Ky Fan

Les fonctions définies-positives et les fonctions complètement monotones. Leurs applications au calcul des probabilités et à la théorie des espaces distanciés

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 114 (1950)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1950__114__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur a la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXIV

Les Fonctions définies-positives et les Fonctions complètement monotones

Leurs applications au Calcul des Probabilités et à la Théorie des Espaces distanciés

Par M. Ky FAN

Associate Professor of Mathematics,
University of Notre Dame

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1950

LES FONCTIONS DÉFINIES-POSITIVES ET LES FONCTIONS COMPLÈTEMENT MONOTONES

LEURS APPLICATIONS AU CALCUL DES PROBABILITÉS ET A LA THÉORIE DES ESPACES DISTANCIÉS

PAR

M. Ky FAN

Associate Professor of Mathematics, University of Notre Dame.

INTRODUCTION

Bien que l'étude des fonctions définies-positives et celle des fonctions complètement monotones soient assez récentes, ces deux classes particulières de fonctions sont déjà sorties du domaine de l'Analyse mathématique pure et interviennent dans les spéculations les plus modernes du Calcul de probabilités et de la Théorie des espaces distanciés.

On sait que l'emploi de la méthode des fonctions caractéristiques dans les recherches récentes de Calcul des probabilités (surtout dans les importants travaux de P. Lévy) a remporté un grand succès. L'introduction de la fonction caractéristique en Calcul des probabilités a été bien antérieure à celle des fonctions définies-positives en Analyse mathématique. Mais, d'après un résultat de S. Bochner, les fonctions caractéristiques ne sont que les fonctions définies-positives vérifiant une condition supplémentaire très simple. De même, dans la théorie commencée par A. Khintchine, A. Kolmogoroff et poursuivie par H. Cramér, E. Slutsky, H. Wold et divers auteurs, sur les processus stochastiques stationnaires, on voit des fonctions définies-positives apparaître comme fonctions d'auto-corrélation, qui y jouent un rôle primordial. D'autre part, en envisageant certaines questions relatives à la théorie mathématique de l'assurance-accident, à la théorie stochastique de la communication téléphonique, et plus généralement aux processus stochastiques discontinus, des probabilistes et des statisticiens (J. Dubourdieu, W. Feller, O. Lundberg, etc.) ont été conduits à des fonctions complètement monotones.

Passons maintenant à une autre branche mathématique, la Théorie des espaces distanciés, créée par M. Fréchet au début de ce siècle. Même dans cette nouvelle science tout à fait abstraite, où peu de méthodes transcendantes sont applicables, on a avantage d'y faire intervenir les fonctions définies-positives, dans un sens convenablement généralisé, et les fonctions complètement monotones. En effet, l'application de ces fonctions dans ce domaine a permis à I. J. Schoenberg de résoudre certains problèmes fondamentaux d'une façon remarquablement élégante.

Nous avons donc pensé qu'il y a quelque intérêt à faire un exposé d'ensemble rassemblant quelques questions qui se présentent soit en Calcul des probabilités, soit en Théorie des espaces distanciés et qui sont en rapport avec les fonctions définies-positives ou les fonctions complètement monotones. Aussi ne s'agit-il ici aucunement d'un exposé complet sur ces fonctions. Notre intention est plutôt de recueillir quelques aspects de l'enchaînement qui existe entre ces fonctions d'une part, et le Calcul des probabilités et la Théorie des espaces distanciés d'autre part.

Les grandes lignes du présent exposé ont formé la matiere de deux conférences que j'ai eu le privilège de faire au mois d'avril 1944, au *Séminaire de Calcul des probabilités* de M le Professeur Fréchet, à l'*Institut Henri Poincaré.* Je termine cette introduction en remerciant MM. Fréchet et Bouligand qui ont bien voulu nous prodiguer leurs précieux conseils. Qu'il me soit aussi permis d'adresser mes vifs remerciements à M. H. Villat de m'avoir fait l'honneur d'accueillir ce travail dans la Collection du *Mémorial* qu'il dirige.

PREMIÈRE PARTIE

FONCTIONS DÉFINIES-POSITIVES

1. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit définie-positive. — La notion de fonction définie positive est due à M. Mathias ([40], p. 105) (1). Une fonction complexe $f(t)$ définie et continue sur $-\infty < t < +\infty$ est dite *définie-positive*, si, quels que soient m nombres réels $t_1, t_2, \ldots, t_m$ et quels que soient m nombres complexes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, on a toujours l'inégalité

$$\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} f(t_h - t_k)\rho_h \overline{\rho_k} \geqq 0 \quad (^2) \tag{1}$$

et cela quel que soit $m \geqq 2$.

Dans la définition originale de Mathias (3), celui-ci suppose encore que la fonction $f(t)$ vérifie la condition de la *symétrie hermitienne*

$$f(-t) = \overline{f(t)}. \tag{2}$$

Mais, cette propriété est une conséquence de la propriété (1), comme on le vérifie aisément.

D'autre part, d'après la continuité de la fonction, la condition (1) peut être mise sous la forme souvent plus commode : pour toute fonction complexe $\rho(t)$ continue sur un intervalle fini, soit $a \leqq t \leqq b$, on a toujours

$$\int_a^b \int_a^b f(t-s)\,\rho(t)\,\overline{\rho(s)}\,dt\,ds \geqq 0. \tag{3}$$

D'après (1), on montre que

$$|f(t)| \leqq f(0). \tag{4}$$

---

(1) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie rejetée à la fin du Fascicule.

(2) $\overline{\rho_k}$ désigne comme d'habitude l'imaginaire conjugué du nombre complexe ρ_k.

(3) Dans la définition originale de Mathias, la continuité de la fonction n'est pas exigée. Mais dans la définition aujourd'hui usitée des fonctions définies-positives, on suppose toujours la continuité.

De sorte que *toute fonction définie-positive est bornée* et une fonction définie-positive $f(t)$ est nécessairement identiquement nulle si $f(0) = 0$.

La définition précédente des fonctions définies-positives est une définition descriptive. On doit à S. Bochner ([4], p. 76) l'important théorème suivant, donnant une définition constructive :

Toute fonction définie-positive $f(t)$ est représentable par l'intégrale de Fourier-Stieltjes

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, d\Phi(\xi) \qquad (-\infty < t < +\infty), \tag{5}$$

où $\Phi(\xi)$ est une fonction réelle, définie sur $-\infty < \xi < +\infty$ bornée et non décroissante. Inversement, toute fonction $f(t)$ de la forme (5) *est définie-positive.*

Bochner [5] a montré comment, de ce théorème, on peut déduire tous les résultats de l'analyse harmonique au sens de N. Wiener.

A la représentation (5) correspond la *formule d'inversion* due à P. Lévy ([37], p. 166; [38], p. 38) :

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi(\xi - 0) + \Phi(\xi + 0)}{2} - \frac{\Phi(-0) + \Phi(+0)}{2} \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-i\xi t}}{it} f(t)\, dt, \end{aligned} \tag{6}$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi(\xi - 0) + \Phi(\xi + 0)}{2} - \frac{\Phi(-0) + \Phi(+0)}{2} \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin \xi t}{t} \frac{f(t) + \overline{f(t)}}{2} + \frac{1 - \cos \xi t}{t} \frac{f(t) - \overline{f(t)}}{2i} \right] dt. \end{aligned} \tag{7}$$

De sorte que la fonction $\Phi(\xi)$ figurant dans la représentation (5) est déterminée de manière unique, par la fonction $f(t)$ et par la valeur $\frac{1}{2}[\Phi(-0) + \Phi(+0)]$, étant entendu que l'on ne considère comme distinctes que deux fonctions qui diffèrent en au moins un de leurs points de continuité, convention bien naturelle puisque l'intégrale du second membre de (5) ne change pas de valeur quand on modifie les valeurs de $\Phi(\xi)$ en ses points de discontinuité.

Dans un Mémoire paru en 1939, H. Cramér [14] a obtenu une condition très générale qui est nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit définie-positive. Considérons une fonction $\mu(t)$ telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(t)|\,dt \quad \text{est finie;} \tag{8}$$

$$\mu(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}m(\xi)\,d\xi \qquad [m(\xi) \text{ étant réelle et non négative}], \tag{9}$$

$$\mu(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} m(\xi)\,d\xi = 1. \tag{10}$$

Alors le résultat de H. Cramér s'énonce comme il suit : *pour toute fonction particulière* $\mu(t)$ *jouissant des propriétés* (8), (9), (10), *une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction complexe* $f(t)$ *bornée et continue sur* $-\infty < t < +\infty$ *soit définie-positive est que la fonction*

$$g_\varepsilon(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi}\mu(\varepsilon t)f(t)\,dt \tag{11}$$

soit réelle et non négative pour $0<\varepsilon<1$ *et pour toutes les valeurs réelles de* ξ.

Cramér a indiqué quelques exemples de fonctions $\mu(t)$ vérifiant les conditions (8), (9) et (10). Telles sont par exemple les fonctions

$$\mu(t)=e^{-\frac{t^2}{2}},$$
$$\mu(t)=e^{-|t|}$$

et

$$\mu(t)=\begin{cases} 1-|t| & \text{pour } |t|\leq 1,\\ 0 & \text{pour } |t|>1;\end{cases} \tag{12}$$

les fonctions $m(\xi)$ correspondantes étant respectivement

$$m(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

$$m(\xi)=\frac{1}{\pi(1+\xi^2)},$$

$$m(\xi)=\frac{1-\cos\xi}{\pi\xi^2}.$$

Pour $\mu(t)$ définie par (12). on a, en posant $b = \frac{1}{\varepsilon}$,

$$g_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} e^{-i\xi t}\left(1 - \frac{|t|}{b}\right) f(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi b}\int_0^b \int_0^b f(t-s)\,e^{-i\xi(t-s)}\,dt\,ds.$$

Ainsi, le théorème précédent de Cramér contient comme cas particulier la proposition suivante : *pour qu'une fonction complexe $f(t)$ bornée et continue sur $-\infty < t < +\infty$ soit définie-positive, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(13) \qquad \int_0^b \int_0^b f(t-s)\,e^{-i\xi(t-s)}\,dt\,ds \geqq 0$$

pour tout $b > 1$ et pour toutes les valeurs réelles de ξ. On remarque que cette condition est beaucoup plus simple que la condition (3).

Notons enfin qu'une autre condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit définie-positive a été donnée par A. Khintchine (*voir* P. Lévy [38], p. 39 en note).

2. **Propriétés des fonctions définies-positives.** — Rappelons d'abord quelques propriétés simples des fonctions définies-positives (*voir* S. Bochner [4], Chap. IV).

Si $f(t)$ est définie-positive, il en est de même de la fonction conjuguée $\overline{f(t)}$.

Quelles que soient deux fonctions définies-positives $f_1(t)$, $f_2(t)$ et quels que soient deux nombres positifs c_1, c_2, la combinaison linéaire $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ est aussi une fonction définie positive. Autrement dit, la classe des fonctions définies-positives est *convexe*.

La classe des fonctions définies-positives est *multiplicative*; c'est-à-dire que *le produit de deux fonctions définies-positives quelconques est une fonction définie-positive.*

Si une suite de fonctions définies-positives converge sur $-\infty < t < +\infty$ vers une fonction continue, celle-ci est aussi définie-positive.

Soient $\Phi_n(\xi)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ et $\Phi(\xi)$ des fonctions définies sur $-\infty < \xi < +\infty$, chacune bornée et non décroissante. Si $\Phi_n(\xi)$

converge vers $\Phi(\xi)$ *en tout point de continuité de cette dernière et si*

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi_n(\pm\infty) = \Phi(\pm\infty),$$

alors les fonctions définies-positives

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, d\Phi_n(\xi)$$

convergent, pour tout nombre réel t, *vers la fonction définie-positive*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, d\Phi(\xi).$$

Réciproquement, si les fonctions définies-positives $f_n(t)$ *sont bornées dans leur ensemble*

$$|f_n(t)| < \mathrm{B} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots; -\infty < t < +\infty)$$

et si $f_n(t)$ *convergent vers une fonction définie-positive* $f(t)$, *alors il existe des fonctions* $\Phi_n(\xi)$ *et* $\Phi(\xi)$, *chacune bornée et non décroissante sur* $-\infty < \xi < +\infty$, *telles que* $\Phi_n(\xi)$ *convergent vers* $\Phi(\xi)$ *en tout point de continuité de cette dernière et qu'on ait*

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, d\Phi_n(\xi), \qquad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, d\Phi(\xi).$$

Notons maintenant un lemme de A. Khintchine ([32], p. 610) qu'il a établi en vue d'applications à la théorie des processus stochastiques stationnaires (*voir* plus loin, n° 5). Mais ce lemme s'applique également à l'établissement de certaines propriétés importantes des fonctions définies-positives. D'ailleurs, certains résultats que Khintchine a obtenus à l'aide de son lemme, ne sont que des conséquences immédiates de propriétés des fonctions définies-positives. Voici l'énoncé de ce lemme.

Soit $\mu(\xi, \mathrm{T})$ *une fonction réelle continue d'une variable réelle* ξ *et d'un paramètre* (1) *également réel* T. *Supposons que* $\mu(\xi, \mathrm{T})$ *vérifie les trois conditions suivantes :*

---

(1) Dans l'énoncé original de Khintchine, μ dépend de plusieurs paramètres. Pour abréger, nous nous bornons ici au cas d'un seul paramètre. D'autre part, le lemme de Khintchine a été généralisé par E. Slutsky ([52], p. 35) toujours en vue d'applications à la théorie des processus stochastiques stationnaires.

