Mémorial des sciences mathématiques

Bertrand Gambier

Cycles paratactiques

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 104 (1944)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1944__104__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur a la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CIV

Cycles paratactiques

PAR M. BERTRAND GAMBIER

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins. 55

1944

CYCLES PARATACTIQUES

Par M. B. GAMBIER.

INTRODUCTION.

La théorie des cercles a fait, depuis une vingtaine d'années, des progres surprenants. Nombre de chercheurs isolés ont obtenu des résultats, déjà connus ou nouveaux, par des méthodes, souvent trop ingénieuses ou dépourvues de plan d'ensemble. Je crois donc rendre service à l'ensemble des chercheurs en rédigeant un exposé complet relatif à la parataxie, qui ne soit pas une simple énumération de résultats, mais une théorie bien ordonnée, accessible à tout esprit qui n'aurait que le bagage de la classe de Mathématiques de nos établissements secondaires.

J'ai banni les imaginaires, en leur rendant toutefois, en fin de travail, les honneurs qui leur sont dus. J'ai fait de larges emprunts à l'exposé puissant de M. Hadamard qui, le premier, a fait connaître l'ensemble de cette théorie au public, tout en la développant avec son talent bien connu. Mais la méthode que je suis m'est personnelle et consiste à substituer à un certain espace à quatre dimensions la réunion de deux espaces à deux dimensions chacun : la compréhension des résultats connus, la découverte de résultats nouveaux n'exigent plus que le minimum de tension intellectuelle; néanmoins, je ne saurais trop recommander au lecteur de bien s'assimiler aussi l'exposé de M. Hadamard.

Je me suis, presque exclusivement, borné aux questions où n'interviennent que des cercles orthogonaux à une même inversion négative. M. Robert a bien voulu accepter de rédiger un fascicule, ou cette restriction n'existera plus, pour exposer l'ensemble de ses beaux et nombreux résultats.

Le lecteur trouvera, en fin d'exposé, une liste de travaux, donnée d'ailleurs par M. Hadamard dans son article des *Nouvelles Annales*; l'article de M. Hadamard, ajouté en note à sa Géométrie de l'Espace, rassemble tous les résultats en jeu, de sorte que nous n'aurons pas besoin, en cours d'exposé, de donner d'indication, soit bibliographique, soit historique.

Bien que le nom de M. Élie Cartan ne figure pas au cours de cette rédaction, les suggestions qu'il a fournies, soit à M. Hadamard, soit à moi-même, ont contribué pour une large part aux progrès de la théorie.

Voici maintenant une remarque que je n'ai faite que longtemps après avoir terminé ce fascicule et que j'ajoute au moment de la composition.

Darboux avait donné, sans que personne (ni lui non plus) s'en aperçût, le moyen d'établir une théorie précise, concise, élégante, de la parataxie : en 1865, il a imaginé une transformation ponctuelle remarquable qui revient à remplacer chaque droite D de l'espace euclidien à trois dimensions par le cercle γ orthogonal à une sphère fixe ($x^2+y^2+z^2-R^2=0$ ou $x^2+y^2+z^2+R^2=0$) aux points où D rencontre cette sphere (si la sphère est $x^2+y^2+z^2+R^2=0$, on peut remplacer γ par le cercle γ' orthogonal à Σ, dont D est l'axe); cette transformation est exposée au tome III de la *Théorie des Surfaces* (1894) p. 492-500 et dans l'ouvrage presque posthume, *Principes de Géométrie analytique* (Paris, Gauthier-Villars, 1917) p. 484-503. Mais alors, lisant le chapitre de ce dernier ouvrage sur les *déplacements cayleyens* (p. 319-340) et traduisant chaque résultat en remplaçant chaque droite D par le cercle γ correspondant, Σ étant $x^2+y^2+z^2+R^2=0$, nous avons la théorie annoncée, basée il est vrai sur l'emploi d'éléments imaginaires. Ce chapitre à fait l'objet d'un enseignement oral de Darboux entre 1872 et 1896 [1].

Je suis heureux d'avoir, une fois de plus, pu rendre hommage à la Mémoire du grand géomètre français, dont l'œuvre n'est plus étudiée suffisamment, bien qu'elle soit source de nombreuses théories nouvelles.

---

[1] De même la puissance réduite d'un point par rapport à une sphère (*voir* Chap. IV, § 3), est employée systématiquement par Darboux sans qu'il lui ait donné un nom; les cinq coordonnées pentasphériques d'un point sont les puissances réduites par rapport aux sphères fondamentales.

CHAPITRE I.

EXPOSÉ HISTORIQUE ET DÉDUCTIF : TORE, CERCLES DE VILLARCEAU, CERCLES PERPENDICULAIRES.

1. Section du tore par un plan bitangent. — En août 1848, Yvon Villarceau communique à l'Académie des Sciences de Paris le théorème qui porte depuis son nom. En 1864, aux *Nouvelles Annales*, Darboux en donne une démonstration, méritant de sortir de l'oubli : la voici, légèrement modifiée. Soient R (*fig.* 1) la distance de ω, centre du cercle méridien, à l'axe de révolution Oz et $R\cos V$ le rayon de ce cercle. L'équation du tore,

$$(x^2+y^2+z^2-2Rx+R^2\sin^2 V)(x^2+y^2+z^2+2Rx+R^2\sin^2 V)=4R^2y^2,$$

a pour premier membre $T^2\,T'^2$, où T et T' sont les distances tangentielles du point $(x, y. z)$ aux sphères inscrites au tore suivant les méridiennes ω ou ω'; donc $TT'=2R\,|y|$; pour un point de la section par le plan bitangent de trace AA', on a $T=MA$, $T'=MA'$, $|y|=Mm$, hauteur du triangle MAA'; mais (MA, MA') : Mm ést le diamètre du cercle circonscrit à MAA'; ce diamètre est fixe, égal à $2R$; donc le point M décrit l'un ou l'autre des deux cercles de rayon R se croisant en A et A'; c étant le centre de l'un, c est sur Oy et les triangles rectangles égaux $OA\omega$, AOc donnent $A\omega=Oc=R\cos V$.

Voici la démonstration purement géométrique tirée du *Traité*, épuisé, de *Descriptive de Caron* (*fig* 2). Rabattons, autour de AA', sur le plan du méridien ω, la section du tore par le plan bitangent de trace AA'; une sphère auxiliaire de centre O coupe : *le tore*, suivant deux parallèles dont l'un a pour trace, sur le plan de figure, l'horizontale PQ; *le plan bitangent*, suivant la parallèle issue de Q à Oy; le rabattement fournit donc deux points M, M_1 à la rencontre de la perpendiculaire à AA' issue de Q et du cercle de centre O et rayon OP. Les triangles ωPO, ωQO, ont même aire; soit OH perpendiculaire à ωP; on a $\omega P.OH=\omega A.OQ$, donc $OH=OQ$. Les triangles rectangles OPH, OQM sont égaux (hypoténuses égales, un côté de l'angle droit égal); leurs angles en P, M sont égaux; si l'on construit $\overrightarrow{Oc}=\overrightarrow{A\omega}$, les deux triangles ωPO, cOM sont égaux, car $\omega P=cO$, $PO=OM$, $\widehat{P}=\widehat{O}$ comme suppléments des angles considérés à l'instant; donc $\omega O = cM$ et le point M décrit le cercle fixe de centre c, de rayon égal à ωO; M_1 décrit le cercle symétrique par rapport à $A'OA$; *ces deux cercles* (relevés dans le plan bitangent) *épuisent la section du tore par le plan bitangent.* Il n'est pas inutile de rappeler que chaque parallèle du tore donne un point, et un seul, sur chacun des deux cercles de Villarceau; chacun de ces deux cercles passe en A et A' et coupe le méridien $OzAA'$ sous l'angle V (car $cOA\omega$ est un rectangle); *ces deux cercles se coupent donc suivant l angle* $2V$; V *est aussi l'angle de l'axe du tore et du plan bitangent.*

Les démonstrations de Darboux et Caron, simples et élégantes, ont néanmoins un caractère *accidentel.* L'ouvrage posthume de Lebesgue sur les coniques montre clairement la nécessité de rattacher les propriétés, même isolées en apparence, à une théorie générale, convenablement choisie : or la *similitude* est une transformation, trop longtemps négligée dans l'enseignement élémentaire, qui réussit fort bien.

Montrons même que son emploi est *obligatoire*, pour obtenir une démonstration *naturelle* du théorème de Villarceau.

Supposons en effet qu'une étude, plus ou moins élémentaire, ait montré qu'une certaine surface algébrique contient trois familles de cercles, 1, 2, 3, telles que tout cercle 3 coupe en un seul point chaque cercle 1 ou 2; il résulte de là que les ∞^1 cercles 3 réalisent entre les plans de deux cercles 1, 2 choisis une fois pour toutes une correspondance *homographique;* pour obtenir une démonstration, vraiment intéressante, de l'existence des cercles 2 à partir des familles 1, 3 supposées connues, il y aura donc à introduire une transformation homographique sur le plan de chaque cercle 1.

Les *cyclides générales* (surfaces de degré 4 admettant le cercle de l'infini pour ligne double) se partagent en trois espèces suivant qu'elles ont *zéro*, *un*, *deux* axes de rotation anallagmatique. La dernière espèce (*cyclides de Dupin*) admet pour figure réduite anallagmatique le tore $\mathfrak{T}$; celles qui ont un unique axe sont engendrées par la rotation autour d'un cercle fixe d'un second cercle, ni cosphérique, ni paractactique au premier; une inversion à partir d'un point de l'axe donne une surface ayant un axe de révolution métrique; et même, si le pôle d'inversion est l'un des deux points de contact avec l'axe des deux sphères tangentes qu'on peut lui mener par le second cercle, nous obtenons la surface réduite S engendrée par un cercle (γ) tournant autour d'une droite ZZ' parallèle au plan de (γ) : si ZZ' est dans le plan de (γ), S devient $\mathfrak{T}$. *C'est pour la surface* S *que nous allons démontrer le théorème de Villarceau relatif aux plans bitangents* : la famille 1 se compose des diverses positions de (γ), la famille 3 des parallèles. La démonstration que nous donnons a été proposée par M. Dontot comme sujet de concours à l'agrégation des jeunes filles en 1943 et s'applique du même coup à S ou $\mathfrak{T}$.

Soient, dans le plan horizontal H, trois points O, α, β, la perpendiculaire ZZ' élevée en O sur H, (γ) le cercle de diamètre $\alpha\beta$ dans le plan vertical issu de $\alpha\beta$. S est engendrée par la rotation de (γ) autour de ZZ'. Soient I, J les pieds, sur $\alpha\beta$, des bissectrices, intérieure ou extérieure, de l'angle O du triangle $O\alpha\beta$. Les centres I', I'', situés sur OI, des cercles tangents aux côtés de $O\alpha\beta$ sont conjugués par rapport à O, I de sorte que la sphère de diamètre $I'I''$, qui contient d'ailleurs (γ), montre que, si le point M décrit (γ), MI : MO reste constant (égal, par exemple, à $\alpha I : \alpha O$ ou $\beta I : \beta O$).

Si O est sur la droite $\alpha\beta$, nous le supposerons extérieur au segment $\alpha\beta$, S est devenu $\mathfrak{T}$, I est le conjugué de O par rapport à α, β; J coïncide avec O et la droite OJ est la perpendiculaire élevée en O dans H sur $\alpha\beta$; I' et I'' coïncident avec α, β.

De J, qui est extérieur à (γ), nous menons une tangente JT à (γ); T, point de contact, se projette sur H en I. Nous avons sur OJ un système $\alpha' O \beta'$ *semblable* à $\alpha I \beta$ obtenu en portant, dans un sens arbitraire sur OJ, $O\alpha' = O\alpha$ et, en sens opposé, $O\beta' = O\beta$; TI, TO sont respectivement perpendiculaires à $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ en I et O; nous avons vu (pour M en T) que $TI : TO = \alpha I : \alpha O = \alpha I : \alpha' O = \beta I : \beta' O$, de sorte qu'il y a une *similitude* remplaçant (T, α, β, I) par (T, α', β', O), le cercle (γ) par le cercle (Γ) de diamètre $\alpha'\beta'$ passant en T : si M décrit (γ), M' décrit (Γ) et MI, $M'O$ restent proportionnelles, et aussi MI, MO; donc MO, $M'O$ restent proportionnelles et, puisque M venant en T, M' y vient aussi, MO et $M'O$ sont *égales*. Les distances de M et M' à $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ sont proportionnelles; mais la distance de M' à $\alpha'\beta'$ est aussi proportionnelle à la cote de M' : donc les cotes de M, M' sont proportionnelles, et *même égales*, puisque si M vient en T, M' y vient aussi, donc M, M' sont sur un même cercle d'axe ZZ' et par suite (Γ) *est tout entier tracé sur* S. Le plan de (Γ), ou TOJ, contient JT tangent à (Γ), et OJ perpendiculaire au méridien OIT; donc TOJ est le plan tangent à S en T; comme O est centre de symétrie de S, TOJ est aussi tangent à S en T′ symétrique de T par rapport à O et coupe S encore suivant le cercle (Γ') symétrique de Γ par rapport à O (Γ' est d'ailleurs obtenu en changeant le sens suivant lequel $O\alpha$ a été reporté sur OJ à partir de O); (Γ) et (Γ') se croisent en T, T′ et le théorème de Villarceau est démontré.

[Pour le lecteur qui possède la théorie des imaginaires, remarquons que notre démonstration s'applique aussi en portant sur OI, dans le même sens, $O\alpha'' = O\alpha$ et $O\beta'' = O\beta$ de façon que $J\alpha\beta$ soit remplacé par le système semblable $O\alpha''\beta''$; le point T′ de (γ) qui se projette en J est cette fois imaginaire, mais le plan OIT′ coupe S suivant deux cercles et lui est bitangent; dans le cas du tore, la nouvelle série de cercles ainsi introduite redevient réelle, mais se confond avec les méridiens.]

2. Les deux familles de cercles de Villarceau; sphères bitangentes. — Nos deux cercles v, v_1 engendrent le tore, tout entier (même en se plaçant au point de vue réel), en tournant autour de Oz et chacun engendre une famille (v) ou (v_1) de ∞^1 cercles; tout cercle v_1 peut s'obtenir comme symétrique d'un cercle v, fixe, par rapport aux divers méridiens : donc, *deux cercles de Villarceau de famille différente se coupent en deux points*, alignés avec O, situés dans un même plan méridien qui bissecte l'angle de leurs plans. Le point O a pour puissance, $(-R^2 \sin^2 V)$, par rapport à chaque cercle de Villarceau, et $(R^2 \sin^2 V)$ par rapport à tout cercle méridien, de sorte que les points communs à 2 cercles v, v_1 d'espèce différente sont antihomologues sur les deux cercles méridiens contenant ces points. *Deux cercles de Villarceau de la même famille* v, w, *ne se coupent pas*, car le plan de w coupe le tore suivant un cercle complémentaire w_1 et ce cercle w_1 contient les deux points communs à v et au plan (w, w_1); comme O a même puissance *négative* par rapport à v et w, *ces deux cercles sont enlacés.*

Deux cercles v, w_1 d'espèce différente sont sur une même sphère bitangente au tore aux deux points communs à v et w_1. Réciproquement, toute sphère σ bitangente au tore (autre qu'une sphère inscrite suivant un parallèle ou un cercle méridien), coupe le tore suivant deux cercles de Villarceau d'espèce opposée, car les normales communes au tore et à la sphère aux points de contact rencontrent toutes deux l'axe en des points *différents* et concourent au centre de σ, de sorte qu'elles sont dans un même plan méridien, que nous prenons pour plan de figure (*fig.* 3); les points de contact sont l'un sur le cercle ω, l'autre sur le cercle ω' (sinon on aurait une sphère inscrite le long d'une méridienne) et ont des cotes différentes (sinon on aurait une sphère inscrite suivant un parallèle), donc ils sont antihomologues, sur les deux cercles méridiens, par rapport à O; le grand cercle de σ situé dans ce plan coupe l'axe du tore en deux points effectifs P, Q et l'inversion de pôle P, de puissance égale à celle de P par rapport à un méridien, transforme le tore en lui-même et σ en un plan bitangent de trace AA', coupant le tore suivant deux cercles v, v_1 de famille opposée; σ coupe donc le tore suivant deux cercles w, w_1 inverses de v et v_1; *w et w_1 sont aussi des cercles de Villarceau*. car notre raisonnement prouve qu'il ne peut exister qu'*une* famille ∞^2 de sphères bitangentes au tore (en deux points seulement) et précédemment, nous avons précisément obtenu ces ∞^2 sphères en associant un cercle v arbitraire avec un cercle v_1 arbitraire. Le même raisonnement prouve que tout cercle γ situé sur le tore, qui n'est ni parallèle, ni méridien, donne par rotation, autour de Oz, ∞^1 cercles de cette même famille (γ), non sécants entre eux, et par symétrie, autour des ∞^1 plans méridiens, ∞^1 cercles d'une même famille (γ_1), qu'un cercle γ et un cercle γ_1 sont bisécants, donc sur une même sphère σ bitangente, et par suite que les cercles en jeu ne sont autres que les cercles de Villarceau.

Deux cercles de Villarceau d'espèce opposée se coupent sous l'angle fixe 2V. puisque l'on peut, par inversion, les transformer en deux cercles coplanaires. L'angle de ces deux cercles est le double de celui qu'ils font avec le méridien de symétrie, *donc tout cercle de Villarceau coupe tout méridien sous l'angle fixe* V (ce qui résulte aussi de l'inversion utilisée précédemment) et *de même toute sphère de Villarceau coupe l'axe du tore sous l'angle fixe* V.

Pour $V = \frac{\pi}{4}$, les deux familles de Villarceau sont *orthogonales* (et ceci nous conduira aux *cyclides de Dupin équilatères*). Par analogie avec les quadriques, nous appelons *demi-tore* les cercles d'une même famille (v), *demi-tore complémentaire* les cercles de l'autre famille (v_1).

3. Cercles paratactiques et focales d'un cercle. — Soit un cercle v (*fig.* 4) de rayon R et de centre c, O un point intérieur à v, et une droite D perpendiculaire à cO en O, faisant avec le plan du cercle l'angle V défini par $cO = R\cos V$. Faisons jouer à D le rôle de Oz, à Oc le rôle de Oy; sur la troisième arête Ox du trièdre trirectangle d'arêtes OD, Oc portons $O\omega = O\omega' = R$ et construisons dans xOz les cercles de centre ω, ω' et de rayon $R\cos V = cO$; nous avons ainsi constitué une figure égale à celle qui a été donnée dans les démonstrations précédentes; de la sorte, *le cercle v, tournant autour de* D, *engendre un tore*; or la relation entre v et D pourrait s'étudier sans recourir au tore; nous dirons que D *est focale de v;* tout cercle a ∞^2 focales; si O vient en c, on obtient l'axe du cercle; tout point du plan, intérieur au cercle, donne deux focales, symétriques par rapport au plan du cercle; si O vient sur la circonférence, les deux focales se confondent avec la tangente et si O passe à l'extérieur, il n'y a plus de focales.

D'après ce qui précède, *toute sphère issue de v coupe la focale suivant l'angle* V (*indépendant du choix de la sphère*), *tout plan issu de la focale coupe v suivant l'angle* V (*indépendant du choix du plan*).

Si nous faisons une inversion de la figure 4 avec un pôle et une puissance quelconque, *nous obtenons deux cercles* C_1, C_2 *tels que toute sphère passant par l'un coupe l'autre sous l'angle fixe* V, *indépendant du choix de la sphère, et restant le même quand on intervertit le rôle des deux cercles.*

Appelons *cercles paratactiques* deux cercles C_1, C_2 tels que *toute sphère, issue de* C_2 *par exemple, coupe* C_1 *sous un angle constant* V indépendant du choix de la sphère; l'inversion appliquée à un cercle v et une focale D assure l'existence de cercles paratactiques (quelle que soit la valeur de V), et *il importe de montrer qu'il n'existe pas d'autres couples de cercles paratactiques que ceux obtenus par une telle inversion* : si l'on fait une inversion à partir d'un point de C_2, le couple paratactique devient un cercle v et une droite D, tels que tout plan issu de D coupe v suivant l'angle V, indépendant du choix du plan, et nous constaterons aisément que cela exige que D soit focale de v (ce sera fait au Chapitre suivant, paragraphe **1**; admettons provisoirement cette réciproque).

