MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

A. GUILLET
M. AUBERT

Propriétés des polynômes électrosphériques

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 107 (1948)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1948__107__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CVII

Propriétés des polynomes électrosphériques

Par MM. A. GUILLET et M. AUBERT

Rédigées avec la collaboration de M. M. PARODI

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1948

PROPRIÉTÉS

DES

POLYNOMES ÉLECTROSPHÉRIQUES

Par MM. A. GUILLET et M. AUBERT,

rédigées avec la collaboration de M. M. PARODI.

AVANT-PROPOS.

Les dons les plus rares de l'intelligence ont sans doute emploi dans le développement de toute science; mais n'est-il pas évident que la Physique, en raison de la complexité de son objet, dépasse toujours le niveau auquel peut atteindre le Physicien. Réfléchissez aux intuitions et aux spéculations si spéciales qu'elle exige, à leur caractère d'attente et de décevante mobilité, à la nécessité d'une incessante intervention de toute notre gamme sensorielle, au souci impérieux de ne rien omettre des subtilités d'une expérimentation d'ailleurs sans limites. Tout cela constitue autant d'obstacles aux élans de notre esprit vers la nature. Il faut bien saisir qu'une sorte de sentiment esthétique de l'harmonie des mécanismes invoqués, de vague philosophie phénoménologique ne suffisent plus; il faut aujourd'hui réaliser sans arrêt, c'est-à-dire *calculer* et *construire* avec rapidité et perfection, d'où une double technique, en vérité impossible à dominer par un seul.

Nous nous occuperons ici uniquement du calcul.

C'est à la bienveillance très éclairée de M. le Professeur Villat, Directeur du Mémorial, que nous devons la satisfaction d'avoir rédigé cet opuscule. Notre dessein est seulement d'y présenter, dans le cas d'un problème particulièrement simple, un exposé assez complet de ce que sera de plus en plus, en Physique, l'intervention des mathématiques. Nous ne pouvons pas nous attarder à caractériser la variété des modalités d'emploi des mathématiques en Physique, nous nous supposerons d'emblée en face de problèmes conduisant à des formules impossibles à discuter en elles-mêmes, analytiquement, leur valeur ne pouvant être atteinte dans chaque cas considéré que par des calculs numériques souvent d'un labeur extrême. Il faut alors opérer par coupes, par cas discontinus, explicités les uns après les autres pour fixer comment évoluent les grandeurs à suivre. En de telles occurences, des fonctions, en corrélation avec les phénomènes étudiés, s'imposent, dont il devient nécessaire de dresser *a priori* des tables et qui servent au calcul effectif des expressions qui figurent dans les formules correspondantes.

Tout cela est développé dans cette étude portant sur les caractéristiques d'un système formé par une sphère et un plan, ou par deux sphères (conducteurs).

La fonction qui s'est présentée d'elle-même au cours de nos raisonnements pour exprimer les capacités, les coefficients d'induction réciproque, les actions attractives ou répulsives, les densités de répartition, etc., dans ces systèmes est une fonction que nous avons qualifiée *d'électrosphérique*, pour marquer son rôle, dont nous avons établi les propriétés et dressé des tables où figurent en outre des puissances et des dérivées de cette fonction.

Réduit à sa stricte expression le problème traité revient à substituer à chacun des centres des deux sphères la série des points conjugués du système pour les deux sphères à partir de ces centres, séries limitées aux points de Poncelet, puis à affecter chacun d'eux d'une charge telle qu'il y ait identité dans l'espace extérieur aux sphères entre tous les effets électrostatiques des charges portées soit par les deux sphères, soit par les deux séries de centres.

Mais la fonction électrosphérique qui répond à cette fin, la dépasse en extension logique car elle s'applique à la résolution de problèmes distincts de celui dont on l'a tirée, concernant par exemple la théorie des nombres, l'inscription de polygones de m côtés dans des circonférences divisées en n parties égales, et sans doute à d'autres cas.

Sans insister outre mesure nous montrerons enfin l'étroit parallélisme, au moins de forme, qui rapproche les fonctions électrosphériques de celles si étudiées d'Hermite, de Legendre, etc. Il peut arriver qu'en raison de la présence de séries ces calculs exigent plusieurs mois alors même que l'on s'efforce d'élaborer des procédés mettant en œuvre des convergences rapides. Mais cela importe peu puisque les calculs une fois effectués sont acquis pour toujours. Et c'est d'ailleurs avec de telles méthodes que nos jeunes chercheurs doivent être maintenant familiarisés : c'est une condition essentielle du progrès.

En résumé, on doit être assuré que tout groupe de phénomènes physiques cohérents présente nécessairement un mode particulier d'évolution conduisant à des considérations mathématiques en dépendance de forme avec ces phénomènes.

Il est visible que les mathématiques s'accroissent surtout par l'observation approfondie des divers ensembles de phénomènes dans lesquels on peut répartir les activités de la nature.

C'est bien une telle vue qui préoccupe Huyghens lorsqu'il insiste, dans la Préface de son merveilleux Traité de la lumière, sur les différences des raisonnements en géométrie et en physique; de Pascal, lorsqu'il proclame que l'esprit se lasse beaucoup plus vite de concevoir que la Nature de fournir; de Fresnel qui n'envisage l'explication des phénomènes optiques de diffraction qu'après s'être convaincu que la Nature ne se préoccupe pas des complications mathématiques possibles, mais seulement de l'économie et de la simplicité des moyens qu'elle emploie. Si une telle opinion n'était évidente, on l'appuierait aisément sur les œuvres de nos plus illustres Savants et sur des exemples nombreux et précis (¹).

Il sera d'ailleurs facile au lecteur d'en trouver une preuve directe

(¹) *Voir* l'intervention des *fonctions d'Hermite* dans la théorie de l'oscillation harmonique linéaire, des fonctions de Legendre et de Laguerre dans l'interprétation de la fonction de Schrodiger. Cas de l'atome d'hydrogène, Note II, p. 405 de l'ancienne et de la nouvelle théorie des quanta, par Fugène Bloch.

en complétant cette brochure par la résolution des problèmes suivants :

a. Répartition de la densité électrique σ à la surface d'un tore porté au potentiel V en présence d'une charge ponctuelle influençante Q_e placée sur l'axe du tore.

b. Calcul de l'énergie électrostatique et de la force qui s'exerce entre les armatures des systèmes formés : d'un plan indéfini et d'un tore dont l'axe est perpendiculaire au plan ; d'un tore et d'une sphère dont le centre est sur l'axe du tore ; de deux tores coaxiaux, les armatures étant portées respectivement aux potentiels V et v. Capacités et coefficients d'influence des armatures.

Ainsi se trouverait complètement traitée, dans ses éléments essentiels, l'importante question de l'électrostatique des corps vraiment ronds.

Que le lecteur soit bien assuré qu'en conduisant ses recherches selon l'esprit de la méthode que nous exposons, il sera toujours conduit à enrichir les Mathématiques de données nouvelles et la Physique de ressources inattendues.

NOTE.

Ce fascicule devait paraître initialement en 1939. Du fait de la guerre, il subit un retard de neuf ans. M. A. Guillet étant décédé dans l'intervalle, je tiens à rendre ici hommage à sa mémoire. J'ai eu l'honneur d'être son élève, son collaborateur et son ami.

Depuis la rédaction première, diverses nouvelles propriétés des polynomes électrosphériques ont été découvertes par M. Parodi qui a montré le parti que l'on pouvait tirer de ces fonctions dans diverses questions. M. M. Parodi a bien voulu me faire le plaisir de collaborer avec moi pour la rédaction définitive. Je l'en remercie vivement.

M. AUBERT.

CHAPITRE I.

LES POLYNOMES ÉLECTROSPHÉRIQUES.

1. Origine des fonctions électrosphériques [1]. — On a vu dans le fascicule XXXVIII du *Mémorial des Sciences physiques* comment un système électrisé plan-sphère P, S, étant donné, la loi de Coulomb permettait de lui substituer un système équivalent constitué par deux séries de points distribués sur la droite perpendiculaire à P, menée par le centre O de S

$$\begin{array}{l} O,\ O_1,\ O_2,\ \ldots\ O_p, \\ \quad O',\ O'_1,\ \ldots,\ O'_{p-1},\ O'_p,\ \ldots, \end{array}$$

les points primés étant déduits des points non primés correspondants par symétrie relative au plan P et les points superposés par conjugaison harmonique pour S. Ces points sont d'ailleurs affectés de coefficients qui sont les charges images calculées.

Dans le cas de deux sphères S_A, S_B les deux séries de points proviennent des conjugués pris alternativement par rapport à S_A, S_B en partant d'abord, par exemple, de S_A, puis de S_B. L'une des séries est intérieure à S_A, l'autre à S_B.

C'est au cours du calcul des caractéristiques de ces systèmes : capacités, coefficients d'influence, action électrostatique entre les armatures que se sont présentées différentes suites de polynomes sur lesquels nous désirons attirer l'attention; ceci nous paraît d'autant plus utile que ces suites se retrouvent dans des problèmes physiques de nature bien différente : calcul des fréquences propres de vibrations des filtres électriques, étude de la propagation des rayons X dans un cristal, vibrations des longues chaînes aliphatiques [12], [15].

2. Polynomes U, P, Q. — On rencontre tout d'abord la suite des polynomes U

$$U_0 = 1, \qquad U_1 = 2u, \qquad U_2 = 4u^2 - 1, \qquad U_3 = 8u^3 - 4u, \qquad \ldots,$$

(1) Nous rappelons que $u = \frac{e}{R}$ représente la distance du centre de la sphère au plan, R étant pris comme unité (on a nécessairement $u > 1$) et que dans le cas de deux sphères, x représente la distance des centres de ces sphères dont les rayons sont respectivement a et b.

ou encore en posant $v = 2u$

$$U_0 = 1, \qquad U_1 = v, \qquad U_2 = v^2 - 1, \qquad U_3 = v^3 - 2v, \qquad \ldots;$$

puis celle des polynomes P

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = x, \qquad P_2 = x^2 - b^2, \qquad P_3 = x^3 - (a^2 + b^2)x, \qquad \ldots,$$

soit pour $b = a$, cas de deux sphères égales, et en posant $\frac{x}{2a} = u$

$$P_{2n} = a^{2n} \underset{2n}{U}(u), \qquad P_{2n+1} = a^{2n+1} \underset{2n+1}{U}(u), \qquad \ldots.$$

On peut désigner par Q des polynomes identiques à P lorsqu'ils sont de degré impair et qui se déduisent de P par permutation des paramètres a et b lorsqu'ils sont de degré pair.

3. **Quelques relations entre les polynomes $U_n(u)$ ou entre ces polynomes et leurs dérivées.** — Les polynomes $U(u)$ satisfont visiblement aux relations suivantes :

$$U_p = 2u U_{p-1} - U_{p-2}, \qquad U_p(-2u) = (-1)^p U_p(2u), \tag{1}$$

$$U_p = (2u)^p + \Sigma(-1)^r (2u)^{p-2r} \frac{(p-r)\ldots(p-2r+1)}{r!}. \tag{2}$$

La relation (1) montre que les fonctions U forment une famille orthogonale.

En ce qui concerne (2) on voit que le premier terme de U_p est en effet $(2u)^p$ et les suivants :

$$(-2u)^{p-2} \frac{p-1}{1!}, \quad +(2u)^{p-4} \frac{(p-2)(p-3)}{2!},$$
$$-(2u)^{p-6} \frac{(p-3)(p-4)(p-5)}{3!}, \quad \ldots,$$

avec

$$2r \leq p.$$

On a aussi

$$U_p = U_r U_{p-r} - U_{r-1} U_{p-r-1}, \tag{3}$$

d'où

$$U_{2n} = U_n^2 - U_{n-1}^2, \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p U_p = u U'_p - U'_{p-1}, \qquad U_{2n+1} = U_n (U_{n+1} - U_{n-1}), \\ \qquad U'_{2n} = 2(U_n U'_n - U_{n-1} U'_{n-1}); \end{array} \right. \tag{5}$$

$$p U'_{p+1} = 2p(p+1) U'_p = (p+2) U'_{p-1}, \tag{6}$$

$$p(p+2) U_p = 3u \frac{dU_p}{du} + (u^2 - 1) \frac{d^2 U_p}{du^2}, \tag{7}$$

$$U'_p = [p U_{p-1} + (p-2) U_{p-3} + (p-4) U_{p-5} + \ldots] 2. \tag{8}$$

4. Expression trigonométrique ou hyperbolique des fonctions $U_n(u)$. — *a*. Supposons $|u| \leq 1$, on peut poser $u = \cos\alpha$, et il vient

$$U_1 = 2u = 2\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha},$$

$$U_2 = 4u^2 - 1 = 4\cos^2\alpha - 1 = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}.$$

On voit apparaître la relation générale

$$U_n = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

Cette relation est vérifiée pour 1, 2, ...; supposons-là vérifiée pour $n-1$ et $n-2$ et montrons qu'elle est vraie pour n.

On doit vérifier, compte tenu de la relation de récurrence (1),

$$\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha}$$

ou

$$\sin(n+1)\alpha + \sin(n-1)\alpha = 2\cos\alpha\,\sin n\alpha,$$

c'est une relation bien connue; la proposition est donc démontrée.

b. Supposons $|u| > 1$; on peut poser $u = \operatorname{ch}\alpha$, et en procédant comme plus haut, par induction, montrer que l'on a

$$U_n = \frac{\operatorname{sh}(n+1)\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}.$$

Ces expressions permettent une vérification immédiate des relations indiquées au paragraphe 3.

Remarque. — Nous pouvons faire le changement de variable

$$2u = z + \frac{1}{z}.$$

Dans ces conditions, on a

$$U_n = \frac{z^{n+1} - z^{-n-1}}{z - z^{-1}}.$$

La relation est facilement vérifiée pour $n = 0$, $n = 1$

$$U_0 = \frac{z - z^{-1}}{z - z^{-1}} = 1,$$

$$U_1 = \frac{z^2 - z^{-2}}{z - z^{-1}} = \frac{\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z - \frac{1}{z}\right)}{z - \frac{1}{z}} = z + \frac{1}{z} = 2u.$$

Supposons maintenant la propriété vraie pour $n-1$ et $n-2$ et montrons qu'elle est vraie pour n; on a

$$U_{n-1} = \frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}}, \qquad U_{n-2} = \frac{z^{n-1} - z^{-n+1}}{z - z^{-1}},$$

et la relation de récurrence entre les fonctions U, donne

$$U_n = \left(z + \frac{1}{z}\right)\frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} - \frac{z^{n-1} - z^{-n+1}}{z - z^{-1}},$$

$$U_n = \frac{1}{z - z^{-1}}[z^{n+1} - z^{-n+1} + z^{n-1} - z^{-n-1} - z^{n-1} + z^{-n+1}],$$

$$U_n = \frac{z^{n+1} - z^{-n-1}}{z - z^{-1}}.$$

5. **Racines de l'équation** $U_n(u) = 0$. — Les polynomes U_n, en raison de la relation de récurrence (1) forment une suite de Sturm et il s'ensuit que toutes les racines de l'équation $U_n = 0$ doivent être réelles.