1° *Il existe un nombre positif* B *tel que* $|\mu(\xi, \mathrm{T})| < \mathrm{B}$ *pour toutes les valeurs de* ξ, T.

2° *Il existe un nombre réel* ξ_0 *tel que l'on ait*

$$\lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \mu(\xi, \mathrm{T}) = 0$$

uniformément pour $|\xi - \xi_0| > \varepsilon$, ε *étant un nombre positif quelconque.*

3° *Il existe un nombre réel* M *tel que l'on ait*

$$\lim_{\xi\to\xi_0} \mu(\xi, \mathrm{T}) = \mathrm{M},$$

quelle que soit la valeur positive de T.

Soit, d'autre part, $\Phi(\xi)$ *une fonction réelle à variation bornée sur* $-\infty < \xi < +\infty$. *Alors on a*

$$\lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi, \mathrm{T})\, d\Phi(\xi) = \mathrm{M}[\Phi(\xi_0+0) - \Phi(\xi_0-0)].$$

Ceci étant admis, considérons une fonction définie-positive $f(t)$. Soit λ un nombre réel. On a, d'après (5),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt &= \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, d\Phi(\xi)\right] e^{-i\lambda t}\, dt \\
&= \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} e^{it(\xi-\lambda)}\, dt\right] d\Phi(\xi) \quad (^1) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \mathrm{T}(\xi-\lambda)}{\mathrm{T}(\xi-\lambda)}\, d\Phi(\xi).
\end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, la fonction $\mu(\xi, \mathrm{T}) = \dfrac{\sin \mathrm{T}(\xi-\lambda)}{\mathrm{T}(\xi-\lambda)}$ vérifie évidemment les conditions du lemme précédent, si l'on prend $\xi_0 = \lambda$ et $\mathrm{M} = 1$. L'application de ce lemme montre donc que la dernière intégrale tend vers $\Phi(\lambda+0) - \Phi(\lambda-0)$, lorsque T tend vers l'infini. Nous avons ainsi démontré ce théoreme :

---

(1) Ici, l'inversion de l'ordre d'intégration est justifiée par la convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, d\Phi(\xi)$.

Une fonction définie-positive $f(t)$ étant mise sous la forme (5), *on a, quel que soit le nombre réel* ξ,

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, e^{-i\xi t}\, dt = \Phi(\xi + 0) - \Phi(\xi - 0). \tag{14}$$

La fonction $\Phi(\xi)$ étant monotone, l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable. Donc, *pour toute fonction définie-positive $f(t)$, il y a au plus une infinité dénombrable de nombres réels ξ, pour lesquels la limite* (14) *n'est pas nulle.*

Soient

$$\xi_0, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n, \quad \ldots,$$

les points de discontinuité de $\Phi(\xi)$ rangés dans une suite. D'après une propriété bien connue des fonctions monotones (*voir* par exemple, M. Fréchet [25], p. 270), on peut décomposer $\Phi(\xi)$ en deux parties

$$\Phi(\xi) = S(\xi) + C(\xi), \tag{15}$$

où $S(\xi)$ est la *fonction des sauts* de $\Phi(\xi)$:

$$S(\xi) = \sum_{\xi_j < \xi} [\Phi(\xi_j + 0) - \Phi(\xi_j - 0)]. \tag{16}$$

$S(\xi)$ et $C(\xi)$ sont bornées, monotones non décroissantes; $C(\xi)$ est continue. D'après (5) et (15), on peut écrire

$$f(t) = p(t) + q(t), \tag{17}$$

avec

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, dS(\xi), \tag{18}$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, dC(\xi). \tag{19}$$

Les deux fonctions $p(t)$ et $q(t)$ sont définies-positives, d'après le théorème de Bochner.

En vertu de (16), on a

$$p(t) = \sum_j e^{i\xi_j t} [\Phi(\xi_j + 0) - \Phi(\xi_j - 0)].$$

Comme

$$\sum_j [\Phi(\xi_j+0)-\Phi(\xi_j-0)] \leqq \Phi(+\infty)-\Phi(-\infty),$$

la série du premier membre de cette inégalité est absolument convergente. $p(t)$ est donc limite uniforme de la suite des polynomes exponentiels

$$p_n(t)=\sum_{j=0}^{n} e^{i\xi_j t}[\Phi(\xi_j+0)-\Phi(\xi_j-0)] \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

et par conséquent $p(t)$ est une fonction presque périodique au sens de H. Bohr (¹).

D'autre part, en appliquant la formule (14) à la fonction définie-positive $q(t)$, on a, quel que soit le nombre réel ξ :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} q(t)\, e^{-i\xi t}\, dt = 0, \tag{20}$$

puisque $C(\xi)$ est continue. On a aussi la relation

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |q(t)|^2\, dt = 0. \tag{21}$$

En effet, d'après (19), on peut d'abord écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |q(t)|^2\, dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\xi-\lambda)}\, dC(\xi)\, dC(\lambda)\right] dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin T(\xi-\lambda)}{T(\xi-\lambda)}\, dC(\xi)\right] dC(\lambda).\end{aligned}$$

Une application du lemme de Khintchine nous donne

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin T(\xi-\lambda)}{T(\xi-\lambda)}\, dC(\xi) = C(\lambda+0)-C(\lambda-0)=0. \tag{22}$$

(¹) Une fonction $p(t)$ de valeurs complexes, définie et continue sur $-\infty<t<+\infty$ est dite *presque périodique* (au sens de Bohr), lorsqu'à tout nombre $\varepsilon>0$, on peut faire correspondre une longueur $l>0$ telle que tout intervalle de longueur l contienne au moins un nombre τ pour lequel l'inégalité $|p(t+\tau)-p(t)|<\varepsilon$ a lieu pour toutes les valeurs de t. En ce qui concerne la théorie des fonctions presque périodiques, *voir* H. Bohr [11].

Comme $C(\xi)$ étant monotone bornée et continue, est nécessairement uniformément continue sur $-\infty < \xi < +\infty$ (*voir* par exemple, M. Fréchet [25], p. 273), la convergence (22) est uniforme par rapport à λ. Il en résulte alors la relation (21).

Finalement, on peut énoncer le théorème suivant : *Toute fonction définie-positive $f(t)$ est une somme de deux fonctions définies-positives*

$$f(t) = p(t) + q(t), \tag{17}$$

où $p(t)$ est presque périodique et où $q(t)$ est telle que

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |q(t)|^2 dt = 0. \tag{21}$$

De plus, *une telle décomposition est unique.* Soit en effet $f(t) = p_1(t) + q_1(t)$ une décomposition satisfaisant aux mêmes conditions. La fonction $q_1(t) - q(t) = p(t) - p_1(t)$ étant une différence de deux fonctions presque périodiques, est elle-même presque périodique. D'autre part, comme

$$|q_1(t) - q(t)|^2 \leqq 2|q_1(t)|^2 + 2|q(t)|^2,$$

on a

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |q_1(t) - q(t)|^2 \, dt = 0.$$

Dès lors, d'après une propriété bien connue des fonctions presque périodiques (*voir* Bohr [11], p. 54), $q_1(t) - q(t)$ est identiquement nulle, d'où $q_1(t) = q(t)$, $p_1(t) = p(t)$.

3. **Fonction caractéristique d'une loi de probabilité.** — On appelle *fonction caractéristique* d'une variable aléatoire X (ou de la loi dont dépend X) la valeur moyenne de e^{itX}, t étant un paramètre réel. Cette notion est due à Laplace qui l'avait employée dans le cas des variables aléatoires ne prenant que des valeurs entières. Plus tard, dans des Notes présentées à l'*Académie des Sciences* en 1853, Cauchy avait étendu la fonction caractéristique aux variables aléatoires générales. Mais ces quelques Notes du plus grand géomètre de l'époque n'avaient pas attiré l'attention et étaient peu connues. Il fallut attendre jusqu'à 1920, que P. Lévy eût le premier commencé l'utilisation

systématique de la fonction caractéristique, alors que les Notes de Cauchy lui étaient inconnues ([1]).

Soit $F(\xi)$ la *fonction de répartition* de la variable aléatoire X, c'est-à-dire :

$$F(\xi) = \text{Prob}\,\{ X < \xi \}. \tag{23}$$

Alors la fonction caractéristique de X est par définition

$$\varphi(t) = \mathfrak{M}\, e^{itX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, dF(\xi) \quad ([2]). \tag{24}$$

On voit donc, d'après le théorème de Bochner, que toute fonction caractéristique est une fonction définie-positive. L'inverse n'est pas vraie, car dans la représentation (5), la fonction $\Phi(\xi)$, dont on sait seulement être bornée et non décroissante, n'est pas toujours une fonction de répartition. Pour qu'elle soit une fonction de répartition, il faut et il suffit qu'elle soit continue à gauche et $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$. Or, dans la représentation (5), on peut bien supposer la continuité à gauche de $\Phi(\xi)$, puisqu'une modification des valeurs de $\Phi(\xi)$ aux points de discontinuité n'affecte en rien la valeur de l'intégrale. De plus, comme $\Phi(\xi)$ est bornée et non décroissante, les limites $\Phi(-\infty)$ et $\Phi(+\infty)$ existent. Et l'on peut supposer $\Phi(-\infty) = 0$, car la valeur de l'intégrale de (5) restera la même, quand on remplace $\Phi(\xi)$ par $\Phi(\xi) - \Phi(-\infty)$. Donc, le théorème de Bochner peut s'énoncer d'une façon plus précise comme il suit : Pour qu'une fonction complexe $f(t)$ soit définie-positive, il faut et il suffit qu'elle se prête à une représentation (5), où $\Phi(\xi)$ est borné, non décroissante, continue à gauche et $\Phi(-\infty) = 0$.

Pour qu'une telle fonction $\Phi(\xi)$ soit une fonction de répartition, il faut et il suffit que $\Phi(+\infty) = 1$. Ainsi, *une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction complexe $f(t)$ définie sur $-\infty < t < +\infty$ soit une fonction caractéristique est qu'elle soit définie-positive et que $f(0) = 1$*. De sorte que, sauf le cas banal où la fonction est identiquement nulle, toute fonction définie-positive est à un facteur constant positif près, une fonction caractéristique.

([1]) En ce qui concerne l'historique de la fonction caractéristique, *voir* M. Fréchet, ([25], p. 105); P. Lévy ([37], Préface).

([2]) $\mathfrak{M}X$ désigne la valeur moyenne de la variable aléatoire X.

Les propositions concernant les fonctions définies-positives s'appliquent en particulier aux fonctions caractéristiques. D'après les propriétés rappelées n° 2, on a les propriétés suivantes des fonctions caractéristiques :

Le produit de deux fonctions caractéristiques est encore une fonction caractéristique. En effet, si X_1, X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes et si $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ sont respectivement leurs fonctions caractéristiques, alors la fonction caractéristique de X_1+X_2 est $\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)$.

Si les fonctions caractéristiques $\varphi_n(t)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) *convergent vers une fonction* $\varphi(t)$ *continue sur* $-\infty < t < +\infty$, $\varphi(t)$ *est une fonction caractéristique.*

Pour que les fonctions de répartition $F_n(\xi)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) *de variables aléatoires* X_n *convergent vers la fonction de répartition* $F(\xi)$ *d'une variable aléatoire* X *en tout point de continuité de* $F(\xi)$, *il faut et il suffit que les fonctions caractéristiques* $\varphi_n(t)$ *de* X_n *convergent pour tout nombre réel* t, *vers la fonction caractéristique* $\varphi(t)$ *de* X.

On a là une liaison simple entre la convergence des fonctions de répartition et celle des fonctions caractéristiques correspondantes (*voir* P. Lévy [38], p. 48-50; V. Glivenko [27]).

D'après la formule d'inversion (6) de P. Lévy, la donnée de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X détermine complètement la loi de probabilité dont dépend X. C'est de là que vient l'importance de la notion de fonction caractéristique. La fonction caractéristique donne une représentation parfaite d'une loi de probabilité.

C'est sur ce fait que repose la méthode dite des fonctions caractéristiques. Le principe de cette méthode est qu'au lieu d'étudier directement un problème concernant certaines lois de probabilité, il est souvent plus commode d'étudier le problème correspondant concernant leurs fonctions caractéristiques. Cette méthode a été systématiquement développée par P. Lévy. Dans ces dernières années, elle a été fréquemment utilisée par un grand nombre de probabilistes; leurs travaux ont montré la puissance et la grande fécondité de cette méthode. (*Voir* C. G. Esseen [20]; A. Wintner [59].) Du point de vue méthodologique, l'emploi de la fonction caractéristique a été l'un des progrès essentiels dans les recherches modernes du Calcul des probabilités. Actuellement, une étude préalable des fonctions caractéristiques et par conséquent des fonctions définies-positives, est devenue indispensable pour bien pénétrer la théorie des probabilités. P. Lévy ([38], Préface) s'exprime à ce sujet dans les termes suivants qu'il importe de rappeler :

« *Si l'on veut dépasser les éléments du Calcul des probabilités, on a tout intérêt à étudier d'abord les formules de transformation de Fourier et les propriétés de la fonction caractéristique* ».

Pour ne citer qu'une des plus belles applications de la méthode des fonctions caractéristiques, on peut mentionner l'élégante démonstration du théorème de Cramér-Lévy, suivant lequel, *si la somme* $X+Y$ *de deux variables aléatoires indépendantes* X, Y *obéit à la seconde loi de Laplace* (1), *il en est de même de* X *et de* Y. Ce théorème avait d'abord été indiqué à titre hypothétique par P. Lévy. On doit à Cramér d'avoir démontré son exactitude. Sa démonstration (2) repose d'une manière essentielle sur la conception de fonction caractéristique.