Nous savons donc construire le couple paratactique général;

l'angle V qui figure dans la définition ne change pas quand on intervertit le rôle des deux cercles : il s'appelle *angle de parataxie de deux cercles.*

Il existe ∞^4 *cercles paratactiques à un cercle donné* C_1; en effet, C_1 admet ∞^2 droites focales; prenons un point arbitraire P du plan de C_1, comme pôle d'inversion, la puissance étant celle de P par rapport à C_1; une focale D de C_1 devient un cercle C_2 paratactique à C_1, issu de P; ∞^2 focales D et ∞^2 points P donnent bien ∞^4 cercles paratactiques; *deux cercles paratactiques sont enlacés* : si P est intérieur à C_1, le pied de D se transforme en un point extérieur à C_1; si P est extérieur à C_1, le pied de D reste intérieur à C_1.

Introduisons maintenant la notion de *cercles perpendiculaires*, c'est-à-dire de deux *cercles sécants en deux points*, *leurs tangentes en ces points étant orthogonales*; prenons sur C_2 un point P arbitraire et effectuons une inversion de pôle P; nous obtenons un cercle c transformé de C_1 et une droite D transformée de C_2 (*fig.* 4); la droite cO peut être considérée comme un cercle perpendiculaire commun à c et D et, revenant à la figure primitive, elle se transforme en un cercle, *issu de* P, perpendiculaire commun à C_1 et C_2; la variation de P sur C_2 montre que *deux cercles paratactiques ont* ∞^1 *cercles perpendiculaires communs.*

Nous allons voir que *deux cercles qui ne sont ni cosphériques, ni paratactiques n'ont que deux cercles perpendiculaires communs* (¹) : nous avons donc trouvé une propriété caractéristique de deux cercles paratactiques : *n'être pas cosphériques et posséder* ∞^1 *cercles perpendiculaires communs* (il sera bon, à ce point de vue, de se rappeler qu'un cercle et une focale forment un couple paratactique et admettent ∞^1 cercles perpendiculaires communs).

Nous voyons donc que les géomètres ont un autre moyen que l'étude du tore et des cercles de Villarceau pour arriver à la notion

(¹) Si l'on donne deux cercles C_1, C_2, *a priori*, un cercle C perpendiculaire à C_1 peut être défini avec 3 paramètres: position de ses pieds sur C_1, et orientation, en l'un d'eux, de la tangente à C dans le plan perpendiculaire sur la tangente à C_1; ces 3 paramètres inconnus sont liés par 3 équations exprimant ensuite que C est aussi perpendiculaire à C_2; ce système de trois équations à trois inconnues n'a, en général, qu'un nombre fini de solutions, comme le montre l'exemple de deux cercles C_1, C_2 ayant un point commun et un seul : une inversion, ayant ce point pour pôle, conduit à chercher la perpendiculaire commune à deux droites.

de parataxie, c'est la discussion du problème : *construire un cercle perpendiculaire commun à deux cercles donnés*; ce moyen est plus difficile que le précédent, mais est extrêmement intéressant en lui-même, et c'est M. Hadamard qui a eu le mérite de le traiter à fond et de montrer que la résolution, basée sur une équation du second degré, peut conduire à un cas d'indétermination, remarque bien simple qui avait échappé à ses devanciers.

Nous allons exposer ce problème (avec un perfectionnement important dû à M. Robert). Mais montrons auparavant que *tout cercle cosphérique à chacun des cercles d'un couple paratactique les coupe sous le même angle.* Deux cercles quelconques admettent ∞^2 cercles qui leur sont cosphériques à chacun : on prend le cercle commun à deux sphères arbitraires, issues respectivement de chacun d'eux; les points communs à chaque cercle et à la sphère issue de l'autre appartiennent au cercle cosphérique construit, de sorte que si les deux cercles sont enlacés et si les sphères sont réelles, chacune coupe l'autre cercle en deux points effectifs et le cercle cosphérique est réel. Si C_1, C_2 sont paratactiques et si γ est un cercle cosphérique à chacun, on prend pour pôle d'inversion l'un des points communs à γ et C_2 et l'on est ramené à la figure 4 : un cercle v, une focale D, une corde MM', issue dans le plan v du pied O de la focale; *il s'agit de montrer que* MM' *coupe* D *et* v *sous le même angle*; la puissance de O par rapport à v est $cO^2 - R^2 = -R^2\sin^2 V = \overline{OM}.\overline{OM'}$; par l'inversion de pôle M et puissance $\overline{MO}.\overline{MM'}$, O se transforme en M' et inversement; D se transforme en un cercle v_1 passant en M et M' et v en une droite D_1 issue de O; v_1 et D_1 sont paratactiques et l'angle de parataxie est le même pour v_1 et D_1 que pour v et D (angle constant d'une sphère variable, issue de l'un des cercles, avec l'autre cercle); si R_1 est le rayon de v_1, on a donc $-R_1^2\sin^2 V = \overline{OM}.\overline{OM'}$, de sorte que $R = R_1$, et v_1 est l'un des cercles déduits de v par rotation autour de MM'; mais alors la sécante OMM' coupe v et v_1 sous les mêmes angles en M' ou en M, de sorte que l'angle de OMM' avec v ou v_1 en M' se retrouve, par l'inversion de pôle M, comme angle en O de D avec OMM', et le résultat est établi.

La figure réduite 4 conduit à appeler d'une façon précise V l'angle aigu que D fait avec sa projection sur le plan de v; une demi-droite, issue de O dans le plan de v, fait avec D (supposée orientée) un angle V_1 compris entre V et $\pi - V$; et, pour chaque valeur de cet angle V_1, comprise entre ces limites, mais distincte de V, $\pi - V$ ou encore de $\frac{\pi}{2}$, on trouve deux semi-droites issues de O dans le plan de v, symétriques l'une de l'autre par rapport à cO; en remontant à la figure non réduite, *il y a, pour chaque point* P *de* C_2, *deux cycles cosphériques à* C_1, C_2, *issus de* P *et coupant* C_1, C_2 *sous cet angle* V_1; *ces deux cycles s'échangent par transposition autour du cercle perpendiculaire commun issu de* P.

Nous avons à signaler une autre propriété importante des focales; imaginons (*fig.* 5) deux sphères passant par v et de centres respectifs, S et S'; *le dièdre* (SDS') *est égal à l'angle des deux sphères*; cette propriété est remarquable, parce que, si S et S' restent fixes, les ∞^2 focales donneront ∞^2 dièdres de grandeur invariable. L'angle V de D avec le plan de v est égal à l'angle du plan π perpendiculaire à D, contenant Oc, avec l'axe de v; S et S' se projettent en σ et σ' sur π et l'on a

$$c\sigma = cS\cos V, \qquad c\sigma' = cS'\cos V;$$

si donc A est un point de v, les triangles rectangles AcS, $Oc\sigma$ sont semblables dans le rapport de 1 à $\cos V$, ainsi que AcS' et $Oc\sigma'$, et par suite aussi que les triangles SSA', $\sigma O\sigma'$; or $S\widehat{A}S'$ peut servir a mesurer l'angle des sphères et $\sigma O \sigma'$ est le rectiligne du dièdre SDS'. Regardons maintenant la figure 5 comme *figure réduite d'une autre où v,* D *sont remplacés par le couple paratactique* C_1, C_2; *le plan* DS *n'est autre qu'une sphère* Σ_2 *issue de* C_2 *et orthogonale à une sphère* Σ_1 *issue de* C_1; *si l'on imagine que la sphère* Σ_1 *varie autour de* C_1, *la sphère* Σ_2 *varie autour de* C_2 *et l'angle de deux sphères* Σ_1 *est égal à l'angle des deux sphères correspondantes* Σ_2.

4. **Cercles perpendiculaires communs à deux cercles.** — Le cas spécial où l'angle de parataxie est égal à $\frac{\pi}{2}$ avait été remarqué depuis longtemps (sans que la parataxie eût été découverte encore). Les cercles d'un tel couple sont dits *axiaux* ou *conjugués*. *Toute sphère passant par l'un coupe l'autre à angle droit; tout cercle cosphérique à chacun les coupe à angle droit;* c'est le seul cas où il y ait ∞^2 cercles perpendiculaires communs; par inversion, à partir d'un point de l'un, on obtient un cercle et son axe, figure réduite sur

laquelle toutes les propriétés énoncées sont évidentes. On peut encore remarquer que, si l'on a, dans un même plan, deux cercles orthogonaux, la rotation de l'un, d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$, autour de la ligne des centres, le transforme en cercle axial de celui qui est resté fixe.

J'emploie systématiquement le procédé qui consiste à remplacer une figure donnée, *au moyen d'un nombre convenable d'inversions*, par une figure *réduite* que l'on étudie par toute méthode qui réussit, par exemple par les méthodes de la géométrie *métrique;* je m'attache ensuite à dégager, parmi les conclusions, celles qui peuvent s'énoncer en langage anallagmatique; d'autre part, bien que l'emploi d'éléments imaginaires (cercle de l'infini, droites isotropes...) puisse souvent rendre des services (surtout pour la *découverte*), je me bornerai à des démonstrations purement *géométriques et réelles*, qui seront souvent beaucoup plus intuitives. Une dernière remarque: on a souvent besoin de comparer une figure F avec sa transformée $F_1 = FT$ par une opération *quelconque* T du groupe G, conforme, de l'espace à 3 dimensions; supposons effectuée sur F et F_1 une certaine transformation R de G, de sorte que F devienne une figure *réduite* F', et F_1 une certaine figure F'_1; on a $F'_1 = F(TR) = F'(R^{-1}TR)$; or $(R^{-1}TR)$ où R est *déterminée*, et T *quelconque* est une transformation T' de G, *arbitraire* elle aussi; donc nous pouvons, sans scrupules, substituer, à la comparaison de F et F_1, celle de F' et F'_1.

Proposons-nous donc de trouver un cercle C perpendiculaire commun à deux cercles C_1, C_2 donnés; *supposons le problème résolu* et adoptons pour figure réduite celle qui s'obtient en prenant pour pôle d'inversion l'un des points communs à C et C_1; C sera donc l'axe Ox, C_1 l'axe Oz et C_2 un cercle dont Ox porte un diamètre (*fig.* 6). En tournant autour de C, le cercle C_1 engendre le plan yOz et le cercle C_2 une sphère S'_2 dont la trace sur yOz est un cercle C', perpendiculaire à Oz (ou C_1) et à C_2, admettant Ox pour axe. *Il existe donc nécessairement un nouveau cercle* C', *perpendiculaire commun, axial au premier cercle perpendiculaire commun.* C était supposé réel; C' est alors à équations réelles, défini par les sphères engendrées par C_1, C_2 tournant autour de leur cercle perpendiculaire commun C, mais il n'est réel que si C_2 traverse yOz, c'est-à-dire que si C_1 et C_2 sont enlacés. Nous apercevons, en employant un langage anallagmatique qui ne fait aucune distinction entre la figure elle-même et la figure réduite, diverses sphères que M. Hadamard a été le premier à signaler

S_1 ou CC_1 plan xOz; S'_1 ou $C'C_1$ plan yOz;
S_2 ou CC_2 plan méridien de S'_2; S'_2 ou $C'C_2$.

Les sphères S_1, S'_1 *passent par* C_1 *et sont orthogonales; les sphères* S_2, S'_2 *jouent le même rôle pour* C_2; *enfin* S_1 *est orthogonale à* S'_2, *tandis que* S_2 *est orthogonale à* S'_1 (la figure 6 contient aussi une figure non réduite, mais schématique).

Réciproquement, si nous pouvons déterminer un couple orthogonal (S_1, S'_1) issu de C_1, un couple orthogonal (S_2, S'_2) issu de C_2, tels que (S_1, S'_2), (S'_1, S_2) soient aussi des couples orthogonaux, les cercles (S_1, S_2), (S'_1, S'_2) sont deux cercles perpendiculaires communs, car les cercles $C(S_1, S_2)$ et $C_1(S_1, S'_1)$ se coupent aux deux points (S_1, S_2, S'_1); en l'un de ces points, les deux sphères S_1, S_2, toutes deux orthogonales à S'_1, donnent pour tangente à leur cercle commun C la normale au plan tangent de S'_1, plan contenant la tangente à C_1; C est donc perpendiculaire à C_1 et le raisonnement peut se recommencer en permutant les indices 1, 2 et les accents (néant ou prime), de sorte que C est aussi perpendiculaire à C_2, et de même, le cercle C' est perpendiculaire à C_1 et C_2.

Pour continuer, j'utilise, d'après une méthode élégante de M. Robert, une autre figure réduite; le cercle C_2 est réduit à une droite (*fig.* 7), que nous supposerons verticale, grâce à une inversion et un déplacement préliminaires; nous projetons toute la figure sur le plan perpendiculaire à C_2 mené par le centre O de C_1; C_1 est projeté suivant une ellipse E de foyers F, F'; $OF = OF' = R_1 \cos V$, où R_1 est le rayon de C_1 et V, l'angle de C_2 avec le plan de C_1 (ou du plan perpendiculaire à C_2 avec l'axe de C_1); les verticales de F, F' sont donc les focales de C_1 parallèles à C_2; C_2 se projette suivant un point c_2. Les sphères orthogonales S_1, S'_1, passant par C_1, ont leur centre, Ω_1 ou Ω'_1, sur l'axe de C_1 et projeté en σ_1 ou σ'_1 sur l'axe non focal de E; au paragraphe précédent nous avons vu que le *segment* $\sigma_1\sigma'_1$ *est vu de* F *ou* F' *sous un angle droit* (et que $\sigma_1 F$, $\sigma'_1 F$ sont égaux au rayon de S_1 ou S'_1 multiplié par cos V); les sphères S_2, S'_2, orthogonales, réduites ici à des plans issus de C_2, ont pour trace sur le plan de projection deux droites rectangulaires; S_1 est orthogonale à S'_2, donc la trace de S'_2 passe en σ_1 et celle de S_2 en σ'_1; *le couple*

$\sigma_1\,\sigma'_1$ *s'obtient donc par intersection de l'axe non focal de* E *et du cercle circonscrit à* c_2FF'; ce couple est *réel et unique*, sauf le cas où c_2 coïncide avec F ou F', *c'est-à-dire où* C_1, C_2 *sont paratactiques*: dans ce cas, n'importe quel cercle réel issu de F, F' donne un couple associé σ_1, σ'_1 et par suite deux cercles perpendiculaires communs axiaux. Ce cas écarté, quand le couple σ_1, σ'_1 a été construit, les sphères S_1, S'_1, S_2, S'_2, satisfaisant à toutes les conditions de M. Hadamard, le problème est complètement résolu et nous voyons que *deux cercles ni cosphériques ni paratactiques ont un couple unique de cercles perpendiculaires communs*, *axiaux entre eux*.

La discussion de la réalité est aisée : si les deux cercles C_1, C_2 sont enlacés, dans la figure réduite c_2 est intérieur à E, et puisque les sphères S_1, S_2 sont réelles, leur cercle commun est réel comme nous l'avons remarqué plus haut; de même pour S'_1, S'_2.

Il n'y a donc à discuter que le cas où C_1, C_2 ne sont pas enlacés; dans ce cas c_2 est extérieur à E, les points F, F' intérieurs, de sorte que le cercle c_2FF' possède avec E deux points communs t, t', effectifs dans le demi-plan déterminé par c_2 et FF'; les droites $c_2\sigma_1$, $c_2\sigma'_1$ sont les bissectrices de l'angle Fc_2F', et nous choisissons les notations de sorte que $c_2\sigma'_1$ soit la bissectrice *intérieure*. $c_2\sigma_1$ la bissectrice *extérieure;* la droite $c_2\sigma'_1$ passe donc à l'intérieur du segment FF', donc rencontre l'ellipse E en deux points effectifs, projections de deux points réels de C_1, appartenant au cercle perpendiculaire commun C (S_1, S_2) qui est donc réel. La première figure réduite nous a appris que le second cercle perpendiculaire commun est non réel, mais, pour la symétrie de notre exposé, montrons-le avec cette nouvelle figure réduite. La droite $t\sigma_1$ est bissectrice extérieure de l'angle F'tF, c'est donc la tangente en t à l'ellipse, $\sigma'_1 t$ étant la normale; le contour apparent horizontal de la sphère réelle S'_1 est un cercle de centre σ'_1, bitangent à l'ellipse E; c'est donc le cercle de centre σ'_1 et de rayon $\sigma'_1 t$; comme l'ellipse est tout entière dans l'angle $t'\sigma_1 t$ et que $\sigma_1 c_2$ traverse les angles adjacents à cet angle $t'\sigma_1 t$, le plan vertical S'_2 ne coupe pas la sphère S'_1, de sorte que le *cercle* C' (S'_1, S'_2) *n'est pas réel* [1], *mais il est à équations réelles.*

---

[1] Le lecteur qui comparera la discussion de M. Hadamard avec celle de M. Robert constatera la grande simplification apportée par M. Robert. Quelques remarques

Il est bon de faire remarquer que cette construction met en évidence le cas spécial, qui n'interviendra plus dans notre étude, où les cercles C_1, C_2 sont en *involution*, c'est-à-dire où, par chacun, passe *une* sphère (et *une seule*) orthogonale à l'autre (tandis que le cas des cercles axiaux est caractérisé par ce fait que par chaque cercle il passe *deux* et par suite ∞^1 sphères orthogonales à l'autre cercle). Si, sur la figure réduite, c_2 est sur l'axe non focal de E, le plan déterminé par l'axe de C_1 et la droite C_2 est la sphère appelée S_2, qui est orthogonale à C_1, tandis que la sphère contenant C_1 et dont le centre est le point de croisement de l'axe de C_1 avec la droite (réduite) C_2 est la sphère, appelée S_1, qui est orthogonale à C_2; la construction donnée pour le cas général s'applique sans modification. On peut remarquer que, dans le cas de l'involution, il existe une figure bien plus réduite qui semble (à mal regarder) mettre la construction qui précède en défaut; en effet, au lieu de prendre le pôle d'inversion au hasard sur C_2, prenons-le en un des deux points où C_2 rencontre la sphère qui lui est orthogonale, issue de C_1; on obtient alors comme figure réduite un cercle C_1 et une droite C_2 normale au plan de C_1 (distincte de l'axe de C_1); l'ellipse E n'est autre cette fois que le cercle C_1 lui-même et les deux points F, F sont confondus avec O; il est évident, sur cette figure réduite, que la droite Oc_2 est l'un des deux cercles perpendiculaires communs et que le plan vertical perpendiculaire à Oc_2, mené par la droite C_2 coupe la sphère, dont C_1 est un grand cercle, suivant un cercle qui est le second cercle perpendiculaire commun, réel ou idéal suivant que c_2 est intérieur à C_1 ou non (la construction qui a été donnée s'applique, en regardant F et F', confondus avec O, comme

---

ont lieu d'être faites encore sur la figure réduite; le théorème de Ptolémée appliqué au quadrilatère inscriptible $tF\sigma'_1F'$ donne $2\sigma'_1 t.\ OF = 2R_1.\ \sigma'_1 F$ et appelant R_1 le rayon de C_1, demi-grand axe de E; on a donc, en remplaçant OF par $R_1 \cos V$, $\sigma'_1 F = \sigma'_1 t \cos V$, et ceci, d'après la remarque faite plus haut, montre bien que $\sigma'_1 t$ est le rayon de S'_1. Il peut arriver d'autre part que σ'_1 soit intérieur ou extérieur à E; si $R_1^2 < 2\,OF^2$ ou $\cos^2 V > \frac{1}{2}$ ou encore $V < \frac{\pi}{4}$, le point σ'_1 est extérieur à F, si le point σ_1 est compris entre les points de rebroussement de la développée de l'ellipse portés par le petit axe de E; dans ce cas le cercle c_2FF' coupe de nouveau E en deux points θ, θ' et le contour apparent de S_1 est le cercle de centre σ_1, tangent en θ, θ' à E; sinon, les points θ, θ' sont idéaux et le contour apparent de S_1 est toujours bitangent à E en ces points idéaux.

réunis par une droite d'orientation quelconque issue de O; la droite réduite S_2 coïncide avec Oc_2 et S'_2 avec la perpendiculaire issue de c_2 à Oc_2). Remarquons encore, pour liquider ce cas spécial de l'involution, que la figure très réduite citée à l'instant, constituée par un cercle C_1 et une droite C_2, normale au plan du cercle C_1, met en évidence le cercle Γ_1 situé dans le plan vertical Oc_2, de centre c_2, axial à C_1 (réel si c_2 est extérieur à C_1, c'est-à-dire si C_1, C_2 ne sont pas enlacés), qui est axe d'une transposition remplaçant le cycle $\vec{C}_1$ par lui-même et le cycle $\vec{C}_2$ par le cycle opposé $-\vec{C}_2$; en faisant tourner Γ_1 de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oc_2, ce cercle devient un cercle Γ_2 axial à C_2, orthogonal à C_1, axe d'une transposition qui échange $\vec{C}_1$ en $-\vec{C}_1$ et $\vec{C}_2$ en $\vec{C}_2$; *ces échanges spéciaux n'existent que si* $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$ *sont en involution.*

5. **Résultats complémentaires sur les cercles de Villarceau. Congruences paratactiques.** — Avant de passer à la méthode synthétique, il est intéressant de montrer que, si l'étude du tore a prouvé que l'axe est paratactique à chaque cercle de Villarceau, il y a lieu de prouver encore que *deux cercles de Villarceau, de même espèce, sont paratactiques entre eux* et, pour cela, nous allons utiliser les résultats acquis grâce à la discussion relative aux cercles perpendiculaires communs et nous arriverons à la notion de *congruence paratactique.*

Première propriété. — Les sphères de Villarceau, issues de deux cercles de Villarceau fixes v, v_1 de la même famille et contenant un même cercle variable w de la famille opposée, se coupent sous un angle constant, égal à la moitié de l'angle de rotation amenant v sur v_1. — L'axe du tore (*fig.* 8) étant supposé vertical, les axes de v, v_1, w sont tangents, en projection sur le plan équatorial du tore, à un même cercle γ, de rayon égal à celui de la méridienne, de centre O; nous désignons par les mêmes lettres V, V_1, W les points de contact de ces axes projetés avec leur cercle enveloppe; le centre de la sphère (v, w) est projeté en P, point commun aux projections des axes de v et w; de même pour P_1 obtenu avec (v_1, w). Comme les deux sphères en jeu passent par le même cercle w, dont Oz est focale, l'angle $\widehat{POP_1}$ est l'angle des deux sphères (paragraphe 3) cet angle est constant et égal à la moitié de $\widehat{VOV_1}$, ce qui démontre le résultat.