Les expressions établies au paragraphe 4, donnent immédiatement leurs valeurs

$$u = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

6. **Fonction génératrice des polynomes** $U_p(u)$. — Si l'on cherche à déterminer une fonction

$$f(u, z) = \Sigma U_p z^p,$$

il se trouve que, en raison de la relation (5), la fonction f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(u - z)\frac{\partial f}{\partial u} - z\frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

ainsi

$$f(u, z) = \psi\left(b + azu - \frac{az^2}{2}\right)$$

et par suite tous les polynomes U_p s'obtiennent immédiatement comme coefficients des puissances z^p en formant le carré du développement de Legendre $(1 - 2uz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ou plus simplement en effectuant la division

$$\frac{1}{1 - 2uz + z^2}.$$

On a

$$(1 - 2uz + z^2)^{-1} = 1 + (2u)z + (4u^2 - 1)z^2 + (8u^3 - 4u)z^3 + \dots.$$

7. Les polynomes P et la fonction génératrice de ces polynomes. — Les polynomes P satisfont aux relations suivantes :

$$P_{2p} = x P_{2p-1} - b^2 P_{2p-2}; \tag{1}$$

$$P_{2p+1} = x P_{2p} \quad - a^2 P_{2p-1}. \tag{2}$$

On a

$$Q_{2p+1} = P_{2p+1}; \qquad x Q_{2p} = P_{2p+1} + b^2 P_{2p-1},$$

d'après la définition que nous avons donnée des polynomes Q.

Les polynomes P de degré impair peuvent donc servir au calcul de tous les autres polynomes P et Q.

De (1) et (2) et des relations

$$P_{2p}(a+b) = P_{2p}[-(a+b)]; \qquad P_{2p+1}[-(a+b)] = - P_{2p+1}(a+b),$$

il résulte que les polynomes P_0, P_1, P_2, ..., P_r forment une *suite de Sturm* et que toutes les racines de l'équation $P_r = 0$ sont comprises entre $-(a+b)$ et $(a+b)$.

De (1) et (2) on tire aisément

$$P_{2p+1} = Q_{2s} P_{2p-2s+1} - b^2 Q_{2s-1} P_{2p-2s},$$
$$P_{2p+1} = Q_{2s+1} P_{2p-2s} - a^2 Q_{2s} P_{2p-2s-1},$$

et deux autres identités par permutation de P et Q, puis

$$P_n = (x^2 - a^2 - b^2) P_{n-2} - a^2 b^2 P_{n-4}.$$

Il est facile de former une fonction génératrice pour P ; on doit avoir

$$F(x, a, b, z) = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots.$$

La relation précédente donne

$$P'_n = 2x P_{n-2} + (x^2 - a^2 - b^2) P'_{n-2} - a^2 b^2 P'_{n-4}, \tag{3}$$

et l'on est tenté, en s'inspirant des résultats déjà obtenus en ce qui concerne les polynomes U, de chercher à former entre la fonction F et ses dérivées partielles une combinaison dans laquelle les coefficients des puissances de z soient nuls en vertu de la relation (3).

Une telle opération réussit et conduit à déterminer F par l'équation

$$\left\{[x^2-a^2-b^2]z^2-a^2b^2z^4\right\}\frac{\partial F}{\partial x}+2xz^2F=\frac{\partial F}{\partial x}-z.$$

En conséquence, posant $F=\lambda.\mu$ et intégrant, on obtient

$$F=[zx+\varphi(z)][1-(x^2-a^2-b^2)z^2+a^2b^2z^4]^{-1}.$$

Comme l'examen direct du cas où les deux sphères sont égales impose à $\varphi(z)$ la forme $1+a^2z^2$, on voit qu'il suffit, pour obtenir la suite des polynomes P_p d'effectuer la division

$$(4)\qquad \frac{1+zx+a^2z^2}{1-(x^2-a^2-b^2)z^2+a^2b^2z^4}.$$

Après permutation de a et b, la même opération fournirait les polynomes Q.

8. Expression des polynomes P et Q en fonction des polynomes U. — En posant

$$u=\frac{x^2-a^2-b^2}{2ab}\qquad \text{et}\qquad y=abz^2,$$

le dénominateur de (4) prend la forme $1-2uy+y^2$. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1+zx+a^2z^2}{1-2uy+y^2}&=(1+zx+a^2z^2)(U_0+U_1y+U_2y^2+U_3y^3+\ldots)\\&=U_0+U_1y+U_2y^2+\ldots\\&\quad+x\,[U_0z+U_1yz+U_2y^2z+\ldots]\\&\quad+a^2[U_0z^2+U_1yz^2+U_2y^2z^2+\ldots],\end{aligned}$$

En remplaçant y par sa valeur abz^2, on trouve immédiatement

$$\frac{1+zx+a^2z^2}{1-(x^2-a^2-b^2)z^2+a^2b^2z^4}=P_0+P_1z+\ldots+P_{2p}z^{2p}+P_{3p+1}z^{2p+1}+\ldots$$

avec

$$(1)\qquad P_{2p}=a^pb^{p-1}[b\,U_p+a\,U_{p-1}],$$

$$(2)\qquad P_{2p+1}=a^pb^p\,x\,U_p,$$

et par permutation des paramètres

$$(3)\qquad Q_{2p}=a^{p-1}b^p[a\,U_p+b\,U_{p-1}],$$

et les séries Σ qui figurent dans l'action mutuelle de deux sphères deviennent [3]

$$\sum_{1}^{\infty} a^{p+1} b^{p} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{P_{2p}}\right) = -x \sum_{1}^{\infty} (b U'_p + a U'_{p-1})(b U_p + a U_{p-1})^{-2}$$
$$- \sum_{0}^{\infty} a^{p+1} b^{p+1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{P_{2p+1}}\right)$$
$$= \sum_{0}^{\infty} U'_p U_p^{-2} + abx^{-2} \sum_{0}^{\infty} U_p^{-1}.$$

Dans le cas où l'on voudrait introduire les fonctions Q_{2p}, il faudrait permuter a et b.

Ainsi les calculs numériques des caractéristiques du système peuvent être effectués à partir des polynomes U_p.

Signification de la variable u. — Si du centre A de la sphère S_A on circonscrit un cône à S_B, on obtient un parallèle de S_B à partir

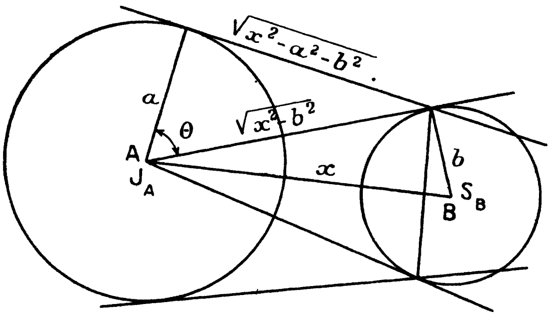

Fig. 1.

duquel on peut circonscrire un cône à S_A, alors l'angle θ sous lequel on voit de A la portion de génératrice du tronc de cône compris entre S_A et S_B est tel que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2 - b^2}}{a}.$$

En répétant la même construction à partir de S_B, on obtiendrait

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\sqrt{x^2 - a^2 - b^2}}{b},$$

d'ou

$$2u = \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\theta'.$$

9. **Systèmes de deux sphères de même coefficient d'influence.** — A une valeur donnée α de u correspondent des systémes de sphères S_A et S , en nombre infini et tels que les longueurs a, b, x sont les coordonnées d'un même point de la surface conique

$$x^2 - a^2 - b^2 = 2\alpha ab,$$

mais les valeurs des polynomes U sont les mêmes pour tous ces systèmes, c'est-à-dire pour tous les points de la surface conique.

Montrons par un exemple l'importance de cette remarque.

Soit à trouver un système de deux sphères admettant même coefficient d'*induction réciproque* [4]

$$C = -\sum_0^\infty \frac{a^{p+1} b^{p+1}}{P_{2p+1}} = \frac{ab}{x} \sum_0^\infty \frac{1}{U_p}.$$

Posons

$$\beta = \frac{ab}{x}, \qquad \beta > 0.$$

D'après ce qui précède, si l'on choisit

$$x, \quad a, \quad b$$

de façon à satisfaire aux conditions,

$$x^2 - a^2 - b^2 = 2\alpha ab,$$
$$\beta x = ab,$$

c'est-à-dire si x, a, b sont les coordonnées d'un point de l'intersection du cône et du paraboloïde, tous les systèmes bisphériques ainsi obtenus auront même coefficient d'induction réciproque.

Pour que les sphères soient extérieures l'une à l'autre, il faut prendre $\alpha > 1$; d'autre part pour que les valeurs de a, b soient réelles, il faut que l'on ait

$$x > 2\beta(\alpha + 1).$$

10. **Équation différentielle admettant les polynomes P comme solution.** — Reprenons l'équation différentielle en U_p

$$p(p+2)U_p = 3u\frac{dU_p}{du} + (u^2 - 1)\frac{d^2U_p}{du^2};$$

après substitution de

$$U_p = \frac{P_{2p+1}}{a^p b^p x} \qquad \text{et} \qquad u = \frac{x^2 - a^2 - b^2}{2ab},$$

il vient

$$\text{(1)} \qquad \varphi_6 \frac{d^2 P_{2p+1}}{dx^2} + \varphi_5 \frac{dP_{2p+1}}{dx} + \varphi_4 P_{2p+1} = 0,$$

où

$$\varphi_6 = x^2[x^2 - (a-b)^2][x^2 - (a+b)^2] = x^2[(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2],$$

$$\varphi_5 = 3x[x^4 - (a^2 - b^2)^2]; \qquad \varphi_4 = -[4p(p+2)x^4 + 3\{x^4 - (a^2 - b^2)^2\}].$$

L'équation différentielle relative à la famille P_{2p} est moins immédiate. Pourtant la condition

$$\text{(2)} \qquad P_{2p+1} + a^2 P_{2p-1} = x P_{2p}$$

incite à associer les équations de la forme (1) dont les fonctions P_{2p+1} et $a^2 P_{2p-1}$ sont respectivement solutions; on a

$$\varphi_6 \frac{d^2 P_{2p+1}}{dx^2} + \varphi_5 \frac{dP_{2p+1}}{dx} - P_{2p+1}[4p(p+2)x^4 + 3\{x^4 - (a^2 - b^2)^2\}] = 0,$$

$$\varphi_6 \frac{d^2(a^2 P_{2p-1})}{dx^2} + \varphi_5 \frac{d(a^2 P_{2p-1})}{dx} - a^2 P_{2p-1}[4(p-1)(p+1)x^4 + 3\{x^4 - (a^2 - b^2)^2\}] = 0.$$

Ajoutons, il vient

$$\begin{aligned} &\varphi_6 \frac{d^2}{dx^2}(P_{2p+1} + a^2 P_{2p-1}) + \varphi_5 \frac{d}{dx}(P_{2p+1} + a^2 P_{2p-1}) \\ &\quad - 3\{x^4 - (a^2 - b^2)^2\}[P_{2p+1} + a^2 P_{2p-1}] \\ &\quad - 4x^4(p^2 - 1)[P_{2p+1} + a^2 P_{2p-1}] - 4x^4(2p+1)P_{2p+1} = 0, \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (2),

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} &\varphi_6 \left[x \frac{d^2 P_{2p}}{dx^2} + 2 \frac{dP_{2p}}{dx} \right] + \varphi_5 \left[x \frac{dP_{2p}}{dx} + P_{2p} \right] \\ &\quad - x P_{2p}[4(p^2 - 1)x^4 + 3\{x^4 - (a^2 - b^2)^2\}] - 4x^4(2p+1)P_{2p+1} = 0, \end{aligned}$$

On peut éliminer P_{2p+1} en tenant compte de l'équation (1); il vient, après quelques calculs,

$$\varphi_{11} \frac{d^4 P_{2p}}{dx^4} + \varphi_{10} \frac{d^3 P_{2p}}{dx^3} + \varphi_9 \frac{d^2 P_{2p}}{dx^2} + \varphi_8 \frac{dP_{2p}}{dx} + \varphi_7 P_{2p} = 0,$$

avec

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= x^3[(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2]^2;\\
\varphi_{10} &= [(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2][14x^6 - 8(a^2 + b^2)x^4 - 6(a^2 - b^2)^2x^2];\\
\varphi_9 &= x^9(51 - 8p^2 - 8p) - 2x^7(a^2 + b^2)(36 - 8p^2 - 8p)\\
&\quad + x^5(a^2 - b^2)^2(6 - 8p^2 - 8p) + 15(a^2 - b^2)^4x;\\
\varphi_8 &= x^8(25 - 40p^2 - 20p)\\
&\quad + (8p^2 + 8p - 6)[4x^6(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)^2x^4] - 15(a^2 - b^2)^4;\\
\varphi_7 &= 16(p - 1)p(p + 1)(p + 2)x^7.
\end{aligned}$$

11. Les polynomes électrosphériques tirés de fractions continues. — Montrons comment il est possible de rattacher les fonctions électrosphériques aux réduites de certaines fonctions continues.

Établissons d'abord le théorème général suivant :

Théorème. — *Si une suite de polynomes $R_n(x)$, de degré égal à l'indice, est telle que trois polynomes successifs vérifient une relation de la forme*

$$R_n(x) = f(x, n)R_{n-1}(x) - \varphi(n)R_{n-2}(x), \tag{1}$$

où $f(x, n)$ est un polynome et où deux polynomes consécutifs n'ont pas de racines communes, le quotient $\frac{R_n}{R_{n-1}}$ est développable en fraction continue.

L'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = f(x, n) - \varphi(n)\frac{R_{n-2}}{R_{n-1}}; \tag{2}$$

si l'on change n en $n - 1$, il vient

$$\frac{R_{n-1}}{R_{n-2}} = f(x, n-1) - \varphi(n-1)\frac{R_{n-3}}{R_{n-2}}, \tag{3}$$

et (2) donne

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = f(x, n) - \varphi(n)\frac{1}{f(x, n-1) - \varphi(n-1)\dfrac{R_{n-3}}{R_{n-2}}}.$$

En recommençant, on aurait

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = f(x, n) - \varphi(n)\frac{1}{f(x, n-1) - \varphi(n-1)\dfrac{1}{f(x, n-2) - \varphi(n-2)\dfrac{R_{n-4}}{R_{n-3}}}}$$

et ainsi de suite....

Le dernier terme du développement sera

$$-\varphi(3)\frac{1}{f(x,\,2)-\varphi(2)\dfrac{R_0}{R_1}}.$$

Or, d'après l'hypothèse faite sur le degré de R_n,

$$R_0 = C, \qquad R_1 = Ax + B,$$

A, B, C étant des constantes.

Le dernier terme s'écrit donc

$$-\varphi(3)\frac{1}{f(n,\,2)-\varphi(2)\dfrac{C}{Ax+B}}.$$

Nous pouvons appliquer ces résultats aux polynomes électrosphériques.

Nous avons

$$U_0 = 1, \qquad U_1 = 2u, \qquad U_2 = 4u^2 - 1 \qquad \ldots;$$

le degré de chacun d'eux est égal à son indice et la relation de récurrence

$$U_n = 2u\,U_{n-1} - U_{n-2}$$

nous conduit au développement

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = 2u - \cfrac{1}{2u - \cfrac{1}{2u - \cfrac{1}{2u - \cfrac{U_{n-5}}{U_{n-4}}}}}$$

Le dernier terme du développement sera

$$2u - \frac{U_0}{U_1} = 2u - \frac{1}{2u}.$$

Nous aurons donc finalement

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = 2u - \left.\cfrac{1}{2u - \cfrac{1}{2u - \cfrac{1}{2u \; \vdots \; 2u - \cfrac{1}{2u}}}}\right\}(n-1).$$

12. Les quotients $\frac{U_{n-1}}{U_n}$ sont les réduites du développement de $u - \sqrt{u^2 - 1}$. — Les polynomes U_n peuvent être aisément rattachés à la théorie des nombres.