4. **Fonctions définies-positives réelles.** — Considérons à présent les fonctions définies-positives qui ne prennent que des valeurs réelles. En vertu de (2), *une fonction $f(t)$ définie-positive est réelle, si et seulement si elle est une fonction paire.* Si la fonction définie-positive $f(t)$ est donnée par (5), on voit d'après (7) que la condition nécessaire et suffisante pour que $f(t)$ soit réelle est que *l'expression*

$$\frac{\Phi(\xi-0)+\Phi(\xi+0)}{2}+\frac{\Phi(-\xi-0)+\Phi(-\xi+0)}{2}$$

soit indépendante de ξ. Dans le cas où $f(t)$ est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité, cette dernière condition signifie simplement que la loi est symétrique. De sorte que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une loi de probabilité soit symétrique est que sa fonction caractéristique soit réelle.

Pour ne pas sortir du domaine réel, on peut définir les fonctions

---

(1) C'est ce qu'on appelle souvent *loi de Gauss*. Pour cette question d'attribution, *voir* M. Fréchet ([25], p. 108-110).

(2) *Voir* M. Fréchet ([25], p. 277-285); P. Lévy ([38], p. 97-99).

définies-positives réelles de la façon suivante. *Une fonction réelle $f(t)$ définie et continue sur $-\infty < t < \infty$ est définie-positive, si elle est une fonction paire*

$$f(-t) = f(t) \tag{25}$$

et si, quels que soient deux systèmes finis de nombres réels t_1, t_2, ..., t_m et ρ_1, ρ_2, ..., ρ_m $(m \geqq 2)$, on a toujours l'inégalité

$$\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} f(t_h - t_k) \rho_h \rho_k \geqq 0 \quad (^1). \tag{26}$$

Du théorème de Bochner découle immédiatement : *Pour qu'une fonction réelle $f(t)$ définie sur $-\infty < t < +\infty$ soit définie-positive, il faut et il suffit qu'elle puisse être mise sous la forme*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t\xi \, d\Phi(\xi), \tag{27}$$

où $\Phi(\xi)$ est bornée et non décroissante sur $-\infty < \xi < +\infty$.

Ou bien encore : *Les fonctions définies-positives réelles ne sont autres que les fonctions de la forme*

$$f(t) = \int_{0}^{+\infty} \cos t\xi \, d\Psi(\xi), \tag{28}$$

où $\Psi(\xi)$ est bornée et non décroissante sur $\xi \geqq 0$.

A titre d'exemple, la fonction continue sans dérivée de Weierstrass

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi t)$$

$\left(0 < a < 1,\ b \text{ étant un nombre entier impair tel que } ab > 1 + \frac{3\pi}{2}\right)$ peut être mise sous la forme (28) avec une fonction $\Psi(\xi)$ en escalier. Par conséquent, c'est une fonction définie-positive.

D'après M. Mathias ([40], p. 122), *pour qu'une fonction $f(t)$ réelle, continue, paire et telle que $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ existe, soit*

---

(1) Cette fois, on n'a qu'à considérer les ρ réels.

définie-positive, il faut et il suffit qu'on ait

$$(29)\qquad (-1)^n \int_0^{+\infty} f(\varepsilon t)\, e^{-t^2} H_{2n}(t)\, dt \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

pour tout $\varepsilon > 0$; où $H_{2n}(t)$ désigne le polynome de Hermite de degré $2n$:

$$H_{2n}(t) = e^{t^2} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} e^{-t^2}.$$

Pour une fonction définie-positive réelle $f(t)$ mise sous la forme (27), on a la décomposition $f(t) = p(t) + q(t)$ avec

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t\xi \, dS(\xi), \qquad q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t\xi \, dC(\xi),$$

où $S(\xi)$, $C(\xi)$ gardent les mêmes significations que dans (15). Ainsi, *toute fonction définie-positive réelle $f(t)$ est une somme de deux fonctions définies-positives réelles $p(t)$ et $q(t)$, dont la première est presque périodique et dont la seconde est telle que*

$$(30)\qquad \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [q(t)]^2 dt = 0.$$

Une telle décomposition est d'ailleurs unique.

De même, pour une fonction définie-positive réelle $f(t)$ mise sous la forme (27), la formule (14) devient

$$(31)\qquad \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos \xi t dt$$
$$= \frac{1}{2} \{ \Phi(\xi + 0) + \Phi(-\xi + 0) - \Phi(\xi - 0) - \Phi(-\xi - 0) \};$$

d'où, en particulier

$$(32)\qquad \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt = \Phi(+0) - \Phi(-0).$$

De même que les fonctions définies-positives complexes (c'est-à-dire complexes ou réelles) sont à la base de la méthode des fonctions caractéristiques en Calcul des probabilités, les fonctions définies-positives réelles jouent un rôle fondamental dans la théorie des processus stochastiques stationnaires, dont nous allons maintenant faire un exposé sommaire.

5. Processus stochastiques stationnaires. — Une famille de variables aléatoires X_t dépendant d'un paramètre t $(-\infty < t < +\infty)$, qu'on peut admettre être le temps, forme un *processus stochastique*, si, quel que soit un système fini de valeurs du paramètre : $t_1, t_2, \ldots, t_n$, la loi n-dimensionnelle de probabilité de l'ensemble des variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ est donnée (¹). Depuis quelques années, l'étude des processus stochastiques est devenue l'un des plus importants Chapitres du Calcul des probabilités, alors que la théorie classique de cette science ne s'occupait que des suites discrètes de variables aléatoires. Les problèmes théoriques relatifs aux processus stochastiques ouvrent aux probabilistes un champ de recherches extrêmement fécond, tandis que les résultats acquis ont déjà trouvé de nombreuses applications en Physique, en Statistique, en Météorologie et même en certaines questions techniques.

Au point de vue d'applications, surtout en Mécanique statistique (*voir* Khintchine [31]), les processus stochastiques particulièrement importants sont ceux qui sont homogènes par rapport au paramètre de temps et que Khintchine [32] qualifie de processus stochastiques stationnaires. Plus précisément, un processus stochastique X_t est dit *stationnaire*, si, quelles que soient les valeurs de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et de s, la loi de probabilité n-dimensionnelle de l'ensemble des variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ est identique à celle de l'ensemble des variables aléatoires $X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, \ldots, X_{t_n+s}$, et cela quel que soit n.

Bien que cette conditon de stationarité se présente d'une façon assez naturelle à l'esprit, elle n'est pas assez commode pour manier. Khintchine a élargi le sens de la stationarité de la façon suivante. Une famille de variables aléatoires $X_t(-\infty < t < +\infty)$ constitue un *processus stochastique stationnaire*, si, pour chaque valeur de t, la valeur moyenne $\mathfrak{M}X_t$ et la fluctuation $\mathfrak{M}[(X_t - \mathfrak{M}X_t)^2]$ existent et sont indépendantes de t et si, quelles que soient les valeurs de t et de s, le coefficient de corrélation entre X_t et X_s ne dépend que de la différence $t - s$ (²). C'est ce qu'il faudrait appeler plus précisément, selon E. Slutsky ([52], p. 34), « processus stochastique stationnaire

(¹) Cette définition des processus stochastiques due à Khintchine n'est pas assez complète en vue de certaines questions. J. L. Doob [16] a donné une définition plus complète mais plus laborieuse.

(²) Une autre sorte voisine d'homogénéité a été étudiée par A. Kolmogoroff [33], [34].

quant aux moments d'ordres 1 et 2 ». *Dans la suite, nous entendrons par un processus stochastique stationnaire toujours à ce sens large.*

Pour simplifier l'écriture, on peut encore supposer que

$$\mathfrak{M} X_t = 0, \quad \mathfrak{M}(X_t^2) = 1 \quad (-\infty < t < +\infty), \tag{33}$$

ce qui n'est pas une véritable restriction. Alors le coefficient de corrélation entre X_t et X_s est égal à $\mathfrak{M}(X_t X_s)$. D'après l'hypothèse, on peut poser

$$\mathfrak{M}(X_t X_s) = R(t-s). \tag{34}$$

$R(t)$ est évidemment une fonction paire et $R(0) = 1$. La fonction $R(t)$ est appelée *fonction d'auto-corrélation* du processus ([1]), ([2]).

D'après Khintchine, le processus stochastique stationnaire X_t est dit *continu*, si $R(+0) = 1$ ([3]). Pour justifier cette dénomination, il suffit de se rendre compte du fait suivant : la condition $R(+0) = 1$ est nécessaire et suffisante pour que la fonction $R(t)$ soit continue et elle est aussi nécessaire et suffisante pour qu'on ait

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathfrak{M}[(X_{t+\Delta t} - X_t)^2] = 0 \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

En effet, si $R(+0) = 1$, on a, d'après l'inégalité de Schwarz (*voir* M. Fréchet [25], p. 70) :

$$|R(t+\Delta t) - R(t)| = |\mathfrak{M}(X_0 X_{t+\Delta t}) - \mathfrak{M}(X_0 X_t)|$$
$$\leq \sqrt{\mathfrak{M}(X_0^2)\,\mathfrak{M}[(X_{t+\Delta t} - X_t)^2]} = \sqrt{\mathfrak{M}[(X_{t+\Delta t} - X_t)^2]} = \sqrt{2[1 - R(\Delta t)]}$$

et par conséquent

$$\lim_{\Delta t \to 0} |R(t+\Delta t) - R(t)| = 0, \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \mathfrak{M}[(X_{t+\Delta t} - X_t)^2] = 0.$$

---

(1) Khintchine l'appelle « fonction de corrélation ». Cramér ([15], p. 216) propose de l'appeler « fonction d'auto-corrélation » pour spécifier qu'il s'agit là d'un seul processus.

(2) On peut regarder X_t comme un élément de l'espace de Hilbert dépendant d'un paramètre t. Avec cette interprétation, le moment d'ordre 2 et le coefficient de corrélation deviennent respectivement le carré de la norme $\|X_t\|$ et le produit scalaire (X_t, X_s). Ce point de vue a amené A. Kolmogoroff [36] et K. Fan [21], [22] à étudier les suites stationnaires dans l'espace de Hilbert.

(3) Par analogie, J. Ville [54] appelle un processus stochastique stationnaire *analytique*, si la fonction d'auto-corrélation $R(t)$ est analytique au voisinage de $t = 0$. Cet auteur a obtenu des résultats intéressants sur les processus stochastiques stationnaires analytiques.

Khintchine ([32], p. 608-609) a déterminé les fonctions d'autocorrélation des processus stochastiques stationnaires continus. Il est parvenu au théorème que voici. *Pour qu'une fonction* $R(t)$ *soit la fonction d'auto-corrélation d'un processus stochastique stationnaire continu, il faut et il suffit qu'elle puisse être mise sous la forme*

$$(35) \qquad R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t\xi \, dF(\xi) \qquad (-\infty < t < +\infty),$$

où $F(\xi)$ *est une fonction de répartition* (¹).

Ce théorème peut évidemment être énoncé comme il suit : *Une fonction réelle* $R(t)$ *définie sur* $-\infty < t < +\infty$ *est la fonction d'auto-corrélation d'un processus stochastique stationnaire continu, si et seulement si elle est définie-positive et prend la valeur* 1 *à l'origine.* De sorte que toute fonction définie-positive réelle (sauf le cas banal où la fonction se réduit à la constante nulle) est à un facteur constant positif près, la fonction d'auto-corrélation d'un processus stochastique stationnaire continu.

Considérons à présent deux processus stochastiques stationnaires X_t et Y_t, pour lesquels nous supposons dans la suite

$$\mathfrak{M} X_t = \mathfrak{M} Y_t = 0, \qquad \mathfrak{M}(X_t^2) = \mathfrak{M}(Y_t^2) = 1,$$
$$\mathfrak{M}(X_t X_s) = R_1(t-s), \qquad \mathfrak{M}(Y_t Y_s) = R_2(t-s).$$

Supposons que les processus X_t et Y_t soient *stationnairement dépendants*, c'est-à-dire que

$$(36) \qquad \frac{1}{2}\{\mathfrak{M}(X_t Y_s) + \mathfrak{M}\} = (X_t Y_s)\,\rho(t-s)$$

ne dépende que de la différence $t-s$. La fonction $\rho(t)$ définie par (36) est appelée *fonction de corrélation mutuelle* des processus X_t et Y_t. En utilisant l'inégalité de Schwarz, on a

$$|\rho(t') - \rho(t)| = \frac{1}{2}\,|\mathfrak{M}[Y_0(X_{t'} - X_t) + X_0(Y_{t'} - Y_t)]|$$
$$\leq \frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{M}(Y_0^2)\,\mathfrak{M}[(X_{t'} - X_t)^2]} + \frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{M}(X_0^2)\,\mathfrak{M}[(Y_{t'} - Y_t)^2]}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2[1 - R_1(t'-t)]} + \frac{1}{2}\sqrt{2[1 - R_2(t'-t)]}.$$

(¹) La démonstration de Khintchine de ce théorème a été précisée par H. Cramér ([15], lemma 3 et 4).

