MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

STEFAN BERGMANN

Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 106 (1947)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1947__106__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CVI

Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques

Par M. Stefan BERGMANN

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1947

A LA MÉMOIRE

DE BRONISLAW BERGMAN

SUR
LES FONCTIONS ORTHOGONALES
DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES
AVEC LES APPLICATIONS
A LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Par Stefan BERGMANN.

INTRODUCTION.

Beaucoup de méthodes de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe ne s'étendent pas au cas de fonctions analytiques de plusieurs variables complexes (¹). Pour traiter des questions semblables à celles étudiées dans le cas d'une variable complexe, il est nécessaire d'utiliser des procédés nouveaux. Parmi ceux-ci nous citons en particulier les systèmes de fonctions $\varphi^{(\nu)}$ de n variables complexes orthogonales dans un domaine $\mathfrak{B}$. Dans nos considérations ultérieures, nous nous bornerons pour plus de simplicité au cas de $n = 2$ (²).

L'utilité des systèmes de fonctions orthogonales résulte en grande

(¹) Par fonction analytique de n variables complexes régulière dans un domaine $\mathfrak{B}^{2n}$ à $2n$ dimensions, on entend une fonction $f(z_1, \ldots, z_n)$, qui est développable autour de chaque point $\{t_1, \ldots, t_n\} \in \mathfrak{B}^{2n}$ en une série de puissances des $(z_k - t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, cette série étant uniformément convergente dans un voisinage suffisamment petit du point $\{t_1, \ldots, t_n\}$. On dit que f est de carré sommable en $\mathfrak{B}^{2n}$ si l'intégrale $\int_{\mathfrak{B}^{2n}} |f|^2 \, dx_1 \, dy_1 \ldots dx_n \, dy_n$ existe.

(²) Alors que pour passer de $n = 1$ à $n = 2$, l'on rencontre des circonstances nouvelles pour lesquelles on est obligé de créer des méthodes tout à fait nouvelles, le passage de $n = 2$ à $n > 2$ ($n \neq \infty$) n'offre généralement aucune difficulté essentielle.

partie des propriétés suivantes que possède le « noyau »

$$\sum \varphi^{(\nu)}(z_1, z_2)\overline{\varphi^{(\nu)}(t_1, t_2)}$$

d'un tel système de fonctions fermé pour la classe $E(\mathfrak{B})$ des fonctions analytiques de carré sommable, à savoir :

1° Il est une fonction régulière des variables z_1, z_2, $\overline{t_1}$, $\overline{t_2}$, dans chaque point intérieur, $\{z_1, z_2\} \in \mathfrak{B}$, $\{t_1, t_2\} \in \mathfrak{B}$.

2° Il est indépendant du choix particulier du système fermé $\{\varphi^{(\nu)}\}$.

Nous l'appelons la FONCTION NOYAU DU DOMAINE $\mathfrak{B}$ et nous le désignerons par $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{t})$.

3° Si l'on cherche le minimum de l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{B}} |h|^2 d\omega, \qquad d\omega = dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2, \qquad z_k = x_k + iy_k,$$

h variant dans le champ des fonctions analytiques dans $\mathfrak{B}$ et de carré sommable avec $|h(t_1, t_2)| = 1$ [$\{t_1, t_2\} = \{t\}$ arbitraire $\in \mathfrak{B}$], alors ce minimum est égal à $\frac{1}{K_{\mathfrak{B}}(t, \bar{t})}$ et est atteint pour

$$h = f(z) = \frac{K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{t})}{K_{\mathfrak{B}}(t, \bar{t})}, \qquad z \equiv \{z_1, z_2\}, t \equiv \{t_1, t_2\}.$$

Lorsqu'on opère avec des systèmes de fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes, on peut, par conséquent, non seulement employer les méthodes fondamentales de la théorie des fonctions orthogonales dans le domaine réel, mais il se présente dans ce cas des circonstances beaucoup plus simples (en relation avec les propriétés indiquées du noyau, *cf.* Chap. II).

La méthode se révèle surtout très appropriée pour le traitement de certaines questions concernant les fonctions de la classe E $(\mathfrak{B})$, où l'on demande que les fonctions satisfassent à des conditions de nature linéaire (par exemple pour le problème d'interpolation). Nous obtenons d'une façon relativement simple des critères pour l'existence et l'unicité de fonctions de carré sommable dans $\mathfrak{B}$ satisfaisant aux conditions indiquées, des bornes supérieures pour l'ensemble de ces fonctions, etc. (Chap. III). (Remarquons que pour beaucoup de ces problèmes il y a des systèmes orthogonaux spécialement appropriés.)

Particulièrement importantes sont les relations qui apparaissent dans l'étude des transformations pseudo-conformes.

La représentation biunivoque d'un domaine de l'espace euclidien à $2n$-dimensions sur un autre domaine par n fonctions analytiques de n variables complexes est appelée dans le cas $n > 1$ REPRÉSENTATION PSEUDO-CONFORME [1]. Nous considérons en particulier le cas $n = 2$. Une représentation pseudo-conforme d'un domaine $\mathfrak{A}$ en un domaine $\mathfrak{B}$ transforme une fonction analytique de deux variables complexes, définie dans $\mathfrak{A}$ en une fonction analytique de deux variables complexes définie dans $\mathfrak{B}$. Dans certains cas, ce domaine $\mathfrak{B}$ peut être choisi de manière que l'étude des fonctions de deux variables complexes y soit plus simple que dans le domaine primitif $\mathfrak{A}$. On conçoit dès lors que la représentation pseudo-conforme soit un procédé très important pour l'étude des fonctions de deux variables complexes.

Dans la théorie des transformations pseudo-conformes, on rencontre d'abord deux problèmes :

I. Deux domaines sont dits ÉQUIVALENTS, quand on peut les représenter l'un sur l'autre par une transformation pseudo-conforme. Il s'agit de choisir, par un procédé bien déterminé, dans une classe de domaines équivalents, un certain « domaine représentatif » de la classe considérée, de classifier les domaines représentatifs et d'en étudier les propriétés principales. De plus, il faut trouver effectivement et étudier la transformation pseudo-conforme qui représente un domaine donné de la classe sur le domaine représentatif [2].

II. Borner les variations des grandeurs attachées à la métrique euclidienne pour certaines catégories de représentations pseudo-conformes.

---

(1) Les domaines ne seront pas nécessairement univalents. Mais pour des raisons de simplicité, nous nous bornerons dans la suite (sauf avis contraire) aux transformations pseudo conformes de domaines univalents.

(2) Les méthodes actuellement connues ne permettant pas d'aborder ce problème dans sa généralité, nous considérerons dans la suite un problème plus particulier, à savoir le problème du choix d'un domaine représentatif dans la classe des domaines qu'on peut transformer mutuellement par des transformations $w_k = w_k(z_1, z_2)$, $k = 1, 2$ normées en un point fixe $\{ t \}$, c'est-à dire pour lesquelles on a

$$w_k(t_1, t_2) = t_k,\ k = 1, 2,\ \left(\frac{\partial w_k}{\partial z_n}\right)_{z_p = t_p} = \delta_{kn},\ \delta_{kk} = 1,\ \delta_{kn} = 0,\ k \neq n.$$

L'étude de ces problèmes dans le cas des représentations conformes est basée essentiellement sur deux théorèmes fondamentaux, à savoir le théorème de Riemann-Poincaré, qui dit qu'on peut représenter tout domaine simplement connexe dont le bord contient au moins deux points sur l'intérieur d'un cercle, et le lemme de Schwarz.

Ces deux théorèmes fondamentaux sont de ceux dont on ne connaît pas de généralisation immédiate. Toutefois, l'introduction de la fonction noyau, qui est un invariant intégral dans les transformations pseudo-conformes, permet de donner des théorèmes susceptibles de remplacer jusqu'à un certain point les théorèmes indiqués : comme on sait, le théorème de Riemann-Poincaré permet de définir une géométrie à l'intérieur d'un domaine simplement connexe en introduisant dans le cercle la métrique hyperbolique de Poincaré (qui est invariante par rapport aux transformations conformes du cercle en lui-même) et en définissant comme distance de deux points P_1 et P_2 du domaine envisagé la distance hyperbolique de leurs images dans le cercle unité. La théorie des fonctions orthogonales permet, à l'aide de la fonction noyau, de déterminer une métrique hermitique invariante par rapport aux transformations pseudo-conformes. L'étude plus approfondie de cette métrique nous mettra en mesure de trouver des « coordonnées représentatives » par rapport à un point intérieur dont l'introduction est équivalente dans le cas d'un domaine simplement connexe du plan à la représentation sur le cercle. Il résultera de plus, que certaines grandeurs liées à cette métrique invariante sont en même temps les minima (sous certaines conditions) d'intégrales positives étendues au domaine. On déduira de ce fait que le minimum pour un domaine $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ est plus petit que le minimum correspondant pour le domaine $\mathcal{G}$, et l'on en conclura qu'il en est de même pour les grandeurs qui nous intéressent. Cette méthode de démonstration, que nous appellerons « méthode des problèmes de minimum », remplacera pour nous le lemme de Schwarz. (Dans le cas de transformations conformes, elle conduit au lemme de Schwarz, dans la forme qui lui a été donnée par Pick, ainsi qu'aux autres théorèmes liés à ce lemme.)

Il est d'ailleurs évident que le développement de la théorie des transformations pseudo-conformes demande en outre l'utilisation de méthodes différentes des méthodes mentionnées plus haut. Les méthodes suivantes paraissent être particulièrement fécondes :

l'emploi de la théorie des groupes (*cf.* E. Cartan, 1, H. Cartan, 3 et d'autres travaux) ainsi que celui de la théorie des surfaces remarquables et des fonctions dites « fonctions de classes élargies » (*cf.* Bergmann, 7, 14, 16, 20 et d'autres travaux), méthodes que nous n'emploierons pas ici à quelques exceptions près.

Je mentionnerai encore que les transformations pseudo-conformes peuvent s'appliquer aussi dans la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires. On sait qu'une équation elliptique

$$\Delta U + A(z, \bar{z}) U_z + B(z, \bar{z}) U_{\bar{z}} + C(z, \bar{z}) U = 0 \qquad \left(U_z = \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

est transformée par une représentation conforme en une équation de même forme. De même il existe des types d'équations aux dérivées partielles de quatre variables complexes dont la forme reste invariante par des transformations pseudo-conformes. On peut utiliser alors cette propriété — au moins pour certaines questions — en n'étudiant ces types d'équations que dans des classes particulières de domaines pour lesquels l'étude se fait d'une façon plus simple que pour les domaines généraux, équivalents aux domaines particuliers envisagés.

Dans ce fascicule nous donnerons, après avoir parlé des êtres géométriques qu'on rencontre dans la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes (Chap. I), les théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions orthogonales dans le domaine complexe (Chap. II) : nous indiquerons ensuite les problèmes de minimums déjà mentionnés et les applications de ces méthodes à plusieurs questions de la théorie des fonctions (Chap. III), et finalement nous établirons la métrique invariante et étudierons ses propriétés locales (Chap. IV).

Le fascicule suivant : « Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes », est consacré à une étude précise du comportement de la fonction-noyau et de la métrique, surtout dans le voisinage de la frontière; de plus nous y étudierons quelques autres applications de méthodes exposées, en particulier nous traiterons des problèmes indiqués sous I et II à la page 3.

Le but que nous nous sommes proposé dans ces fascicules est de mettre en évidence les idées essentielles des méthodes indiquées et de donner leurs applications les plus importantes; mais nous n'avons pas cité tous les résultats obtenus. Nous ne prétendons pas dans ce travail être complet, même pas en ce qui concerne la bibliographie.

Je voudrais exprimer mes vifs remerciements à M. É. Cartan qui a eu la bonté de revoir une partie du manuscrit et dont les indications m'ont été particulièrement précieuses. Je remercie également M. N. Aronszajn qui a fait un examen critique de tout le manuscrit et qui m'a donné des conseils très utiles; M. B. Fuchs, avec lequel je me suis entretenu souvent des questions ici traitées et dont j'ai utilisé plusieurs remarques, ainsi que M. W. Dœblin pour ses remarques concernant la rédaction.

I. — Notations. Éléments de l'espace de deux variables complexes.

1. Préliminaires. — Pour l'édification de la théorie des représentations pseudo-conformes que nous avons en vue dans ce qui suit, il n'est pas nécessaire d'utiliser des théorèmes de la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes.

De la théorie des fonctions orthogonales complexes, que nous développerons dans le Chapitre II, on peut tirer un certain nombre de résultats intéressants sur la représentation des fonctions analytiques de deux variables complexes.

Nous supposons le lecteur familiarisé avec les théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions analytiques, qu'on trouve dans tous les cours classiques sur la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe. Comme nous ne supposons aucune connaissance particulière en plus, il nous sera utile de dire quelques mots sur les êtres géométriques qui interviennent dans la théorie des transformations pseudo-conformes. En même temps, nous expliquerons les notations que nous emploierons dans la suite.

2. Notations. — Nous désignerons les variables complexes et leurs conjuguées par

$$z_k = x_k + iy_k, \qquad \bar{z}_k = x_k - iy_k \qquad (k = 1, 2), \tag{1}$$

x_1, y_1, x_2, y_2 étant les coordonnées cartésiennes de l'espace à quatre dimensions. Pour une fonction réelle ou complexe des quatre variables réelles x_1, y_1, x_2, y_2, nous écrirons généralement

$\varphi(z_1, z_2, \overline{z}_1, \overline{z}_2)$ ou plus brièvement $\varphi(z, \overline{z})$. Par

$$d\varphi = \sum_{k=1}^{2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial\varphi}{\partial y_k}dy_k\right] = \sum_{k=1}^{2}[\mathrm{A}_k\,dz_k + \mathrm{B}_k\,d\overline{z}_k],$$

nous définissons les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial z_k} = \mathrm{A}_k$, $\frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z}_k} = \mathrm{B}_k$, $k = 1, 2$ et nous obtenons ainsi :

$$(2)\quad \varphi_{z_k} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right), \qquad \varphi_{\overline{z}_k} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right),$$
$$(k = 1, 2).$$

Une fonction φ est appelée fonction analytique (ou régulière) de deux variables complexes z_1, z_2 dans un domaine connexe $\mathcal{B}$, si elle y admet des dérivées partielles continues et si l'on a de plus

$$(3)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z}_k} = 0, \qquad (k = 1, 2)$$

(équations différentielles de Cauchy-Riemann).

On peut alors montrer à l'aide de la formule de Cauchy qu'en chaque point intérieur $\mathrm{P}(t_1, t_2)$ du domaine $\mathcal{B}$ la fonction φ admet un développement en série procédant suivant les puissances des $(z_k - t_k)$, $k = 1, 2$, et uniformément convergent dans un voisinage suffisamment petit de P.

Souvent on prend cette dernière propriété comme définition et l'on en déduit inversement les équations (3).

Une variété dont les coordonnées sont données par

$$(4)\qquad x_\varkappa = \varphi_\varkappa(u_1, u_2, \ldots, u_k), \qquad y_\varkappa = \psi_\varkappa(u_1, u_2, \ldots, u_k)$$
$$[\varkappa = 1, 2,\ u_\varkappa^{(0)} \leq u_\varkappa \leq u_\varkappa^{(1)}],$$

où $\varphi_\varkappa$, $\psi_\varkappa$ sont des fonctions continues des variables réelles $u_\varkappa$, qui, dans un voisinage suffisamment petit de chaque système des paramètres $u_\varkappa$, forment une transformation biunivoque de l'ensemble des paramètres, sera appelée pour $k = 1$ courbe, pour $k = 2$ surface, pour $k = 3$ hypersurface.

Nous désignerons les variétés toujours par des lettres gothiques ou rondes, où l'indice supérieur indique la dimension de la variété considérée. Toutefois les domaines à quatre dimensions seront écrits sans l'indice supérieur. En opérant avec des ensembles nous emploierons les signes usuels $\mathbf{S}$ ou $+$ (ensemble réunion), $-$ (ensemble différence), $.$ (partie commune), $\times$ (produit topologique de deux domaines), $\overline{\mathcal{B}}$ (fermeture de l'ensemble $\mathcal{B}$), $\subset$ (inclusion), etc. Ainsi, par exemple : l'ensemble réunion d'une famille d'ensembles $\mathfrak{T}^n(\alpha)$ dépendant du paramètre α, lorsque α parcourt un ensemble $\mathfrak{R}^m$ sera désigné [1] par $\underset{\alpha \in \mathfrak{R}^m}{\mathbf{S}} \mathfrak{T}^n(\alpha)$; une barre sur la lettre désignant une variété ouverte indique qu'elle doit être prise avec sa frontière; l'intersection d'une variété $\mathfrak{T}^n$ par la surface $g(z_1, z_2) = \text{const.}$ sera désignée par $\mathfrak{T}^n . [g(z_1, z_2) = \text{const.}]$. La frontière d'une variété sera dénotée généralement par la même lettre que la variété, ainsi $\mathfrak{b}^3$ signifie la frontière du domaine $\mathcal{B}$, $\mathfrak{b}^1$ la courbe frontière de $\mathfrak{B}^2$, etc. Par $\mathbf{E}(\ldots\ldots)$ sera désigné l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont aux égalités ou inégalités indiquées dans la parenthèse.

Remarquons enfin que si nous disons qu'une fonction est analytique dans un $\mathcal{L}^n$, $n \leqq 3$, nous sous-entendons qu'il existe un domaine $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}^n \subset \mathcal{G}$, où la fonction est analytique.

3. **Surfaces.** — L'égalité $f(z_1 . z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = 0$, où ni la partie réelle ni la partie imaginaire de f n'est identiquement nulle, définit une surface $\mathcal{M}^2$ (pour f suffisamment régulière). Si f est analytique dans $\mathcal{M}^2$ et si f_{z_1} et f_{z_2} ne s'annulent simultanément en aucun point de $\mathcal{M}^2$, $\mathcal{M}^2$ sera appelée SURFACE ANALYTIQUE (resp. morceau de surface analytique). $\mathbf{E}(A z_1 + B z_2 + C = 0)$ sera nommé PLAN ANALYTIQUE.

Un plan analytique est déterminé complètement par la donnée de deux de ses points. Deux plans analytiques non parallèles se coupent toujours en un point. Dans un hyperplan passe par chaque point un plan analytique unique (Study, 1).

Deux plans quelconques dans l'espace à quatre dimensions forment *deux* angles, définis par des propriétés extrémales. Dans le cas des plans analytiques, ces deux angles sont égaux, nous pouvons parler de l'ANGLE FORMÉ PAR DEUX PLANS ANALYTIQUES

$$(5) \qquad \mathfrak{A}_k^2, \quad a_k z_1 + b_k z_2 = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

---

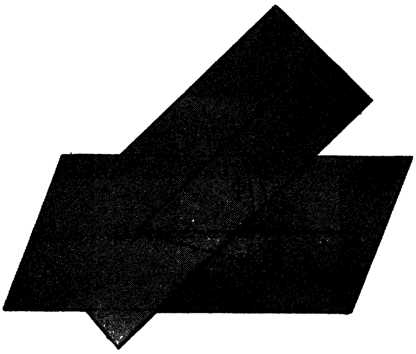
[1] En général dans ce qui suit les $\mathfrak{T}^n(\alpha)$ constituent une famille des variétés disjointes, et par suite $\underset{\alpha \in \mathfrak{R}^m}{\mathbf{S}} \mathfrak{T}^n(\alpha)$ a la dimension $(m + n)$.

(Reinhardt, 1). En partant de la formule usuelle pour l'angle entre les deux vecteurs OS et OT appartenant à $\mathfrak{A}_1^2$ respectivement à $\mathfrak{A}_2^2$, $O = \mathfrak{A}_1^2 . \mathfrak{A}_2^2$, on obtient pour l'angle χ de ces deux plans

$$(6) \qquad \begin{cases} \cos\chi = \dfrac{|a_1\overline{a}_2 + b_1\overline{b}_2|}{\sqrt{(|a_1|^2+|b_1|^2)(|a_2|^2+|b_2|^2)}}, \\ \sin\chi = \dfrac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{\sqrt{(|a_1|^2+|b_1|^2)(|a_2|^2+|b_2|^2)}}. \end{cases}$$

Étant donnés deux vecteurs OS et OT, nous désignons par $\psi = \sphericalangle(OS, OT)$ l'angle réel (¹) entre OS et OT. Maintenant, si l'on considère les deux plans $\mathfrak{A}_1^2$ et $\mathfrak{A}_2^2$ analytiques qui passent (et sont déterminés) par le vecteur OS, respectivement OT, on peut considérer l'angle χ que forment ces deux plans et l'appeler ANGLE ANALYTIQUE ENTRE LES VECTEURS. Pour chaque vecteur $OT \subset \mathfrak{A}_2^2$

Fig. 1.



nous pouvons trouver une direction $OS' \subset \mathfrak{A}_1^2$ de sorte que $\sphericalangle(OS', OT) = \chi$. Si nous posons $\varphi = \sphericalangle(OS, OS')$, nous trouverons la relation $\cos\psi = \cos\chi\cos\varphi$. L'angle φ sera appelé ANGLE DE DÉVIATION (²).

(¹) C'est l'angle au sens habituel entre les deux vecteurs OS et OT dans l'espace euclidien réel à quatre dimensions.

(²) M. Fuchs [3] a considéré ces angles en les appelant premier et second angle analytique entre deux vecteurs.

Courbure d'une surface. — Soient $d\chi$ l'angle que forment les plans analytiques tangents à la surface analytique $\mathfrak{G}^2$ aux points $\{z\}$ et $\{z+dz\}$ et ds la distance de ces deux points. Nous appelons courbure de la surface $\mathfrak{G}^2$ au point $\{z\}$ la grandeur $\frac{d\chi}{ds}$. Si l'équation de $\mathfrak{G}^2$ est donnée par $z_2 = g(z_1)$, on obtient pour la courbure l'expression $\frac{|g''|}{[1+|g'|^2]^{\frac{3}{2}}}$ (Fuchs, **3**).