Deuxième propriété. — Existence d'une congruence de cercles dite paratactique. — Dans l'énoncé de la première propriété, nous avons envisagé la rotation *métrique* qui amène v sur v_1 ; or, si nous nous reportons à la figure 1, nous voyons que le cercle Γ de centre O, situé dans l'équateur et de rayon OA (égal à $R \sin V$ avec les notations du premier paragraphe) est axial à chaque cercle méridien du tore, puisque le rabattement de Γ, autour de la ligne des centres Ox sur le plan du cercle méridien, donne un cercle orthogonal au méridien. Donc, par une rotation, *anallagmatique* cette fois, d'axe Γ, chaque point du tore décrit le cercle méridien qui en est issu ; on passe donc d'un point M du tore à un autre quelconque M_1 du tore en composant, dans l'ordre que l'on voudra, une rotation (métrique ou anallagmatique comme on voudra l'appeler) autour de l'axe métrique du tore et une rotation allagmatique autour de Γ ; en orientant (comme on voudra) Oz et Γ, puis considérant les demi-méridiens OzM, OzM_1, ou les calottes sphériques ΓM, ΓM_1, les deux rotations ainsi effectuées auront une amplitude définie en grandeur et signe, à 2π près. Si l'on effectue une inversion quelconque, $\overrightarrow{Oz}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$ restent deux cycles axiaux, le tore devient *une surface cerclée susceptible d'être engendrée par deux rotations arbitraires d'un point* $\overline{M}$ *de la surface autour des deux axes circulaires axiaux* $\overline{\Gamma}$ *et* Γ_1 *transformés de* Γ *et* Oz et, cette fois, *le rôle anallagmatique des deux axes est parfaitement le même ;* si nous nous replaçons au point de vue anallagmatique, sur le tore, les rôles de Oz et Γ sont les mêmes. En particulier, si nous prenons le pôle d'inversion sur Γ, le tore primitif se transforme en une surface nouvelle qui a encore deux axes anallagmatiques, dont l'un est de nouveau une droite, donc en un tore encore. Les surfaces déduites du tore par une inversion s'appellent *cyclides de Dupin* ; elles possèdent *deux familles de cercles, le long de chacun desquels il existe une sphère se raccordant à la cyclide, et deux séries de cercles de Villarceau ;* le théorème qui précède est alors le suivant : *les sphères de Villarceau, issues de deux cercles de Villarceau* v, v_1 *de la même famille et contenant un même cercle variable* w *de la famille opposée se coupent sous* *un angle constant, égal à la moitié de l'angle de rotation amenant v sur v_1 autour de l'axe anallagmatique* Γ *ou* Γ_1; c'est le *même* énoncé que précédemment, *sauf que nous avons rétabli la symétrie entre les rôles des deux axes*. Si donc nous analysons bien ce théorème (et il est commode de prendre la figure réduite formée par un tore), on peut amener v sur v_1 par une rotation de sens convenable, d'amplitude φ (en valeur absolue), autour du premier axe, et ensuite nous pouvons ramener v_1 sur v par une rotation de *même* amplitude φ (faite en sens convenable) autour du second axe; dans ces conditions un point M de v revient en un point M' de v, l'angle des deux demi-méridiens OzM, OzM' étant précisément égal à φ (en valeur absolue); on voit que, φ variant par continuité de o à 2π, la transformation fait décrire au point M tout le cercle de Villarceau v, et une seule fois; cette transformation est dite *opération paratactique d'amplitude* φ : *composition de deux rotations égales* (*en valeur absolue*) *effectuées autour de deux cycles axiaux;* nous préciserons plus loin les questions de signe. Cette transformation s'applique à n'importe quel point de l'espace; la figure réduite étant toujours un tore, chaque point pris dans zOx, par exemple, détermine par rotations autour de Oz et de Γ un tore; les ∞^1 tores ainsi obtenus ont, dans le plan zOx, des cercles méridiens appartenant à un même faisceau linéaire (dont les points de Poncelet sont les extrémités du diamètre de Γ porté par Ox); l'un de ces tores dégénère en la droite Oz et un autre en le cercle Γ; *nous voyons que les divers cercles de Villarceau* (*d'une certaine famille*), *de ces* ∞^1 *tores ne sont autre chose que les trajectoires des divers points de l'espace quand on leur applique une opération paratactique d'axes* $\overrightarrow{Oz}$ *et* $\vec{\Gamma}$ *d'amplitude variable*. Nous avons ainsi une congruence de cercles, dite *congruence paratactique* jouissant de propriétés nombreuses; une première est la suivante : *deux cycles de la congruence sont paratactiques entre eux*. En effet si C_1, C_2 sont deux cycles de la congruence, ils admettent un cercle perpendiculaire commun γ; quand on opère la transformation paratactique d'amplitude variable, les cercles C_1, C_2 se transforment en eux-mêmes; γ prend ∞^1 positions (car ses pieds sur C_1 ou C_2 se déplacent) et reste toujours perpendiculaire à C_1, C_2; donc ces deux cercles sont bien paratactiques. *Par chaque point de l'espace passe un cercle et un seul de la congruence*, car il y passe un seul tore de la famille indiquée plus haut et sur ce tore deux cercles de Villarceau, dont l'un, seul, est à retenir; précisons maintenant à la fois la façon d'associer les deux rotations, égales en valeur absolue, autour de Oz et les *deux espèces de congruence paratactique;* on a donné un trièdre trirectangle direct; on oriente Oz arbitrairement; on oriente Γ de façon que le cycle $\vec{\Gamma}$ tourne autour de $\overrightarrow{Oz}$ dans le sens direct; si les rotations autour de $\overrightarrow{Oz}$ et Γ sont égales algébriquement, on pourra dire que l'*opération paratactique est positive ou directe;* si les rotations autour de $\overrightarrow{Oz}$ et $\vec{\Gamma}$ sont égales et de signe contraire, on dira que l'*opération paratactique est négative ou rétrograde;* le cercle de Villarceau, trajectoire du point M par une opération paratactique positive d'amplitude variable, engendre une *congruence paratactique positive ou directe*, quand M est pris successivement aux divers points de xOz; même résultat pour la *congruence paratactique négative ou rétrograde;* le rayon ρ de Γ peut être appelé *rayon de la congruence*, O le centre. $\overrightarrow{Oz}$ *l'axe*, $\vec{\Gamma}$ le *cycle diamétral; tous les cycles de la congruence sont orthogonaux à l'inversion négative de pôle* O *et puissance* $(-\rho^2)$. Nous avons décomposé la congruence paratactique définie par $\overrightarrow{Oz}$ et $\vec{\Gamma}$ (et son espèce) en ∞^1 demi-tores dont chaque cycle de Villarceau admet avec $\overrightarrow{Oz}$ le même angle de parataxie V, variable d'un demi-tore à l'autre. Or, si nous considérons un cycle $\vec{\gamma}$ quelconque de la congruence, les ∞^2 autres cycles de cette même congruence peuvent être catalogués de même par leur angle de parataxie avec $\vec{\gamma}$: on le voit en faisant une inversion dont le pôle P est pris sur $\vec{\gamma}$ et dont la puissance est $PO^2 + \rho^2$ (complétée si l'on veut par la symétrie autour du plan de γ, de façon à ne pas changer la nature de la parataxie) : la sphère Σ de centre O et de rayon $i\rho$ est conservée, le cycle $\vec{\gamma}$ est transformé en une droite orientée $\overrightarrow{Oz_1}$ issue de O et, par suite, la congruence primitive est transformée en la réunion de ∞^2 cycles paratactiques à $\overrightarrow{Oz_1}$, orthogonaux à Σ, donc susceptible d'être décomposée en ∞^1 demi-tores d'axe Oz_1 (égaux aux demi-tores primitifs); *nous retrouvons donc une congruence paratactique égale à la primitive;* dans cette congruence figure le cycle Γ_1 de centre O, de plan perpendiculaire à Oz_1 et de rayon ρ; donc en revenant à la figure primitive, *chaque cycle γ d'une telle congruence est accompagné d'un cycle γ_1 de la même congruence. qui lui est axial; les deux cycles γ, γ_1 sont les axes de ∞^1 demi-cyclides de Dupin, dont chacune est le lieu de cycles paratactiquès à γ et γ_1 sous un même angle* $\left(V \textit{ pour } \gamma \textit{ et } \frac{\pi}{2} - V \textit{ pour } \gamma_1\right)$. On peut dire qu'*une conguence paratactique (orientée) est parfaitement définie par un cycle $\vec{\gamma}$ de cette congruence, son espèce et une inversion négative orthogonale à $\vec{\gamma}$, ou encore par deux cycles paratactiques entre eux.*

Revenons maintenant à l'opération paratactique d'amplitude φ définie par $\overrightarrow{Oz}$ et $\vec{\Gamma}$; elle conserve chaque cycle de la congruence, donc respecte chaque semi-cyclide de Dupin d'axes γ et γ_1; mais, tenant compte de l'inversion qui transforme γ et γ_1 en $\overrightarrow{Oz_1}$ et $\vec{\Gamma}_1$, on voit aussi que la composition de deux rotations d'amplitude φ chacune (et de sens convenable) autour de γ et γ_1 produirait le même effet (à la fois sur chaque cycle *entier* de Villarceau et sur chaque point *en particulier* de ce cycle; comme on le voit en prenant $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, ou encore $\varphi = \frac{p\pi}{q}$ où p et q sont entiers); *donc l'opération paratactique d'amplitude φ peut être décomposée en deux rotations égales, d'amplitude φ, autour de deux cycles conjugués quelconques de la congruence :* cette possibilité de trouver ∞^2 décompositions est l'une des plus remarquables, comme nous le verrons plus tard.

Nous nous bornons ici pour ces théorèmes acquis par voie déductive, à partir de l'étude du tore et de ses cercles de Villarceau et de l'étude des cercles perpendiculaires; il est curieux que ces propriétés si simples aient pu échapper si longtemps aux chercheurs, ou donner lieu à tant de démonstrations compliquées (¹).

(¹) Un article, déjà ancien des *Nouvelles Annales* (1850 ou 1860 ?), que je n'ai pu retrouver, mais que le hasard avait mis sous mes yeux, indiquait la propriété des cercles de Villarceau, d'espèce opposée, du tore de se couper sous un angle constant, égal au double de l'angle constant de ces cercles et des plans méridiens.

CHAPITRE II.

EXPOSÉ SYNTHÉTIQUE. PARATAXIE POSITIVE OU NÉGATIVE. FIGURATION DE L'ESPACE A QUATRE DIMENSIONS ENGENDRÉ PAR LES CYCLES ORTHOGONAUX A UNE MÊME INVERSION NÉGATIVE.

1. **Focales d'un cercle.** — Ce paragraphe est rédigé suivant une méthode imaginée par une de mes auditrices, Mlle Fiquemont, modifiant d'une façon particulièrement heureuse la méthode que j'avais donnée en 1929 au *Journal de Mathématiques* pour représenter chaque cycle orthogonal à l'inversion négative de pôle O et de puissance $(-R^2)$ par deux points situés l'un et l'autre sur la sphère $S(x^2+y^2+z^2-R^2=0)$; j'ai moi-même apporté un perfectionnement considérable à l'énoncé de la propriété IV qui suit.

Soit (*fig.* 9) le cercle C de centre c, un point O intérieur au cercle dans son plan. AB la corde de milieu O; je considère une corde MM′ issue de O et le cône de révolution engendré par cM ou cM′ en tournant autour de cX perpendiculaire à MM′; quand M varie, ces divers cônes ont en commun deux génératrices fixes, obtenues en portant sur la normale en O au plan de C les longueurs $On = O\nu = OA = OB$ et joignant c à n et ν; cela tient à ce que $\overline{OM}.\overline{OM'}$ est constant, égal à $-\overline{OA}^2$; on peut dire que ces droites cn, $c\nu$ s'obtiennent en faisant tourner cA, cB d'un angle droit autour du diamètre cO. Si donc nous menons par O la parallèle à la tangente MT (c'est-à-dire la perpendiculaire à cM), on peut dire que les cônes de révolution de sommet O. d'axe MM′ (perpendiculaire à cX) dont cette parallèle à MT est génératrice, ont deux génératrices fixes Δ, Δ' déduites de cn, $c\nu$ par translation $\overrightarrow{cO}$ et rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de la normale en O au plan de C. *Ces droites* Δ. Δ' *sont les focales du cercle pour le point* O; elles sont perpendiculaires à cO et font avec le plan du cercle l'angle V égal à $\widehat{AcO}$, tel que $\cos V = \frac{cO}{R}$.

Première propriété. — Toute sécante au cercle, issue du pied de la focale, coupe le cercle et la focale sous le même angle, car l'axe OMM′ du cône considéré en dernier lieu fait le même angle avec toutes les génératrices : la parallèle à la tangente et Δ sont deux génératrices de ce cône.

Deuxième propriété. — Les plans passant par une focale coupent le cercle sous l'angle constant V *de la focale avec le plan du cercle.* En effet, sur un cône de révolution d'axe A, soient deux génératrices G, G'; l'angle de G' avec le plan (A, G) est égal à l'angle de G avec le plan (A, G'), comme on le voit par symétrie relativement au plan bissecteur du dièdre (AG, AG'). Il en résulte que l'angle de MT avec le plan défini par l'axe OM du cône considéré en dernier lieu et une focale est égal à l'angle de cette focale avec le plan du cercle; il est donc indépendant de la sécante MM' choisie.

Troisième propriété. — Les sphères passant par le cercle C *coupent les focales* Δ, Δ' *sous l'angle fixe* V *déjà considéré.* Soit en effet E l'une des extrémités du diamètre cO; effectuons la transformation suivante de la figure 9 : rotation autour de cO, d'amplitude V, qui amène Δ dans le plan de C, puis inversion de pôle E et puissance $\overline{EO}.\overline{EE'}$; la focale Δ devient le cercle C, le cercle C devient la focale Δ'; un plan passant par Δ devient une sphère passant par C; la propriété est donc établie, et l'on voit qu'elle n'est pas, au fond, distincte de la seconde.

Jusqu'ici nous n'avons pas eu besoin d'orienter les cercles ni les droites en jeu; les cônes de révolution employés ne changent pas quand on remplace le demi-angle au sommet par l'angle supplémentaire; d'ailleurs, pour l'angle de deux courbes non orientées, on a le choix entre deux valeurs supplémentaires. Désormais, nous orientons les cercles ou les droites et menons au *cycle*, remplaçant le cercle, la tangente dans le sens adopté. L'angle (*non orienté*) de deux courbes *orientées* est l'angle, compris entre zéro et π, formé par les parallèles aux tangentes au point commun, dans le sens de parcours; dans certains cas, *à condition de prévenir explicitement*, l'angle peut lui-même être orienté, donc susceptible de signe; il faut indiquer le *premier* côté de l'angle, le *second*, puis la *position de l'observateur* (qui a les pieds au sommet de l'angle), *par rapport au plan de l'angle* (cet observateur peut être placé normalement ou obliquement au plan de l'angle, mais ne doit jamais se trouver dans le plan de l'angle); enfin, on doit indiquer la disposition, *sinistrorsum ou dextrorsum* (*ad libitum*), du trièdre de référence ([1]).

Si l'on remplace deux courbes orientées sécantes par les courbes opposées, l'angle de ces courbes ne change pas; il est remplacé par son supplément si l'on ne change de sens que l'une d'elles. Cela posé, soit un cercle C et une focale (*fig* 9); orientons C arbitrairement, de façon par exemple qu'en M, la demi-tangente MT indiquée soit la direction positive; sur la sécante indéfinie M'M, prenons un sens positif $\overrightarrow{M'M}$, par exemple et mesurons l'angle $(\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{MT})$. Sur la focale Δ issue de O, il y a donc une direction, que nous prenons pour direction positive, qui donne avec $\overrightarrow{M'M}$ un angle égal à $(\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{MT})$ et non au supplément; par symétrie relativement au plan de C, Δ' se trouve orientée du même coup; le sens adopté sur $\overrightarrow{M'M}$ n'intervient que comme intermédiaire; d'ailleurs, on peut dire que les sens adoptés sur $\overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{\Delta'}$ sont ceux qui résultent de la rotation de la demi-tangente $\overrightarrow{MT}$ autour de MM'. Imaginons un observateur, couché sur le cycle $\overrightarrow{C}$, traversé des pieds à la tête par $\overrightarrow{C}$, regardant les deux mobiles qui décrivent $\overrightarrow{\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta'}$ dans le sens positif : l'un se meut, pour l'observateur, dans le sens *direct*, l'autre dans le sens *rétrograde*; le premier définit la focale *directe*, l'autre la focale *rétrograde*.

On peut changer *simultanément* l'orientation d'un cycle et de ses focales, chacune restant directe ou rétrograde. Si l'observateur se place sur la focale directe (ou rétrograde) de façon à être traversé des pieds à la tête, il voit la circulation sur le cycle se faire encore autour de lui dans le même sens que précédemment.