De là on conclut que, *si les processus* X_t *et* Y_t *sont continus*, $\rho(t)$ *est une fonction continue.*

En posant

$$Z_t = X_t + Y_t,$$

on a

$$\mathfrak{M} Z_t = 0, \qquad \mathfrak{M}(Z_t^2) = 2[1 + \rho(0)]$$

et

$$(37) \quad \frac{\mathfrak{M}(Z_t Z_s)}{\sqrt{\mathfrak{M}(Z_t^2)\,\mathfrak{M}(Z_s^2)}} = \frac{R_1(t-s) + R_2(t-s) + 2\rho(t-s)}{2[1+\rho(0)]} = R(t-s).$$

Ainsi, Z_t *est aussi un processus stochastique stationnaire, dont la fonction d'auto-corrélation est* $R(t)$. *Si, de plus, les processus* X_t *et* Y_t *sont continus,* alors les fonctions $R_1(t)$, $R_2(t)$ et $\rho(t)$ sont continues, et par conséquent, en vertu de (37), $R(t)$ *est continue, c'est-à-dire que le processus* Z_t *est continu.*

Sous les hypothèses que les deux processus stochastiques stationnaires et stationnairement dépendants X_t, Y_t sont continus, Khintchine ([32], p. 611-612) a établi, en utilisant son lemme rappelé au n° 2, que *la limite*

$$(38) \qquad \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(t)\,dt$$

existe. En effet, d'après (37), on a

$$(39) \qquad \rho(t) = [1 + \rho(0)]\,R(t) - \frac{1}{2}[R_1(t) + R_2(t)].$$

Les fonctions $R(t)$, $R_1(t)$, $R_2(t)$ étant respectivement les fonctions d'auto-corrélation des processus stochastiques stationnaires continus Z_t, X_t, Y_t, sont des fonctions définies-positives réelles. Dès lors, les limites

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(t)\,dt, \qquad \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T R_1(t)\,dt, \qquad \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T R_2(t)\,dt$$

existent, d'après une propriété des fonctions définies-positives réelles. Il en résulte alors, en vertu de (39), que la limite (38) existe.

D'une façon analogue, en utilisant (39) et une propriété des fonctions définies-positives réelles (n° 4), on obtient aussitôt le résultat suivant également dû à Khintchine ([32], p. 612-613) : *La* *fonction de corrélation mutuelle*, $\rho(t)$, *de deux processus stochastiques stationnaires continus et stationnairement dépendants, peut être décomposée, d'une façon unique, en somme de deux fonctions (réelles)*

$$\rho(t) = \rho_1(t) + \rho_2(t), \tag{40}$$

où $\rho_1(t)$ *est presque périodique et où* $\rho_2(t)$ *est telle que*

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\rho_2(t)]^2 \, dt = 0. \tag{41}$$

Nous venons ainsi d'exposer quelques résultats de Khintchine pour faire voir le rapprochement de la théorie des processus stochastiques stationnaires et la théorie des fonctions définies-positives réelles. Depuis le Mémoire de Khintchine [32], des contributions considérables à la théorie des processus stochastiques stationnaires ont encore été apportées par H. Cramér [15]; A. Kolmogoroff [35], [36]; E. Slutsky [52] et H. Wold [60[.

6. Généralisations des fonctions définies-positives. — Venons maintenant aux diverses généralisations de la notion de fonction définie-positive. On peut d'abord considérer, comme l'a fait S. Bochner ([5], p. 406), les fonctions de n variables, au lieu d'une seule variable. Une fonction complexe $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ de n variables réelles t_1, t_2, ..., t_n est définie-positive, si elle est continue sur l'espace euclidien à n dimensions et si, quels que soient m ($m \geqq 2$) points (t_{h1}, t_{h2}, ..., t_{hn}) ($1 \leqq h \leqq m$) de l'espace et quels que soient m nombres complexes ρ_1. ρ_2, ..., ρ_m, on a toujours

$$\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} f(t_{h1} - t_{k1}, \ldots, t_{hn} - t_{kn}) \rho_h \bar{\rho}_k \geqq 0. \tag{42}$$

Pour les fonctions définies-positives de n variables, une représentation intégrale analogue à (5) a été obtenue par Bochner ([5], p. 407).

D'un autre côté, F. Riesz [45] a généralisé les fonctions définies-positives en remplaçant la condition de continuité par celle de mesurabilité. Une fonction complexe $f(t)$ définie sur $-\infty < t < +\infty$ est dite, d'après F. Riesz, *du type positif*, si elle est mesurable et si, quels que soient m nombres réels $t_1, t_2, \ldots, t_m$ et quels que soient m nombres complexes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, l'inégalité (1) est toujours vérifiée. Le même auteur a prouvé que *pour toute fonction $f(t)$ du type positif, une représentation intégrale de la forme* (5) *subsiste presque partout.*

Parmi toutes les généralisations de la notion de fonction définie-positive, la plus importante est sans doute celle due à A. Weil et D. A. Raikov, qui, en 1940, ont indépendamment étendu la notion de fonction définie-positive, aux fonctions sur les groupes topologiques. L'étude des fonctions définies-positives sur les groupes localement compacts est étroitement liée à la théorie des représentations unitaires (en particulier, le théorème fondamental de Peter-Weyl) et, dans le cas des groupes Abéliens, à la théorie de la dualité de L. Pontrjagin. Un exposé de ces développements récents n'entre pas dans le cadre de ce fascicule. Le lecteur pourra consulter les importants travaux des auteurs suivants : A. Weil [55]; I. Gelfand et D. A. Raikov [26]; D. A. Raikov [44]; R. Godement [28]; H. Cartan et R. Godement [13].

En partant de l'idée centrale de l'*Analyse générale*, une autre généralisation s'est offerte en remplaçant l'argument réel t de la fonction par un élément abstrait. Ce point de vue est celui de E. H. Moore ([41], p. 3-4, 173, 181-190, 209-220) qui a donné la définition suivante. Soit $\mathfrak{E}$ un ensemble abstrait d'éléments P, Q, ... de nature quelconque. Une fonction de valeurs complexes, $f(P, Q)$, définie pour tout couple ordonné d'éléments P, Q de $\mathfrak{E}$ est appelée une *matrice hermitienne positive sur* $\mathfrak{E}$, si elle possède les deux propriétés que voici :

1° La symétrie hermitienne $f(P, Q) = \overline{f(Q, P)}$.

2° Quels que soient m éléments $P_1, P_2, \ldots, P_m$ de $\mathfrak{E}$ et quels que soient m nombres complexes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, on a

$$\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} f(P_h, P_k)\rho_h\bar{\rho}_k \geqq 0. \tag{43}$$

En restreignant cette définition très générale de E. H. Moore, I. J. Schoenberg ([48], p. 524; [49], p. 815) a défini *les fonctions définies-positives sur un espace semi-distancié.*

La notion d'espace semi-distancié s'obtient en généralisant celle d'espace distancié de M. Fréchet. Un ensemble $\mathcal{E}$ d'éléments abstraits (appelés *points*) forme un *espace distancié*, si l'on a fait correspondre à tout couple de ses points P_1, P_2 un nombre P_1P_2, appelé *distance* entre P_1 et P_2, de manière que les trois conditions suivantes soient remplies : 1° $P_1P_2 = P_2P_1 \geqq 0$; 2° $P_1P_2 = 0$ si et seulement si $P_1 = P_2$; 3° $P_1P_2 \leqq P_1P_3 + P_3P_2$. Si l'on suppose seulement les deux premières conditions, on aura un espace *semi-distancié* et le nombre P_1P_2 sera appelé *semi-distance*.

Soit $\mathcal{E}$ un espace semi-distancié. Une fonction réelle, continue, paire $f(t)$ définie sur l'ensemble des valeurs $t = \pm P_1P_2 (P_1, P_2 \in \mathcal{E})$ est dite, d'après Schoenberg, *définie-positive sur* $\mathcal{E}$, si. quels que soient m points $P_1, P_2, \ldots, P_m$ de $\mathcal{E}$, distincts ou non ($m \geqq 2$), on a toujours

$$\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} f(P_hP_k)\rho_h\rho_k \geqq 0, \tag{44}$$

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ étant des nombres réels arbitraires.

A titre d'exemple. *la fonction* $f(t) = e^{-t^2}$ *est définie-positive sur l'espace euclidien* $\mathcal{R}_n$ *à n dimensions* ($n = 1, 2, 3, \ldots$). En effet, soient $P_h = (x_{h1}, x_{h2}, \ldots, x_{hn})$ $(1 \leqq h \leqq m)$ m points quelconques de $\mathcal{R}_n$ et $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, m nombres réels arbitraires. En utilisant la formule connue

$$e^{-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} e^{-\frac{u^2}{4}} du,$$

on a, pour $f(t) = e^{-t^2}$,

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} f(P_hP_k)\rho_h\rho_k &= \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \rho_h\rho_k \exp\left[-\sum_{j=1}^{n}(x_{hj} - x_{kj})^2\right] \\ &= \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{h=1}^{m} \rho_h \exp\left(\sum_{j=1}^{n} i x_{hj} u_j\right)\right|^2 \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{u_1^2 + \ldots + u_n^2}{4}\right) du_1 \ldots du_n \geqq 0.\end{aligned}$$

Schoenberg ([49], p. 815-821) a déterminé l'expression générale des fonctions définies-positives sur l'espace euclidien $\mathcal{R}_n$ à n dimensions ou sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (¹). *Les fonctions définies-positives sur l'espace euclidien $\mathcal{R}_n$ à n dimensions* ($n = 1, 2, 3, \ldots$) *ne sont autres que les fonctions de la forme*

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \Omega_n(t\xi)\, d\Psi(\xi), \tag{45}$$

où $\Psi(\xi)$ *est une fonction bornée non décroissante sur* $\xi \geqq 0$ *et où* $\Omega_n(t)$ *est définie par*

$$\Omega_n(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^4}{2.4.n(n+2)} - \frac{t^6}{2.4.6.n(n+2)(n+4)} + \ldots \tag{46}$$
$$= \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{t}\right)^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(t) \quad (^2).$$

En particulier, pour $n = 1, 2, 3$, on a respectivement

$$\Omega_1(t) = \cos t, \qquad \Omega_2(t) = J_0(t), \qquad \Omega_3(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

On voit que, dans le cas $n = 1$, la formule (45) se réduit à (28). Cela tient à ce que, d'après la définition de Schoenberg, les fonctions définies-positives sur $\mathcal{R}_1$ sont précisément les fonctions définies-positives réelles (au sens ordinaire).

Par un passage à la limite $n \to +\infty$ et en s'appuyant sur la formule

$$\lim_{n \to +\infty} \Omega_n\left(t\sqrt{2n}\right) = e^{-t^2},$$

on déduit du théorème précédent le théorème suivant : *Les fonctions définies-positives sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ sont les fonctions de la forme*

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2\xi^2}\, d\Psi(\xi), \tag{47}$$

où $\Psi(\xi)$ *est une fonction bornée non décroissante sur* $\xi \geqq 0$.

(¹) C'est-à-dire : l'espace de Hilbert réel. *Voir* M. Fréchet ([24], p. 83).

(²) Comme d'habitude, Γ désigne la fonction Gamma eulérienne et $J_{\frac{n-2}{2}}$ la fonction de Bessel d'indice $\frac{n-2}{2}$.

En particulier, la fonction $f(t) = e^{-t^2\xi^2}$ est définie-positive sur $\mathcal{H}$, quel que soit le nombre réel ξ.

Schœnberg [50] a aussi déterminé l'expression générale des fonctions définies-positives sur la surface d'une sphère (avec la distance sphérique) dans R_n ou $\mathcal{H}$.

7. Caractérisation métrique des ensembles de l'espace de Hilbert. — Nous allons maintenant voir comment Schoenberg a appliqué la notion de « fonction définie-positive sur un espace semi-distancié » à la Théorie des espaces distanciés ([1]).

Deux ensembles appartenant à deux espaces distanciés (ou semi-distanciés) sont dits *isométriques*, s'il existe entre eux une correspondance ponctuelle biunivoque conservant la distance (ou la semi-distance). Dans la théorie métrique des espaces distanciés, l'un des problèmes fondamentaux consiste à rechercher les conditions nécessaires et suffisantes, exprimées en relations de distances, pour qu'un espace distancié soit isométrique à un certain espace distancié donné d'avance ([2]). Ce problème est complètement résolu par K. Menger dans les cas les plus importants où l'espace donné est un espace euclidien $\mathcal{R}_n$ ou l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Poursuivant des recherches de Menger, Schoenberg ([46], p. 724-726; [47], p. 788-790) a obtenu le résultat suivant : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace $\mathcal{E}$ semi-distancié séparable* ([3]) *soit isométrique à un ensemble de points de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est que, quels que soient $m+1$ points $P_0, P_1, \ldots, P_m$ $(m \geqq 2)$ de $\mathcal{E}$ et quels que soient m nombres réels $\rho_1, \rho_2, \ldots; \rho_m$, on ait*

$$(48) \qquad \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} (P_0P_h^2 + P_0P_k^2 - P_h P_k^2)\rho_h \rho_k \geqq 0.$$

([1]) En ce qui concerne les généralités de la Théorie des espaces distanciés, *voir* M. Fréchet ([24], p. 61-155). Pour la partie métrique de la théorie, *voir* L. M. Blumenthal [3] ou G. Bouligand [12].

([2]) *Cf.* L. M. Blumenthal ([3], Chap. III).

([3]) Un espace semi-distancié $\mathcal{E}$ est dit *séparable*, si $\mathcal{E}$ contient un ensemble D au plus dénombrable tel que, pour tout point P n'appartenant pas à D, on puisse former une suite de points $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ de D telle que $\lim_{n \to +\infty} P_nP = 0$.

