' \vec{v}'$ le vecteur, d'origine O , placé sur OH' , dont l'extrémité est l'intersection de OH' et de D_r ; \mathcal{S}' un système de vecteurs constitué par — \vec{I}'_1 lié à un point O'_1 , \vec{I}'_2 lié à un point O'_2 et un couple de moment égal à $\vec{O}'_1 \vec{O}'_2$; \vec{u}' et \vec{v}' les vecteurs, analogues à \vec{u} et à \vec{v} , pris en O comme ces derniers, mais relatifs à \mathcal{S}' ; I'_n le point où le

plan passant par O et parallèle à Π coupe D_1 ; \vec{I}'_n le vecteur $\vec{O}\vec{I}'_n$; $i'_n \vec{u}'$ la projection de \vec{I}'_n sur D_1 . On devrait avoir, d'après (141),

$$(142) \quad \vec{O}\vec{a} = -\vec{\varphi}' + i'_n \vec{u}' + \vec{I}'_n \wedge \vec{O}\vec{A}.$$

Portant la valeur de $\vec{O}\vec{A}$, donnée par (141), dans la relation (142), il vient

$$(143) \quad -\vec{\varphi}' + i'_n \vec{u}' + \vec{I}'_n \wedge (-\vec{\varphi}' + i'_n \vec{u}' + \vec{I}'_n \wedge \vec{O}\vec{a}) - \vec{O}\vec{a} = 0.$$

Les axes étant ceux du paragraphes 6, 1° (Ox placé sur OH et de même sens, Oz parallèle à D_1 et de même sens), on voit sur les équations (32) et (33) que, pour x, y, p, q constants, z variant seul, X, Z, P, Q sont constants, $i_n = hp$ et \vec{I}'_n (de composantes $h, 0, hp$) sont invariables, ainsi que i'_n et \vec{I}'_n . Le point a parcourt une droite parallèle à Oz, qui perce xOy en un point a_0 , et A décrit une droite parallèle à Oy. On a

$$(144) \quad \vec{O}\vec{a} = \vec{O}\vec{a}_0 + z\vec{u}.$$

Comme la relation (143) doit être satisfaite quel que soit z , elle se décompose en deux :

$$(145) \quad -\vec{\varphi}' + i'_n \vec{u}' + \vec{I}'_n \wedge (-\vec{\varphi}' + i'_n \vec{u}' + \vec{I}'_n \wedge \vec{O}\vec{a}_0) - \vec{O}\vec{a}_0 = 0,$$

$$(146) \quad \vec{I}'_n \wedge (\vec{I}'_n \wedge \vec{u}) - \vec{u} = 0.$$

Cette dernière relation s'écrit

$$(147) \quad (1 + \vec{I}'_n \cdot \vec{I}'_n) \vec{u} - (\vec{I}'_n \cdot \vec{u}) \vec{I}'_n = 0.$$

Mais \vec{I}'_n (de composantes $h, 0, hp$) a une direction différente de celle de \vec{u} (de composantes $0, 0, 1$). La condition (147) n'est donc satisfaite que si

$$(148) \quad 1 + \vec{I}'_n \cdot \vec{I}'_n = 0,$$

$$(149) \quad \vec{I}'_n \cdot \vec{u} = 0.$$

L'équation (149) exige que \vec{I}'_n soit toujours perpendiculaire à \vec{u} ,

donc à Oz , et soit, par suite, situé dans le plan xOy . La droite D_1 doit donc appartenir au plan xOy .

La relation (145) ne dépend pas de z et doit être satisfaite pour tout système de valeurs de x, y, p, q .

Elle doit l'être, en particulier, pour x, y, p constants quelconques et pour toute valeur de q . α_0, i_n, \vec{I}_n sont alors invariables. La droite M_1M_2 , dont les paramètres directeurs sont $-\gamma + \lambda, x + \mu, \nu$ d'après le paragraphe 6, 1°, reste parallèle à une direction fixe. Nous rappelons que λ, μ, ν sont les composantes du vecteur \vec{u} relatif à \mathfrak{S} et à O . Le plan passant par O et parallèle à Π tourne donc autour de la droite fixe passant par O , de paramètres directeurs $-\gamma + \lambda, x + \mu, \nu$, à laquelle la droite M_1M_2 reste parallèle. Remplaçons \vec{I}'_n par sa valeur $h'\vec{v}' + i'_n\vec{u}$ dans (145).