Quatrième propriété. — Choisissons deux points M, M' au

([1]) J'évite soigneusement dans mes articles d'employer les mots *droite* ou *gauche*, ou encore de spécifier la disposition du trièdre de référence, le lecteur pouvant agréer telle disposition qui lui plaira (ou même, lui aussi, la laisser indéterminée). J'appelle trièdre *direct* un trièdre qui a le même sens que le trièdre de référence et je profite de l'occasion pour protester contre tout décret qui prétendrait imposer l'une des dispositions, *dextrorsum* ou *sinistrorsum*, à l'exclusion de l'autre.

hasard (*fig.* 10) et un point O sur le segment MM′ entre M et M′; il y a ∞^2 cycles (deux à deux opposés) passant en M et M′; chacun d'eux donne une tangente $\overrightarrow{\mathrm{MT}}$ en M (et inversement, à une tangente $\overrightarrow{\mathrm{MT}}$ correspond un seul cycle); chacun donne en O une focale positive $\overrightarrow{\Delta_1}$, une focale négative $\overrightarrow{\Delta_2}$; *une rotation d'ensemble, d'axe* MM′, *dont l'amplitude* φ *est donnée par la relation* $\cos\varphi = \frac{\mu \mathrm{O}}{\mu \mathrm{M}}$, *où* μ *est le milieu de* MM′, *rend chaque droite* $\overrightarrow{\mathrm{MT}}$ *parallèle à* $\overrightarrow{\Delta_1}$ *et de même sens; la rotation égale et de sens contraire autour de* $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ *rend chaque droite* $\overrightarrow{\mathrm{MT}}$ *parallèle à* $\overrightarrow{\Delta_2}$ *et de même sens.* Cette proposition, presque évidente, est la clé de notre méthode, car elle entraîne que *l'angle de deux cycles bisécants est égal à l'angle de leurs focales positives* (*ou négatives*) *relatives à un point quelconque de la corde commune* (la figure 11 schématise la disposition des deux cycles de leurs focales). En effet, sur la figure 10 marquons M, M′, O, un cycle $\vec{\mathrm{C}}$ de centre c, issu de M et M′, puis la médiatrice du segment MM′ contenue dans le plan de $\vec{\mathrm{C}}$; si c décrit $\mathrm{X'}\vec{\mathrm{X}}$, le cycle $\vec{\mathrm{C}}$ engendre un faisceau plan, mais la rotation de $c\overrightarrow{\mathrm{M}}$ autour de X′X donne un cône de révolution qui, quel que soit le point c, contient toujours les points n, ν obtenus en portant, sur la perpendiculaire en O au plan fixe en jeu, la longueur $\mathrm{O}n = \mathrm{O}\nu = \sqrt{-\overline{\mathrm{OM}}.\overline{\mathrm{OM'}}}$; $\overrightarrow{cn}$, $\overrightarrow{c\nu}$ sont les génératrices (orientées) du cône qui a servi ensuite, par rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de $\mathrm{O}n\nu$ (dans le sens propre à rendre $\overrightarrow{c\mathrm{M}}$ parallèle à $\overrightarrow{\mathrm{MT}}$ et de même sens), à rendre $\overrightarrow{cn}$, $\overrightarrow{c\nu}$ parallèles aux focales $\overrightarrow{\Delta_1}$, $\overrightarrow{\Delta_2}$, relatives à O (et de même sens); supposons que $\overrightarrow{cn}$ corresponde à $\overrightarrow{\Delta_1}$ et $\overrightarrow{c\nu}$ à $\overrightarrow{\Delta_2}$; l'angle φ dont le demi-méridien XX′M tourne autour de XX′ pour s'appliquer sur le demi-méridien XX′n a son amplitude, déterminée en valeur absolue, par

$$\cos\varphi = \frac{\mu\mathrm{O}}{\mu\mathrm{M}} = \frac{|\mathrm{OM'} - \mathrm{OM}|}{\mathrm{OM'} + \mathrm{OM}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathrm{O}n}{\mathrm{O}\mu} = \frac{2\sqrt{\mathrm{OM}.\mathrm{OM'}}}{|\mathrm{OM'} - \mathrm{OM}|}$$

Cet angle φ se retrouve donc comme angle dont le demi-plan (MM′,

$\overrightarrow{MT}\Big)$ tourne autour de MM′ pour s'appliquer sur le demi-plan $\Big(MM',$ $\overrightarrow{\Delta_1}\Big)$, $\overrightarrow{MT}$ devenant parallèle à $\overrightarrow{\Delta_1}$ et de même sens. *La rotation autour de* XX′ *a son axe dépendant du choix précis de* $\overrightarrow{C}$, *mais la rotation autour de* MM′ *a son axe et son amplitude indépendants de* $\overrightarrow{C}$; *notre proposition est donc établie.* Il est clair que pour rendre $\overrightarrow{MT}$ parallèle a $\overrightarrow{\Delta_2}$ (et de même sens), c'est la même rotation φ autour de MM′, *mais en sens opposé*, qui intervient.

Il est bon, en raison de l'importance capitale de cette quatrième propriété, de bien étudier diverses circonstances. Supposons que nous fassions la rotation autour de $On\nu$, d'amplitude $\frac{\pi}{2}$, en sens inverse; $\overrightarrow{cM}$ devient parallèle à $\Big(-\overrightarrow{MT}\Big)$, tangente du cycle $-\overrightarrow{C}$; la droite $\overrightarrow{cn}$ prend la position, *symétrique par rapport à* $On\nu$, de celle qu'elle avait prise d'abord : elle est donc devenue parallèle à $\Big(-\overrightarrow{\Delta_1}\Big)$, focale négative de $\Big(-\overrightarrow{C}\Big)$, de sorte que, finalement, $\overrightarrow{MT}$ se trouve transformée en $\overrightarrow{\Delta_2}$, et ceci confirme notre proposition, à savoir que l'ensemble des droites $\overrightarrow{\Delta_2}$, aussi bien que l'ensemble des droites $\overrightarrow{\Delta_1}$, peut être recouvert par l'ensemble des droites $\overrightarrow{MT}$; mais alors on peut demander pourquoi la rotation qui amène le demi-plan XX′M sur XX′n a été transformée (par la rotation autour de $On\nu$) en une rotation amenant le demi-plan $\Big(MM', \overrightarrow{MT}\Big)$ sur $\Big(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{\Delta_2}\Big)$, au lieu de $\Big(MM', \overrightarrow{\Delta_1}\Big)$ sans avoir, en apparence, changé de sens : c'est que cette rotation est appréciée par un observateur, placé d'abord sur X′X pour évaluer la rotation amenant XX′M sur XX′n, et déplacé par la rotation autour de $On\nu$ de façon à venir sur MM′; or les deux rotations, de sens contraire, effectuées autour de $On\nu$ dans les deux cas successifs, ont donné à cet observateur deux positions *opposées* sur MM′, de sorte que les rotations faites autour de MM′ pour appliquer le plan $\Big(MM', \overrightarrow{MT}\Big)$ sur $\Big(MM', \overrightarrow{\Delta_1}\Big)$ ou $\Big(MM', \overrightarrow{\Delta_2}\Big)$ sont *intrinsèquement opposées*, mais donnent, mesurées par deux observateurs *opposes*, la même mesure algébrique. Nous n'avons donc commis aucune imprécision, nous n'avons fait que nous conformer aux propriétés de la figure.

Autrement dit, la rotation φ qui amène le demi-méridien XX′M sur XX′n est *transformée* (au sens de la théorie des groupes) par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de $On\nu$, de façon à appliquer le demi-plan $\Big(MM', \overrightarrow{MT}\Big)$ sur le demi-plan $\Big(MM', \overrightarrow{\Delta_1}\Big)$: cette dernière rotation se trouve donc être la résultante des trois opérations suivantes :

a. rotation autour de $O n \nu$, d'amplitude $\frac{\pi}{2}$, dans le sens convenable pour rendre $\overrightarrow{MT}$ parallèle à $\overrightarrow{cM}$ et de même sens.

b. rotation d'amplitude φ autour de XX′ amenant le demi-plan XX′M sur le demi-plan XX′n. Ce n'est que si l'on a orienté MM′, que XX′ sera lui-même orienté comme conséquence de la rotation a, et que l'on pourra indiquer le signe de φ.

c. rotation autour de $O n \nu$, d'amplitude $\frac{\pi}{2}$, de sens opposé à la rotation a, rendant $\overrightarrow{cn}$ parallèle à $\overrightarrow{\Delta_1}$ et de même sens, $\overrightarrow{c\nu}$ parallèle à $\overrightarrow{\Delta_2}$.

Chacune de ces trois opérations dépend de l'orientation, autour de MM′, du plan de $\vec{C}$, mais leur résultante en est indépendante. Cette superposition de la *gerbe* (dénomination due à G. Kœnigs) *orientée* issue de M formée par l'ensemble des droites $\overrightarrow{MT}$ et de la gerbe issue de O, engendrée par les droites $\overrightarrow{\Delta_1}$, entraîne qu'un faisceau *plan* extrait de l'une de ces gerbes a pour homologue un faisceau plan; donc tous les cycles issus de M et M′ et contenus dans un même plan contenant MM′ ont leurs focales positives, relatives à O, contenues dans un même plan contenant aussi MM′; mais on remarquera que le faisceau *plan* de droites $\overrightarrow{MT}$ ainsi obtenues pourrait être appliqué sur le faisceau *plan* des droites $\left(-\overrightarrow{\Delta_2}\right)$ correspondantes en remplaçant l'opération c par la rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de $O n \nu$ faite cette fois dans le même sens que a; *la théorie des groupes nous montre pourquoi ces deux opérations a, c doivent être de sens opposé.*

Une autre façon d'extraire de la gerbe orientée des droites $\overrightarrow{MT}$ un faisceau plan est de choisir une sphère quelconque passant en M, M′ et de considérer le faisceau des cycles issus sur cette sphère de M et M′; les focales correspondantes. d'une même espèce, sont réparties dans un plan déduit, par rotation autour de MM′, du plan tangent à la sphère M; nous aurons l'occasion d'utiliser cette propriété.

On voit donc que, si le point O part de M pour aller en M′, puis revient en M, la gerbe des ∞^2 droites $\overrightarrow{MT}$ subit une rotation continue, dont l'amplitude est *zéro* en M, $\frac{\pi}{2}$ au milieu μ de MM′, π en M′; le point O revenant sur ses pas, il suffit de faire tourner la gerbe *toujours dans le même sens* pour recouvrir, au retour, la gerbe des focales d'espèce opposée à celle qui avait été recouverte à l'aller; quand O revient en M, la rotation totale est 2π. On évite ainsi de changer le sens des rotations; l'emploi d'une valeur comprise entre o et 2π est tout naturel pour l'amplitude de φ; si φ_0 est la valeur de φ quand O passe à l'aller en O_0, la valeur de φ quand O repasse au retour en O_0 est $2\pi - \varphi_0$.

Réciproque des propriétés 1 *et* 2. — La réciproque de 1 est : *toute droite* Δ, *telle qu'une corde quelconque de* C, *issue dans le plan de* C *du pied de* Δ, *coupe* Δ *et* C *sous le même angle*, *est focale de* C *pour son pied* O. En effet, O ne peut être extérieur à C, sinon une tangente à C issue de O couperait C et Δ sous des angles différents (1).

Si l'on mène par O (*fig.* 9) la sécante MM′, la droite Δ est génératrice de chaque cône de sommet O, d'axe MM′, de demi-angle au sommet (OM, MT) : quand M vient en E, le cône se réduit au plan mené par AB normalement à celui de C : donc les cônes ne peuvent avoir que deux génératrices communes, situées dans le plan cité à l'instant; or nous avons constaté que ces cônes ont bien deux génératrices communes, qui sont les focales relatives à O, donc Δ est l'une de ces focales.

La réciproque de 2 est la suivante : *si tous les plans issus d'une droite* D *coupent un cercle* C *sous le même angle*, ***la*** *droite est une focale du cercle ;* d'abord le pied O de D sur le plan de C est intérieur à C, sinon on pourrait mener de D un plan tangent à C et un plan non tangent, de sorte que l'angle ne serait pas constant; du point O, partent deux focales distinctes Δ, Δ'; D ne peut coïncider simultanément avec Δ et Δ'; supposons qu'elle soit distincte de Δ', nous allons montrer qu'elle coïncide avec Δ ; en effet, si l'on pose

$$cO = R\cos V,$$

R étant le rayon de C et c son centre, le plan (D, Δ') coupe C sous l'angle V, puisqu'il contient la focale Δ'; menons par D un plan autre que (D, Δ'), coupant C en deux points M, M′; par M M′ on ne peut faire passer que deux plans faisant avec la tangente à C en M l'angle V, ce sont les plans (M, Δ), (M, Δ'); le plan (M, D) coupe le cercle suivant l'angle V; il coïncide donc avec le plan (M, Δ); la droite D est donc, quel que soit M, commune à tous les plans (M, Δ), donc elle coïncide avec Δ.

---

(1) Nous avons évité de parler d'éléments imaginaires; mais pour le lecteur qui connaît la théorie des imaginaires, les tangentes Ot, Ot' (imaginaires), issues du point O intérieur, coupent C sous un angle nul; pour éviter toute contradiction chaque droite Ot, Ot' doit aussi couper Δ sous un angle nul, ce qui exige que chaque plan (Δ, Ot), (Δ, Ot') soit *isotrope*. De même, pour la réciproque de 2, on se rappellera que l'angle d'une droite quelconque avec un plan isotrope qui la contient est indéterminé.

Digression sur la théorie des coniques. — Le lecteur voudra bien nous permettre une digression sur la théorie des coniques; projetons C sur le plan perpendiculaire à Δ mené par cO (*fig.* 12); M se projette en M_1 et OM_1 n'est autre que la distance de M à Δ; puisque la perpendiculaire Om à Mc est génératrice du cône engendré par Δ en tournant autour de OM, cette distance de M à Δ est égale à Mm; si si l'on considère O_1, symétrique de O par rapport à c, la droite Δ_1, parallèle à Δ, issue de O_1 est focale de C pour O_1 et $M_1 O_1 = M m_1$, m_1 étant projection de O_1 sur Mc; or $Mm + Mm_1 = 2\,Mc = 2R$; *donc la projection orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse.* On retrouve aussi la propriété des *directrices*, car si $O_1 c O$ est pris pour axe des x, et c pour origine, et si x désigne l'abscisse de M (ou M_1 dans le plan de l'ellipse), la projection de $cO = R\cos V$ sur cM est $x\cos V$, puisque la projection de $cM = R$ sur cO est x; donc

$$M_1 O = Mm = R - x\cos V = \cos V\left(\frac{R}{\cos V} - x\right);$$

$\frac{R}{\cos V}$ est l'abscisse de la polaire de O par rapport à l'ellipse ou au cercle; $\frac{R}{\cos V} - x$ est la distance de M_1 à cette polaire du foyer O par rapport à l'ellipse; *la distance* $M_1 O$ *du point courant de l'ellipse au foyer* O *est donc égale au produit par le nombre fixe* $\cos V$ *de la distance de* M_1 *à la directrice de ce foyer.* On peut dire aussi *qu'il y a un rapport constant entre les distances d'un point du cercle à la focale et à la polaire* D *du pied de la focale par rapport au cercle*; si par D nous menons un plan P coupant Δ en S, la distance de M à D est proportionnelle à la distance de M à P; d'autre part P est le plan polaire de MO par rapport au cône de sommet S ayant C pour base; la variation de M sur C et une homothétie de pôle S permettent donc d'énoncer le théorème : *sur un cône du second degré, il y a un rapport constant entre les distances de chaque point du cône à une focale et au plan polaire de cette focale par rapport au cône.*

2. Définition de la parataxie. — Comme au chapitre précédent, *deux cercles* C_1, C_2 *sont dits paratactiques quand toute sphère passant par l'un coupe l'autre sous un angle constant* V, *qui est appelé angle de parataxie du couple.* L'inversion effectuée sur un cercle et une focale prouve l'existence de cercles paratactiques (propriété 2) : *réciproquement*, une inversion dont le pôle est pris au hasard sur l'un des cercles paratactiques donne (réciproque de 2) *un cercle et une focale de ce cercle;* mais alors la propriété 3 prouve que V ne change pas quand on intervertit le rôle des deux cercles : on voit ainsi qu'il y a ∞^4 cercles paratactiques à un cercle donné.

Une autre propriété fondamentale est que *tout cercle cosphérique à l'un et à l'autre de deux cercles paratactiques les coupe sous des angles égaux et. réciproquement, deux cercles coupés sous le même angle par tout cercle, cosphérique à chacun d'eux sont paratactiques* (propriété 1 et réciproque). Pour la réciproque, il suffit même de constater la propriété pour tous les cercles, en nombre ∞^1, au lieu de ∞^2, issus d'un point pris, une fois pour toutes, sur C_1 ou C_2.

Pour orienter deux cercles paratactiques C_1, C_2 on opère comme pour un cercle et une focale : on oriente C_1, on prend un cercle Γ cosphérique à C_1 et C_2; on oriente Γ (dans un sens arbitraire qui n'intervient pas dans le résultat final); on oriente alors C_2 de façon qu'en un point commun à $\vec{\Gamma}$ et $\overrightarrow{C_2}$. l'angle de ces deux cycles soit égal à celui de $\vec{\Gamma}$ et $\overrightarrow{C_1}$ et non au supplément.

Il y a donc deux espèces de parataxie, l'une positive ou directe. l'autre négative ou rétrograde, irréductibles l'une à l'autre (exactement comme il existe une main droite, une main gauche). *Une inversion positive, ou une symétrie plane (qui est anallagmatiquement équivalente), change l'espèce de la parataxie; un nombre impair (ou pair) de telles transformations change (ou conserve) l'espèce.* On se rappelle qu'une inversion négative de pôle O, de puissance $-R^2$, équivaut à 4 inversions positives (par exemple l'inversion de pôle O, puissance R^2, suivie des 3 symétries planes relatives aux faces du trièdre trirectangle $Oxyz$). Si $\overrightarrow{C_1}$, $\overrightarrow{C_2}$ *sont positivement (ou négativement) paratactiques*, $\overrightarrow{C_1}$ *et* $(-\overrightarrow{C_2})$ *sont positivement (ou négativement) antitactiques :* deux cycles antitactiques sont coupés par un cycle cosphérique commun suivant deux angles *supplémentaires* (et réciproquement).

Considérons deux cycles axiaux : par une inversion (ou un nombre pair, si l'on ne veut pas changer l'espèce de parataxie), supposons l'un réduit à une droite $\vec{D}$, axe de l'autre $\vec{C}$; si $\vec{D}$, $\vec{C}$ sont *positivement paratactiques*, $\vec{C}$ tourne dans le sens direct autour de $\vec{D}$ et d'après nos définitions $-\vec{D}$, $\vec{C}$ sont positivement antitactiques; mais $-\vec{D}$, $\vec{C}$ sont aussi négativement paratactiques, de sorte que $\vec{D}$, $\vec{C}$ sont négativement antitactiques; donc tout cycle cosphérique doit couper deux cycles axiaux suivant un angle égal à son supplément, donc à angle droit, résultat trouvé directement d'une façon plus simple, mais retrouvé ici à titre de vérification.