Schoenberg ([48], p. 525-526) a fait remarquer que cette condition équivaut à la suivante : *Quels que soient* $m+1$ *points* $P_0, P_1, \ldots, P_m$ *de* $\mathcal{E}$ *et quels que soient* $m+1$ *nombres réels* $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_m$ *tels que*

$$\sum_{h=0}^{m} \rho_h = 0, \tag{49}$$

on a l'inégalité

$$\sum_{h=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \overline{P_h P_k}^2 \rho_h \rho_k \leqq 0. \tag{50}$$

En partant de ce résultat, Schoenberg ([48], p. 526-527) a obtenu l'intéressant théorème que voici : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace semi-distancié* $\mathcal{E}$ *séparable soit isométrique à un ensemble de points de l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *est que, pour toutes les valeurs positives de* ξ, *la fonction* $f(t) = e^{-\xi t^2}$ *soit définie-positive sur* $\mathcal{E}$.

Assez simple est sa démonstration qu'il convient de reproduire ici. D'abord, la condition est nécessaire, puisque nous savons (n° 6) que $e^{-\xi t^2}(\xi > 0)$ est définie-positive sur $\mathcal{H}$. Pour prouver la suffisance de la condition, nous ferons usage de la formule

$$t^\alpha = c(\alpha)\int_0^{+\infty} (1 - e^{-\xi^2 t^2})\xi^{-1-\alpha}\, d\xi \qquad (0 < \alpha < 2,\ t \geqq 0), \tag{51}$$

où

$$c(\alpha) = \left[\int_0^{+\infty} (1 - e^{-\xi^2})\xi^{-1-\alpha}\, d\xi\right]^{-1} \tag{52}$$

Supposons maintenant que, pour tout $\xi > 0$, la fonction $f(t) = e^{-\xi t^2}$ soit définie-positive sur $\mathcal{E}$. Soient $P_0, P_1, \ldots, P_m$, $m+1$ points de $\mathcal{E}$ et $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_m$, $m+1$ nombre réels vérifiant (49). On a, d'après (51)

$$\overline{P_h P_k}^\alpha = c(\alpha)\int_0^{+\infty} (1 - e^{-\xi^2 \overline{P_h P_k}^2})\xi^{-1-\alpha}\, d\xi \qquad (0 < \alpha < 2),$$

d'où

$$\sum_{h=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \overline{P_h P_k}^\alpha \rho_h \rho_k = c(\alpha)\int_0^{+\infty} \left[\sum_{h=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} (1 - e^{-\xi^2 \overline{P_h P_k}^2})\rho_h \rho_k\right]\xi^{-1-\alpha}\, d\xi$$

ou bien, en vertu de (49),

$$\sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} P_hP_k^{\alpha}\rho_h\rho_k = -c(\alpha)\int_0^{+\infty}\left[\sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} e^{-\xi^2 P_hP_k^2}\rho_h\rho_k\right]\xi^{-1-\alpha}\,d\xi$$
$$(0<\alpha<2).$$

Or la double somme entre le crochet est $\geqq 0$, puisque $e^{-\xi^2 t^2}$ est définie-positive sur $\mathcal{E}$. D'autre part, $c(\alpha)>0$. Il vient donc

$$\sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} P_hP_k^{\alpha}\rho_h\rho_k \leqq 0 \qquad (0<\alpha<2).$$

En laissant α tendre vers 2, on a finalement (50) qui est vérifié par $m+1$ points quelconques $P_0, P_1, \ldots, P_m$ de $\mathcal{E}$ et par $m+1$ nombres réels $\rho_0; \rho_1, \ldots, \rho_m$ assujettis à la seule condition (49). Il en résulte que $\mathcal{E}$ est isométrique à un ensemble de points de $\mathcal{H}$. Le théorème est ainsi démontré.

Étant donné un espace semi-distancié $\mathcal{E}$, si l'on remplace la semi-distance PQ entre deux points quelconques P, Q de $\mathcal{E}$ par PQ^{γ}, où γ est un nombre positif fixe, on aura encore un espace semi-distancié, que nous désignerons par $\mathcal{E}^{(\gamma)}$ (1). Le raisonnement précédent basant sur la formule (51) nous montre implicitement cette proposition : *Si $\mathcal{E}$ est un espace isométrique à un ensemble de points de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et si $0<\gamma<1$, l'espace $\mathcal{E}^{(\gamma)}$ est aussi isométrique à un ensemble de $\mathcal{H}$.* Cette proposition nous sera utile dans la suite.

8. Lois de probabilités stables. — Retournons à présent au Calcul des probabilités. On dit qu'une loi est *stable* (par rapport à l'addition), si X_1 et X_2 étant deux variables aléatoires indépendantes et obéissant à cette loi, c_1 et c_2 étant deux nombres positifs quelconques, on a

$$c_1X_1 + c_2X_2 = cX, \tag{53}$$

X obéissant à la même loi et c étant un nombre positif convenablement choisi en fonction de c_1 et c_2. Si la loi étudiée est définie par

---

(1) Si $\mathcal{E}$ est un espace distancié, $\mathcal{E}^{(\gamma)}$ peut ne pas être un espace distancié. Tel est le cas où $\mathcal{E}=\mathcal{R}_1$ et $\gamma>1$ (*voir* plus loin).

sa fonction caractéristique $\varphi(t)$, la propriété (53) s'exprime par la relation fonctionnelle

$$\varphi(c_1 t)\varphi(c_2 t) = \varphi(ct). \tag{54}$$

En posant

$$\varphi(t) = e^{-|t|^\alpha} \quad (\alpha > 0), \tag{55}$$

on vérifie immédiatement que $\varphi(t)$ possède cette propriété. Donc, toute loi dont la fonction caractéristique est de la forme (55), est stable. Pour $\alpha = 2$, on a la seconde loi de Laplace avec la densité de probabilité $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$. Pour $\alpha = 1$, on a la loi de Cauchy de densité de probabilité $\frac{1}{\pi(1+\xi^2)}$. Mais il n'est pas évident que, pour une autre valeur positive de α, la fonction $\varphi(t)$ définie par (55) est effectivement la fonction caractéristique d'une loi de probabilité.

P. Lévy ([37], p. 258-263) a démontré que $\varphi(t)$ *définie par* (55) *est une fonction caractéristique, si et seulement si* $0 < \alpha \leqq 2$ (¹). Autrement dit, *pour que la fonction* $\varphi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ *soit définie-positive* (²), *il faut et il suffit que* $\alpha \leqq 2$. Schoenberg [48] a donné à cette proposition une nouvelle démonstration (³) très simple, en utilisant ses résultats que nous venons d'exposer au n° 7. Voici la démonstration.

On n'a qu'à considérer les deux cas $0 < \alpha < 2$ et $\alpha > 2$, puisqu'on sait que e^{-t^2} est définie-positive.

Supposons d'abord $0 < \alpha < 2$. Comme la droite euclidienne $\mathcal{R}_1$ est isométrique à un ensemble de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, il en est de même de l'espace $\mathcal{R}_1^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, puisque $0 < \frac{\alpha}{2} < 1$ (d'après la proposition

---

(¹) G. Pólya [43] avait montre, avant Lévy, qu'il existe effectivement des lois correspondant aux valeurs $0 < \alpha < 1$. Lévy a même déterminé toutes les lois stables. En particulier, les fonctions caractéristiques définies par (55) avec $0 < \alpha \leqq 2$ donnent toutes les lois stables symétriques.

(²) Quand nous parlons d'une « fonction définie-positive » tout court, il s'agit toujours d'une fonction définie-positive au sens ordinaire. Autrement, nous disons définie-positive sur un certain espace.

(³) Bochner [7] a aussi indiqué deux nouvelles démonstrations. L'une d'elles repose sur une propriété des fonctions complètement monotones et sera reproduite plus loin, n° 12, avec une légère modification.

signalée à la fin du n° 7). Par conséquent, la fonction e^{-t^2} doit être définie-positive sur l'espace $\mathcal{R}_1^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, ce qui équivaut à dire que la fonction $e^{-|t|^\alpha}$ est définie-positive.

Envisageons maintenant le cas où $\alpha > 2$. Si la fonction $e^{-|t|^\alpha}$ était définie-positive, il en serait de même de la fonction $e^{-\xi|t|^\alpha}$ pour tout $\xi > 0$ [1], c'est-à-dire que $e^{-\xi t^2}$ serait définie-positive sur l'espace $\mathcal{R}_1^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ pour tout $\xi > 0$. Alors, $\mathcal{R}_1^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ serait isométrique à un ensemble de $\mathcal{H}$ (d'après un théorème de Schoenberg, n° 7). Ainsi, pour prouver que $e^{-|t|^\alpha}$ n'est pas définie-positive pour $\alpha > 2$, il suffit de montrer que, pour $\alpha > 2$, $\mathcal{R}_1^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ n'est isométrique à aucun ensemble de points de $\mathcal{H}$. Considérons à cet effet les trois points $P_0 = 0, P_1 = 1, P_2 = 2$ de l'espace $\mathcal{R}_1^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, les semi-distances entre ces points sont

$$P_0P_1 = 1,\ P_1P_2 = 1,\ P_0P_2 = 2^{\frac{\alpha}{2}} > 2$$

(à cause de $\alpha > 2$), d'où

$$P_0P_1 + P_1P_2 < P_0P_2.$$

Donc, l'espace semi-distancié $\mathcal{R}_1^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ ($\alpha > 2$) ne vérifie pas l'inégalité triangulaire et par conséquent il n'est isométrique à aucun ensemble de $\mathcal{H}$. Ainsi, pour $\alpha > 2$, la fonction $e^{-|t|^\alpha}$ n'est pas définie-positive.

SECONDE PARTIE

FONCTIONS COMPLÈTEMENT MONOTONES

9. Définition et représentation intégrale des fonctions complètement monotones [2]. — Une fonction réelle $f(t)$ définie sur $t > 0$ est dite

---

[1] D'une façon générale, si $f(t)$ est une fonction définie positive, il en est de même de la fonction $g(t) = f(\lambda t)$, λ étant une constante réelle quelconque.

[2] Pour une théorie plus complète sur les fonctions complètement monotones on pourra consulter l'important ouvrage de D. V. Widder ([58], Chap. IV).

complètement monotone sur $t > 0$ (¹), si elle y est indéfiniment dérivable et vérifie les inégalités

$$(-1)^n f^{(n)}(t) \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; t > 0). \tag{56}$$

Cette notion a été introduite indépendamment par S. Bernstein [1] et F. Hausdorff [29]. Mais, avant ces deux auteurs, la notion voisine de suite complètement monotone avait déjà été considérée par I. Schur.

On peut aussi définir les fonctions complètement monotones par des inégalités portant sur les différences finies. *Une fonction $f(t)$ complètement monotone sur $t > 0$ est une fonction définie sur $t > 0$ telle qu'on ait*

$$(57) \quad \begin{cases} (-1)^n \Delta^{(n)} f(t) \\ \quad = (-1)^n \left\{ f(t + n\,\Delta t) - n f(t + \overline{n-1}\,\Delta t) + \ldots \pm f(t) \right\} \geqq 0 \\ \qquad\qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \end{cases}$$

quels que soient le nombre $t > 0$ et l'accroissement positif Δt. En effet, on peut prouver (S. Bernstein, [1], p. 190-193) que toute fonction satisfaisant à cette condition est indéfiniment dérivable et vérifie (56).

Toute fonction se réduisant à une constante non négative sur $t > 0$ est évidemment complètement monotone. Si on laisse de côté ce cas sans intérêt, on peut définir les fonctions complètement monotones comme étant les fonctions indéfiniment dérivables sur $t > 0$ et vérifiant *les inégalités plus précises que* (56) :

$$(-1)^n f^{(n)}(t) > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; t > 0). \tag{58}$$

En effet, il est aisé de s'assurer (J. Dubourdieu, [19], p. 98) que, si une fonction $f(t)$ complètement monotone sur $t > 0$ n'est pas une constante, elle vérifie nécessairement (58).

Les fonctions complètement monotones et les fonctions définies-positives présentent des caractères analytiques très différents. Toute fonction complètement monotone sur $t > 0$ y est analytique (²) (*voir*

(¹) On définit d'une façon analogue les fonctions complètement monotones sur un intervalle fini.

(²) Les fonctions complètement monotones jouent le même rôle fondamental dans la théorie des fonctions analytiques d'une variable réelle que les fonctions monotones pour les fonctions à variation bornée.

S. Bernstein, [1], p. 196-197), tandis que parmi les fonctions définies-positives, il y en a qui n'ont de dérivée nulle part (n° 4). Il existe toutefois certaines analogies entre ces deux classes de fonctions. On a même trouvé une relation précise entre les fonctions complètement monotones sur $t > 0$, continues à l'origine, et les fonctions définies-positives sur l'espace de Hilbert (*voir* plus loin).

Le théorème suivant concernant les fonctions complètement monotones correspond au théorème de Bochner pour les fonctions définies-positives :

Une fonction réelle $f(t)$ définie sur $t > 0$ est complètement monotone, si et seulement si elle est représentable par l'intégrale de Laplace-Stieltjes

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\xi}\, d\Phi(\xi) \qquad (t > 0), \tag{59}$$

où $\Phi(\xi)$ est une fonction non décroissante sur $\xi \geqq 0$ et telle que l'intégrale converge pour tout $t > 0$.

Ce théorème a été obtenu en 1921 par Hausdorff ([29], p. 287) sous une autre forme mais équivalente. Le théorème sous la présente forme a été découvert par S. Bernstein [2] en 1929. Indépendamment de celui-ci, D. V. Widder [56] a établi le même théorème en 1931, et J. D. Tamarkin [53] en a donné une démonstration simplifiée. Plus tard, en 1934, Widder [57] a encore publié une démonstration équivalente. En 1939, J. Dubourdieu [19] et W. Feller [23] ont chacun donné une nouvelle démonstration. La démonstration de Dubourdieu et celle de Feller sont essentiellement la même. La démonstration de Hausdorff fait intervenir la notion de suite complètement monotone et se rattache au problème des moments pour l'intervalle $0 \leqq \xi \leqq 1$. La démonstration de S. Bernstein repose sur une étude préalable assez complexe, relative d'une part à certaines propriétés générales des fonctions complètement monotones, et d'autre part à leur approximation par des polynomes exponentiels. La démonstration de Dubourdieu et Feller paraît être la plus directe et surtout, elle conduit à une formule d'inversion dans le domaine réel. Nous nous contentons de reproduire ici l'idée essentielle de la démonstration de ces deux auteurs.