On sait que la racine carrée de tout nombre entier de la forme $u^2 + 1$ se développe en une fraction continue dont la période commence dès le premier terme u et se compose du seul nombre $2u$ [8].

Cette proposition résulte de l'application à la théorie des nombres d'un théorème relatif aux fractions continues périodiques énoncé ainsi par Briot.

« La valeur x d'une fraction continue périodique est une irrationnelle du second degré dont les deux racines sont de signe contraire ».

Considérons alors la relation

$$\xi = \frac{1}{2u + \xi}. \tag{1}$$

Si dans le second membre de (1) nous remplaçons ξ par sa valeur tirée de (1), il vient

$$\xi = \cfrac{1}{2u + \cfrac{1}{2u + \xi}}.$$

On peut recommencer indéfiniment et l'on a

$$\xi = \cfrac{1}{2u + \cfrac{1}{2u + \cfrac{1}{2u + \cfrac{1}{2u}}}} \cdots$$

La valeur ξ de cette fraction continue périodique s'obtient en résolvant l'équation du second degré fournie par (1), à savoir

$$\xi^2 + 2u\xi - 1 = 0;$$

et comme il faut prendre la racine positive

$$\xi = \sqrt{u^2 + 1} - u.$$

Le fait que u est réel n'intervient dans le théorème que pour indiquer que ξ est la racine positive. Rien dans la démonstration n'empêche de supposer u imaginaire

$$u = s + it, \qquad i = \sqrt{-1},$$

ξ sera encore racine d'une équation du second degré et l'on choisira la racine convenable en faisant $t = 0$ ou en se plaçant dans un cas particulier.

En résumé : u étant un nombre quelconque réel ou imaginaire, on a

$$\sqrt{u^2+1} - u = \cfrac{1}{2u + \cfrac{1}{2u + \cfrac{1}{2u + \cfrac{1}{2u}}}}, \ldots$$

Les réduites successives sont :

$$\frac{V_0(u)}{V_1(u)} = \frac{1}{2u}, \qquad \frac{V_1(u)}{V_2(u)} = \frac{2u}{4u^2+1},$$

$$\frac{V_2(u)}{V_3(u)} = \frac{4u^2+1}{8u^3+\,.\,u}, \qquad \frac{V_3(u)}{V_2(u)} = \frac{8u^3+4u}{16u^4+12u^2+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'après la formation des réduites

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{1}{2u}, \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2u + \frac{V_0}{V_1}} = \frac{V_1}{2uV_1 + V_0},$$

d'où

$$V_2 = 2uV_1 + V_0.$$

De même

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{1}{2u + \frac{V_1}{V_2}} = \frac{V_2}{2uV_2 + V_1},$$

c'est-à-dire

$$V_3 = 2uV_2 + V_1.$$

D'une façon générale

$$V_n(u) = 2uV_{n-1}(u) + V_{n-2}(u).$$

Si dans la série des quotients $\frac{V_0}{V_1}, \frac{V_1}{V_2}, \frac{V_2}{V_3}, \ldots, \frac{V_{n-1}}{V_n}$ nous remplaçons

u par ui, les polynomes électrosphériques vont apparaître :

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{1}{2ui} = -i\frac{1}{2u} = -i\left(\frac{U_0}{U_1}\right),$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2ui}{-4u^2+1} = -i\frac{2u}{4u^2-1} = -i\left(\frac{U_1}{U_2}\right),$$
$$\frac{V_2}{V_3} + \frac{-4u^2+1}{-8u^3i+4ui} = \frac{-(4u^2-1)}{-i(8u^3-4u)} = -i\left(\frac{U_2}{U_3}\right),$$

et ainsi de suite.

On peut en conclure : $\frac{V_0}{V_1}, \frac{V_1}{V_2} \cdots$, étant les réduites de $\sqrt{u^2+1}-u$, la série $-i\left(\frac{U_0}{U_1}\right), -i\left(\frac{U_1}{U_2}\right), -i\left(\frac{U_2}{U_3}\right), \cdots$, est formée des réduites de

$$\sqrt{1-u^2}-ui = -i(u-\sqrt{u^2-1}).$$

Ainsi les quotients $\frac{U_0}{U_1}, \frac{U_1}{U_2}, \frac{U_2}{U_3} \cdots$ *sont les réduites correspondant à* $u-\sqrt{u^2-1}$.

13. **Note de M. P. Appell.** — Dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, P. Appell [1] s'exprime ainsi :

« On sait qu'une fonction de la variable x, holomorphe en tous les points situés à l'intérieur d'une ellipse de foyers a, b est développable dans cette région en une série de la forme

$$\sum_{\nu=0,}^{\nu=\infty} A_\nu(x'-\sqrt{x'^2-1})^\nu \qquad \text{où} \qquad x' = \frac{a+b-2x}{a-b},$$

le signe du radical étant déterminé de telle façon que le module de $(x'-\sqrt{x'^2-1})$ soit moindre que l'unité ».

Et plus loin :

« Je remarque en terminant que l'on pourrait dans tous les développements précédents remplacer $(x'-\sqrt{x'^2-1})^\nu$ par la fonction sphérique de seconde espèce que Heine désigne par $Q^\nu(x')$ et qui est définie dans tout le plan par la série

$$Q^\nu(x') = 2\frac{2.4\ldots2\nu}{3.5\ldots(2\nu+1)}\xi^{\nu+1}F\left(\frac{1}{2}, \nu+1, \nu+\frac{3}{2}, \xi^2\right),$$

où

$$\xi = x' - \sqrt{x'^2 - 1}.$$

Cette dernière expression fait pressentir la liaison qu'on peut établir entre les polynomes P et la fonction de Heine [5].

14. Les fonctions électrosphériques sous forme de déterminants. — P. Humbert a montré que les fonctions électrosphériques peuvent être mises sous forme de déterminants [13]. Les polynomes $U_p(u)$ satisfont à l'équation aux différences

$$U_p - 2uU_{p-1} + U_{p-2} = 0;$$

si l'on écrit par suite les équations

$$\begin{aligned} U_{p-1} - 2uU_{p-2} + U_{p-3} &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots &\dots, \\ U_2 - 2uU_1 + 1 &= 0, \\ U_1 - 2u &= 0. \end{aligned}$$

on obtient p équations linéaires à p inconnues $U_1, U_2, \dots, U_p$; d'où l'on pourra tirer U_p sous forme d'un déterminant à p lignes et p colonnes; on trouve

$$(1) \qquad U_p(u) = \begin{vmatrix} 2u & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2u & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & \dots & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2u \end{vmatrix}.$$

Partant de ce résultat, on écrit immmédiatement les déterminants représentant les fonctions P_{2p} et P_{2p+1}, compte tenu des relations (1) et (2) du paragraphe 8.

Il vient

$$(2) \qquad P_{2p}(x) = a^p b^{p-1} \begin{vmatrix} b & -a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2u & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2u & 0 & 0 & \dots \\ . & . & \dots & . & . & \dots \end{vmatrix},$$

$$(3) \qquad P_{2p+1}(x) = a^p b^p x \begin{vmatrix} 2u & 1 & 0 & 0 & . & \dots \\ 1 & 2u & 1 & 0 & . & \dots \\ 0 & 1 & 2u & 1 & . & \dots \\ . & . & \dots & . & . & \dots \end{vmatrix}.$$

Le déterminant (2) étant à $p+1$ lignes et $p+1$ colonnes, le déterminant (3) à p lignes et p colonnes, avec comme plus haut

$$u = \frac{x^2 - a^2 - b^2}{2ab}.$$

Notons que Q_{2p} s'obtiendra en permutant a et b dans (2). Remarquons enfin que les formules sont plus symétriques et plus simples si l'on pose

$$z = x^2 - a^2 - b^2.$$

On aura alors les déterminants suivants, les deux premiers à $p+1$ lignes, le troisième à p lignes

$$P_{2p}(x) = -\begin{vmatrix} -1 & a & 0 & 0 & \dots \\ a & z & ab & 0 & \dots \\ 0 & ab & z & ab & \dots \\ . & \dots & . & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

$$Q_{2p}(x) = -\begin{vmatrix} -1 & b & 0 & 0 & \dots \\ b & z & ab & 0 & \dots \\ 0 & ab & z & ab & \dots \\ . & \dots & . & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

$$P_{2p+1}(x) = \begin{vmatrix} z & ab & 0 & 0 & \dots \\ ab & z & ab & 0 & \dots \\ 0 & ab & z & ab & \dots \\ . & \dots & . & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

15. La fonction $U_p(v)$ et la fonction hypergéométrique [16]. — Pour la commodité, nous raisonnerons sur la fonction $U_p(v)$ définie au paragraphe **2**, la variable v étant liée à u par la relation $v = 2u$.

Il est facile de constater que les fonctions $U_p(v)$ satisfont à l'équation différentielle

$$(1) \qquad (v^2 - 4)U''_p + 3vU'_p - p(p+2)U_p = 0.$$

Faisons le changement de variable $v = 4t - 2$; l'équation (1) prend la forme

$$t(1-t)U''_p - \left(-\frac{3}{2} + 3t\right)U'_p + p(p+2)U_p = 0.$$

C'est une équation de Gauss qui admet pour intégrale particulière la fonction hypergéométrique; avec les notations habituelles [11], nous avons

$$\alpha = -p, \qquad \beta = p + 2, \qquad \gamma = \frac{3}{2},$$

et la solution est un polynome de Jacobi

$$\begin{aligned} & \mathrm{F}\left(-p, p+2, \frac{3}{2}; t\right) \\ & = 1 - \frac{2p(p+2)}{3} t + \ldots \\ & + \frac{-p(1-p)(2-p)\ldots(-1)(p+2)(p+3)\ldots(2p+1)}{1.2.3.\ldots p \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{3}{2}+(p-1)\right)} t^p. \end{aligned}$$

D'après notre changement de variable, nous savons que l'équation de Gauss admet l'intégrale particulière

$$\mathrm{U}_p(4t-2) = \begin{vmatrix} 4t-2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4t-2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & \ldots\ldots & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 4t-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 4t-2 \end{vmatrix},$$

le déterminant étant à p lignes et p colonnes.

Pour $n = 1$, 2 et 3 il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_1 &= 4t - 2, \\ \mathrm{U}_2 &= 16t^2 - 16t + 3, \\ \mathrm{U}_3 &= 4(16t^3 - 24t^2 + 10t - 1). \end{aligned}$$

Or pour $n = 1$, 2 et 3, les polynomes de Jacobi s'écrivent

$$\mathrm{F}\left(-1, 3, \frac{3}{2}; t\right) = 1 - 2t,$$

$$\mathrm{F}\left(-2, 4, \frac{3}{2}; t\right) = \frac{16t^2 - 16t + 3}{3},$$

$$\mathrm{F}\left(-3, 5, \frac{3}{2}; t\right) = -16t^3 + 24t^2 - 10t + 1.$$

On voit apparaître la relation générale

$$\mathrm{F}\left(-p, p+2, \frac{3}{2}; t\right) = (-1)^p \frac{\mathrm{U}_p(4t-2)}{p+1}.$$

Ces considérations présentent l'intérêt de démontrer simplement que les polynomes de Jacobi peuvent se mettre sous la forme de déterminants; les résultats énoncés au paragraphe 5, montrent d'autre part que l'équation

$$F\left(-p,\, p+2,\, \frac{3}{2};\, t\right)=0$$

a p racines réelles données par la formule

$$t_k=\frac{1}{2}\left[1+\cos\frac{k\pi}{p+1}\right],\quad k=1,2,\ldots,p.$$

16. Les polynomes $U_p(\nu)$ considérés comme la dérivée p[ième] d'une fonction. — D'après une formule due à Jacobi, on sait que l'on a

$$F\left(-p,\, p+2,\, \frac{3}{2};\, t\right)=\frac{2^p}{1.3.\ldots(2p+1)}\, y^{-1}\frac{d^n}{dt^n}\, y^{2n+1},$$

avec

$$y=\sqrt{t(1-t)}.$$

En revenant à la variable $\nu=4t-2$, on a

$$U_p(\nu)=(-1)^p\,\frac{2^p(p+1)}{1.3.\ldots(2p+1)}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\nu^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{d^p}{dx^p}\left(1-\frac{\nu^2}{4}\right)^{\frac{2p+1}{2}}.$$

17. Développements en série procédant suivant les inverses de polynomes donnés [2]. — Les études relatives à l'attraction mutuelle de deux sphères électrisées ou d'une sphère et d'un plan donnent des exemples de développements procédant suivant les inverses de polynomes analogues aux fonctions sphériques; il se pose ainsi une question d'analyse qui présente quelque rapport avec la théorie des fractions continues.

Soient $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ des polynomes donnés, de degré égal à l'indice, dans chacun desquels le coefficient de la plus haute puissance de x est égal à l'unité. Supposons que, x désignant une variable complexe, les racines du polynome $P_n(x)$ soient, quelque soit n, dans l'intérieur d'un cercle fixe de centre O et de rayon R. Soit d'autre part $f(x)$ une fonction d'une variable complexe x, régulière à l'extérieur du cercle $|x|=R$, c'est-à-dire développable, en dehors de ce cercle, en une série de la forme

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \ldots$$

Le problème est de développer $f(x)$ sous la forme suivante

$$(1) \qquad f(x) = A_0 + \frac{A_1}{P_1(x)} + \frac{A_2}{P_2(x)} + \ldots + \frac{A_n}{P_n(x)} + \ldots,$$

les A_n étant des coefficients indépendants de x.

En se plaçant au point de vue formel, on peut calculer ces coefficients par le procédé suivant :

La fonction $\frac{1}{P_n(x)}$ est, à l'extérieur du cercle $|x| = R$, développable en série de la forme

$$\frac{1}{P_n(x)} = \frac{a_{n,n}}{x^n} + \frac{a_{n,n+1}}{x^{n+1}} + \ldots + \frac{a_{n,n+p}}{x^{n+p}} + \ldots,$$

avec $a_{n,n} = 1$. En admettant que le développement (1) soit possible, à l'extérieur d'un cercle, de rayon $\mathcal{R} \geqq R$, la différence

$$(2) \qquad \Delta_n = f(x) - A_0 - \frac{A_1}{P_1(x)} - \ldots - \frac{A_n}{P_n(x)}$$

est telle que $\lim x^n f(x) = 0$ pour $x = \infty$; le développement de Δ_n en série commence donc par le terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$, ce que nous écrirons, suivant une notation habituelle dans la théorie des fractions continues,

$$(3) \qquad \Delta_n = \left(\frac{1}{x^{n+1}}\right).$$

Mais alors cette condition donne immédiatement les équations suivantes

$$A_0 = C_0, \qquad A_1 = C_1,$$

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} A_1 a_{1,2} + A_2 = c_2, \\ A_1 a_{1,3} + A_2 a_{2,3} + A_3 = c_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_1 a_{1,n} + A_2 a_{2,n} + \ldots + A_{n-1} a_{n-1,n} + A_n = c_n, \end{array}\right.$$

qui déterminent de proche en proche les coefficients A_n. On peut, par la méthode des fonctions majorantes, étudier la convergence de la série ainsi formée, dans des cas étendus. Il suffit de comparer le développement obtenu au développement particulier étudié au dernier alinéa de ce paragraphe.