Remarque. — On peut aussi définir la courbure à l'aide d'une métrique non euclidienne, pourvu que par le transport parallèle de $\{z+dz\}$ en $\{z\}$ le plan analytique tangent à $\mathfrak{G}^2$ en $\{z+dz\}$ soit transformé dans un plan analytique.

4. **Hypersurfaces.** — Une hypersurface $\mathfrak{h}^3$ sera souvent définie par une relation de la forme

$$\Phi(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = 0, \tag{7}$$

Φ étant une fonction réelle. Pour certaines questions envisagées dans la suite, il est utile d'obtenir une forme normale bien déterminée pour certaines classes d'hypersurfaces. Supposons que l'origine Q appartienne à $\mathfrak{h}^3$, $\Phi(0, 0, 0, 0) = 0$, et que Φ admette des dérivées partielles du second ordre continues. $\mathfrak{h}^3$ admet alors au point Q respectivement l'hyperplan tangent et un plan analytique tangent

$$\bar{a}_1 z_1 + a_1\bar{z}_1 + \bar{a}_2 z_2 + a_2\bar{z}_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \bar{a}_1 z_1 + \bar{a}_2 z_2 = 0, \tag{8}$$

où

$$\bar{a}_k = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z_k}\right)_{z_1=z_2=0}, \qquad a_k = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial \bar{z}_k}\right)_{z_1=z_2=0}$$

Par la transformation orthogonale

$$\begin{cases} z_1^* = e^{i\gamma_1}\cos\vartheta\, z_1 + e^{i\gamma_2}\sin\vartheta\, z_2 \\ z_2^* = -e^{i\delta_1}\sin\vartheta\, z_1 + e^{i\delta_2}\cos\vartheta\, z_2 \end{cases} \qquad (\gamma_1 - \delta_1 = \gamma_2 - \delta_2), \tag{9}$$

nous introduisons des variables nouvelles z_1^*, z_2^* que nous appellerons COORDONNÉES NORMALES RELATIVES AU POINT Q DE $\mathfrak{h}^3$ [Bergmann, **11**]. Si $\mathfrak{h}^3$ est la frontière d'un domaine $\mathcal{B}$, on prend l'axe des x_1^* de telle façon qu'à la normale intérieure corresponde la direction $x_1^* > 0$. L'équation de l'hyperplan tangent devient maintenant

$$z_1^* + \bar{z}_1^* = 0. \tag{10}$$

Si l'on introduit au lieu de z_1^* les variables x_1^* et y_1^* l'équation de l'hypersurface au voisinage de (o. o) devient

$$(11)\qquad 2x_1^* = ay_1^{*2} + 2iy_1^*(bz_2^* - \overline{bz_2^*}) + cz_2^{*2} + \overline{cz_2^{*2}} + \sigma\,|z_2^*|^2 + \psi_2,$$

où a et σ sont réels et

$$\lim_{y_1^* \to 0,\ z_2^* \to 0} \frac{\psi_2(y_1^*, z_2^*, \overline{z}_2^*)}{y_1^{*2} + |z_2^*|^2} = 0.$$

Par la transformation

$$(12)\qquad z_1^* = z_1' + 2bz_1'z_2' + cz_2'^2 + dz_1'z_2'^2, \qquad z_2^* = z_2'$$

l'équation devient

$$(13)\qquad 2x_1' = ay_1'^2 + \sigma\,|z_2'|^2 + \ldots.$$

Nous remarquons que pour chaque domaine $\mathcal{B}$ dans lequel l'ensemble des valeurs de z_2 omet deux valeurs α_1 et α_2

$$\begin{matrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{matrix} = (\mathrm{A} \pm \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{A}\,|b|^{-1}})e^{-i\,\mathrm{arc}\,b}.$$

A étant une constante réelle quelconque, on peut déterminer (12) de façon que cette représentation soit dans $\mathcal{B}$ biunivoque, car en posant $d = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$ on a dans $\mathcal{B}$

$$1 + 2bz_2' + dz_2'^2 = d(z_2' - \alpha_1)(z_2' - \alpha_2) \neq 0.$$

Par la transformation

$$(14)\qquad z_1'' = \frac{z_1'}{\left(1 + \frac{1}{2}az_1'\right)}, \qquad z_2'' = z_2',$$

$\mathfrak{b}^3$ prend la forme

$$(15)\qquad 2x_1'' = \sigma\,|z_2''|^2 + \Psi(y_1'', z_2', \overline{z}_2''), \qquad \lim_{y_1'' \to 0,\, z_2'' \to 0} \frac{\Psi(y_1'', z_2'', \overline{z}_2'')}{y_1''^2 + |z''|^2} = 0,$$

que nous appelons « représentation canonique » pour $\mathfrak{b}^3$ dans Q(o,o). (Bergmann, **11**).

Courbure d'une hypersurface. — Si nous avons une hypersurface $\mathfrak{b}^3$ nous pouvons caractériser sa courbure de la façon suivante. Dans chaque point $\{z\}^*$ de l'hypersurface prenons trois directions orthogonales (qui forment un trièdre de coordonnées normal par rapport à $\mathfrak{F}^3$) : deux directions T_1 et T_2 se trouvant dans le plan analytique tangent au point $\{z\}$, et la troisième direction N étant la section de l'hyperplan tangent avec le plan analytique qui contient la normale à $\mathfrak{F}^3$. Nous envisageons aux points $\{z\}$ et $\{z+dz\}$ les directions indiquées T_1, T_2, N et nous formons avec leur aide les six grandeurs

$$\left(\frac{d\chi}{ds}\right)_{T_1}, \quad \left(\frac{d\chi}{ds}\right)_{T_2}, \quad \left(\frac{d\chi}{ds}\right)_{N}, \quad \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{T_1}, \quad \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{T_2}, \quad \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{N},$$

où $d\chi$ désigne l'angle analytique, $d\varphi$ l'angle de déviation entre les directions correspondantes, ds la distance entre $\{z\}$ et $\{z+dz\}$ et $\left(\frac{d\chi}{ds}\right)_{T_1}$ la dérivée, prise dans la direction T_1.

Ces grandeurs caractérisent complètement le tenseur de courbure de l'hypersurface, les composantes du tenseur de courbure de l'hypersurface s'exprimant linéairement à l'aide des grandeurs indiquées [Mitrochin, 1].

Pour beaucoup de questions, il importe de savoir si pour une hypersurface $\mathfrak{F}^3$ il y a des surfaces analytiques passant par le point Q et qui sont situées entièrement d'un même côté de $\mathfrak{F}^3$. L'hypersurface $\Phi = 0$ est dite PSEUDO-CONVEXE du côté $\Phi > 0$ (respectivement $\Phi < 0$) au point Q, si toute surface analytique, qui passe par Q, possède dans chaque voisinage suffisamment petit de Q au moins un point situé dans $\Phi \geqq 0$ (respectivement $\Phi \leqq 0$). Si Φ est deux fois différentiable sur un morceau $\mathfrak{b}_1$ de la surface $\mathfrak{F}^3 = \mathbf{E}(\Phi = 0)$ contenant le point Q alors la question de savoir si $\mathfrak{F}^3$ est pseudo-convexe peut être résolue à l'aide du signe de « l'expression de Levi »

$$(16) \qquad L(\Phi) = -\begin{vmatrix} 0 & \Phi_{z_1} & \Phi_{z_2} \\ \Phi_{\bar z_1} & \Phi_{z_1\bar z_1} & \Phi_{z_2\bar z_1} \\ \Phi_{\bar z_2} & \Phi_{z_1\bar z_2} & \Phi_{z_2\bar z_2} \end{vmatrix}, \qquad \Phi_{z_k} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial z_k}, \qquad \Phi_{z_m\bar z_n} \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_m \partial\bar z_n}.$$

Pour la convexité de $\Phi = 0$ *du côté* $\Phi > 0$ (*respectivement* $\Phi < 0$) *dans un point* Q *sous les hypothèses données, il est nécessaire qu'on ait dans* $\mathfrak{b}_1^3$ $L(\Phi) \geqq 0$ *et il est suffisant qu'on ait dans* $\mathfrak{b}_1^3$ $L(\Phi) > 0$ [Levi, 2].

La démonstration de ce résultat s'obtient en mettant l'hypersurface $\Phi = 0$ sous la forme normale canonique. On constate que sign. $[L(\Phi)] = -$ sign. $[\sigma]$.

Le cas $\sigma = 0$ dans $\mathfrak{b}_1^3$ sera considéré plus loin.

Le cas où $\sigma > 0$ dans $\mathfrak{b}_1^3$ à l'exception d'un ensemble à deux dimensions de $\mathfrak{b}_1^3$ où $\sigma = 0$ n'a guère été examiné jusqu'à maintenant.

Un morceau $\mathfrak{b}_1^3$ d'hypersurface qui peut être représenté sous la forme

$$f(z_1, z_2, \lambda) = 0, \qquad a \leqq \lambda \leqq b, \tag{17}$$

où $f(z_1, z_2, \lambda)$ est une fonction continue de z_1, z_2, λ telle que pour chaque $\lambda = \lambda^{(0)} =$ const., l'intersection de $\mathfrak{b}_1^3$ et $\mathbf{E}[f(z_1, z_2, \lambda^{(0)}) = 0]$ soit un morceau d'une surface analytique, s'appelle morceau d'hypersurface analytique.

On peut démontrer que pour que $\mathfrak{b}_1^3 = \mathbf{E}\left[\Phi(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = 0\right]$, où Φ est deux fois continûment différentiable, soit un morceau d'une hypersurface analytique, il faut et il suffit qu'on ait en chaque point de $\mathfrak{b}_1^3$

$$L(\Phi) = \sigma = 0 \qquad \text{[Levi, 1].}$$

On considère souvent des morceaux d'hypersurfaces analytiques représentées sous la forme

$$(18)\quad \mathfrak{h}^3 \quad z_\varkappa = h^{(\varkappa)}(Z, \lambda), \quad Z \in \mathfrak{E}^2 = \mathbf{E}[|Z| < 1], \quad \lambda \in \mathfrak{s}^1 = \mathbf{E}[0 \leqq \lambda \leqq 2\pi],$$

où $h^{(\varkappa)}(Z, \lambda)$ sont des fonctions continues des variables Z, λ et, pour chaque λ fixe, des fonctions analytiques d'une variable complexe Z. $\mathfrak{h}^3$ est l'ensemble réunion $\mathfrak{h}^3 = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\lambda=0}^{2\pi} \mathfrak{J}^2(\lambda)$ de surfaces analytiques

$$\mathfrak{J}^2(\lambda) = \mathbf{E}\,[z_\varkappa = h^{(\varkappa)}(Z, \lambda), \quad Z \in \mathfrak{E}^2, \quad \lambda \text{ const.}]$$

dites LAMELLE DE $\mathfrak{h}^3$.

$$\mathfrak{G}^2 = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\lambda=0}^{2\pi} \mathfrak{i}^1(\lambda), \qquad \mathfrak{i}^1(\lambda) = \mathbf{E}\,[z_\varkappa = h^{(\varkappa)}(Z, \lambda), \; |Z| = 1, \; \lambda \text{ const.}]$$

s'appelle SURFACE LATÉRALE du morceau $\mathfrak{h}^3$ d'hypersurface analytique.

Le module d'une fonction analytique de deux variables complexes z_1, z_2 dans $\mathfrak{h}^3$, prend son maximum dans $\mathfrak{h}^3$ sur la surface latérale $\mathfrak{G}^2$ [Bergmann, 20].

Dans chaque lamelle $\mathfrak{J}^2(\lambda)$ la fonction

$$F(Z) = f[h^{(1)}(Z, \lambda), \quad h^{(2)}(Z, \lambda)], \qquad \lambda \text{ const.,}$$

est une fonction analytique d'une variable complexe Z et le maximum de $|F(Z)|$, lorsque le point varie sur la lamelle $\mathfrak{J}^2(\lambda)$ est pris sur la frontière $\mathfrak{i}^1(\lambda) \subset \mathfrak{G}^2$.

Remarquons encore qu'on a, dans le cas d'une hypersurface analytique, les relations suivantes pour les grandeurs introduites à la page 12

$$\left(\frac{d\chi}{ds}\right)_{T_1} = \left(\frac{d\chi}{ds}\right)_{T_2} = \left(\frac{d\chi}{ds}\right)_{T} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{N} = \frac{1}{3}H,$$

où H est la courbure moyenne de l'hypersurface.

Dans le cas d'une hypersurface $\Phi = 0$ quelconque, il vient

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{N} = \frac{1}{3}H + L(\Phi) \qquad \text{[Mitrochin, 1].}$$

5. **Quelques domaines particuliers à quatre dimensions.** — Un domaine $\mathcal{K}$, ayant la propriété que, son intersection avec chaque plan analytique passant par le point $O(O \in \mathcal{K})$ est un cercle de centre O, est appelé DOMAINE CERCLÉ [Behnke, 1, Carathéodory, 2]. Le point O (que nous prenons pour plus de simplicité comme origine des coordonnées) est appelé centre du domaine cerclé. Si l'on introduit les variables angulaires $s = z_1 z_2^{-1}$, alors chaque plan analytique, passant par O, est donné par $s = \text{const.}$ L'intersection de ce plan avec le domaine $\mathcal{K}$ est un cercle de rayon $r = \varphi(s)$ où $\varphi(s)$ est une fonction réelle positive de la variable complexe s. Le domaine cerclé $\mathcal{K}$ est défini analytiquement par

$$(19) \qquad |z_1|^2 + |z_2|^2 < r^2 = \varphi^2(s), \qquad z_1 z_2^{-1} = s.$$

La frontière de $\mathcal{K}$ est donnée par

$$|z_2| = \varphi(s)[1 + |s|^2]^{-\frac{1}{2}} = R(s), \qquad \frac{z_1}{z_2} = s.$$

On peut écrire aussi $|z_1| < R^*(t)$, où $t = z_2 z_1^{-1}$ et $R^*(t) = |t|^{-1} R(t^{-1})$.

Un domaine cerclé avec le centre $\{z_1^0, z_2^0\}$ admet le groupe de transformations

$$(20)\ \mathbf{T}(\vartheta) \qquad z_k^* - z_k^0 = (z_k - z_k^0)e^{i\vartheta}, \qquad (k = 1, 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi),$$

chaque cercle du centre $\{z_1^0, z_2^0\}$ restant invariant par la transformation $\mathbf{T}(\vartheta)$. Quelquefois on donne le nom de domaine cerclé à tout domaine qui admet la transformation $\mathbf{T}(\mathfrak{S})$, tandis que les domaines considérés par nous sont appelés domaines cerclés parfaits.

Un rôle important est joué par une classe particulière de domaines cerclés, à savoir par les DOMAINES CERCLÉS DE REINHARDT [1] que nous désignerons par la lettre $\mathcal{C}$ et qui admettent le groupe de transformations

$$(21)\mathbf{T}(\varphi_1, \varphi_2) \qquad z_k^* - z_k^0 = (z_k - z_k^0)e^{i\varphi_k} \qquad (0 \leqq \varphi_k \leqq 2\pi, \quad k = 1, 2).$$

L'équation de l'hypersurface frontière d'un $\mathcal{C}$ peut être écrite sous la forme $g(|z_1 - z_1^0|, |z_2 - z_2^0|) = 0$, où g est une fonction réelle. Mentionnons parmi les domaines cerclés de Reinhardt le bicylindre

$$\mathcal{E} = \mathbf{E}[|z_k| < r_k, \ k = 1, 2]$$

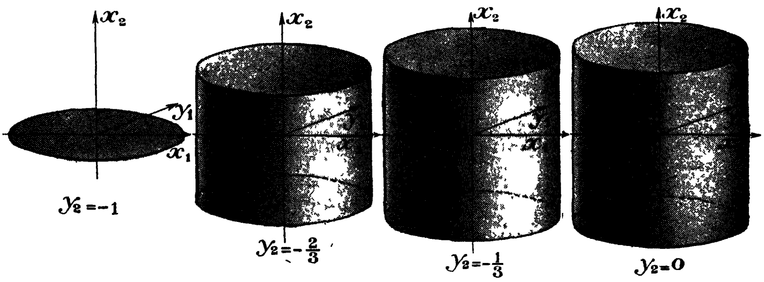
et l'hypersphère

$$\mathcal{H} = \mathbf{E}[|z_1|^2 + |z_2|^2 < r^2].$$

Si l'on veut se représenter plus intuitivement des domaines à quatre dimensions on peut considérer une des coordonnées, par exemple y_2, comme le temps et substituer ainsi à l'espace à quatre dimensions un espace mobile à trois dimensions. Les différentes figures sont alors des sections avec les espaces $y_2 = \text{const.}$ [Bergmann, 13].

La figure 2 nous donne par exemple une image concrète du bicylindre, tandis que la figure 3 représente l'hypersphère (¹).

Fig. 2.



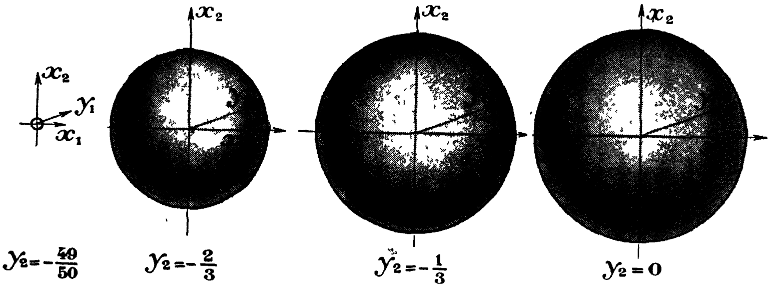
Les domaines $\mathcal{C}$ sont des cas particuliers des DOMAINES SEMI-CERCLÉS DE HARTOGS [1] $\mathfrak{S}$ qui admettent le groupe de transformations

$$(22) \qquad z_1^* = z_1, \qquad z_2^* - z_2^0 = (z_2 - z_2^0)e^{i\varphi} \qquad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi),$$

(¹) L'hypersphère et le bicylindre étant des domaines symétriques, on a naturellement des images analogues pour les valeurs positives de y_2.

avec le plan invariant $z_2 = z_2^0$. Les domaines semi-cerclés, en particulier les domaines cerclés de Reinhardt, apparaissent donc avec la

Fig. 3.



représentation indiquée comme une suite de corps de rotation avec l'axe de rotations $x_2 = 0$.

Les domaines cerclés et semi-cerclés rentrent dans la catégorie des DOMAINES (m_1, m_2) CERCLÉS DE H. CARTAN [3], c'est-à-dire des domaines bornés qui admettent le groupe de transformations

$$(23)\ \mathbf{H} \qquad z_k^* - z_k^0 = (z_k - z_k^0)\, e^{i m_k \varphi} \qquad (0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

où m_1 et m_2 sont deux nombres premiers entre eux, et $\{z_1^0, z_2^0\}$ est un point intérieur du domaine.

Dans le Chapitre II, du fascicule suivant, nous introduirons une nouvelle catégorie de domaines, les DOMAINES REPRÉSENTATIFS, en partant de la notion de « la fonction noyau ». Il apparaît que les domaines (m_1, m_2) cerclés de H. Cartan, $m_1 \cdot m_2 > 0$, sont des cas particuliers de ces domaines représentatifs.

Dans ce qui suit, nous allons envisager des domaines qui admettent d'autres groupes de transformations. Parmi ces domaines nous allons mentionner particulièrement les suivants : soit $\mathfrak{S}^2[\gamma, \vartheta_1(\gamma), \vartheta_2(\gamma)]$ un domaine angulaire du plan $z_2 = \gamma$ limité par deux demi-droites issues du point $z_1 = 0$ et formant avec l'axe positif de x_1 les angles $\vartheta_1(\gamma)$, respectivement $\vartheta_2(\gamma)$; soit $\mathfrak{P}^2$ un ensemble du plan des z_2. Nous désignerons par $\mathfrak{S}^+$ le domaine $\mathop{\mathbf{S}}_{\gamma \in \mathfrak{P}^2} \mathfrak{S}^2[\gamma, \vartheta_1(\gamma), \vartheta_2(\gamma)]$. Le domaine $\mathfrak{S}^+$ admet le groupe de transformations

$$(24) \qquad z_1^* = k z_1, \qquad z_2^* = z_2,$$

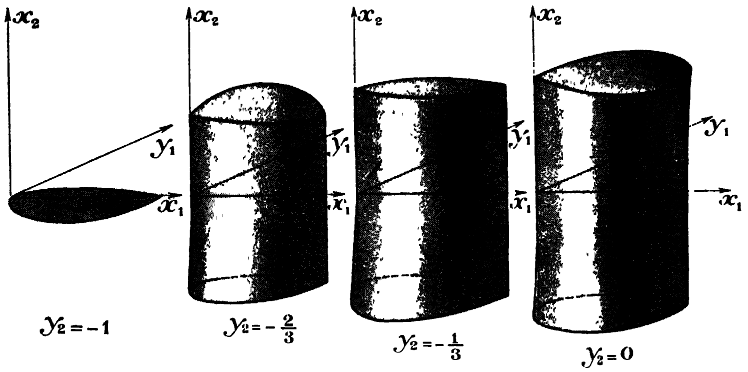
k étant réel. (Les points invariants de la transformation sont sur la frontière du domaine) [Bergmann, 11.]

Par la transformation

$$z'_1 = \frac{z_1}{1 + z_1 R^{-1}}, \qquad z'_2 = z_2, \tag{25}$$

où $R \neq 0$ et réel, $\mathfrak{S}^+$ est transformé sur un domaine que nous appellerons $\mathfrak{J}$. Le domaine $\mathfrak{J}$

Fig. 4.



est la réunion $\mathfrak{J} = \mathbf{S}_{\gamma \in \mathfrak{p}^2} \mathfrak{z}^2[\vartheta_1(\gamma), \vartheta_2(\gamma), R]$ de domaines plans $\mathfrak{z}^2[\vartheta_1(\gamma), \vartheta_2(\gamma), R]$ situés dans $z_2 = \gamma$ et limités par deux arcs de cercle se coupant aux points $z_1 = 0$ et $z_1 = R$ et formant au point $z_1 = 0$ les angles $\vartheta_1(\gamma)$, respectivement $\vartheta_2(\gamma)$ avec l'axe réel.