Soit $f(t)$ une fonction complètement monotone sur $t > 0$. Comme une telle fonction est analytique, on a

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(T-t)^n}{n!}f^{(n)}(T) \qquad (0 < t < T),$$

ou bien

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{t}{T}\right)^n(-1)^n\frac{T^n}{n!}f^{(n)}(T) \qquad (0 < t < T).$$

Cette identité peut être mise sous la forme

$$f(t)=\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\xi T}d\Phi_T(\xi) \qquad (0 < t < T), \tag{60}$$

en posant

$$\Phi_T(\xi)=\begin{cases} 0 & \text{pour } \xi=0, \\ \displaystyle\sum_{0\leq n<\xi T}(-1)^n\frac{T^n}{n!}f^{(n)}(T) & \text{pour } \xi>0. \end{cases} \tag{61}$$

C'est là une fonction non décroissante, en escalier, qui a pour points de discontinuité $\xi=\frac{n}{T}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, la valeur du saut au point $\xi=\frac{n}{T}$ étant égale à $(-1)^n\frac{T^n}{n!}f^{(n)}(T)>0$ [d'après (58)]. Comme on a

$$0 < T-Te^{-\frac{t}{T}} < T,$$

quels que soient $T>0$ et $t>0$, on peut substituer $T-Te^{-\frac{t}{T}}$ à t dans (60); il vient donc

$$f\left(T-Te^{-\frac{t}{T}}\right)=\int_0^{+\infty}e^{-t\xi}\,d\Phi_T(\xi). \tag{62}$$

Lorsque T croît indéfiniment, le premier membre de (62) tend vers $f(t)$. On est alors conduit à se demander si la fonction $\Phi_T(\xi)$ ne tendrait pas vers une fonction $\Phi(\xi)$ de telle manière qu'à la limite, pour $T\to+\infty$, l'égalité (62) devienne (59). Ainsi, la démonstration s'achèvera en justifiant ce passage à la limite.

Ces quelques indications nous laissent en même temps entrevoir la possibilité de déduire une formule d'inversion en partant de (61). En effet, Dubourdieu et Feller ont indépendamment établi ce résultat : ***La fonction $f(t)$ complètement monotone sur $t>0$ étant mise sous*** *la forme* (59), *on a, quel que soit* $\xi > 0$, *et en supposant* $\Phi(0) = 0$,

$$\frac{\Phi(\xi - 0) + \Phi(\xi + 0)}{2} = \lim_{t \to +\infty} \sum_{0 \leq n < t\xi} (-1)^n \frac{t^n}{n!} f^{(n)}(t). \tag{63}$$

De sorte que la fonction $\Phi(\xi)$ dans la représentation (59) est déterminée par $f(t)$ de manière unique ([1]) par la condition $\Phi(0) = 0$, étant entendu que l'on ne considère comme distinctes que deux fonctions qui diffèrent en au moins un de leurs points de continuité.

Pour une fonction $f(t)$ complètement monotone sur $t > 0$, la limite $f(+0)$ peut être finie ou non. Pour les fonctions $f(t)$ complètement monotones telles que $f(+0)$ soit finie, le théorème de Hausdorff et S. Bernstein peut être précisé de la façon suivante : *Pour qu'une fonction réelle* $f(t)$ *définie sur* $t \geqq 0$ *soit complètement monotone sur* $t > 0$ *et telle que* $f(0) = f(+0)$, *il faut et il suffit qu'elle se prête à une représentation de la forme* (59), *où* $\Phi(\xi)$ *est non seulement non décroissante, mais aussi bornée sur* $\xi \geqq 0$. Considérons à présent une telle fonction $f(t)$. On a

$$f(t^2) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2\xi}\, d\Phi(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2\xi^2}\, d\Psi(\xi),$$

où $\Psi(\xi) = \Phi(\xi^2)$ est comme $\Phi(\xi)$, bornée et non décroissante sur $\xi \geqq 0$. Or, d'après un résultat de Schœnberg, n° 6, la fonction

$$g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2\xi^2}\, d\Psi(\xi)$$

est définie-positive sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Donc, *pour qu'une fonction réelle* $f(t)$ *définie sur* $t \geqq 0$ *soit complètement monotone sur* $t > 0$ *et telle que* $f(0) = f(+0)$, *il faut et il suffit que la fonction* $g(t) = f(t^2)$ *soit définie-positive sur l'espace de Hilbert.* En d'autres termes, *on peut caractériser les fonctions* $f(t)$ *complètement monotones sur* $t > 0$ *et continues à l'origine par les deux conditions que voici :* 1° $f(t)$ *est réelle et continue sur* $t \geqq 0$; 2° *quels que soient* m *points* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *d'un espace euclidien* (à un nombre quelconque de dimensions), *le*

([1]) Cette propriété d'unicité avait déjà été observée par Hausdorff ([29], p. 287) et par S. Bernstein [2].

déterminant

$$\begin{vmatrix} f(P_1 P_1^2) & f(P_1 P_2^2) & \dots & f(P_1 P_m^2) \\ f(P_2 P_1^2) & f(P_2 P_2^2) & \dots & f(P_2 P_m^2) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ f(P_m P_1^2) & f(P_m P_2^2) & \dots & f(P_m P_m^2) \end{vmatrix}$$

est non négatif. C'est là un intéressant résultat dû à Schœnberg ([49], p. 821-822).

On peut aussi considérer les fonctions complètement monotones définies sur $t > 0$ et prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel partiellement ordonné, car la condition (57) gardera toujours un sens. Sous des conditions très générales concernant l'espace vectoriel partiellement ordonné, le théorème de Hausdorff et S. Bernstein peut être généralisé aux fonctions complètement monotones de valeurs abstraites. (*Voir* S. Bochner [9]; S. Bochner et K. Fan [10]).

10. Détermination d'une fonction complètement monotone. — Le problème de détermination d'une fonction complètement monotone par certaines données a été abordé de deux points de vue différents.

En se plaçant au point de vue de la théorie des fonctions analytiques, S. Bernstein [2] a étudié quel est le segment maximum, où une fonction, prenant avec un nombre fini ou infini de ses dérivées successives des valeurs données en un point, peut rester complètement monotone, et d'autre part, dans quelles conditions ces données suffisent pour la déterminer complètement. Pour ne pas être trop long, nous laissons de côté ce problème; le lecteur pourra se reporter au Mémoire fondamental de Bernstein.

D'un autre point de vue, celui de l'interpolation, on peut étudier l'existence et l'unicité d'une fonction complètement monotone sur une demi-droite et prenant en une suite infinie de points des valeurs données. Ce problème d'interpolation a été traité par Hausdorff ([29], p. 284), Widder ([56], p. 880-886; [57], Part V) et Feller ([23], p. 668-674) et nous allons en résumer quelques résultats principaux.

Considérons une suite constamment croissante de nombres réels tendant ves $+\infty$,

$$0 \leqq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots.$$

Supposons qu'à chaque t_n corresponde un nombre $a_n \geqq 0$ et formons les *différences divisées*

$$\begin{pmatrix} a_n \\ t_n \end{pmatrix} = a_n,$$

$$(64) \quad \begin{pmatrix} a_{i_0} & a_{i_1} & \dots & a_{i_n} \\ t_{i_0} & t_{i_1} & \dots & t_{i_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & t_{i_0} & t_{i_0}^2 & \dots & t_{i_0}^{n-1} & a_{i_0} \\ 1 & t_{i_1} & t_{i_1}^2 & \dots & t_{i_1}^{n-1} & a_{i_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{i_n} & t_{i_n}^2 & \dots & t_{i_n}^{n-1} & a_{i_n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & t_{i_0} & t_{i_0}^2 & \dots & t_{i_0}^{n} \\ 1 & t_{i_1} & t_{i_1}^2 & \dots & t_{i_1}^{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{i_n} & t_{i_n}^2 & \dots & t_{i_n}^{n} \end{vmatrix}.$$

La suite $\{a_n\}$ sera dite *complètement monotone relativement à* $\{t_n\}$, si, pour tout systeme fini d'indices $i_0 < i_1 < \ldots < i_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, on a

$$(65) \quad (-1)^n \begin{pmatrix} a_{i_0} & a_{i_1} & \dots & a_{i_n} \\ t_{i_0} & t_{i_1} & \dots & t_{i_n} \end{pmatrix} \geqq 0.$$

Si maintenant les nombres a_n sont les valeurs prises par une fonction complètement monotone $f(t)$ aux points $t_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$a_n = f(t_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$(-1)^n f^{(n)}(t) \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; t \geqq t_0),$$

alors il existe un nombre τ entre t_{i_0} et t_{i_n} tel que

$$\begin{pmatrix} a_{i_0} & a_{i_1} & \dots & a_{i_n} \\ t_{i_0} & t_{i_1} & \dots & t_{i_n} \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\tau);$$

et par conséquent $\{a_n\}$ est une suite complètement monotone relativement à $\{t_n\}$.

Inversement, on a le théorème suivant dû à Hausdorff et complété par Feller : *Si la suite $\{a_n\}$ est complètement monotone relativement à la suite*

$$0 \leqq t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots \qquad (t_n \to +\infty)$$

et si la série $\sum \frac{1}{t_n}$ est divergente, il existe une fonction $f(t)$ et une seule, qui est définie, complètement monotone sur $t \geqq t_0$ et telle que

$$f(t_n) = a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Pour cette fonction, on a

$$f(t_0) \leqq a_0.$$

De plus, pour toute suite infinie croissante de nombres entiers $i_0 < i_1 < \ldots < i_n < \ldots$ *telle que la série* $\sum \frac{1}{t_{i_n}}$ *diverge, on a*

$$(66)\quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_{i_0} & a_{i_1} & \ldots & a_{i_n} \\ t_{i_0} & t_{i_1} & \ldots & t_{i_n} \end{pmatrix} (t - t_{i_0}) \ldots (t - t_{i_{n-1}}) \qquad (t \geqq t_0).$$

Remarquons que $f(t_0)$ n'est pas nécessairement égal à a_0. Cela tient à ce qu'une suite $\{a_n\}$ complètement monotone relativement à $\{t_n\}$ restera complètement monotone (toujours relativement à $\{t_n\}$), quand on remplace a_0 par un nombre quelconque supérieur à a_0.

D'après le théorème précédent, *deux fonctions complètement monotones qui prennent les mêmes valeurs aux points d'une suite* $\{t_n\}$ *telle que* $t_n \to +\infty$ *et* $\sum \frac{1}{t_n}$ *diverge, sont nécessairement identiques.*

Étant donnée une suite complètement monotone $\{a_n\}$ relativement à $\{t_n\}$ $\left(t_n \to +\infty \text{ et } \sum \frac{1}{t_n} \text{ diverge}\right)$, on peut calculer, d'après (66), la fonction $f(t)$ complètement monotone correspondante. Ensuite, en employant la formule d'inversion (63), on peut déterminer la fonction $\Phi(\xi)$ qui figure dans la représentation (59). On pourrait se demander si l'on ne pourrait pas établir une formule permettant de déterminer directement $\Phi(\xi)$, à partir des suites $\{a_n\}$ et $\{t_n\}$, sans passer par $f(t)$. Feller a d'ailleurs indiqué qu'une telle détermination directe est utile dans des applications à la théorie stochastique du trafic téléphonique et il a obtenu le résultat suivant répondant à cette question. *Soit*

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \qquad (t_n \to +\infty),$$

une suite telle que $\sum \frac{1}{t_n}$ *diverge et* $\sum \frac{1}{t_n^2}$ *converge. Soit* $\{a_n\}$ *une suite complètement monotone relativement à la suite* $\{t_n\}$. *Alors la fonction complètement monotone* $f(t)$ *qui prend les valeurs* a_n *aux points* $t_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$, *peut être représentée sous la forme* (59) *avec*

$$(67)\quad \Phi(\xi) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{\alpha_n(\xi)} (-1)^k \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{n+k} \\ t_n & t_{n+1} & \ldots & t_{n+k} \end{pmatrix} t_n t_{n+1} \ldots t_{n+k-1},$$

où $\alpha_n(\xi)$ désigne le nombre entier déterminé par les relations

$$(68) \qquad \sum_{k=n}^{\alpha_n(\xi)+n-1} \frac{1}{t_k} < \xi, \qquad \sum_{k=n}^{\alpha_n(\xi)+n} \frac{1}{t_k} \geqq \xi \qquad [\alpha_n(0) = -1].$$

11. Intervention de fonctions complètement monotones dans l'étude des processus stochastiques discontinus. — Nous allons maintenant montrer, suivant Khintchine ([30], p. 19-20) et J. Dubourdieu [17], [18], comment les fonctions complètement monotones s'introduisent tout naturellement dans l'étude des processus stochastiques discontinus.

Un *processus stochastique discontinu* consiste, par définition, en la réalisation successive de temps à autre, d'événements d'une certaine nature déterminée (par exemple, décomposition radioactive d'atome, appel téléphonique, sinistre frappant un contrat d'assurance, etc.).