Si i'_n varie pour x, y, p constants quelconques, q variant seul, l'équation (145) se décompose en deux, dont l'une est

$$(150) \quad -\vec{v}' + h'\vec{v}' \wedge (-\vec{v}' + i_n\vec{u} + \vec{I}_n \wedge \overrightarrow{Oa_0}) - \overrightarrow{Oa_0} = 0.$$

Cette relation doit être satisfaite pour tout système de valeurs de x, y, p , en particulier pour α_0 fixe et pour toute valeur de i_n . D'où, notamment, la condition

$$(151) \quad \vec{v}' \wedge (\vec{u} + \vec{u} \wedge \overrightarrow{Oa_0}) = 0.$$

On ne peut pas satisfaire à cette condition pour α_0 quelconque dans le plan xOy . On n'a donc pas de solution pour i'_n variable quand x, y, p sont constants.

Mais on peut en avoir une quand i'_n est alors invariable. Il n'en est ainsi que lorsque la droite fixe passant par O et de paramètres directeurs $-\gamma + \lambda, x + \mu, \nu$ rencontre D_1 , puisque le plan passant par O et parallèle à Π tourne autour de cette droite. Mais D_1 doit être dans le plan xOy . Donc $\nu = 0$ et la droite M_1M_2 reste parallèle au plan xOy .

Il ne peut donc y avoir de solution que pour $\nu = 0$ et avec une droite D_1 située dans le plan xOy .

Alors, pour tout élément de contact (α, ϖ) , \vec{I}'_n est placé sur la

droite passant par O et parallèle à $M_1 M_2$; et les composantes de \vec{I}'_n sont $k(-y + \lambda)$, $k(\mu + x)$, o, k étant une quantité à déterminer.

Comme les composantes de \vec{I}'_n sont h , o, hp , on voit, par (148), que

$$(152) \quad \lambda = \frac{1}{h(y - \lambda)}$$

et que les composantes de \vec{I}'_n sont $-\frac{1}{h}$, $\frac{x + \mu}{h(y - \lambda)} = \frac{P}{Qh}$, o.

Donc la droite D_r , située dans le plan xOy , est parallèle à Oy et se déduit de D_1 par l'homothétie $(O, -\frac{1}{h})$ et une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Ox . Nous retrouvons la droite D_r déjà utilisée.

Nous pouvons prendre $\vec{v}' = \vec{v}$, puisque la droite Ox est la perpendiculaire commune à D_1 et à D_r , et adopter pour \vec{u}' le vecteur unitaire correspondant à l'axe Oy , puisque D_r est parallèle à cet axe.

On démontre, en se servant des valeurs des composantes de \vec{I}'_n , que

$$(153) \quad \vec{I}'_n \wedge \vec{u}' + (\vec{I}'_n \cdot \vec{Oa}_0) \vec{u}' = o.$$

Compte tenu de (148) et de (153), l'équation (145) se réduit à

$$(154) \quad -\vec{v}' + i'_n \vec{u}' - \vec{I}'_n \wedge \vec{v}' + (\vec{I}'_n \cdot \vec{Oa}_0) h \vec{v}' = o.$$

Pour $i'_n = o$, $x = -\mu$, on a

$$\vec{v}' \cdot \vec{Oa}_0 = -\mu.$$

Donc

$$(155) \quad h \vec{v}' - \vec{v}' \wedge \vec{v}' - h \mu \vec{v}' = o.$$

Pour x quelconque, on a

$$\vec{v}' \cdot \vec{Oa}_0 = x, \quad \vec{u}' \cdot \vec{Oa}_0 = y.$$

Tenant compte de (155), on déduit de (154)

$$(156) \quad \vec{u}' - \vec{u}' \wedge \vec{v}' + h \lambda \vec{v}' = o.$$

Prenons maintenant l'origine O en O_1 , comme au paragraphe 34, O_2 étant supposé distinct de O_1 .

Soient, avec les notations du paragraphe 34, λ_0 , μ_0 , o et $\gamma_1 \lambda_0$,

$\gamma_1 \mu_0$, o les composantes des vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathcal{S} relatifs à O_1 . On déduit de (156) que les composantes du vecteur \vec{u}' relatif à \mathcal{S}' et à O_1 sont $-h\lambda_0$, o, $-\gamma_1 \lambda_0$. Il est donc perpendiculaire à $O_1 \gamma$ et, par suite, à D_1 et à l'axe central de \mathcal{S}' . Donc \mathcal{S}' donne bien une transformation \mathcal{C}_1 . De (155) on déduit que les composantes du vecteur \vec{v}' relatif à \mathcal{S}' et à O_1 sont μ_0 , o, $\frac{\gamma_1 \mu_0}{h}$.

