Mémorial des sciences mathématiques

C. Gattegno
A. Ostrowski

Représentation conforme à la frontière ; domaines généraux

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 109 (1949)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1949__109__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CIX

Représentation conforme à la frontière; domaines généraux

Par C. GATTEGNO
Maître de Conférences à l'Université de Londres

et A. OSTROWSKI
Professeur à l'Université de Bâle

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1949

REPRÉSENTATION CONFORME A LA FRONTIÈRE
DOMAINES GÉNÉRAUX

PAR

C. GATTEGNO
Maître de Conférences à l'Université de Londres.

ET

A. OSTROWSKI
Professeur à l'Université de Bâle.

AVANT-PROPOS [1].

Dans cet exposé, nous essayons de rassembler, en les ordonnant, les résultats acquis, dans ces dernières décades, sur le comportement de la transformation conforme à la frontière, résultats dont il n'est pas nécessaire de souligner l'importance.

Nous avons surtout insisté sur le côté géométrique du problème, les recherches en question introduisant des paramètres qui précisent, d'un point de vue souvent nouveau, le comportement métrique des domaines.

Le caractère systématique de notre exposé nous a obligés, quelquefois, à modifier la terminologie, lorsqu'elle ne pouvait être maintenue dans une exposition générale. Nous nous en excusons auprès des Auteurs.

---

(1) Ce manuscrit a été envoyé à la direction du *Mémorial des Sciences Mathématiques* en 1939. Il ne nous a pas été possible de tenir compte de toutes les publications parues depuis. Nous nous excusons auprès des Auteurs.

Le grand nombre de travaux sur ce sujet ne nous a pas permis de nous limiter au cadre habituel d'un fascicule du *Mémorial*; nous avons dû répartir la matière en deux fascicules, dont le présent concerne les domaines à frontière générale et la théorie de la mesure conforme et le second intitulé : *Représentation conforme à la frontière; domaines particuliers*, contient les recherches sur les domaines à frontières particularisées.

Qu'il nous soit permis de remercier M. Villat d'avoir consenti de bonne grâce à cette division de notre exposé.

ABRÉVIATIONS ET SYMBOLES (1).

ac. : accessible.

C-U : cercle-unité.

F(D) : frontière du domaine D.

H_z : demi-plan $\mathfrak{R} z > 0$.

K-U : circonférence-unité.

point i. : point idéal.

point iac. : point idéal accessible.

TC : transformation conforme.

$z \to z_0$: z tend vers z_0.

$z \succ\!\!\to z_0$: z tend *angulairement* vers z_0, c'est-à-dire en restant dans un angle de sommet en z_0 contenu dans un angle de sommet en z_0 entièrement intérieur au domaine.

$\dot{z} \supset\!\!\to z_0$: z tend *totalement* vers z_0, c'est-à-dire sans d'autres restrictions que celle de rester à l'intérieur d'un domaine donné.

$z \downarrow (\uparrow) z_0$: z décroît (croît) monotonement vers z_0.

$f \quad \to f_0$: f tend presque partout vers f_0.

E-F : élément-frontière.

(1) Les renvois à cette Table se feront à l'aide des lettres A et S.

CHAPITRE I.

ÉTUDE TOPOLOGIQUE DE LA FRONTIÈRE.

1. **Notations.** — Les domaines que nous aurons à considérer, au cours de cet exposé, sont des domaines simplement connexes, situés dans le plan de la variable complexe. Leur frontière aura plus d'un point et par suite, sera un continu. De plus nous supposerons que le point de l'infini n'est pas intérieur au domaine.

Les transformations topologiques que nous allons considérer, dans ce chapitre, seront des transformations continues biunivoques de l'intérieur du domaine en question et ne seront pas supposées être nécessairement conformes.

Par D_z (D_ζ, etc.), nous désignerons un domaine simplement connexe dans le plan de la variable z (ζ, etc.), représentant par C_z un cercle et par K_z sa périphérie, C-U désignera l'intérieur du cercle-unité, K-U sa périphérie, et H_z le demi-plan $\mathfrak{R} z > 0$ du plan des z.

Par $F(D)$ nous représenterons la frontière de D et nous appellerons *région*, l'ensemble $D + F(D)$.

Il est, quelquefois, plus indiqué d'étudier directement la correspondance entre deux domaines, sans passer par l'intermédiaire de C-U ou de H_z, comme c'est, par exemple, le cas dans l'étude de la conformité relative. Nous supposerons alors, que l'un des domaines se trouve dans le plan des z, la correspondance étant effectuée par les fonctions continues

$$z = f(\zeta), \qquad \zeta = \varphi(z).$$

Deux notions sont très importantes pour l'étude topologique des frontières :

1° *L'entaille* (Einschnitt) : qui est une ligne de Jordan simple contenant ses extrémités, dont tous les points sont intérieurs à D, sauf une extrémité qui est un point de $F(D)$.

2° *La transversale* (Querschnitt) : qui est une ligne simple de Jordan contenant ses extrémités, dont tous les points sont intérieurs à D, sauf les deux extrémités qui sont situés sur F(D). Si ces deux points coïncident géométriquement, nous conserverons à la ligne sa dénomination, lorsque l'intérieur (et l'extérieur) de la ligne fermée qu'elle forme contient d'autres points de F(D).

Ces deux notions définies comme nous venons de le faire, ne sont pas invariantes vis-à-vis des transformations topologiques.

J. Ferrand [4] introduit un invariant topologique, la *séparatrice*, dont les transversales sont un cas particulier, et démontre que les propriétés fondamentales des transversales dont on a besoin pour l'étude topologique de la frontière appartiennent aux séparatrices.

2. Les difficultés du problème. — De la correspondance biunivoque des intérieurs de deux domaines D_z et D_ζ il ne résulte pas une correspondance biunivoque ponctuelle des frontières : soient $\{\zeta_n\}$ et $\{z_n\}$ deux suites de points intérieurs correspondants. De $\zeta_n \to \zeta$ il s'ensuit, si ζ est intérieur à D_ζ, que $z_n \to z$, où z est intérieur à D_z et est l'image de ζ. Il n'en est plus en général ainsi lorsque ζ se trouve sur $F(D_\zeta)$. Alors, aucun point limite de $\{z_n\}$ n'est intérieur à D_z, mais un fait nouveau peut se produire : l'ensemble des points-limites de $\{z_n\}$ peut contenir plus d'un point de $F(D_z)$ et même avoir la puissance du continu.

La correspondance ponctuelle entre D_z et D_ζ cesse, en général, d'être biunivoque à la frontière. La correspondance de $F(D_z)$ et $F(D_\zeta)$ devient biunivoque si l'on substitue aux points certains ensembles de points-frontières, constitués d'intervalles d'*éléments-frontière*, dont la théorie sera esquissée dans les numéros suivants.

La définition des éléments-frontière constitue un progrès très important dans cette théorie, dû à Carathéodory [1] et que Kœbe [2] et Kerékjártó [1], p. 108-120, ont développé.

3. Les points-frontières accessibles et les points-frontières idéaux. — Un point-frontière est dit *accessible*, ou plus exactement accessible suivant une entaille L s'il est extrémité de cette entaille. Dans la suite nous emploierons l'abréviation ac. pour le mot accessible.

Il est commode de donner à toutes les entailles de D une même origine O. Deux entailles L et L' seront dites *équivalentes* si :

1° Elles aboutissent en un même point géométrique de F(D);

2° Si les domaines qu'elles comprennent entre elles ne contiennent aucun point-frontière.

Il s'ensuit, immédiatement, que deux entailles équivalentes à une même troisième, sont équivalentes entre elles et que deux entailles peuvent toujours être remplacées par deux autres qui leur soient équivalentes et qui, excepté O, n'ont pas de point commun à l'intérieur de D.

Par *classe d'équivalence d'entailles*, nous entendons l'ensemble de toutes les entailles de D, qui sont équivalentes entre elles. Si toutes les entailles aboutissant à un même point géométrique P de la frontière, forment une seule classe d'équivalence, P est dit point-frontière *simple* et formé d'un seul *point idéal.* Dans les autres cas, P est dit *multiple* et à chaque classe d'équivalence d'entailles aboutissant en P correspond un point idéal. On a donné des exemples de points multiples, sur lesquels sont concentrés des points idéaux en nombre infini à puissance du continu (Carathéodory [1]).

Il est évident que ces notions ne concernent que les points ac.

Si nous associons à chaque point-frontière idéal ac. (dorénavant nous écrirons point iac. pour point idéal ac.) une entaille, de manière que les entailles associées à deux points iac. distincts ne soient sécantes qu'en O; on voit que l'on peut définir deux ordres circulaires pour les points iac. suivant le sens de rotation autour de O.

L'ensemble (A) des points iac. de F(D) est dense en soi, dense sur F(D) (en ce sens que tout cercle de rayon ε centré en un point-frontière, en contient toujours une infinité), et possède sur F(D) la puissance du continu.

Nous dirons que F(D) contient un arc accessible (*arc ac.*) γ si tous les points de γ sont ac. d'un même côté de γ, les extrémités étant exclues.

4. Définition des éléments-frontière d'après Kœbe. — Comme pour l'ensemble des nombres rationnels, on peut définir, dans l'ensemble (A), des *coupures*.

Considérons une suite de couples emboîtés de points iac. $P_n P'_n$, tels que les portions de F(D) qui les portent, ne contiennent pas à leur intérieur, deux points iac. fixes. Cette suite est appelée une coupure dans (A). Deux suites de couples emboîtés de points iac.

déterminent, par définition, la même coupure si et seulement si chaque couple de l'une contient une infinité de couples de l'autre. Nous appellerons ces coupures : *éléments-frontière* (Randelement de Kœbe [2]) et nous utiliserons la notation E-F. Carathéodory [1] utilise la dénomination : *bout-premier* (Primende).

Soit γ_n une transversale qui joint P_n à P'_n. Nous appellerons *domaine contigu au couple* $P_n P'_n$ (et nous le désignerons par g_n) celui des deux domaines découpés par γ_n dans D, qui contient sur sa frontière les couples $P_{n+1} P'_{n+1}, \ldots$, de la suite.

Une suite de points intérieurs à D sera dite *converger* vers l'E-F défini par la suite $\{P_n P'_n\}$ si elle n'a qu'un nombre fini de ses points à l'extérieur de tout g_n. Soit L une ligne de Jordan intérieure à D, partant de O, et ne contenant pas son autre extrémité. Supposons que pour chaque g_n on puisse supprimer de L une portion connexe partant de O et telle que la portion restante soit complètement intérieure à g_n. Dans ces conditions L est dite *converger* ou *aboutir* à l'E-F défini par la suite $\{P_n P'_n\}$. L'ensemble limite de toutes les suites de points intérieurs à D, qui convergent vers cet E-F, forme, par définition, l'ensemble des points dont est constitué notre E-F.

L'ensemble (E) de tous les E-F d'un domaine D est de par sa définition même, lui aussi, *ordonné circulairement* et de plus, il est complet, en ce sens qu'à toute coupure dans (E) correspond un élément de (E). Il est dense en soi et possède la puissance du continu.

Soient E_1 et E_2 deux E-F distincts de D et désignons par I, l'ensemble des E-F de (E) qui suivent E_1 et précèdent E_2, et par I', celui des E-F de (E) qui suivent E_2 et précèdent E_1, une fois fixé le sens de rotation autour de O. I et I' sont appelés *intervalles* d'E-F; ils sont fermés si E_1 et E_2 en font partie.

Un point-frontière est dit simple s'il n'appartient qu'à un seul E-F et multiple, si plusieurs E-F le contiennent; dans ce dernier cas il y a, concentrés en lui, autant de points idéaux simples, qu'il y a d'E-F qui le contiennent.

5. Description de la correspondance des F(D) à l'aide des E-F. — On peut établir, sans sortir de la topologie, une correspondance continue et biunivoque, entre un domaine D et C-U, telle qu'il en

résulte une correspondance biunivoque entre les E-F de D et les points de K-U (Kerékjártó [1], p. 106-120.)

Soient maintenant, D et D′ deux domaines simplement connexes et supposons qu'il existe entre eux une correspondance topologique. Par des transformations particuliéres de Kerékjártó, on passe à deux cercles C et C′ de circonférences K et K′. Il suffit alors de considérer les correspondances topologiques entre C et C′.

Dans une telle correspondance τ entre C et C′, on est amené à considérer, sur K et K′, des ensembles d'intervalles fermés séparés, I_n et I'_n, au plus dénombrables (mais qui peuvent être finis ou vides) et qui jouissent des propriétés suivantes : représentons I_n par un point idéal p_n et I'_n par le point idéal p'_n; p_n et p'_n sont dits *points généralisés*. Considérons les points de K et K′ non situés dans les I_n et I'_n, comme points idéaux simples, τ établit entre les points idéaux de K et K′ une correspondance biunivoque telle, qu'à chaque point généralisé de l'une, correspond un point simple de l'autre et que toute suite de points intérieurs à C, dont tous les points limites sont contenus dans I_n (qui converge vers le point généralisé p_n) a pour image une suite tendant vers le point simple correspondant de K′ et réciproquement.

Pour les domaines généraux, il en résulte une correspondance biunivoque entre les E-F et intervalles d'E-F de l'une et de l'autre. Si dans cette correspondance à un E-F contenant le point P iac., correspond un E-F contenant le point iac. P′, nous dirons que P et P′ se correspondent.

6. **Les E-F d'après Carathéodory.** — Une transversale t partage un domaine D simplement connexe, en deux autres D′ et D″, également simplement connexes. Nous dirons de trois transversales t, t', t'' que *t sépare* t' de t'', si t' est dans D′ et t'' dans D″ ou inversement.

Soit $\{t_n\}$ une suite de transversales, elle est dite *suite fondamentale* si :

1° Deux quelconques des transversales n'ont pas de point commun (y compris leurs extrémités considérées comme points frontières i.);

2° Si $t_k (k > 0)$ sépare t_{k-1} de t_{k+1};

3° Si elles convergent vers un même point (la convergence étant entendue au sens habituel).

Soit D_n celui des deux domaines que détermine t_n dans D et qui contient t_{n+1} ; D_{n+1} est toujours un domaine partiel de D_n. Deux suites fondamentales de transversales $\{t_n\}$ et $\{t'_n\}$ seront dites *équivalentes*, si tout domaine D_k correspondant à t_k contient toutes les transversales t'_l, sauf un nombre fini d'entre elles et réciproquement.

D'après la définition d'une suite fondamentale $\{t_n\}$, il résulte que les couples des extrémités $P_n P'_n$ de t_n, sont des couples emboîtés de points iac. distincts ne contenant pas à leur intérieur plus d'un point ac. fixe. Ils définissent donc un E-F, E. Les domaines D_n sont les domaines contigus aux couples P_n P'_n, et toute suite $\{p_n\}$, de points intérieurs à D converge vers E, si tous les p_n à partir d'un certain n, restent à l'intérieur de chaque D_m.

Carathéodory [1] définit un E-F comme ensemble limite des domaines D_n, correspondant à une suite fondamentale de transversales, il montre, de plus, qu'on peut se borner pour le définir à une suite fondamentale de transversales circulaires concentriques, le point vers lequel doit tendre la suite fondamentale, étant leur centre commun.

Deux suites fondamentales définissent un même E-F, si et seulement si elles sont équivalentes.

L'ensemble des points géométriques communs aux frontières de tous les domaines D_n déterminés par une suite fondamentale de transversales, est précisément l'ensemble des points dont est formé l'E — F, défini par la suite en question.

7. Les E-F de différentes espèces. Exemples. — Soient E un E-F de D, L un arc simple de Jordan convergeant vers E. Soit $\mathfrak{C}_L$ l'ensemble des points limites de L. $\mathfrak{C}_L$ est toujours une partie de E. Il existe toujours des points de E appartenant à $\mathfrak{C}_L$ pour tout L convergeant vers E. Nous les appellerons *points principaux* (Hauptpunkte) de E, les autres points de E étant appelés *points accessoires* (Nebenpunkte).

Les points principaux d'un E-F sont points limites d'au moins une suite fondamentale de transversales définissant cet élément. Carathéodory prend cette propriété comme *définition* des points principaux [1].

Si E contient un point iac. P, P est le *seul* point principal de E. Dans le cas contraire, il existe un *continu* de points principaux.

Quant aux points accessoires, ou bien ils manquent complètement ou bien ils sont en nombre infini à puissance du continu. Tous les quatre cas sont possibles, et nous distinguerons des E-F de quatre espèces (Carathéodory [1]).

E est dit de *première espèce* s'il contient un point iac. et pas de points accessoires; de *seconde espèce* s'il contient un point iac. et une infinité de points accessoires; de *troisième espèce* lorsque les points principaux sont non ac. et qu'il n'y a pas de points accessoires; enfin de *quatrième espèce* s'il y a une infinité de points accessoires à côté d'un continu de points principaux.

On peut très aisément trouver des exemples de domaines ayant des E-F des quatre types, nous le ferons à l'aide d'un carré et d'entailles rectilignes.

Soit C_1 le carré OPQR de côté unité, O étant l'origine des coordonnées, P sur l'axe positif réel, R sur l'axe positif imaginaire.