D'après Khintchine, un processus stochastique discontinu est dit *élémentaire*, si les trois hypothèses suivantes sont vérifiées :

1° *La probabilité pour qu'au moins un événement considéré se produise dans un intervalle de temps de longueur t est indépendante du point initial de cet intervalle et aussi indépendante de ce qui se produisait avant le commencement de cet intervalle. Cette probabilité est une fonction de la longueur t de l'intervalle, soit $\mu(t)$.*

2° $\mu(t) = at + o(t)$ *pour* $t \to 0$; *a étant une constante positive.*

3° *La probabilité pour qu'au moins deux événements considérés se produisent dans un intervalle de temps de longueur t est $\nu(t) = o(t)$ pour $t \to 0$.*

Sous ces hypotheses, appelons $p_0(t)$ la probabilité pour qu'aucun événement ne se produise dans un intervalle de temps de durée t. On a

$$\begin{aligned} p_0(t+\Delta t) = p_0(t)\,p_0(\Delta t) &= p_0(t)[1-\mu(\Delta t)] \\ &= p_0(t)[1 - a\,\Delta t + o(\Delta t)], \end{aligned}$$

d'où

$$p'_0(t) = -a p_0(t)$$

et par suite, en tenant compte de $p_0(0) = 1$,

(69) $$p_0(t) = e^{-at}, \qquad \mu(t) = 1 - e^{-at},$$

Dans le raisonnement qui suit, on verra que, sous les hypothèses 1°-3°, la probabilité pour que, dans un intervalle de temps de durée t, n événements se produisent et n seulement, est indépendante du point initial de cet intervalle et aussi indépendante de ce qui se passait antérieurement. Nous désignons donc dès maintenant, pour simplifier l'écriture, cette probabilité par $p_n(t)$. On a, pour $n > 0$,

$$\begin{aligned} p_n(t + \Delta t) &= p_n(t)\, p_0(\Delta t) + p_{n-1}(t)\, p_1(\Delta t) + o(\Delta t) \\ &= p_n(t)\, p_0(\Delta t) + p_{n-1}(t)\,[\mu(\Delta t) - \nu(\Delta t)] + o(\Delta t) \\ &= p_n(t)(1 - a\,\Delta t) + p_{n-1}(t)\, a\,\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -\,a\,p_n(t) + a\,p_{n-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Il vient donc

(70) $$p'_n(t) = -\,a\,p_n(t) + a\,p_{n-1}(t) \qquad (n > 0).$$

En posant

$$u_n(t) = e^{at}\, p_n(t) \qquad (n \geq 0),$$

l'équation (70) devient

$$u'_n(t) = a\,u_{n-1}(t) \qquad (n > 0).$$

Comme $u_n(0) = p_n(0) = 0$ pour $n > 0$, on a

$$u_n(t) = a\int_0^t u_{n-1}(t)\,dt \qquad (n > 0).$$

Or, d'après (69), $u_0(t) = 1$. On a donc

$$u_n(t) = \frac{(at)^n}{n\,!}$$

et finalement

(71) $$p_n(t) = \frac{(at)^n\, e^{-at}}{n\,!}.$$

On est ainsi arrivé à une loi de Poisson. Cette solution de

Khintchine est basée sur les hypothèses 1°-3°. On voit que la fonction $p_0(t)$ est une fonction complètement monotone.

Dubourdieu remplace les trois hypothèses 1°-3° de Khintchine par la seule hypothèse suivante qui se présente naturellement à l'esprit en cette matière :

La probabilité pour que, sachant que dans l'intervalle de temps $(0, T)$ *sont réalisés* N *événements, n de ces* N *événements soient arrivés dans un sous-intervalle* $(0, t)$ *(où* $0 < t < T$), *est donnée par*

$$\varpi(n, N; t, T) = C_N^n \left(\frac{t}{T}\right)^n \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{N-n}. \tag{72}$$

Partons maintenant de cette hypothèse et désignons par $p_n(t)$ la probabilité pour que, durant l'intervalle $(0, t)$, n événements se produisent et n seulement. Alors, le produit

$$p_N(T)\,\varpi(n, N, t, T) \qquad (n \leqq N;\ t < T)$$

est la probabilité pour que, dans l'intervalle $(0, T)$ se produisent N événements dont n soient arrivés dans l'intervalle $(0, t)$. De plus, s'il survient n événements dans l'intervalle $(0, t)$, il en survient au moins n dans l'intervalle $(0, T)$. De sorte que le principe des probabilités totales conduit à écrire la relation

$$p_n(t) = \sum_{N=n}^{\infty} p_N(T)\, C_N^n \left(\frac{t}{T}\right)^n \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{N-n} \qquad (n \geqq 0,\ 0 < t < T). \tag{73}$$

En posant $n = 0$, (73) devient

$$p_0(t) = \sum_{N=0}^{\infty} p_N(T) \frac{(T - t)^N}{T^N} \qquad (0 < t < T).$$

D'autre part, si l'on suppose la fonction $p_0(t)$ analytique, on peut écrire

$$p_0(t) = \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \frac{(T - t)^N}{N!} p_0^{(N)}(T) \qquad (0 < t < T).$$

Une comparaison des deux dernières relations nous donne enfin

$$p_n(t) = (-1)^n \frac{t^n}{n!} p_0^{(n)}(t) \qquad (n \geqq 0,\ t > 0). \tag{74}$$

Inversement, on vérifie aisément que les fonctions $p_n(t)$ définies par (74) à partir d'une fonction $p_0(t)$ vérifient (73). De plus, $p_n(t)$ étant une probabilité, est toujours $\geqq 0$. On voit donc, d'après (74), que $p_0(t)$ est une fonction complètement monotone.

La loi de probabilité (74) obtenue par Dubourdieu généralise la loi de Poisson (71) qui correspond au cas particulier où la fonction complètement monotone $p_0(t)$ est égale à e^{-at}.

Ce qui distingue la loi générale (74) de la loi de Poisson (71), c'est que, comme l'a indiqué Dubourdieu, dans le cas général, la probabilité pour que, sachant que dans l'intervalle $(0, t)$ sont réalisés n événements et n seulement, il en survienne m nouveaux dans l'intervalle de temps $(t, t+s)$, à savoir

$$\frac{p_{n+m}(t+s)\,\varpi(n, n+m; t, t+s)}{p_n(t)} = (-1)^m \frac{p_0^{(n+m)}(t+s)}{p_0^{(n)}(t)} \frac{s^m}{m!},$$

dépend de n et t, tandis qu'elle en est indépendante dans le cas de la loi de Poisson.

12. Un problème concernant l'espace de Hilbert et l'intégrale indéfinie d'une fonction complètement monotone. — Passons à présent à la théorie des espaces distanciés. Étant donné un espace semi-distancié $\mathcal{E}$, considérons une fonction $F(t)$ réelle continue sur $t \geqq 0$ telle que $F(0) = 0$ et $F(t) > 0$ pour $t > 0$. Si l'on remplace la semi-distance PQ de tout couple de points P, Q de $\mathcal{E}$ par $F(PQ)$, on aura un nouvel espace semi-distancié qu'on désignera par la notation $F(\mathcal{E})$. Cet espace $F(\mathcal{E})$ sera appelé, suivant L. M. Blumenthal ([3], p. 31), *le transformé métrique de $\mathcal{E}$ par la fonction* $F(t)$ (¹).

I. J. Schœnberg ([49], p. 812, 827) a posé des problèmes du type général suivant : *Étant donnés deux espaces semi-distanciés $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, déterminer toutes les fonctions* $F(t)$ *réelles, continues sur* $t \geqq 0$, $F(0) = 0$, $F(t) > 0$ *pour* $t > 0$, *telles que le transformé métrique* $F(\mathcal{E}_1)$ *soit isométrique à une partie de l'espace* $\mathcal{E}_2$ (²).

(¹) L'espace $\mathcal{E}^{(\gamma)}$ à la fin du n° 7 n'est autre que le transformé métrique de $\mathcal{E}$ par la fonction $F(t) = t^{\gamma}$.

(²) Dans le cas où $\mathcal{E}_1 = \mathcal{R}_n$ est un espace euclidien à n dimensions et où $\mathcal{E}_2 = \mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert, ce problème a été résolu par J. von Neumann et I. J. Schœnberg [42]. De même, Schœnberg [50] a traité le cas où $\mathcal{E}_1$ est la surface d'une sphère (avec la distance sphérique) dans $\mathcal{R}_n$ ou dans $\mathcal{H}$ et où $\mathcal{E}_2 = \mathcal{H}$.

Dans le cas où $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{H}$, l'espace de Hilbert, ce problème a été complètement résolu par Schœnberg lui-même ([49], § 5). Voici son résultat :

Étant donnée une fonction $F(t)$ *réelle, continue sur* $t \geqq 0$ *telle que* $F(0) = 0$ *et* $F(t) > 0$ *pour* $t > 0$, *une condition nécessaire et suffisante pour que le transformé métrique* $F(\mathcal{H})$ *soit isométrique à un ensemble de points de l'espace* $\mathcal{H}$, *est que* $F(t)$ *puisse être mise sous la forme*

$$F(t) = \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\xi t^2}}{\xi} d\Phi(\xi) \right\}^2 \qquad (t \geqq 0), \tag{75}$$

où $\Phi(\xi)$ *est une fonction non décroissante sur* $\xi \geqq 0$ *et telle que*

$$\int_1^{+\infty} \frac{d\Phi(\xi)}{\xi} \tag{76}$$

existe.

Ce qui est surtout intéressant, c'est que cette condition peut être exprimée en termes de fonction complètement monotone. Considérons à cet effet, une fonction $f(t)$ complètement monotone sur $t > 0$. D'après le théorème de Hausdorff et S. Bernstein (n° 9), on peut écrire

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\xi} d\Phi(\xi) \qquad (t > 0), \tag{59}$$

avec une fonction $\Phi(\xi)$ non décroissante sur $\xi \geqq 0$. Intégrons les deux membres de (59), de ε à t $(0 < \varepsilon < t)$, nous avons

$$\int_\varepsilon^t f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\xi\varepsilon} - e^{-\xi t}}{\xi} d\Phi(\xi). \tag{77}$$

Laissons ε tendre vers zéro, nous obtenons

$$\psi(t) = \int_{+0}^t f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\xi t}}{\xi} d\Phi(\xi), \tag{78}$$

où les deux intégrales convergent ou divergent simultanément. La convergence a lieu pour tout $t > 0$, si et seulement si l'intégrale (76) existe. Ces considérations très simples ont conduit Schœnberg à donner à son théorème précédent la forme suivante : *Étant donnée une fonction* $F(t)$ *réelle, continue sur* $t \geqq 0$ *telle que* $F(0) = 0$ *et* $F(t) > 0$ *pour* $t > 0$, *pour que le transformé métrique* $F(\mathcal{H})$ *soit isométrique à une partie de l'espace* $\mathcal{H}$, *il faut et il suffit que la fonction*

$$f(t) = \frac{d}{dt}[F(\sqrt{t})]^2 \tag{79}$$

soit complètement monotone sur $t > 0$.

A titre d'exemple, cette condition est vérifiée par chacune des fonctions

$$F(t) = t^\alpha \quad (0 < \alpha \leqq 1), \qquad F(t) = \frac{t}{1+t},$$

$$F(t) = (1 - e^{-t^2})^{\frac{1}{2}}, \qquad F(t) = [\log(1 + t^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

Schœnberg a aussi obtenu la proposition suivante : *Pour toute fonction* $F(t)$ *réelle, continue sur* $t \geqq 0$ *telle que* $F(0) = 0$ *et* $F(t) > 0$ *pour* $t > 0$, *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

α. $F(\mathcal{H})$ *est isométrique à un ensemble de* $\mathcal{H}$.

β. *Quelle que soit la fonction* $g(t)$ *définie-positive sur* $\mathcal{H}$, *la fonction* $g[F(t)]$ *est aussi définie-positive sur* $\mathcal{H}$.

Supposons, en effet, que $F(\mathcal{H})$ soit isométrique à un ensemble de $\mathcal{H}$. Soit $g(t)$ une fonction définie-positive sur $\mathcal{H}$. Pour prouver que $g[F(t)]$ est aussi définie-positive sur $\mathcal{H}$, nous avons à montrer que, quels que soient m points $P_1, P_2, \ldots, P_m$ de $\mathcal{H}$ et quels que soient m nombres réels $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} g[F(P_h P_k)] \rho_h \rho_k \geqq 0$$

a lieu. Or, puisque $F(\mathcal{H})$ est isométrique à un ensemble de $\mathcal{H}$, aux points $P_1, P_2, \ldots, P_m$ correspondent m points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ de $\mathcal{H}$ tels que $F(P_h P_k) = Q_h Q_k$. L'inégalité ci-dessus devient donc

$$\sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} g(Q_h Q_k) \rho_h \rho_k \geqq 0,$$

qui est vraie, car la fonction $g(t)$ est supposée définie-positive sur $\mathcal{H}$.

Inversement, si la fonction $F(t)$ jouit de la propriété β, la fonction $e^{-\xi[F(t)]^2}$ est nécessairement définie-positive sur $\mathcal{H}$, quel que soit $\xi > 0$. Autrement dit, la fonction $e^{-\xi t^2}$ est définie-positive sur l'espace $F(\mathcal{H})$, quel que soit $\xi > 0$. Il en résulte alors, en appliquant un théorème du n° 7, que $F(\mathcal{H})$ est isométrique à une partie de $\mathcal{H}$. La dernière proposition en italique est ainsi établie.