La figure 9 (complétée par la focale $\vec{\Delta}$ ou $\vec{\Delta}'$ issue de O) gagne à être examinée d'un point de vue anallagmatique : $\vec{C}$ est un cycle tracé sur une sphère Σ; $\overrightarrow{MM'}$ un cycle $\vec{\Gamma}$ tracé sur cette même sphère; la parallèle $\vec{D}$, issue de O, à la tangente $\overrightarrow{MT}$ est un cycle tracé sur Σ, admettant avec $\vec{C}$ le cycle $\overrightarrow{MM'}$ ou $\vec{\Gamma}$ comme cycle isogonal; on fait tourner $\vec{D}$ autour de $\vec{\Gamma}$ de façon à l'amener sur $\vec{\Delta}$: l'angle de $\vec{D}$ et $\vec{\Delta}$ est égal à celui que $\vec{D}$ et $\vec{C}$ font en chacun de leurs points communs. Donc pour obtenir le couple paratactique général, on peut opérer ainsi : *sur une sphère Σ, on trace deux cycles $\vec{C}$, $\vec{D}$ quelconques, mais sécants; on les coupe par un cycle isogonal $\vec{\Gamma}$ et l'on fait tourner $\vec{D}$ autour de $\vec{\Gamma}$ jusqu'à ce que l'angle de $\vec{D}$ et de sa nouvelle position $\vec{\Delta}$ soit égal à l'angle de $\vec{D}$ et $\vec{C}$: $\vec{\Delta}$ est paratactique à $\vec{C}$*; la rotation cherchée existe effectivement et a deux valeurs possibles qui donnent deux cycles $\vec{\Delta}$, $\vec{\Delta}'$ (symétriques par rapport à Σ), paratactiques à $\vec{C}$, l'un positivement, l'autre négativement. De combien de paramètres a-t-on disposé, une fois $\vec{C}$ donné? Un paramètre pour le choix de Σ, 3 pour $\vec{D}$, 2 pour $\vec{\Gamma}$: total, 6. Il y a donc deux paramètres surabondants; on peut supposer que Σ se réduise au plan de $\vec{C}$, et $\vec{D}$ à une droite, ce qui ramène le nombre de paramètres à la valeur strictement indispensable, 4. Dans l'article de M. Hadamard, Σ est encore le plan de $\vec{C}$; $\vec{D}$ est un cycle quelconque du plan (3 paramètres), mais $\vec{\Gamma}$ est un cycle orthogonal à $\vec{C}$, $\vec{D}$ (1 paramètre).

Cette construction est la généralisation de celle qui conduit aux cercles axiaux : $\vec{C}$, $\vec{D}$ cycles orthogonaux d'un même plan, $\vec{\Gamma}$ support du diamètre commun à $\vec{C}$, $\vec{D}$.

3. **Espace engendré par les cycles orthogonaux à une même inversion négative et représentation sur deux feuillets sphériques.** — Nous avons reconnu plusieurs fois l'utilité d'étudier les ∞^2 cercles cosphériques simultanément à deux cercles C_1, C_2. *Exceptionnellement, deux cercles cosphériques* C_1, C_2 *admettent deux familles de cercles cosphériques à chacun* : une famille ∞^3, à savoir tous les cercles tracés sur la sphère Σ qui les porte, puis une famille ∞^2 formée par les cercles issus des deux points communs; ces deux familles ont ∞^1 cercles communs, formant sur Σ le faisceau issu des deux points communs; dans ce même cas, il existe ∞^1 cercles perpendiculaires communs, formant sur Σ le faisceau conjugué de celui qui a été signalé à l'instant, puis un cercle isolé, à savoir le cercle orthogonal à Σ, issu des points communs à C_1 et C_2, cercle réel si les points communs à C_1 et C_2 sont réels; ce cercle est axial à chacun des ∞^1 cercles perpendiculaires communs; c'est le seul cas, en dehors des cercles paratactiques, où deux cercles aient ∞^1 cercles perpendiculaires communs; tous les points de la droite d'intersection des plans de C_1 et C_2 sont pôles d'une inversion (positive ou négative) orthogonale à C_1, C_2.

Écartons ce cas : si nous rabattons C_2 sur le plan de C_1, autour de la droite D commune aux plans de C_1 et C_2, le cercle C_2 prend une position C'_2; l'axe radical de C_1, C'_2 est distinct de D, puisque C_1, C_2 ne sont pas cosphériques, et coupe D en un point O qui a même puissance par rapport à C_1, C_2 et est le seul à jouir de cette propriété; si Γ est un cercle cosphérique à C_1, C_2, les cordes communes à Γ et C_1, Γ et C_2 concourent en O et les pieds de Γ sur C_1 (ou C_2) se correspondent dans l'inversion de pôle O orthogonale à C_1, C_2. Si C_1, C_2 ne sont pas enlacés, la puissance de O par rapport à C_1, C_2 est positive; si C_1, C_2 sont enlacés, la puissance commune de O est négative. A cause de la parataxie, le cas de cercles ou cycles tous orthogonaux à une même inversion *négative* est plus intéressant que celui de l'inversion *positive*.

Nous allons étudier géométriquement l'assemblage formé par un cycle $\vec{C}$ et les deux focales $\vec{\Delta}$, $\vec{\Delta}'$, positive et négative, issues d'un point O intérieur au plan du cercle (*fig.* 13); appelons $2R$ la longueur de la corde BOA perpendiculaire cO; on considere l'angle aigu V tel que $\cos V = \frac{cO}{cA}$ ou $\cot V = \frac{cO}{R}$; c'est l'angle de $\vec{\Delta}$ avec $\overrightarrow{OA}$, ce qui permet de préciser le point qui s'appelle A et celui qui s'appelle B. Nous portons $Oa = O\alpha = OA = R$ sur $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta}'$; *à un cycle* $\vec{C}$ *orthogonal à l'inversion négative de pôle* O *et puissance* $(-R^2)$ *correspond ainsi un couple unique* (a, α) *de deux points situés sur la sphère* S *de centre* O *et rayon* R; a est dit l'image *positive* ou *directe* de $\vec{C}$, α l'image *négative* ou *rétrograde*. Les images du cycle $\left(-\vec{C}\right)$ sont (a', α') respectivement diamétralement opposées a (a, α). On peut remarquer que a, α sont sur la sphère dont C est un cercle diamétral.

Montrons que, réciproquement, a un couple (a, α) pris sur la sphère S, ou a est le point positif, α le point négatif, correspond un seul cycle $\vec{C}$; en effet le triangle $Oa\alpha$ est isoscele et la hauteur Oh, suivie de O en h donne, a la distance R (supérieure à Oh), le point A; on a B en sens inverse, à la même distance; le cycle inconnu passe en A, B et est contenu dans le plan médiateur de $a\alpha$; dans ce plan, ainsi connu, de $\vec{C}$ nous pouvons construire deux demi-droites $A\mu$, $A\mu_1$ telles que les angles $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{A\mu}\right)$, $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{A\mu_1}\right)$ soient (en valeur absolue) égaux a l'angle aigu V $\left(\cot V = \frac{cO}{R}\right)$; or les observateurs placés tous deux la tête en a et les pieds l'un en O, l'autre en h, sont du même côté par rapport au plan de $\vec{C}$, leurs pieds étant intérieurs à $\vec{C}$; ils voient donc la rotation autour d'eux sur $\overrightarrow{A\mu}$ se faire dans le même sens tandis que $\overrightarrow{A\mu_1}$ donne le sens opposé au précedent; nous gardons celle des deux demi-droites $\overrightarrow{A\mu}$, $\overrightarrow{A\mu_1}$ qui donne le sens positif : c'est la tangente en A au cycle inconnu; supposons que ce soit $\overrightarrow{A\mu}$; $\vec{C}$ est ainsi connu, d'une façon unique. [En passant la construction montre que le cycle dont les images sont (a_1, α_1) avec $a_1 = \alpha$, $\alpha_1 = a$ est obtenu en prenant le symétrique de $\left(-\vec{C}\right)$ par rapport à O.] Un cycle dont les images sont confondues est la demi-droite joignant O à ce point; un cycle dont les images (a, α) sont diamétralement opposées est le grand cercle de la sphère S (de centre O et rayon R) dont le plan est perpendiculaire au diametre $a\alpha$ en jeu.

Les ∞^4 *cycles orthogonaux à une même inversion* I, *de pôle* O *et puissance* $(-R^2)$ *engendrent, employant le langage moderne, un espace à 4 dimensions qui se trouve ainsi représenté, d'une façon biunivoque, par la réunion de deux espaces à 2 dimensions chacun, constitués l'un et l'autre par un feuillet sphérique de centre* O *et rayon* R.

Nous employons systématiquement les lettres, romaine et grecque correspondantes, pour désigner les deux images d'un cycle; le cycle $\vec{C}$ a pour images (c, γ); une lettre, et la même accentuée, réprésenteront deux points diamétralement opposés sur S; (c, γ), (c', γ') sont donc deux cycles opposés. *La construction montre assez aisément que* (a, α), (a, α') *sont deux cycles axiaux orthogonaux à* I : nous le verrons d'ailleurs sans effort, comme conséquence des propriétés qui vont être exposées; chaque cycle orthogonal à I admet un seul cercle axial, orthogonal a I.

Un point M de l'espace et son inverse relatif à I $(\overline{OM}.\overline{OM'} = -R^2)$ sont dits *opposés*.

La propriété fondamentale de cette représentation est la suivante : *la condition nécessaire et suffisante pour que deux cycles* $A_1(a_1, \alpha_1)$, $A_2(a_2, \alpha_2)$ *orthogonaux à* I *soient sécants (donc bisécants) est que la distance sphérique* $\widehat{a_1 a_2}$ *soit égale à la distance sphérique* $\alpha_1\alpha_2$; *la valeur commune des angles* (Oa_1, Oa_2) $(O\alpha_1, O\alpha_2)$ *ou de* $\frac{\widehat{a_1 a_2}}{R}$, $\frac{\widehat{\alpha_1 \alpha_2}}{R}$ *est l'angle des deux cycles.*

Démontrer que la condition est *nécessaire* revient à démontrer la propriété 4, paragraphe 1 de ce chapitre. Il ne reste donc à démontrer que la réciproque : puisqu'il suffit *d'une* relation pour que deux cycles orthogonaux à I soient sécants (et par suite bisécants), il est à peu pres évident que cette égalité $(Oa_1, Oa_2) = (O\alpha_1, O\alpha_2)$ est suffisante; mais il est intéressant de le montrer directement; supposons cette égalité vérifiée et traçons la figure 14; l'arc de grand cercle $\widehat{a_1 a_2}$, peut dont recouvrir $\alpha_1\alpha_2$, a_1 venant en α_1, a_2 en α_2, par rotation.

d'amplitude 2φ dont l'axe est la droite OL commune aux plans médiateurs des segments $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, intersection des plans des deux cycles; elle coupe le premier cycle en deux points M, M'. Le dièdre dont l'arête est MM' ou OL et dont les faces passent en a_1, α_1, dont nous avons appelé le rectiligne 2φ, est égal à l'angle dièdre ($XX'n$, $XX'\nu$) étudié plus haut à l'occasion de la propriété 4 (*fig.* 10), et nous avons trouvé

$$\tan g\varphi = \frac{2R}{|OM' - OM|}.$$

Nous avons ainsi pour déterminer M et M' sur OL les équations (où ne figurent que des valeurs absolues OM, OM')

$$|OM' - OM| = 2R\cot\varphi, \qquad OM.OM' = R^2.$$

Pour les points N, N', où OL perce $\vec{A}_2$, on a les équations analogues, *où* φ *est le même* (puisque OL est l'axe d'une rotation amenant a_1 sur α_1 et a_2 sur α_2 : donc, ou bien (M, M') coïncide avec (N, N') où bien les deux couples se déduisent l'un de l'autre par une symétrie autour de O; le principe de continuité prouve que c'est le premier cas qui est réalisé (il suffirait de considérer le cas où le second cycle se déduit du premier par une rotation autour d'une sécante de ce cycle), donc la proposition est établie (nous la rattacherons plus loin à l'étude de la transformation paratactique).

Il est intéressant à ce propos de montrer qu'*un déplacement autour d'un point fixe* O *peut se représenter par un couple de points inverses par rapport à* O; en effet, sur une sphère S de centre O et rayon R, le déplacement amène un point a à la position α; on peut regarder ces couples (a, α) comme image, chacun, d'un cycle; tous les cycles obtenus ont un couple de points (M, M') communs et inversement; donc ces deux ensembles, à 3 dimensions chacun, déplacements d'une part, couples (M, M') avec $\overline{OM}.\overline{OM'} = -R^2$ se correspondent biunivoquement : cette propriété d'ailleurs, était déjà bien connue; il y a même intérêt à remplacer le couple (M, M') par le milieu μ du segment M, M', car ce point μ et le couple (M, M') se correspondent biunivoquement; (le passage de μ au couple M, M', rentre dans l'une des théories développées par Cayley).

4. Application aux problèmes angulaires. — La représentation qui précède rend intuitive la solution du probleme : *construire un cycle cosphérique à deux cycles* $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$, *les coupant respectivement sous des angles donnés* V_1, V_2, tout au moins dans le cas où l'inversion I orthogonale à $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ est *négative*. Le cycle inconnu B est lui-même orthogonal à I; nous figurons les images (a_1, α_1) de $\overrightarrow{A}$, (a_2, α_2) de $\overrightarrow{A_2}$ et nous cherchons les images b, β de B; on est ramené à construire un triangle sphérique $a_1 a_2 b$ dont les sommets a_1, a_2 sont donnés, ainsi que les côtés $a_1 b$, $a_2 b$; on sait donc trouver b par l'intersection de deux cercles de la sphère S, ayant a_1, a_2 pour pôles sphériques; même résultat pour β; n'insistons pas sur les conditions de possibilité; on a ou *quatre* solutions ou *zéro*.

On aperçoit aussitôt le cas particulier où a_1, a_2 sont *confondus :* dans ce cas, l'angle de B avec A_1, et A_2 est mesuré par $\frac{\widehat{ab}}{R}$, en appelant a le point unique a_1 ou a_2 et le problème n'est possible que si $V_1 = V_2$, ce qui prouve, d'après une réciproque déjà énoncée au paragraphe 1 de ce chapitre, que $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ sont *paratactiques*. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux cycles soient paratactiques positivement* (*ou négativement*) *est que leurs images positives* (*ou négatives*) *coïncident* (dans la méthode déductive exposée au chapitre précédent nous avions obtenu cette conclusion fondamentale); le fait que la parataxie est positive, et non négative, si les images positives coïncident, se vérifie aussitôt en songeant à un cycle et à sa focale positive.

Quand deux cycles $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ sont paratactiques, par exemple positivement, les images (b, β) d'un cycle cosphérique commun s'obtiennent, en prenant un point β sur le grand cercle section de la sphère S par le plan médiateur du segment α_1, α_2, mesurant l'angle $(O\alpha_1, O\beta)$ et prenant le point b arbitraire sur le petit cercle de S qui a a_1 pour pôle, lieu des points b tels que $(Oa_1, Ob) = (O\alpha_1, O\beta)$. Or si l'on appelle $2V$ l'angle aigu ou obtus $(O\alpha_1, O\alpha_2)$, l'angle $(O\alpha_1, O\beta)$ est compris entre V et $\pi - V$; or nous avons reconnu, en transformant par inversion un couple paratactique en un cycle et une focale, que tout cycle cosphérique coupe les cycles du couple sous un angle nécessairement compris entre les valeurs V et $\pi - V$, où V est l'angle de parataxie du couple (angle aigu constant sous lequel toutes les sphères issues de l'un coupent l'autre); en comparant avec le résultat qui vient d'être signalé, on voit que, *si deux cycles sont paratactiques positivement, leur angle de parataxie est la moitié de l'angle* $(O\alpha_1, O\alpha_2)$ *des focales négatives*. Nous retrouvons ce fait que, pour deux cycles axiaux, les images d'une espèce coïncident et que celles de l'autre espèce sont diamétralement opposées.

Le cas le plus simple de notre problème correspond à $V_1 = V_2 = \frac{\pi}{2}$, autrement dit à la recherche d'un cercle perpendiculaire commun; si a_1, a_2 sont distincts, b est à l'intersection de S et du diamètre perpendiculaire au plan Oa_1a_2; même résultat pour β et $O\alpha_1\alpha_2$; on trouve quatre cycles, mais deux cercles seulement, car les cycles ont deux à deux même support. *Si les cycles* A_1, A_2 *sont positivement paratactiques (ou antitactiques), ils ont une infinité de cercles perpendiculaires communs, négativement paratactiques entre eux*, car β et β' sont fixes et b, b' variables sur le grand cercle dont le pôle est $a (a_1 = a_2 = a)$. Choisissons le point β (plutôt que β') et prenons deux points b, b' diamétralement opposés; quand b varie, les cycles (b, β), (b', β) restent axiaux; ils engendrent une *demi-cyclide équilatère*; si l'on fait décrire à un point variable α le grand cercle réunissant α_1 et α_2, le cycle (a, α), où α varie, a restant fixe, engendre la *demi-cyclide équilatère complémentaire* : les cercles (a, β), (a, β') sont les axes anallagmatiques de la cyclide équilatère sur laquelle nous avons mis en évidence les deux familles orthogonales de cercles de Villarceau; M. Hadamard a proposé le nom de *série droite de Villarceau* pour la famille qualifiée ici *demi-cyclide équilatère*.

De même, si nous considérons deux points fixes a, β de S et les petits cercles de pôle a, β respectivement, de même rayon $(2RV)$ sphérique, tracés sur S, les cercles (a, α), (b, β) où α est variable sur le cercle de pôle β, b sur le cercle de pôle a, engendrent deux demi-cyclides complémentaires; sur la cyclide support commun, les deux familles de Villarceau ainsi obtenues se coupent sous l'angle $2V$; V est l'angle de parataxie de chaque cercle de Villarceau en jeu avec l'axe anallagmatique (a, β) et $\frac{\pi}{2} - V$ l'angle de parataxie avec l'axe conjugué (a, β') ou (a', β).

Soient maintenant trois cercles deux à deux cosphériques, donc orthogonaux à une même inversion I que nous supposerons négative. Les triangles sphériques $(a_1 a_2 a_3)$, $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ sont ou égaux, ou égal chacun à un symétrique de l'autre; dans le premier cas, les trois cercles ont deux points communs, inverses par rapport à I (M. Hadamard appelle ces points : *opposés*): cela résulte de la discussion que nous avons faite au paragraphe précédent, les deux points communs étant sur le diamètre autour duquel on fait tourner S pour appliquer le triangle $a_1 a_2 a_3$ sur le triangle $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$; dans le second cas, les trois cercles sont tracés sur une même sphère, orthogonale à I. Le cas intermédiaire est celui où a_1, a_2, a_3 sont sur un même grand cercle de S, et où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ possédent la même propriété et forment un groupe superposable à (a_1, a_2, a_3); les trois cercles appartiennent à un même faisceau linéaire tracé sur une sphère orthogonale à I, les points base de ce faisceau étant *opposés*. (Dans l'étude de la propriété 4, nous avions signalé ce cas spécial.)