1° Tous les points de C_1 sont iac. et C_1 n'a que des E-F de première espèce;

2° Soient A_1, A_2, ... les points de l'axe réel d'abscisses $\frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) et menons de ces points les parallèles A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., à l'axe imaginaire et de longueur $1/2$. Nous formons ainsi un domaine simplement connexe C_2. Les entailles A_iB_i tendent vers OB (B milieu de OR). B est un point iac., mais tous les autres points de OB ne le sont pas, ce sont des points accessoires. Donc, C_2 contient un élément-frontière de seconde espèce en OB.

3° Menons les diagonales OQ et PR, prolongeons A_iB_i jusqu'à leur rencontre L_i avec PR. Des points M_1, M_2, ... sur RQ et d'abscisses $\frac{\frac{3}{2}}{2^n}$ ($n = 1, 2, \ldots$), menons les parallèles à OR arrêtées en N_1, N_2, ... sur OQ. Nous engendrons ainsi un domaine simplement connexe C_3. Les segments A_iL_i et M_iN_i tendent vers OR; tous les points de OR sont des points principaux non-ac. Le domaine C_3 contient en OR un E-F de troisième espèce.

4° Reprenons nos entailles de 2° et les points M_1, M_2, ... Menons les segments M_iT_i parallèles à OR et de longueur constante $\frac{1}{2-\delta}$

$\left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$. Le domaine simplement connexe C_4 ainsi formé contient en OR un E-F de quatrième espèce. Le segment $\left\langle i\left(\frac{1}{2} - \delta\right), \frac{i}{2}\right\rangle$ est formé de points principaux non-ac., les points restants étant des points accessoires ([2]).

Désignons par $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$ les ensembles d'E-F des quatre espèces, contenus dans F(D). Carathéodory [1] a construit un domaine tel que dans chaque intervalle, $\mathfrak{E}_2$ ait la puissance du continu. Il a de plus montré que pour tout domaine, $\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$ a la puissance du continu dans chaque intervalle d'E-F.

Si $\mathfrak{E}_3 + \mathfrak{E}_4$ est vide, alors $\mathfrak{E}_1$ a la puissance du continu dans chaque intervalle (Urysohn [1] et Weniaminoff [1]).

Notons encore la Note de Frankl [1], dans laquelle l'auteur cherche à exposer une méthode de construction d'un domaine ayant les propriétés suivantes : Dans F(D) $\mathfrak{E}_1$ est vide; le diamètre de chaque E-F est au moins égal à $\frac{1}{2}$ et deux E-F distincts ne possèdent jamais de points communs.

Le problème qui reste à résoudre se rapporte surtout à l'existence et à la puissance de $\mathfrak{E}_3$ et $\mathfrak{E}_4$ dans chaque intervalle.

D'après Gross [1], p. 23, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de points fermé M puisse être un E-F d'un domaine convenable, est que M forme toute la frontière d'un domaine simplement connexe G (qui pourrait contenir l'∞ à son intérieur). On peut aussi caractériser les sous-ensembles de M qui sont dans un domaine convenable des ensembles totaux de points principaux (Gross [1], p. 23-25, *cf.* aussi Carathéodory [1], p. 355-361).

CHAPITRE II.

LES LEMMES GÉNÉRAUX.

8. Principe de symétrie et valeurs limites sur un arc frontière. — Dans ce numéro D désignera un domaine simplement connexe dont

([2]) On peut déduire des figures données dans Montel [2] des exemples plus généraux.

la frontière contiendra un arc de Jordan $\widehat{AB} = S$, comme arc ac. et $f(z)$ sera une fonction holomorphe dans D.

I. Théorème de Schwarz (principe des images). — S *étant un segment de droite, si* $f(z)$ *reste holomorphe sur* S *et y prend des valeurs réelles, elle peut être prolongée au travers de* S *dans le domaine* D′, *symétrique de* D *par rapport à* S *et prend en deux points symétriques des valeurs conjuguées.*

Plus généralement

II. S *étant un arc de cercle, si, lorsque* z *est sur* S, *les valeurs de* $f(z)$ *restent sur un arc de cercle* σ, $f(z)$ *peut être prolongée au travers de* S *dans le domaine* D′ *symétrique de* D *par rapport à* S *et les valeurs de* $f(z)$ *en deux points de* $D + D'$ *symétriques par rapport à* S, *sont symétriques par rapport à* σ.

Il est remarquable que dans ces énoncés, on puisse remplacer l'hypothèse d'holomorphie sur S par celle de continuité, l'holomorphie étant conséquence des hypothèses ainsi élargies; ce fait trouve de nombreuses applications dans l'étude du comportement à la frontière de la représentation conforme.

III. S *étant un segment de droite,* $f(z)$ *reste holomorphe à l'intérieur de* S, *si, lorsque* z *tend vers les points de* S *en restant à l'intérieur de* D, *les valeurs de* $f(z)$ *tendent uniformément au voisinage de chaque point intérieur de* S, *vers une suite de valeurs réelles.*

On peut, sans altérer la conclusion de cet énoncé, remplacer les hypothèses d'existence et de réalité des valeurs limites de $f(z)$ sur S, par la condition (explicitement beaucoup moins restrictive)

$$\lim \mathfrak{I} f(z) = 0,$$

z tendant, vers tout point intérieur à S, uniformément au voisinage de chaque point intérieur de S.

Partant de cette remarque, on peut étendre le théorème III dans deux directions :

1° En remplaçant le segment S par un arc analytique régulier $z = \varphi(t)$, $0 < t < 1$, $\varphi(t)$ étant analytique dans $(0, 1)$;

2° En supposant que $\mathfrak{J} f(z)$ atteint uniformément, pour chaque point intérieur à S, une valeur limite, la suite des valeurs sur S formant une fonction holomorphe de t dans $(0, 1)$.

Ces généralisations s'obtiennent directement (Painlevé [2], 1887, p. 27-28), ou bien, d'après Schwarz, comme conséquences de théorèmes analogues à I, II, III, relatifs à la régularité des fonctions harmoniques [celle à considérer ici étant $\mathfrak{J} f(z)$] (*Cf.* A. Harnack, [1], 1887, p. 133).

Signalons encore un résultat de Kœbe, suivant lequel la symétrie, par rapport à une ligne fermée simple de Jordan, définie convenablement, n'est possible que si cette ligne est analytique. (Kœbe, [2], p. 219).

De ces faits, on peut conclure

IV. S *étant un arc de cercle, si* $f(z)$ *tend uniformément vers zéro lorsque* z *tend vers les points de* S, $f(z)$ *est* $\equiv 0$ *dans* D (3).

On peut en déduire en particulier, qu'une fonction holomorphe dans D et continue sur S, est univoquement déterminée par ses valeurs sur S. Carleman [2] a donné une formule qui permet le calcul de $f(\zeta)$, en un point ζ intérieur à D, au moyen des valeurs de $f(z)$ sur S

$$f(\zeta) = \lim_{k \to \infty} \frac{e^{-k}}{2\pi i} \int_S \frac{f(z)^{\exp\left(\mathrm{R}\left(\frac{z-\zeta_0}{\zeta-\zeta_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)}}{z - \zeta_0}\, dz,$$

où ζ_0 est un point convenable intérieur à D, k un nombre positif et $\alpha\pi$ l'angle sous lequel on voit S de ζ_0.

On doit à Kœbe [1], [2] la généralisation suivante de IV :

V. Lemme de Koebe. — *Si* $f(z)$ *est uniformément bornée au voisinage de* S, *elle est identiquement nulle dans* D, *s'il existe une suite* λ_n *de lignes simples convergeant vers* S, *telles que les valeurs maxima* M_n *de* $|f(z)|$ *sur* λ_n *tendent vers* 0 *lorsque* $n \to \infty$.

---

(3) Ce théorème est quelquefois attribué à Schwarz, avec renvoi à l'un de ses mémoires. Mais, à la référence on ne trouve que l'énoncé du principe de symétrie. Le théorème IV ci-dessus en est une conséquence immédiate, mais encore, il fallait le trouver.

9. **Valeurs limites en un point frontière.** — On doit à Lindeloef [3], p. 9-12, les deux propositions suivantes qu'on emploie à chaque pas dans la théorie qui nous occupe.

I. *Soit $f(z)$ holomorphe dans le domaine* D *du numéro précédent. Soit a un point intérieur à* S, *désignons par* S_1 *et* S_2 *les parties de* S *qui se raccordent en a. Supposons que $f(z)$ reste continue sur* S_1 *et* S_2 *et tende respectivement vers ω_1 et ω_2 lorsque z tend vers a suivant* S_1 *et* S_2. *Alors, ou bien $\omega_1 = \omega_2$ et $f(z)$ tend vers ω_1 lorsque z tend vers a par l'intérieur de* D, *ou bien $f(z)$ ne reste pas bornée dans* D *au voisinage de a et même, prend, dans chaque voisinage de a dans* D *toute valeur finie, à l'exception d'une seule au plus.*

II. *Soit $f(z)$ holomorphe et bornée à l'intérieur de la demi-bande* B, $\mathfrak{R}z > a$, $\varphi_1 < \mathfrak{I}z < \varphi_2$. *Supposons que $f(z)$ tende vers une valeur déterminée ω lorsque z tend vers l'infini suivant une ligne de Jordan* L *située dans* B, *alors $f(z)$ tend uniformément vers ω dans la demi-bande* B_ε, $\mathfrak{R}z > a$, $\varphi_1 + \varepsilon < \mathfrak{I}z < \varphi_2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. *Si* L *est le rayon* $\mathfrak{I}z = \varphi_1$ (*ou* $\mathfrak{I}z = \varphi_2$), *$f(z)$ restant continu sur* L. *alors $f(z)$ tend uniformément vers ω dans* $\mathfrak{R}z > a$, $\varphi_1 \leqq \mathfrak{I}z \leqq \varphi_2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (*où dans* $\mathfrak{R}z > a$, $\varphi_1 + \varepsilon \leqq \mathfrak{I}z \leqq \varphi_2$, $\varepsilon > 0$).

Dans le cas où L est un rayon $\mathfrak{I}z = \varphi_0$, $\varphi_1 < \varphi_0 < \varphi_2$, ce théorème avait été démontré déjà en 1912 par Montel qui d'ailleurs utilisait sur $f(z)$, une hypothèse beaucoup moins restrictive à savoir : que $f(z)$ admet dans B deux valeurs exceptionnelles. On peut démontrer une extention correspondante du théorème II, en utilisant la transformation classique par la fonction modulaire ou encore, en faisant usage du théorème de Schottky.

Il existe un grand nombre de recherches sur les valeurs limites d'une fonction holomorphe suivant les rayons dans les demi-bandes (*Cf.* Hardy-Ingham-Pólya [1]), mais elles n'ont pas trouvé, jusqu'à ce jour, d'application dans la théorie de la représentation conforme.

10. **Valeurs limites des fonctions harmoniques.** — Il en est autrement des théorèmes sur les limites des fonctions harmoniques dans les demi-bandes, dont nous allons nous occuper maintenant.

Nous désignerons, dans ce numéro, par $\Phi(z)$, $z = x + iy$ une fonction harmonique et régulière dans la demi-bande B, $y' < y < y''$, $x > x_0$ telle que sa valeur dans B reste inférieure à une borne K_δ, dans chaque demi-bande B_δ

$$y' + \delta < y < y'' - \delta; \qquad x > x_0 + \delta; \qquad \delta > 0.$$

On a alors les résultats suivants :

I. *Supposons que* $\Phi(z)$ *tende vers une limite* ω *lorsque* z *tend vers l'infini sur un arc de Jordan* M *situé dans* B *et qui admet à l'infini l'asymptote* $y = y_0$, $y' < y_0 < y''$. $\Phi(z)$ *possède alors, la même limite le long de tout arc de Jordan* M' *ayant à l'infini la même asymptote*. (Ostrowski [3], p. 392-393.)

I'. *La conclusion de* I *subsiste si* M *coïncide avec un des rayons* $y = y'$ *ou* $y = y''$, *lorsque* $\Phi(z)$ *reste bornée dans* B *et continue sur* M. (Ostrowski [3], p. 392-393.)

I''. *Si dans* I, M' *est situé entre* M *et le rayon* $y = y'$, *la conclusion de* I *subsiste si l'on suppose seulement que* $\Phi(z)$ *est bornée et harmonique dans la portion de* B *comprise entre* M *et* $y = y'$. *L'énoncé symétrique, relatif à* $y = y''$ *est évidemment vrai également*. (Ostrowski [3], p. 393.)

II. *Soient* M_1 *et* M_2 *deux rayons* $y = y_1$ *et* $y = y_2$ *situés dans* B. *Si* $\Phi(z)$ *possède sur* M_1 *et* M_2 *deux valeurs limites* ψ_1 *et* ψ_2, *alors la différence*

$$\Phi(z) - \left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{y_2 - y_1}(y - y_1) + \psi_1\right)$$

tend vers zéro lorsque z *tend vers l'infini en restant dans* B_δ, *pour tout* $\delta > 0$. (Ostrowski [3], p. 393-398.)

II'. *Supposons, en plus des hypothèses de* II, *que* $\Phi(z)$ *soit bornée dans* B *et soit* M' *un arc de Jordan contenu dans* B *allant à l'infini et y possédant pour asymptote un des rayons extrêmes* $y = y'$ (*ou* $y = y''$). *Si* $\Phi(z)$ *possède une limite le long de* M', *la valeur de cette limite s'obtient en remplaçant* y *par* y' (*ou* y'') *dans*

$$\frac{\psi_1 - \psi_2}{y_1 - y_2}(y - y_1) + \psi_1.$$

Si $\psi_1 = \psi_2$ *et si* M″ *est un arc de Jordan situé dans* B, *allant à l'infini et le long duquel* $\Phi(z)$ *possède une limite, cette limite est égale à* ψ_1. (Ostrowski [3], p. 393-398.)

III. *Dans les hypothèses de* II, *on a pour* $x \uparrow \infty$ (4)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \to 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \to \frac{\psi_1 - \psi_2}{y_1 - y_2}$$

dans chaque B_d, $d > 0$. (Ostrowski [3], p. 397.)

IV. *Si* $\Phi(z)$ *a dans* B *une oscillation finie* c, *on a pour une fonction* $f(z)$, *holomorphe dans* B *et telle que* $\mathfrak{J}f(z) = \Phi(z)$ *et pour tout point* z *de* B *distant de* F(B) *de* t

$$|f'(z)| \leq \frac{2c}{t}$$

(Lindelœf [1], p. 15. *Cf.* aussi Kœbe [3], p. 59 et Jensen [1], p. 28).

V. *Si* $\Phi(z)$ *reste continue sur la frontière de* B, *bornée en module dans* B *et si* $\Phi(x+iy')$, $\Phi(x+iy'')$ *convergent vers la même constante lorsque* $x \uparrow \infty$, *les dérivées partielles* $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ *de* $\Phi(z)$ *tendent vers zéro avec* $x \uparrow \infty$ *dans chaque* B_δ.

Ce théorème est équivalent au théorème suivant de Lichtenstein [1] :

Si une fonction $\Psi(w)$, $w = u + iv$, *est harmonique dans* C-U, *y est représentable par l'intégrale de Poisson et possède des valeurs limites continues en un point* α *de* K-U, *on a*

$$(w - \alpha)\Psi'_u \to 0, \qquad (w - \alpha)\Psi'_v \to 0,$$

lorsque $w \rightarrowtail \alpha$ (5) *de l'intérieur de* C-U.

Signalons enfin les résultats de Visser [2], p. 28-35, dont l'auteur tire quelques conséquences sur le comportement à la frontière de la représentation conforme.

11. Le lemme de Julia et les théorèmes qui s'y rattachent. — Dans les recherches sur la représentation conforme, un lemme remarquable,

---

(4) *Voir* A et S.
(5) *Voir* A et S.

autant par la simplicité de son énoncé, que par l'aisance de sa démonstration, a rendu de très grands services, c'est le *lemme* dit *de Schwarz* ([6]) que nous donnerons sous la forme générale obtenue par Lindelœf [1] et qui se déduit de l'énoncé classique par deux transformations linéaires.

I. *Soit* $f(z)$ *holomorphe et telle que* $|f(z)| \leqq M$ *dans* C-U, *alors pour tout* z *et* z_0 *dans* C-U *on a*

$$\left|\frac{M^2(f(z)-f(z_0))}{M^2-\overline{f(z_0)}f(z)}\right| \leqq M\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|. \tag{1}$$

Partant de cette inégalité et effectuant des transformations conformes appropriées, on a déduit du lemme I un grand nombre d'autres inégalités qu'on trouve surtout dans les mémoires de Jensen [1], Kœbe [3] et Lindelœf [1] (on y trouve aussi une bibliographie complète).

Dans certaines circonstances, on peut faire tendre dans la formule (1), z_0 vers des points de K-U. Ce passage à la limite a été effectué, pour la première fois, par Julia [1], qui a obtenu, en substance, le résultat suivant :

II. Lemme de Julia. — *Soit* $f(z)$ *holomorphe dans* C-U *et telle que* $|f(z)| < 1$ *pour* $|z| < 1$. *Supposons que* $f(z)$ *reste holomorphe en* $z = 1$ *et que l'on ait* $f(1) = 1$ *et* $f'(1) = \alpha$. *Alors*, α *est réel et positif et l'on a pour tout* z *intérieur à* C-U

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leqq \alpha\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}. \tag{2}$$

Depuis la première démonstration de Julia, bien d'autres en ont été proposées qui sont plus directes et qui en réduisent considérablement les hypothèses. (R. Nevanlinna [1], K. Lœwner dans Bieberbach [1], p. 125, Carathéodory [3].)