Domaines avec une surface frontière remarquable [Bergmann, **7**, **8**, **13**, **14**, **20**]. — Si l'on tente de généraliser quelques théorèmes importants de la théorie des fonctions d'une variable, on voit que la frontière d'un domaine de l'espace z_1, z_2 ne joue pas, du point de vue de la théorie des fonctions, le même rôle que la courbe frontière d'un domaine plan. Indiquons par exemple que dans le cas du bicylindre

$$\mathcal{E} = \mathbf{E}[|z_k| < r_k (k = 1, 2)],$$

dans la formule de Cauchy

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint \frac{f(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2}{(t_1 - z_1)(t_2 - z_2)},$$

nous intégrons le long de la surface

$$\mathfrak{C}^2 = \mathbf{E}[|z_k| = r_k] \qquad (k = 1, 2),$$

et non le long de toute l'hypersurface frontière

$$\mathbf{E}[|z_1| = z_1, \quad |z_2| \leqq z_2 \quad \text{et} \quad |z_1| \leqq r_1, \quad |z_2| = r_2].$$

De plus, chaque fonction $f(z_1, z_2)$ régulière dans $\overline{\mathcal{E}}$ atteint le maximum de sa valeur absolue en un point de $\mathfrak{C}^2$. Une surface frontière $\mathfrak{s}^2$ d'un domaine $\mathfrak{M}$ possédant : 1° cette dernière propriété et 2° telle qu'il existe une formule intégrale, représentant chaque f régulière dans $\overline{\mathfrak{M}}$ à l'aide des valeurs de f sur $\mathfrak{s}^2$ est appelée SURFACE FRONTIÈRE REMARQUABLE de $\mathfrak{M}$ (1).

Un cas important de ces domaines est fourni par des domaines $\mathfrak{M}$ dont la frontière est constituée par un nombre fini de morceaux d'hypersurfaces analytiques $\mathfrak{h}^3_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. L'ensemble de leurs surfaces latérales $\mathfrak{G}^2_k$ forme la surface frontière remarquable $\mathfrak{s}^2$ d'un tel domaine $\mathfrak{M}$. En effet chaque fonction f régulière dans $\overline{\mathfrak{M}}$ atteint le maximum de sa valeur absolue sur la frontière, c'est-à-dire dans un des $\mathfrak{h}^3_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ par exemple, dans $\mathfrak{h}^3_\nu$. Mais d'après nos résultats précédents, $|f|$ doit atteindre son maximum sur $\mathfrak{G}^2_\nu \subset \mathfrak{s}^2$. Ainsi 1° est démontré. La démonstration de 2° est indiquée dans les travaux *Math. Zeitschr.*, **39**, 1934, p. 75-94, 605-608 et *Recueil Mathématique*, **1**, (**43**), 1936, p. 851-862.

Quelques types de ces domaines (dans la représentation mentionnée) sont considérés dans le travail de Bergmann, (**13**; § **4**).

II. — Les fonctions orthogonales et leurs propriétés (2).

1. Notations. — Soit $\mathcal{B}$ un domaine univalent, f et g deux fonctions de variables complexes z_1, z_2 régulières dans $\mathcal{B}$. Soit

(1) $\mathfrak{s}^2$ possède encore d'autres propriétés importantes, analogues à celles d'une courbe frontière; nous renvoyons le lecteur aux travaux indiqués.

Remarquons qu'on distingue deux catégories de surfaces frontières remarquables spéciales, à savoir des surfaces maxima et des surfaces de détermination (Comp. les travaux cités).

(2) Toutes les considérations de ce chapitre pourraient être présentées d'une manière plus simple et plus intuitive si l'on voulait utiliser la notion de l'espace de Hilbert et se servir de ses propriétés.

$d\omega = dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2$ l'élément de volume (euclidien). Par

$$\int_{\mathcal{B}} f\bar{g}\,d\omega \equiv \int_{\mathcal{B}} \mathrm{Re}(f\bar{g})\,d\omega + i\int_{\mathcal{B}} \mathrm{Im}(f\bar{g})\,d\omega \equiv \mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f, g),$$

nous entendrons toujours une intégrale quadruple prise au sens de Lebesgue. (Re = partie réelle, Im = partie imaginaire.)

$\mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f, f)$ possède toujours une valeur finie ou infinie. Dans le premier cas, c'est-à-dire si $\mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f, f) < \infty$, nous dirons que f est de carré sommable.

Nous supposons dans ce qui suit que $\mathcal{B}$ est tel qu'il existe une suite infinie de fonctions régulières dans $\mathcal{B}$, de carrés sommables et linéairement indépendantes. Remarquons que ceci est vrai pour tout domaine borné et pour certains domaines non bornés.

Remarque. — On pourrait, au lieu d'une intégrale au sens de Lebesgue, considérer l'intégrale généralisée, c'est-à-dire

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathcal{B}_m} \cdots d\omega,$$

où $\mathcal{B}_m$, $m = 1, 2, \ldots$ est une suite de domaines emboîtés les uns dans les autres et tels que $\mathcal{B} = \lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{B}_m$. Il est facile de démontrer que si pour une suite $\mathcal{B}_m$

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathcal{B}_m} |f|^2\,d\omega = \mathrm{A},$$

il en est de même pour une suite quelconque de domaines $\mathcal{B}_m$ jouissant des mêmes propriétés. La même remarque est vraie pour $\mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f_1, f_2)$ si $\mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f_k, f_k) < \infty$, $k = 1. 2$.

Nous utiliserons dans la suite des indices doubles (mn). Nous supposerons toujours qu'ils sont rangés comme suit : (mn) sera dit avant (pq) si l'on a $m + n < p + q$ ou si $m + n = p + q$, $n < p$. Par $(m_\nu n_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, nous entendrons toujours l'indice (mn) qui se trouve à la ν-ième place dans l'ordre considéré.

2. Système de fonctions orthogonales. — Une suite de fonctions régulières dans $\mathcal{B}$: $\varphi^{(\nu)}(z)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $(z) = (z_1, z_2)$, est appelée système de fonctions orthogonales et normées si l'on a

$$(1)\qquad \mathrm{J}_{\mathcal{B}}[\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\mu)}] = \delta_{\nu\mu}, \qquad \delta_{\mu\nu} = 0, \qquad \nu \neq \mu, \qquad \delta_{\nu\nu} = 1.$$

Pour les domaines cerclés de Reinhardt

$$\mathcal{C} = \mathbf{E}[\,|z_2|^2 < g(|z_1|),\ |z_1| < \mathrm{R}],$$

un système de fonctions orthogonales et normées est formé, par exemple, par les polynomes

$$(2)\qquad \varphi^{(\nu)}(z) = \frac{z_1^{m_\nu} z_2^{n_\nu}}{a_{m_\nu n_\nu}}, \qquad a^2_{m_\nu n_\nu} = \frac{\pi^2}{n_\nu + 1}\int_0^{\mathrm{R}^2} [g(r_1)]^{n_\nu+1} r_1^{2m_\nu} d(r_1^2),$$

car on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{\mathcal{C}} z_1^{m_\nu} z_2^{n_\nu} \bar{z}_1^{m_\mu} \bar{z}_2^{n_\mu}\, d\omega \\ &= \int_0^{\mathrm{R}} \int_{r_2=0}^{g(r_1)} r_1^{m_\nu+m_\mu+1} r_2^{n_\nu+n_\mu+1}\, dr_1\, dr_2 \int_0^{2\pi} e^{i\varphi_1(m_\nu-m_\mu)}\, d\varphi_1 \int_0^{2\pi} e^{i\varphi_2(n_\nu-n_\mu)}\, d\varphi_2 \\ &= 0, \qquad \text{si } \nu \neq \mu, \\ &= \frac{\pi^2}{n_\nu+1}\int_0^{\mathrm{R}^2} (r_1^2)^{m_\nu} [g(r_1)]^{n_\nu+1} d(r_1^2), \quad \text{si } \nu = \mu. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas du bicylindre $\mathcal{E} = \mathbf{E}[\,|z_k| < r_k]$, on obtient

$$a_{mn} = \frac{\pi r_1^{m+1} r_2^{n+1}}{\sqrt{(m+1)(n+1)}},$$

dans le cas de l'hypersphère $\mathcal{H} = \mathbf{E}[\,|z_1|^2 + |z_2|^2 < r^2]$

$$a_{mn} = \pi r^{m+n+2}\sqrt{\frac{n!\,m!}{(m+n+2)!}}$$

et enfin dans le cas du domaine $\mathcal{C}_p = \mathrm{E}\left[a\,|z_1|^{\frac{2}{p}} + |z_2| < 1\right]$, p entier, $0 < a \leqq 1$, on a

$$a_{mn} = \pi\sqrt{\frac{p[(m+1)p-1]!\,n!}{a^{p(m+1)}[(m+1)p+n+1]!}} \qquad \text{[Bergmann, 17].}$$

Dans le cas d'un domaine cerclé $\mathcal{K}$, si l'on orthogonalise pour chaque m les monomes $z_1^m z_2^{m-n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, m$, on obtient un système de polynomes $\{\mathrm{P}_{mn}(z_1, z_2)\}$ homogènes, orthogonaux dans $\mathcal{K}$. Ceci résulte de l'orthogonalité dans chaque $\mathcal{K}$ des expressions $\psi^{(\nu)} = z_1^{m_\nu} z_2^{n_\nu}$ et $\psi^{(\mu)} = z_1^{m_\mu} z_2^{n_\mu}$ si $m_\nu + n_\nu \neq m_\mu + n_\mu$. Pour le démontrer, $\psi^{(\nu)}\overline{\psi}^{(\mu)}$ étant borné dans $\mathcal{K}$, on peut enlever de $\mathcal{K}$ les points du plan $z_2 = 0$ et un bicylindre $|z_k| < \varepsilon$, $k = 1, 2$, ε étant assez petit. Soit $\mathcal{K}'$ le domaine nouveau et introduisons dans $\mathcal{K}'$, au lieu des variables z_1, z_2

les variables $s=\frac{z_1}{z_2}$, z_2. On aura $\mathcal{K}'=\mathbf{E}[\varepsilon<|z_2|<R(s), |s|<\infty]$, et

$$\iint_{|s|<\infty} s^{n_\nu}\bar{s}^{n_\mu}\,ds\,d\bar{s}\iint_{\varepsilon<|z_2|<R(s)} z_2^{m_\nu+n_\nu+1}\,\bar{z}_2^{m_\mu+n_\mu+1}\,dz_2\,d\bar{z}_2=0,$$

car $z_2^{m_\nu+n_\nu+1}$ et $\bar{z}_2^{m_\mu+n_\mu+1}$, $m_\nu+n_\nu\neq m_\mu+n_\mu$, sont orthogonaux dans l'anneau $\varepsilon<|z_2|<R(s)$. Notre proposition en résulte puisqu'on peut faire ε aussi petit qu'on veut.

Dans le cas d'un domaine semi-cerclé $\mathcal{S}=\mathbf{E}[|z_2|<R(z_1), |z_1|<1]$ on peut prendre comme fonctions orthogonales des fonctions de la forme $z_2^\nu f_{\nu n}(z_1)$, où l'on a

$$\frac{\pi}{\nu+1}\iint_{|z_1|<1}[R(z_1)]^{2\nu+2}f_{\nu n}(z_1)\overline{f_{\nu m}(z_1)}\,dz_1\,d\bar{z}_1=0.$$

Pour le voir il suffit de tenir compte de l'égalité

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{S}} z_2^\nu f_{\nu n}(z_1)\bar{z}_2^\mu\overline{f_{\mu m}(z_1)}\,d\omega\\&=\iint_{|z_1|<1}\iint_{|z_2|<R(z_1)} z_2^\nu\bar{z}_2^\mu\,dz_2\,d\bar{z}_2 f_{\nu n}(z_1)\overline{f_{\mu m}(z_1)}\,dz_1\,d\bar{z}_1.\end{aligned}$$

3. Le noyau et ses propriétés. — L'expression $\sum_{\nu=1}^{\infty}{}'\varphi^{(\nu)}(z)\overline{\varphi^{(\nu)}(t)}$ est appelée noyau du système $\{\varphi^{(\nu)}(z)\}$. Le noyau du système de fonctions orthogonales que nous avons indiquées pour le bicylindre est donc

$$(4)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+1)(n+1)z_1^m z_2^n\bar{t}_1^m\bar{t}_2^n}{\pi^2 r_1^{2m+2}r_2^{2n+2}}=\frac{r_1^2 r_2^2}{\pi^2(r_1^2-z_1\bar{t}_1)^2(r_2^2-z_2\bar{t}_2)^2}.$$

De même dans le cas d'un domaine circulaire

$$\mathcal{C}_p=\mathbf{E}\left[a|z_1|^{\frac{2}{p}}+|z_2|^2<1\right]\qquad(p>0 \text{ entier},\quad 0<a\leqq 1);$$

le noyau du système envisagé est

$$(5)\qquad \frac{a^p(1-z_2\bar{t}_2)^{p-2}[(p+1)(1-z_2\bar{t}_2)^p+(p-1)a^p z_1\bar{t}_1]}{\pi^2[(1-z_2\bar{t}_2)^p-a^p z_1\bar{t}_1]^3}.$$

Dans le cas particulier, à savoir quand $\mathcal{C}_1=\mathcal{H}=\mathbf{E}[|z_1|^2+|z_2|^2<r^2]$

nous obtenons

$$(5\,a)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(n+m+2)!\,(z_1\bar{t}_1)^m\,(z_2\bar{t}_2)^n}{\pi^2 r^4\, m!\; n!\; r^{4(m+n)}}=\frac{2r^2}{\pi^2\left[r^2-z_1\bar{t}_1-z_2\bar{t}_2\right]^3}$$

[Bergmann, 11, 17].

Nous voyons que les noyaux considérés sont des fonctions régulières de quatre variables complexes z_1, z_2, $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ en chaque point intérieur du domaine. Mais ceci est vrai aussi dans le cas général. On a, en effet, le

Théorème I. — *Le noyau* $\sum_{\nu=2}^{\infty}\varphi^{(\nu)}(z)\overline{\varphi^{(\nu)}(t)}$ *d'un système orthogonal et normé dans* $\mathcal{B}$ *des fonctions* $\varphi^{(\nu)}(z)$, $\nu=1,\,2,\,\ldots,$ *régulières dans* $\mathcal{B}$ *est pour* $\{z\}\in\mathcal{B}$, $\{t\{\in\mathcal{B}$ *une fonction régulière des quatre variables* z_1, z_2, $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ [Bergmann, 4].

Pour le démontrer nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme. — *Si la fonction* $f(z)$ *est régulière dans un bicylindre fermé*

$$\bar{\mathcal{E}}=\mathbf{E}\left[\,|z_k|\leqq r_k,\qquad k=1,\,2\right],$$

on a,

$$J_{\mathcal{E}}(f,f)=|f(0,0)|^2 J_{\mathcal{E}}(1,1)+|f'_{z_1}(0,0)|^2 J_{\mathcal{E}}(z_1,z_1)+|f'_{z_2}(0,0)|^2 J_{\mathcal{E}}(z_2,z_2)+\ldots$$

La formule intégrale de Cauchy conduit à un développement de $f(z)$ en série $\Sigma c_{mn}z_1^m z_2^n=f(0,0)+f'_{z_1}(0,0)z_1+f'_{z_2}(0,0)z_2+\ldots$ uniformément convergente dans $\bar{\mathcal{E}}$. Comme d'après (3) $J_{\mathcal{E}}[z_1^{m_\nu}z_2^{n_\nu},z_1^{m_\mu}z_2^{n_\mu}]=0$ si $\nu\neq\mu$, on obtient la relation indiquée.

Démonstration du théorème I. — Soit $\{z\{\in\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}(z_1,z_2)\subset\mathcal{B}$, où $\mathcal{E}(z_1,z_2)=\mathbf{E}\left[\,|\zeta_k-z_k|<r_k,\ k=1,\,2\right]$. Alors, comme les $\varphi^{(\nu)}$ sont orthogonales et normées dans $\mathcal{E}$

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\varphi^{(\nu)}(z)|^2=\int_{\mathcal{B}}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\varphi^{(\nu)}(t)\overline{\varphi^{(\nu)}(z)}\right|^2 d\omega_t\geqq\int_{\mathcal{E}(z_1,z_2)}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\varphi^{(\nu)}(t)\overline{\varphi^{(\nu)}(z)}\right|^2 d\omega_t$$

$$\geqq J_{\mathcal{E}(z_1,z_2)}(1,1)\left|\sum_{\nu=1}^{n}\varphi^{(\nu)}(z)\overline{\varphi^{(\nu)}(z)}\right|^2\qquad d\omega_t=dt_1d\bar{t}_1\,dt_2d\bar{t}_2$$

en vertu du lemme. Comme : $J_{\mathcal{S}(z_1, z_2)}(1, 1) = \pi^2 r_1^2 r_2^2$, il en résulte

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varphi^{(\nu)}(z)|^2 \leqq \frac{1}{\pi^2 r_1^2 r_2^2}.$$

Ceci étant valable pour toute valeur de n nous obtenons

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi^{(\nu)}(z)|^2 \leqq \frac{1}{\pi^2 r_1^2 r_2^2}, \tag{6}$$

de telle sorte que la série est convergente et uniformément bornée dans chaque domaine partiel, $\mathfrak{F}$ se trouvant entièrement à l'intérieur de $\mathcal{B}$. $\sum_{\nu=1}^{n} \varphi^{(\nu)}(z)\overline{\varphi^{(\nu)}(t)}$, $n = 1, 2, \ldots$ sont des fonctions régulières des quatre variables complexes z_1, z_2, $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ dans $(\mathcal{B} \times \mathcal{B})$.

Les expressions

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \varphi^{(\nu)}(z)\overline{\varphi^{(\nu)}(t)} \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |\varphi^{(\nu)}(z)|\,|\varphi^{(\nu)}(t)|$$

étant uniformément bornées d'après (6) et l'inégalité de Schwarz, dans chaque domaine $\mathfrak{F}^8 \subset (\mathcal{B} \times \mathcal{B})$ la fonction limite $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi^{(\nu)}(z)\overline{\varphi^{(\nu)}(t)}$ représente dans $(\mathcal{B} \times \mathcal{B})$ aussi une fonction régulière.

4. Théorèmes de Fischer-Riesz. — Le développement d'une fonction suivant les fonctions orthogonales. — Étant donné un système orthogonal et normé $\varphi^{(\nu)}(z)$ dans $\mathcal{B}$ et une fonction analytique $f(z)$ de carré sommable, on appelle les grandeurs $a_\nu = J_{\mathcal{B}}(f, \varphi^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2, \ldots$ les coefficients de Fourier de f par rapport au systeme $\{\varphi^{(\nu)}\}$. On a toujours

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^2 \leqq J_{\mathcal{B}}(f, f) \qquad \text{(inégalité de Bessel).} \tag{7}$$

Lorsqu'on veut approcher la fonction $f(z)$ dans $\mathcal{B}$ par une combinaison linéaire de $\varphi^{(\nu)}$ de la forme $\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \varphi^{(\nu)}(z)$ les b_ν étant constants et n fixe, et si l'on veut rendre minimum l'écart quadradratique moyen

$$(8) \qquad \mathrm{M}_n = \int_{\mathcal{B}} \left| f - \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \varphi^{(\nu)}(z) \right|^2 d\omega$$
$$= \mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f, f) + \sum_{\nu=1}^{n} | b_\nu - a_\nu |^2 - \sum_{\nu=1}^{n} | a_\nu |^2, \qquad a_\nu = \mathrm{J}_{\mathcal{B}}[f, \varphi^{(\nu)}],$$

il faut prendre $b_\nu = a_\nu$.

Si le système des fonctions $\{ \varphi^{(\nu)}(z) \}$ jouit de la propriété, que pour chaque fonction $f(z)$ d'une certaine classe F, l'écart quadratique moyen M_n peut être rendu arbitrairement petit en prenant n suffisamment grand, on dit que le système $\{ \varphi^{(\nu)}(z) \}$ est fermé ([1]) par rapport à $\mathcal{B}$ et à la classe des fonctions F.

Dans le cas des fonctions orthogonales réelles on sait, d'après le théorème de Fischer-Riesz que, si $\{ \psi^{(\nu)} \}$ est un système fermé pour les fonctions de carrés sommables, alors :

A. Chaque fonction de carré sommable peut être « représentée » par une expression $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \psi^{(\nu)}$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \psi^{(\nu)}$ convergeant en moyenne quadratique vers la fonction.

B. Pour chaque suite a_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ il existe une fonction de carré sommable telle que ses coefficients de Fourier sont égaux à a_ν.

Passons au cas des fonctions de deux variables complexes : si le système $\{ \varphi^{(\nu)}(z) \}$ est fermé par rapport à la classe F des fonctions analytiques dans $\mathcal{B}$ et de carré sommable, les propriétés A et B subsistent et même peuvent être renforcées de la manière suivante :

A. Théorème II*a*. — *Si le système* $\{ \varphi^{(\nu)}(z) \}$ *des fonctions régulières dans* $\mathcal{B}$ *est fermé par rapport à* $\mathcal{B}$ *et* F, *chaque* $f \in F$ *peut être représentée dans* $\mathcal{B}$ *sous la forme*

$$(9) \qquad f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi^{(\nu)}(z) \mathrm{J}_{\mathcal{B}}[f, \varphi^{(\nu)}],$$

([1]) Cette terminologie se trouve dans Karczmarz-Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen* (*Monografje Matematyczne*, Warszawa, Vol. 6, 1935).

la série (9) *étant : 1° convergente en moyenne dans $\mathcal{B}$ vers f, c'est-à-dire*

$$(10)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{B}}\left|f(z)-\sum_{\nu=1}^{n}\varphi^{(\nu)}(z)\mathrm{J}_{\mathcal{B}}[f,\varphi^{(\nu)}]\right|^2 d\omega = \lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f,f)-\sum_{\nu=1}^{n}|\mathrm{J}_{\mathcal{B}}[f,\varphi^{(\nu)}]|^2\right]=0.$$

2° *Convergente uniformément et absolument dans chaque domaine partiel $\mathfrak{T}$ de $\mathcal{B}$ se trouvant entièrement à l'intérieur de $\mathcal{B}$.* [Bergmann, 4.]