Parmi les fonctions $\psi(t)$ réelles, continues sur $t \geqq 0$ telles que $\psi(0) = 0$ et $\psi(t) > 0$ pour $t > 0$, envisageons celles qui jouissent de cette propriété :

γ. *Si $f(t)$ est une fonction complètement monotone sur $t > 0$ et telle que $f(0) = f(+0)$, il en est de même de la fonction $f[\psi(t)]$.*

Soit $\psi(t)$ une fonction possédant cette propriété γ. Soit d'autre part $g(t)$ une fonction définie-positive sur $\mathcal{H}$. D'après un théorème du n° 9, $f(t) = g(\sqrt{t})$ est complètement monotone sur $t > 0$ et $f(0) = f(+0)$. Donc, la fonction $f[\psi(t)] = g\left[\sqrt{\psi(t)}\,\right]$ est aussi complètement monotone sur $t > 0$ et par suite, $f[\psi(t^2)] = g\left[\sqrt{\psi(t^2)}\,\right]$ est définie-positive sur $\mathcal{H}$. C'est-à-dire que la fonction $F(t) = \sqrt{\psi(t^2)}$ jouit de la propriété β et par conséquent aussi de la propriété α. Il en résulte alors, d'après un théorème plus haut, que $\left[F(\sqrt{t}\,)\right]^2 = \psi(t)$ est l'intégrale indéfinie d'une fonction $h(t)$ complètement monotone sur $t > 0$,

$$\psi(t) = \int_{+0}^{t} h(t)\,dt. \tag{80}$$

Réciproquement, soit $\psi(t)$ une fonction $[\psi(0) = 0,\ \psi(t) > 0$ pour $t > 0]$ qui est l'intégrale indéfinie d'une fonction complètement monotone sur $t > 0$. En posant

$$F(t) = \sqrt{\psi(t^2)},$$

on a

$$\frac{d}{dt}\left[F(\sqrt{t}\,)\right]^2 = \psi'(t).$$

$F(t)$ possède donc la propriété α et par conséquent aussi la propriété β. Si maintenant $f(t)$ est une fonction complètement monotone sur $t > 0$ et telle que $f(0) = f(+0)$, la fonction $g(t) = f(t^2)$ est définie-positive sur $\mathcal{H}$. En vertu de la propriété β de la fonction $F(t)$, la fonction $g[F(t)] = f[\psi(t^2)]$ est aussi définie-positive sur $\mathcal{H}$. On en conclut alors que $f[\psi(t)]$ est complètement monotone sur $t > 0$. Ainsi la fonction $\psi(t)$ jouit de la propriété γ.

En résumé, *pour qu'une fonction* $\psi(t)$ *réelle, continue sur* $t \geqq 0$ *telle que* $\psi(0) = 0$ *et* $\psi(t) > 0$ *pour* $t > 0$, *jouisse de la propriété* γ, *il faut et il suffit qu'elle soit l'intégrale indéfinie d'une fonction complètement monotone sur* $t > 0$. C'est là encore un résultat dû à Schœnberg. Mais, avant lui, la partie concernant la suffisance de la condition a déjà été obtenue par S. Bochner ([6], p. 498; [7]).

Bochner [7] a fait usage de la propriété γ de l'intégrale indéfinie d'une fonction complètement monotone pour redémontrer d'une façon fort simple, que $e^{-|t|^\alpha}$ est définie-positive (au sens ordinaire) pour $0 < \alpha \leqq 2$. En modifiant légèrement la démonstration de Bochner, nous donnons la suivante.

Supposons $0 < \alpha \leqq 2$ et posons $\psi(t) = t^{\frac{\alpha}{2}}$. Nous avons

$$\psi'(t) = \frac{\alpha}{2} t^{\frac{\alpha}{2}-1} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-t\xi} \xi^{-\frac{\alpha}{2}} d\xi.$$

$\psi'(t)$ est donc une fonction complètement monotone sur $t > 0$. D'après ce qui précède, $\psi(t)$ jouit de la propriété γ. Comme $f(t) = e^{-t}$ est complètement monotone sur $t > 0$ et $f(0) = f(+0)$, il en est de même de la fonction $f[\psi(t)] = e^{-t^{\frac{\alpha}{2}}}$. Dès lors, en appliquant un théorème du n° 9, la fonction $f[\psi(t^2)] = e^{-|t|^\alpha}$ est définie-positive sur l'espace de Hilbert et à plus forte raison, elle est définie-positive au sens ordinaire.

BIBLIOGRAPHIE.

1. BERNSTEIN (S.). — *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle* (Paris, 1926).
2. BERNSTEIN (S.). — Sur les fonctions absolument monotones (*Acta Math.*, t. 52, 1929, p. 1-66).
3. BLUMENTHAL (L. M.). — Distance geometries (*The Univ. of Missouri Studies*, 1938).
4. BOCHNER (S.). — *Vorlesungen über Fouriersche Integrale* (Leipzig, 1932).
5. BOCHNER (S.). — Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse (*Math. Ann.*, Bd. 108, 1933, p. 378-410).
6. BOCHNER (S.). — Completely monotone functions of the Laplace operator for torus and sphere (*Duke Math. Journ.*, vol. 3, 1937, p. 488-502).
7. BOCHNER (S.). — Stable laws of probability and completely monotone functions (*Duke Math. Journ.*, vol. 3, 1937, p. 726-728).
8. BOCHNER (S.). — Hilbert distances and positive definite functions (*Annals of Math.*, vol. 42, p. 647-656).
9. BOCHNER (S.). — Completely monotone functions in partially ordered spaces (*Duke Math. Journ.*, vol. 9, 1942, p. 519-526).
10. BOCHNER (S.) and FAN (K.). — Distributive order-preserving operations in partially ordered vector sets (*Annals of Math.*, vol. 48, 1947, p. 168-179).
11. BOHR (H.). — *Fastperiodische Funktionen* (Berlin, 1932).
12. BOULIGAND (G.). — La géométrie des distances ou géométrie métrique générale (*La Revue scientifique*, t. 77, 1939, p. 615-620).
13. CARTAN (H.) et GODEMENT (R.). — Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 64, 1947, p. 79-99).
14. CRAMÉR (H.). — On the representation of a function by certain Fourier integrals (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 46, 1939, p. 191-201).
15. CRAMÉR (H.). — On the theory of stationary random processes (*Annals of Math.*, vol. 41, 1940, p. 215-230).
16. DOOB (J. L.). — Stochastic processes depending on a continuous parameter (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 42, 1937, p. 107-140).
17. DUBOURDIEU (J.). — Remarques relatives à la théorie de l'assurance-accidents (*C. R. Acad. Sc.*, t. 206, 1938, p. 303-305).
18. DUBOURDIEU (J.). — Les fonctions absolument monotones et la théorie mathématique de l'assurance-accidents (*C. R. Acad. Sc.*, t. 206, 1938, p. 556-557).
19. DUBOURDIEU (J.). — Sur un théorème de M. S. Bernstein relatif à la transformation de Laplace-Stieltjes (*Compositio Math.*, vol. 7, 1940, p. 96-111).

20. Esseen (C. G.). — Fourier analysis of distribution functions, A mathematical study of the Laplace-Gaussian law (*Acta Math.*, t. 77, 1945 p. 1-125).

21. Fan (K.). — Remarques sur un théorème de M. Khintchine (*Bull. Sci. Math.*, t. 69, 1945, p. 81-92).

22. Fan (K.). — On positive definite sequences (*Annals of Math.*, vol. 47, 1946, p. 593-607).

23. Feller (W.). — Completely monotone functions and sequences (*Duke Math. Journ.*, vol. 5, 1939, p. 661-674).

24. Fréchet (M.). — *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction de l'analyse générale* (Paris, 1928).

25. Fréchet (M.). — *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*. Premier livre : *Généralités sur les probabilités, Variables aléatoires* (Paris, 1937).

26. Gelfand (I.) and Raikov (D. A.). — Irreducible unitary representations of locally bicompact groups (*Recueil Math. Moscou*, t. 13, 1943, p. 301-316).

27. Glivenko (V.). — Sul teorema limite della teoria delle funzioni caratteristiche (*Giorn. Istituto Ital. Attuari*, t. 7, 1936, p. 160-167).

28. Godement (R.). — Les fonctions de type positif et la théorie des groupes (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 63, p. 1-84).

29. Hausdorff (F.). — Summationsmethoden und Momentfolgen, I-II (*Math Zeits.*, Bd. 9, 1921, p. 74-109, et 280-299).

30. Khintchine (A.). — *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, (Berlin, 1933).

31. Khintchine (A.). — *Zur mathematischen Begründung der statistischen Mechanik* (*Zeits. f. angew. Math. u. Mech.*, Bd. 13, 1933, p. 101-103).

32. Khintchine (A.). — Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse (*Math. Ann.*, Bd. 109, 1934, p. 604-615).

33. Kolmogoroff (A.). — Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo (un problema di Bruno di Finetti) (*Atti Reale Accad. Naz. Lincei*, 6e série, t. 15, 1932, p. 805-808).

34. Kolmogoroff (A.). — Ancora sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo (*Atti Reale Accad. Naz. Lincei*, 6e série, t. 15, 1932, p. 866-869).

35. Kolmogoroff (A.). — Interpolation und Extrapolation von stationären zufälligen Folgen (*Izvestia Akad Nauk SSSR*, t. 5, 1941, p. 3-14).

36. Kolmogoroff (A.). — Stationary sequences in Hilbert's space (*Bolletin Moskovskogo Gosudarstvenogo Universiteta Matematika*, t. 2, 1941, 40 p.).

37. Lévy (P.). — *Calcul des probabilités* (Paris, 1925).

38. Lévy (P.). — *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (Paris, 1937).

39. Lundberg (O.). — *On random processes and their application to sickness and accident statistics* (Uppsala, 1940).

40. Mathias (M.). — Ueber positive Fourier-Integrale (*Math. Zeits.*, Bd. 16, 1923, p. 103-125).

41. Moore (E. H.) — General Analysis, Part I (*Memoirs of the Amer. Phil. Soc.*, vol. 1, Philadelphia, 1935).

42. Neumann (J. von) and Schnbœerg (I. J.]. — Fourier integrals and metric geometry (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 50, 1941, p. 226-251).

43. Polya (G.). — Herleitung des Gaussschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung (*Math. Zeits.*, Bd. 18, 1923, p. 96-108).

44. Raikov (D. A.). — Harmonic analysis on commutative groups with the Haar measure and the theory of characters (*Travaux de l'Inst. Math. Stekloff*, t. 14, 1945, p. 5-86).

45. Riesz (F.). — Ueber Sätze von Stone und Bochner (*Acta Szeged*, t. 6, 1933, p. 184-198).

46. Schoenberg (I. J.). — Remarks to Maurice Fréchet's article, « Sur la définition axiomatique d'une classe d'espaces distanciés vectoriellement applicables sur l'espace de Hilbert » (*Annals of Math.*, vol. 36, 1935, p. 724-732).

47. Schoenberg (I. J.). — On certain metric spaces arising from euclidean spaces by a change of metric and their imbedding in Hilbert space (*Annals of Math.*, vol. 38, 1937, p. 787-793).

48. Schoenberg (I. J.). — Metric spaces and positive definite functions (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 44, 1938, p. 522-536).

49. Schoenberg (I. J.). — Metric spaces and completely monotone functions (*Annals of Math.*, vol. 39, 1938, p. 811-841).

50. Schœnberg (I. J.). — Positive definite functions on spheres (*Duke Math. Journ.*, vol. 9, p. 96-108).

51. Shohat (J. A.) and Tamarkin (J. D.). — The problem of moments (*Amer. Math. Soc.*, New York, 1943).

52. Slutsky (E.). — Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la décomposition des fonctions aléatoires stationnaires en composantes (*Colloque consacré à la théorie des probabilités*, t. V, Paris, 1938, p. 33-55).

53. Tamarkin (J. D.). — On a theorem of S. Bernstein-Widder (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 33, 1931, p. 893-896).

54. Ville (J.). — Sur les processus stochastiques stationnaires analytiques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 217, 1943, p. 101-103).

55. Weil (A.). — L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications (*Actualités Sci. et industr.*, n° 869, Paris, 1940).

56. Widder (D. V.). — Necessary and sufficient conditions for the representation of a function as a Laplace integral (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 33, 1931, p. 851-892).

57. Widder (D. V.). — The inversion of the Laplace integral and the related moment problem (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, 1934, p. 107-200).

58. Widder (D. V.). — *The Laplace transform* (Princeton, 1941).

59. Wintner (A.). — *The Fourier transforms of probability distributions* (Baltimore, 1947).

60. Wold (H.). — *A study in the analysis of stationary time series* (Uppsala, 1938)

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

INTRODUCTION I

PREMIÈRE PARTIE.

Fonctions définies-positives.

1. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit définie-positive 3
2. Propriétés des fonctions définies-positives 6
3. Fonction caractéristique d'une loi de probabilité 11
4. Fonctions définies-positives réelles 14
5. Processus stochastiques stationnaires 17
6. Généralisations des fonctions définies-positives 21
7. Caractérisation métrique des ensembles de l'espace de Hilbert 25
8. Lois de probabilités stables 27

SECONDE PARTIE.

Fonctions complètement monotones.

9. Définition et représentation intégrale des fonctions complètement monotones 29
10. Détermination d'une fonction complètement monotone 34
11. Intervention de fonctions complètement monotones dans l'étude des processus stochastiques discontinus 37
12. Un problème concernant l'espace de Hilbert et l'intégrale indéfinie d'une fonction complètement monotone 40

BIBLIOGRAPHIE 45

133807 Imp. GAUTHIER-VILLARS. 55, quai des Grands-Augustins, Paris (6e).