On arrive à une intelligence complète des conditions dont dépend la conclusion du lemme de Julia, lorsqu'on a égard à l'important

([6]) Ce lemme a été donné par Schwarz, dans le cas particulier où $f(z)$ est univalente; l'énoncé général est dû à Carathéodory, la démonstration élémentaire que l'on trouve dans les Traités est due à E. Schmidt.

résultat suivant qui se trouve implicitement chez Wolff [1], 1926, et a été retrouvé en 1929 par Carathéodory [3] et indépendamment par Landau et Valiron dans un travail commun [1].

III. *Soit* $f(z)$ *holomorphe dans* C-U, *telle que* $|f(z)| < 1$ *pour* $|z| < 1$. *Alors si* $z \succ\!\!\to 1$ *de l'intérieur de* C-U, *la limite*

$$\lim_{z \succ\!\to 1} \frac{1-f(z)}{1-z} = \alpha$$

existe toujours, avec α *fini ou infini.* $\alpha = 0$ *si et seulement si* $f(z)$ *est identique à une constante de module unité. Si* α *est fini* $\neq 0$, α *est positif et l'on a*

$$\lim_{z \succ\!\to 1} f'(z) = \alpha.$$

De plus, on a pour z *réel et* $z \uparrow 1$

$$\lim_{z \uparrow 1} \frac{1-|f(z)|}{1-z} = \lim_{z \uparrow 1} \frac{|1-f(z)|}{1-z} = \alpha.$$

Si l'on suppose dans III, $f(0) = 0$, on a $\alpha \geqq 1$, l'égalité n'étant possible que pour $f(z) = e^{i\theta} z$. Cette relation peut être précisée, si l'on suppose $f'(0)$ donné, ou que $f(z)$ ne prend pas certaines valeurs dans C-U. (Unkelbach [2], [3].)

Pour la constante α, la limitation suivante est parfois utile :

III'. *Si, sous les hypothèses de* III, *on a pour une suite de points* z_n *de* C-U

$$z_n \to 1, \qquad f(z_n) \to 1, \qquad \frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|} \to \alpha_0,$$

la constante α *de* III *vérifiera l'inégalité* $\alpha \leqq \alpha_0$. (Implicitement dans Carathéodory [3], *voir* Valiron [2], p. 109-110, et Visser [3], p. 105-106.)

Utilisant le théorème III, on peut donner du lemme de Julia l'énoncé suivant qui contient le plus petit nombre d'hypothèses :

IV. *Si dans les hypothèses de* III, α *est fini et* $\neq 0$, (2) *en résulte.* (Carathéodory [3] et Julia [1].)

Pour le demi-plan l'énoncé de III est particulièrement simple.

V. *Soit* $f(z)$ *holomorphe dans* H_z *et telle que* $\mathfrak{R}f(z) > 0$. *Si* $z \succ\!\!\rightarrow \infty$, *alors* $\frac{f(z)}{z}$ *et* $f'(z)$ *convergent vers la même constante réelle* c, *finie et égale à*

$$\operatorname{Inf} \frac{\mathfrak{R}f(z)}{\mathfrak{R}z}$$

dans le demi-plan (Landau et Valiron [1]).

Si dans les hypothèses de V, $f(z)$ est réel sur l'axe réel et $c = 0$, Wolff [3] démontre que $\frac{f(z)\sqrt{\mathfrak{R}z}}{z\sqrt{\mathfrak{R}f(z)}}$ tend vers zéro si $z \rightarrow \infty$, dans H_z.

La constante α de II et la constante c de V sont respectivement appelées *dérivées angulaires* de $f(z)$ en $z = 1$ et $z = \infty$.

Wolff [3], 1930, et Visser [1], 1932, montrent que le théorème III n'est vrai que si l'on se borne à la convergence angulaire.

D'après Valiron [1] la fonction $f(z)$ de V est univalente dans un domaine contenu dans H_z et contenant des angles d'ouverture aussi proche de π que l'on veut. Ostrowski tire ce résultat de la relation suivante : $\frac{f(z)-f(z')}{z-z'} \rightarrow c$, lorsque z et z', ou l'un de ces deux points, tendent vers l'infini en restant dans l'angle $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

Mentionnons encore, ici, une extension à l'espace du théorème de Wolff-Carathéodory-Landau-Valiron, due à Warschawski [2].

Pour d'autres démonstrations de III et V *voir* Ahlfors [1], p. 29-30; Visser [2], p. 33-34; M. Riesz [1], 1931; R. Nevanlinna [4], [5], 1929; [3], 1936, p. 402-405.

CHAPITRE III.

LES THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LA CORRESPONDANCE DES FRONTIÈRES DANS LA TRANSFORMATION CONFORME. HYPOTHÈSES D'ORDRE ZÉRO.

12. Les théorèmes généraux sur la correspondance des E-F. — Dans la suite nous utiliserons la notation TC pour transformation conforme.

I. *Dans la* TC *de* D_ζ *sur* C-U *du plan des* z, *les systèmes d'*E-F *de* D_ζ *correspondent biunivoquement, dans l'ordre circulaire, aux points de* K-U.

II. *Dans la* TC *de* D_ζ *sur* D'_ζ *il y a une correspondance biunivoque entre les* E-F *des deux domaines, conservant l'ordre circulaire des* E F.

Il est évidemment une conséquence immédiate de I. Le théorème II a été établi pour la première fois par Carathéodory [1] en 1913. Pour prouver qu'à un E-F de D_ζ correspond un point de K-U déterminé, Carathéodory utilise le théorème de Fatou qui affirme qu'une fonction holomorphe et bornée dans C-U possède presque partout sur K-U des limites radiales. Pour démontrer que, réciproquement, à chaque point de K-U correspond un élément-frontière déterminé de D_ζ, Carathéodory, s'appuyant en dernière analyse sur le principe de symétrie, prouve qu'à une transversale circulaire de D_ζ correspond toujours une transversale de C-U, et la démonstration s'achève aisément.

Une deuxième démonstration, extrêmement simple et élémentaire en ce qu'elle n'utilise pas les notions de la théorie des fonctions de variables réelles, a été donnée par Kœbe [2] qui s'appuie d'une part, sur sa définition des E-F et d'autre part, sur les deux lemmes IV et V du n° 8.

Une troisième démonstration se trouve dans Lindelœf [3], 1915. Il y a lieu de citer encore : le mémoire de Montel [1], 1917, p. 37-48, qui contient les principes d'une quatrième démonstration de I; le mémoire de G. Faber [1], 1922, dans lequel une cinquième démonstration est donnée, utilisant les sommes finies approchant l'intégrale de Dirichlet; une sixième démonstration se trouve dans le livre de Montel [2], 1927, p. 103-118, et enfin une septième démonstration est due à Tsuji [1], 1930.

D'autre part, Osgood et Taylor [1] ont fait paraître en 1913, presque en même temps que Carathéodory publiait son mémoire [1], un mémoire où se trouvent des développements qui suffisent à établir qu'il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des points iac. de $F(D_\zeta)$ et un ensemble de points de K-U partout dense. Dans ce même mémoire sont contenus d'autres résultats qui se rapportent aux E-F de différentes espèces, bien que la notion d'E-F n'y figure pas explicitement.

J. Ferrand [3], [4] a donné une nouvelle démonstration de I utilisant, dans le premier mémoire, la méthode de Montel et un lemme de Cartan-Ahlfors, et dans le second un lemme sur les transversales circulaires.

Pourtant, jusqu'aujourd'hui on n'a pu démontrer le théorème suivant dû à Carathéodory [1], qu'en faisant usage du théorème de Fatou :

III. *Dans la* TC *de* D_ζ *sur* C-U, *l'ensemble des points de* K-U *qui correspondent aux points iac. de* $F(D_\zeta)$, *c'est-à-dire aux* E-F *de première et seconde espèce, a pour mesure* 2π. *Donc l'ensemble des points de* K-U *qui correspondent aux* E-F *de troisième et quatrième espèce, a la mesure nulle.*

Soient ζ_1, ζ_2 deux points de D_ζ ou $F(D_\zeta)$, on appelle *distance intérieure* en D_ζ de ζ_1 à ζ_2, la borne inférieure $\rho(\zeta_1, \zeta_2, D_\zeta)$ des longueurs des lignes polygonales ou rectifiables joignant ζ_1 à ζ_2 et situées dans D_ζ, sauf éventuellement ζ_1 et ζ_2. Cette notion introduite par Kœbe [2], p. 221, nous permet d'énoncer le théorème suivant qu'on lui doit également.

IV. $\varphi(\zeta)$ *est uniformément continue dans* D_ζ *relativement à* $\rho(\zeta_1, \zeta_2, D_\zeta)$; *c'est-à-dire qu'à chaque* $\varepsilon > 0$ *correspond un* $\delta(\varepsilon) > 0$, *tel que* $|\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| < \varepsilon$ *soit une conséquence de* $\rho < \delta$.

Le théorème IV est, comme l'indique Kœbe, en relation étroite avec un théorème qu'Osgood a énoncé sans démonstration en 1903 [1]. Le théorème d'Osgood et IV sont corollaires l'un de l'autre; celui de Kœbe trouve, d'ailleurs, une précision quantitative remarquable dans le théorème IV du numéro suivant, qui est dû à Lindelœf.

Pour la distance intérieure $\rho(\zeta_1, \zeta_2, D_\zeta)$ de deux points ζ_1, ζ_2 de D_ζ correspondant à deux points z_1 et z_2 de C-U, une borne inférieure ne dépendant que de l'aire $\mathfrak{A}_{D_\zeta}$ de D_ζ, supposée borné, se déduit de la relation (1) de Beurling que nous donnons au n° 22. On a l'inégalité

$$\rho^2(\zeta_1, \zeta_2, D_\zeta) \geq -\frac{\mathfrak{A}_{D_\zeta}}{\pi} \log \left| 1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 z_2} \right|^2 \right|.$$

La borne donnée est exacte, fait équivalent à la relation citée de Beurling. Cette inégalité ne rend pourtant pas compte du fait que deux points ζ_1, ζ_2 de D_ζ dont la distance peut être très grande, peuvent très bien correspondre à un couple de points z_1, z_2 très proches dans C-U, ce qui arrive si ζ_1, ζ_2 se trouvent dans une *poche* de D_ζ qui peut être très étendue, mais à *entrée* très étroite.

On doit à Lavrentieff une notion tenant compte de cette éventualité. Étant donnés deux points ζ_1, ζ_2 de D_ζ et un point ζ_0 qui sera maintenu fixe dans toute la déduction, il existe des transversales rectifiables de D_ζ séparant le couple ζ_1, ζ_2 de ζ_0. Désignons par $t(\zeta_1, \zeta_2)$ la borne inférieure des longueurs de toutes ces transversales; nous appellerons *proximité* de ζ_1, ζ_2 par rapport à D_ζ le nombre

$$p(\zeta_1, \zeta_2, D_\zeta) = \operatorname{Min}[t(\zeta_1, \zeta_2), \rho(\zeta_1, \zeta_2, D_\zeta)].$$

A l'aide de cette notion, un résultat de Lavrentieff [4] apporte une précision remarquable au théorème IV de Kœbe.

V. *Soit* $\zeta = \varphi(z)$ *une* TC *de* D_ζ *sur* C-U *telle que* $z = 0$ *corresponde à* ζ_0 *et soit* M *une borne supérieure des distances des points de* $F(D_\zeta)$ *à* ζ_0. *Alors, si* ζ_1, ζ_2 *sont deux points de* D_ζ *et* z_1 *et* z_2 *leurs images*,

$$|z_1 - z_2| < K_1 \sqrt{p(\zeta_1, \zeta_2, D_\zeta)},$$

$$p(\zeta_1, \zeta_2, D_\zeta) < K\left(\frac{M}{|\varphi'(0)|}\right) \left|\log|z_2 - z_1|\right|^{-\frac{1}{2}},$$

où K_1 *est une constante absolue, tandis que la fonction* K(M) *ne dépend que de son argument* (Lavrentieff [4]; *voir* également le théorème II du n° 13).

Les résultats suivants de Lavrentieff [3] appartiennent au même ordre d'idées :

V'. *Soit* D_ζ *un domaine simplement connexe et* ζ_1, ζ_2 *deux points de* D_ζ *séparés par une transversale rectiligne s de longueur* 2ε. *Supposons que la distance intérieure de* ζ_1 *et* ζ_2 *au milieu de s soit* $\geqq r + \varepsilon \geqq 2\varepsilon$. *Alors, si par la* TC *de* D_ζ *sur* C-U *à* ζ_1 *et* ζ_2 *correspondent l'origine et* z, *on a*

$$1 - |z| < \frac{2\varepsilon^2}{r}$$

(Lavrentieff [3], p. 202-203).

V''. *Supposons que la partie de* D_ζ *située dans le cercle* $|\zeta| \leqq \rho$

contient l'origine, est simplement connexe, et a un point-frontière à distance $\leqq \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \rho$, *de l'origine. Alors, dans la* TC *de* D_ζ *sur* C-U *par laquelle* $z = 0$ *passe en* $\zeta = 0$, *l'image de l'ensemble des points de* D_ζ *situés dans* $|\zeta| > \varepsilon$ *possède un diamètre* $< K\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}$, K *étant une constante absolue* (Lavrentieff [3], p. 203-204).

Dans la démonstration de II donnée par Carathéodory, on pourrait remplacer le théorème de Fatou par le théorème suivant de Fejér [1], 1914, que son auteur déduit de la théorie des séries de Fourier :

VI. *Si* $\zeta = f(z)$ *effectue la* TC *de* C-U *sur un domaine d'aire finie, le développement de* $f(z)$ *suivant les puissances de* z *converge presque partout sur* K-U.

Le lien entre ce théorème et celui de Fatou est établi par :

VII. *Sous les hypothèses de* VI, *le développement de* $f(z)$ *suivant les puissances de* z, *converge partout sur* K-U *uniformément, sur chaque ensemble de points où la limite* $\lim\limits_{r \nearrow 1} f(re^{i\varphi})$ *existe uniformément* (Landau [1], 1916).

Enfin, par le théorème suivant de De la Vallée-Poussin [1], 1930, on atteint le même but :

VIII. *L'image de chaque rayon de* C-U *dans* D_ζ *est de longueur finie, sauf pour un ensemble de rayons aboutissant sur* K-U *en un ensemble de mesure nulle.*

En supposant l'aire de D_ζ finie (ce qui est permis), l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{2\pi}\int_0^1 |f'(z)|^2 r\,dr\,d\theta$ est finie, il en résulte que $\int_0^1 |f'(z)|^2 r\,dr$ et à plus forte raison $\int_0^1 |f'(z)|\,dr$ est convergente pour presque chaque θ (De la Vallée-Poussin [1], p. 24-25) et l'on en tire la même conséquence que Carathéodory du théorème de Fatou.

VIII a été publié avec un énoncé plus général, par Tsuji [1], 1930, qui utilise, lui aussi, pour sa démonstration, l'intégrale de Dirichlet :

IX. *Dans les hypothèses de* VIII, *chaque point de* K-U, *sauf en un ensemble de mesure nulle, jouit de la propriété suivante : toute* *ligne convexe, aboutissant en ce point et n'y étant pas tangente à* K-U *a pour image une ligne rectifiable (de longueur finie).*

Ce résultat développe dans une certaine direction un théorème de Lavrentieff (III du n° 16).

Signalons enfin le théorème suivant de O. J. Farrel [1], 1932.

X. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $f(\zeta)$ *soit limite uniforme d'une série de polynomes sur* $D_\zeta + F(D_\zeta)$, *est que :* 1° *tout point de* $F(D_\zeta)$ *n'appartienne qu'à un* E-F; 2° *que* $F(D_\zeta)$ *soit aussi frontière d'un domaine infini.*

13. Compléments. Précisions quantitatives. — I. *Sous les hypothèses du numéro précédent, soient*

$$\zeta = f(z), \tag{1}$$

une fonction effectuant la TC *de* D_ζ *sur* C-U, *et* z_0 *un point de* K-U *correspondant par* (1) *d'un* E-F, E_0. *Soit* l *une ligne de Jordan aboutissant en* z_0 *et située entre deux cordes de* C-U *issues de* z, *alors l'ensemble des valeurs limites de* $f(z)$ *le long de* l *coïncide avec les affixes de l'ensemble des points principaux de* E_0. *En particulier la condition nécessaire et suffisante pour que* $f(z)$ *possède en* z_0 *une seule valeur limite angulaire, est que* E_0 *soit un* E-F *de première ou seconde espèce.*

Study émit cette hypothèse en 1913 et établit qu'elle serait vraie dans le cas général si son exactitude était prouvée dans le cas où l est un rayon de C-U aboutissant en z_0 (Study [1], p. 65-69). D'autre part Kœbe a démontré à l'aide de son *théorème sur la dilation* (Verzerrungssatz), que l'ensemble dès valeurs limites atteintes le long de l ne dépend pas du choix particulier de l (Kœbe dans Study [1], p. 127).