Compte tenu de (40), on voit que les équations (137) et (138) sont celles qui définissent tous les systèmes \mathcal{S}' relatifs à la droite D_1 et satisfaisant à (155) et (156). Elles fournissent donc tous les systèmes \mathcal{S}' qui donnent une transformation \mathcal{C} équivalente à $\mathcal{C}_1^{-1}(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$. Et cette transformation \mathcal{C} a la forme particulière \mathcal{C}_1 .

Les systèmes \mathcal{S}' obtenus au paragraphe 34 représentent donc l'ensemble de la solution du problème qui y est envisagé, après (134).

Et nous avons vu dans le présent paragraphe qu'il n'y a pas de solution pour $\nu \neq 0$.

Revenons au cas de $\nu = 0$, O_1 et O_2 étant distincts ou confondus.

Soit O' un point quelconque de l'axe central R de \mathcal{S} . Appelons $\vec{u}_{O'}$, $\vec{v}_{O'}$ et $\vec{u}'_{O'}$, $\vec{v}'_{O'}$ les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathcal{S} et de \mathcal{S}' en O' . $\vec{u}_{O'} = 0$.

Soit O'' le point de l'axe central commun, R', des systèmes \mathcal{S}' , tel que $\overrightarrow{O'O''} = -\vec{v}_{O'}$. Le vecteur $-\vec{v}_{O'}$ est égal au vecteur \vec{V}'_1 des paragraphes 28 ou 34. Appelons $\vec{u}_{O''}$, $\vec{v}_{O''}$ et $\vec{u}'_{O''}$, $\vec{v}'_{O''}$ les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathcal{S} et de \mathcal{S}' en O'' . $\vec{u}'_{O''} = 0$. Le vecteur $-\vec{v}'_{O''}$ est égal au vecteur \vec{V}''_1 des paragraphes 28 ou 34.

D'après (155) et (156), où l'on doit faire ici $\lambda = \mu = 0$, on a

$$(157) \quad \vec{u}'_{O'} = \vec{u}' \wedge \vec{v}_{O'} = -\vec{u}' \wedge \overrightarrow{O'O''},$$

$$(158) \quad \vec{v}'_{O'} = \frac{\nu}{h} \wedge \vec{v}_{O'} = -\frac{\nu}{h} \wedge \overrightarrow{O'O''}.$$

Compte tenu de (39), on voit que

$$\vec{v}'_{O''} = \vec{v}'_{O'} + \overrightarrow{O'O''} + \frac{\nu}{h} \wedge \overrightarrow{O'O''}$$

et, en raison de (158),

$$(159) \quad \vec{\varphi}'_{0''} = \overrightarrow{O'O''} = -\vec{\varphi}'_{0'}$$

On a, à l'aide de (38) et (39),

$$(160) \quad \vec{u}_{0''} = \vec{u} \wedge \vec{\varphi}'_{0''} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{O'O''}.$$

$$(161) \quad \vec{\varphi}'_{0''} = -\vec{h}\nu \wedge \vec{\varphi}'_{0''} = -\vec{h}\nu \wedge \overrightarrow{O'O''}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

André CHARRUEAU :

1. Sur des congruences de droites déduites d'une même surface (*C. R. Acad. Sc.*, t. 221, 1945, p. 274 et 764).
 2. Sur des congruences de droites déduites d'une même surface et sur une transformation de contact qui se rattache à ces congruences (*Bul. Sc. Math.*, 2^e série, t. 70, 1946, p. 127 à 148).
 3. Sur des congruences de droites ou de courbes déduites d'une surface quelconque (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 620 et 832).
 4. Sur des congruences de droites ou de courbes déduites d'une surface quelconque (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 792).
 5. Sur des congruences de droites ou de courbes déduites d'une surface quelconque (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 1055 et 1396).
 6. Sur une transformation de contact (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 1262).
 7. Sur une transformation de contact (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 155 et 364).
 8. Sur les faisceaux de complexes linéaires (*C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, p. 712).
 9. Sur les faisceaux de complexes linéaires (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 359).
 10. Sur les faisceaux de complexes linéaires (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 803 et 1076).
 11. Sur les suites et cycles de complexes linéaires conjugués (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 894).
 12. Sur les faisceaux de complexes linéaires et sur les suites et cycles de complexes linéaires conjugués (*C. R. Acad. Sc.*, t. 229, 1949, p. 334 et 608).
-