Pour un couple de cycles $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ ayant deux points communs effectifs M, M', il y a ∞^1 inversions négatives I (dont le pôle est un point intérieur au segment MM'): chacune donne lieu à la construction d'un couple axial perpendiculaire commun à $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$; les triangles sphériques $(a_1 a_2 b)$, $(\alpha_1 \alpha_2 \beta)$ qui s'introduisent ont, en raison de $\overset{\frown}{a_1 a_2} = \overset{\frown}{\alpha_1 \alpha_2}$ leurs trois côtés égaux; on peut supposer $(a_1 a_2 b)$, $(\alpha_1 \alpha_2 \beta')$ *égaux*, de sorte que (b, β') donne le cycle perpendiculaire commun qui passe par les deux points M, M' et est orthogonal en ces points à la sphère σ contenant $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$; quelle que soit l'inversion I adoptée, ce cercle reste fixe; les triangles $(a_1 a_2 b)$, $(\alpha_1 \alpha_2 \beta)$ ne sont pas égaux, mais, puisque $(\alpha_1 \alpha_2 b)$ est égal à $(\alpha_1 \alpha_2 \beta')$ qui est symétrique de $(\alpha_1 \alpha_2 \beta)$ par rapport au plan $O\alpha_1\alpha_2$, le cercle $(b\beta)$ est tracé sur la sphère σ et, quand I varie, décrit sur σ le faisceau conjugué du faisceau $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$; tous les cercles $(b\beta)$ ainsi obtenus sont axiaux au cercle perpendiculaire commun $(b\beta')$ isolé trouvé précédemment. La figure réduite qui met le mieux ces propriétés en évidence se compose *de deux droites concourantes, de la perpendiculaire au plan des 2 droites en leur point commun, perpendiculaire qui est l'axe des ∞^1 cercles concentriques tracés dans le plan des 2 droites.*

5. Congruences paratactiques positives ou négatives. — Nous nous bornons dans ce paragraphe à des cycles tous orthogonaux à l'inversion I de pôle O et puissance $(-R^2)$; un cycle $\vec{A}$ (a, α) définit ∞^2 cycles qui lui sont positivement paratactiques et forment avec lui *une congruence paratactique positive : tous les cycles de la congruence ont même image positive* a, *autrement dit même focale positive* Oa; réciproquement les cycles qui forment une congruence paratactique positive sont caractérisés par ce fait qu'ils ont pour un même point O, commun à leurs plans, même focale positive, et que O a même puissance négative par rapport à eux. Le point a peut être considéré comme *l'image en bloc* de la congruence; ici il s'agit d'une congruence de cycles, ou d'une congruence *orientée*; la congruence formée par les cycles opposés a pour image a', au lieu de a; dans certaines questions il pourra être utile d'user de *cercles* au lieu de cycles : une congruence *non orientée* peut être représentée par le couple diamétralement opposé (a, a'). L'image *individuelle* des ∞^2 cycles de la congruence a s'obtient en associant à a successivement tous les points α du feuillet négatif; en nous reportant à la figure 13, nous avons

$$OA = R, \quad cO = R \cot V, \quad cA = \frac{R}{\sin V};$$

la distance sphérique $\widehat{a\alpha}$ est $2RV$; par suite, si a et α coïncident, on retrouve ce fait que *chaque demi-droite issue de* O *a ses deux images réunies au point où elle perce la sphère de centre* O *et rayon* R; on voit de même que si α coïncide avec a', *le cycle* $(a, \alpha = a')$ *est le grand cercle de* S *d'axe* Oa. En langage anallagmatique, le point α est le *symétrique* de a par rapport au cycle (a, α) : en effet, on peut prendre le symétrique de a par rapport au plan du cycle, ce qui donne α, puis l'inverse de α par rapport à la sphère dont le cycle (a, α) est un grand cercle : cette sphère passe en a et α puisque $ca = c\alpha = cA$ et l'inverse de α est α lui-même; on obtient donc *l'image détaillée de la congruence paratactique positive a en rassemblant les symétriques, par rapport aux cycles de la congruence, du point a lui-même;* MM. Hadamard et Bloch sont arrivés à cette conclusion par une voie assez longue et m'eussent devancé dans la découverte de la représentation sphérique exposée au paragraphe précédent, s'ils avaient profité de la remarque (qu'ils ont faite eux-mêmes) qu'un cycle orthogonal à I appartient à *une* congruence paratactique P positive (orientée) et à *une* congruence

N négative; si nous renversons le rôle de a et α, le point a jouera comme image de détail du cycle dans la congruence N; ces deux auteurs avaient fait constater que *par chaque point* M *de l'espace passe un cycle et un seul de chaque congruence* (a_1), (a_2) *et que l'angle de ces deux cycles est mesuré par* $\widehat{a_1 a_2}$ (*rapporté à* R) : pourquoi n'ont-ils pas remarqué qu'en vertu de la *même* proposition, les deux cycles ont aussi leur angle mesuré par $\widehat{\alpha_1 \alpha_2}$ et qu'ainsi est obtenue la propriété fondamentale d'une représentation de chaque cycle par deux images a, α ou par ses deux focales issues de O? Ce sont diverses inattentions de cette espèce, insignifiantes en apparence, commises par les divers chercheurs [y compris l'auteur de cet exposé (1)], qui ont retardé les progrès de la théorie.

Démontrons qu'effectivement, *par chaque point* M *de l'espace est tracé un seul cycle d'une congruence positive donnée a.* Cela résulte de la figure 14 et du résultat, indiqué à ce sujet, qu'à chaque couple M, M′ de points *opposés* correspond une rotation parfaitement déterminée de la sphère autour d'un axe orienté OL (portant M et M′), amenant l'image positive a d'un cycle passant en M. M′, orthogonal à I, de a en α; si donc a est donné, α en résulte, et aussi le cycle (a, α) d'une façon unique. Donc nous pouvons parler de l'*angle de deux congruences de même espèce; il est mesuré par la distance sphérique de leurs images* (*image en bloc*); d'ailleurs les deux focales Oa_1, Oa_2 dont on mesure l'angle ne sont autre chose que les cycles issus du point O lui-même.

Un résultat important est qu'*une congruence paratactique est déterminée d'une façon unique par la donnée de l'inversion négative* I, *de son espèce et d'un cycle de cette congruence, ou encore par la donnée de deux cycles paratactiques* (*sans autre indication*).

On reconnaît immédiatement que l'ensemble des cycles de la congruence (a), qui ont avec le cycle (a, α) un angle V donné de parataxie, est constitué par les cycles (a, β) où β décrit le cercle de S de pôle α et rayon sphérique 2RV; ces cycles engendrent une semi-cyclide de Dupin; nous avons déjà signalé ce résultat.

(1) En 1929, j'avais oublié de remarquer que Oa, $O\alpha$ étaient les droites focales du cycle $\vec{A}$ relatives au point O.

6. Représentation du cycle général; transformation de cycles en cycles avec conservation de la parataxie. — MM. Bloch et Hadamard parlent de la *figure merveilleuse* constituée par une congruence paratactique; nous sommes d'accord, mais cette beauté a eu l'inconvénient de séduire les divers chercheurs au point qu'ils se sont souvent cantonnés dans l'etude de telles congruences, orthogonales à une même inversion négative, et ont négligé des questions où seule la notion de parataxie entre en jeu : c'est ce qui arrive pour l'un des problèmes les plus simples, *construire un cycle paratactique à 3 cycles donnés*,

Nous allons donc faire connaître une représentation élégante, imaginée par M. Robert, des ∞^6 cycles de l'espace euclidien à 3 dimensions. *A chaque cycle nous faisons correspondre un vecteur dont l'origine est le centre du cycle, le support l'axe du cycle, la longueur le rayon, et le sens tel que le cycle tourne dans le sens direct autour du vecteur image.*

La figure 13 montre les caractères communs aux cycles d'une même congruence paratactique : le point O, *centre de la congruence*, est donné, ainsi que la focale Δ (d'espece donnée) qui est *l'axe*; le plan P perpendiculaire en O à l'axe est le *plan central* et contient les centres de tous les cercles de la congruence; le cycle conjugué de l'axe dans la congruence est tracé dans P et a O pour centre; son rayon R est le *rayon de la congruence* et le cycle est dit *cycle central*. Si nous considérons le cycle (a, α) de la congruence, son axe est parallèle à $a\alpha$, donc fait avec l'axe l'angle

$$V' = \frac{\pi}{2} - V \qquad \left(V = a\widehat{OA} = \widehat{AcO}\right);$$

on a donc $cA\cos V' = OA = R$; il en résulte que *la projection sur l'axe du vecteur* $\vec{U}$ *représentatif est égale au rayon de la congruence, quel que soit le cycle; les extrémités de ces vecteurs ont pour lieu le plan parallèle à* P, *à la distance* R *de* P *d'un côté convenablement choisi, pendant que* P *est le lieu des origines de ces mêmes vecteurs*; le plan, lieu des extrémités, sera dit *plan extrémal*. Le plan projetant $\vec{U}$ sur P est parallele au plan de Δ et $a\alpha$, de sorte que la projection de $\vec{U}$ est perpendiculaire en c à cO; $\vec{U}$ *fait l'angle* V' *avec* Δ, *donc l'angle* V *avec sa projection, de* *longueur* R cos V *ou* $c\mathrm{O}$, *déduite de* $\overrightarrow{c\mathrm{O}}$ *par simple rotation de* $\frac{\pi}{2}$ *autour de c dans* P, *dans un sens convenable.*

Faisons l'épure relative à deux cycles $\overrightarrow{\Omega_1 L_1}$, $\overrightarrow{\Omega_2 L_2}$ d'une même congruence (*fig.* 15); le plan central est pris comme plan horizontal; $O(o, o')$ est le centre de la congruence; $\Omega_1(\omega_1, \omega'_1)$, $\Omega_2(\omega_2, \omega'_2)$ sont les centres des cycles; $L_1(l_1, l'_1)$, $L_2(l_2, l'_2)$ sont les extrémités des vecteurs images, dans le plan extrémal de cote R; l'axe de la congruence peut être considéré comme ayant pour image un vecteur horizontal, de longueur illimitée, d'orientation arbitraire, issu de O. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux cycles soient paratactiques est que la différence* $\overrightarrow{\Omega_2 L_2} - \overrightarrow{\Omega_1 L_1}$ *des vecteurs images soit perpendiculaire à la droite* $\Omega_1\Omega_2$ *joignant les origines de ces vecteurs et de longueur égale au segment* $\Omega_1\Omega_2$; en effet, nous avons construit le vecteur $(\omega_2\lambda_2, \omega'_2\lambda'_2)$ équipollent a $\overrightarrow{\Omega_1 L_1}$; la différence géometrique est $(\lambda_2 l_2, \lambda'_2 l'_2)$ qui est un vecteur parallele au plan central; les deux triangles $o\omega_1\omega_2$ et $\omega_2\lambda_2 l_2$ sont égaux (le premier coincide avec le second par la translation $\overrightarrow{o\omega_2}$ suivie d'une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de ω_2), et cela démontre la proposition. *Ces conditions géométriques ne font intervenir que la différence des vecteurs images;* quand elles sont remplies, le plan contenant $\Omega_1\Omega_2$ et parallele à la différence $\left(\overrightarrow{\Omega_2 L_2} - \overrightarrow{\Omega_1 L_1}\right)$ est le plan central; dans ce plan, les perpendiculaires élevées en Ω_1, Ω_2 aux projections de $\Omega_1 L_1$, $\Omega_2 L_2$ sur le plan central se coupent au centre O et le rayon R est la distance de L_1 ou L_2 au plan central.

Si donc nous ajoutons géométriquement aux vecteurs de divers cycles un même vecteur, sans changer les origines, nous obtenons de nouveaux cycles qui sont ou non paratactiques suivant que les cycles primitifs le sont ou non: le nouveau plan extrémal, s'il s'agit de cycles paratactiques, peut être par rapport au plan central du même côté que l'ancien ou du côté opposé; la parataxie conserve son espèce dans le premier cas, est d'espece *opposée dans le second* (ce dernier résultat est évident par continuité; si le nouveau plan extrêmal vient se confondre avec le plan central, les deux cycles sont convertis en cycles tangents, ce qui est un cas de dégénérescence de la parataxie, cas où l'on ne peut plus parler du sens de la parataxie).

Il est utile d'indiquer les conditions de parataxie d'une droite et d'un cycle : la figure 15 montre que la droite Δ et le cycle d'image $\overrightarrow{\Omega L}$ sont paratactiques, si la perpendiculaire commune à $\overrightarrow{\Omega L}$ et Δ a son pied en Ω et est égale à la composante perpendiculaire à Δ du vecteur $\overrightarrow{\Omega L}$; la composante parallèle à Δ est le rayon de la congruence et cette composante, transportée par équipollence de façon à avoir pour origine le pied sur Δ de la perpendiculaire commune à Δ et ΩL est le vecteur image du cycle central.

Si donc la congruence initiale est figurée par une droite Δ et un cycle $\overrightarrow{\Omega L}$, comment appliquerons-nous la transformation de M. Robert à Δ et $\overrightarrow{\Omega L}$? Soit w (*fig.* 16) la composante parallèle à P. plan central, du vecteur constant ajouté à chaque vecteur image et soit trouvé le cycle $(\omega_1 l_1, \omega'_1 l'_1)$ tel que $\overrightarrow{\omega_1 l_1}$ soit équipollent à $\left(-\overrightarrow{w}\right)$; ce cycle est transformé en un nouveau cycle dont le vecteur image est perpendiculaire à P, de sorte que ce transformé est le nouveau cycle central; la droite $\overrightarrow{\Delta_1}$, nouvel axe, se déduit de l'ancien Δ, par la translation $\overrightarrow{o\omega_1}$ que l'on déduit du vecteur $\overrightarrow{w}$ par une rotation $\frac{\pi}{2}$ en sens inverse de celle qui transforme chaque vecteur $\overrightarrow{\omega o}$ en le vecteur $\overrightarrow{\omega l}$ correspondant.

La transformation de M. Robert permet de résoudre avec simplicité les problèmes suivants : *construire un cycle passant par n points et paratactique à* $(3-n)$ *cycles donnés* $(n = 3, 2, 1, 0)$. Le cas $n = 3$ est donné simplement pour mémoire et montrer la gradation des problèmes. Prenons d'abord $n = 2$; une inversion préalable permet de supposer que l'un des points est à l'infini et nous avons un problème classique à résoudre : construire les focales d'un cône à base circulaire; ce problème sera élucidé au paragraphe qui suit; nous verrons qu'il y a deux focales effectives, donc deux solutions pour le problème primitif. Pour $n = 1$, nous avons deux cycles et un point que l'on peut supposer rejeté à l'infini; on cherche donc une droite paratactique à deux cycles donnés C_1, C_2; on transforme l'un des cycles, C_2 par exemple, en un point, en ajoutant à chaque vecteur l'opposé du vecteur image de C_2 et l'on est ramené à mener par ce point transformé une droite paratactique à un cycle donné : c'est le problème qui précédait; on a donc encore deux solutions (pour la clarté, rappelons que deux cercles paratactiques C_1, C_2 sont enlacés; si l'un deux a un rayon très petit, tendant vers zéro, le cercle C_2 entoure C_1 et, à la limite, devient un point de C_1). Pour $n = 0$, on réduit encore l'un des cercles à un point et le problème est ramené au précédent ($n = 1$); la discussion est ainsi achevée et nous avons ainsi toujours deux solutions réelles, *une fois fixée l'orientation des cycles* (pour $n = 0$, par exemple, s'il s'agit d'un *cercle* paratactique à trois *cercles* donnés, il faudra fixer l'orientation sur chaque cercle donné, et cela fera *quatre* problèmes distincts, *huit* solutions, mais simplement quatre équations séparées du second degré).

Malheureusement cette méthode si féconde de M. Robert ne met pas en évidence, d'une façon commode, les conditions de rencontre, en *un* ou *deux* points, de deux cercles, non plus que les propriétés angulaires; mais elle a l'avantage précieux de ne pas nous confiner à l'intérieur d'une seule congruence paratactique ni d'une seule inversion négative.

Elle n'est pas une transformation ponctuelle : un point est remplacé par un cycle; elle n'est pas une transformation de contact, puisque nous pouvons remplacer deux cycles paratactiques par deux cycles tangents.

7. Focales d'un cône à base circulaire. Théorème de Chasles. — Nous avons vu que si une focale Δ d'un cercle C est relative à l'angle V, tous les plans passant par la focale coupent le cercle sous l'angle V; *donc deux focales de* C *ne peuvent se rencontrer que si elles sont relatives au même angle* (*car elles sont dans un même plan*) *et de système opposé;* chaque valeur de V donne manisfestement deux semi-quadriques complémentaires, lieux de ces focales, de révolution autour de l'axe de C et il est clair que, V variant de $\frac{\pi}{2}$ à zéro, l'hyperboloïde de révolution obtenu, d'abord réduit à l'axe de C, puis étalé sur la portion du plan de C extérieure à C, balaie (une seule fois) tout l'espace au cours de sa déformation continue, car deux de ces surfaces correspondant à deux valeurs de V différentes ne peuvent avoir de point commun; *donc par chaque point de l'espace passent exactement deux focales de* C.

Considérons donc (*fig.* 17) un cercle C de centre c, un point S quelconque (non situé dans le plan de C); si F est le pied d'une focale issue de S, la droite cF est perpendiculaire sur FS et sur la projection Fs de FS sur le plan de C; *donc* F *est sur le cercle dont cs est un diamètre;* d'autre part, si nous considérons deux spheres issues de C, le dièdre d'arête SF, dont les faces contiennent leurs centres, est égal à l'angle de ces deux sphères (propriété démontrée au chapitre précédent, paragraphe 3). Si donc nous imaginons le plan SAB, où A et B sont les extrémités sur C du diamètre porté par cs, les bissectrices, intérieure et extérieure, de l'angle en S du triangle SAB, percent l'axe de C au centre ω ou ω' de deux sphères orthogonales issues de C; les plans réunissant ces centres à SF sont perpendiculaires entre eux et coupés par le plan SAB suivant deux droites Sω, Sω' elles-mêmes rectangulaires, de sorte que Sω ou Sω' doit être perpendiculaire sur SF et par suite perpendiculaire au plan SFω' ou SFω (¹); si Sω est la bissectrice intérieure, qui coupe AB en f, intérieur au segment AB, le plan mené par Sω perpendiculairement sur Sω' coupe le plan de C suivant la perpendiculaire en f à csAB; le plan mené par Sω' perpendiculairement à Sω a sa trace sur le plan de C tout entière extérieure à C; or SF est dans l'un des deux plans en question, F étant intérieur à C, donc F est dans le plan mené par Sω, bissectrice intérieure de $\widehat{ASB}$, perpendiculairement au plan ASB; on a donc le point f dès que S est donné, et la perpendiculaire en f à cs dans le plan de C coupe le cercle de diamètre cs aux deux points F, F' qui sont les pieds des deux focales issues de S. Le cône qui a S pour sommet et C pour base a pour plans de symétrie, deux à deux rectangulaires, le plan SAB et les plans bissecteurs de l'angle $\widehat{ASB}$; les deux focales sont dans le plan bissecteur, appelé intérieur dans notre exposé (le point f est intérieur au segment cs d'après les propriétés bien connues de tout

(¹) C'est l'application du théorème bien connu que si un angle droit se projette sur un plan P suivant un angle droit, l'un des côtés de l'angle est parallèle au plan P. Ici on prend pour plan P le plan d'un rectiligne : les deux droites Sω, Sω' rectangulaires se projettent sur le plan du rectiligne suivant les côtés de ce rectiligne. qui est droit.

triangle plan, de la médiane, de la bissectrice et de la hauteur issues d'un même sommet).

On peut, en passant, signaler une propriété intéressante des focales; l'angle de parataxie V de la focale et du cercle est $\widehat{SFs}$ et $cF = R\cos V$, R désignant le rayon de C; appelons φ l'angle $\widehat{scF}$; φ est le rectiligne du dièdre sous lequel le segment SF est vu de l'axe du cercle; on a $Fs = cF \operatorname{tg}\varphi$ et $FS = Fs : \cos V = R \operatorname{tg}\varphi$; donc, *quelle que soit la focale d'un cercle donné, le segment compris entre le pied de la focale et un point de cette focale est proportionnel à la tangente trigonométrique de l'angle dont ce segment est vu de l'axe du cercle.* On peut remarquer que cet énoncé n'est, au fond, que la proposition, donnée en fin du paragraphe 3 du chapitre I (proposition qui a été essentielle pour la détermination actuelle), car l'axe du cercle et la focale admettent, en dehors de leur perpendiculaire commune, deux axes de symétrie, tels que la symétrie relative à un de ces axes échange l'axe et la focale; le segment FS devient alors le segment $c\Sigma$, si Σ est le transformé de S; l'angle φ, rectiligne du dièdre sous lequel $c\Sigma$ est vu de la focale, est l'angle des sphères, de centre c et Σ, contenant C (car le triangle $cA\Sigma$ est rectangle en c, $Ac = R$, et $c\Sigma = FS = R\,tg\varphi$, de sorte que l'angle des rayons Ac, $A\Sigma$ est égal à φ).