La première démonstration complète de I a été donnée par Lindelöf [3], 1915, p. 28-32; une autre est due à Montel [1], 1917, p. 48-52, une troisième à Gross [2], 1918, p. 254, qui a donné plusieurs théorèmes généraux sur le comportement des fonctions méromorphes dans C-U dont le résultat ci-dessus peut être déduit (Gross [2], p. 258-269; [3], p. 50). Citons encore une quatrième démonstration due à Tsuji [1], 1930.

Un autre résultat de Lindelöf est relatif aux E-F de troisième et quatrième espèce. Soit E_0 un tel E-F, ζ_0, ζ'_0 les affixes de deux points distincts de E_0. Soient dans C-U deux suites $\{\sigma_n\}$ et $\{\sigma'_n\}$ de transversales tendant vers z_0 image de E_0, vérifiant les conditions suivantes : 1° chacune de ces transversales sépare z_0 de $z=0$; 2° chaque transversale sépare celle qui suit de $z=0$; 3° entre les transversales σ_k et σ_{k+1} de $\{\sigma_n\}$ la transversale σ'_k de $\{\sigma'_n\}$ est toujours comprise; 4° la fonction $f(z)$ tend sur σ_n pour $n \uparrow \infty$ vers la limite ζ_0 et sur σ'_n vers la limite ζ'_0.

Traçons dans C-U un arc de cercle Γ joignant le point z_0 avec le point diamétralement opposé z'_0 et désignons par γ_n le *dernier* point où cet arc rencontre la transversale σ_n et γ'_{n+1} le *premier* point où il rencontre la transversale σ_{n+1} en allant de z'_0 à z_0. Alors, d'après Lindelöf [3], p. 32-35,

II. *On a pour* $n \uparrow \infty$

$$\left|\frac{\gamma_n - z_0}{\gamma'_{n+1} - z_0}\right| \rightarrow \infty.$$

Montel [1], p. 52, déduit II d'un théorème très général sur les valeurs limites des fonctions analytiques.

On peut préciser, à l'aide de quelques inégalités dues à Lindelöf [3], le fait topologique énoncé au n° 2, à savoir : qu'à ζ tendant vers $F(D_\zeta)$ correspond un point de C-U tendant vers K-U.

III. *Soit* D_ζ *un domaine fini de diamètre* (*la plus grande corde*) k; ω *un point intérieur à* D_ζ *correspondant à* $z=0$ *de* C-U. *Soit* q *la plus courte distance de* ω *à* $F(D_\zeta)$. *Alors, à tout point* ζ *de* D_ζ *situé à distance inférieure à* $r (< q)$ *de* $F(D_\zeta)$ *correspond, par notre* TC *un point* z *dont la distance à* K-U *est inférieure à*

$$\frac{2\log\frac{k}{q}}{\log\frac{k}{q}+\log\frac{k}{r}}$$

(Lindelöf [3], p. 15-16).

L'autre résultat de Lindelöf est relatif à $\arg f(z)$:

IV. *Soient* ζ_0 *sous les hypothèses de* III, *un point de* $F(D_\zeta)$, l *une ligne simple de Jordan dont tous les points sont intérieurs* *à* D_ζ *et à une distance de* ζ_0 *inférieure à* $r\ (< q)$ *et soit* σ *l'oscillation de* z *sur* l. *On a*

$$\sigma < 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2\log\frac{k}{q}}{\log\frac{k}{r}}}$$

pour $r < r_0$ (Lindelöf [3], p. 16-18).

Ces inégalités précisent le comportement de $z = \varphi(\zeta)$ sur $F(D_\zeta)$. Quant à la fonction inverse $\zeta = f(z)$, certains renseignements sur son comportement aux points de K-U sont donnés par les théorèmes généraux sur les fonctions univalentes, puisque, lorsque D_ζ est un domaine étalé (schlicht) à plus d'un point frontière ne contenant pas le point à l'infini à son intérieur, la fonction $f(z)$ est la fonction holomorphe et univalente dans C-U, la plus générale. Supposant d'abord $f(z)$ normée et $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, on a les inégalités suivantes déduites par divers auteurs du théorème de la dilatation de Kœbe :

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqq |f(z)| \leqq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \qquad \text{(Pick)},$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqq |f'(z)| \leqq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \qquad \text{(Pick)},$$

$$|\arg f'(z)| \leqq 2\log\frac{1+|z|}{1-|z|} \qquad \text{(Bieberbach)}.$$

Si D_ζ est un domaine borné, les relations ci-dessus peuvent être améliorées (*voir* par exemple, G. Pick [1]).

Dans Montel [3], on trouve des renseignements bibliographiques sur ce sujet allant jusqu'en 1933.

Les inégalités de cette nature fournissent des renseignements sur l'ordre de croissance de $f(z)$, $f'(z)$ et de $\arg f'(z)$, lorsque z tend *radialement* vers un point frontière. Lorsque z tend vers un point z_0 de K-U totalement de l'intérieur de C-U, on a :

V. *Soit* z_0 *un point de* K-U, E_0 *l'E-F correspondant et* ζ_0 *un point de* E_0. *Supposons que le point géométrique* ζ_0 *soit au plus de multiplicité dénombrable et qu'il en soit de même du point à l'infini, s'il appartient à* $F(D_\zeta)$. *Alors*

$$\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta}) - \zeta_0|\,d\theta$$

est convergente. De plus, si le point à l'infini n'est pas intérieur à D_ζ, *la fonction* $\log|f(z)-\zeta_0|$ *est représentable par l'intégrale de Poisson. Si le point à l'infini est un point intérieur à* D_ζ *et correspond à* z' *de* C-U, *la fonction* $\log\left|(z-z')\left(f(z)-\zeta_0\right)\right|$ *est représentable par l'intégrale de Poisson* (Ostrowski [2], p. 254-262).

Dans la démonstration donnée par Ostrowski, la restriction que ζ_0 soit de multiplicité au plus dénombrable est essentielle, même si le point à l'infini est extérieur au domaine, mais on ne sait pas encore si cette condition est essentielle en soi.

VI. *Si le domaine* D_ζ *est borné,* $f(z)$ *peut être représentée par l'intégrale de Cauchy étendue à* K-U

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}\,de^{i\theta}\qquad(|z|<1)$$

(De la Vallée-Poussin [1], p. 26).

Les résultats suivants de Biernacki [1] sont valables [sous certaines conditions assez générales et probablement généralisables, portant sur l'allure de $F(D_\zeta)$ au voisinage de ζ_0] pour un point ac. ζ_0 de $F(D_\zeta)$. Supposons pour fixer les idées que $\zeta_0=0$ et corresponde à $z=1$. Alors :

VII. *Si les branches de* $F(D_\zeta)$ *aboutissant en* ζ_0 *sont analytiques (sauf en* ζ_0*), l'oscillation de* $\log|f(z)|$ *sur la partie de l'arc* $|z-1|=r$ *contenue dans l'angle* $|\arg(z-1)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\alpha>0$ *reste, pour* r *assez petit, inférieure à une constante ne dépendant que de* α.

Deux résultats analogues de Biernacki [1], assurent l'existence d'une borne pour l'oscillation de $\log|f(z)|$ sur tout l'arc de $|z-1|=r$ contenu dans C-U, lorsqu'on impose à $F(D_\zeta)$ certaines conditions au voisinage de ζ_0. On trouve dans le même mémoire un théorème analogue relatif à l'oscillation de $\log|\varphi(\zeta)|$.

Dans Wolff [5], on trouve le résultat suivant apparenté aux précédents. Nous renvoyons pour la notion de l'*accessibilité linéaire* au n° 3 du second fascicule.

VIII. *Soit* D_ζ *un domaine situé dans la bande* B, $|\mathfrak{I}\zeta|\leq\frac{1}{2}$ *et limité par deux courbes de Jordan* Γ_1, Γ_2 *s'étendant de* $-\infty$

à $+\infty$. *Supposons, de plus, que par une* TC *de* B *sur* H_z, *par laquelle les deux points* $-\infty$ *et* $+\infty$ *vont respectivement en* $z=0$ *et* $z=\infty$, D_ζ *se transforme en un domaine pour lequel ces deux points sont linéairement* ac. *Considérons une* TC *de* D_ζ *sur* B *par laquelle les deux points* $+\infty$ *se correspondent. Pour* $\xi>0$ *soit* $\lambda(\xi)$ *la longueur de l'image de la transversale* $\mathfrak{R}\zeta=\xi$ *de la bande* B. *Alors, pour* $\xi\uparrow\infty$ *on a* $\underline{\lim}\,\lambda(\xi)\leqq 1$.

Enfin, au problème résolu par le théorème III de Lindelöf, se rapporte le résultat suivant de Lavrentieff [1], [2] :

IX. *Sous les hypothèses de* III, *considérons tous les points de* D_ζ *dont les distances intérieures à* ω *sont* $>\rho$, $\rho>0$, *Alors, pour chacun de ces points on a* $1-|\varphi(\zeta)|<\frac{K_1}{\rho}$ *et l'aire de l'ensemble des points correspondants dans* C-U *est* $<\frac{K_2}{\rho^2}$, K_1 *et* K_2 *étant indépendants de* ρ.

14. **Domaines jordaniens. Domaines variables.** — Si F(D) est une courbe fermée simple de Jordan, chaque point de F(D) est ac. et simple; il résulte du théorème I, n° 12, que :

1. *La* TC *de l'intérieur d'une courbe simple fermée de Jordan sur* C-U *engendre une correspondance biunivoque et bicontinue entre les régions correspondantes.*

Ce théorème énoncé comme probable par W. F. Osgood dans son article de l'*Encyclopædie der Mathematischen Wissenschaften*, II*b* 1, n° 19, p. 56, daté d'août 1901, et développé dans Osgood [1], 1903, a été démontré pour la première fois par Carathéodory [2], 1913 et par Osgood et Taylor [1] dans un travail paru la même année (7). La démonstration de Carathéodory repose essentiellement sur le théorème de Fatou cité au n° 12, celle d'Osgood et Taylor sur l'analyse détaillée des valeurs limites de la fonction conjuguée de la fonction de Green. La démonstration de Carathéodory a été considérablement simplifiée et rendue tout à fait élémentaire par Kœbe [1], [2]

(7) Une démonstration de Taylor a été présentée par Osgood à la Société Mathématique Américaine de New-York en avril 1910 (Taylor [1]). Les résultats de Carathéodory ont été présentés à la Société Mathématique Allemande à Karlsruhe en septembre 1911.

qui évite l'emploi du théorème de Fatou (*Cf.* aussi Carathéodory [5]). En 1914, Lindelöf [2] a publié une démonstration très courte de ce résultat et la même année, Courant [1] a donné une démonstration très simple utilisant l'intégrale de Dirichlet (*Cf.* aussi la démonstration de Montel [1], p. 47).

Deux autres démonstrations très simples utilisant, elles aussi, l'intégrale de Dirichlet, ont été publiées plus récemment par Wolff [2], 1930, et Mc Shane [1], 1937. Une démonstration utilisant la méthode du balayage a été donnée par De la Vallée-Poussin [2]. Enfin, Jessie Douglas [1], 1931, a donné dans le cadre de ses recherches générales sur le problème de Plateau, une démonstration directe de la possibilité de la TC d'un domaine jordanien sur C-U, biuniforme contours compris (*Cf.* aussi la démonstration analogue de Courant [3], 1937, p. 695-697, où l'on trouve, p. 696, quelques remarques sur le problème dans le cas des frontières les plus générales).

Il y a lieu de souligner la hardiesse de la conjecture d'Osgood, eu égard à l'époque où il l'a formulée. En effet les seuls résultats sûrs, qu'on avait en 1900, étaient le théorème classique de Picard, relatif à l'angle formé de deux arcs analytiques, donné en 1893 dans son *Traité d'Analyse* [*Cf.* Picard [1] ([8])], et le théorème de Painlevé [1], 1891, qui assure la continuité de la transformation en un point frontière où deux arcs à tangentes continues se raccordent, théorème considéré à cette époque, comme très général. Aux méthodes de Painlevé se rattachent les mémoires de von Dalwigk [1], 1897 et Hintikka [1], 1912.

Le théorème I admet une extension au cas d'une suite de domaines jordaniens D_n limités par des courbes Γ_n et convergeant vers un domaine D, également jordanien, limité par Γ. La convergence des domaines peut être définie de deux manières :

A. Supposons que la courbe Γ coïncide avec l'ensemble des points dont la distance à Γ_n tend vers zéro lorsque *n* tend vers l'infini. Si P est un point courant de Γ, on suppose qu'on peut associer à chaque $\varepsilon > 0$ un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que : si P_1 et P_2 sont deux points arbi-

([8]) Picard a donné, pour la première fois, la démonstration de ce fait dans son cours de la Sorbonne de 1888. (*Voir* son *Traité d'Analyse*, II.)

traires de D dont la distance à P est moindre que ε, on puisse les relier par une ligne polygonale de longueur moindre que δ et située dans tous les D_n à partir d'un certain n. Alors, la suite D_n est dite converger vers D.

B. Supposons qu'on puisse représenter chaque Γ_n au moyen d'un paramètre t variant de o à 2π, $\zeta = \psi_n(t)$, de manière que les fonctions ψ_n convergent uniformément dans l'intervalle $< 0, 2\pi >$ vers la fonction $\psi(t)$, fournissant une représentation paramétrique de Γ; alors, on dit que la suite D_n converge vers D. Cette définition peut être énoncée plus simplement, faisant usage de la notion, due à Fréchet, de l'*écart* entre deux courbes de Jordan (*Cf.* Rado [1]).

On peut démontrer que les définitions A et B, sont équivalentes et aussi équivalentes à une troisième définition due à Markouchevitch [1], p. 874-875.

Lorsqu'on emploie la définition B, on parle de *convergence paramétrique* des domaines.

Alors on a le théorème suivant qui paraît revenir à Carathéodory (*voir* Courant [1], p. 101-102 et Lichtenstein [2], p. 375).

II. *Soit* $\{D_n\}$ *une suite de domaines jordaniens, convergeant* (dans le sens précisé plus haut) *vers un domaine jordanien* D_ζ. *Soient* $\zeta = \varphi_n(z)$ *les fonctions qui effectuent les* TC *des* D_n *sur* C-U *du plan des* z, *supposées normées d'une façon indépendante de* n :

$$\varphi_n(0) = \zeta_0,$$

ζ_0 *indépendant de* n *et* $\varphi'_n(0)$ *réel positif. Alors, la suite* $\varphi_n(z)$ *converge uniformément sur* C-U + K-U, *vers une fonction* φ *effectuant la* TC *de* D_ζ *sur* C-U.

Un théorème équivalent à II et se rapportant à la TC sur le plan coupé suivant un segment de droite, se trouve dans Courant [1], sa démonstration reposant sur l'intégrale de Dirichlet. Mais une définition suffisante de la convergence (correspondant à notre définition A) n'a été donnée que dans l'article cité de Lichtenstein [2], p. 375, note 636.

Dans sa forme donnée ci-dessus, le théorème II a été donné par Courant [2], qui utilise aussi la définition A de la convergence des domaines. Rado [1] démontre II, en partant des inégalités de

Lindelœf [3]. Dans le cas où D_ζ de II, est *intérieur* à tous les domaines D_n, Farell [1], 1932, p. 573-576 et Markouchevitch [1], 1936, p. 866-875 ont donné des généralisations de II, dans lesquels les D_n sont les domaines les plus généraux.

Notons enfin, les théorèmes de Fejér [1] :

III. *Le développement de Taylor de la fonction $f(z)$ effectuant la* TC *de* C-U *sur un domaine jordanien* D *reste uniformément convergent sur* K-U.

et de Denjoy [1], [2] :

IV. *La condition nécessaire et suffisante pour que le développement de Taylor de $f(z)$ converge uniformément sur* K-U, *est que* F(D) *soit un continu cyclique et que* D *soit borné.*

Pour la définition purement géométrique d'un continu cyclique, *cf.* les travaux cités.

CHAPITRE IV.

LA MESURE CONFORME.

15. Les précurseurs. — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans C-U et continue sur K-U. Supposons que sur la moitié de cette circonférence $|f(z)| < M$ et sur l'autre moitié $|f(z)| < m$. Quelles bornes pour $|f(0)|$ peut-on en déduire ?

Pour répondre à cette question on peut utiliser l'artifice suivant, dû, en principe, à Painlevé et qu'il a donné dans sa thèse [2], 1887, p. 29. On considère le produit $F(z) = f(z) f(-z)$. On a évidemment sur K-U, $|F(z)| \leq Mm$, donc à l'origine $|F(0)| \leq Mm$ et $|f(0)| \leq \sqrt{Mm}$.

Cet artifice est susceptible de bien des applications. Lindelöf [3], p. 7, 11, 17, l'a employé dans ses recherches sur la théorie des fonctions et dans celles sur la représentation conforme. A. Khintchine [1], 1923, p. 72-75 en a même donné une application au cas où le nombre des facteurs de $F(z)$ tend vers l'infini.