Pour pouvoir appliquer la formule de Cauchy, cherchons le développement de

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} + \ldots + \frac{y^{n-1}}{x^n} +$$

$$|x| > \mathrm{R}, \qquad |y| < \mathrm{R}.$$

On voit immédiatement par la relation (4) que A_n est un polynome $Q_{n-1}(y)$, en y, de degré $n-1$, dans lequel le coefficient de y^{n-1} est égal à l'unité; on a ainsi le développement formel

$$\frac{1}{x-y} = \sum \frac{Q_{n-1}(y)}{P_n(x)},$$

ce qui arrive à associer aux polynomes P_1, P_2, ..., P_n, d'autres polynomes déterminés Q_0, Q_1, Q_{n-1}, ... Si l'on prend par exemple

$$P_n(x) = (x-\alpha)^n,$$

on a

$$Q_{n-1}(y) = (y-\alpha)^{n-1}.$$

Dans ce cas

$$Q_n(y) = P_n(y).$$

18. **Polynomes d'Hermite et de Legendre.** — *a. Polynomes d'Hermite.* — Appliquons à ces polynomes les mêmes considérations que M. P. Humbert aux fonctions électrosphériques.

On a sous forme générale

$$\begin{aligned} H_n(x) = (2x)^n &- \frac{n(n-1)}{1\,!}(2x)^{n-2} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,!}(2x)^{n-4} \\ &- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3\,!}(2x)^{n-6} + \ldots, \end{aligned}$$

avec les relations de récurrence ($H_0 = 1$, $H_1 = 2x$),

$$(1) \qquad H_n = 2x H_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2}, \qquad H''_n = 2x H'_n + 2n H_n.$$

A l'aide de systèmes d'équations de récurrence, le lecteur reconnaîtra sans peine que l'on a

$$H_n = \begin{vmatrix} 2x & 2(n-1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2x & 2(n-2) & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 2(n-3) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2x \end{vmatrix}$$

On met ces polynomes sans plus de difficulté sous la forme de fractions continues; de la loi de récurrence, on tire ,

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} = 2x - 2(n-1)\frac{H_{n-2}}{H_{n-1}};$$

or

$$\frac{H_{n-1}}{H_{n-2}} = 2x - 2(n-2)\frac{H_{n-3}}{H_{n-2}},$$

soit

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} = 2x - 2(n-1)\cfrac{1}{2x - 2(n-2)\cfrac{1}{2x - 2(n-3)\cfrac{H_{n-4}}{H_{n-3}}}},$$

et ce développement se terminera par l'expression

$$2x - \frac{2H_0}{H_1} = 2x - \frac{1}{x};$$

ainsi

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} = \left. 2x - 2(n-1)\cfrac{1}{2x - 2(n-2)\cfrac{1}{2x - 2(n-3)\cfrac{1}{\begin{array}{c} 2x \\ \vdots \\ 2x - \frac{1}{x} \end{array}}}} \right\} (n-1).$$

b. Polynomes de Legendre. — On a la forme générale

$$L_n(x) = \frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} + \ldots\right],$$

avec les relations de récurrence ($L_0 = 1$, $L_1 = x$)

$$
(2) \qquad \begin{cases} (n+1)L_{n+1} = (2n+1)xL_n - nL_{n-1}, \\ (x^2-1)L''_n = -2xL'_n + n(n+1)L_n. \end{cases}
$$

La résolution de systèmes convenables d'équations telles que (2), permet d'obtenir L_n

$$
(3) \qquad L_n = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} (2n-1)x & n-1 & 0 & 0 & \cdots \\ n-1 & (2n-3)x & n-2 & 0 & \cdots \\ 0 & n-2 & (2n-5)x & n-3 & \cdots \\ 0 & 0 & n-3 & (2n-7)x & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & n-4 & \cdot \\ & & & \cdots & \cdots \end{vmatrix}
$$

le déterminant étant à n lignes et n colonnes.

Par exemple, pour $n = 2$, (1) donne le système d'équations

$$
\begin{aligned} 3L_3 - 5xL_2 + 2L_1 &= 0, \\ 2L_2 - 3xL_1 + 1 &= 0, \\ L_1 + x &= 0, \end{aligned}
$$

alors

$$
L_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5x & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix}}{6} = \frac{1}{3!}[15x^3 - 9x],
$$

solution qui est bien identique à celle obtenue à partir du déterminant (3) où l'on fait $n = 3$.

De la loi de récurrence (2) on tire

$$
\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{2n+1}{n+1}x - \frac{n}{n+1}\frac{L_{n-1}}{L_n};
$$

or

$$
\frac{L_n}{L_{n-1}} = \frac{2n-1}{n}x - \frac{n-1}{n}\frac{L_{n-2}}{L_{n-1}},
$$

soit

$$
\frac{L'_{n+1}}{L_n} = \frac{2n+1}{n+1}x - \frac{n}{n+1}\,\frac{1}{\dfrac{2n-1}{n}x - \dfrac{n-1}{n}\dfrac{L_{n-2}}{L_{n-1}}};
$$

d'autre part,

$$
\frac{L_{n-1}}{L_{n-2}} = \frac{2n-3}{n-1}x - \frac{n-2}{n-1}\frac{L_{n-3}}{L_{n-2}};
$$

donc

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{2n+1}{n+1}x - \frac{n}{n+1}\,\cfrac{1}{\cfrac{2n-1}{n}x - \cfrac{n-1}{n}\,\cfrac{1}{\cfrac{2n-3}{n-1}x - \cfrac{n-2}{n-1}\,\cfrac{L_{n-3}}{L_{n-2}}}},$$

et ainsi de suite; le dernier terme du développement sera

$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2x}.$$

On aura donc finalement

$$\left.\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{2n+1}{n+1}x - \frac{n}{n+1}\,\cfrac{1}{\cfrac{2n-1}{n}x - \cfrac{n-1}{n}\,\cfrac{1}{\cfrac{2n-3}{n-1}x \quad \cdots \quad \frac{3}{2}x - \frac{1}{2x}}}\right\}(n-1).$$

19. Calcul des valeurs des polynomes U_n et de leurs dérivées pour des valeurs imposées de u. — On peut partir des formes diverses données à ces polynomes et qui ont été précédemment indiquées, mais il est préférable de faire emploi des relations de récurrence, qui offrent de nombreux moyens de contrôle portant sur de larges intervalles pour n.

On a

$$U_n = 2uU_{n-1} - U_{n-2}, \qquad U_{2n} = U_n^2 - U_{n-1}^2, \qquad U_{2n+1} = U_n(U_{n+1} - U_{n-1});$$

$$U'_n = \frac{nU_n + U'_{n-1}}{u}; \qquad U'_{2n} = 2(U_nU'_n - U_{n-1}U'_{n-1}),$$

à titre d'exemple (*voir* § 3).

Mais on a le plus souvent à calculer des séries constituées de diverses manières avec ces polynomes ou avec ces polynomes et leurs dérivées telles que

$$\sum\frac{1}{U_p}, \qquad \sum\frac{d}{du}\left(\frac{1}{U_p}\right), \qquad \sum\frac{1}{U_{2p+1}}, \qquad \sum\frac{U'_{2p}}{U_{2p}^2}.$$

Convergence des séries. — Il est facile de montrer que les séries $\sum\frac{1}{U_p}$ et $\sum\frac{d}{du}\left(\frac{1}{U_p}\right)$ rencontrées au fascicule XXXVIII [1]

[1] *Loc. cit.*, p. 14.

dans l'expression de la capacité de la sphere ou dans celle de la force attractive lors de l'étude du système plan-sphère, sont convergentes; des considérations géométriques montrent en effet, que le rapport $\alpha_{p+1,p}$ de deux termes consécutifs est tel que

$$\lim_{\alpha_{p+1,p}} = \frac{1}{u+\sqrt{u^2-1}},$$

où la valeur de u est par nature supérieure a 1, de plus, $\alpha_{p+1,p}$ est inférieur à 1 et tend vers cette limite par valeurs décroissantes.

CHAPITRE II.

LE SYSTÈME PLAN-SPHÈRE.

20. Calcul des densités électriques σ_M et $\sigma'_{M'}$ sur la sphère et le plan P du système plan-sphère. — Nous avons appris à calculer ces densités par des séries, p. 21 à 24 du fascicule XXXVIII du *Mémorial des Sciences physiques*.

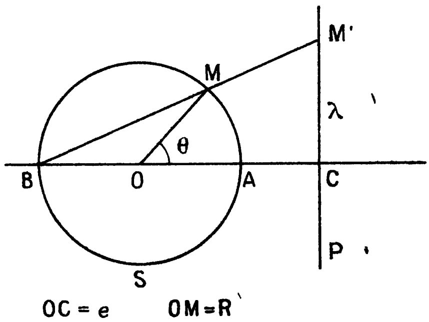

Fig. 2.

En introduisant la variable $v = 2u$, nous avons trouvé

$$\sigma_M = \frac{V}{4\pi R}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{U_p^2(v) - U_{p-1}^2(v)}{[U_p^2(v) + U_{p-1}(v) - 2U_p(v)U_{p-1}(v)\cos\theta]^{\frac{3}{2}}},$$

la sphère étant maintenue au potentiel V et le plan au potentiel zéro.

$$\sigma'_{M'} = \frac{2R^2}{\pi}V'\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{U_{p-1}(v)[U_p(v) - U_{p-2}(v)]}{\{R^2[U_p(v) - U_{p-2}(v)]^2 + 4\lambda^2 U_{p-1}^2(v)\}^{\frac{3}{2}}},$$

le plan étant maintenu au potentiel V' et la sphère au potentiel zéro; on a posé d'autre part

$$\lambda = (R + e)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Si l'on maintient simultanément la sphère au potentiel V, et le plan au potentiel V', les formules de la densité deviennent

$$\sigma_M = \frac{V - V'}{4\pi R} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{U_p^2(\nu) - U_{p-1}^2(\nu)}{[U_p^2(\nu) + U_{p-1}^2(\nu) - 2U_p(\nu)U_{p-1}(\nu)\cos\theta]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\sigma'_{M'} = \frac{V' - V}{\pi} 2R^2 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{U_{p-1}(\nu)[U_p(\nu) - U_{p-2}(\nu)]}{\{R^2[U_p(\nu) - U_{p-1}(\nu)]^2 + 4\lambda^2 U_{p-1}^2(\nu)\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous ne nous attarderons pas à démontrer la convergence de ces séries, ce qui a été fait par M. Defourneaux [6].

On constate que les formules précédentes sont en général irrationnelles et que chaque terme de chacune des deux séries fait intervenir deux combinaisons homogènes du deuxieme degré des polynomes U, combinaisons qui sont fonctions de l'indice de ce terme et qui changent d'une série à l'autre. On se représente la difficulté de mener rapidement le calcul de telles séries dans des cas numériques bien déterminés. Toutefois, par l'utilisation de quelques identités simples, M. Defourneaux a montré [6] que l'on peut remplacer les dites combinaisons par des expressions linéaires ne contenant plus qu'un seul polynome.

Il faut remarquer que ces formules deviennent rationnelles pour $\theta = 0$, $\theta = 180°$ et $\lambda = 0$, c'est-à-dire aux points A et B de la sphère et au point C du plan. On a

$$\sigma_A = \frac{V - V'}{4\pi R} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{U_p(\nu) + U_{p-1}(\nu)}{[U_p(\nu) - U_{p-1}(\nu)]^2},$$

$$\sigma_B = \frac{V - V'}{4\pi R} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{U_p(\nu) + U_{p-1}(\nu)}{[U_p(\nu) + U_{p-1}(\nu)]^2},$$

$$\sigma'_C = \frac{2(V' - V)}{\pi R} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{U_{p-1}(\nu)}{[U_p(\nu) - U_{p-2}(\nu)]^2}.$$

On est ainsi conduit à introduire des combinaisons linéaires des polynomes électrosphériques, savoir

$$F_p(\nu) = U_p(\nu) + U_{p-1}(\nu), \qquad G_p(\nu) = U_p(\nu) - U_{p-1}(\nu),$$
$$H_p(\nu) = U_p(\nu) - U_{p-2}(\nu),$$

qui obéissent à la même loi de récurrence que les polynomes U,

$$F_{p+1}(\nu) = \nu F_p(\nu) - F_{p-1}(\nu),$$

et satisfont aux relations

$$H_n(-\nu) = (-1)^n H_n(\nu), \qquad F_n(-\nu) = (-1)^n G_n(\nu),$$

ce qui permet, dans leur étude, de se limiter au cas de ν positif. On obtient ainsi les formules simples

$$\sigma_A = \frac{V - V'}{4\pi R} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{F_p(\nu)}{G'_p(\nu)}; \qquad \sigma_B = \frac{V - V'}{4\pi R} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{G_p(\nu)}{F'_p(\nu)};$$
$$\sigma'_i = \frac{2(V' - V)}{\pi R} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{U_{p-1}(\nu)}{H'_p(\nu)}.$$

Ces polynomes F, G, H interviennent encore lorsque θ et λ sont quelconques; c'est ce qui résulte des considérations suivantes :

a. On a

$$U_p^2(\nu) - U_{p-1}^2(\nu) = U_{2p}(\nu), \qquad U_{p-1}(\nu)[U_p(\nu) - U_{p-2}(\nu)] = U_{2p-1}(\nu),$$

d'où

$$U_{2p}(\nu) = F_p(\nu) G_p(\nu), \qquad U_{2p-1}(\nu) = U_{p-1}(\nu) H_p(x).$$

b. On peut établir de proche en proche, pour x quelconque, l'identité

$$\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right)^n = \frac{1}{2} H_n(x) + U_{n-1}(x) \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1},$$

dont une conséquence évidente est

$$\left(\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right)^n = \frac{1}{2} H_n(x) - U_{n-1}(x) \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}.$$

c. De même on démontre de proche en proche les identités

$$\left(\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{2}\right)^{2n+1} = \frac{\sqrt{x+2}\, G_n(x) + \sqrt{x-2}\, F_n(x)}{2},$$
$$\left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{2}\right)^{2n+1} = \frac{\sqrt{x+2}\, G_n(x) - \sqrt{x-2}\, F_n(x)}{2}.$$

d. Ces deux couples d'identité permettent d'exprimer les polynomes $U_{n-1}(x)$, $H_n(x)$, $F_n(x)$, $G_n(x)$ en fonction implicite quoique d'apparence irrationnelle, de la variable x. On a ainsi

$$U_{n-1}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right)^n - \left(\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right)^n}{2\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}},$$

$$H_n(x) = \left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right)^n + \left(\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right)^n,$$

. . . .

Si l'on pose

$$\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} = \rho,$$

on a

$$\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} = \frac{1}{\rho}$$

et $x = 1 + \frac{1}{\rho}$, ce qui donne

$$U_{n-1}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = \frac{\rho^{2n} - 1}{\rho^{n-1}(\rho^2 - 1)}\ {}^{(1)}; \qquad H_n\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = \frac{\rho^{2n} + 1}{\rho^n}.$$

Pour avoir les expressions de $F_n\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $G_n\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, il suffit de remarquer que

$$\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} = \left(\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{2}\right)^2,$$

et l'on obtient

$$F_n\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = \frac{\rho^{2n+1} - 1}{\rho^n(\rho - 1)}; \qquad G_n\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = \frac{\rho^{2n+1} + 1}{\rho^n(\rho + 1)}.$$

e. Si l'on remplace la variable quelconque x par la quantité v

$$v = 2u = \frac{2e}{R} > 2,$$

on a

$$v = \rho + \frac{1}{\rho} \qquad \text{et} \qquad H_n(v) = \frac{\rho^{2n} + 1}{\rho^n};$$

---

(1) Relation que nous avons établie directement page 8.