Démonstration. — 1° Le choix $a_\nu = \mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f, \varphi^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2, \ldots$ dans (8) rend l'écart M_n minimum; il en résulte par définition d'un système fermé la relation (10).

Remarquons qu'il suit de (10)

$$(11)\qquad \mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f,f)=\sum_{\nu=1}^{\infty}|\mathrm{J}_{\mathcal{B}}[f,\varphi^{(\nu)}]|^2 \qquad \text{(égalité de Parseval).}$$

2° La convergence absolue de (9) résulte de l'inégalité de Schwarz, de (11) et du théorème I, car

$$(12)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}|\mathrm{J}_{\mathcal{B}}[f,\varphi^{(\nu)}]\varphi^{(\nu)}(z)|\leqq\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\mathrm{J}_{\mathcal{B}}[f,\varphi^{(\nu)}]|^2\sum_{\nu=1}^{\infty}|\varphi^{(\nu)}(z)|^2} \leqq\sqrt{\mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f,f)\sum_{\nu=1}^{\infty}|\varphi^{(\nu)}(z)|^2}.$$

La convergence uniforme résulte de l'égalité de Parseval et du théorème I, car

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}|\mathrm{J}_{\mathcal{B}}[f,\varphi^{(\nu)}]\varphi^{(\nu)}(z)|\leqq\sqrt{\left[\mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f,f)-\sum_{\nu=1}^{n}|\mathrm{J}_{\mathcal{B}}[f,\varphi^{(\nu)}]|^2\right]\sum_{\nu=1}^{\infty}|\varphi^{(\nu)}(z)|^2}.$$

Il suit du lemme (*voir* p. 22)

$$\left\|\left[f(t)-\sum_{\nu=1}^{n}\mathrm{J}_{\mathcal{B}}[f,\varphi^{(\nu)}]\varphi^{(\nu)}(t)\right]\right\| \leqq\frac{2}{\pi[\mathrm{R}(t_1,t_2)]^2}\sqrt{\mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f,f)-\sum_{\nu=1}^{n}|\mathrm{J}_{\mathcal{B}}[f,\varphi^{(\nu)}]|^2},$$

où $R(t_1, t_2)$ signifie la distance du point $\{t\}$ de la frontière de $\mathcal{B}$, car $\mathbf{E}\left[|z_k - t_k| < \frac{R}{\sqrt{2}}, k = 1,2\right] \subset \mathcal{B}$. $\{\varphi^{(\nu)}(z)\}$ étant un système fermé, on a, en vertu de (10),

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(t) - \sum_{\nu=1}^{n} J_{\mathcal{B}}[f, \varphi^{(\nu)}]\,\varphi^{(\nu)}(t)\right] = 0,$$

d'où résulte (9).

B. Théorème II b. — *Si* $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^2 < \infty$, *alors il existe une fonction* $g(z)$ *régulière dans* $\mathcal{B}$ *telle que :*

$$1^\circ \qquad \lim_{n\to\infty} J_{\mathcal{B}}\left[g - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi^{(\nu)},\ g - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi^{(\nu)}\right] = 0,$$

$$2^\circ \qquad a_\nu = J_{\mathcal{B}}(g, \varphi^{(\nu)})$$

[Bergmann, 14; Hammerstein, 1].

Démonstration. — Nous poserons $g(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi^{(\nu)}(z)$. L'existence et la régularité de g dans chaque $\overline{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{B}$ résulte de

$$(13)\qquad \left[\sum_{\nu=n}^{\infty} |a_\nu \varphi^{(\nu)}(z)|\right]^2 \leqq \sum_{\nu=n}^{\infty} |a_\nu|^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi^{(\nu)}(z)|^2 \leqq \frac{2}{\pi^2 [R(z_1, z_2)]^4} \sum_{\nu=n}^{\infty} |a_\nu|^2.$$

Pour démontrer le 1° il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} J_{\mathcal{B}}\left[\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \varphi^{(\nu)}, \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \varphi^{(\nu)}\right] = 0.$$

La suite $g_{np}(z) = \sum_{\nu=n}^{n+p} a_\nu \varphi^{(\nu)}(z)$, $p = 1, 2, \ldots$ de fonctions holomorphes converge uniformément dans tout $\mathfrak{F}$, $\overline{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{B}$ vers $g_n(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \varphi^{(\nu)}(z)$. On a donc

$$J_{\mathfrak{F}}(g_n, g_n) = \lim_{p\to\infty} J_{\mathfrak{F}}(g_{np}, g_{np}) \leqq \lim_{p\to\infty} J_{\mathcal{B}}(g_{np}, g_{np}) = \sum_{\nu=n}^{\infty} |a_\nu|^2.$$

Il en résulte que $J_{\mathcal{B}}(g_n, g_n) \leqq \sum_{\nu=n}^{\infty} |a_\nu|^2$ et $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^2$ étant convergent, il s'ensuit le 1°. Le 2° résulte du 1° car, pour μ fixe et $n \to \infty$, on a

$$\begin{aligned}
|J_{\mathcal{B}}[g, \varphi^{(\mu)}] - a_\mu|^2 &= \left| J_{\mathcal{B}}\left[g - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\mu)} \right] \right|^2 \\
&\leqq J_{\mathcal{B}}\left[g - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi^{(\nu)}, g - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi^{(\nu)} \right] J_{\mathcal{B}}[\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu)}] \\
&= J_{\mathcal{B}}\left[g - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi^{(\nu)}, g - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi^{(\nu)} \right] \to 0.
\end{aligned}$$

Remarque. — On démontre de manière analogue que, si $\Sigma |a_\nu|^2 < \infty$ et $\Sigma |b_\nu|^2 < \infty$, on peut intégrer $\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi^{(\nu)}, \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \varphi^{(\nu)} \right)$ terme à terme.

5. **L'existence des systèmes fermés.** — Théorème III. — *Il existe pour chaque $\mathcal{B}$ et pour la classe $E(\mathcal{B})$ des fonctions analytiques $f(z)$ de carré sommable dans $\mathcal{B}$ un système fermé $\{\psi^{(\nu)}(z)\}$* [Bergmann, 3; Welke, 2].

Remarque. — Ce théorème est un cas particulier d'un théorème général concernant l'espace de Hilbert. Nous en donnons ici une démonstration, dont l'intérêt réside surtout dans le système fermé construit. Pour plus de simplicité nous nous limiterons aux domaines $\mathcal{B}$ bornés.

Démonstration I. — Soit $\{t\} = \{t_1, t_2\}$ un point fixe intérieur à $\mathcal{B}$. Nous désignons par $E^{(\nu)}(\mathcal{B})$ l'ensemble des fonctions f de $E(\mathcal{B})$ pour lesquelles on a, les (mn) étant ordonnés comme il a été indiqué au paragraphe 1,

$$(14) \qquad f_{m_k n_k} = 0 \quad \text{pour } k < \nu, \qquad f_{m_\nu n_\nu} = 1,$$

où f_{mn} désigne $\dfrac{d^{m+n} f(t_1, t_2)}{dt_1^m \, dt_2^n}$. La classe $E^{(\nu)}(\mathcal{B})$ n'est pas vide, car elle contient $\dfrac{(z_1 - t_1)^{m_\nu} (z_2 - t_2)^{n_\nu}}{m_\nu ! \, n_\nu !}$. Nous nous posons maintenant le problème variationnel : déterminer la fonction $f \in E^{(\nu)}(\mathcal{B})$, qui rend l'intégrale $J_{\mathcal{B}}(f, f)$ minimum. Soit $h_p(z)$, $h_p \in E^{(\nu)}(\mathcal{B})$, $p = 1, 2, \ldots$

une suite de fonctions pour laquelle $\lim\limits_{p \to \infty} J_{\mathcal{B}}(h_p, h_p) = A$ où

$$A = \underset{h \in E^{(\nu)}(\mathcal{B})}{\text{borne inf.}} J_{\mathcal{B}}(h, h). \tag{15}$$

Du lemme (*cf.* p. 22) il suit que dans chaque domaine $\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathcal{B}$, la suite est uniformément bornée dans son ensemble, elle forme donc une famille normale dans $\mathcal{B}$. On peut trouver une suite partielle h_{p_k} telle que $h_{p_k}(z)$ converge uniformément dans tout $\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathcal{B}$ vers une fonction $g(z)$ qui satisfait visiblement aux conditions (14). On a donc,

$$J_{\mathfrak{G}}(g, g) = \lim_{k \to \infty} J_{\mathfrak{G}}(h_{p_k}, h_{p_k}) \leqq \lim_{k \to \infty} J_{\mathcal{B}}(h_{p_k}, h_{p_k}) = A, \tag{16}$$

par conséquent $J_{\mathcal{B}}(g, g) \leqq A$. D'autre part, par définition, on a $J_{\mathcal{B}}(g, g) \geqq A$, d'où l'on déduit en vertu de (16) que $J_{\mathcal{B}}(g, g) = A$.

II. Pour chaque fonction $l(z)$, $l \in E(\mathcal{B})$, qui satisfait aux conditions

$$l_{m_k n_k} = 0 \qquad (k \leqq \nu) \tag{17}$$

où

$$l_{mn} = \frac{d^{m+n} l(t_1, t_2)}{dt_1^m \, dt_2^n},$$

on a

$$J_{\mathcal{B}}(g, l) = 0. \tag{18}$$

En effet $g + c\,l \in E^{(\nu)}(\mathcal{B})$ pour chaque constante c. Si l'on pose

$$c_1 = -\frac{J_{\mathcal{B}}(g, l)}{J_{\mathcal{B}}(l, l)},$$

un calcul immédiat montre que

$$J_{\mathcal{B}}(g + c_1 l, g + c_1 l) = A - \frac{|J_{\mathcal{B}}(g, l)|^2}{J_{\mathcal{B}}(l, l)}.$$

Ceci n'est possible, d'après la définition de A, que si l'équation (18) est vérifiée [Bergmann, 11].

III. Il n'existe qu'une seule solution de notre problème. En effet, s'il y avait deux solutions g_1 et g_2, $(g_1 - g_2)$ satisferait aux conditions (17) et l'on aurait d'après (18)

$$J_{\mathfrak{G}}(g_1, g_1 - g_2) = J_{\mathfrak{G}}(g_2, g_1 - g_2) = 0,$$

d'où il résulterait $J_{\mathcal{B}}(g_1 - g_2, g_1 - g_2) = 0$ et par suite, d'après le lemme, $g_1 = g_2$.

IV. Faisons parcourir ν dans (14) les valeurs successives 1, 2, 3, ... et désignons les solutions des problèmes d'extremum correspondants par $g^{(\nu)}(z)$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Comme d'après (14) $g^{(k)}(z)$ satisfait aux conditions auxiliaires (17) qui sont posées pour le problème correspondant à ν, $\nu < k$, on a, d'après II $J_{\mathcal{B}}(g^{(\nu)}, g^{(k)}) = 0$, pour $\nu < k$, c'est-à-dire les fonctions $g^{(\nu)}(z)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ sont orthogonales. Nous les normons, c'est-à-dire nous posons

$$\psi^{(k)}(z) = \frac{g^{(k)}(z)}{[J_{\mathcal{B}}(g^{(k)}, g^{(k)})]^{\frac{1}{2}}},$$

et nous obtenons un système orthogonal et normé $\{\psi^{(\nu)}(z)\}$; nous allons montrer qu'il est fermé par rapport à $E(\mathcal{B})$.

Soit $f\, E \in (\mathcal{B})$ et $f^{(s)}(z) = \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu \psi^{(\nu)}(z)$. Nous allons déterminer les a_ν de telle façon qu'on ait

$$f^{(s)}_{m_\nu n_\nu}(t) = f_{m_\nu n_\nu}(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s). \tag{19}$$

Ceci est possible, car en remplaçant dans les équations (19) $f^{(s)}_{mn}(t)$ par $\sum_{\nu=1}^{s} a_\nu \psi^{(\nu)}_{mn}(t)$, on obtient s équations pour déterminer les a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, s$), le déterminant des coefficients des a_ν étant différent de zéro d'après la propriété (14). D'autre part, si l'on a $a_\nu = J_{\mathcal{B}}(f, \psi^{(\nu)})$ les conditions (19) sont satisfaites, car $(f^{(s)} - f)$ satisfait aux conditions auxiliaires (17) et d'après II

$$J_{\mathcal{B}}[f^{(s)} - f, \psi^{(k)}] = J_{\mathcal{B}}\left[\sum_{\nu=1}^{s} a_\nu \psi^{(\nu)} - f, \psi^{(k)}\right] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s),$$

d'où résulte $a_k = J_{\mathcal{B}}(f, \psi^{(k)})$.

Si nous posons $q(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \psi^{(\nu)}(z)$, cette série sera, d'après le théorème II, uniformément convergente dans chaque domaine partiel $\mathfrak{G}$ intérieur à $\mathcal{B}$, g est donc une fonction analytique de z_1, z_2 dans

$\mathcal{B}$ et l'on a $\lim\limits_{s \to \infty} f^{(s)}(z) = q(z)$. Comme pour $l > \nu$ on a, d'après (14), $\psi^{(l)}_{m_\nu n_\nu}(t) = 0$, il s'ensuit que $q_{m_\nu n_\nu}(t) = f^{(l)}_{m_\nu n_\nu}(t) = f_{m_\nu n_\nu}(t)$, c'est-à-dire

$$\left[\frac{d^{m_\nu+n_\nu} q(z_1, z_2)}{dz_1^{m_\nu}\, dz_2^{n_\nu}}\right]_{z_k = t_k} = \left[\frac{d^{m_\nu+n_\nu} f(z_1, z_2)}{dz_1^{m_\nu}\, dz_2^{n_\nu}}\right]_{z_k = t_k}$$

Cette relation étant vraie pour chaque $(m_\nu n_\nu)$, comme f et q sont des fonctions analytiques dans $\mathcal{B}$, on y a

$$f(z) = q(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \psi^{(\nu)}(z), \qquad a_\nu = \mathrm{J}_{\mathcal{B}}[f, \psi^{(\nu)}(z)],$$

c'est-à-dire que chaque fonction f de $E(\mathcal{B})$ est développable suivant les $\psi^{(\nu)}(z)$. Le système $\{\psi^{(\nu)}(z)\}$ est donc fermé.

6. **Fonction noyau et fonction minimum.** — Dans chaque domaine $\mathcal{B}$ il y a évidemment une infinité de systèmes fermés de fonctions orthogonales, le point $\{t\}$ utilisé dans la construction ci-dessus étant arbitraire. Mais, le noyau d'un système $\{\varphi^{(k)}(z)\}$, fermé pour $E(\mathcal{B})$, est indépendant du choix du système, comme on le voit d'une remarque, formulée plus loin.

Théorème IV. — *Le noyau*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi^{(\nu)}(z)\, \overline{\varphi^{(\nu)}(t)} \tag{20}$$

d'un système $\{\varphi^{(\nu)}(z)\}$ *fermé pour la classe* $E(\mathcal{B})$ *est, pour* $z = t$, *égal à* $[\lambda^1_{\mathcal{B}}(t)]^{-1}$ *où* $\lambda^1_{\mathcal{B}}(t)$ *est le minimum de* $\mathrm{J}_{\mathcal{B}}(f, f)$ *lorsqu'on envisage toutes les* $f(z) \in E(\mathcal{B})$ *avec* $f(t) = 1$ [Bergmann, 11].

Démonstration. — En vertu du théorème II, $\{\varphi^{(\nu)}(z)\}$ étant fermé pour $E(\mathcal{B})$, chaque fonction f envisagée est égale à $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi^{(\nu)}(z)$. En posant $a_\nu = \dfrac{\overline{\varphi^{(\nu)}(t)} + \mathrm{A}_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\varphi^{(\nu)}(t)|^2}$, on peut représenter f sous la forme

$$f(z) = \frac{\left\{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left[\overline{\varphi^{(\nu)}(t)} + \mathrm{A}_\nu\right] \varphi^{(\nu)}(z)\right\}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\varphi^{(\nu)}(t)|^2}.$$

Vu que $f(t) = 1$, on a $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \varphi^{(\nu)}(t) = 0$. D'après l'égalité de Parseval on a

$$J_{\mathcal{B}}(f, f) = \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\overline{\varphi^{(\nu)}(t)} + A_\nu|^2}{\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi^{(\nu)}(t)|^2\right\}^2} = \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi^{(\nu)}(t)|^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2}{\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi^{(\nu)}(t)|^2\right\}^2}.$$

Le minimum sera atteint si tous les A_ν disparaissent. Il existe donc une fonction unique qui rend $J_{\mathcal{B}}(f, f)$ minimum, à savoir :

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{\varphi^{(\nu)}(t)}\, \varphi^{(\nu)}(z)}{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi^{(\nu)}(t)|^2} \tag{21}$$

et le minimum $\lambda^1_{\mathcal{B}}(t)$ est égal à $\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi^{(\nu)}(t)|^2\right]^{-1}$

Remarques. — I. Les deux grandeurs $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi^{(\nu)}(t)|^2$ et (21) ne dépendent pas du système $\{\varphi^{(\nu)}(z)\}$, mais uniquement du domaine $\mathcal{B}$ et du point auxiliaire $\{t\}$. Il en est de même du noyau (20).

Nous appelons (20) et (21) respectivement « FONCTION NOYAU DE $\mathcal{B}$ » et « FONCTION MINIMUM DE $\mathcal{B}$ CORRESPONDANT A $\{t\}$ » et désignons dans la suite par $K_{\mathcal{B}}(z, \bar{t})$ et $M^1_{\mathcal{B}}(z, t)$.

II. On a

$$K_{\mathcal{B}}(t, \bar{t}) = \max_{h \in L} |h(t)|^{2\prime}, \tag{22}$$

où L désigne l'ensemble des fonctions g, régulières dans $\mathcal{B}$ et telles que $J_{\mathcal{B}}(g, g) \leqq 1$.

III. Soit $\mathfrak{f}^2$, $\mathfrak{f}^2 \subset \mathcal{B}$ un morceau d'une surface analytique. Désignons par $\mathfrak{t}^1$ le bord de $\mathfrak{f}^2$, $K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z})$ prend son maximum par rapport à $\bar{\mathfrak{f}}^2$ dans un point de $\mathfrak{t}^1$, c'est-à-dire pour chaque $\{t\} \in \bar{\mathfrak{f}}^2$ on a

$$K_{\mathcal{B}}(t, \bar{t}) \leqq \max_{\{\xi\} \in \mathfrak{t}^1} K_{\mathcal{B}}(\xi, \xi).$$

En effet pour chaque $\{t\}$ la fonction

$$h(z, t) = \frac{K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{t})}{\sqrt{K_{\mathfrak{B}}(t, \bar{t})}}$$

satisfait à $J_{\mathfrak{B}}(h, h) = 1$ et à $|h(t, t)|^2 = K_{\mathfrak{B}}(t, \bar{t})$. $h(z, t)$ étant dans $\mathfrak{f}^2$ une fonction régulière de z_1, z_2, il existe un point $\{\xi^{(0)}\} \in \mathfrak{f}^1$ tel qu'on ait $|h(t, t)| \leqq |h(\xi^{(0)}, t)$. D'après la remarque II on a $|h(\xi^{(0)}, t)|^2 \leqq K_{\mathfrak{B}}(\xi^{(0)}, \bar{\xi}^{(0)})$ d'où résulte notre affirmation.

Cette propriété a lieu même si $\{\varphi^{(\nu)}(z)\}$ n'est pas fermé.

$K_{\mathfrak{B}}(t, \bar{t})$ et $M^1_{\mathfrak{B}}(z, t)$ joueront un rôle fondamental pour le développement ultérieur de la théorie.

Dans le cas d'une seule variable et d'un domaine simplement connexe ces fonctions sont intimement liées à la fonction qui représente ce domaine sur le cercle. En effet, si $\xi = w(z, t)$, $|w_z(t, t)| = 1$, $w_z(t, t) = \left[\frac{dw(z, t)}{dz}\right]$, $z = t$ représente le domaine $\mathfrak{B}^2$ sur le cercle $\mathfrak{K}^2$, de telle sorte que $\{t\}$ correspond au centre du cercle, alors, d'après un théorème connu, $w_z(z, t)$ rendra l'intégrale

$$\mathfrak{J} = \int_{\mathfrak{B}^2} |f_z(z)|^2 dx\, dy, \qquad z = x + iy,$$

minimum si l'on n'envisage que les fonctions analytiques dans $\mathfrak{B}^2$ avec $f_t(t)| = 1$, $f_t(t) = \frac{df(t)}{dt}$, car $\mathfrak{J}$ est égale à l'aire du domaine dans lequel $\mathfrak{B}^2$ est transformé par $f(z)$ et d'autre part le cercle $\mathfrak{K}^2$ est représenté par une fonction $g(\xi) = (\xi - t) + \alpha(\xi - t)^2 + \ldots$, $g(\xi) \neq (\xi - t)$, sur un domaine dont l'aire est plus grande que celle de $\mathfrak{K}^2$. $w_z(z, t)$ est donc dans ce cas la fonction minimum $M^1_{\mathfrak{B}^2}(z, t)$ et l'aire de $\mathfrak{K}^2$ est $\frac{1}{K_{\mathfrak{B}^2}(t, \bar{t})}$ [Bergmann, 1; Bochner, 1].

La fonction noyau pour le cercle $\mathfrak{K}^2 = \mathbf{E}(|z| < r)$ est

$$(23) \qquad K_{\mathfrak{K}^2}(z, \bar{t}) = \frac{r^2}{\pi(r^2 - z\bar{t})^2}.$$

Comme l'existence de la fonction minimum est démontrée sans utilisation du théorème de Riemann-Poincaré, il se pose la question suivante : ne serait-il pas possible, par ce moyen, de démontrer de nouveau le théorème de Riemann-Poincaré. Dans ce but il faut montrer que le domaine $\mathfrak{M}^2$ qu'on obtient par la transformation $w(z) = \int_0^z M^1_{\mathfrak{B}^2}(z, t)\, dz$ d'un domaine $\mathfrak{B}^2$, simplement connexe, est un cercle. Mais, ceci n'a été démontré jusqu'à maintenant que dans le cas où $\mathfrak{M}^2$ est un domaine étoile [Bergmann, 10; Schiffer, 1].