L'essentiel des résultats obtenus dans cette direction consiste en ce que, dans le cas de C-U, *l'influence* des bornes de $|f(z)|$ sur un arc de K-U, sur les valeurs du module de $f(z)$ au centre, ne dépend que de l'angle sous lequel on voit cet arc de l'origine. Et ce fait trouve sa première expression générale dans le théorème suivant :

I. Théorème des deux constantes (énoncé particularisé). — *Soit* $f(z)$ *holomorphe dans* C-U *et continue sur* K-U. *Supposons que* $|f(z)|$ *soit inférieur à* m *sur un arc, ou un ensemble d'arcs* σ *de* K-U *de longueur totale* $2\pi\alpha$ *et que sur la partie restante de* K-U *on ait* $|f(z)| < M$, *alors on a*

$$|f(0)| \leqq M^{1-\alpha} m^{\alpha}.$$

On peut démontrer ce théorème en utilisant l'artifice de Painlevé ou en appliquant au $\log|f(z)|$, l'intégrale de Poisson [traitant convenablement des zéros de $f(z)$] ou bien encore à l'aide de l'inégalité de Jensen

$$\log|f(0)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta,$$

qui semble être la *vraie source* des résultats en question.

Par une transformation linéaire on peut remplacer l'origine par un point quelconque z_0 intérieur à C-U et l'on obtient l'inégalité

$$|f(z_0)| \leqq m^{\alpha(z_0)} M^{1-\alpha(z_0)},$$

où $\alpha(z_0)$ peut être interprétée comme *angle sous lequel on voit* σ *de* z_0, mais cet angle est ici un angle non euclidien, c'est-à-dire qu'on remplace les rayons de C-U par des arcs de cercles orthogonaux à C-U et passant par z_0.

Par des transformations conformes appropriées combinées à un emploi convenable de chaînes de cercles (comme celles employées dans le prolongement analytique), on obtient l'énoncé général suivant :

II. Théorème des deux constantes. — *Soit* D *un domaine dont* F(D) *est constituée par un nombre fini d'arcs de Jordan simples, se répartissant en deux ensembles non vides* C_1 *et* C_2. *Soit* z_0 *un point intérieur à* D, *alors, il existe une quantité* $\lambda = \lambda(D, z_0, C)$, $0 < \lambda < 1$ *telle que, si* $f(z)$ *est holomorphe dans* D *et continue sur* F(D) *et que de plus* $|f(z)| \leqq m$ *sur* C_1 *et* $|f(z)| \leqq M$ *sur* C_2, *on a*

$$|f(z_0)| \leqq m^{\lambda} M^{1-\lambda}; \tag{1}$$

z_0 variant sur un ensemble quelconque fermé E *contenu dans* D; λ *reste compris entre deux constantes positives* < 1, *qui ne dépendent que de* E. (F. et R. Nevanlinna [1], Ostrowski [1]).

Le premier exemple d'une inégalité de cette nature est contenu dans le théorème des trois cercles d'Hadamard, qui servait, combiné à des chaînes de cercles, aux mêmes fins que le théorème II, avant la découverte de ce dernier.

III. Théorème des trois cercles. — *Soit $f(z)$ holomorphe dans la couronne circulaire $r_1 < |z| < r_2$ et continue sur sa frontière; supposons que l'on ait $|f(z)| \leqq M_1$ sur $|z| = r_1$ et $|f(z)| \leqq M_2$ sur $|z_2| = r_2$, alors on a partout dans la couronne*, pour $|z| = r$:

$$|f(z)| \leqq M_1^{\frac{\log \frac{r_2}{r}}{\log \frac{r_2}{r_1}}} M_2^{\frac{\log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{r_2}{r_1}}} \quad (9).$$

Enfin, il y a lieu de citer encore un artifice utilisé par Carleman [1] dans son mémoire sur le nombre des valeurs limites d'une fonction entière d'ordre fini, qui emploie implicitement le *principe de l'élargissement du domaine* et quelques inégalités rentrant dans le type (1), mais où λ est particularisée suivant les configurations géométriques spéciales. Nous reviendrons aux n^{os} 17 et 21 sur ce mémoire qui a profondément influencé l'école scandinave.

16. Définitions. — Soient $\Gamma = F(D_\zeta)$ la frontière de D_ζ et γ un ensemble de points iac. de Γ. Soit ζ_0 un point intérieur à D_ζ. Effectuons une TC de D_ζ sur le cercle C_2 de circonférence K_2 telle que $z = 0$ de C_2 corresponde à ζ_0. Soit g l'ensemble des points de K_2 correspondant à γ. Si g est mesurable au sens de Lebesgue (a la mesure zéro), cette propriété subsiste si l'on remplace le point ζ_0 par un point quelconque intérieur à D_ζ. Alors, nous dirons que γ est mesurable (a la mesure zéro) en D_ζ. La mesure de g est dite *mesure* (ou *longueur*) *conforme de* γ *en* D_ζ *par rapport* à ζ_0 et sera désignée dans ce qui suit par $m_{D_\zeta,\zeta_0}\gamma$. On appelle $m_{D,\zeta}\gamma$ également *angle conforme sous lequel on voit* γ *de* ζ *en* D. R. Nevanlinna [2], [3]

(9) Le troisième cercle qui semble manquer dans l'énoncé est le cercle concentrique passant par z.

utilise les dénominations *masse angulaire*, *mesure angulaire* et pour le quotient de $m_{D,\zeta}\gamma$ par 2π il dit *mesure harmonique*. $m_{D,\zeta}\gamma$ est la variation de la fonction conjuguée $h(\zeta_0, \zeta)$ de la fonction de Green $g(\zeta_0, \zeta)$ sur l'ensemble γ. On trouve dans le livre de R. Nevanlinna [3], p. 30-37, quelques considérations sur les lignes de niveau de $g(\zeta_0, \zeta)$ et de $h(\zeta_0, \zeta)$ qui présentent un certain intérêt pour la théorie de la mesure conforme.

Cette notion a été introduite pour le cas du cercle par K. Lœwner [1], p. 112 et dans le cas général d'après Ostrowski dans la thèse de Warschawski [1], p. 339. Pour les ensembles généraux de points iac. *voir* Beurling [1], p. 25-26, R. Nevanlinna [2], [3] et Ostrowski [3], p. 413.

Si γ est un ensemble quelconque de points frontières i. de D et γ^* l'ensemble des points iac. de Γ contenus dans γ, nous dirons que γ est mesurale si γ^* est mesurable, et nous poserons par définition

$$m_{D,\zeta}\gamma^* = m_{D,\zeta}\gamma.$$

On a évidemment si $\gamma' = \Gamma - \gamma$:

$$m_{D,\zeta}\gamma' + m_{D,\zeta}\gamma = 2\pi.$$

I. *Soit* E *un ensemble mesurable* B (10) *dans le plan des* ζ. *L'ensemble des points de* Γ *contenus dans* E *est mesurable. Si* E *est ouvert et contient des points de* Γ, *l'ensemble des points de* Γ *contenus dans* E *a une mesure conforme positive.* (Ostrowki [3], 1936, p. 413-417.)

Ce théorème a été donné en 1929 par Ostrowski [2], p. 251-252, dans le cas où E est un cercle et par Beurling en 1933 [1], p. 71-75, pour le cas où E est un ensemble fermé.

J. Ferrand [4], p. 21, a montré que la démonstration d'Ostrowski permet d'établir que :

L'ensemble des E-F *ayant un point* iac. *intérieur à un ensemble ouvert* O *est mesurable et de mesure positive.*

Elle a même établi [4], p. 22, le résultat plus précis : *L'ensemble des* E-F *ayant au moins un point principal intérieur à un*

(10) Un ensemble est dit mesurable B s'il est obtenu à partir de domaines rectangulaires, par des opérations d'addition, soustraction, multiplication en nombre fini ou dénombrable.

ensemble ouvert O *est mesurable et de mesure positive, s'il n'est pas vide.*

D'autre part on a divers théorèmes assurant qu'un ensemble de points frontières iac. soit de mesure conforme nulle.

II. *L'ensemble des points* i. *concentrés en un point géométrique, bien qu'il puisse avoir la puissance du continu, est toujours de mesure conforme nulle.* (Wolff [2], p. 97, *Cf.* aussi Wansink [1], p. 23-24).

Ce résultat est d'ailleurs une conséquence immédiate des théorèmes sur l'unicité des fonctions holomorphes et bornées.

Un autre résultat très général est dû à Lavrentieff, qui utilise une extension de la notion de distance intérieure aux points iac. qu'on peut atteindre suivant des lignes de Jordan rectifiables de longueur finie.

III. *Dans une* TC *fixe de* D *sur* C-U, *aux points* iac. *de* F(D) *situés à la distance intérieure* $\geqq \rho$, $\rho > 0$, *d'un point intérieur fixe, correspond sur* K-U *un ensemble de points dont la mesure est sur* K-U *inférieure à* $\frac{k}{\rho}$, *où* k *est indépendant de* ρ. (Lavrentieff [1] et [2]).

Quelques autres résultats appartenant au même ordre d'idées ont été donnés par Lavrentieff quelques années après.

Soient $\alpha > 0$ et ζ_0 un point intérieur à D. Soit ζ^* un point iac. de F(D); supposons qu'a chaque $r > 0$ suffisamment petit corresponde un point ζ_r de D jouissant des propriétés suivantes :

1° ζ_r peut être joint à ζ_0 par une ligne de Jordan dont tous les points sont à une distance de $F(D) \geqq r$.

2° Chaque entaille de D joignant ζ_0 à ζ^* traverse la circonférence $|\zeta - \zeta_r| = r$.

3° On a

$$\rho(\zeta_r, \zeta^*, D) \leqq K r^{\frac{1}{\alpha}},$$

K étant indépendant de r. Alors on dit que ζ^* est *accessible suivant une pointe d'ordre* α, fait évidemment indépendant de ζ_0.

IV. *Chaque point* iac. *de* F(D) *est accessible suivant une pointe* *d'ordre 2, sauf un ensemble de points iac. correspondant à un ensemble de points de* K-U *de mesure nulle.* (Lavrentieff [3], p. 207-211).

La notion de mesure conforme est *invariante* vis-à-vis des TC dans le sens suivant : Supposons que par une TC, D_ζ aille en $D_{\zeta'}$, ζ_0 en ζ'_0 et que l'ensemble γ^* des points iac. contenus dans un ensemble γ de points i. de $F(D_\zeta)$ se transforme en un ensemble de points iac. $\gamma^{*\prime}$ appartenant à un ensemble de points i. de $F(D_{\zeta'})$ qui ne contient aucun autre point iac. (la correspondance entre γ^* et $\gamma^{*\prime}$ étant entendue comme à la fin du n° 5, Chap. I). On a alors

$$m_{D_\zeta,\zeta_0}\gamma = m_{D_\zeta,\zeta_0}\gamma^* = m_{D_{\zeta'},\zeta'_0}\gamma^{*\prime} = m_{D_{\zeta'},\zeta'_0}\gamma'.$$

Pour chaque $f(z)$ holomorphe dans D avec $|f(z)|\leqq 1$ et telle que $|f(z)|$ reste à la limite $\leqq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, lorsqu'on approche indéfiniment des points iac. de γ (sauf sur un ensemble de mesure nulle), on a l'inégalité

$$|f(z)|\leqq e^{\frac{1}{2\pi}m_{D,z}\gamma} \tag{1}$$

et $m_{D,z}\gamma$ est le plus petit exposant pour lequel une telle inégalité peut avoir lieu. (R. Nevanlinna [2], Ostrowski [3], p. 415.)

Au moyen de la mesure conforme et en utilisant la notion d'intégrale de Stieltjes on peut écrire la formule correspondant à l'intégrale de Poisson dans tout domaine simplement connexe, même lorsque la dérivée normale de la fonction de Green n'existe pas sur la frontière. Il suffit de remarquer que l'intégrale de Poisson-Stieltjes

$$P(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\zeta)\, dm_{D,\zeta_0}\gamma_{\zeta',\zeta}$$

où $\gamma_{\zeta',\zeta}$ désigne la portion de $F(D_\zeta)$ qui va d'un point iac. fixe ζ' à un point iac. ζ et où ζ_0 est un point intérieur à D_ζ, devient, par une TC de D_ζ sur C-U amenant ζ_0 à l'origine, la moyenne arthmétique de Gauss.

Bien que, dans cet exposé, nous nous bornions aux domaines simplement connexes, signalons que R. Nevanlinna a étendu la définition de la mesure conforme au cas d'un domaine arbitraire multiplement connexe. On trouve de nombreux développements sur ce sujet dans son livre [3].

17. Le lemme de Loewner-Montel (Principe de l'élargissement du domaine).

I. *Soit* γ^* *un ensemble mesurable de points* iac. *de* $F(D_\zeta)$, $\bar{\gamma}$ *l'ensemble des points* iac. *de* $F(D_\zeta)$ *complémentaire à* γ^*. *Il existe alors une et une seule fonction* $P_{D,\gamma^*}(\zeta)$ *harmonique et uniformément bornée dans* D_ζ, *telle que, pour chaque point de* γ^*, *sauf en un ensemble de mesure nulle, il y ait une entaille, aboutissant en ce point, le long de laquelle* $P_{D,\gamma^*}(\zeta)$ *possède la limite* 1 *et que pour chaque point de* $\bar{\gamma}$, *sauf pour un ensemble de mesure nulle, il y ait une entaille le long de laquelle* $P_{D,\gamma^*}(\zeta)$ *possède la limite* o. (Ostrowski [3], p. 415.)

Soit γ un ensemble quelconque de points de $F(D_\zeta)$, contenant γ^*, mais aucun autre point iac. de $F(D_\zeta)$; on pose, par définition,

$$P_{D,\gamma^*}(\zeta) = P_{D,\gamma}(\zeta)$$

et $P_{D,\gamma}(\zeta)$ est appelé le *potentiel caractéristique* de γ. (Ostrowski [3], R. Nevanlinna [3].)

Si γ est un arc ac. de $F(D_\zeta)$, $P_{D_\zeta,\gamma}(\zeta)$ possède 1, à l'intérieur de cet arc, comme limite *totale*, c'est-à-dire pour la convergence totale de l'intérieur de C U; le fait analogue pour $F(D_\zeta) - \gamma$ a aussi lieu avec la limite totale o.

II. Lemme de Loewner-Montel.

A. *Soient* D *et* D_1 *deux domaines simplement connexes*, $D_1 \prec D$. *Soit* γ *un ensemble de points* iac. *communs à* $F(D)$ *et* $F(D_1)$, *c'est-à-dire que pour chaque point de* γ, *il existe une entaille aboutissant à ce point et contenue entièrement dans* D *et* D_1 (¹¹). *Alors, si* γ *est mesurable en* D, *il l'est aussi en* D_1 *et l'on a, pour tout* ζ *commun à* D *et* D_1,

$$m_{D,\zeta}\gamma \geqq m_{D_1,\zeta}\gamma. \tag{1}$$

B. *Si* D_1 *est non identique à* D *et si* γ *n'a pas la mesure* o *en* D, *c'est l'inégalité qui a lieu. De plus, si* Γ_1 *désigne l'ensemble des*

(¹¹) Il n'est pas exclu que des entailles aboutissant en un point γ soient équivalentes dans D sans l'être dans D_1 (ou inversement). Ces points de $F(D)$ se décomposent pour D_1 en un ensemble de points iac. de $F(D_1)$ (ou inversement).

points iac. *de* $F(D_1)$ *situés à l'intérieur de* D *et* Γ *l'ensemble des points* iac. de F (D) *situés à l'extérieur de* D_1, *on a*

$$m_{D,\zeta}\gamma - m_{D_1,\zeta}\gamma \leqq m_{D_1,\zeta}\Gamma_1 - m_{D,\zeta}\Gamma \leqq m_{D_1,\zeta}\Gamma_1.$$

La partie A de ce théorème a été démontrée par Lœwner [1], p. 112, pour le cas où γ est un arc et antérieurement, dans un cas spécial par Montel [1], 1917, p. 31-32. L'inégalité utilisée par Lœwner peut être précisée dans quelques cas particuliers; *cf.* Unkelbach [2], [3]. Il y a lieu de citer le mémoire de Carleman [1] où cette inégalité était utilisée pour une configuration géométrique particulière, sans toutefois que le principe ait été explicitement dégagé. R. Nevanlinna [1], p. 63, appelle cette inégalité le principe de Carleman. Pour diverses extensions, mais toujours pour le cas d'arcs de Jordan, *voir* Warschawski [1], p. 338-345 et Nevanlinna [3], p. 63-106, ainsi que Pólya et Szegœ [1], p. 22-23.

La partie A pour le cas général, ainsi que la partie B de II ont été données par Ostrowski [3], p. 422-424.

L'inégalité (1) peut être remplacée par une autre, à certains égards plus suggestive, en introduisant l'ensemble $\bar{\gamma}$ des points iac. complémentaire à γ dans F(D) et $\bar{\gamma}_1$ ensemble de points iac. complémentaire à γ dans $F(D_1)$, il vient alors

$$m_{D,\zeta}\bar{\gamma} \leqq m_{D_1,\zeta}\bar{\gamma}_1;$$

on peut donc dire qu'en passant de D à D_1 et en remplaçant $\bar{\gamma}$ par $\bar{\gamma}_1$ on *rapproche* $\bar{\gamma}$ de ζ au sens conforme; on dit aussi que $\bar{\gamma}$ est *éclipsé* (abgeschirmt) par $\bar{\gamma}_1$.