$\rho = \frac{v}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}$ est supérieur à 1, et $H_n(v)$ est supérieure à 2. On en déduit la valeur de ρ^n en fonction de $H_n(v)$

$$\rho^n = \frac{1}{2} H_n(v) + \sqrt{\frac{H_n^2(v)}{4} - 1},$$

et par suite, pour $v > 2$, l'identité

$$\left(\frac{v}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}\right)^n = \frac{H_n(v)}{2} + \sqrt{\frac{H_n^2(v)}{4} - 1}.$$

f. En tenant compte de l'identité déjà utilisée

$$(1) \qquad \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} = \left(\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{2}\right)^2,$$

on peut écrire, pour $v > 2$, et quel que soit l'entier positif n,

$$\left(\frac{\sqrt{v+2} + \sqrt{v-2}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{H_n(v)+2} + \sqrt{H_n(v)-2}}{2}.$$

Supposons n pair, $n = 2p$, le premier membre de cette identité devient $\left(\frac{v}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}\right)^p$; en lui appliquant l'identité *a*, on obtient

$$\frac{H_p(v)}{2} + U_{p-1}(v)\sqrt{\frac{v^2}{4} - 1} = \frac{\sqrt{H_{2p}(v)+2} + \sqrt{H_{2p}(v)-2}}{2}.$$

On aurait de même

$$\frac{H_p(v)}{2} - U_{p-1}(v)\sqrt{\frac{v^2}{4} - 1} = \frac{\sqrt{H_{2p}(v)+2} - \sqrt{H_{2p}(v)-2}}{2},$$

d'où, pour $v > 2$,

$$H_p(v) = \sqrt{H_{2p}(v)+2} \qquad \text{et} \qquad U_{p-1}(v)\sqrt{v^2-4} = \sqrt{H_{2p}(v)-2},$$

relations qui conduisent à

$$(2) \qquad H_p^2(v) = H_{2p}(v) + 2 \quad (v^2 - 4)\,U_{p-1}^2(v) = H_{2p}(v) - 2.$$

Supposons n impair, $n = 2p + 1$; le premier membre de l'identité (1) n'est autre que $\left(\frac{\sqrt{v+2} + \sqrt{v-2}}{2}\right)^{2p+1}$; on peut le développer par application de l'identité b et l'on peut écrire

$$\frac{\sqrt{v+2}\,G_p(v)+\sqrt{v-2}\,F_p(v)}{2}=\frac{\sqrt{H_{2p+1}(v)+2}+\sqrt{H_{2p+1}(v)-2}}{2},$$

d'où, quel que soit v,

$$(3)\quad (v+2)\,G_p^2(v)=H_{2p+1}(v)+2,\qquad (v-2)\,F_p^2(v)=H_{2p+1}(v)-2.$$

g. En remplaçant F_p et G_p par leurs expressions en fonction de U_p, U_{p-1} dans les formules (3), il vient

$$U_p^2(v)+U_{p-1}^2(v)=\frac{vH_{2p+1}(v)-4}{v^2-4},\qquad U_p(v)U_{p-1}(v)=\frac{H_{2p+1}(v)-v}{v^2-4}.$$

Les relations f permettent de modifier l'expression de σ_M

$$\sigma_M=\frac{V-V'}{4\pi R}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{U_{2p}(v)}{\left\{\frac{(v-2\cos\theta)H_{2p+1}(v)+2(v\cos\theta-2)}{v^2-4}\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Les relations (1) permettent aussi de modifier l'expression de $\sigma'_{M'}$

$$\sigma'_{M'}=\frac{2R^2(V'-V)}{\pi}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{U_{2p-1}(v)}{\left\{\frac{[R^2(v^2-4)+4\lambda^2]H_{2p}(v)+2[R^2(v^2-4)-4\lambda]}{v^2-4}\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour cette dernière formule on pourrait remplacer λ par

$$(e+R)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{R(v+2)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{2};$$

ceci conduit aux formules définitives, données à la page 24 du fascicule XXXVIII du *Mémorial des Sciences physiques*

$$\sigma_M=\frac{V-V'}{\pi R}K(\theta),\qquad \sigma'_{M'}=\frac{V'-V}{\pi R}K'(\theta),$$

où

$$K(\theta)=\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{U_{2p}(v)}{\left\{\frac{(v-2\cos\theta)H^2{}_{p+1}(v)+2(v\cos\theta-2)}{v^2-4}\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$K'(\theta)=2\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{U_{2p-1}(v)}{\left\{\frac{(v-2\cos\theta)H_{2p}(v)+2(v\cos\theta-2)}{v^2-4}\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

21. Quelques relations complémentaires entre les fonctions U, F, G et H. — α. En multipliant membre à membre les deux relations (b), on obtient

$$\frac{1}{4}H_n^2(x)-\left(\frac{x^2}{4}-1\right)U_{n-1}^2(x)=1 \tag{1}$$

ou

$$H_n^2(x)-(x^2-4)U_{n-1}^2(x)=4. \tag{1'}$$

β. De même les relations (c) conduisent à

$$(x+2)G_n^2(x)-(x-2)F_n^2(x)=4 \tag{2}$$

et à

$$U_n^2(x)+U_{n-1}^2(x)-x\,U_n(x)\,U_{n-1}(x)=1. \tag{2'}$$

γ. On montrerait sans difficulté que l'on a encore

$$H_n^2(x)-x\,H_n(x)\,H_{n-1}(x)+H_{n-1}^2(x)=4-x^2,$$
$$F_n^2(x)-x\,F_n(x)\,F_{n-1}(x)+F_{n-1}^2(x)=2+x,$$
$$G_n^2(x)-x\,G_n(x)\,G_{n-1}(x)+G_{n-1}^2(x)=2-x.$$

δ. L'identité (e) élevée à la puissance entière p, dont on développe les deux membres par application de l'identité (b) donne

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}H_{np}(v)+U_{np-1}(v)\sqrt{\frac{v^2}{4}-1}\\&=\frac{1}{2}H_p(v)[H_n(v)]+U_{p-1}[H_n(v)]\sqrt{\frac{H_n^2(v)}{4}-1}.\end{aligned}$$

Or, en tenant compte de

$$\sqrt{\frac{H_n^2(v)}{4}-1}=U_{n-1}(v)\sqrt{\frac{v^2}{4}-1},$$

on peut écrire

$$H_{np}(v)=H_p[H_n(v)]=H_n[H_p(v)] \tag{3}$$

et

$$U_{np-1}(v)=U_{n-1}(v)\,U_{p-1}[H_n(v)]=U_{p-1}(v)\,U_{n-1}[H_p(v)], \tag{3'}$$

identités vraies, si l'on remplace la variable limitée v par une variable quelconque x.

η. L'identité f, pour $n=2p$, devient

$$\left(\frac{v}{2}+\sqrt{\frac{v^2}{4}-1}\right)^p=\frac{\sqrt{H_{2p}(v)+2}+\sqrt{H_{2p}(v)-2}}{2};$$

si on l'élève a la puissance $2q+1$, qu'on développe le premier membre par application de b et le second membre par application de c, on trouve

$$\frac{1}{2} H_{p(2q+1)}(v) + U_{p(2q+1)}(v)\sqrt{\frac{v^2}{4}-1}$$
$$= \frac{\sqrt{H_{2p}(v)+2}\, G_q(H_{2p}) + \sqrt{H_{2p}(v)-2}\, F_q(H_{2p})}{2},$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{array}{ll} H_{p(2q+1)}(v) = H_p(v)\, G_q[H_{2p}(v)], & (4) \\ U_{p(2q+1)-1}(v) = U_{p-1}(v)\, F_q[H_{2p}(v)]. & (4') \end{array}\right.$$

La même identité f écrite pour $n=2p+1$, élevée à la puissance $2q+1$, conduit, après développement de chacun de ses membres par application de c, aux intensités suivantes :

$$\sqrt{v+2}\, G_{2pq+p+q}(v) + \sqrt{v-2}\, F_{2pq+p+q}(v)$$
$$= \sqrt{H_{2p+1}(v)+2}\, G_q(H_{2p+1}) + \sqrt{H_{2p+1}(v)-2}\, F_q(H_{2p+1})$$

et

$$G_{2pq+p+q}(v) = G_p(v)\, G_q[H_{2p+1}(v)], \quad (5)$$
$$F_{2pq+p+q}(v) = F_p(v)\, F_q[H_{2p+1}(v)]. \quad (5')$$

22. Propriétés arithmétiques des identités précédentes. — Les relations α, β et γ du paragraphe précédent permettent de mettre en évidence des solutions en nombres entiers de quelques équations de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m.$$

Bornons-nous à l'équation $X^2 - KY^2 = m$, K n'étant pas un entier carré parfait et m étant un entier positif quelconque.

Si α, β représente la solution fondamentale de $X^2 - KY^2 = 1$, on sait que toute solution positive (X, Y) de $X^2 - KY^2 = m$ se déduit par une substitution linéaire à coefficients entiers de déterminant $+1$ qui n'altère pas la forme $X^2 - KY^2$, d'une autre solution (X_0, Y_0) vérifiant les inégalités

$$\sqrt{m} \leq X_0 + Y_0\sqrt{K} < (\alpha + \beta\sqrt{K})\sqrt{m} \quad [9].$$

Ce résultat peut se démontrer par la seule connaissance des polynomes U et H, et l'on parvient d'ailleurs à la relation

$$X + Y\sqrt{K} = (X_0 + Y_0\sqrt{K})\left(\frac{1}{2}H_p(2\alpha) + \beta U_{p-1}(2\alpha)\sqrt{K}\right),$$

avec $p \geqq 0$.

On en tire

$$X = \frac{1}{2}H_p(2\alpha) + K\beta U_{p-1}(2\alpha)Y_0,$$

$$Y = \frac{1}{2}H_p(2\alpha)Y_0 + \beta U_{p-1}(2\alpha)X_0.$$

Ces formules sont une généralisation de celles obtenues dans le cas de l'équation de Peel [7].

Les autres solutions entières sont données par $\pm X$, $\pm Y$.

On peut aller plus loin : on peut démontrer qu'il suffit de connaître les solutions entières telles que

$$\sqrt{m} \leqq X_0 + Y_0\sqrt{K} \leqq \sqrt{\frac{m(\alpha+1)}{2}} + \sqrt{\frac{m(\alpha-1)}{2}}$$

(intervalle toujours moindre que le précédent), pour obtenir toutes les solutions entières de l'équation ; celles-ci se répartissent en quatre séries dont l'une est représentée par les mêmes formules que précédemment, savoir :

$$X = \frac{1}{2}H_p(2\alpha)X_0 + K\beta U_{p-1}(2\alpha)Y_0,$$

$$Y = \frac{1}{2}H_p(2\alpha)Y_0 + \beta U_{p-1}(2\alpha)X_0,$$

dans lesquelles p est un entier qui peut être positif, négatif ou nul ; — X est alors constamment positif, tandis que Y est positif pour $p \geqq 0$ et négatif pour $p < 0$.

Les trois autres séries sont $(-X, Y)$, $(X, -Y)$, $(-X, -Y)$. Notons que ces expressions donnent un moyen rapide de marquer les points à coordonnées rondes qui appartiennent à l'hyperbole

$$x^2 - Ky^2 = m.$$

23. Applications géométriques. — Il est possible de calculer les côtés des polynomes réguliers sans passer par la théorie des imaginaires. Ce probleme a été abordé par Viète [17], mais pas plus que

Newton [14], il n'a mis en évidence la décomposition en facteur des polynomes U et H et reconnu le double rôle du polynome H (résolution et substitution). Revenons au changement de variable

$$x = 2\cos\varphi,$$

on obtient

$$H_p(2\cos\varphi) = 2\cos p\varphi, \qquad F_p(2\cos\varphi) = \frac{\sin(2p+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$G_p(2\cos\varphi) = \frac{\cos(2p+1)\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}},$$

et l'on a du même coup les expressions des racines de tous ces polynomes.

Ce nouveau changement de variable appliqué à l'identité (a) montre qu'elle n'est autre que l'identité de Moivre.

Ces remarques constituent un lien entre les polynomes électrosphériques d'une part, les équations binomes et les polygones réguliers d'autre part; on peut préciser comme suit :

Les relations établies précédemment (δ et η) fournissent des conditions suffisantes de divisibilite de deux polynomes U, ou H, ou F, ou G, entre eux; la forme trigonométrique (avec $v = 2\cos\varphi$) de ces polynomes montre qu'elles sont aussi nécessaires, sauf bien entendu $(4')$ qui est une forme particuliere de $(3')$.

Racines primitives. — On peut appeler racine primitive de $H_p(x) = 0$, toute racine de cette équation qui ne peut pas être racine d'une équation $H_q(x) = 0$ de degré moindre $(q < p)$.

Une racine quelconque de $H_p(x)$ étant $2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2p}$, pour $k = 1, 2, 3, \ldots, p$, est primitive, si $2k-1$ est premier avec p; notons que les racines primitives sont deux à deux opposées.

La définition des racines primitives s'étend aux polynomes $F_p(x) = 0$, $G_p(x) = 0$ et celles de $F_p(x)$ sont opposées à celles de $G_p(x)$; on peut également étendre cette notion aux polynomes U, mais les relations

$$U_{2n}(x) = F_n(x)G_n(x),$$
$$U_{2n-1}(x) = U_{n-1}(x)H_n(x)$$

montrent qu'en définitive les racines primitives des U sont celles des polynomes H, F, G.

Propriétés des racines primitives. — 1° Soit $x_{p,k} = 2\cos\frac{2k-1}{2p}\pi$ une racine primitive de $H_p(x) = 0$; si l'on forme

$$H_q(x_{p,k}) = 2\cos\frac{(2k-1)}{2p}q\pi,$$

pour $q = 1, 3, 5, \ldots, 2p-1$, on reproduit toutes les racines de $H_p(x) = 0$. En particulier, les racines primitives correspondent aux entiers q premiers avec p.

2° De même, soit $x_{p,k} = 2\cos\frac{2k\pi}{2p+1}$, une racine primitive de

$$F_p(x) = 0.$$

k peut varier de 1 à p en étant premier avec $2p+1$, l'expression

$$H_q(x_{p,k}) = 2\cos\frac{2kq\pi}{2p+1},$$

pour $q = 1, 2, 3, \ldots, p$, reproduit toutes les racines de $F_p(x) = 0$; les primitives correspondent à q premier avec $2p+1$.

3° De même, soit $x_{p,k} = 2\cos\frac{2k-1}{2p+1}\pi$, une racine primitive de $G_p(x) = 0$, k peut varier de 1 à p, et $2k-1$ est premier avec $2p+1$.

Soit

$$H_q(x_{p,k}) = 2\cos\frac{(2k-1)q}{2p+1}\pi.$$

Pour

$q = 1, 3, 5, \ldots, 2p-1$, on reproduit les racines de $G_p(x) = 0$,
$q = 2, 4, 6, \ldots, 2p$, on reproduit les racines de $F_p(x) = 0$.