Il s'agit maintenant de démontrer le *théorème de Chasles : la somme (ou la différence) des angles d'une génératrice d'un cône du second degré avec les deux focales issues du sommet est constante.* Nous n'avons à faire ni la théorie des quadriques, ni celle des cônes du second degré; rappelons que, grâce aux travaux de M. Robert sur les focales des coniques, on peut démontrer par voie très élémentaire que tout cône du second degré admet deux séries de sections circulaires; une fois ce résultat obtenu, on prend sur le cône en jeu un cercle et l'on est ramené à la figure 17; sur chaque génératrice et sur les focales nous prenons les directions allant du sommet vers les pieds de chacune de ces droites sur le plan du cercle et nous avons ainsi les deux angles dont la *somme* est constante. Il s'agit donc d'*angles, non orientés, de droites orientées;* nous rabattons chacun d'eux sur le plan du cercle et alors, si dans le plan du cercle nous sommes amenés à introduire des angles *orientés*, nous n'aurons à considérer que leur *valeur absolue.* Nous fixons d'abord sur C et sur chacune des focales Δ ou Δ' des sens correspondants tels que toute sécante commune à C et à sa focale les coupe sous le même angle; l'angle $(\overrightarrow{cF}, \overrightarrow{cF'})$ que nous avons appelé 2φ est compris entre 0 et π; nous prenons comme sens de rotation positif celui qui amène $\overrightarrow{cF}$ sur $\overrightarrow{cF'}$ par cette rotation précise 2φ et orientons C dans ce sens, de façon que la tangente en A, coupée en u et u' par les droites cF et cF', soit orientée positivement de u en A et u' (*voir fig.* 18); la direction $\overrightarrow{FA}$ fait alors avec $\overrightarrow{Au'}$, un angle aigu (c'est l'angle $\widehat{FAu}$ compris à l'intérieur de l'angle droit cAu); donc nous devons prendre sur la focale Δ issue de F le sens positif $\overrightarrow{FS}$, car $\overrightarrow{FS}$ fait avec $\overrightarrow{Fs}$ un angle aigu et aussi un angle aigu avec toutes les demi-droites issues de F dans le demi-plan, limité par la droite indéfinie cu et contenant Fs; si nous rabattons le triangle MFS sur le plan de $\overrightarrow{C}$, autour de MF comme charnière, de façon que FS devienne parallèle à la tangente en M, la droite FS prend l'orientation $\overrightarrow{F\Sigma}$ parallèle à la tangente positive $\overrightarrow{M\sigma'}$ en M et de même sens avec $F\Sigma = R\,\mathrm{tg}\,\varphi$; l'angle à étudier $\widehat{MSF}$ est égal à $\widehat{M\Sigma F}$ ou à l'angle $\sigma'M\Sigma$ égal au précédent comme alterne-interne et la rotation $(\overrightarrow{M\sigma'}, \overrightarrow{M\Sigma})$ inférieure à π qui amène $\overrightarrow{M\sigma'}$ sur $\overrightarrow{M\Sigma}$ se fait dans le sens positif, puisque F, et par suite toute la parallèle FΣ à la tangente en M, sont par rapport à cette tangente du même côté que le cercle. Or un peu d'attention montre que la similitude de pôle f, transformant c en F, a sa rotation égale à $+\frac{\pi}{2}$, son rapport d'amplification égal à $\mathrm{tg}\,\varphi$; elle transforme donc $\overrightarrow{cM}$ en $\overrightarrow{F\Sigma}$ et par suite M en Σ; de la sorte $\overrightarrow{M\Sigma}$ tournant autour de M, dans le sens positif de l'angle φ, s'applique sur la direction $\overrightarrow{Mf}$. Si nous effectuons une symétrie par rapport au plan vertical cfS, le cycle $\overrightarrow{C}$ est remplacé par $(-\overrightarrow{C})$, la focale orientée $\overrightarrow{FS}$ est remplacée par $\overrightarrow{F'S}$ et les mêmes considérations appliquées au triangle MF'S conduisent dans le plan du nouveau cycle $\overrightarrow{C_1}$ opposé à $\overrightarrow{C}$, au point Σ' obtenu en menant $\overrightarrow{F'\Sigma'}$ parallèle à la tangente $\overrightarrow{M\sigma}$ (opposée à la précédente), de même sens que $\overrightarrow{M\sigma}$, et portant $F'\Sigma' = R \operatorname{tg}\varphi$; l'angle $\widehat{MSF'}$ est égal à l'angle $\sigma M \Sigma'$; la rotation, d'amplitude inférieure à π, amenant $\overrightarrow{M\sigma}$ sur $\overrightarrow{M\Sigma'}$ se fait dans le sens positif relatif à $\overrightarrow{C_1}$, et de même la rotation d'amplitude φ amenant $\overrightarrow{M\Sigma'}$ sur la direction $\overrightarrow{Mf}$; donc, revenant au sens positif relatif à $\overrightarrow{C}$, nous voyons que la rotation positive, d'amplitude π, amenant $\overrightarrow{M\sigma'}$ sur $\overrightarrow{M\sigma}$ est décomposée en 3 rotations positives successives : la première, d'amplitude $\widehat{\sigma' M \Sigma}$ ou $\widehat{MSF}$, amenant $\overrightarrow{M\sigma'}$ sur la direction $\overrightarrow{M\Sigma}$; puis une rotation d'amplitude 2φ amenant $\overrightarrow{M\Sigma}$ sur $\overrightarrow{M\Sigma'}$; puis une rotation d'amplitude $\widehat{\sigma M \Sigma'}$ ou $\widehat{MSF'}$ amenant $\overrightarrow{M\Sigma'}$ sur la direction $M\sigma$; *par conséquent la somme des angles* MSF, MSF' *est égale à* $\pi - 2\varphi$. La démonstration est ainsi obtenue en toute rigueur par voie très élémentaire; elle permet aussi, par analogie avec la démonstration analogue relative à une ellipse et aux distances focales de chaque point de l'ellipse, de donner une expression simple de la différence des angles MSF, MSF'; si υ, υ' sont ces angles, on a

$$\upsilon + \varphi = (\overrightarrow{M\sigma'}, \overrightarrow{M\Sigma}) + (\overrightarrow{M\Sigma}, \overrightarrow{Mf}) = (\overrightarrow{M\sigma'}, \overrightarrow{Mc}) + (\overrightarrow{Mc}, \overrightarrow{Mf}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{Mc}, \overrightarrow{Mf})$$

et de même

$$\varphi + \upsilon' = (\overrightarrow{Mf}, \overrightarrow{M\Sigma'}) + (\overrightarrow{M\Sigma'}, \overrightarrow{M\sigma}) = (\overrightarrow{Mf}, \overrightarrow{Mc}) + (\overrightarrow{Mc}, \overrightarrow{M\sigma}) = (\overrightarrow{Mf}, \overrightarrow{Mc}) + \frac{\pi}{2},$$

de sorte que l'on a

$$\upsilon' - \upsilon = 2(\overrightarrow{Mf}, \overrightarrow{Mc});$$

cette fois, le premier membre est positif ou négatif; le second membre est évalué, comme angle orienté, le sens de rotation positif étant indiqué par $\overrightarrow{C}$; on se bornera d'ailleurs pour $(\overrightarrow{Mf}, \overrightarrow{Mc})$ à la détermination comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

On peut, à titre de curiosité, calculer l'angle 2ω des focales SF, SF'; le triangle rectangle SfF donne

$$\sin\omega = \frac{Ff}{FS} = \frac{cF \sin\varphi}{R \operatorname{tang}\varphi} = \cos V \cos\varphi, \quad \sin\omega < \cos\varphi, \quad \omega < \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Par suite l'angle 2ω est inférieur, comme de juste, à $\pi - 2\varphi$, somme des deux autres faces du trièdre $S(FF'M)$ que nous venons d'étudier (1).

CHAPITRE III.

OPÉRATIONS SPHÉRIQUES. OPÉRATIONS PARATACTIQUES (2).

1. Généralités sur les opérations sphériques. — On sait qu'on appelle *transformation conforme* de l'espace euclidien à 3 dimensions toute transformation qui est la composition d'inversions sphériques ou planes, de déplacements, d'homothéties (positives ou négatives), en nombre quelconque, en ordre quelconque. Ces transformations forment un *groupe à dix paramètres :* on le voit en essayant de construire une figure F_1 transformée d'une figure F donnée; dans cette dernière, choisissons quatre points A, B, C, D *arbitraires* (c'est-à-dire non situés sur ∞^1 sphères, autrement dit non situés sur un même cercle); on peut donner *arbitrairement* les points A_1, B_1, C_1, ce qui engage neuf paramètres; les rapports mutuels des produits AD.BC, BD.CA, CD.AB doivent garder leur valeur, de sorte que le point D_1 ne peut plus être choisi que sur un certain cercle, axial au

---

(1) La figure 18 prête à beaucoup de remarques; les auteurs qui, récemment, ont donné des démonstrations géométriques de la proposition de Chasles emploient souvent la similitude, comme nous l'avons fait nous-même; or, en prenant sur la tangente en M, $\overrightarrow{\sigma M} = \overrightarrow{M\sigma'} = \overrightarrow{F\Sigma} = \overrightarrow{\Sigma' F'}$, le triangle $c\sigma\sigma'$ reste égal au triangle cuu', et de même sens, de sorte que cFF' et $c\sigma\sigma'$ sont deux triangles qui se correspondent dans la similitude de pôle c, remplaçant F par σ : mais alors on sait que le point I commun à $F'\sigma'$, $F\sigma$ est le second point commun aux cercles circonscrits à cFF' et $c\sigma\sigma'$; donc la somme des angles $F\widehat{\sigma\sigma'}$ (ou $F\widehat{\sigma}M$ égal à $F\widehat{\Sigma}M$ dans le parallélogramme $F\Sigma M\sigma$, donc égal à $M\widehat{S}F$) et $F'\widehat{\sigma'}\sigma$ (égal à MSF' pour la même raison) est égale au supplément de $\sigma\widehat{I}\sigma'$ ou $F'\widehat{I}F$: mais puisque I décrit le cercle circonscrit à $F'cF$, ce dernier angle reste égal à 2φ; donc la somme que nous étudions est bien égale à $\pi - 2\varphi$. C'est une autre démonstration, un peu moins simple. Le principe de continuité prouve que l'angle en I est égal à φ (et non $\pi - 2\varphi$), car si M vient en A, I vient en c.

(2) Cet exposé n'est pas un développement de recherches strictement personnelles, mais une synthèse de résultats dus aux géomètres dans leur ensemble. Il n'y a donc aucune raison pour éviter de copier tel géomètre qui a su déjà faire une théorie claire et complète. Aussi, dans ce chapitre et le suivant, la succession des propositions est sensiblement la même que dans l'article de M. Hadamard, mais la méthode de démonstration m'est personnelle et repose sur la représentation exposée précédemment des cycles orthogonaux à une même inversion négative.

cercle $A_1B_1C_1$ et le choix de D_1 constitue le dixième paramètre; M étant un point de F, son transformé n'est plus susceptible que de *deux* positions, *symétriques* l'une de l'autre par rapport à la sphère $A_1B_1C_1D_1$; si l'on a fait le choix de l'une, la variation par continuité de M à partir d'une premiere position définit, sans ambiguïté, la position du point homologue dans F_1 et notre résultat est établi. Les deux figures qui entrent en jeu dès que l'on a indiqué A_1, B_1, C_1, D_1 montrent qu'il y a lieu de distinguer parmi les transformations conformes celles qui remplacent un angle polyedre de tangentes orientées issues d'un même point M par un angle polyèdre *égal* au premier ou *égal à un symétrique*. Nous nous bornons (sauf avis contraire) à celles qui remplacent un angle polyèdre par un angle *égal*, et nous les appelons *opérations sphériques*, en adoptant la terminologie de M. Hadamard. Un déplacement, une homothétie peuvent être obtenues par composition d'inversions planes ou sphériques, donc nous pouvons nous borner à l'emploi d'inversions; nous nous bornons aussi à des inversions *positives* : on sait en effet qu'une inversion négative de pôle O, de puissance $(-R^2)$ équivaut à *quatre* inversions positives : l'inversion de pôle O, puissance R^2, suivie des symétries par rapport aux faces d'un trièdre trirectangle issu de O. Une seule inversion (positive) change l'orientation des polyèdres, de sorte que les opérations sphériques sont la résultante d'un nombre *pair* d'inversions positives. Essayons le nombre d'inversions pair : *zéro*, *deux*, *quatre*. Le nombre *zéro* donne la transformation identique; le nombre *deux* donne ce que nous appellerons avec M. Hadamard une *opération simple*; nous nous bornons à des inversions par rapport à des sphères *réelles*, puisque ces inversions sont *positives*; si les deux sphères S_1, S_2, dans cet ordre, sont effectivement sécantes, on peut remplacer $(S_1 S_2)$ composition des deux inversions successives par $(S'_1 S'_2)$, où S'_1, S'_2 sont deux sphères du faisceau (S_1, S_2) telles que l'angle (S'_1, S'_2) soit égal à l'angle (S_1, S_2) et de même sens; cela se voit aisément en *transformant* (au sens de la théorie des groupes) cette opération par une inversion dont le pôle est sur le cercle commun, de sorte que l'opération transformée est une *rotation métrique*; si les deux spheres S_1, S_2 ne sont pas sécantes, on peut encore les remplacer de ∞^1 façons par un couple (S'_1, S'_2) de leur faisceau : on le voit encore en prenant comme figure réduite deux sphères concentriques, de sorte que l'opération transformée est une *homothétie* (le cas de deux spheres tangentes donne le même résultat, l'opération transformée est une *translation*, quand on prend le pôle d'inversion au point de contact; mais nous éviterons ce cas dans nos recherches). Une opération simple est donc une transformation qui dépend de *sept* paramètres, car on peut la définir par l'ensemble (S_1, S_2) qui fait intervenir un paramètre supplémentaire, sans effet sur la transformation, à savoir le choix précis du couple (S_1, S_2) dans le faisceau déterminé par S_1, S_2; quand S_1, S_2 sont sécantes, nous appellerons cette opération : *rotation anallagmatique*, ou *rotation* tout court; le cercle (S_1, S_2) qui est l'*axe* ayant été orienté, *l'angle de la rotation* est le double de l'angle, défini à π près, amenant le plan tangent de S_1 en un point du cercle (S_1, S_2) sur le plan tangent de S_2 au même point; l'angle de rotation est donc défini, en grandeur et signe à 2π près; pour le cas de S_1, S_2 réelles, non sécantes, on peut, analytiquement parlant, employer leur cercle (idéal) commun et définir encore l'angle de S_1, S_2 qui est imaginaire pure; mais, dans notre étude, relative à la parataxie, ce cas interviendra rarement, pour ne pas dire jamais.

Considérons maintenant le cas de *quatre sphères* S_1, S_2, S'_1, S'_2 *réelles toutes les quatre, telles que* S'_1, S'_2 *soient toutes deux orthogonales à* S_1, S_2; l'opération qui consiste à composer les inversions S_1, S_2, S'_1, S'_2 dans cet ordre est la composition des deux opérations simples $(S_1 S_2)$, $(S'_1 S'_2)$ exécutées dans cet ordre; la première dépend de 7 paramètres, comme nous l'avons fait remarquer; la seconde dépend, une fois S_1, S_2 données (ou deux sphères du faisceau S_1, S_2 données), d'un paramètre de moins (pour raison déjà donnée) que S'_1 et S'_2, donc de trois paramètres seulement; le total $7 + 3$ coïncide avec 10, de sorte que, d'après un principe que j'ai énoncé au *Bulletin des Sciences mathématiques*, en 1942, *toute transformation du groupe conforme de l'espace à 3 dimensions, respectant la disposition des angles polyèdres de tangentes orientées, coïncide nécessairement avec une transformation* $(S_1 S_2 S'_1 S'_2)$ *de cette nature*. Si S_1, S_2 se coupent effectivement, on pourra prendre, comme figure réduite, deux plans sécants, S'_1, S'_2 étant alors deux sphères quelconques ayant leur centre sur la droite réduite (S_1, S_2) et l'on voit que S'_1, S'_2 *peuvent être sécantes*, leur cercle commun étant axial au cercle (S_1, S_2) et réciproquement, ou bien *que* (S'_1, S'_2) *peuvent être non sécantes;* dans le premier cas l'inversion orthogonale à S_1, S_2, S'_1, S'_2 a une puissance négative, dans le second cas une puissance positive, le pôle O étant toujours le centre radical des 4 sphères; si (S_1, S_2) sont non sécantes, S'_1 et S'_2 contiennent les points de Poncelet du faisceau (S_1, S_2), de sorte que S'_1 et S'_2 sont effectivement sécantes et que nous retombons, sauf changement de notations (et renversement de l'ordre des opérations simples) sur un cas déjà étudié. On peut remarquer que le cercle $(S_1\ S_2)$ est respecté (point pour point) par la rotation $(S_1 S_2)$ dont il est l'axe et respecté (dans son ensemble) par la rotation $(S'_1 S'_2)$; donc l'opération totale le respecte, ainsi que le cercle $(S'_1\ S'_2)$; il n'y a donc qu'une inversion qui soit respectée par l'opération totale, c'est l'inversion de pôle O, orthogonale aux quatre sphères; quand les deux cercles axiaux, axes de cette transformation $(S_1 S_2 S'_1 S'_2)$ sont réels tous deux, il n'y a aucun point qui reste invariant; si l'un, $(S_1 S_2)$ par exemple, est seul effectif, comme il passe par les points de Poncelet du faisceau $(S'_1 S'_2)$ et que chaque inversion S'_1 ou S'_2 échange ces points, l'opération $(S'_1 S'_2)$ ou $(S_1 S_2 S'_1 S'_2)$ laisse ces deux points invariants.

M. Hadamard a consacré plusieurs pages de son exposé, à la réduction, par voie élémentaire, de l'opération conforme générale à *cinq* ou *quatre* inversions positives, suivant qu'elle change ou non la disposition des angles polyèdres de tangentes (c'est pour ne pas reproduire cet exposé, auquel nous renvoyons le lecteur, que nous avons employé ici cet exposé synthétique, basé sur un principe auquel jai fait allusion plus haut et qui revient au théorème de Dalembert sur l'existence des racines d'un polynome entier; c'est le seul paragraphe de ce travail qui ne soit pas rédigé avec les seules connaissances des Mathématiques Élémentaires; en raison de l'utilité constante de ce principe, employé souvent sans le dire explicitement, le lecteur nous excusera de ne pas avoir ici respecté les engagements pris dans l'introduction).

On peut alors remarquer que S_1 et S'_1 étant réelles et orthogonales, elles se coupent suivant un cercle effectif A_1 et de même S_2, S'_2 se coupent suivant un cercle effectif A_2; on peut, dans l'opération $(S_1 S_2 S'_1 S'_2)$ intervertir l'ordre des sphères orthogonales S_2, S'_1 et prendre l'opération sous la forme $(S_1 S'_1 S_2 S'_2)$, ou $(S_1 S'_1)\ (S_2 S'_2)$:

(1) Le travail cité a précisément été inspiré par cette réduction (en même temps que par d'autres questions énumeratives). Il peut s'énoncer ainsi : si une variété algébrique W, à m dimensions, est contenue dans une variété V algébrique, *indécomposable*, à m dimensions, la variété W épuise *complètement* V.

mais alors $(S_1 S'_1)$ est un *renversement* (rotation d'amplitude π) autour de A_1, $(S_2 S'_2)$ un renversement autour de A_2. (Nous remplacerons souvent le mot *renversement* par son synonyme : *transposition.*) *Mais alors nous retrouvons pour les deux cercles* A_1, A_2 *les sphères de M. M. Hadamard dans le problème des cercles perpendiculaires communs à* A_1, A_2 : ces cercles perpendiculaires communs sont $(S_1 S_2)$ et $(S'_1 S'_2)$. Énonçons donc le théorème général :

Toute opération sphérique (qui n'est ni l'opération identique, ni une opération simple) est réductible de ∞^2 *façons à la composition de deux renversements d'axes* A_1, A_2 *quelconques ou d'une unique façon à la composition de deux rotations conjuguées autour des cercles perpendiculaires communs, axiaux*, C, C′ *à ces deux cercles* A_1, A_2. Il est facile de justifier pourquoi, pour une même opération sphérique, il y a ∞^2 réductions à deux renversements successifs A_1, A_2 (dans cet ordre), car les axes C, C′ conjugués de l'opération ayant été déterminés, il y a ∞^1 couples de sphères (S_1, S_2) issues de C et faisant entre elles l'angle $\frac{\varphi}{2}$ moitié de la rotation autour de C, et de même ∞^1 couples (S'_1, S'_2), et l'on a ainsi ∞^2 systèmes $A_1 (S_1, S'_1)$, $A_2 (S_2, S'_2)$. Bien entendu si A_1, A_2 sont paratactiques, il y a au moins ∞^1 réductions *canoniques* (réductions à deux rotations d'axes conjugués), puisque de A_1, A_2 on peut déduire ∞^1 couples C, C′; nous verrons qu'il y a même, dans le cas où les deux rotations conjuguées ont la même amplitude, ∞^2 réductions canoniques, et ∞^3 réductions à un système de deux renversements. En tous cas le lien du probleme de la réduction de l'opération sphérique à deux rotations conjuguées avec le problème des cercles perpendiculaires et l'étude de la parataxie est mis en évidence.