De la formule suivante, on peut déduire, dans des cas particuliers importants, le théorème II

$$P_{D_1,\gamma}(z) = P_{D,\gamma}(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\gamma}_1} g(\zeta, z)\, d\bar{P}_{D_1,\gamma}(\zeta),$$

où $g(\zeta, z)$ est la fonction de Green du domaine D, $\bar{P}_{D_1,\gamma}(\zeta)$ le potentiel conjugué de $P_{D_1,\gamma}(\zeta)$, D_1 la partie de D dont la frontière a en commun avec F(D) l'ensemble γ, tandis que $\bar{\gamma}_1$ représente l'ensemble complémentaire de γ dans $F(D_1)$.

Cette inégalité a été donnée par R. Nevanlinna [2] pour une configuration spéciale, pour un cas plus général par Beurling [1], enfin pour le cas où γ et $\bar{\gamma}$ sont constitués d'un nombre fini d'arcs de Jordan par R. Nevanlinna dans [3], p. 95.

On peut utiliser II pour démontrer le théorème suivant de Carathéodory [4], p. 39-40.

III. *Soient* D *et* D_1 *deux domaines simplement connexes* $D_1 \prec D$, γ *un arc commun à* F(D) *et* F(D_1). *Représentons conformément* D *et* D_1 *sur* C-U *de telle sorte qu'à* γ *corresponde l'arc* AB *de* K-U. *Un arc de cercle intérieur à* C-U *joignant* A *à* B *a pour image deux lignes* γ_D, γ_{D_1} *joignant les extrémités de* γ *respectivement dans* D, D_1. *Alors* γ_{D_1} *est dans le domaine limité par* γ_D *et* γ.

Carathéodory démontre III en s'appuyant sur le lemme suivant qui a une certaine analogie avec le lemme de Schwarz.

IV. *Soit* $w = f(z)$ *holomorphe dans* C-U *et telle que* $|f(z)|$ *y reste inférieur à* 1 *et que pour* z *réel,* $f(z)$ *est aussi réel. Soit* F *le fuseau circulaire et symétrique par rapport à l'axe réel ayant ses sommets aux points* $+1$ *et* -1 *et entièrement intérieur à* C-U. *A toute valeur de* z *dans* F *correspond une valeur de* w *intérieure au même fuseau dans le plan des* w.

Dans le cas où la mesure conforme pour D ou pour D_1 peut être calculée directement, les inégalités ci-dessus donnent des limitations pour la mesure conforme de γ en D et γ_1 dans D_1.

Dans le numéro suivant nous résumerons les résultats du calcul direct de la mesure conforme pour quelques configurations particulières.

18. Configurations particulières dépendant d'un paramètre essentiel. — I. *Soient* H *un demi-plan,* S *un segment de droite contenu dans* F(H), z *un point intérieur à* H. *Si* S *est vu de* z *sous l'angle* α (entendu dans son sens habituel) *on a*

$$m_{H,z}S = 2\alpha.$$

II. *Soit* R_σ *l'intérieur d'un angle de sommet à l'origine, d'ouverture* $2\pi\sigma$ *et de côtés* s_1 *et* s_2. *Le lieu géométrique des points de* R_σ *pour lesquels* $m_{R_\sigma,z}s_1 = \alpha$, *est la demi-droite issue de l'origine située dans* R_σ *et faisant avec* s_2 *l'angle* $\sigma\alpha$.

III. *Soit* S_σ *un fuseau circulaire limité par les arcs* s_1 *et* s_2 *faisant entre eux les angles* $2\pi\sigma$. *Le lieu géométrique des points de* S_σ *tels que* $m_{S_\sigma,z}s_1 = \alpha$, *est l'arc de cercle situé dans* S_σ *passant par les sommets du fuseau et faisant avec* s_2 *l'angle* $\alpha\sigma$.

Supposons que $S_{\frac{1}{2}} = S$ est le demi-cercle $|z| < \rho$, $\mathfrak{R}z > 0$ et désignons par Γ la demi-circonférence de $F(S)$ et par Δ le diamètre $< -i\rho, i\rho >$. Alors, d'après Julia [2], on a

$$m_{S,z}\Gamma = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\rho\mathfrak{R}z}{\rho^2 - |z|^2} > \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\mathfrak{R}\frac{z}{\rho} > \mathfrak{R}\frac{z}{\rho},$$

$$m_{S,z}\Delta = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\rho\mathfrak{R}z}{\rho^2 - |z|^2} > 1 - \frac{4}{\pi}\,\frac{\rho\mathfrak{R}z}{\rho^2 - |z|^2},$$

$$m_{S,z}\Delta > 1 - \frac{2}{\pi(\sqrt{2} - 1)}\mathfrak{R}\frac{z}{\rho},$$

dont on déduit par la transformation $z = w^{\frac{1}{\alpha}}$ des formules correspondant à une configuration plus générale.

IV. *Soit* B *une bande limitée par les deux droites parallèles* s_1 *et* s_2 *distantes de* a. *Le lieu géométrique des points* z *de* B *pour lesquels* $m_{B,z}s_1 = \alpha$, *est la droite parallèle à* s_1 *située à la distance* $\frac{\alpha a}{2\pi}$ *de* s_2.

V. *Soit* $H^{(\rho)}$ *le domaine obtenu en supprimant d'un demi-plan* H *un demi-cercle de rayon* ρ *orthogonal à* $F(H)$ *et dont nous désignons par* K'_ρ *la demi-circonférence faisant partie de* $F(H^{(\rho)})$. *Alors, si* z *est un point de* $H^{(\rho)}$, *on a*

$$m_{H^{(\rho)},z}K'_\rho \leq 4\operatorname{arc\,sin}\frac{2|z|\rho}{|z|^2 + \rho^2},$$

l'égalité n'étant vraie que pour les points de la perpendiculaire à $F(H)$ *passant par le centre de* K'_ρ.

VI. *Soit* E_ρ, $\rho > 0$, *l'extérieur du cercle* K_ρ, *de rayon* ρ, *coupé suivant le prolongement, jusqu'à l'infini, d'un rayon de* K_ρ. *Alors, pour un point* z *de* E_ρ *à distance du centre de* K_ρ *égale à* $d > \rho$ *on a*

$$m_{E_\rho,z}K_\rho \leq \operatorname{arc\,sin}\frac{2\sqrt{\rho d}}{\rho + d},$$

l'égalité étant vérifiée par les points qui sont situés sur la demi-droite T *symétrique de la coupure par rapport au centre de* K_ρ.

On obtient tous ces énoncés à partir du premier à l'aide de TC élémentaires (*voir*, par exemple, Ostrowski [3], p. 417-419).

VII. *Soit* T *un triangle dont les angles sont* α_1, α_2, α_3 *et les côtés correspondants* l_1, l_2, l_3; *construisons le triangle* T' *dont les côtés sont* $\pi-\alpha_1$, $\pi-\alpha_2$, $\pi-\alpha_3$ *et désignons ses angles correspondants par* λ_1, λ_2, λ_3. *Alors, si* D *est l'extérieur de* T, *le côté* l_ν, *pour* $\nu=1, 2, 3$ *est vu du point à l'infini sous l'angle conforme* λ_ν *par rapport à* D. (Unkelbach [1], p. 263.)

VIII. *Soit* $Q = A_1A_2A_3A_4$ *un quadrilatère symétrique par rapport à* A_1A_3. *Soit* α_ν *l'angle de* Q *en* A_ν. *Désignons par* l_1 *un côté de* Q *aboutissant en* A_1 *et par* l_3 *un côté de* Q *aboutissant en* A_3. *Si* D *est l'extérieur de* Q *désignons par* λ_1, λ_3 *les angles conformes sous lesquels* l_1, l_3 *sont vus du point à l'infini par rapport à* D. *On a*

$$\cos\lambda_1 = \frac{\alpha_1-\alpha_3}{2(\pi-\alpha_2)}, \qquad \cos\lambda_3 = \frac{\alpha_3-\alpha_1}{2(\pi-\alpha_2)}$$

(Unkelbach [1]).

19. Distance comme paramètre essentiel. — En général on peut dire que si un point est très *éloigné* de F(D), la mesure conforme d'une partie de la frontière par rapport à ce point sera très petite. Naturellement, il s'agit là de distance relativement à l'étendue du domaine, puisque la mesure conforme est invariante par rapport aux similitudes.

Les trois théorèmes suivants (Ostrowski [3], p. 426-432) servent à préciser cette affirmation un peu vague.

I. *Soient* D_ζ *un domaine et* σ *un segment de droite d'extrémités* A *et* B *contenu dans* $F(D_\zeta)$. *Soit* K *un arc de cercle joignant* A *à* B *et délimitant avec* σ *un segment circulaire* Σ *extérieur à* D_ζ, *aux angles* $2\pi\alpha$, $0\leqq\alpha<1$. *Désignons par* λ *la partie restante de* $F(D_\zeta)$. *Effectuons une* TC *de* D_ζ *sur* D_z *situé au-dessous de l'axe réel et* $F(D_z)$ *comprenant un segment* L *de cet axe, correspondant à* λ. *Soit* k *un arc de cercle reliant les* *extrémités de* L *et formant avec* L *un segment circulaire* S *situé au-dessous de l'axe réel, aux angles* $\pi\beta$. *Alors les images des points de* D_z *extérieurs à* S *sont situés dans* D_ζ *entre* σ *et un arc de cercle* C *joignant* A *à* B *du côté opposé à* Σ, C *et* σ *faisant les angles* $2\pi(1-\alpha)(1-\beta)$.

Corollaire. — 1. *Sous les hypothèses de* I, *les points de* D_ζ, *d'où l'on voit* σ *sous un angle conforme* $> 2\pi\beta$, *sont situés entre* σ *et un arc de cercle joignant* A *à* B *et faisant avec* σ *l'angle* $2\pi(1-\alpha)(1-\beta)$.

Corollaire. — 2. *Sous les mêmes conditions, l'angle conforme sous lequel on voit* σ *d'un point* ζ *de* D_ζ *dont la distance au milieu de* σ *n'est pas inférieure à* $d \geqq \frac{\sigma}{2}$, *est dans* D_ζ *au plus égal à*

$$2\pi\beta = 2\pi - \frac{2}{1-\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{2d}{\sigma}.$$

La borne donnée dans ce dernier corollaire est naturellement trop grande, puisqu'elle reste toujours positive. Néanmoins cette valeur peut être utile dans bien des cas.

La démonstration de I est une conséquence assez immédiate du lemme de Lœwner-Montel et du théorème III du numéro précédent. Si l'on suppose que D_ζ de I ne contient pas le point à l'infini à son intérieur, on peut remplacer la borne ci-dessus par une autre essentiellement plus précise. Les deux évaluations que nous allons donner se rattachent aux théorèmes V et VI du n° 18, pour la première en s'appuyant sur le théorème V on a une démonstration simple.

II *Soit* D_ζ *un domaine simplement connexe situé dans le demi-plan* H; *posons* $\delta = F(H)$. *Soit* C *un ensemble de points de* $F(D_\zeta)$ *mesurable en* D_ζ *et dont tous les points* ac. *sont au plus à la distance* ρ *d'un point* ζ_0 *de* δ. *Alors, si* ζ *est un point de* D_ζ *à la distance* $d > \rho$ *de* ζ_0, *on a*

$$m_{D_\zeta,\zeta}\, C \leqq 4 \arcsin \frac{2\rho d}{d^2+\rho^2},$$

l'égalité n'étant vérifiée que si D_ζ *coïncide avec le domaine* $H^{(\rho)}$ *du théorème* V, n° 18, K'_ρ *étant centré en* ζ_0, C *coïncidant, à un* *ensemble de mesure nulle près, avec* K'_ρ *et* ζ *étant situé sur la perpendiculaire à* δ *passant par* ζ_0.

Le théorème suivant, qui se rattache au théorème VI, n° 18, est plus précis mais beaucoup plus difficile à démontrer.

III. *Supposons qu'un domaine simplement connexe* D *ne contenant pas le point à l'infini à son intérieur, possède un ensemble* C *de points de* F(D) *mesurable en* D *et dont les points* iac. *soient contenus dans un cercle de rayon* ρ. *Alors, on a pour tout point* z *de* D *qui est à la distance* $d > \rho$ *du centre du cercle*

$$m_{D,z} C \leqq 4 \operatorname{arc} \sin \frac{2\sqrt{\rho d}}{\rho + d},$$

l'égalité n'étant vérifiée que si D *coïncide avec le domaine* E_ρ *du théorème* VI du n° 18, C *coïncidant à un ensemble de mesure nulle près, avec* K_ρ *et* z *étant sur la demi-droite symétrique de la coupure par rapport au centre de* K_ρ.

La démonstration de III utilise essentiellement une inégalité par laquelle E. Schmidt [1] et R. Nevanlinna [2] ont résolu un important problème se rattachant à un théorème de Milloux.

Supposons qu'une fonction $f(z)$ soit holomorphe dans D et que son module ne dépasse pas l. Supposons de plus que sur un continu C formé de points intérieurs à D ou de points iac. de F(D), $|f(z)|$ reste à la limite $\leqq \mu$, $(0 < \mu < 1)$; alors il résulte du théorème des deux constantes qu'à chaque z_0 de D correspond un nombre positif $\lambda < 1$ indépendant de $f(z)$ et de μ tel que l'on ait $|f(z_0)| \leqq \mu^\lambda$.

La grandeur de λ dépend surtout du continu C. Or, supposons que C relie deux ensembles A et B fermés disjoints, alors il existe une borne inférieure positive de λ, dépendant de A et B et naturellement aussi de z_0 et de D.

Le premier exemple d'un énoncé de cette nature a été obtenu par Milloux [1], p. 348, son domaine D est C-U, le continu C un arc de Jordan joignant z_0 à l'origine. La valeur de λ déduite dans ce cas par Milloux de l'inégalité de Carleman mentionnée au n° 17, a été améliorée par plusieurs auteurs, mais sa valeur exacte $\lambda = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \sin \frac{1 - |z_0|}{1 + |z_0|}$ n'a été trouvée que par E. Schmidt [1] pour un arc de Jordan et par R. Nevanlinna pour un arc quelconque. *Voir* aussi Beurling [1], p. 94-108.

Lavrentieff [3], p. 190-197, esquisse une démonstration d'une inégalité un peu plus générale. Sa configuration contient un autre paramètre en plus, à savoir la longueur d'un arc de K-U ne contenant pas de point de C.

Relativement à une configuration de Carleman [2], p. 4, on a en désignant par D le domaine fini limité par AOBγA, où AOB est l'angle $|\arg z| < \frac{\alpha\pi}{2}$, γ un arc de Jordan intérieur à l'angle et joignant A à B, et en désignant par R et R' la plus grande et la plus petite distance de O à γ, en supposant d'abord $\alpha = 1$:

IV.

$$m_{D,z}\gamma \geqq \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2R\,\mathfrak{R}z}{R^2 - |z|^2} > \frac{4}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \mathfrak{R}\frac{z}{R} > \mathfrak{R}\frac{z}{R}$$

et en particulier si $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2} - \eta$,

$$m_{D,z}\gamma > \frac{R}{|z|} \sin \eta.$$

Pour la ligne brisée AOB *on a*

$$m_{D,z}(\mathrm{AOB}) \geqq 1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2R'\,\mathfrak{R}z}{R'^2 - |z|^2}.$$

Par la transformation $z = w^{\frac{1}{\alpha}}$ on déduit les formules correspondant au cas où α est quelconque (Julia [2]).

V. *Désignons par d la distance du point z à la ligne brisée* AOB, α *étant quelconque et supposons que pour* $\varepsilon > 0$ *on ait* $|z - A| \geqq \varepsilon$, $|z - B| \geqq \varepsilon$. *Alors, on a*

$$\lambda_1(D) < \frac{m_{D,z}\gamma}{d\,|z|^{\frac{1}{\alpha}-1}} < \lambda_2(D, \varepsilon),$$

où $\lambda_1(D)$, $\lambda_2(D, \varepsilon)$ *sont deux constantes positives ne dépendant respectivement que de* D *et* D, ε (Julia [2]).

Au même ordre d'idées se rattache le théorème suivant de Lavrentieff [3], p. 188-190 :

VI. *Soit* D *un domaine contenant l'origine et découpé dans* C-U *par une transversale* γ *de* C-U.

Si le diamètre de γ est $d < \frac{1}{2}$, on a

$$m_{D,0}\,\gamma \geqq \frac{d^4}{2}$$

et les théorèmes suivants de J. Ferrand [4], p. 28-32.

VII. *La mesure conforme de l'ensemble* E_R *des* E-F *de* F(D) *séparés de* ζ_0 *par l'une au moins des transversales portées par un cercle de rayon* R *assez petit est bornée uniformément par un nombre de la forme* $K\sqrt{R}$.