Un polygone régulier de m côtés, obtenu en joignant de h en h les points de division de la circonférence partagée en m parties égales (h premier avec m) a pour longueur de son côté

$$2\sin\frac{h\pi}{m} = 2\cos\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{m}\right)\pi$$

1° Si m est impair, cette quantité $2\cos\frac{m-2h}{m}\pi$ est une racine primitive de $H_m(x) = 0$, donc les côtés des polygones réguliers d'un nombre impair m de côtés, sont les racines primitives positives de

$$H_m(x) = 0.$$

2° Si m est pair :

a. Si $m = 4m'$, le côté $2\cos\frac{2m'-h}{4m'}\pi$ est une racine primitive positive de

$$H_{2m'}(x) = 0.$$

b. Si $m = 4m' + 2$, le côté $2\cos\frac{2m'+1-h}{2(2m'+1)}\pi$ est une racine primitive positive de

$$F_{m'}(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad G_{m'}(x) = 0.$$

De plus, d'après ce qui précède, il suffit de connaître une *seule* racine primitive pour connaître sans autre résolution toutes les autres racines primitives; on peut dire qu'il suffit d'avoir calculé le côté d'un seul polygone régulier de m côtés pour connaître très rapidement, par de simples substitutions, les côtés des autres polygones réguliers de ce même nombre m de côtés.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DU CAS DE DEUX SPHÈRES.

24. Généralités. — Au Chapitre III (p. 27 à 42) du Fascicule XXXVIII du *Mémorial des Sciences physiques*, nous avons donné les expressions des grandeurs caractéristiques du système de deux spheres. La capacité C_A de A en présence de B et la capacité C_B de B en présence de A ont pour expressions

$$C_A = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{a^{p+1} b^p}{P_{2p}}, \qquad C_B = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{a^p b^{p+1}}{Q_{2p}}.$$

Le coefficient d'induction réciproque s'écrit d'autre part

$$C = -\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{a^{p+1} b^{p+1}}{P_{2p+1}},$$

et la force f qui exprime l'action mutuelle des deux sphères est

$$f = -\frac{d}{dx}\left[\frac{V^2}{2}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a^{p+1}b^p}{P_{2p}} - Vv\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a^{p+1}b^{p+1}}{P_{2p+1}} + \frac{v^2}{2}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a^p b^{p+1}}{Q_{2p}}\right].$$

Enfin la densité en un point M du conducteur A est donnée par

$$d_{A_M} = \sum_{p=0}^{p=\infty}\sigma_p + \sum_{p=1}^{p=\infty}\tau'_p,$$

tandis que la densité en un point N du conducteur B est donnée par

$$d_{B_N} = \sum_{p=0}^{p=\infty}\tau_p + \sum_{p=1}^{p=\infty}\sigma'_p,$$

avec

$$\sigma_p = \frac{a^{p-1}b^p}{4\pi}V\frac{P_{2p}^2 - a^2P_{2p-1}^2}{[P_{2p}^2 + a^2P_{2p-1}^2 - 2aP_{2p}P_{2p-1}\cos\theta]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau'_p = -\frac{a^{p-2}b^p}{4\pi}V'\frac{Q_{2p-1}^2 - a^2Q_{2p-2}^2}{[Q_{2p-1}^2 + a^2Q_{2p-2}^2 - 2aQ_{2p-1}Q_{2p-2}\cos\theta]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau_p = \frac{a^p b^{p-1}}{4\pi}V'\frac{Q_{2p}^2 - b^2Q_{2p-1}^2}{[Q_{2p}^2 + b^2Q_{2p-1}^2 - 2bQ_{2p}Q_{2p-1}\cos\varphi]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\sigma'_p = -\frac{a^p b^{p-2}}{4\pi}V\frac{P_{2p-1}^2 - b^2P_{2p-2}^2}{[P_{2p-1}^2 + b^2P_{2p-2}^2 - 2bP_{2p-1}P_{2p-2}\cos\varphi]^{\frac{3}{2}}}.$$

Les séries C_A, C_B, C sont évidemment convergentes en raison de leur signification; on peut le voir aussi directement par application du théorème de d'Alembert. Dans la série C, le rapport d'un terme au précédent est

$$ab\frac{P_{2p+1}}{P_{2p+3}} = \frac{1}{a}\left\{a^2\frac{P_{2p+1}}{P_{2p+2}}\right\}\frac{1}{b}\left\{b^2\frac{P_{2p+2}}{P_{2p+3}}\right\} = \frac{AA_{2p+2}}{a}\,\frac{BA_{2p+3}}{b},$$

en se référant aux considérations du paragraphe 9 (Chap. III) du Fascicule XXXVIII.

Or si α et β sont les points conjugués communs aux deux sphères, on a

$$\lim\frac{AA_{2p+2}}{a}\times\frac{BA_{2p+3}}{b} = \frac{A\alpha}{a}\times\frac{B\beta}{b} < 1.$$

Comme on a $x > a + b$, α et β sont en effet respectivement à l'intérieur des sphères A et B.

Aux séries qui figurent dans l'expression de f correspondent des séries majorantes obtenues en faisant coïncider tous les centres A, B avec les points limites α, β dont la distance est plus petite que celle de deux centres quelconques. Chacune de ces séries se décompose d'ailleurs en un produit de deux séries pour lesquelles l'absolue convergence s'établit comme pour la série C.

Voici la suite des considérations qui correspondent à celles faites par M. Defourneaux dans le cas du système plan-sphère.

La convergence de chacune des deux séries dont la densité d_{AM} est la somme est évidente; elle résulte du théorème de d'Alembert, appliqué après avoir remarqué que les points A_{2p-1}, B_{2p-2} d'une part, et A_{2p-2}, B_{2p-1} d'autre part, ont une position limite commune quand p croît indéfiniment. Ces limites sont les points conjugués des deux spheres. Il en résulte que x_{2p-1} et y'_{2p-2} sont des fonctions décroissantes de p, admettant pour limite l'expression

$$\frac{x^2+a^2-b^2}{2x}+\sqrt{\left(\frac{x^2+a^2-b^2}{2x}\right)^2-a^2}$$

ou

$$\frac{x^2+a^2-b^2+\sqrt{(x^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}{2x},$$

tandis que x_{2p-2} et y'_{2p-1} sont des fonctions croissantes de p, admettant pour limite l'expression

$$\frac{x^2+a^2-b^2}{2x}-\sqrt{\left(\frac{x^2+a^2-b^2}{2x}\right)^2-a^2}$$

ou

$$\frac{x^2+a^2-b^2-\sqrt{(x^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}{2x}.$$

Dans la série à termes positifs σ, le rapport d'un terme au précédent peut s'écrire ainsi (1)

$$\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}=\frac{m'_{p+1}}{m'_p}\,\frac{x^2_{2p+1}-a^2}{x^2_{2p-1}-a^2}\left[\frac{x^2_{2p-1}+a^2-2ax_{2p-1}\cos\theta}{x^2_{2p+1}+a^2-2ax_{2p+1}\cos\theta}\right]^{\frac{1}{2}},$$

où l'on voit que la limite de $\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}$, lorsque p croît indéfiniment, est la même que celle du rapport $\frac{m'_{p+1}}{m'_p}$.

(1) Nous employons ici les notations et les relations de la page 40 du Fascicule XXXVIII du *Mémorial des Sciences physiques*.

Or,

$$\frac{m'_{p+1}}{m'_p} = \frac{ab}{x_{2p-1}x'_{2p}} = \frac{ab}{x_{2p-1}(x - x_{2p})} = \frac{ab}{x x_{2p-1} - a^2}.$$

Ce rapport a pour limite

$$\frac{2ab}{x^2 - a^2 - b^2 + \sqrt{(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2}}$$

ou

$$\frac{x^2 - a^2 - b^2 - \sqrt{(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2}}{2ab},$$

qui est une quantité inférieure à 1, car $x > a + b$. De même pour la série à termes positifs $(-\tau')$, la limite du rapport $\frac{\tau'_{p+1}}{\tau'_p}$, lorsque p croît indéfiniment, est la même que celle du rapport $\frac{n_{p+1}}{n_p}$, c'est-à-dire de $\frac{ab}{xy'_{2p-2} - a}$; cette limite est donc la même que la précédente.

25. **Transformation des formules σ, σ', τ et τ'.** — Les formules données précédemment obligent à des calculs longs et compliqués à cause de la présence de combinaisons homogènes du deuxième degré des polynomes P et Q. On peut remplacer ces combinaisons du deuxième degré par des formes linéaires non homogènes de ces polynomes, grâce aux relations suivantes :

$$P^2_p - a^2P^2_{p-1} = P_{4p}, \qquad P^2_{p-1} - b^2P^2_{p-2} = P_{4p-2},$$

$$P^2_{2p} + a^2P^2_{2p-1} = \frac{(x^2 + a^2 - b^2)(P_{4p+2} - a^2b^2P_{4p-2}) - 4a^{2p+2}b^{2p}x^2}{(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2};$$

$$P^2_{2p-1} + b^2P^2_{2p-2} = \frac{(x^2 + b^2 - a^2)(P_{4p} - a^2b^2P_{4p-4}) - 4a^{2p}b^{2p}x^2}{(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2},$$

$$P_{2p}P_{2p-1} = \frac{x(P_{4p+2} - a^2b^2P_{4p-2}) - a^{2p}b^{2p}x(x^2 + a^2 - b^2)}{(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2},$$

$$P_{2p-1}P_{2p-2} = \frac{x(P_{4p} - a^2b^2P_{4p-4}) - a^{2p}b^{2p-2}x(x^2 + b^2 - a^2)}{(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2},$$

et les relations analogues pour Q, obtenues en permutant a et b dans les précédentes.

On introduit d'ailleurs ainsi des polynomes

$$R_n = P_n - a^2b^2P_{n-4}, \qquad S_n = Q_n - a^2b^2Q_{n-4}$$

qui se déduisent les uns des autres de la même façon que les polynomes P ou Q; ainsi l'on a

$$
\begin{aligned}
R_{2n} &= x R_{2n-1} - b^2 R_{2n-2}, & S_{2n} &= x S_{2n-1} - a^2 S_{2n-2},\\
R_{2n+1} &= x R_{2n} - a^2 R_{2n-1}, & S_{2n+1} &= x S_{2n} - b^2 S_{2n-1},\\
R_n &= (x^2 - a^2 - b^2) R_{n-2} - a^2 b^2 R_{n-4}, & S_n &= (x^2 - a^2 - b^2) S_{n-2} - a^2 b^2 S_{n-4},
\end{aligned}
$$

$$R_{2n+1} = S_{2n+1}.$$

Dans ces conditions, il vient

$$\sigma_p = \frac{a^{p-1} b^p}{4\pi} V \frac{P_{4p}}{\left[\dfrac{\left\{\begin{array}{l}(x^2 + a^2 - b^2 - 2ax\cos\theta) R_{4p+2} \\ \quad + 2a^{2p+1} b^{2p} x[(x^2 + a^2 - b^2)\cos\theta - 2ax]\end{array}\right\}}{(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\tau'_p = -\frac{a^{p-2} b^p}{4\pi} V' \frac{Q_{4p-2}}{\left[\dfrac{\left\{\begin{array}{l}(x^2 + a^2 - b^2 - 2ax\cos\theta) S_{4p} \\ \quad + 2a^{2p-1} b^{2p} x[(x^2 + a^2 - b^2)\cos\theta - 2ax]\end{array}\right\}}{(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\tau_p = \frac{a^p b^{p-1}}{4\pi} V' \frac{Q_{4p}}{\left[\dfrac{\left\{\begin{array}{l}(x^2 + b^2 - a^2 - 2bx\cos\varphi) S_{4p+2} \\ \quad + 2a^{2p} b^{2p+1} x[(x^2 + b^2 - a^2)\cos\varphi - 2bx]\end{array}\right\}}{(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\sigma'_p = -\frac{a^p b^{p-2}}{4\pi} V \frac{P_{4p-2}}{\left[\dfrac{\left\{\begin{array}{l}(x^2 + b^2 - a^2 - 2bx\cos\varphi) R_{4p} \\ \quad + 2a^{2p} b^{2p-1} x[(x^2 + b^2 - a^2)\cos\varphi - 2bx]\end{array}\right\}}{(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Ces expressions deviennent rationnelles et se simplifient lorsque $\theta = 0$ ou 180°, lorsque $\varphi = 0$ ou 180°. Toutefois, elles ne peuvent être d'un usage courant; la présence simultanée de trois paramètres x, a, b entraîne que des nombres tels que P_{4p} et R_{4p+2}, peuvent être très grands et d'un maniement compliqué. De plus, il est nécessaire de recommencer tous les calculs lorsqu'on passe d'un système x, a, b à un autre système x', a', b', même si celui-ci est proportionnel au premier (sphères homothétiques).

Il convient donc d'introduire de nouveaux paramètres; mais toujours en vue de la rapidité des calculs, il faut prendre des paramètres supérieurs à un, c'est-à-dire qui puissent devenir entiers. On pourrait introduire $\frac{x}{a}, \frac{x}{b}, \ldots$ Pour conserver une certaine analogie avec le système plan-sphère, posons

$$\frac{x-a}{b}=\alpha, \qquad \frac{x-b}{a}=\beta.$$

Ces paramètres α et β sont analogues au paramètre u.

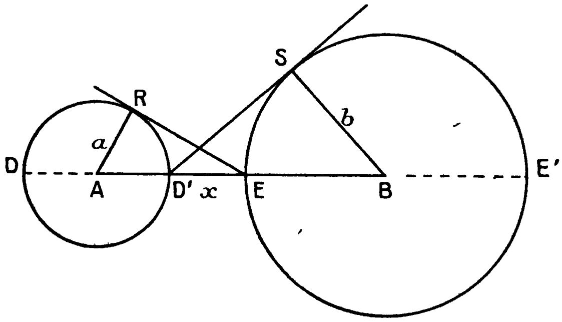

Fig. 3.

On a

$$\alpha=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BS}}=\frac{1}{\cos\widehat{\mathrm{DBS}}},$$

$$\beta=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AR}}=\frac{1}{\cos\widehat{\mathrm{EAR}}}.$$

De plus $\alpha>1$; $\beta>1$ et

$$\frac{a}{\alpha-1}=\frac{b}{\beta-1}=\frac{x}{\alpha\beta-1}.$$

Par ce changement de variable, les polynomes précédents donnent naissance à d'autres polynomes tels que

$$\mathrm{P}_{2n}=a^n b^n\frac{\mathcal{P}_{2n}}{\beta-1}, \qquad \mathrm{Q}_{2n}=a^n b^n\frac{\mathcal{Q}_{2n}}{\alpha-1},$$

$$\mathrm{P}_{2n+1}=a^n b^n x\,\mathcal{P}_{2n+1}, \qquad \mathrm{Q}_{2n+1}=a^n b^n x\,\mathcal{Q}_{2n+1},$$

$$\mathrm{R}_{2n}=a^n b^n\frac{\mathcal{R}_{2n}}{\beta-1}, \qquad \mathrm{S}_{2n}=a^n b^n\frac{\mathcal{S}_{2n}}{\alpha-1},$$

$$\mathrm{R}_{2n+1}=a^n b^n x\,\mathcal{R}_{2n+1}, \qquad \mathrm{S}_{2n+1}=a^n b^n x\,\mathcal{S}_{2n+1}.$$

Notons que $\mathcal{P}_{2n}$ est de degré $2n+1$ et $\mathcal{P}_{2n+1}$ de degré $2n$.