En ce qui concerne la fonction noyau pour des domaines doublement connexes du plan, *voir* Zarankiewicz [1, 2] et Kufareff [1].

7. Le problème de la formation effective de la fonction noyau. — Jusqu'à maintenant on ne connaît qu'une seule méthode pour former effectivement la fonction noyau correspondant à un domaine donné $\mathcal{B}$, à savoir celle qui est basée sur la construction d'un système de fonctions orthogonales, fermé pour la classe $E(\mathcal{B})$ des fonctions régulières de carré sommable dans $\mathcal{B}$ (¹). Nous allons donc envisager cette question pour des domaines particuliers.

Le système (2) est fermé pour un domaine cerclé de Reinhardt comme nous allons le montrer.

Comme il résulte de la formule de Cauchy, toute fonction régulière dans un bicylindre y est développable en une série de puissances uniformément convergente. Chaque domaine cerclé et convexe $\mathcal{C}$ de Reinhardt peut être représenté comme la réunion d'une infinité de bicylindres $\mathcal{E}_k$ dont les centres sont à l'origine. Si f est régulière dans $\mathcal{C}$, elle est régulière dans chaque bicylindre $\mathcal{E}_k$ et y est représentable sous la forme $\sum_{mn} a_{mn}^{(k)} z_1^m z_2^n$. Comme

$$a_{mn}^{(k)} = \left[\frac{\partial^{m+n} f}{\partial z_1^m \partial z_2^n}\right]_{z_1=z_2=0},$$

les $a_{mn}^{(k)}$ sont indépendants de k. Donc f est représentable dans $\mathcal{C}$ sous la forme $\sum_{m,n} a_{mn} z_1^m z_2^n$. Comme d'après (3) le système (2) est formé de fonctions orthogonales dans chaque $\mathcal{C}$, donc (2) constitue un système de fonctions orthogonales fermé pour $E(\mathcal{C})$. Les fonctions noyaux pour $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{H}$ sont données par (4), (5) resp. (5 *a*).

Soit $\mathcal{K} = \mathbf{E}\left[\,|z_2| < \mathrm{R}(s),\ s = \frac{z_1}{z_2}\right]$ un domaine cerclé. Le système de polynomes homogènes $\mathrm{P}_{mn}(z_1, z_2)$ (introduit à la page 20) orthogonaux dans $\mathcal{K}$ est fermé pour $E(\mathcal{K})$.

Démonstration. — Chaque fonction $g(z_1, z_2) = g(sz_2, z_2)$ régu-

(¹) Remarquons encore qu'il y a aussi d'autres méthodes, comme celle indiquée au paragraphe 5 pour montrer l'existence d'un système fermé pour $E(\mathcal{B})$ de fonctions orthogonales [p. e. Bergmann, 3]. Mais ce sont des démonstrations d'existence qui ne donnent aucune possibilité de construire effectivement le système.

lière dans le voisinage du point $z_1 = z_2 = 0$ peut être représentée dans le voisinage de ce point (c'est-à-dire si z_2 est suffisamment petit, s quelconque) sous la forme d'une série,

$$(24)\quad g(sz_2, z_2) = g(0, 0) + z_2[g_{01} + sg_{10}] + z_2^2\left[\frac{1}{2}g_{02} + sg_{11} + \frac{1}{2}s^2 g_{20}\right] + \ldots;$$

où

$$g_{mn} = \left[\frac{\partial^{m+n} g(z_1, z_2)}{\partial z_1^m \partial z_2^n}\right]_{z_1 = z_2 = 0}$$

Si l'on écrit alors les fonctions $f_{m_\nu n_\nu}$ indiquées au paragraphe 5, on peut les mettre dans $|z_2| < R(s)$ sous la forme

$$z_2^{m_\nu + n_\nu} q_0(s) + z_2^{m_\nu + n_\nu + 1} q_1(s) + \ldots,$$

où la condition (14) n'impose aucune restriction aux $q_\mu(s)$, $\mu \geqq 1$. D'après un théorème de Tonneli sur les intégrales multiples de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned}
J_{\mathcal{K}}(f_{m_\nu n_\nu}, f_{m_\nu n_\nu}) &= \int_{\mathcal{K}} |z_2 f_{m_\nu n_\nu}(sz_2, z_2)|^2 \, d\omega_{z_2} \, d\omega_s \\
&= \iint_{|s|<\infty} d\omega_s \iint_{|z_2|<R(s)} |z_2 f_{m_\nu n_\nu}(sz_2, z_2)|^2 \, d\omega_{z_2} \\
&= \iint_{|s|<\infty} d\omega_s \left[\sum_{\mu=0}^{\infty} |q_\mu(s)|^2 \frac{[R(s)]^{2(m_\nu + n_\nu + 2 + \mu)}}{(m_\nu + n_\nu + 2 + \mu)}\right],
\end{aligned}$$

$$d\omega_{z_2} = dx_2 \, dy_2, \qquad d\omega_s = du \, dv \qquad (s = u + iv).$$

Comme les $q_\mu(s)$, $\mu = 1, 2, \ldots$ ne sont assujettis à aucune restriction, le minimum de l'intégrale sera atteint, si l'on choisit pour $\mu \geqq 1$ $q_\mu(s) = 0$. $q_0(s)$ est un polynome de degré $(m_\nu + n_\nu)$ d'où suit que les $f_{m_\nu n_\nu}$ sont des polynomes homogènes en z_1, z_2 de degré $(m_\nu + n_\nu)$. Or on peut exprimer linéairement tous les $(m_\nu + n_\nu + 1)$ polynomes $f_{m_\nu n_\nu}(z_1, z_2)$ de degré $(m_\nu + n_\nu)$ par les polynomes $P_{nm}(z_1, z_2)$ $n + m = n_\nu + m_\nu$. Chaque fonction $\psi^{(\nu)}(z_1, z_2)$ [*cf.* p. 20] est donc une combinaison linéaire d'un nombre fini de P_{mn}. Comme $\{\psi^{(\nu)}\}$ est fermé pour $E(\mathcal{K})$, il en est de même pour $\{P_{mn}\}$.

D'une façon analogue on démontre que si $\mathfrak{S}$ est un domaine semi-cerclé, $\mathfrak{S} = \mathrm{E}[|z_2| < R(z_1)]$, il y a des systèmes de fonctions orthogonales $Q_{mn}(z_1, z_2)$ fermés pour $E(\mathfrak{S})$ de la forme

$$Q_{mn}(z_1, z_2) = z_2^m f_{mn}(z_1).$$

Remarque I. — Un rôle important est joué dans la suite par les fonctions minima $f(z)$ satisfaisant aux conditions

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{llll} 1. & f(t)=1; & & \\ 2. & f(t)=0, & f_{10}(t)=1, & f_{01}(t)=0; \\ 3. & f(t)=0, & f_{10}(t)=0, & f_{01}(t)=1 \\ & \multicolumn{3}{l}{\left\{f_{mn}(t)\equiv\left[\dfrac{\partial^{m+n}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^m\,\partial z_2^n}\right]_{z_k=t_k}\right\},} \end{array}\right.$$

où $\{t\}$ est un point fixe, intérieur à $\mathcal{B}$.

Nous les désignerons par $M^1_{\mathcal{B}}(z,t)$, $M^{010}_{\mathcal{B}}(z,t)$, $M^{001}_{\mathcal{B}}(z,t)$. La première et la troisième sont les solutions des problèmes de minimum considérés par nous lorsqu'on pose dans (14) $\nu=1$ resp. $\nu=3$. Dans le cas d'un domaine cerclé $\mathcal{K}$, on obtient ainsi

$$(26)\qquad M^1_{\mathcal{K}}(z,t)=1,\qquad M^{001}_{\mathcal{K}}(z,t)=(z_2-t_2).$$

Une considération analogue donne

$$(27)\qquad M^{010}_{\mathcal{K}}(z,t)=(z_1-t_1)$$

[Bergmann, 5; Welke, 1].

Remarque II. — Pour les fonctions introduites dans la remarque I, on obtient dans le cas d'un domaine semi-cerclé $\mathcal{S}$

$$(28)\quad M^1_{\mathcal{S}}(z,t)=g_1(z_1-t_1),\quad M^{010}_{\mathcal{S}}=g_2(z_1-t_1),\quad M^{0-01}_{\mathcal{S}}=(z_2-t_2)g_3(z_1-t_1),$$

où $g_k(\zeta)$ sont des fonctions d'une variable complexe ζ convenablement normées [Welke, 1].

Passons maintenant au cas d'un domaine $\mathcal{B}$ simplement connexe quelconque. En orthogonalisant les fonctions $z_1^m z_2^n$, $(m,n)=1,2,\ldots$ à l'aide du procédé de Schmidt, on peut construire pour chaque domaine $\mathcal{B}$ un système de polynomes orthogonaux $P^{(\nu)}(z)$, $\nu=1,2,\ldots$. Il se pose la question de savoir pour quels domaines simplement connexes ce système est fermé pour $E(\mathcal{B})$.

Si l'on se borne dans cette direction à la classe $E^*(\mathcal{B})$ des fonctions régulières dans le domaine fermé $\overline{\mathcal{B}}$, alors on a le théorème suivant que nous donnons ici sans démonstration.

Théorème V. — *On a pour chaque fonction $f(z_1,z_2)$ régulière* *dans le domaine* $\overline{\mathfrak{B}}$

$$(29) \qquad f(z_1, z_2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu P^{(\nu)}(z_1, z_2), \qquad \text{où} \quad a_\nu = J_{\mathfrak{B}}[f, P^{(\nu)}], \qquad \{z\} \in \mathfrak{B},$$

si le domaine $\mathfrak{B}$ *satisfait aux conditions suivantes :*

Il existe un domaine étoilé $\mathfrak{S}$ *contenant* $\mathfrak{B}$. *Soit* $\mathfrak{w}^1$ *un chemin continu reliant les points* $t^{(1)}$ *et* $t^{(2)}$ *du plan complexe. Il existe deux fonctions*

$$(30) \qquad w_1 = p_1(z_1, z_2, t), \qquad w_2 = p_2(z_1, z_2, t)$$

avec les propriétés suivantes :

1. *Pour chaque t fixe dans un voisinage* $\mathfrak{W}^2$ de $\mathfrak{w}^1$, p_1 *et* p_2 *sont des fonctions régulières de* z_1 *et* z_2 *dans* $\overline{\mathfrak{S}}$; *pour chaque* z_1, z_2 *fixe de* $\overline{\mathfrak{S}}$, p_1 *et* p_2 *sont des fonctions régulières de t dans* $\mathfrak{W}^2$; *enfin* p_1 *et* p_2 *sont continues en fonction de* z_1, z_2 *et t.*

2. *Le point* $w_k = p_k(z_1, z_2, t)$, $k = 1, 2$ *se trouve dans* $\mathfrak{B}$ *pour tous t de* $\mathfrak{w}^1$ *et* z_1, z_2 de $\mathfrak{B}$.

3. $p_k[z_1, z_2, t^{(1)}] = z_k$, $k = 1, 2$.

4. *Il y a un* R *tel que* 1° *l'hypersphère* $|z_1|^2 + |z_2|^2 < R^2$ *est comprise à l'intérieur de* $\mathfrak{B}$ *et* 2° *il existe un point* $t^{(3)} = t^{(3)}(R)$ *sur* $\mathfrak{w}^1$, $t^{(3)} \neq t^{(2)}$ *tel qu'on ait pour tous les points* z_1, z_2 *de* $\mathfrak{B}$ *et les points t compris entre* $t^{(3)}$ *et* $t^{(2)}$ *sur* $\mathfrak{w}^1$,

$$|p_1(z_1, z_2, t)|^2 + |p_2(z_1, z_2, t)|^2 \leqq R^2$$

[Hammerstein, 1].

En partant de la théorie des domaines avec une surface frontière remarquable, Mme Aravijskaja [1] a donné une méthode différente pour construire des systèmes de fonctions orthogonales, fermés pour $E^*(\mathfrak{B})$. La méthode n'est applicable qu'à une catégorie assez restreinte de domaines mais qui ne sont pas nécessairement simplement connexes.

---

(1) Chaque domaine étoilé satisfait aux conditions indiquées dans le théorème V. On peut prendre $p_k = z_k t$, $k = 1, 2$, $0 \leqq t \leqq 1$.

8. Systèmes particuliers de fonctions orthogonales complexes et leurs applications. — Remarquons que pour différentes applications il est utile d'introduire différents systèmes de fonctions orthogonales, mais on a peu traité cette question.

Dans le chapitre précédent nous avons introduit des domaines possédant une surface frontière remarquable qui, comme nous l'avons indiqué, joue du point de vue de la théorie des fonctions, un rôle analogue à la courbe frontière dans le cas des fonctions d'une variable.

Il convient de considérer des systèmes de fonctions qui sont orthogonales par rapport à une surface frontière remarquable ($\mathfrak{f}^2$) d'un tel domaine.

En rapport avec ces questions on n'a considéré jusqu'à présent que des classes très spéciales de surfaces $\mathfrak{f}^2$ à savoir celles qu'on représente sous la forme

$$(31) \qquad \begin{cases} |z_1| = R(\varphi, \psi), & \varphi = \operatorname{arc} z_1 \quad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi); \\ z_2 = e^{i\psi} & (0 \leqq \psi \leqq 2\pi), \end{cases}$$

$R(\varphi, \psi)$, $R(\varphi, \psi) \geqq c > 0$, étant une fonction périodique en φ et ψ, des périodes 2π, satisfaisant à la condition de Lipschitz

$$|R(\varphi, \psi) - R(\varphi', \psi')| \leqq A_1 |\varphi - \varphi'| + A_2 |\psi - \psi'|.$$

Bien que les résultats formulés ici puissent être étendus aux cas où $\mathfrak{f}^2$ est d'une forme beaucoup plus générale que (31), nous supposons toujours dans ce paragraphe que $\mathfrak{f}^2$ possède la forme indiquée.

Soit $\mathfrak{M}$ un domaine avec une surface remarquable $\mathfrak{f}^2$. Nous dirons qu'un système de fonctions $\Omega^{(\nu)}(z_1, z_2)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, régulières dans $\mathfrak{M}$, différentiables dans $\mathfrak{M} + \mathfrak{f}^2$, est un système de fonctions orthogonales par rapport à $\mathfrak{f}^2$, si l'on a

$$\iint_{\mathfrak{f}^2} \Omega^{(\nu)}(z_1, z_2) \overline{\Omega^{(\mu)}(z_1, z_2)}\, do = \delta_{\nu\mu}, \qquad \delta_{\nu\nu} = 1, \qquad \delta_{\nu\mu} = 0 \qquad (\nu \neq \mu),$$

où

$$do = \left| \frac{D[R(\varphi, \psi) e^{i\varphi}, e^{i\psi}]}{D[\varphi, \psi]} \right| d\psi\, d\varphi.$$

Comme dans la démonstration du théorème I, nous montrons que $\sum_{\nu=2}^{\infty} |\Omega^{(\nu)}(z_1, z_2)|^2 < \infty$ pour chaque $\{z_1, z_2\} \in \mathfrak{M}$. Dans ce but on montre que pour tout $\{z_1^0, z_2^0\} \in \mathfrak{M}$ il existe une constante $\alpha(z_1^0, z_2^0) > 0$ dépendant seulement de $\{z_1^0, z_2^0\}$ et $\mathfrak{M}$, et telle que pour chaque f régulière dans $\overline{\mathfrak{M}}$ on ait :

$$\iint_{\mathfrak{F}^2} |f(z_1, z_2)|^2 do \geqq \alpha(z_1^0, z_2^0)\,|f(z_1^0, z_2^0)|^2.$$

La plupart des théorèmes démontrés dans ce chapitre pour les $\varphi^{(\nu)}(z_1, z_2)$ valables aussi pour un système de $\Omega^{(\nu)}(z_1, z_2)$. Spécialement on démontre que chaque f, régulière dans $\overline{\mathfrak{M}}$, avec

$$\iint_{\mathfrak{F}^2} |f|^2 do < \infty,$$

peut être représentée dans $\mathfrak{M}$ sous la forme

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Omega^{(\nu)}(z_1, z_2) \iint_{\mathfrak{F}^2} f\,\Omega^{(\nu)}\, do, \tag{32}$$

$\Omega^{(\nu)}(z_1, z_2)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ étant un système fermé [Bergmann, 8].

Le fait que les intégrales qui figurent comme coefficients dans (32) ne dépendent que des valeurs de f sur $\mathfrak{F}^2$ présente une certaine importance pour quelques problèmes. En particulier, il sert pour démontrer le théorème suivant :

Soit $\mathfrak{F}^2$ une surface quelconque de la forme (31), *située tout entière à l'intérieur d'un domaine $\mathfrak{B}$ et soit $f(z_1, z_2)$ une fonction régulière dans $\mathfrak{B}$ avec $I_{\mathfrak{B}}(f, \bar{f}) < \infty$. Si γ est une valeur lacunaire de f dans $\mathfrak{B}$ et si $|f| \leqq M$ sur $\mathfrak{F}^2$, on a alors entre γ et M l'inégalité*

$$|\gamma| \geqq \frac{1}{2S}\left[+\sqrt{|l|^2 + SH} - |l|\right] \qquad \text{pour } S > 0,$$

$$|\gamma| \geqq \frac{1}{4}\,\frac{H}{|l|} \qquad \text{pour } S = 0;$$

où

$$l = B_1 f_{z_1} + B_2 f_{z_2} + B_3 M, \qquad H = |B_4 f_{z_1}|^2 + |B_5 f_{z_1} + B_6 f_{z_2}|^2,$$

$$f_{z_k} = \left(\frac{\partial f}{\partial z_k}\right)_{z_1 = z_2 = 0},$$

B_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ *et* S *ne dépendant que de* $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{F}^2$ [Bergmann, 8]

On utilise aussi ces fonctions dans la théorie de certaines équations intégrales dans le domaine de variables complexes [Bergmann, 18].

Je voudrais encore indiquer que l'on peut, en utilisant la théorie de fonctions orthogonales réelles, donner des indications sur le comportement du développement (32) sur la surface frontière remarquable. On n'a fait jusqu'ici aucune recherche dans cette direction. Je vais donc me borner à indiquer quelques résultats que l'on obtient immédiatement en partant de théorèmes connus.

1. Il est toujours possible de ranger un système $\Omega^{(\nu)}(z_1, z_2)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, de telle façon que, pour la suite nouvelle $\Omega^{(\nu_m)}(z_1, z_2)$, $m = 1, 2, \ldots$, chaque développement

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{\nu_m} \Omega^{(\nu_m)}(z_1, z_2), \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^2 < \infty\right)$$

converge dans $\mathcal{B}$ et l'expression

$$\sum_{m=1}^{n} \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) a_{\nu_m} \Omega^{(\nu_m)}(z_1, z_2)$$

converge presque partout sur $\mathfrak{f}^2$.

2. Pour chaque système $\Omega^{(\nu)}(z_1, z_2)$, il existe une suite partielle k_m, $m = 1, 2, \ldots$, telle que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=k_{m-1}+1}^{k_m} a_\nu \Omega^{(\nu)}(z_1, z_2) \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^2 < \infty\right)$$

converge dans $\mathcal{B}$ et presque partout sur $\mathfrak{f}^2$.

3. Si

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \log^2 \nu \cdot \iint_{\mathfrak{f}^2} f\, \Omega^{(\nu)}\, do \right|^2 < \infty,$$

alors (32) converge presque partout sur $\mathfrak{f}^2$.

On obtient 1, en partant d'un théorème de Menchoff (1); 2, d'un

---

(1) *Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales par les méthodes linéaires* (en russe) (*Bull. Ac. Sc. U. R. S. S.*, 1937, p. 203-229).

théorème de Marcinkiewicz ([1]), et 3, d'un théorème de Menchoff ([2]).

Quant aux autres catégories de fonctions orthogonales mentionnons les systèmes de fonctions doublement orthogonales, c'est-à-dire orthogonales par rapport à deux domaines différents. On a dans ce cas

$$J_{\mathcal{B}}[\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\mu)}] = 0 \qquad \text{et} \qquad J_{\mathcal{G}}[\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\mu)}] = 0 \qquad (\nu \neq \mu).$$

L'introduction de telles fonctions est utile dans l'étude d'une fonction, donnée par sa série de Taylor [Bergmann, 3].

Il s'avère utile d'introduire aussi des systèmes biorthogonaux ([3]). M. Aronszajn [1, 2] les a utilisés pour obtenir des invariants par rapport aux transformations pseudo-conformes.

III. — Sur quelques problèmes de minimum.

1. La méthode des problèmes de minimum. — Déjà dans le chapitre précédent nous avons vu que la considération de certains problèmes variationnels est un procédé analytique important pour l'étude de plusieurs problèmes (démonstration de la convergence du noyau, de l'existence d'un système fermé). Il se montre que l'établissement d'une connexion entre des problèmes varationnels d'un type particulier et certains problèmes de la théorie de la représentation pseudo-conforme, est très utile pour un grand nombre de questions. En effet, certaines grandeurs qui jouent un grand rôle dans la caractérisation d'un domaine, sont en même temps des extréma de $J_{\mathcal{B}}(f, f)$ lorsqu'on envisage les fonctions $f \in E(\mathcal{B})$ qui satisfont en un point $\{t\} \in \mathcal{B}$ à certaines conditions auxiliaires. Nous avons déjà appliqué ce procédé au § 6 du Chapitre II où nous avons démontré que la quantité $[K(t, \bar{t})]^{-1}$ est égale au minimum $\lambda^1(t)$. Cette méthode nous permettra de donner des limitations pour les différentes grandeurs étudiées (*cf.* Chap. IV). Pour démontrer que ces

---

([1]) *Sur la convergence des séries orthogonales* (*Studia Mathematica*, 6, 1936, p. 39-45.