VIII. *L'ensemble des* E-F *contenant un point principal* ω *fixe est de mesure conforme nulle.*

IX. *Pour un domaine convexe, la mesure de* E_R *de* VII *est inférieure à* KR *et un ensemble de* F(D) *de mesure linéaire nulle est toujours de mesure conforme nulle.*

Notons enfin le cas particulier suivant de VIII, qui est une conséquence du théorème de Fatou :

X. *L'ensemble des points de* K-U, *extrémités des entailles sur lesquelles* $f(z)$ *a une limite unique* ω, *est de mesure conforme nulle quel que soit* ω.

Signalons enfin un résultat de Visser [4], qui a un certain rapport avec la question traitée dans ce numéro.

20. **Angle comme paramètre essentiel.** — La mesure conforme d'une portion γ de la frontière par rapport à un point z n'est pas seulement « petite » quand la distance directe de z à γ est relativement grande, mais aussi lorsque, pour parvenir à γ, une ligne partant de z doit faire de nombreux détours pour rester dans D. Les théorèmes suivants peuvent être employés pour obtenir une évaluation de la mesure conforme dans de tels cas.

I. *Soient* D *un domaine et* γ *un ensemble mesurable dans* D *de points* iac. *de* F(D), t *une transversale de* D *séparant tous les points de* γ *d'un point intérieur* z_0 *de* D. *Soit* D′ *celui des deux domaines dans lesquels* t *décompose* D, *qui contient* z_0. *Supposons que la mesure conforme de* t *en* D′ *par rapport à* z_0 *soit* *égale à* $2\pi\beta$ *et que la mesure conforme de* γ *en* D *pour tout point de t soit* $< 2\pi\alpha$. *Alors, on a*

$$m_{D,z_0}\gamma < 2\pi\alpha\beta.$$

Le lecteur retrouvera aisément, en utilisant la définition de la mesure conforme qui se rattache à la formule (1) du n° 16, la démonstration de I qui est due à Ostrowski.

Au moyen de cette inégalité, qu'on peut généraliser de diverses manières, on peut trouver des évaluations pour la mesure conforme pour des domaines de formes variées en les décomposant en des domaines partiels d'une façon convenable.

II. *Soit* D *un domaine situé dans un demi-plan* H, F(D) *ayant en commun avec* F(H) *un segment fini et fermé* σ *comme arc* ac. *Soit s un segment de droite situé dans* H *dont les extrémités sont sur* F(D). *Si s fait avec* σ *l'angle* α, $\frac{\pi}{2} \geqq \alpha > 0$, *alors la mesure conforme de* σ *par rapport à chaque point de s en* D *est moindre que* $2(\pi - \alpha)$ (Ostrowski [3], p. 433-440).

On peut, dans cet énoncé, remplacer s par une ligne de Jordan, contenue dans un angle convenable ou encore par un arc de cercle coupant F(H) en un point z' extérieur à σ et faisant avec cette frontière l'angle α.

Le théorème suivant, dû en partie essentielle à R. Nevanlinna, se déduit du lemme de Lœwner-Montel :

III. *Pour les domaines convexes, la mesure conforme d'un ensemble de points-frontière par rapport à un point intérieur* z_0, *est au plus égale au double de l'angle ordinaire sous lequel cet ensemble est vu de* z_0; *l'égalité n'a lieu que si l'ensemble en question est de mesure nulle ou que le domaine considéré est le demi-plan.*

Enfin signalons quelques théorèmes spéciaux mais très variés qu'on peut obtenir à l'aide des théorèmes VII et VIII du n° 18, Unkelbach [1] et deux résultats dus à Chepelev et Lavrentieff [1], 1937, p. 319-322.

21. Longueur des transversales rectilignes comme paramètre. — Signalons maintenant des inégalités qui s'obtiennent en combinant le lemme de Lœwner-Montel avec le résultat du théorème I, n° 13. Les premières ont été obtenues implicitement par Carleman [1] dans le mémoire cité plus haut, sans qu'il y soit naturellement question explicitement de mesure conforme. (*Cf.* R. Nevanlinna [3], p. 67-68.)

I. *Soit* z_0 *un point intérieur à* D, *désignons par* $\theta(\xi)$ *la longueur totale de l'ensemble des segments* θ_ξ *de la droite* $\mathfrak{R}z = \xi > \mathfrak{R}z_0$ *située à l'intérieur de* D *ou sur* F(D) *et par* D_ξ *celui des domaines simplement connexes dans lesquels* D *est décomposé par* θ_ξ, *qui contient* z_0. *Alors*

$$m_{D_\xi, z_0}\theta_\xi \leqq 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{\theta(\xi)}{2(\xi - \mathfrak{R}z_0)}.$$

On obtient, toujours avec Carleman [1], sous les hypothèses de I, un résultat plus précis qui découle de l'inégalité différentielle

$$\frac{d \log m_{D_\xi, z_0}\theta_\xi}{d\xi} \leqq -\frac{4}{\pi\,\theta(\xi)}.$$

II. *On a, si*

$$\mathfrak{R}z_0 \leqq \xi_1 < \xi_2$$

$$m_{D_{\xi}, z_0}\theta_{\xi_2} \leqq (m_{D_{\xi}, z_0}\theta_{\xi_1})\, e^{-\frac{4}{\pi}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{d\xi}{\theta(\xi)}}$$

(R. Nevanlinna [3], p. 71.)

III. *Soient* D *un domaine simplement connexe limité par les arcs de Jordan* $\alpha' + \beta'' + \alpha'' + \beta'$ *pris dans cet ordre et* L *un arc rectifiable situé à l'intérieur de* D *reliant* β' *à* β'' *sans couper* $\alpha' + \alpha''$. *L'arc étant pris pour paramètre sur* L, *désignons par* $\rho(s)$ *la distance du point de* L *de paramètre* s *à* $\alpha' + \alpha''$; *alors, on a*

$$m_{D,z}(\beta' + \beta'') > \frac{1}{2\pi} e^{-2\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{(s)}}.$$

(R. Nevanlinna [3], p. 78.)

Passons enfin aux théorèmes d'Ahlfors sur les oscillations des transversales rectilignes dans la transformation conforme.

Soient z_1 et z_2 deux points iac. de F(D), $\mathfrak{R}z_1 < \mathfrak{R}z_2$. Pour plus de commodité, supposons que pour chaque ξ tel que $\mathfrak{R}z_1 < \xi < \mathfrak{R}z_2$ la droite $\mathfrak{R}z = \xi$ coupe D suivant un segment θ_ξ dont la longueur est $\theta(\xi)$. Représentons D conformément sur la bande $|v| < \frac{a}{2}$, $a > 0$, du plan des $w = u + iv$, de telle sorte que z_1 et z_2 aillent respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

Soient $u_2(\xi)$, $u_1(\xi)$ la plus grande et la plus petite valeur de u sur l'image de θ_ξ, alors on a l'inégalité fondamentale d'Ahlfors :

IV. *Si*

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\theta(\xi)} > 2 \qquad \textit{pour} \quad \xi_1 < \xi_2,$$

alors

$$u_1(\xi_2) - u_2(\xi_1) \geqq a \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\theta(\xi)} - 4a.$$

On peut aisément s'affranchir de la restriction que la droite portant θ_ξ ne recoupe plus D, nous renvoyons pour cela à Ahlfors [1] et aux exposés des traités de Bieberbach [1], p. 281-284 et R. Nevanlinna [3], p. 87-92.

Sous quelques hypothèses essentiellement plus restrictives que celles de IV, Ahlfors [1], p. 12-17, a établi une borne supérieure pour $u_2(\xi) - u_1(\xi)$: « 2-*te* Hauptungleichung ». Le résultat suivant analogue à la « 2-*te* Hauptungleichung » a été déduit très simplement de IV par Grootenboer.

Soient en plus des hypothèses ci-dessus, $z_2 = +\infty$ et supposons que $D + F(D)$ soit dans la bande $|\mathfrak{J}z| < \frac{b}{2}$ et contienne pour $\mathfrak{R}z > x_0$ la demi-bande $|\mathfrak{J}z| < \frac{hb}{2}$, $\mathfrak{R}z > x_0$ pour un h fixe, $0 < h < 1$. Si $x_2(u)$, $x_1(u)$ sont pour $u > u_0$ la plus grande et la plus petite valeur de $\mathfrak{R}(z)$ sur l'image du segment $\mathfrak{R}w = u$, $|\mathfrak{J}w| < \frac{a}{2}$, on a

V. *Si* $u_2 - u_1 > 2a$ *et* $x_1(u_1) \geqq x_0$

$$x_1(u_2) - x_2(u_1) \geqq \frac{hb}{a}(u_2 - u_1) - 12b.$$

(Grootenboer [1], p. 30; [2], p. 131-133).

22. Les résultats de Beurling. — Dans sa thèse (1933), Beurling [1] a abordé le problème de l'évaluation de la mesure conforme pour les *grandeurs euclidiennes* (par exemple : angle ordinaire, longueur, aire) par une méthode très générale et féconde en applications.

Puisqu'une grandeur euclidienne n'est pas invariante vis-à-vis des TC, pour obtenir de tels invariants, on considère toutes les valeurs de la grandeur géométrique en question pour tous les systèmes d'éléments géométriques impliqués dans sa définition et se déduisant l'un de l'autre par TC (systèmes homologues). Les bornes supérieures et inférieures de toutes les valeurs de la grandeur géométrique considérée sont alors des invariants relativement aux TC.

Considérons par exemple la distance intérieure $\rho(z, z_0, D)$ dans D des points z et z_0. Si D a une aire égale à πR_D^2, posons

$$l(z, z_0, D) = \frac{\rho(z, z_0, D)}{R_D},$$

qui est appelée *distance réduite* dans D de z à z_0. Appliquons à D toutes les TC imaginables et formons les distances réduites des points correspondants z' et z'_0 dans le domaine D′ correspondant; leur borne inférieure $\lambda(z, z_0, D)$ appelée *distance extrémale* de z à z_0 dans D, est évidemment invariante par rapport aux TC.

Cette fonction $\lambda(z, z_0, D)$ est reliée à la fonction de Green $g(z, z_0, D)$ du domaine D par la relation remarquable découverte et démontrée par Beurling [1], p. 29-30,

$$e^{-2g} + e^{-\lambda^2} = 1. \tag{1}$$

Si z ou z_0 ou tous deux sont remplacés par un ensemble de points intérieurs de D ou de points iac. de F(D), on obtient une définition tout à fait semblable.

A l'aide de la fonction λ on obtient la limitation suivante pour la mesure conforme (Beurling [1]. p. 30).

I. *Soit* γ *un ensemble mesurable de points* iac. *de* F(D), *on a*, *z étant un point intérieur à* D,

$$m_{D, z, \gamma} \leqq 2\pi e^{1-\lambda^2(z, \gamma, D)}.$$

Si γ *est un arc frontière, c'est à-dire correspond dans la* TC *sur* C-U *à un arc de* K-U, *on a*

$$m_{D, z, \gamma} > 4 e^{-\lambda^2(z, \gamma, D)}.$$

Notons encore quelques propriétés, établies par Beurling [1], p. 42, de la fonction λ pour un domaine simplement connexe

$$\lambda^2(z_1, z_3, D) < \lambda^2(z_1, z_2, D) + \lambda^2(z_2, z_3, D) + \log 4,$$
$$\lambda^2(z_1, \gamma, D) < \lambda^2(z_2, \gamma, D) + \lambda^2(z_1, z_2, D) + \log 2\pi e.$$

La deuxième de ces relations se démontre à l'aide du lemme suivant de Beurling [1], p. 43.

Soit $\mu(z)$ *une fonction harmonique régulière et positive dans le domaine* D *simplement connexe. Alors, on a*

$$\log \frac{\mu(z_2)}{\mu(z_1)} < \lambda^2(z_1, z_2, D) + \log 4,$$

z_1 et z_2 *étant deux points quelconques de* D.

II. *Soient* γ *un ensemble de points iac. de* F(D) *et* z *un point intérieur à* D. *Désignons par* $r(z, D)$ *la distance (ordinaire) de* z *à* F(D), *par* $r(z, \gamma)$ *la distance (ordinaire) de* z *à* γ; *on a alors*

$$m_{D,z}\,\gamma \leq 8 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{r(z, D)}{r(z, \gamma)}};$$

l'inégalité est exacte, *l'égalité pouvant avoir lieu quelle que soit la valeur de* $\frac{r(z, D)}{r(z, \gamma)}$ (Beurling [1], p. 55).

Signalons enfin deux résultats assez généraux obtenus par Julia dans un mémoire [2] antérieur à celui de Beurling.

III *Soit* γ *un arc de Jordan rectifiable contenu dans* F(D) *le long duquel la tangente est une fonction continue de l'arc satisfaisant à la condition de Lipschitz d'ordre* 1. *Désignons par* $\overline{\gamma}$ *un arc fermé de Jordan contenu ainsi que ses extrémités à l'intérieur de* γ. *Soit* D′ *une partie de* D *limitée par* $\overline{\gamma}$ *et une transversale de* D *joignant les extrémités de* $\overline{\gamma}$. *Alors on a, si* z *reste dans* D′ *et que* d *représente la distance de* z *à* γ,

$$\lambda_1(D, \gamma, D') < \frac{m_{D,z}\,\gamma}{d} < \lambda_2(D, \gamma, D'),$$

où λ_1 *et* λ_2 *sont deux constantes positives ne dépendant que de* D, D′ *et* γ.

IV. *Supposons que les conditions de* III *soient remplies, sauf en un point* z_0 *intérieur à* $\overline{\gamma}$, *où les deux parties de* $\overline{\gamma}$ *forment l'angle* $\pi\alpha$ *entre elles. Alors, au lieu de l'inégalité de* III, *on a*

$$\lambda_1(D, \gamma, D') < \frac{m_{D,z}\gamma}{d\,|z - z_0|^{\frac{1}{\alpha}-1}} < \lambda_2(D, \gamma, D').$$

23. La méthode de l'intégrale de Dirichlet. — L'emploi du lemme de Lœwner-Montel conduit à des évaluations très précises et s'adapte bien aux configurations géométriques qu'on a à considérer; toutefois, il est essentiel qu'une seule portion *connexe* de la frontière soit variée. Si des variations ont lieu à la fois en plusieurs endroits, on ne peut pas obtenir par cette méthode, aussi aisément, des renseignements sur les altérations de la mesure conforme aux différents endroits. Par contre, la méthode de l'intégrale de Dirichlet, qui, il est vrai, fournit des évaluations moins précises, est beaucoup moins « sensible » aux variations de la frontière à l'extérieur d'un certain voisinage du lieu considéré.

Un théorème utile dans cette question est le lemme suivant de Wolff [4], qui s'appuie sur l'intégrale de Dirichlet et une inégalité portant sur l'aire du domaine image dans C-U

$$\int\int_{D} \left|\frac{d\Omega}{d\zeta}\right|^2 \rho\, d\rho\, d\varphi \leq \pi.$$

Soit α *un point de* F(D) *tel qu'il existe des points de* D *distants de* α *de plus de* h, *positif fixe. Soit* $\Omega(\zeta)$ *une fonction holomorphe et univalente dans* D *avec* $|\Omega| < 1$. *Désignons par* C_ρ *la circonférence de centre* α *et de rayon* ρ ($\rho < h$) *et par* $\sigma(\rho)$ *l'ensemble des arcs de* C_ρ *qui sont intérieurs à* D. *La longueur* $\lambda(\rho)$ *de l'image de* $\sigma(\rho)$ *par* $\Omega(\zeta)$ *possède alors la propriété suivante :*

Soient $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *tel que* $\delta \leq e^{-\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}}$. *Alors on a*

$$\lambda(\rho) \leq \left\{ 2\pi\rho \int_{\sigma(\rho)} \left|\frac{d\Omega}{d\zeta}\right|^2 d\varphi \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_{\delta^2}^{\delta} |\lambda(\rho)|^2 \frac{d\rho}{\rho} \leq 2\pi^2,$$

et il existe un ρ *avec* $\delta^2 < \rho < \delta$ *pour lequel* $\lambda(\rho) \leq \varepsilon$ (Wolff [4]).

Un résultat analogue, un peu plus faible, a été établi antérieurement par Tsuji [1], qui a été inspiré par la manière dont Gross [1], [2], [3] avait utilisé l'intégrale de Dirichlet. Un résultat particulièrement important, dans la même direction, a été établi par Denjoy [3];

II. *Si* D_ζ *est borné on a pour presque chaque point* z_0 *de* K-U :

$$\sqrt{|z-z_0|}\;\varphi'(z) \to 0 \qquad (z \to z_0)$$

(*cf.* également Denjoy [4] et Wolff [6], [7]).

INDEX DES TERMES [1].

(1) Le nombre entre parenthèses renvoie au numéro où ce terme a été introduit pour la première fois.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE (13).

L. AHLFORS [1], *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen* (*Acta Soc. Sci. Fennicæ*, 2e sér., A, no 9, 1930, p. 1-40) (11, 21, 21).

A. BEURLING [1], *Études sur un problème de majoration* (*Thèse*, Upsal, 1933, p. 1-109) (16, 16, 17, 19, 22, 22, 22, 22, 22, 22).

L. BIEBERBACH [1], *Lehrbuch der Funktionentheorie*, t. II, 2e éd., 1927 (11, 21).

M. BIERNACKI [1], *Sur l'allure de la représentation conforme dans le voisinage d'un point exceptionnel* (*Mathematica*, t. 5, 1931, p. 1-6) (13,13).