Ces nouveaux polynomes satisfont à des relations simples telles que

$$(\alpha-1)\mathcal{T}_{2n}+(\beta-1)\mathcal{T}_{2n-2}=(\alpha\beta-1)^2\mathcal{T}_{2n-1},$$
$$(\beta-1)\mathcal{T}_{2n+1}+(\alpha-1)\mathcal{T}_{2n-1}=\mathcal{T}_{2n},$$
$$\mathcal{T}_{n+2}+\mathcal{T}_{n-2}=(\alpha\beta+\alpha+\beta-1)\mathcal{T}_n,$$
$$\mathcal{R}_n=\mathcal{T}_n-\mathcal{T}_{n-4}.$$
$$\mathcal{R}_{n+2}+\mathcal{R}_{n-2}=(\alpha\beta+\alpha+\beta-1)\mathcal{R}_n,$$
$$(\beta-1)\mathcal{Q}_{2n}+(\alpha-1)\mathcal{Q}_{2n-2}=(\alpha\beta-1)^2\mathcal{Q}_{2n-1},$$
$$(\alpha-1)\mathcal{Q}_{2n+1}+(\beta-1)\mathcal{Q}_{2n-1}=\mathcal{Q}_{2n}.$$
$$\mathcal{Q}_{n+2}+\mathcal{Q}_{n-2}=(\alpha\beta+\alpha+\beta-1)\mathcal{Q}_n,$$
$$\mathcal{S}_n=\mathcal{Q}_n-\mathcal{Q}_{n-4},$$
$$\mathcal{S}_{n+2}+\mathcal{S}_{n-2}=(\alpha\beta+\alpha+\beta-1)\mathcal{S}_n,$$

avec

$$\mathcal{T}_0=\beta-1,\quad \mathcal{T}_1=1,\quad \mathcal{T}_2=\beta(\alpha\beta+\beta-2);\quad \mathcal{T}_3=\alpha\beta+\alpha+\beta-1,\quad \ldots,$$
$$\mathcal{Q}_0=\alpha-1,\quad \mathcal{Q}_1=1,\quad \mathcal{Q}_2=\alpha(\alpha\beta+\alpha-2),\quad \mathcal{Q}_3=\alpha\beta+\alpha+\beta-1.$$

D'ailleurs,

$$\mathcal{T}_{2n+1}=\mathcal{Q}_{2n+1}.$$

Les expressions de σ_p, $\tau'_p, \ldots,$ deviennent

$$\sigma_p=\frac{V}{4\pi a}\,\frac{(\beta-1)^2\mathcal{T}_{4p}}{\left[\dfrac{\left\{\begin{array}{l}[(\alpha+1)\beta^2-2\beta+\alpha-1-2(\alpha\beta-1)\cos\theta]\mathcal{R}_{4p+2}+2(\alpha\beta-1)\\ \times[\{(\alpha+1)\beta^2-2\beta+\alpha-1\}\cos\theta-2(\alpha\beta-1)]\end{array}\right\}}{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha\beta+\alpha+\beta-3)}\right]^{\frac{2}{3}}},$$

$$\tau'_p=-\frac{V'}{4\pi a}\,\frac{(\beta-1)^2\mathcal{Q}_{4p-2}}{\left[\dfrac{\left\{\begin{array}{l}[(\alpha+1)\beta^2-2\beta+\alpha-1-2(\alpha\beta-1)\cos\theta]\mathcal{S}_{4p}+2(\alpha\beta-1)\\ \times[\{(\alpha+1)\beta^2-2\beta+\alpha-1\}\cos\theta-2(\alpha\beta-1)]\end{array}\right\}}{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha\beta+\alpha+\beta-3)}\right]^{\frac{2}{3}}},$$

$$\tau_p=\frac{V'}{4\pi b}\,\frac{(\alpha-1)^2\mathcal{Q}_{4p}}{\left[\dfrac{\left\{\begin{array}{l}[(\beta+1)\alpha^2-2\alpha+\beta-1-2(\alpha\beta-1)\cos\varphi]\mathcal{S}_{4p+2}+2(\alpha\beta-1)\\ \times[\{(\beta+1)\alpha^2-2\alpha+\beta-1\}\cos\varphi-2(\alpha\beta-1)]\end{array}\right\}}{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha\beta+\alpha+\beta-3)}\right]^{\frac{2}{3}}},$$

$$\sigma'_p=-\frac{V}{4\pi b}\,\frac{(\alpha-1)^2\mathcal{T}_{4p-2}}{\left[\dfrac{\left\{\begin{array}{l}[(\beta+1)\alpha^2-2\alpha+\beta-1-2(\alpha\beta-1)\cos\varphi]\mathcal{R}_{4p}+2(\alpha\beta-1)\\ \times[\{(\beta+1)\alpha^2-2\alpha+\beta-1\}\cos\varphi-2(\alpha\beta-1)]\end{array}\right\}}{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha\beta+\alpha+\beta-3)}\right]^{\frac{2}{3}}}.$$

Ces expressions sont irrationnelles, sauf pour $\theta=0$ ou 180°, $\varphi=0$ ou 180°.

Lorsque $\theta = 0$ (point D), les expressions deviennent

$$\sigma_p = \frac{V}{4\pi\alpha}\,\frac{1}{\beta-1}\,\frac{\mathcal{P}_{2p}+(\alpha\beta-1)\mathcal{P}_{2p-2}}{\left[\dfrac{\mathcal{P}_{2p}-(\alpha\beta-1)\mathcal{P}_{2p-1}}{\beta-1}\right]^2},$$

$$\tau'_p = -\frac{V'}{4\pi a}\,\frac{1}{\beta-1}\,\frac{(\alpha\beta-1)\mathcal{Q}_{2p+1}+\mathcal{Q}_{2p-2}}{\left[\dfrac{(\alpha\beta-1)\mathcal{Q}_{2p-1}+\mathcal{Q}_{2p-2}}{\beta-1}\right]^2}.$$

Quand $\theta = 180^\circ$ (point D'), les expressions deviennent

$$\sigma_p = \frac{V}{4\pi\alpha}(\beta-1)^2\,\frac{\left[\dfrac{\mathcal{P}_{2p}-(\alpha\beta-1)\mathcal{P}_{2p-1}}{\beta-1}\right]}{[\mathcal{P}_{2p}+(\alpha\beta-1)\mathcal{P}_{2p-2}]^2},$$

$$\tau'_p = -\frac{V'}{4\pi\alpha}(\beta-1)^2\,\frac{\left[\dfrac{(\alpha\beta-1)\mathcal{Q}_{2p-1}-\mathcal{Q}_{2p-2}}{\beta-1}\right]}{[(\alpha\beta-1)\mathcal{Q}_{2p-1}+\mathcal{Q}_{2p-2}]^2}.$$

On trouverait de même les expressions de τ_p et σ'_p aux points E et E' de la sphère B. Les combinaisons linéaires qui sont mises en évidence se calculent suivant la loi très simple qui permet de déterminer $\mathcal{P}_{n+2}$ en fonction de $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n-2}$ ou $\mathcal{R}_{n+2}$ en fonction de $\mathcal{R}_n$ et $\mathcal{R}_{n-2}$.

De plus

$$\frac{\mathcal{P}_{2p}-(\alpha\beta-1)\mathcal{P}_{2p-1}}{\beta-1} \quad \text{et} \quad \frac{(\alpha\beta-1)\mathcal{Q}_{2p-1}-\mathcal{Q}_{2p-2}}{\beta-1}$$

sont des polynomes.

26. **Cas particuliers.** — 1° Les sphères sont égales; $a = b$, $\alpha = \beta$ et $\alpha + 1 = \frac{x}{a}$. Les polynomes $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ deviennent

$$\mathcal{P}_{2p} = \mathcal{Q}_{2p} = (\alpha-1)U_{2p}(\alpha+1),$$

$$\mathcal{P}_{2p+1} = \mathcal{Q}_{2p+1} = \frac{1}{\alpha+1}U_{2p+1}(\alpha+1),$$

$$\mathcal{R}_{2p} = \mathcal{S}_{2p} = (\alpha^2-1)H_{2p-1}(\alpha+1),$$

$$\mathcal{R}_{2p+1} = \mathcal{S}_{2p+1} = H_{2p}(\alpha+1).$$

Les symboles U et H représentant les polynomes déjà utilisés dans le système électrisé plan-sphère, la variable v étant remplacée ici par $\alpha + 1$.

Dans ces conditions .

$$\sigma_p = \frac{V}{4\pi a} \frac{U_{4p}(\alpha+1)}{\left[\frac{(\alpha+1-2\cos\theta)H_{4p+1}(\alpha+1)+2[(\alpha+1)\cos\theta-2]}{(\alpha-1)(\alpha+3)}\right]^{\frac{3}{2}}};$$

$$\tau'_p = -\frac{V'}{4\pi a} \frac{U_{4p-2}(\alpha+1)}{\left[\frac{(\alpha+1-2\cos\theta)H_{4p-1}(\alpha+1)+2[(\alpha+1)\cos\theta-2]}{(\alpha-1)(\alpha+3)}\right]^{\frac{3}{2}}};$$

$$\tau_p = \frac{V'}{4\pi a} \frac{U_{4p}(\alpha+1)}{\left[\frac{(\alpha+1-2\cos\theta)H_{4p+1}(\alpha+1)+2[(\alpha+1)\cos\theta-2]}{(\alpha-1)(\alpha+3)}\right]^{\frac{3}{2}}};$$

$$\sigma'_p = -\frac{V}{4\pi a} \frac{U_{4p-2}(\alpha+1)}{\left[\frac{(\alpha+1-2\cos\theta)H_{4p-1}(\alpha+1)+2[(\alpha+1)\cos\theta-2]}{(\alpha-1)(\alpha+3)}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour le point D, on obtient

$$\sigma_p = \frac{V}{4\pi a}\frac{F_{2p}(\alpha+1)}{G^{3}_{2p}(\alpha+1)}, \qquad \tau'_p = -\frac{V'}{4\pi a}\frac{F_{2p-1}(\alpha+1)}{G^{3}_{2p-1}(\alpha+1)},$$

tandis que pour le point D′, on a

$$\sigma_p = \frac{V}{4\pi a}\frac{G_{2p}(\alpha+1)}{F^{3}_{2p}(\alpha+1)}, \qquad \tau'_p = -\frac{V'}{4\pi a}\frac{G_{2p-1}(\alpha+1)}{F^{3}_{2p-1}(\alpha+1)}.$$

Il convient de rapprocher ces résultats de ceux qui ont été trouvés dans le cas du système électrisé plan-sphère.

Si l'on fait abstraction des coefficients constants $\frac{V}{4\pi a}$, $-\frac{V'}{4\pi a}$, $\frac{V-V'}{4\pi R}$, on peut dire que les termes de la série précédente σ sont identiques aux termes de rang pair, et que ceux de la série précédente τ' sont identiques aux termes de rang impair, de la série qui exprime la densité sur la sphère faisant partie d'un système électrisé plan sphère.

D'ailleurs, puisque $v = \frac{2e}{R}$ est remplacé par $\alpha + 1 = \frac{x}{a}$, on peut supposer que ce système électrisé plan-sphère se compose d'une des sphères égales et de leur plan radical, $R = a$, $2e = x$. Cette remarque, qui a son importance puisqu'elle évite de nouveaux calculs, a été utilisée dans les résultats numériques donnés au fascicule XXXVIII du *Mémorial des Sciences physiques*.

2° Envisageons un système composé de deux sphères satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\frac{a}{U_{h-1}(v)} = \frac{b}{U_{k-1}(v)} = \frac{x}{U_{h+k-1}(v)},$$

dans lesquelles U est la notation habituelle des polynomes électrosphériques; h et k sont des entiers positifs et v est un nombre quelconque supérieur à 2.

Notons que le système des sphères égales est un cas particulier de celui-ci ; il suffit de prendre

$$h = k \qquad \text{et} \qquad \alpha + 1 = H_h(v)].$$

Les entiers h et k peuvent toujours être supposés premiers entre eux, car s'ils ne l'étaient pas, d désignant leur plus grand commun diviseur, en posant $h = h'd$, $k = k'd$, on pourrait écrire

$$\frac{a}{U_{h'd-1}(v)} = \frac{b}{U_{k'd-1}(v)} = \frac{x}{U_{(h'+k')d-1}(v)}.$$

L'identité

$$U_{np-1}(v) = U_{n-1}(v)\,U_{p-1}[H_n(v)]$$

permet, après suppression du facteur non nul $U_{d-1}(v)$, d'écrire les relations précédentes comme suit :

$$\frac{a}{U_{h'-1}(v_1)} = \frac{b}{U_{k'-1}(v_1)} = \frac{x}{U_{h'+k'-1}(v_1)},$$

dans lesquelles $v_1 = H_d(v)$, h' et k' étant premiers entre eux.

Ces hypothèses conduisent aux expressions suivantes :

$$\alpha = \frac{U_{h+k-1}(v) - U_{h-1}(v)}{U_{k-1}(v)},$$

$$\beta = \frac{U_{h+k-1}(v) - U_{k-1}(v)}{U_{h-1}(v)},$$

$$\mathcal{P}_{2n} = (\alpha\beta - 1)\frac{U_{(h+k)n+k-1}(v)}{U_{h+k-1}(v)}, \qquad \mathcal{P}_{2n+1} = \mathcal{Q}_{2n+1} = \frac{U_{(h+k)(n+1)-1}(v)}{U_{h+k-1}(v)},$$

$$\mathcal{Q}_{2n} = (\alpha\beta - 1)\frac{U_{(h+k)n+h-1}(v)}{U_{h+k-1}(v)},$$

$$\mathcal{R}_{2n} = (\alpha\beta - 1)H_{(h+k)n-h}(v), \qquad \mathcal{S}_{2n} = (\alpha\beta - 1)H_{(h+k)n-k}(v),$$

et il s'ensuit

$$(1)\left\{\begin{aligned}\sigma_p &= \frac{V}{4\pi a}U_{k-1}^2(v)\frac{U_{2(h+k)p+k-1}(v)}{\left[\dfrac{[H_k(v)-2\cos\theta]H_{2(h+k)p+k}(v)+2[H_k(v)\cos\theta-2]}{v^2-4}\right]^{\frac{3}{2}}},\\ \tau'_p &= -\frac{V'}{4\pi a}U_{k-1}^2(v)\frac{U_{2(h+k)p-k-1}(v)}{\left[\dfrac{[H_k(v)-2\cos\theta]H_{2(h+k)p-k}(v)+2[H_k(v)\cos\theta-2]}{v^2-4}\right]^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\right.$$

Les expressions de τ_p et σ'_p s'en déduisent par permutation de h et k, de V et V'.

On peut obtenir facilement les expressions de σ_p et τ'_p, rationnelles, pour les points D et D'. Toutefois leur forme change avec la parité de k; il en serait de même en E et E', h remplaçant k et inversement.

Lorsque l'on fait $k=1$, on constate que les termes σ_p et τ'_p, aux facteurs $\frac{V}{4\pi a}$, $-\frac{V'}{4\pi a}$ près, font partie de la série qui donne la densité en tout point d'une sphère appartenant à un système électrisé plan-sphère; les termes σ_p y occupent les rangs 0, $h+1$, $2(h+2)$, etc., et les termes τ'_p les rangs h, $2h+1$, $3h+2$, etc.