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	I
PREMIÈRE PARTIE.	
CAS GÉNÉRAL.	
CHAPITRE I. — <i>Couples de congruences de droites, à surface moyenne plane, déduites d'une même surface quelconque.</i>	
1. Congruences de droites déduites d'une surface quelconque par des constructions de Guichard.....	3
2. Relations entre les éléments de contact (a, ω) et (A, Π)	5
CHAPITRE II. — <i>Équations vectorielles et équations analytiques de \mathfrak{C}. Réduction.</i>	
3. Équations vectorielles relatives à \mathfrak{C} , l'origine étant quelconque...	7
4. Système de vecteurs \mathfrak{S}	8
5. Autres équations vectorielles relatives à \mathfrak{C}	9
6. Équations analytiques de \mathfrak{C} et réduction.....	10
7. Transformations \mathfrak{C} équivalentes, relatives à une même droite D_1 ..	12
8. Remarques relatives à $\bar{\mathfrak{C}}$	15
CHAPITRE III. — <i>Transformation inverse \mathfrak{C}^{-1}.</i>	
9. Formules relatives à \mathfrak{C}^{-1} dans le cas général.....	16
10. Indication de cas particuliers qui seront spécialement étudiés dans les deuxième et troisième Parties.....	18
CHAPITRE IV. — <i>Propriétés de \mathfrak{C} et de \mathfrak{C}^{-1}.</i>	
11. Premières propriétés de \mathfrak{C} et de \mathfrak{C}^{-1}	19
12. Complexe linéaire Γ	25
13. Autres propriétés de \mathfrak{C} et de \mathfrak{C}^{-1}	25
14. Relations entre la transformation \mathfrak{C} et la transformation de Lie..	28
15. Remarque sur le parabolôïde hyperbolique.....	30
16. Remarques concernant $\bar{\mathfrak{C}}$ et $\bar{\mathfrak{C}}^{-1}$	31
CHAPITRE V. — <i>Congruences de droites ou de courbes déduites d'une même surface quelconque à l'aide de \mathfrak{C}.</i>	
17. Étude de ces congruences.....	37

DEUXIÈME PARTIE.

TRANSFORMATION \mathcal{T}_0 , A CENTRE UNIQUE.

	Pages.
CHAPITRE I. — <i>Équations de \mathcal{T}_0 et de \mathcal{T}_0^{-1}.</i>	
18. Équations de \mathcal{T}_0	41
19. Équations de \mathcal{T}_0^{-1}	42
CHAPITRE II. — <i>Propriétés particulières de la transformation à centre unique.</i>	
20. Propriétés particulières de \mathcal{T}_0	43
21. Remarques concernant \mathcal{T}_0	44
22. Congruence \mathcal{E}	48
23. Transformations \mathcal{T}_0 correspondant à des droites D_1 passant par un même point, J	51
24. Transformations \mathcal{T}_0 correspondant à des droites D_1 parallèles... ..	52
25. Transformations \mathcal{T}_0 correspondant aux génératrices d'une surface réglée gauche.....	52
26. Transformations \mathcal{T}_0 correspondant aux positions d'une droite variant, en fonction de deux paramètres, dans un plan fixe P_1 ..	53
27. Particularités de \mathcal{T}_0 , en ce qui concerne \mathcal{S} et Γ	54
28. Transformations \mathcal{T}_0 relatives à une même droite D_1 et-dont les centres sont placés sur une même parallèle à D_1	54

TROISIÈME PARTIE.

TRANSFORMATION \mathcal{T}_1 .

CHAPITRE I. — <i>Équations de \mathcal{T}_1 et de \mathcal{T}_1^{-1}.</i>	
29. Particularités de \mathcal{T}_1 en ce qui concerne \mathcal{S} et Γ	56
30. Équations de \mathcal{T}_1	56
31. Équations de \mathcal{T}_1^{-1}	57
CHAPITRE II. — <i>Propriétés diverses de \mathcal{T}_1 et de \mathcal{T}_1^{-1}.</i>	
32. Propriétés de \mathcal{T}_1	57
33. Propriétés de \mathcal{T}_1^{-1}	57
34. Propriétés de \mathcal{T}_1 et de \mathcal{T}_1^{-1} considérées ensemble.....	58
35. Les systèmes \mathcal{S}' obtenus au paragraphe précédent sont les seuls qui répondent à la question.....	64
BIBLIOGRAPHIE.....	70
TABLE DES MATIÈRES.....	72