([2]) *Sur les fonctions orthogonales* (*Fundamenta mathematicæ*, 4, 1923, p. 82-105).

([3]) Deux suites $\{\varphi^{(\nu)}\}$ et $\{\psi^{(\nu)}\}$ sont appelées biorthogonales et normées si $J_{\mathcal{B}}(\varphi^{(\nu)}, \psi^{(\mu)}) = \delta_{\nu\mu}$, $\delta_{\nu\nu} = 1$, $\delta_{\nu\mu} = 0$, $\nu \neq \mu$.

grandeurs sont égales aux valeurs minima λ de $J_{\mathcal{B}}(f, f)$, le plus simple est d'exprimer ces dernières minima à l'aide de la fonction noyau, de la fonction minima et de leurs dérivés respectivement au moyen d'un système $\{\varphi^{(\nu)}(x)\}$ fermé pour $E(\mathcal{B})$.

2. Les problèmes de minimum [Bergmann, **4**, **11**, **18**]. — Nous allons introduire des symboles pour quelques matrices. Soit α_{qp}, $p = 1, 2, \ldots$. $q = 1, 2, \ldots, n$ un système de nombres complexes tel que $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{q\nu}|^2 < \infty$ pour $q = 1, 2, \ldots, n$. Soient d'autre part $X_1, \ldots, X_n$ des nombres complexes. Nous employons les symboles suivants pour $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$(1)\quad \begin{cases} [X]^k = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_k \end{pmatrix}, \qquad [D]^k = \begin{pmatrix} \Sigma\alpha_{1\nu}\bar{\alpha}_{1\nu} & \Sigma\alpha_{1\nu}\bar{\alpha}_{2\nu} & \ldots & \Sigma\alpha_{1\nu}\bar{\alpha}_{k\nu} \\ \Sigma\alpha_{2\nu}\bar{\alpha}_{1\nu} & \Sigma\alpha_{2\nu}\bar{\alpha}_{2\nu} & \ldots & \Sigma\alpha_{2\nu}\bar{\alpha}_{k\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma\alpha_{k\nu}\bar{\alpha}_{1\nu} & \Sigma\alpha_{k\nu}\bar{\alpha}_{2\nu} & \ldots & \Sigma\alpha_{k\nu}\bar{\alpha}_{k\nu} \end{pmatrix}, \\ [\Sigma\bar{\alpha}_{q\nu}\varphi^{(\nu)}(z)]^k = \begin{pmatrix} \Sigma\bar{\alpha}_{1\nu}\varphi^{(\nu)}(z) \\ \Sigma\bar{\alpha}_{2\nu}\varphi^{(\nu)}(z) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Sigma\bar{\alpha}_{k\nu}\varphi^{(\nu)}(z) \end{pmatrix}, \qquad \Sigma \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} \ (^1). \end{cases}$$

Le symbole $[D]_s^k$ désigne la matrice $[D]^k$ sans la $s^{\text{ième}}$ colonne. [$[D]_s^k$ est donc une matrice de k lignes et $(k-1)$ colonnes].

Nous allons chercher maintenant la fonction $f^{(n)}(z) \in E(\mathcal{B})$ satisfaisant à la condition

$$(2)\ \mathbf{A}\qquad \Sigma A_\nu \alpha_{q\nu} = X_q \qquad (q = 1, 2, \ldots, n); \qquad A_\nu = J_{\mathcal{B}}[f^{(n)}, \varphi^{(\nu)}]$$

qui rend l'intégrale $J_{\mathcal{B}}(f, f)$ minimum. D'après l'égalité de Parseval on a

$$J_{\mathcal{B}}(f, f) = \Sigma\, |A_\nu|^2.$$

---

(1) La première et la troisième de ces matrices sont des matrices à une colonne tandis que la seconde représente une matrice à n lignes et n colonnes.

Elles sont écrites pour un cas spécial d'une façon plus développée à la page 45 formule (9).

Σ désignera partout dans ce chapitre $\sum_{\nu=1}^{\infty}$.

D'après § 4 du Chapitre II, pour chaque suite A_ν avec $\Sigma \mid A_\nu \mid^2 < \infty$, il existe une fonction $\Sigma A_\nu \varphi^{(\nu)}(z_1, z_2)$; par conséquent, notre problème se réduit à déterminer le minimum de la forme hermitique $\Sigma A_\nu \overline{A}_\nu$ sous la condition (2). Pour obtenir les valeurs de A_ν rendant $\Sigma A_\nu \overline{A}_\nu$ minimum, nous différentions l'expression

$$\sum A_\nu \overline{A}_\nu - \sum_{s=1}^{n} \left[\mu_s \left(\sum A_\nu \alpha_{s\nu} - X_s\right) - \overline{\mu}_s \left(\sum \overline{A}_s \overline{\alpha}_{s\nu} - \overline{X}_s\right)\right]$$

par rapport à A_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ et nous obtenons

$$A_\nu = \sum_{s=1}^{n} \overline{\mu}_s \overline{\alpha}_{s\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

En remplaçant dans (2) les $\overline{A}_\nu$ par les expressions obtenues et en changeant l'ordre de la sommation nous avons

$$\sum \alpha_{q\nu} \sum_{s=1}^{n} \overline{\mu}_s \overline{\alpha}_{s\nu} = \sum_{s=1}^{n} \overline{\mu}_s \sum \alpha_{q\nu} \overline{\alpha}_{s\nu} = X_q \qquad (q = 1, 2, \ldots, n)$$

(2 a)
$$\overline{\mu}_s = (-1)^{(s+1)} \frac{\mid [X]^n [D]^n_s \mid}{\mid [D]^n \mid}$$

on obtient (pour les détails *cf.* Bergmann, 4, 11 p. 94, 18) les résultats suivants :

I. La fonction minimale $f^{(n)}(z)$ cherchée est (¹)

(3)
$$f^{(n)}(x) = \sum_{q=1}^{n} (-1)^{q-1} \frac{\mid [X]^n [D]^n_q \mid}{\mid [D]^n \mid} \sum \alpha_{q\nu} \varphi^{(\nu)}(z) = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & [\Sigma \overline{\alpha}_{q\nu} \varphi^{(\nu)}(z)]'^n \\ [X]^n & [D]^n \end{vmatrix}}{\mid [D]^n \mid}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mid [D]^{k-1} \mid}{\mid [D]^k \mid} \left[(-1)^{k+1} \frac{\mid [X]^k [D]^k_k \mid}{\mid [D]^{k-1} \mid}\right] \left[(-1)^{k+1} \frac{\mid [\Sigma \overline{\alpha}_{q\nu} \varphi^{(\nu)}(z)] [\overline{D}]^k_k \mid}{\mid [D]^{k-1} \mid}\right],$$

(¹) Remarquons qu'on obtient pour $f^{(n)}(z)$ la troisième expression de (3) si l'on considère la deuxième expression comme une forme bilinéaire de variables X_q et $\Sigma \overline{\alpha}_{q\nu} \varphi^{(\nu)}(z)$, $q = 1, 2, \ldots n$ et si on lui applique la transformation de Jacobi.

où $\overline{[\ldots]}^n$ resp. $[\ldots]'^n$ désigne la matrice conjuguée resp. transposée de $[\ldots]^n$. La valeur minimum s'écrit

$$(4)\quad J_{\mathcal{B}}[f^{(n)}, f^{(n)}] = \sum A_\nu \overline{A}_\nu = \sum \overline{A}_\nu \sum_{q=1}^{n} \overline{\mu}_q \overline{\alpha}_{q\nu} = \sum_{q=1}^{n} \overline{\mu}_q \sum \overline{A}_\nu \overline{\alpha}_{q\nu} = \sum_{q=1}^{n} \overline{\mu}_q \overline{X}_q$$

$$= \sum_{q=1}^{n} (-1)^{q+1} \overline{X}_q \frac{|[X]^n [D]_q^n|}{|[D]^n|} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & \overline{[X]}'^n \\ [X]^n & [D]^n \end{vmatrix}}{|[D]^n|}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{|[D]^{k-1}|}{|[D]^k|} \left| (-1)^{k+1} \frac{|[X]^k [D]_k^k|}{|[D]^{k-1}|} \right|^2.$$

Comparer les exemples plus loin où les formules sont écrites de façon plus développée.

II. Il n'existe qu'une seule fonction minimale. Supposons en effet qu'il existe encore une autre solution $\Sigma C_\nu \varphi^{(\nu)}$; on aurait alors d'après 2 et (2 a)

$$\Sigma A_\nu (\overline{C}_\nu - \overline{A}_\nu) = \Sigma (\overline{C}_\nu - \overline{A}_\nu) \left(\sum_{q=1}^{n} \overline{\mu}_q \overline{\alpha}_{q\nu} \right) = \sum_{q=1}^{n} \overline{\mu}_q \Sigma (\overline{C}_\nu - \overline{A}_\nu) \overline{\alpha}_{q\nu}.$$

Comme $\Sigma C_\nu \alpha_{q\nu} = \Sigma A_\nu \alpha_{q\nu} = X_q$, on a

$$\Sigma (C_\nu - A_\nu) \alpha_{q\nu} = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots n)$$

d'où il résulte que $\Sigma A_\nu (\overline{C}_\nu - \overline{A}_\nu) = 0$ et par conséquent que

$$\Sigma |C_\nu|^2 = \Sigma |A_\nu|^2 + \Sigma |C_\nu - A_\nu|^2 + 2\,\mathrm{Re}[\Sigma A_\nu (\overline{C}_\nu - \overline{A}_\nu)] > \Sigma |A_\nu|^2,$$

à moins que tous les $(C_\nu - A_\nu)$ ne soient nuls.

Nous supposerons dans la suite que les $\alpha_{q\nu}$ sont de la forme

$$\alpha_{q\nu} = \sum_{\mu=1}^{l} \beta_\mu^{(q)} \varphi_{m_\mu p_\mu}^{(\nu)}(t) \qquad \text{où} \quad \varphi_{mp}^{(\nu)}(t) = \frac{\partial^{m+p} \varphi^{(\nu)}(t_1, t_2)}{\partial t_1^m \, \partial t_2^p} \quad (^1).$$

(1) Les $(m_\mu p_\mu)$ sont les systèmes des doubles indices ordonnés suivant la convention du § 2, Chap. II.

Dans certains problèmes nous admettrons que les $\varphi^{(\nu)}$ sont prises pour des points différents $\{t_1^{(1)}, t_2^{(1)}\}, \ldots, \{t_1^{(l)}, t_2^{(l)}\}$. Cf. par exemple dans le problème d'interpolation.

Alors la condition **A** devient

$$(5)\ \mathbf{A}^{(1)} \qquad \sum_{\mu=1}^{l} \beta_{\mu}^{(q)} f_{m_\mu p_\mu}^{(n)}(t) = X_q \qquad (q = 1, \ldots, n)$$

$$f_{mp}^{(n)}(t) \equiv \frac{\partial^{m+p} f^{(n)}(t_1, t_2)}{\partial t_1^m \, \partial t_2^p}.$$

THÉORÈME IV. — *Soit* $\{t\} \in \mathfrak{G} \subset \mathcal{B}$. *Soient* $\lambda_{\mathfrak{G}}$ *resp.* $\lambda_{\mathcal{B}}$ *les minima de l'intégrale* $J_{\mathfrak{G}}(h, h)$ *resp.* $J_{\mathcal{B}}(h, h)$ *avec les mêmes conditions* (5). *On a l'inégalité*

$$(6) \qquad \lambda_{\mathfrak{G}} \leqq \lambda_{\mathcal{B}}$$

[Bergmann, 11].

Démonstration. — Désignons les fonctions minima correspondantes par $f_{\mathfrak{G}}(z, t)$ resp. $f_{\mathcal{B}}(z, t)$. $f_{\mathfrak{G}}(z, t)$ et $f_{\mathcal{B}}(z, t)$ satisfaisant aux mêmes conditions (5), on obtient

$$\lambda_{\mathfrak{G}} = \int |f_{\mathfrak{G}}(z, t)|^2 \, d\omega_z \leqq \int_{\mathfrak{G}} |f_{\mathcal{B}}(z, t)|^2 \, d\omega_z \leqq \int_{\mathcal{B}} |f_{\mathcal{B}}(z, t)|^2 \, d\omega_z = \lambda_{\mathcal{B}}.$$

Comme les λ forment en même temps les grandeurs caractéristiques pour le domaine considéré $\left[\text{par exemple } \frac{1}{\lambda_{\mathcal{B}}^1(t)} = K_{\mathcal{B}}(t, \bar{t})\right]$, ce théorème rend dans beaucoup de questions des services analogues à ceux que rend le lemme de Schwarz dans le cas des représentations conformes. [Cf. le fascicule suivant.]

3. **Exemples.** — Nous allons donner maintenant quelques exemples de problèmes varationnels qui seront importants dans la suite :

1. Si les conditions auxiliaires ont la forme

$$(7)\ \mathbf{A}^{(1)} \qquad f(t) = X_{00}, \quad f_{10}(t) = X_{10}, \quad \ldots, \quad f_{m_\varkappa n_\varkappa}(t) = X_{m_\varkappa n_\varkappa},$$

ce qui revient à

$$(8)\ \mathbf{A} \qquad \alpha_{\mu\nu} = \varphi_{m_\mu n_\mu}^{(\nu)}(t), \qquad X_\mu = X_{m_\mu n_\mu} \qquad \text{pour } \mu = 1, 2, \ldots, \varkappa,$$

nous désignerons dans ce qui suit la fonction minimale par $M_{\mathcal{B}}^{X_{00} \ldots X_{m_\varkappa n_\varkappa}}(z, t)$ et le minimum correspondant par $\lambda_{\mathcal{B}}^{X_{00} \ldots X_{m_\varkappa n_\varkappa}}(t)$.

Pour abréger nous poserons

$$K \equiv K_{\mathcal{B}}(t_1, t_2; \bar t_1, \bar t_2),$$

$$K_{mn\bar p\bar q} = \frac{\partial^{m+n+p+q} K_{\mathcal{B}}(t_1, t_2; \bar t_1, \bar t_2)}{\partial t_1^m \, \partial t_2^n \, \partial \bar t_1^p \, \partial \bar t_2^q}, \qquad K_{00\bar p\bar q}(z, \bar t) = \frac{\partial^{p+q} K_{\mathcal{B}}(z_1, z_2; \bar t_1, \bar t_2)}{\partial \bar t_1^p \, \partial \bar t_2^q}.$$

Nous obtenons alors pour $M_{\mathcal{B}}^{X_{00}X_{10}X_{01}}(z, t)$ et $\lambda_{\mathcal{B}}^{X_{00}X_{10}X_{01}}(t)$ (grandeurs dont nous aurons ultérieurement besoin à plusieurs reprises) les formules

$$(9) \quad M_{\mathcal{B}}^{X_{00}X_{10}X_{01}}(z, t) = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & K(z, \bar t) & K_{00\bar1\bar0}(z, \bar t) & K_{00\bar0\bar1}(z, \bar t) \\ X_{00} & K & K_{00\bar1\bar0} & K_{00\bar0\bar1} \\ X_{10} & K_{10\bar0\bar0} & K_{10\bar1\bar0} & K_{10\bar0\bar1} \\ X_{01} & K_{01\bar0\bar0} & K_{01\bar1\bar0} & K_{01\bar0\bar1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K & K_{00\bar1\bar0} & K_{00\bar0\bar1} \\ K_{10\bar0\bar0} & K_{10\bar1\bar0} & K_{10\bar0\bar1} \\ K_{01\bar0\bar0} & K_{01\bar1\bar0} & K_{01\bar0\bar1} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{K} X_{00} K(z, \bar t) + \frac{\begin{vmatrix} X_{00} & K \\ X_{10} & K_{10\bar0\bar0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K(z, \bar t) & K \\ K_{00\bar1\bar0}(z, \bar t) & K_{10\bar0\bar0} \end{vmatrix}}{K \begin{vmatrix} K & K_{00\bar1\bar0} \\ K_{10\bar0\bar0} & K_{10\bar1\bar0} \end{vmatrix}}$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} X_{00} & K & K_{00\bar1\bar0} \\ X_{10} & K_{10\bar0\bar0} & K_{10\bar1\bar0} \\ X_{01} & K_{01\bar0\bar0} & K_{01\bar1\bar0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K(z, \bar t) & K & K_{10\bar0\bar0} \\ K_{00\bar1\bar0}(z, \bar t) & K_{00\bar1\bar0} & K_{10\bar1\bar0} \\ K_{00\bar1\bar0}(z, \bar t) & K_{01\bar1\bar0} & K_{01\bar0\bar1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K & K_{00\bar1\bar0} \\ K_{10\bar0\bar0} & K_{10\bar1\bar0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & K_{00\bar1\bar0} & K_{00\bar0\bar1} \\ K_{10\bar0\bar0} & K_{10\bar1\bar0} & K_{10\bar0\bar1} \\ K_{01\bar0\bar0} & K_{01\bar1\bar0} & K_{01\bar0\bar1} \end{vmatrix}},$$

$$(10) \quad \lambda_{\mathcal{B}}^{X_{00}X_{10}X_{01}}(t)$$

$$= \frac{1}{K} |X_{00}|^2 + \frac{\left\| \begin{matrix} X_{00} & K \\ X_{10} & K_{10\bar0\bar0} \end{matrix} \right\|^2}{K \begin{vmatrix} K & K_{10\bar0\bar0} \\ K_{00\bar1\bar0} & K_{10\bar1\bar0} \end{vmatrix}} + \frac{\left\| \begin{matrix} X_{00} & K & K_{00\bar1\bar0} \\ X_{10} & K_{10\bar0\bar0} & K_{10\bar1\bar0} \\ X_{01} & K_{01\bar0\bar0} & K_{01\bar0\bar1} \end{matrix} \right\|^2}{\begin{vmatrix} K & K_{00\bar1\bar0} \\ K_{10\bar0\bar0} & K_{10\bar1\bar0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & K_{00\bar1\bar0} & K_{00\bar0\bar1} \\ K_{10\bar0\bar0} & K_{10\bar1\bar0} & K_{10\bar0\bar1} \\ K_{01\bar0\bar1} & K_{01\bar1\bar0} & K_{01\bar0\bar1} \end{vmatrix}}$$

Remarquons que les grandeurs $\lambda_{\mathcal{B}}^{X_{00}}(t)$ et $\lambda_{\mathcal{B}}^{X_{00}X_{10}}(t)$ s'obtiennent de la formule (10) en négligeant dans le premier cas les deux derniers termes du membre droit de (10) et dans le second cas en négligeant le dernier terme.

2. Considérons maintenant les conditions auxiliaires :

(11) $\mathbf{A}^{(1)}$ $\qquad f(t) = 0, \qquad \bar u_1 f_{10}(t) + \bar u_2 f_{01}(t) = 1,$

où u_1 et u_2 sont deux constantes complexes arbitraires. A ces conditions correspondent les conditions **A** avec

$$(12)\quad \begin{cases} n=2, \qquad \alpha_{1\nu}=\varphi^{(\nu)}(t), \qquad \alpha_{2\nu}=u_1\varphi^{(\nu)}_{10}(t)+u_2\varphi^{(\nu)}_{10}(t)=1, \\ X_1=0, \qquad X_2=1. \end{cases}$$

Nous n'écrirons pas explicitement la formule pour la fonction minimale dont nous n'aurons pas besoin dans la suite. Pour le minimum que nous désignons par $\lambda^{[2]}_{\mathcal{B}}(t)$ nous obtenons

$$(13)\quad \lambda^{[2]}_{\mathcal{B}}(t)=\frac{K}{\begin{vmatrix} K & \bar{u}_1K_{00\bar{1}0}+\bar{u}_2K_{000\bar{1}} \\ u_1K_{10\bar{0}\bar{0}}+u_2K_{01\bar{0}\bar{0}} & H(u,\bar{u}) \end{vmatrix}}=\frac{1}{K\sum\limits_{m,n=1}^{2}T_{m\bar{n}}u_m\bar{u}_n},$$

$$T_{m\bar{n}}=\frac{\partial^2\log K(t_1,t_2,\bar{t}_1,\bar{t}_2)}{\partial t_m\,\partial\bar{t}_n},$$

$$H(u,\bar{u})\equiv|u_1|^2K_{10\bar{1}\bar{0}}+u_1\bar{u}_2K_{10\bar{0}\bar{1}}+u_2\bar{u}_1K_{01\bar{1}\bar{0}}+|u_2|^2K_{01\bar{0}\bar{1}}.$$

Nous allons encore traiter à l'aide de notre méthode deux autres problèmes qui n'interviennent pas dans nos considérations ultérieures, mais présentent néanmoins un certain intérêt. Il est d'ailleurs possible d'établir une connexion entre ces questions et nos considérations ultérieures.

4. **Problème d'interpolation** [Bergmann, 18; Minjatoff, 2]. — Soit à trouver la fonction minimale $f(z)\in E(\mathcal{B})$ prenant les valeurs $X_q, q=1,2,\ldots,n$, aux points $\{t^{(q)}\}\in\mathcal{B}$. Les conditions supplémentaires sont maintenant $\mathbf{A}^{(1)}: f(t^{(q)})=X_q$, c'est-à-dire **A** avec $\alpha_{q\nu}=\varphi^{(\nu)}(t^{(q)})$, $q=1,2,\ldots,n$.