Entre les quantités e, R du système plan-sphère et les quantités x, a, b du système des deux sphères existent les relations

$$\frac{a}{U_{h-1}\left(\frac{2e}{R}\right)} = b = \frac{x}{U_h\left(\frac{2e}{R}\right)}.$$

Pour $k=2$, si l'on pose $H_2(v)=v^2-2=v_1$, on trouve pour σ_p et τ'_p

$$\sigma_p = \frac{V}{4\pi a}\frac{U_{(h+2)p}(v_1)}{\left[\dfrac{(v_1-2\cos\theta)H_{[h+2)p+1}(v_1)+2(v_1\cos\theta-2)}{v_1^2-4}\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau'_p = -\frac{V'}{4\pi a}\frac{U_{(h+2)p-2}(v_1)}{\left[\dfrac{(v_1-2\cos\theta)H_{[h+2)p-2}(v_1)+2(v_1\cos\theta-2)}{v_1^2-4}\right]^{\frac{3}{2}}},$$

transformations faciles à obtenir si l'on tient compte des identités déjà établies à propos du système plan-sphère, telles que

$$H_{np}(v) = H_p[H_n(v)],$$
$$U_{np-1}(v) = U_{n-1}(v)U_{p-1}[H_n(v)].$$

Puisque h et $k(=2)$ sont supposés premiers entre eux, ceci impose que h est impair.

Donc les termes σ_p et τ'_p de rang pair, seuls, appartiendront à la série qui donne la densité électrique en tout point d'une sphere d'un système électrisé plan-sphère et ceux de rang impair, à un facteur constant près, appartiendront à la série qui donne la densité électrique en tout point du plan, pourvu que ce systeme plan-sphère soit tel que $v_1 = \frac{2e}{R}$.

Pour toute valeur entière de k différente de 1 et 2, les termes σ_p et τ'_p, tels que $2p$ soit un multiple de k, appartiendront à l'une ou l'autre des deux séries donnant la densité électrique soit sur la sphère, soit sur le plan, d'un système électrisé plan-sphère, tel que $\frac{2e}{R} = H_k(v)$.

Tous ces résultats sont applicables, quel que soit l'entier h.

On trouverait des conclusions analogues concernant τ_p et σ'_p, l'entier k étant, cette fois, quelconque.

Remarque. — Si l'on convient de poser

$$U_n(v) = \frac{\left(\frac{v}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}\right)^{n+1} - \left(\frac{v}{2} - \sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}},$$

quel que soit le nombre n, on généralise par là même la notion de polynomes électrosphériques, et si l'on peut écrire, par analogie, quelle que soit la nature de nombre n,

$$H_n(v) = U_n(v) - U_{n-2}(v) = \left(\frac{v}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}\right)^n + \left(\frac{v}{2} - \sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}\right)^n,$$

$$F_n(v) = U_n(v) + U_{n-1}(v) = \frac{\left(\frac{\sqrt{v+2} + \sqrt{v-2}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{\sqrt{v+2} - \sqrt{v-2}}{2}\right)^{2n+1}}{\sqrt{v-2}},$$

$$G_n(v) = U_n(v) - U_{n-1}(v) = \frac{\left(\frac{\sqrt{v+2} + \sqrt{v-2}}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{\sqrt{v+2} - \sqrt{v-2}}{2}\right)^{2n+1}}{\sqrt{v+2}}.$$

Ces fonctions U, H, F, G, satisfont aux identités déjà établies pour les indices entiers.

D'apres cela, il est toujours possible de déterminer trois nombres h, k, v, les deux premiers positifs, le troisième supérieur à 2, tels que

$$\frac{a}{U_{h-1}(v)} = \frac{b}{U_{k-1}(v)} = \frac{x}{U_{h+k-1}(v)}.$$

Il y a même indétermination, puisqu'il n'y a que deux équations pour trois inconnues, ce qui permet de choisir h ou k égal à 1.

Cela résulte aussi des transformations suivantes :

$$\frac{a}{\dfrac{U_{h-1}(v)}{U_{k-1}(v)}} = b = \frac{x}{\dfrac{U_{h+k-1}(v)}{U_{k-1}(v)}},$$

et, en tenant compte d'une identité précédemment rappelée, on peut écrire

$$U_{h-1}(v) = U_{k-1}(v) U_{\frac{h}{k}-1}[H_k(v)],$$

$$U_{h+k-1}(v) = U_{k-1}(v) U_{\frac{h}{k}}[H_k(v)];$$

par suite,

$$\frac{a}{U_{\frac{h}{k}-1}[H_k(v)]} = b = \frac{x}{U_{\frac{h}{k}}[H_k(v)]}.$$

On voit que h, k, v sont respectivement remplacés par $\frac{h}{k}$, 1, $H_k(v)$.

Il en résulte que les expressions (1) pour σ_p et τ'_p et celles qui s'en déduisent par permutation pour τ_p et σ'_p, peuvent être considérées comme générales, on a même la possibilité de prendre soit $h = 1$, soit $k = 1$. Pour appliquer ces formules, qui ont un intérêt théorique véritable, lorsque h et k ne sont pas entiers, il faut pouvoir calculer U et H, F et G, qui ne sont plus des polynomes.

On peut faire facilement leur développement en série, si l'on remarque que ces fonctions, comme nous l'avons indiqué pour U, sont liées à la série hypergéométrique.

Le changement de variable $v = 4v' - 2$ montre que l'on a les équations différentielles

$$v'(1-v')\frac{d^2 U_p}{dv'^2}+\left(\frac{3}{2}-3v'\right)\frac{dU_p}{dv'}+p(p+2)U_p=0,$$

$$v'(1-v')\frac{d^2 H_p}{dv'^2}+\left(\frac{1}{2}-v'\right)\frac{dH_p}{dv'}+p^2 H_p=0,$$

$$v'(1-v')\frac{d^2 F_p}{dv'^2}+\left(\frac{1}{2}-2v'\right)\frac{dF_p}{dv'}+p(p+1)F_p=0,$$

$$v'(1-v')\frac{d^2 G_p}{dv'^2}+\left(\frac{3}{2}-2v'\right)\frac{dG_p}{dv'}+p(p+1)G_p=0,$$

qui rentrent dans la forme générale de l'équation différentielle de Gauss

$$v'(1-v')\frac{d^2 y}{dv'^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)v']\frac{dy}{dv'}-\alpha\beta y=0.$$

En outre, la limite commune, pour p infini, des quatre rapports $\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}$, $\frac{\tau'_{p+1}}{\tau'_p}$, $\frac{\tau_{p+1}}{\tau_p}$, $\frac{\sigma'_{p+1}}{\sigma'_p}$, prend la forme remarquable suivante

$$\left(\frac{v}{2}-\sqrt{\frac{v^2}{4}-1}\right)^{h+k}.$$

Limite de l'erreur. — Pour $\theta=0$, c'est-à-dire au point D, les séries à termes positifs σ et $-\tau'$ sont maxima.

Le rapport $\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}$ qui, pour $\theta=0$, prend la valeur

$$\frac{ab}{xx_{2p-1}-a^2}\,\frac{x_{2p+1}+a}{x_{2p-1}+a}\left(\frac{x_{2p-1}-a}{x_{2p+1}-a}\right)^2,$$

ou, en l'exprimant à l'aide de la seule quantité x_{2p+1}, la valeur

$$\frac{1}{b}\,\frac{x_{2p+1}+a}{(a+x)(x-x_{2p-1})-b^2}\left(x-a-\frac{(x-a-b)(x+b-a)}{x_{2p+1}-a}\right)^2$$

est une fonction qui décroît lorsque p croît, puisque x_{2p+1} est elle-même une fonction décroissante de p. Ainsi si v_p désigne le dernier terme calculé de cette série σ_p, au point D, une limite supérieure de la somme des termes négligés est $\frac{v_p^2}{v_{p-1}-v_p}$, quantité qui peut elle-même être remplacée par une limite supérieure, en prenant pour v_p une valeur par excès, et pour v_{p-1} une valeur par défaut. On obtient des résultats identiques pour la série $-\tau'$; puisqu'il suffit de remplacer dans ce qui précède le paramètre x_{2p+1} par le paramètre y'_{1p} qui, lui aussi, décroît lorsque p croît et qui a d'ailleurs même limite que x_{2p+1}.

Pour tout autre angle $\theta \neq 0$, le nombre des termes calculés de la série σ_p étant le même que dans le cas $\theta = 0$, la quantité précédente $\frac{v_p^2}{v_{p-1} - v_p}$ est encore une limite supérieure de la somme des termes négligés. Donc, pour un rang déterminé, on obtient ainsi une limite supérieure de la somme des termes négligés indépendante de θ.

Si l'on étudie la variation du rapport d'un terme au précédent, dans les séries σ_p et τ'_p, en fonction de θ, on parvient aux conclusions suivantes :

Série σ_p. — Soient θ_1 et θ_2 deux angles géométriques tels que

$$\cot g^2 \frac{\theta_1}{2} = \frac{(x+a+b)(x+a-b)}{(x-a-b)(x+b-a)} = \alpha_1 \beta_1,$$

la quantité $m = \cot g^2 \frac{\theta}{2}$ étant la racine positive de l'équation du deuxième degré en m

$$\begin{aligned} &-(\alpha_1\beta_1 - 1)(m+1)[(\alpha+1)^2 m + \alpha_1^2(\beta_1+1)^2] \\ &+ 3(\alpha_1+1)(\beta_1+1)(m+\alpha_1\beta_1)[\alpha_1(\beta_1+1) - m(\alpha_1+1)] = 0, \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{x^2 - a^2 - b^2}{(x-a-b)(x+b-a)}, \qquad \beta_1 = \frac{(x+a+b)(x+a-b)}{x^2 - a^2 - b^2}.$$

1° Pour $0 \leqq \theta \leqq \theta_1$, le rapport d'un terme au précédent décroît constamment lorsque p croît;

2° Pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$, le rapport d'un terme au précédent peut commencer par décroître, pour croître ensuite;

3° Pour $\theta_2 < \theta < 180°$, le rapport croît constamment.

Dans le premier intervalle, la limite de la somme des termes négligés s'obtient comme pour $\theta = 0$; pour la troisième, on prendra l'expression

$$\frac{x^2 - a^2 - b^2 - \sqrt{(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2}}{2ab}$$

comme limite supérieure du rapport d'un terme au précédent;

v_p désignant encore le dernier terme calculé, une limite supérieure de la somme des termes négligés est

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{(x+a-b)(x+b-a)}{(x+a+b)(x-a-b)}}-1\right]U_p.$$

Pour le deuxième intervalle, on prendra comme limite supérieure du rapport de deux termes consécutifs négligés, celui des deux nombres qui est le plus grand, soit le rapport des deux derniers termes calculés, soit la quantité

$$\frac{x^2-a^2-b^2-\sqrt{(x^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}{2ap}.$$

Série τ'. — Les conclusions se déduisent des précédentes en y remplaçant seulement θ_2 par l'angle θ', tel que $\operatorname{cotg}^2\frac{\theta'_2}{2}=m'$; m' étant la racine positive de l'équation du deuxième degré en m'

$$\begin{aligned}
&-(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1\beta_1-1)[(2\alpha_1\beta_1-\alpha_1-\beta_1)^2+(\alpha_1+\beta_1-2)^2m']\\
&\qquad\times[\alpha_1^2(\beta_1-1)^2+(\alpha_1-1)^2m']\\
&+3(\alpha_1-1)(\beta_1-1)(2\alpha_1\beta_1-\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1+\beta_1-2)(\alpha_1\beta_1+m')\\
&\qquad\times[\alpha_1(\beta_1-1)(2\alpha_1\beta_1-\alpha_1-\beta_1)-(\alpha_1-1)(\alpha_1+\beta_1-2)m']=0.
\end{aligned}$$

Le changement de variable signalé plus haut permet de donner un autre aspect à ces discussions . les résultats prennent des formes plus simples et plus faciles à utiliser numériquement.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. APPEL (P.). — *C. R. Acad. Sc.*, 196, 1883, p. 1018.
2. APPEL (P.). — *C. R. Acad. Sc.*, 157, 1913, p. 5 et 1042; *Bull. Sc. math.*, 2e série, 37, novembre 1913.
3. AUBERT (M.) et GUILLET (A.). — *Mémorial des Sciences physiques*, fasc. XXXVIII, p. 34.
4. AUBERT (M.) et GUILLET (A.). — *Mémorial des Sciences physiques*, fasc. XXXVIII, p. 31.
5. AUBERT (M.). — *C. R. Acad. Sc.*, 155, 1912, p. 708.
6. DEFOURNEAUX. — *Journal de Physique*, 8, 1919, p. 165.
7. DEFOURNEAUX. — *C. R. Acad. Sc.*, 168, 1919, p. 880.
8. DE JONQUIÈRES. — *C. R. Acad. Sc.*, 96, 1883, p. 568.
9. DIRICHELET (L.). — *Zahlen théorie*, 3e éd., p. 216-217.
11. GOURSAT (E.). — *Analyse mathématique*, 2e éd., 2, p. 469.
12. HERPIN (A.). — *C. R. Acad. Sc.*, 225, 1947, p. 17.
13. HUMBERT (P.). — *C. R. Acad. Sc.*, 167, 1918, p. 4?8.
14. NEWTON (I). — *Lettre à Oldenbourg*, 1676 (Aritm. univ.).
15. PARODI (M.). — *Mémorial des Sciences physiques*, fasc. XLVII.
16. PARODI (M.). — *Revue générale de l'Electricité*, 51, 1942, p. 142.
17. VIÈTE. — *Canon mathematicus*, Paris, 1579.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVANT PROPOS I

CHAPITRE I. — *Les polynomes électrosphériques.*

1. Origine des fonctions électrosphériques 5
2. Polynomes U, P, Q 5
3. Quelques relations entre les polynomes $U(u)$ ou entre ces polynomes et leurs dérivés 6
4. Expression trigonométrique ou hyperbolique des fonctions $U_n(u)$ 7
5. Racines de l'équation $U_n(u) = 0$ 8
6. Fonction génératrice des polynomes $U_p(u)$ 8
7. Les polynomes P et la fonction génératrice de ces polynomes 9
8. Expression des polynomes P et Q en fonction des polynomes U 10
9. Systèmes de deux sphères de même coefficient d'influence 12
10. Équation différentielle admettant les polynomes P comme solution 12
11. Les polynomes électrosphériques tirés des fractions continues 14
12. Les quotients $\frac{U_{n-1}}{U_n}$ sont les réduites du développement de $u - \sqrt{u^2 - 1}$ 16
13. Note de M. P. Appel 18
14. Les fonctions électrosphériques sous forme de déterminants 19
15. La fonction $U_p(v)$ et la fonction hypergéométrique 20
16. Les polynomes $U_p(v)$ considérés comme la dérivée $p^{\text{ième}}$ d'une fonction 22
17. Développements en série procédant suivant les inverses de polynomes donnés. 22
18. Les polynomes d'Hermite et de Legendre 24
19. Calcul des valeurs des polynomes U_n et de leurs dérivées pour des valeurs imposées de u 27

CHAPITRE II. — *Le système plan-sphère.*

20. Calcul des densités électriques σ_M et $\sigma'_{M'}$ sur la sphère et le plan P du système plan-sphère 28
21. Quelques relations complémentaires entre les fonctions U, F, G et H 34
22. Propriétés arithmétiques des identités précédentes 35
23. Application géométrique 36

CHAPITRE III. — *Étude du cas de deux sphères.*

24. Généralités 39
25. Transformation des formules σ, σ', τ, τ' 42
26. Cas particuliers 46

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE 55

TABLE DES MATIÈRES 57