C. CARATHÉODORY [1], *Ueber die Begrenzung einfach zuzammenhaengender Gebiete* (*Math. Ann.*, t. 73, 1913, p. 323-370) (2, 3, 4, 6, 7, 7, 7, 7, 12, 12, 12).

[2] *Ueber die gegenseitige Beziehung der Raender bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis* (*Math. Ann.*, t. 73, 1913, p. 305-320) (14).

[3] *Ueber die Winkelderivierten von beschraenkten analytischen Funktionen* (*Sitzungsber. Akad. Berlin*, 1929, p. 39-54) (11, 11, 11, 11).

[4] *Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen* (*Schwarz Festschrift*, 1914, p. 19-41) (17).

[5] *Zur Rænderzuordnung bei konformer Abbildung* (*Gœtt. Nach.*, 1913, p. 509-518) (14).

T. CARLEMAN [1], *Sur les fonctions inverses des fonctions entières d'ordre fini* (*Ark. för Math.*, t. 15, no 10, 1921, p. 1-7) (15, 17, 21, 21).

[2] *Leçons sur les fonctions quasi analytiques*, Paris, 1926, p. 1 116 (8, 19).

V. CHEPELEV et M. LAVRENTIEFF [1], *Sur quelques propriétés des fonctions univalentes* (en russe) (*Rec. Math. Moscou*, 2e sér., t. 2, 1937, p. 319-326) (20).

R. COURANT [1], *Ueber eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung* (*Gött. Nach.*, 1914, p. 101-109) (14, 14, 14).

[2] Bemerkung zu meiner Note : *Ueber eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung* (*Gött. Nach.*, 1922, p. 69-70) (14).

[3] *Plateau's problem and Dirichlet's principle* (*Ann. of Math.*, II, t. 38, 1937, p. 679-724) (14).

F. VON DALWIGK [1], *Ueber die Integration von $\Delta u = 0$ und die konforme Abbildung* (*Habilitationsschrift*, Marburg, 1897, p. 1-53) (14).

(13) Nous avons fait suivre chaque Mémoire de nombres entres parenthèses, qui renvoient aux numéros du fascicule où ce Mémoire est cité et ce autant de fois qu'il a été cité.

A. DENJOY [1]. *Représentation conforme des aires limitées par des continus cycliques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1941, p. 975-977) (14,23).

[2], *Les continus cycliques et la représentation conforme* (*Bull. Soc. math. de France*, t. 70, 1943) (14).

[3] *Sur la représentation conforme des aires planes* (*Mathematica*, XX, 1944, p. 73-89) (23).

Jessie DOUGLAS [1], *Solution of the problem of Plateau* (*Trans. Am. M. S.*, t. 33, 1931, p. 261-321) (14).

G. FABER [1], *Ueber den Hauptsatz aus der Theorie der konformen Abbildung* (*Muench. Ber.*, 1922, p. 91-100) (12).

O. J. FARELL [1], *On approximation to a mapping function by polynomials* (*Am. J. of Math.*, t. 54, 1932, p. 571-578) (12, 14).

L. FEJÉR [1], *Ueber die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene* (*Schwarz Festschrift*, 1914, p. 42-54) (12, 14).

Jacqueline FERRAND [1], *Étude de la représentation conforme au voisinage de la frontière* (*Annales Éc. Norm. supér.*, 1942, p. 43-106) (12).

[2] *Étude de la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme* (*Bull. Soc. math. de France*, 1943, t. 70) (1, 12, 16, 19).

[3] *Sur la représentation conforme au voisinage d'un point frontière* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 212, 1941, p. 977).

[4] *Sur l'itération des fonctions analytiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 212, 1941, p. 1068).

F. FRANKL [1], *Zur Primendentheorie* (*Rec. Math. Moscou*, t. 38, 1931, p. 66-69). (7).

B. GROOTENBOER [1], *Over het gedrag van een conforme afbeelding bij een randpunt* (*Thèse*, Utrecht, 1932, p. 1-54) (21).

[2] *Sur la représentation conforme des domaines simplement connexes au voisinage des frontières* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 61, 1933, p. 128-140) (2).

W. GROSS [1], *Ueber die Singularitäten analytischer Funktionen* (*Wiener Monatshefte*, t. 29, 1918, p. 3-47) (7, 7, 23).

[2] *Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen* (*Math. Ztsch.*, t. 2, 1918, p. 242-294) (13, 13, 23).

[3] *Zum Verhalten der konformen Abbildung am Rande* (*Math. Ztsch.*, t. 3, 1919, p. 43-64) (13, 23).

G. H. HARDY, A. E. INGHAM et G. PÓLYA [1], *Theorems concerning mean values of analytic functions* (*Proc. Roy. Soc. London*, A, t. 113, 1927, p. 542-569) (9).

A. HARNACK [1], *Grundlagen des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunktion*, Leipzig 1887 (8).

E. A. HINTIKKA [1], *Ueber das Verhalten der Abbildungsfunktion auf dem Rande des Bereiches in der konformen Abbildung* (*Thèse*, Helsingfors, 1912) (14).

A. E. INGHAM, G. H. HARDY et G. PÓLYA. — *Voir* G. H. HARDY, A. E. INGHAM et G. PÓLYA.

J. L. W. V. Jensen [1], *Investigation of a class of fundamental inequalities in the theory of analytic functions* (*Ann. of Math.*, t. 21, 1919, p. 1-29) (10, 11).

G. Julia [1], *Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz* (*Acta Math.*, t. 42, 1920, p. 349-355) (11, 11).

[2] *Sur quelques majorantes utiles dans la théorie des fonctions analytiques ou harmoniques* (*Ann. Éc. Norm. supér.*, t. 48, 1931, p. 15-64) (18, 19, 19, 22).

B. von Kerékjártó [1], *Vorlesungen über Topologie*, Berlin, 1923 (2, 5).

A. Khintchine [1], *Sur les suites des fonctions analytiques bornées dans leur ensemble* (*Fund. math.*, t. 4, 1923, p. 72-75) (15).

P. Kœbe [1], *Ränderzuordnung bei konformer Abbildung* (*Gött. Nach.*, 1913, p. 286-288) (8, 14).

[2] *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. I. Die Kreisabbildungen des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung* (*Journ. f. Math.*, t. 146, 1915, p. 177-225) (2, 4, 8, 8, 12, 12, 14).

[3] *Ueber das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie* (*Math. Ztsch.*, t. 6, 1920, p. 52-84) (10, 11).

E. Landau [1], *Darstellung und Begruendung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin, 1916, 1re éd. (12).

E. Landau et G. Valiron [1], *A deduction from Schwarz lemma* (*J. L. M. S.*, t. 4, 1929, p. 162 163) (11, 11).

M. Lavrentieff [1], *Sur la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, 1927, p. 1407-1409) (13, 16).

[2] *Sur la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme* (*Rec. Math. Moscou*, t. 36, 1929, p. 112 115) (13, 16).

[3] *Sur la théorie des transformations conformes* (en russe) (*Trav. Inst. Stekloff*, t. 5, 1934, p. 159-245) (12, 12, 12, 16, 19, 19).

[4] *Sur la continuité des fonctions univalentes* (*C. R. Acad. U. R. S. S.*, 1936, p. 1-4) (12, 12).

M. Lavrentieff et V. Chepelev. — *Voir* V. Chepelev et M. Lavrentieff.

L. Lichtenstein [1], *Ueber das Poissonsche Integral und ueber die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials* (*Journ. f. Math.*, t. 141, 1912, p. 12-42) (10).

[2] *Neuere Entwicklungen der Potentialtheorie. Konforme Abbildung* (*Enzyklopädie der Math. Wiss.*, II, 3*i*, p. 177-377) (14, 14).

E. Lindelöf [1], *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (*Acta. Soc. Fennicæ*, t. 35, nº 7, 1909) (10, 11, 11).

[2] *Sur la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 158, 1914, p. 245-247) (14).

[3] *Sur un principe général de l'analyse et ses applications à la représentation conforme* (*Acta Soc. Fennicæ*, t. 46, nº 4, 1915, p. 1-35) (9, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 15).

K. LOEWNER [1], *Untersuchungen ueber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises* I. (*Math. Ann.*, t. 89, 1923, p. 103 121) (16, 17).

J. MC SHANE [1], *On the Osgood-Carathéodory theorem* (*Ann. Math. Monthly*, t. 44, 1937, p. 288-291) (14).

A. MARKOUCHEVITCH [1], *Sur la représentation conforme des domaines à frontière variable* (*Rec. Math. Moscou*, 2e sér., t. 1, 1936, p. 863 884) (14, 14).

H. MILLOUX [1], *Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières* (*Journ. de Math.*, 9e sér., t. 3, 1924, p. 345-401) (19).

P. MONTEL [1], *Sur la représentation conforme* (*Journ. de Math.*, 7e sér., t. 3, 1917, p. 1 54) (12, 13, 13, 14, 17).

[2] *Leçons sur les familles normales*, Paris, 1927 (7, 12).

[3] *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes*, Paris, 1933 (13).

F. et R. NEVANLINNA [1], *Ueber die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie* (*Acta Soc. Fennicæ*, t. 50, no 5, 1922) (15).

R. NEVANLINNA [1], *Asymptotische Entwicklungen beschrankter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem* (*Ann. Ac. Fennicæ*, A, t. 18, no 5, 1922) (11, 17).

[2] *Ueber eine Minimalaufgabe in der Theorie der konformen Abbildung* (*Gött. Nach.*, 1933, p. 103 115) (16, 16, 16, 17, 17, 19).

[3] *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin, 1936 (11, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 21, 21, 21, 21).

[4] *Ueber beschraenkte analytische Funktionen* (*Commentationes in honorem Ernesti Leonardi Lindelof*, Helsinki, 1929, p. 1-75, en particulier p. 16 et suiv.) (11).

[5] *Remarques sur le lemme de Schwarz* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 1027-1029) (11).

R. et F. NEVANLINNA. — *Voir* F. et R. NEVANLINNA.

W. F. OSGOOD [1], *On the transformation of the boundary in the case of conformal mapping* (*Bull. A. M. S.*, 2e sér., t. 9, 1903, p. 233-235) (12, 14).

W. F. OSGOOD et E. M. TAYLOR [1], *Conformal transformation on the boundaries of their regions of definition* (*Trans. A. M. S.*, t. 14, 1913, p. 277 298) (12, 14).

A. OSTROWSKI [1], *Ueber die Bedeutung der Jensenschen Formel für die komplexe Funktionentheorie* (*Acta Univ. Szeged*, t. 1, 1923, p. 80-87) (15).

[2] *Ueber quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen* (*Acta Math.*, t. 53, 1929, p. 181-266) (13, 16).

[3] *Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung* (à la mémoire de L. Lichtenstein) (*Prace Math. Fisyz.*, t. 44, 1936, p. 371-471) (10, 10, 10, 10, 10, 10, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 19, 20).

P. PAINLEVÉ [1], *Sur la théorie de la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 112, 1891, p. 653-657) (14).

[2] *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Thèse*, Paris, 1887, p. 1-136) (8, 15).

E. PICARD [1], *Sur quelques points de l'histoire des représentations conformes* (*Ann. Éc. Norm. supér.*, t. 32, 1915, p. 233-236) (14).

G. PICK [1], *Ueber die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschraenktes Gebiet* (*Wiener Sitzber.*, II *a*, t. 126, 1917, p. 1-17) (13).

G. PÓLYA et G. SZEGOE [1], *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, t. II, Berlin, 1925 (17).

G. PÓLYA, G. H. HARDY et A. E. INGHAM. — *Voir* G. H. HARDY, A. E. INGHAM et G. PÓLYA.

T. RADO [1], *Sur la représentation conforme des domaines variables* (*Acta Univ. Szeged*, t. 1, 1923, p. 180 186) (14, 14).

M. RIESZ [1], *Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions avec quelques remarques sur les géométries non euclidiennes* (*Kungl.-Fysiogr. Sälskapetsi, Lund Foeshandlinger*, t. 1, 1931, p. 18-38) (11).

E. SCHMIDT [1], *Ueber den Millouxschen Satz* (*Sitz. Ber. Akad. Bertin*, 1932, p. 394-401) (19).

E. STUDY [1], *Konforme Abbildung einfach zusammenhaengender Bereiche*, Berlin, 1913 (13, 13).

G. SZEGOE et G. PÓLYA. — *Voir* G. PÓLYA et G. SZEGOE.

E. H. TAYLOR [1], *On the transformation of the boundary in conformal mapping* (*Bull. A. M. S.*, t. 16, 1909, p. 454-455) (14).

E. H. TAYLOR et W. F. OSGOOD. — *Voir* W. F. OSGOOD et E. H. TAYLOR.

M. TSUJI [1], *On the theorems of Carathéodory and Lindelöf in the theory of conformal representation* (*Japanese Journ. of Math.*, t. 7, 1930, p. 91-99) (12, 12, 13, 23).

H. UNKELBACH [1], *Abschätzung der Bildlänge von Randelementen bei konformer Abbildung auf den Einheitskreis* (*Muench. Ber.*, 1936, p. 257-268) (18, 18, 20),

[2] *Ueber die Randverzerrung bei konformer Abbildung* (*Math. Ztsch.*, t. 43, 1938, p. 739 742) (11, 17).

[3] *Ueber beschränkte Funktionen, deren Wertevorrat gewisse Lücken aufweist* (*Math. Ann.*, t. 115, 1938, p. 205-236) (11, 17).

P. URYSOHN [1], *Ueber eine Carathéodorysche Aufgabe* (*Rec. Math. Moscou*, t. 31, 1922, p. 86 90) (7).

C. DE LA VALLÉE-POUSSIN [1], *Application de l'intégrale de Lebesgue au problème de la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur un cercle* (*Ann. Soc. Bruxelles*, t. 50, A, 1930, p. 23-34) (12, 12, 13).

[2] *Utilisation de la méthode du balayage dans la théorie de la représentation conforme* (*Bull. Ac. Roy. Belg.*, 5e sér., t. 18, 1932, p. 385-400) (14).

G. VALIRON [1], *Sur un lemme de M. Julia étendant le lemme de Schwarz* (*Bull. Soc. Math.*, 2e sér., t. 53, 1927, p. 70-76) (11).

[2] *Sur l'itération des fonctions holomorphes dans un demi-plan* (*Bull. Soc. Math.*, 2e sér., t. 55, 1931, p. 105-128) (11).

G. VALIRON et E. LANDAU. — *Voir* E. LANDAU et G. VALIRON.

C. VISSER [1], *Sur les limites des fonctions bornées à la frontière de leur domaine d'existence* (*Nieuw. Arch. Wiskde*, t. 17, 1932, p. 147-150) (11).

[2] *Ueber beschränkte analytische Funktionen und die Randverhältnisse bei konformen Abbildungen* (*Math. Ann.*, t. 107, 1932, p. 28-29) (10, 11).

[3] *Sur la dérivée angulaire des fonctions univalentes* (*Proc. Akad. Amsterdam*, t. 38, 1935, p. 402-411) (11).

[4] *On a certain class of conformal mapping* (*Proc. Akad. Amsterdam*, t. 40, 1937, p. 223-226) (19).

J. WANSINK [1], *Eenige randproblemen der conforme afbeelding* (*Thèse*, Utrecht, 1931, XII + 92 pages) (16).

S. WARSCHAWSKI [1], *Ueber das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung* (*Math. Ztsch.*, t. 35, 1932, p. 321-456) (16, 17).

[2] *Bemerkungen ueber Randableitungen positiver Potentialfunktionen* (*Math. Ann.*, t. 107, 1932, p. 1-27) (11).

V. WENIAMINOFF [1], *Sur un problème de la représentation conforme de M. Carathéodory* (*Rec. Math. de Moscou*, t. 31, 1922, p. 91-93) (7).

J. WOLFF [1], *Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 183, 1926, p. 500-502) (11).

[2] *Sur la représentation conforme* (*Proc. Akad. Amsterdam*, t. 33, 1930, p. 96-97) (14, 16).

[3] *Quelques propriétés des fonctions holomorphes dans un demi-plan dont toutes les valeurs sont dans ce demi-plan* (*Proc. Amsterdam*, t. 33, 1930, p. 1185-1188) (11, 11).

[4] *Sur la représentation conforme des bandes* (*Comp. Math.*, t. 1, 1934, p. 217-222) (23, 23).

[5] *Une propriété de la représentation conforme des bandes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 198, 1934, p. 707-709) (13).

[6] *Inégalités remplies par les fonctions univalentes* (*Proc. Akad. Amsterdam* t. 44, p. 956-963, 1163) (23).

[7] *Deux théorèmes sur la dérivée d'une fonction holomorphe, univalente et bornée dans un demi plan au voisinage de la frontière* (*Proc. Akad. Amsterdam*, t. 45, 1942, p. 574-577) (23).

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

La mesure conforme.

123988. Paris. — Imp. Gauthier Villars, 55, quai des Grands Augustins.
Dépôt légal imprimeur 1949, n° 471 | Dépôt légal éditeur 1949, n° 222
Achevé d'imprimer le 15 avril 1949.