Posons $\varkappa_{\mu\bar{\rho}}=K_{\mathcal{B}}(t^{(\mu)},\overline{t^{(\rho)}})$,

$$[X]^k=\begin{pmatrix} X_1\\ X_2\\ \cdots\\ X_k\end{pmatrix},\qquad [d]^k=\begin{pmatrix} \varkappa_{1\bar{1}} & \varkappa_{1\bar{2}} & \ldots & \varkappa_{1\bar{k}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varkappa_{k\bar{1}} & \varkappa_{k\bar{2}} & \ldots & \varkappa_{k\bar{k}}\end{pmatrix},$$

$$[K(z)]^k=\begin{pmatrix} K(z,\bar{t}^{(1)})\\ K(z,\bar{t}^{(2)})\\ \cdots\cdots\\ K(z,\bar{t}^{(k)})\end{pmatrix},$$

alors la fonction minimale $f^{(n)}(z)$ et la valeur minimum λ s'écriront

$$(14)\qquad f^{(n)}(z)=\sum_{\nu=1}^{n}C_\nu\psi^{(\nu)}(z),\qquad \lambda=\sum_{\nu=1}^{n}|C_\nu|^2,$$

$$(15)\quad \begin{cases} C_k=(-1)^{k+1}\dfrac{|[X]^k[d]^k_k|}{\sqrt{|[d]^{k-1}||[d]^k|}}, \\[2ex] \psi^{(k)}(z)=(-1)^{k+1}\dfrac{|[K(z)]^k[\bar{d}]^k_k|}{\sqrt{|[d]^{k-1}||[d]^k|}}, \end{cases}$$

$[d]_k^k$ signifie que dans la matrice $[d]^k$ on a supprimé la dernière colonne, et $[\overline{d}]_k^k$ signifie la matrice conjuguée de $[d]_k^k$.

Par exemple, on a

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{X_1}{\sqrt{K(t^{(1)}, \overline{t}^{(1)})}},\\
\psi^{(1)}(z) &= \frac{K(z, \overline{t}^{(1)})}{\sqrt{K(t^{(1)}, \overline{t}^{(1)})}},\\
C_2 &= -\frac{\begin{vmatrix} X_1 & K(t^{(1)}, \overline{t}^{(1)}) \\ X_2 & K(t^{(2)}, \overline{t}^{(1)}) \end{vmatrix}}{\sqrt{K(t^{(1)}, t^{(1)}) \begin{vmatrix} K(t^{(1)}, \overline{t}^{(1)}) & K(t^{(1)}, \overline{t}^{(2)}) \\ K(t^{(2)}, \overline{t}^{(1)}) & K(t^{(2)}, t^{(2)}) \end{vmatrix}}},\\
\psi^{(2)}(z) &= -\frac{\begin{vmatrix} K(z, t^{(1)}) & K(t^{(1)}, \overline{t}^{(1)}) \\ K(z, \overline{t}^{(2)}) & K(t^{(1)}, \overline{t}^{(2)}) \end{vmatrix}}{\sqrt{K(t^{(1)}, \overline{t}^{(1)}) \begin{vmatrix} K(t^{(1)}, \overline{t}^{(1)}) & K(t^{(1)}, \overline{t}^{(2)}) \\ K(t^{(2)}, \overline{t}^{(1)}) & K(t^{(2)}, \overline{t}^{(2)}) \end{vmatrix}}};
\end{aligned}
\right.
$$

$\psi^{(k)}(z)$ est une combinaison linéaire $\sum_{\mu=1}^{k} \alpha_\mu^{(k)} K(z, \overline{t}^{(\mu)})$, où les $\alpha_\mu^{(k)}$ ne dépendent pas de z. Pour $\nu < k$ on a

$$
(17)\quad \begin{aligned}
&J_{\mathcal{B}}[K(z, \overline{t}^{(\nu)}), \psi^{(k)}(z, t^{(\rho)})]\\
&= \frac{1}{\sqrt{|[d]^{k-1}||[d]^k|}} \begin{vmatrix} \varkappa_{1\overline{\nu}} & \varkappa_{1\overline{1}} & \dots & \varkappa_{1\overline{k-1}} \\ \varkappa_{2\overline{\nu}} & \varkappa_{2\overline{1}} & \dots & \varkappa_{2\overline{k-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varkappa_{k1\overline{\nu}} & \varkappa_{k1\overline{1}} & \dots & \varkappa_{k1\overline{k-1}} \end{vmatrix} = 0,
\end{aligned}
$$

car, d'après la définition de la fonction-noyau et la remarque du paragraphe 4, Chapitre II, on a

$$
J_{\mathcal{B}}[K(z, \overline{t}^{(\nu)}), K(z, \overline{t}^{(\rho)})] = \int_{\mathcal{B}} K(z, \overline{t}^{(\nu)}) \overline{K}(\overline{z}, t^{(\rho)})\, d\omega_z = K(t^{(\rho)}, \overline{t}^{(\nu)}) = \varkappa_{\rho\overline{\nu}}.
$$

Il en résulte que pour $\nu < k$, $J_{\mathcal{B}}[\psi^{(\nu)}, \psi^{(k)}] = 0$; *le système* $\{\psi^{(k)}(z)\}$ *est donc orthogonal.* Par un calcul simple, on constate que ce système est aussi normé. *Comme pour* $\mu < \nu$, $\psi^{(\nu)}(t^{(\mu)}) = 0$, (14) *représente simultanément une formule d'interpolation et un développement suivant les fonctions orthogonales* $\psi^{(\nu)}(z)$. *Les* C_ν *sont en même temps les coefficients de Fourier par rapport au système* $\{\psi^{(\nu)}(z)\}$.

Ce résultat et les théorèmes sur les fonctions orthogonales nous permettent d opérer le passage à $n = \infty$. λ étant la valeur minima, *la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un* $f(z) \in E(\mathcal{B})$ *avec* $f(t^{(q)}) = X_q$,

$q = 1, 2, \ldots$ *est évidemment*

$$(18) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} |C_\nu|^2 < \infty.$$

Si cette condition est réalisée, la fonction cherchée sera donné par

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu \psi^{(\nu)}(z).$$

On peut d'ailleurs montrer que la condition nécessaire et suffisante pour l'unicité de la solution du problème d'interpolation envisagé est que $\{\psi^{(\nu)}(z)\}$ soit fermé par rapport aux fonctions de la classe $E(\mathfrak{B})$. [Minjatoff, 2.]

Remarquons que par des méthodes analogues, on peut aussi traiter des problèmes d'interpolation, où les valeurs de la fonction ne sont pas données en des points isolés, mais sur un ensemble dénombrable de surfaces. [Bergmann, 18.]

5. Application à la théorie des fonctions entières ou méromorphes. — Nous allons envisager maintenant un problème de la théorie des fonctions entières qui peut aussi être traité à l'aide des méthodes employées plus haut.

On dit que f^* est une fonction-zéro de f dans un domaine $\mathfrak{B}$ si f^* s'annule au moins dans un point de $\mathfrak{B}$ et si $\frac{f}{f^*}$ est régulière dans $\mathfrak{B}$. Supposons donnée une suite $\{f^{(\nu)}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ de fonctions régulières dans $\mathfrak{B}$, pour lesquelles on a $\int_{\mathfrak{B}} (\log|f^{(\nu)}|)^2 \, d\omega < \infty$. Soit $\mathfrak{B}_m$, $m = 1, 2, \ldots$ une suite de domaines, $\overline{\mathfrak{B}}_m \subset \mathfrak{B}_{m+1}$, et telle que $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) + \ldots$, et supposons que les $f^{(\nu)}$ et $\mathfrak{B}_\nu$ soient telles que $f^{(\nu)}$ s'annule au moins une fois dans $(\mathfrak{B}_\nu - \mathfrak{B}_{\nu-1})$, mais ne s'annule pas dans $\mathfrak{B}_{\nu-1}$. Le problème est de savoir s'il existe une fonction f avec $\int_{\mathfrak{B}} (\log|f|)^2 \, d\omega < \infty$, pour laquelle toutes les fonctions $f^{(\nu)}$ soient des fonctions-zéro dans $\mathfrak{B}$ [1]. A l'aide de la théorie des fonc-

---

[1] Si l'on n'exige pas que $\int_{\mathfrak{B}} (\log|f|)^2 \, d\omega < \infty$, on voit facilement qu'on peut trouver pour toute suite $f^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ une telle fonction f dès que $\mathfrak{B}$ admet la propriété suivante : Il existe une suite de domaines

$$\mathfrak{B}_m, \qquad \overline{\mathfrak{B}}_m \subset \mathfrak{B}_{m+1}, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) + \ldots,$$

tels que pour chaque $\mathfrak{B}_m$ il existe un système de fonctions orthogonales

$$F^{(\nu)}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

biharmoniques dans $\mathfrak{B}$ qui est fermé pour la classe des fonctions biharmoniques tions orthogonales, on peut montrer qu'il existe pour chaque domaine $\mathcal{B}_m$ (ou $\mathcal{B}$) une fonction $\chi^{(\nu)}_{\mathcal{B}_m}(z)$ [ou $\chi^{(\nu)}_{\mathcal{B}}(z)$] équivalente (¹) à $f^{(\nu)}(z)$ dans $\mathcal{B}_m$ [ou $\mathcal{B}$] ayant la propriété suivante : chaque fonction $g(z)$ régulière dans $\mathcal{B}$, ne s'annulant pas dans $\mathcal{B}_m$ [ou $\mathcal{B}$] et telle que $\int_{\mathcal{B}_m}(\log|g|)^2\,d\omega < \infty$ $\left[\text{ou } \int_{\mathcal{B}}(\log|g|)^2\,d\omega < \infty\right]$, satisfait à

$$\int_{\mathcal{B}_m}\log\left|\chi^{(\nu)}_{\mathcal{B}_m}\right|.\log|g|\,d\omega = 0 \qquad \left[\text{ou } \int_{\mathcal{B}}\log\left|\chi^{(\nu)}_{\mathcal{B}}\right|.\log|g|\,d\omega = 0\right]$$

Nous dirons que $\chi^{(\nu)}_{\mathcal{B}_m}$ [ou $\chi^{(\nu)}_{\mathcal{B}}$] est une FONCTION-ZÉRO ORTHOGONALISÉE PAR RAPPORT A $\mathcal{B}_m$ [ou $\mathcal{B}$] (²).

On démontre que $\chi^{(\nu)}_{\mathcal{B}_m}(z)$ a la propriété extrémale suivante : Si $h(z)$ est équivalent à $\chi^{(\nu)}_{\mathcal{B}_m}(z)$ dans $\mathcal{B}_m$, alors

$$\int_{\mathcal{B}_m}\left(\log\left|\chi^{(\nu)}_{\mathcal{B}_m}\right|\right)^2 d\omega \leqq \int_{\mathcal{B}_m}(\log|h|)^2\,d\omega. \tag{19}$$

On a un résultat analogue pour $\chi^{(\nu)}_{\mathcal{B}}(z)$. On a le théorème suivant que nous communiquons ici sans démonstration.

THÉORÈME VII. — *Pour qu'il existe $f(z)$ régulière dans $\mathcal{B}$ avec $\int_{\mathcal{B}}(\log|f|)^2\,d\omega < \infty$ possédant les fonctions $f^{(\nu)}(z)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ comme fonctions-zéro, il est nécessaire que*

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathcal{B}_m}\left[\log\left|\prod_{\nu=1}^{m}\chi^{(\nu)}_{\mathcal{B}_m}\right|\right]^2 d\omega < \infty \tag{20}$$

et suffisant que

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathcal{B}_m}\left[\log\left|\prod_{\nu=1}^{m}\chi^{(\nu)}_{\mathcal{B}}\right|\right]^2 d\omega < \infty \quad \text{[Bergmann, 16].} \tag{21}$$

Remarquons que la seule différence entre la condition nécessaire

---

dans $\overline{\mathcal{B}}_m$. On appelle fonction biharmonique dans un domaine $\mathfrak{G}$ la partie réelle d'une fonction $g(z_1, z_2)$ analytique dans $\mathfrak{G}$.

(¹) Deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ régulières dans $\mathfrak{G}$ sont dites équivalentes dans $\mathfrak{G}$ (par rapport à la division) si $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ et $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ sont régulières dans $\mathfrak{G}$.

(²) Dans le travail [Bergmann, 16] on emploie le terme « normée » au lieu de « orthogonalisée ».

et la condition suffisante est que $\chi^{(\nu)}(z)$ sont orthogonalisées dans un cas par rapport à $\mathfrak{B}$, dans l'autre cas par rapport à $\mathfrak{B}_m$.

L'introduction des fonctions-zéro orthogonalisées permet de plus, de donner des limitations pour des fonctions f méromorphes dans $\mathfrak{B}$ avec $\int_{\mathfrak{B}}(\log|f|)^2 d\omega = \mathrm{F} < \infty$ qui possèdent des fonctions-zéro et des fonctions-pôle ([3]) données, limitations ne dépendant que de F, des fonctions-zéro et des fonctions-pôle. Rappelons qu'une fonction f soit dite méromorphe dans $\mathfrak{B}$, si dans un voisinage de chaque point de $\mathfrak{B}$ on peut représenter f sous forme d'un quotient de deux fonctions régulières dans ce voisinage.

Deux systèmes des fonctions,

$$f^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, l) \qquad \text{et} \qquad f^{(\nu)} \quad (\nu = l+1, \ldots, r)$$

sont appelés système complet de fonctions-zéro et de fonctions-pôle de f dans $\mathfrak{B}$ si $f \dfrac{\prod_{\nu=l+1}^{r} f^{(\nu)}}{\prod_{\nu=1}^{l} f^{(\nu)}}$ est une fonction régulière dans $\mathfrak{B}$ et n'y s'annulant pas.

Théorème VIII (que nous indiquons sans démonstration). — *Si $f(z)$ est une fonction méromorphe dans $\mathfrak{B}$ avec*

$$\int_{\mathfrak{B}}(\log|f|)^2 d\omega = \mathrm{F} < \infty$$

possédant un système complet des fonctions-zéro et fonctions-pôle, données par les fonctions orthogonalisées $\chi_{\mathfrak{B}}^{(\nu)}(z)$, $\nu = 1, 2, \ldots, l$ et $\nu = (l+1), \ldots, r$, alors on a pour $f(z)$ dans $\mathfrak{B}$ la limitation

$$(22) \qquad \left[\frac{1}{\mathrm{H}(z)}\right]^{\sqrt{\mathrm{F}-\mathbf{S}}} \mathrm{S}(z) \leqq |f(z)| \leqq [\mathrm{H}(z)]^{\sqrt{\mathrm{F}-\mathbf{S}}} \mathrm{S}(z),$$

où $\mathrm{H}(z)$ est une fonction ne dépendant que de $\mathfrak{B}$ et

$$\mathbf{S} = \int_{\mathfrak{B}}(\log|\mathrm{S}|)^2 d\omega, \qquad \mathrm{S}(z) = \frac{\prod_{\nu=1}^{l} \chi_{\mathfrak{B}}^{(\nu)}(z)}{\prod_{\nu=l+1}^{r} \chi_{\mathfrak{B}}^{(\nu)}(z)}$$

[Bergmann, 14].

IV. — La métrique invariante par rapport aux transformations pseudo-conformes.

1. Introduction d'une métrique invariante. — Dans ce chapitre, nous allons définir à l'aide de la fonction-noyau une métrique invariante par rapport à toute représentation pseudo-conforme. A cet effet démontrons d'abord le

Théorème IX. — *Dans une représentation pseudo-conforme*

$$(1) \qquad z_k^* = g_k(z_1, z_2), \qquad [z_k = h_k(z_1^*, z_2^*)] \qquad (k = 1, 2)$$

d'un domaine $\mathcal{B}$ sur un domaine $\mathcal{B}^*$, les fonctions-noyau se transforment de la manière suivante :

$$(2) \qquad K_{\mathcal{B}^*}(z_1^*, z_2^*; \bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*) = K_{\mathcal{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)\left|\frac{D(z_1, z_2)}{D(z_1^*, z_2^*)}\right|^2.$$

[Bergmann, 11.]

Démonstration. — La représentation étant biunivoque, les déterminants fonctionnels

$$C(z_1, z_2) = \frac{D(z_1^*, z_2^*)}{D(z_1, z_2)} \ (^1), \qquad E(z_1^*, z_2^*) = \frac{D(z_1, z_2)}{D(z_1^*, z_2^*)}$$

sont différents de o et ∞ à l'intérieur de $\mathcal{B}$ resp. $\mathcal{B}^*$.

Par la correspondance

$$(3) \qquad f(z_1, z_2) \to f^*(z_1^*, z_2^*) = f[h_1(z_1^*, z_2^*), h_2(z_1^*, z_2^*)]\, E(z_1^*, z_2^*),$$

la classe $E(\mathcal{B})$ de fonctions analytiques de carré sommable dans $\mathcal{B}$ devient $E(\mathcal{B}^*)$. De plus on a $J_{\mathcal{B}}(f_1, f_2) = J_{\mathcal{B}^*}(f_1^*, f_2^*)$.

En particulier, un système des fonctions orthogonales et normées $\varphi^{(\nu)}(z)$, fermé pour $E(\mathcal{B})$, se transforme en un système des fonctions et normées dans $\mathcal{B}^*$

$$\varphi^{*(\nu)}(z^*), \qquad \varphi^{*(\nu)}(z^*) = \varphi^{(\nu)}[h_1(z_1^*, z_2^*), h_2(z_1^*, z_2^*)]\, E(z_1^*, z_2^*)$$

qui est fermé pour $E(\mathcal{B}^*)$. D'après le théorème IV, le noyau du système fermé pour $E(\mathcal{B}^*)$ est égal à la fonction-noyau $K_{\mathcal{B}^*}(z^*, \bar{z}^*)$, nous obtenons la relation (2).

(1) On a
$$\frac{D(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)}{D(x_1, y_1, x_2, y_2)} = \left|\frac{D(z_1^*, z_2^*)}{D(z_1, z_2)}\right|^2.$$

En vertu des équations différentielles de Cauchy-Riemann [*cf.* (I. 3) (1)], on a

$$(4)\qquad \frac{\partial \log E(z_1^*, z_2^*)}{\partial \bar{z}_k^*} = \frac{\partial \log \overline{E(z_1^*, z_2^*)}}{\partial z_k^*} = 0.$$

Il s'ensuit que les grandeurs

$$(5)\qquad T_{m\bar{n}}^{(\mathcal{B})} = (z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{\partial^2 \log K_{\mathcal{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\partial z_m \, \partial \bar{z}_n}$$

se transforment par une représentation pseudo-conforme comme les composantes d'un tenseur contrevariant, hermitique, du second ordre. En effet, d'après (2), (4) et (I. 3)

$$T_{m\bar{n}}^{(\mathcal{B}^*)} = \frac{\partial^2 \log K_{\mathcal{B}^*}}{\partial z_m^* \, \partial \bar{z}_n^*} = \sum_{p,q=1}^{2} \frac{\partial^2 \log K_{\mathcal{B}}}{\partial z_p \, \partial \bar{z}_q} \frac{\partial z_p}{\partial z_m^*} \frac{\partial \bar{z}_q}{\partial \bar{z}_n^*} = \sum_{p,q=1} T_{p\bar{q}}^{(\mathcal{B})} \frac{\partial z_p}{\partial z_m^*} \frac{\partial z_q}{\partial \bar{z}_n^*}.$$

D'autre part on a $T_{mn} = \overline{T}_{n\bar{m}}$, $K_{\mathcal{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ étant hermitique par rapport à z_k et $\bar{z}_k$, c'est-à-dire : $\overline{K_{\mathcal{B}}(z, \bar{t})} = K_{\mathcal{B}}(t, \bar{z})$.

Théorème X. — *La forme différentielle hermitique*

$$(6)\qquad ds_{\mathcal{B}}^2(z_1, z_2) = J(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \sum_{m,n=1}^{2} T_{m\bar{n}}^{(\mathcal{B})}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)\, dz_m \, d\bar{z}_n,$$

où J *est une grandeur quelconque positive invariante par rapport aux transformations pseudo-conformes* (2), *définit une métrique* (3)

(1) (I. 3) = Chapitre I, formule (3).

(2) Nous introduisons un facteur J indéfini parce que, pour diverses applications, il nous sera utile de pouvoir le changer. Le plus souvent nous prendrons J = 1 ou

$$J = \sqrt{\frac{K}{(T_{1\bar{1}} T_{2\bar{2}} - |T_{1\bar{2}}|)}}.$$

(3) La géométrie donnée par la forme différentielle (6) est un cas particulier d'une géométrie riemannienne donnée par une forme différentielle

$$ds^2 = \Sigma g_{\alpha\beta} \, dx_\alpha \, dx_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}$$

de quatre variables $dx_\alpha = dx_\alpha^{(1)} + i dx_\alpha^{(2)}$, $dx_{\bar{\alpha}} = d\bar{x}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $dx_\alpha^{(k)}$, $\alpha = 1, 2$, $k = 1, 2$ étant des variables *réelles*, et $g_{\alpha\beta} = \overline{g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}$, $g_{\alpha\bar{\beta}} = \overline{g_{\bar{\alpha}\beta}}$, $g_{\alpha\alpha} = g_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} = 0$ etc. (On peut chaque forme différentielle de quatre variables *réelles* $dx_\alpha^{(k)}$, $\alpha = 1, 2$, $k = 1, 2$ écrire sous la forme indiquée.) On obtient dans notre cas pour les $g_{\alpha\beta}$ les valeurs :

$$g_{\alpha\beta} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0, \qquad g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{2} T_{\alpha\bar{\beta}}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}.$$

Mais dans notre cas il est préférable d'opérer avec *deux* variables complexes.

définie positive invariante par rapport aux transformations pseudo-conformes [Bergmann, 11].

Démonstration. — Comme les $T^{(\mathcal{B})}_{m\bar{n}}$ se comportent comme les composantes contrevariantes d'un tenseur du second ordre, la forme $ds^2_{\mathcal{B}}(z_1, z_2)$ est invariante. D'autre part, en vertu de (III. 13), le minimum de $\int_{\mathcal{B}} |h|^2 d\omega$ avec les conditions supplémentaires (III. 12) est

$$\lambda^{[0]}_{\mathcal{B}}(t) = \frac{1}{\left[K_{\mathcal{B}} \sum_{m,n=1}^{2} T^{(\mathcal{B})}_{m\bar{n}} u_m \bar{u}_n\right]}.$$

Il en résulte, J étant supposé > 0, que (6) est une forme définie positive.

Il en résulte en particulier que le déterminant de la forme (6)

$$D = J^2[T_{1\bar{1}}T_{2\bar{2}} - |T_{1\bar{2}}|^2] = \frac{J^3}{K^3} \begin{vmatrix} K & K_{001\bar{0}} & K_{000\bar{0}} \\ K_{100\bar{0}} & K_{101\bar{0}} & K_{100\bar{0}} \\ K_{010\bar{0}} & K_{011\bar{0}} & K_{010\bar{1}} \end{vmatrix} \tag{7}$$

est positif, ce qu'on peut d'ailleurs aussi démontrer directement. (*cf.* Bergmann 11, p. 5.)

2. Quelques propriétés locales de la métrique G. — La géométrie invariante définie par (6) avec $J = 1$ sera brièvement appelée **G** (¹). La translation parallèle dans **G** est caractérisée de la façon suivante : les symboles de Christoffel sont donnés par

$$\begin{bmatrix} 1 \\ kl \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\left[T_{2\bar{2}}\frac{\partial T_{l\bar{1}}}{\partial z_k} - T_{2\bar{1}}\frac{\partial T_{l\bar{2}}}{\partial z_k}\right], \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ kl \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\left[T_{1\bar{1}}\frac{\partial T_{l\bar{2}}}{\partial z_k} - T_{1\bar{2}}\frac{\partial T_{l\bar{1}}}{\partial z_k}\right]. \tag{8}$$

Les autres sont soit conjugués de ceux-ci, soit nuls. Pour les composantes du tenseur de la courbure on obtient

$$R^{\nu}_{\cdot\lambda\mu\bar{\omega}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\omega}\begin{bmatrix} \nu \\ \mu\lambda \end{bmatrix}. \tag{9}$$

(¹) En ce qui concerne la géométrie (6) où $J \neq 1$; *cf.* le travail (Bergmann, 12).

Les autres composantes de ce tenseur sont soit conjuguées de celles-ci, soit nulles.

Mentionnons encore le tenseur hermitique (de Ricci)

$$R_{l\bar{k}} = \sum_{\alpha=1}^{2} R^{\alpha}_{.\alpha l\bar{k}} = \sum_{\alpha=1}^{2} R^{\alpha}_{.l\alpha\bar{k}} = -\frac{\partial^2 \log D}{\partial z_l \, \partial \bar{z}_k}. \tag{10}$$

Ce tenseur est lié à l'invariant absolu

$$J = \frac{K}{D} = \frac{K}{T_{1\bar{1}}T_{2\bar{2}} - |T_{1\bar{2}}|^2} \tag{11}$$

par la relation qu'on obtient aisément

$$R_{l\bar{k}} + T_{l\bar{k}} = \frac{\partial^2 \log J}{\partial z_l \, \partial \bar{z}_k}. \tag{12}$$

Pour les composantes de la torsion on a

$$S_{mp}^{\cdot\cdot n} = 0. \tag{13}$$

Si l'on prend la formule usuelle pour la courbure riemannienne d'une métrique donnée par $\Sigma g_{\iota k} dx_\iota dx_k$ dans l'élément plan défini par les vecteurs $\{u_\alpha\}$, $\{v_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}$, nous obtenons

$$\frac{\Sigma R_{n\iota jk} u_n v_\iota u_j v_k}{\Sigma (g_{nj} g_{\iota k} - g_{nk} g_{\iota j}) u_n v_\iota u_j v_k}.$$

(La sommation étant étendue aux indices 1, 2; $\bar{1}$, $\bar{2}$.) Si $\{v_\alpha\}$ appartient au même plan analytique que $\{u_\alpha\}$ (c'est-à-dire si $v_\alpha = a u_\alpha$, $v_{\bar{\alpha}} = \bar{a} u_{\bar{\alpha}}$), nous obtenons une grandeur qui est désignée par COURBURE DANS LA DIRECTION ANALYTIQUE $\{u_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$

$$R = \frac{\Sigma R_{\bar{n}l j\bar{k}} \bar{u}_n u_l u_j \bar{u}_k}{\Sigma T_{\bar{n}l} T_{j\bar{k}} \bar{u}_n u_l u_j \bar{u}_k}, \qquad R_{\bar{\lambda}\alpha\mu\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 T_{\mu\bar{\lambda}}}{\partial z_\alpha \, \partial \bar{z}_\beta} + \sum_{\rho, \varkappa} T^{\varkappa\bar{\rho}} \frac{\partial T_{\mu\rho}}{\partial z_\alpha} \frac{\partial T_{\varkappa\bar{\lambda}}}{\partial \bar{z}_\beta}. \tag{14}$$

La méthode des problèmes de minimum conduit au résultat suivant :

THÉORÈME XI. — *L'invariant* **J** *de la géométrie* **G** *est toujours positif et la courbure* **R** *dans n'importe quelle direction analytique est* < 2 [Bergmann, 11; Fuchs, 5].

La démonstration de la première affirmation résulte de l'égalité

$$J = \frac{K}{D} = \frac{\lambda^{01}(t)\lambda^{001}(t)}{[\lambda^{1}(t)]^{3}} \quad [1]$$

comme on le vérifie en comparant les formules (III. 10) et (7).

Si l'on prend comme condition $\mathbf{A}^{(1)}$ dans le problème de variationnel envisagé au § 2 du chapitre III

$$(15) \quad f(t) = f_{10}(t) = f_{01}(t) = 0, \qquad u_1^2 f_{20}(t) + 2u_1u_2 f_{11}(t) + u_2^2 f_{02}(t) = 1,$$

c'est-à-dire si l'on pose dans **A**

$$\alpha_{1\nu} = \varphi^{(\nu)}(t), \qquad \alpha_{2\nu} = \varphi_{01}^{(\nu)}(t), \qquad \alpha_{3\nu} = \varphi_{01}^{(\nu)}(t),$$
$$\alpha_{4\nu} = u_1^2 \varphi_{20}^{(\nu)}(t) + 2u_1u_2\varphi_{11}^{(\nu)}(t) + u_2^2\varphi_{02}^{(\nu)}(t);$$
$$X_1 = X_2 = X_3 = 0, \qquad X_4 = 1, \qquad f_{mn} = \frac{\partial^{m+n} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^m \, \partial t_2^n},$$

on obtient pour le minimum

$$(16) \qquad \lambda^{[3]} = \frac{1}{K(2 - \mathbf{R})\Sigma T_{\alpha\beta} u_\alpha \overline{u}_\beta},$$

et il en résulte la seconde affirmation.

3. **L'espace primitif.** — Ainsi nous avons appris à connaître quelques propriétés locales de la géométrie **G**. Il se pose maintenant le problème d'examiner globalement la géométrie considérée et d'en déduire les conséquences pour la théorie des transformations pseudoconformes.

L'espace riemannien qui est défini par la métrique (6) dans une classe de domaines équivalents (*cf.* p. 3) sera désigné comme l'ESPACE PRIMITIF DE LA CLASSE envisagée.

Dans le cas des transformations conformes et de domaines simplement connexes, ayant au moins deux points frontières, la fonction minimale $M^1(z, t)$ est la dérivée de la fonction (normée d'une certaine

---

[1] La signification de $\lambda^1(t)$, $\lambda^{01}(t)$, $\lambda^{001}(t)$ éclaire par exemple :

$$\lambda^{001}(t) = \lambda_{\mathfrak{B}}^{X_{00}X_{10}X_{01}}(t) \ [\text{cf. (III. 10)}] \quad \text{pour} \quad X_{00} = 0,\ X_{10} = 0,\ X_{01} = 1.$$

façon) qui représente le domaine sur le cercle et qui transforme le point $\{t\}$ dans le centre du cercle. La forme différentielle

$$ds^2_{\mathfrak{g}^2}(z) = \frac{\partial^2 \log K_{\mathfrak{g}^2}(z, \bar{z})}{\partial z\, \partial \bar{z}} \,|\, dz\,|^2$$

définit la métrique hyperbolique du cercle dû à Poincaré.

Dans le cas de domaines doublement connexes, elle représente une métrique dont la courbure est négative mais non constante.

Comme on peut représenter tout domaine doublement connexe sur une couronne circulaire $a < |z| < 1$, il suffit d'envisager une telle couronne. La courbure $\varkappa(z)$ ne dépend évidemment que de $|z|$ et ses valeurs sont distribuées comme suit : $\varkappa(z)$ décroît de -2 jusqu'à son minimum pour $|z|$ variant de a jusqu'à $\sqrt{a}$; pour $|z|$ variant de $\sqrt{a}$ jusqu'à 1, $\varkappa(z)$ croît jusqu'à -2 [Zarankiewicz, **1**, **2**; Kufareff, **1**].

L'introduction de l'espace primitif permet de considérer le problème des transformations pseudo-conformes d'une façon nouvelle : chaque domaine $\mathfrak{B}$ d'une classe de domaines équivalents peut être obtenu en introduisant les coordonnées z_1, z_2 correspondant à $\mathfrak{B}$ dans l'espace primitif. La représentation de $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{B}^*$ signifie dans cette conception que nous passons dans l'espace primitif des coordonnées z_1, z_2 à des coordonnées nouvelles z_1^*, z_2^*. Cette façon d'envisager le problème permet maintenant d'utiliser les résultats de la géométrie différentielle dans la théorie des représentations pseudo-conformes. Il en résulte en particulier l'existence de certaines grandeurs : invariants absolus (scalaires), invariants intégraux (densités), tenseurs, etc., qui se transforment d'une façon bien déterminée pendant le passage d'un domaine de la classe à un autre.

Remarquons de plus que la théorie des fonctions orthogonales nous met en mesure de calculer effectivement pour certains domaines la fonction noyau et par conséquent toutes les grandeurs que nous avons mentionnées.

Indiquons enfin qu'en connexion avec certaines considérations (par exemple celles concernant les domaines minimaux, *cf.* chap. II, § 5 du fascicule suivant) l'étude des transformations pseudo-conformes

$$\mathbf{W} = \{ w_k(z_1, z_2) \}, \qquad k = 1, 2, \qquad \{ z_1, z_2 \} \in \mathfrak{B}$$

pour lesquelles on a en chaque point de $\mathcal{B}$

$$\left| \frac{D(w_1, w_2)}{D(z_1, z^2)} \right| = 1 \tag{17}$$

présente quelque intérêt.

(Les transformations **W** laissent le volume invariant.)

L'introduction de la fonction noyau permet aussi dans ce cas d'établir des métriques invariantes par rapport aux transformations **W** et différentes de **G**, par exemple des métriques qui sont respectivement données par

$$ds_1 = |dK|\,(^1) \quad \text{et} \quad ds_2^2 = \sum_{m,n=1}^{2} \frac{\partial^2 K}{\partial z_m \partial \bar{z}_n} dz_m d\bar{z}_n. \tag{18}$$

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Almer (B.). — 1. Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, t. 17, 1922-1923, p. 1).

Aravijskaja (E.). — 1. Ueber ein Verfahren zur effektiven Herstellung von vollständigen Orthogonalfunktionensystemen zweier komplexer Veränderlicher (*Recueil Math.*, nouv. sér., 2 (44), 1937, p. 665-672).

Aronszajn (N.). — 1. Sur les invariants des transformations dans le domaine de n variables complexes (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 197, 1933, p. 1579-1581).

2. Sur les invariants des transformations dans le domaine de n variables complexes (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 198, 1934, p. 143-146).

Behnke (H.). — 1. Ueber analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen. II : Natürliche Grenzen (*Abh. a. d. math. Seminar d. Hamburgischen Univ.*, t. 5, 1927, p. 290-312).

2. Ueber analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen. III : Abbildungen der Kreiskörper (*Abh. a. d. math. Seminar d. Hamburgischen Univ.*, t. 7, 1930, p. 329-341).

Behnke (H.) et Thullen (P.). — (*Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 3, cahier 3, 1934).

Bergmann (S.). — 1. Ueber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der

(1) Notons qu'il existe dans cette métrique des courbes isotropes, c'est-à dire des courbes dont la longueur est égale à 0.

Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen (*Math. Ann.*, t. 86, 1922, p. 237-271). (Thèse, Berlin, 1921.)

2. Ueber eine Darstellung der Abbildungsfunktion eines Sternbereiches (*Math. Zeit.*, t. 29, 1929, p. 481-486).

3. Zwei Sätze über Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen (*Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 399-410).

4. Ueber Hermitesche unendliche Formen, die zu einem Bereich gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen zweier komplexen Veränderlichen (*Berichte Berliner math. Gesellschaft*, t. 26, 1927, p. 178-184, et *Math. Zeit.*, t. 29, 1929, p. 640-677).

5. Ueber die Existenz von Repräsentantenbereichen (*Math. Ann.*, t. 102, 1929, p. 430-446).

6. Ueber die schlichten Bereiche in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen (*Journ. reine angew. Math.*, t. 162, 1930, p. 262-270).

7. Ueber die ausgezeichneten Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen (*Math. Ann.*, t. 104, 1931, p. 611-636).

8. Ueber den Wertvorrat einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen (*Math. Zeit.*, t. 36, 1932, p. 171-183).

9. Ueber die Nullstellen einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen (*Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.*, t. 35, 1932, p. 1188-1194).

10. Eine Bemerkung über schlichte Minimalabbildungen (*Berichte Berliner math. Gesellschaft*, t. 30, 1932, p. 11-13).

11. Ueber die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande (*Journ. reine angew. Math.*, t. 169, 1933, p. 1-42, et t. 172, 1934, p. 89-128).

12. Ueber eine in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen auftretende unitäre Geometrie (*Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.*, t. 36, 1933, p. 307-313).

13. Ueber die Veranschaulichung der Kreiskörper und Bereiche mit ausgezeichneter Randfläche (*Jahresber. dtsch. Math. Ver.*, t. 42, 1933, p. 238-252).

14. Zwei Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemma bei den Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen (*Math. Ann.*, t. 109, 1934, p. 324-348).

15. Sur quelques propriétés des transformations par un couple des fonctions de deux variables complexes (*Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, 6e sér., t. 19, 1934, p. 474-478).

16. Sur les fonctions entières et méromorphes de deux variables complexes. I : (*Compositio Math.*, t. 3, 1936, p. 136-173).

17. Zur Theorie von pseudokonformen Abbildungen (*Recueil Math.*, nouv. sér., t. 1 (43), 1936, p. 79-96).

18. Zur Theorie der linearen Funktional- und Integralgleichungen im komplexen Gebiet (*Bull. Inst. math. et méc. Univers. Tomsk*, t. 1, 1935-1937, p. 242-257).

19. Ueber einige Abschätzungen bei pseudokonformen Abbildungen (*C. R. Acad. Sc. d. l'U. R. S. S.*, t. 16, 1937, p. 11-14).

20. Ueber eine Abschätzung von meromorphen Funktionen zweier komplexer

Veränderlicher in Bereichen mit ausgezeichneter Randfläche (*Trav. d. l'Inst. math. Tbilissi*, t. 1, 1937, p. 187-204).

21. Ueber die Kernfunktion gewisser Reinhardtscher Kreiskörper (*Revue math. de l'Union Interbalkanique*, t. 2, 1939. p. 41-43).

Bochner (S.). — 1. Ueber orthogonale Systeme analytischer Funktionen (*Math. Zeit.*, t. 14, 1922, p. 180-207). (Thèse, Berlin, 1921.)

Carathéodory (C.). — 1. Ueber das Schwarzsche Lemma bei analytischen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen (*Math. Ann.*, t. 97, 1927, p. 76-98).

2. Ueber Geometrie der analytischen Abbildungen, die durch analytische Funktionen vermittelt werden (*Abh. a. d. math. Seminar d. Hamburgischen Univ.*, t. 6, 1928, p. 96-145).

Carleman (F.). — 1. Ueber die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebener Potenzen (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, t. 17, 1923, p. 1).

Cartan (E.). — 1. Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes (*Abh. a. d. math. Seminar d. Hamburgischen Univ.*, t. 11, 1935-1936. p. 116-162).

Cartan (H.). — 1. Les fonctions de deux variables complexes et les domaines cerclés de Carathéodory (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 190, 1930, p. 354-356).

2. Les transformations analytiques des domaines cerclés les uns dans les autres (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 190, 1930, p. 718-720).

3. Sur les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique (*Journ. Math. pures et appl.*, 9^{e} sér., t. 10 (96), 1931, p. 1-114).

Dantzig (D. V.) et J. A. Schouten. — 1. Ueber unitare Geometrie (*Math. Ann.*, t. 103, 1930, p. 319-346).

2. Ueber unitäre Geometrie konstanter Krümmung (*Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.*, t. 34, 1931, p. 1293-1304).

Fuchs (B.). — 1. Limitations pour la variation d'un angle dans le cas d'une transformation pseudo-conforme dans l'espace de deux variables complexes (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 200, 1935, p. 718 720).

2. Ueber vollständige geodätische analytische Mannigfaltigkeiten einer vierdimensionalen Riemannschen Geometrie (*Bull. Inst. math. et méc. Univ. de Tomsk*, t. 1, 1935-1937, p. 169-174).

3. Ueber einige Eigenschaften der pseudokonformen Abbildungen (*Recueil Math.*, nouv. sér., t. 1 (43), 1936, p. 569-574).

4. Ueber die Gruppe der pseudokonformen Abbildungen eines Bereiches in sich (*Bull. Inst. math. et méc. Univ. de Tomsk*, t. 1, 1935-1937, p. 281-285).

5. Ueber geodätische Mannigfaltigkeiten einer bei pseudokonformen Abbildungen invarianten Riemannschen Geometrie (*Recueil Math.*, nouv. sér., t. 2 (44), 1937, p. 567-594).

6. Ueber die Gruppe der analytischen Bewegungen der bei pseudokonformen Abbildungen invarianten Geometrie (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, t. 16, 1937, p. 143-146).

7. Ueber die lokalisometrischen analytischen Abbildungen (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, nouv. sér., t. **20**, 1938, p. 3-4).

8. Zur Theorie der schlichten pseudo konformen Abbildungen (*Bull. Inst. math. et méc. Univ. de Tomsk*, t. **2**, 1938, p. 147 155).

9. Ueber eine Eigenschaft der bei pseudokonformen Abbildungen invarianten Metrik (*Recueil Math.*, nouv. sér., t. **5** (47), 1939, p. 497-504).

10. Sur les représentations pseudo-conformes d'un domaine sur lui-même avec un point fixe sur la frontière (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, t. **23**, 1939, p. 865-867).

HAMMERSTEIN (A.). — **1**. Ueber die Approximation von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher durch Polynome (*S.-B. d. Preuss. Akad. d. W.*, 1933, p. 259-266).

HARTOGS (F.). — **1**. Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten (*Math. Ann.*, t. **62**, 1906, p. 1-88).

KUFAREFF (P.). — **1**. Ueber das zweifachzusammenhängende Minimalgebiet (*Bull. Inst. math. et méc. Univ. de Tomsk*, t. **1**, 1935 1937, p. 228-236).

KWIETNIEWSKI (S.). — **1**. Ueber Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind (Thèse, Zürich, 1902 et *Wiadomości matematyczne*, t. **10**, 1906, p. 129-167).

JACKSON (D.). — **1**. Orthogonal polynomials in two complex variables (*Annals of Mathematics*, t. **39**, 1938, p. 262-268).

LEVI (E. E.). — **1**. Studii sui punti singolari essenziali dell funzioni analitiche di due o più variabili complesse (*Ann. di mat. pura ed appl.*, 3[e] sér., t. **17**, 1910, p. 61-103).

2. Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitico di due variabili complesse (*Ann. di mat. pura et appl.*, 3[e] sér., t. **18**, 1911, p. 69-79).

MARTIN (W. T.). — **1**. Minimum problem in the theory of analytic functions of several variables (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **48**, 1940, p. 350-358).

MINIATOFF (A.). — **1**. Sur une propriété des transformations dans l'espace de deux variables complexes (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **200**, 1935, p. 711-713).

2. Zum Interpolationsproblem bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, nouv. sér., t. **4**, 1935, p. 243-245).

MITROCHIN (I.). — **1**. Ueber die Veränderung der Krümmung von Hyperflächen bei pseudokonformen Abbildungen (*Bull. Inst. math. et méc. Univ. de Tomsk*, t. **1**, 1935-1937, p. 267-280).

REINHARDT (K.). — **1**. Ueber Abbildungen durch analytische Funktionen zweier Veränderlicher (*Math. Ann.*, t. **83**, 1921, p. 211-255).

SCHIFFER (M.). — **1**. Sur les domaines minima dans la théorie des transformations pseudo-conformes (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **207**, 1938, p. 112-115).

SCHOUTEN (J. A.). *Voir* DANTZIG et SCHOUTEN.

SCHOUTEN (J. A.) et STRUIK (D. J.). — **1**. Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Vol. **2**, 1938.

STRUIK (D. J.). *Voir* SCHOUTEN et STRUIK.

STUDY (E.). — 1. Sugli enti analitici (*Rendic. del Circolo mat. di Palermo*, t. 21, 1906, p. 345-359).

THULLEN (P.). — *Voir* BEHNKE et THULLEN.

WACHS (S.). — 1. Sur quelques propriétés des transformations pseudo-conformes avec un point frontière invariant (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 206, 1938, p. 1352-1354).

2. Sur quelques propriétés de transformations pseudo-conformes avec un point invariant (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 68, 1940, p. 177-198).

3. Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 208, 1939, p. 1385-1387).

4. Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 208, 1939, p. 1871-1873).

5. Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant (*Jour. Math. pures et appl.*, 9e sér., t. 22, 1943, p. 25-54).

WELKE (H.). — 1. Ueber die analytischen Abbildungen von Kreiskörpern und Hartogsschen Bereichen (*Math. Ann.*, t. 103, 1930, p. 437-449). (Thèse, Münster, 1930.)

2. *Ergebnisse der Mathem. u. ihres Grenzgebiete*, vol. 3, cahier 3 (H. BEHNKE et P. THULLEN, *Théorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher*, p. 106-107).

ZARANKIEWICZ (K.). — 1. Sur la représentation conforme d'un domaine doublement connexe sur un anneau circulaire (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 198, 1934, p. 1347-1349).

2. Ueber ein numerisches Verfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete (*Zeit. f. ang. Math. u. Mech.*, t. 14, 1934, p. 97-104).

TABLE DES MATIÈRES.