On a aussi une façon presque obligatoire de *classer les dix paramètres de l'opération sphérique générale : 4 pour le choix de l'inversion fondamentale* I, *puis* 6 *pour la transformation générale qui laisse invariante cette inversion fondamentale;* en d'autres termes, à chaque inversion fondamentale correspond un sous-groupe à 6 paramètres du groupe des opérations sphériques; chaque point M de l'espace se trouve associé à son inverse M′ par I, par l'ensemble des ∞^1 cycles orthogonaux à I issus de M, se recroisant en M′; il suffit donc (tout au moins quand on étudie les couples de points M, M′ inverses relativement à I) d'étudier les ∞^4 cycles orthogonaux à I et de voir comment ils s'échangent les uns en les autres; on remarquera aussi que I n'est elle-même une *opération sphérique* que si elle est négative, et c'est l'une des raisons pour lesquelles l'étude de ces inversions invariantes négatives est plus intéressante.

2. **Transformations des feuillets, positif et négatif, de la sphère** S. **Opérations paratactiques.** — Nous nous bornons donc au cas ou l'inversion fondamentale invariante I est négative; O est son pôle, $(-R^2)$ sa puissance; S est la sphère de centre O et rayon R. *Les cycles orthogonaux à* I *s'échangent entre eux, sans que leur angle, quand ils sont sécants, change; s'ils sont paratactiques, ils le restent,* l'espèce ne changeant pas; donc, *chaque feuillet de* S *est remplacé par lui-même, un point étant remplacé par un point* (puisqu'une congruence paratactique se transforme en une autre de même espèce); *la conservation des angles des cercles sécants entraîne que les distances soient conservées, donc chaque feuillet subit simplement un déplacement autour de* O; il n'y a pas lieu en effet de considérer le cas où un feuillet serait changé en ce même feuillet ayant subi non seulement un déplacement autour de O, mais encore une symétrie relativement à O, car une opération sphérique peut toujours être décomposée en une série d'opérations sphériques infiniment petites, de sorte que la transformation d'un feuillet en lui-même peut elle aussi être considérée comme résultant d'une série de déformations infinitésimales et que la disposition d'un triangle sphérique tracé sur ce feuillet ne peut que rester la même. Non seulement l'espace des ∞^4 cycles orthogonaux à Σ $(x^2+y^2+z^2+R^2=0)$ a été, en quelque sorte, fendu en une somme de deux espaces à 2 dimensions chacun, mais le groupe des ∞^6 opérations sphériques qui laissent Σ invariante a été fendu, lui aussi en la réunion de deux groupes à 3 paramètres chacun, constitués par les déplacements du feuillet positif de S et du feuillet négatif autour du centre commun O; nous voyons aussi pourquoi la géométrie des congruences paratactiques se trouve ramenée à un chapitre de géométrie sphérique : les chercheurs précédents l'avaient constaté, plus ou moins, sans en avoir donné la raison profonde.

Il faut toutefois remarquer que, *si toute opération sphérique orthogonale à* I *se traduit par une seule transformation sphérique des feuillets sphériques de* S, *à chaque transformation de ces* *deux feuillets correspondent deux opérations sphériques distinctes, dont chacune est égale au produit par* I *de l'autre;* en effet, si une opération sphérique remplace le point M par le point M_1, en faisant suivre l'opération en jeu de l'inversion I, on passe de M à M'_1 *opposé* de M_1, mais chaque *couple* (M, M') est transformé en le *couple* (M_1, M'_1) et chacune des transformations (M, M_1), (M, M'_1), produit le même effet sur les cycles orthogonaux à I et sur les feuillets de S; si nous n'avons à étudier que des cycles orthogonaux à I, cela ne nous gênera pas; si nous avons une opération sphérique précise à étudier, elle sera définie comme composition de deux rotations conjuguées, dont les axes seront, cette fois, parfaitement définis par leurs images; donc il suffira de savoir comment ces axes, donc leurs images, se transforment, et de connaître l'amplitude de chaque rotation, pour que l'ambiguïté signalée plus haut n'intervienne plus.

Considérons *les transformations qui laissent immobile un feuillet de* S : celles qui laissent le *feuillet positif immuable* sont dites *opérations paratactiques négatives : une telle opération* laisse *chaque congruence paratactique positive immuable dans son ensemble*, mais permute entre eux les divers cycles de cette congruence; *le feuillet négatif de* S *tourne d'un angle* 2φ (*orienté*) *autour du diamètre* (*orienté*) $\overrightarrow{O\alpha}$; φ, *qui est ainsi déterminé à* π *près s'il s'agit de cycles, mais à* 2π *près s'il s'agit de points isolés. est l'amplitude de cette opération;* la congruence paratactique négative α est immuable, chaque cycle de cette congruence étant resté invariable; c'est cette raison qui fait adopter le nom : *négative* pour cette opération paratactique; la congruence *négative* α est dite *axe de l'opération;* l'opération a pris le nom de son axe [1] (mais non des congruences qui restent immuables chacune dans son

---

[1] On peut hésiter pour savoir *a priori* si l'opération décrite sera appelée *positive* ou *négative*; il y a d'excellentes raisons pour adopter l'un ou l'autre choix. Je me suis conformé au choix fait par M. Hadamard; ce géomètre, dans sa *Géométrie de l'Espace* (Armand Colin, 1932), appelle, à la page 636-637, *transformation paratactique attachée à une congruence paratactique de signe donné* l'opération résultant de deux rotations *égales* autour de deux cycles conjugués choisis arbitrairement dans la congruence, mais ne dit pas quel signe est attaché à cette opération. Ce n'est que page 666 qu'il dit : toutes les opérations *paratactiques directes* d'inversion principale I transforment en elle-même toute congruence paratactique *rétrograde* de même inversion principale.

ensemble). Chaque congruence négative β est remplacée par une autre congruence β_1 ; nous allons calculer *l'angle* δ de β et β_1 (angle défini au paragraphe 5 du chapitre précédent), c'est-à-dire l'angle constant des deux cycles, issus d'un point M, l'un appartenant à la congruence β, l'autre à la congruence β_1 ; l'angle δ est celui des rayons $O\beta$, $O\beta_1$; soit d l'angle $(O\alpha, O\beta)$; sur la figure 19, nous avons marqué le petit cercle de pôle sphérique α, issu de β, puis l'arc de grand cercle $\beta\gamma\beta_1$, dont γ désigne le milieu ; le triangle sphérique $\alpha\beta\gamma$ est rectangle en γ et l'on a $(O\beta, O\gamma) = \frac{\delta}{2}$; l'angle dièdre en α de ce triangle est φ et la relation de proportionnalité des sinus des angles et des côtés opposés fournit $\sin\frac{\delta}{2} = \sin\varphi \sin d$. On remarquera qu'un cycle (b, β) est remplacé par un cycle (b, β_1) qui lui est *positivement* paratactique, l'angle de parataxie étant $\frac{\delta}{2}$.

Ce qui précède montre que *deux opérations paratactiques d'espèce opposée sont permutables; deux operations de même espèce se composent comme des rotations d'axes concourants de la géométrie métrique sphérique et elles ne sont permutables que si elles ont le même axe.*

Avant de continuer l'étude des opérations paratactiques, passons à l'étude des *rotations anallagmatiques* : (a, α) étant un cycle orthogonal à I, faisons tourner le feuillet positif de l'angle φ (défini à 2π près) autour de $\overrightarrow{Oa}$, et le feuillet négatif de ce même angle autour de $\overrightarrow{O\alpha}$; nous voulons prouver que *la rotation d'amplitude φ autour du cycle (a, α) se traduit précisément par ces rotations simultanées des deux feuillets.*

La proposition est évidente si a et α sont confondus, car alors le cycle (a, α) est porté par la droite Oa, et, dans une rotation, d'amplitude φ autour de Oa, les images d'un cycle quelconque orthogonal à I suivent elles-même le mouvement de rotation. Si a et α sont distincts, comment obtient-on un cycle, orthogonal à I, sécant à (a, α)? On choisit un couple (a_1, α_1) tel que $\overset{\frown}{aa_1} = \overset{\frown}{\alpha\alpha_1}$; par la transformation que nous étudions, a_1 vient en a_2 et α_1 en α_2 ; or les triangles sphériques isosceles aa_1a_2, $\alpha\alpha_1\alpha_2$ sont *égaux;* donc, d'après les remarques faites à la fin du paragraphe 4 du chapitre précédent, les trois cycles (a, α), (a_1, α_1), (a_2, α_2) sont concourants, *ce qui prouve que chaque point du cycle* (a, α) *reste immobile* par la transformation (quelle que soit d'ailleurs la valeur de φ) : *donc l'opération est une rotation d'axe* (a, α); d'autre part, comme la composition de deux opérations de cette espèce, de même axe (a, α) caractérisées par les valeurs φ_1, φ_2 équivaut à l'opération de même espece encore, caractérisée par la somme $\varphi_1 + \varphi_2$ et que $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ conduisent à la transformation identique *l'amplitude de la rotation est* φ (*et* φ *est déterminé à* 2π *près*).

Ce résultat établi, *l'opération paratactique négative d'amplitude* φ *autour de* $\overrightarrow{O\alpha}$ *peut être regardée comme succession, dans l'ordre que l'on voudra, de la rotation d'amplitude* φ *autour du cycle* (a, α), *et de la rotation d'amplitude* φ *autour du cycle conjugué* (a', α) *négativement paratactique au précédent, a désignant un point arbitraire du feuillet positif*, car les deux rotations d'amplitude φ chacune du feuillet négatif autour de $O\alpha$ s'ajoutent, tandis que les deux rotations, de même amplitude encore, autour de Oa, puis Oa' se détruisent. On voit qu'à ce point de vue φ est déterminé à 2π pres et non à π près et que l'opération choisie comme définition est distinguée nettement de celle qui consisterait à composer cette opération avec l'inversion I. Si les cycles choisis comme axes étaient (a, α), (a, α'), les amplitudes des deux rotations devraient être *égales et de signe contraire*, la premiere égale à φ, l'autre à $(-\varphi)$. On se rappellera donc, que dans les questions où l'orientation ne joue qu'un rôle accessoire, deux rotations égales, en valeur absolue, autour de deux cercles conjugués donnent une opération paratactique, mais pour pouvoir préciser le signe de l'opération, il est indispensable d'orienter les axes; *deux cycles axiaux, paratactiques d'une certaine espèce donnent par la composition de deux rotations égales autour d'eux une opération paratactique de la même espèce et, par composition de deux rotations opposées une opération paratactique d'espèce contraire. Une opération paratactique est susceptible de* ∞^2 *décompositions canoniques en deux rotations conjuguées.* Nous avions trouvé ces résultats avec aisance à la fin du chapitre précédent par une méthode différente, basée sur l'étude du tore.

L'opération paratactique d'amplitude π *est équivalente à l'ensemble de deux renversements par rapport à deux cercles axiaux, donc à l'inversion* I; elle peut être regardée, comme positive, ou négative, donc a ∞^1 réductions canoniques; cette opération ne produit aucun changement sur les feuillets de S, et c'est pourquoi une opération sphérique ne se trouve pas suffisamment précisée par la transformation correspondante des feuillets de S et pourquoi l'amplitude d'une opération paratactique doit être déterminée à 2π pres et non à π près. Quand on considère une opération paratactique, négative par exemple, d'axe α, puisque chaque cycle de l'axe est invariable, un point M de l'espace décrit, si l'axe α reste le même, mais si φ varie de o à 2π, le cycle de la congruence qui passe en M, en se déplaçant toujours dans le même sens, revenant au point de départ quand φ est devenu égal à 2π; si a est l'image positive du cycle en jeu, on constate en effet que la rotation, d'angle φ variable, de o à 2π, autour du cycle (a, α) laisse chaque point invariant sur ce cycle; ensuite la rotation autour de (a', α) fait décrire au point M tout le cycle (a, α), une fois seulement, quand φ varie de o à 2π. *Il est très remarquable de constater ici que* $\overrightarrow{\Delta_1}$ (a_1, α) *étant un cycle quelconque de la congruence* α, *et* (M, M_1) *deux positions du point* M *au cours de l'opération, l'angle des sphères* $(\overrightarrow{\Delta_1}, M)$, $(\overrightarrow{\Delta_1}, M_1)$ *est indépendant du choix de* $\overrightarrow{\Delta_1}$ *dans la congruence :* nous retrouverons cette proposition au paragraphe qui suit. *Une opération paratactique, négative, d'axe* (α), *d'amplitude* φ, *peut de* ∞^3 *façons différentes être décomposée en deux transpositions autour de deux cycles positivement paratactiques*, tandis que pour une opération sphérique non paratactique, il y a ∞^1 réductions seulement à la composition de deux transpositions. En effet, sur le grand cercle, du feuillet négatif, de pôle α, figurons un point α_1 arbitraire, puis celui déduit de α_1 par la rotation φ autour de $\overrightarrow{O\alpha}$; choisissons ensuite le point a arbitrairement sur le feuillet positif; les deux transpositions (a, α_1), (a, α_2) dans cet ordre laissent le feuillet positif inchangé et font tourner le feuillet négatif de 2φ autour de $\overrightarrow{O\alpha}$, donc leur composition est l'opération paratactique d'axe α, d'amplitude φ *ou* $\varphi + \pi$: on départage immédiatement ces deux conclusions, qui s'excluent, par des essais; c'est φ qu'il faut choisir, car si l'amplitude de l'opération tend vers zéro, α_2 tend vers α_1 et les deux renversements d'axe (a, α_1), (a, α_2) se détruisent quand α_2 coïncide avec α.

Prenons maintenant *l'opération sphérique générale*, supposée telle que l'inversion fondamentale de cette opération soit *négative*; nous savons, par l'exposé que nous avons fait ici, et sans avoir à nous servir des résultats exposés par les autres géomètres, que le feuillet positif de S a subi une rotation d'amplitude $2t$ autour d'un diamètre orienté $\overrightarrow{Oa}$, le feuillet négatif une rotation d'amplitude 2τ autour d'un diamètre orienté $\overrightarrow{O\alpha}$; les nombres t et τ sont déterminés à π près, l'un et l'autre; on voit que la composition des deux opérations paratactiques :

positive d'axe a	d'amplitude t *ou* $t+\pi$
negative d'axe α	d'amplitude τ *ou* $\tau+\pi$

produit le même effet sur les feuillets; les opérations sphériques provenant des choix (t, τ), $(t+\pi, \tau+\pi)$ sont strictement équivalentes, car on peut intervenir toujours l'ordre de deux opérations paratactiques d'espèce différente, et, dans le cas d'opérations de même espèce, on peut encore les intervertir si elles ont le même axe, de sorte que le choix $(t+\pi, \tau+\pi)$ revient à faire d'abord l'opération sphérique résultant du choix (t, τ), puis l'opération paratactique d'axe a, d'amplitude π, puis l'opération paratactique *d'axe α, d'amplitude π, c'est-à-dire deux fois l'inversion* I *et ces* deux inversions I successives se détruisent; supposons donc que le choix, réduit ainsi à (t, τ) ou $(t+\pi, \tau)$, soit (par changement de notations) (t, τ), de sorte que l'opération sphérique étudiée soit effectivement équivalente à la composition des deux opérations paratactiques en jeu d'amplitude t et τ respectivement.

Nous considérons l'opération paratactique d'axe a d'amplitude t comme composition d'une rotation d'axe (a, α) d'amplitude t et d'une rotation d'axe (a, α'), d'amplitude t aussi, puis l'opération paratactique d'axe α, d'amplitude τ, comme composition de deux rotations d'amplitude τ et d'axes respectifs (a, α). (a', α); les deux rotations successives d'axe (a, α) se composent en une seule rotation d'axe (a, α) toujours, et d'amplitude $t+\tau$; une rotation d'amplitude τ autour du cycle (a', α) peut être regardée comme ayant pour axe (a, α') et pour amplitude $(-\tau)$, de sorte que les rotations d'axe commun (a, α') se composent en une seule d'amplitude $(t-\tau)$. Nous avons donc démontré directement que *toute opération sphérique dont l'inversion fondamentale est* *négative, est réductible à deux rotations conjuguées* (c'est-à-dire dont les axes sont deux cercles axiaux) *réelles*, dont les amplitudes (prises en valeur absolue) sont inégales, à moins que l'opération ne soit paratactique; *de plus une telle opération sphérique est équivalente à la composition de deux opérations paratactiques d'espèce opposée*. Il y a (sauf le cas d'opération paratactique) *une seule réduction à deux rotations conjuguées*, mais deux réductions à la composition de deux opérations paratactiques (l'amplitude de chacune de ces opérations pouvant être augmentée *simultanément* de π).

Si nous appelons r, ρ les amplitudes des rotations conjuguées d'axes (a, α), (a, α'), et t, τ les amplitudes des opérations paratactiques d'axes a, ou α, on a les relations précises

$$r = t + \tau, \qquad \rho = t - \tau,$$

pour déterminer r, ρ quand t, τ sont donnés; les nombres t, τ primitivement étaient déterminés à π près, mais nous avons vu que, si l'on considère une transformation paratactique comme opérant sur des *points isolés* et non des *couples de points opposés*, il y a nécessité de regarder t, τ comme déterminés à 2π près (ici nous avons la conclusion un peu moins restrictive, à savoir de regarder le couple t, τ comme pouvant être remplacé par $t + h\pi$, $\tau + k\pi$ où h, k sont des entiers de même parité).

Inversement si r, ρ sont connus, *on a pour calculer t, τ les formules*

$$t = \frac{r}{2} + \frac{\rho}{2}, \qquad \tau = \frac{r}{2} - \frac{\rho}{2},$$

mais il faut se garder d'écrire $t = \frac{r+\rho}{2}$, $\tau = \frac{r-\rho}{2}$; en effet, si r est considéré comme déterminé à 2π près, et de même ρ, chaque quantité $\frac{r}{2}$, $\frac{\rho}{2}$, *qui entre aussi bien dans t que dans τ*, et est *la même*, *dans t* ou τ, est déterminée, séparément, à π près, de sorte que remplacer r, ρ par d'autres déterminations $r + 2h\pi$, $\rho + 2k\pi$ remplace t par $t + (h+k)\pi$, τ par $\tau + (h-k)\pi$: *les entiers $h+k$, $h-k$ ont la même parité*; si nous écrivions $t = \frac{r+\rho}{2}$, $\tau = \frac{r-\rho}{2}$, nous risquerions de calculer $r + \rho$ à 2π près, d'après un graphique par exemple, et de calculer ensuite $r - \rho$ également à 2π près, sans établir de liaison entre les deux calculs, de sorte que, cette fois, t, τ seraient peut être augmentés de multiples de π *n'ayant pas la même parité* ! Ces propriétés arithmétiques sont sans doute un peu subtiles, mais elles tiennent à la nature même des choses, à savoir à la possibilité, *de deux façons*, de réduire l'opération sphérique à la composition de deux opérations paratactiques et une théorie précise ne peut que se conformer aux propriétés des éléments mathématiques étudiés.

3. **Propriétés diverses relatives aux opérations paratactiques.** — Nous allons démontrer plusieurs propositions qui se présentent souvent dans les applications. D'abord : *toute sphère σ orthogonale à* I *contient un cycle, et un seul, d'une congruence paratactique donnée orthogonale à* I; en effet les ∞^2 plans, issus de O, donnent l'ensemble des cercles, orthogonaux à I, tracés sur σ; orientons deux quelconques d'entre eux, qui seront donc figurés par (a, α), (b, β) avec $\widehat{ab} = \widehat{\alpha\beta}$. A chaque point c du feuillet positif S correspond le point γ du feuillet négatif, tel que les triangles sphériques abc, $\alpha\beta\gamma$ soient *égaux et de disposition contraire* : les trois cycles (a, α), (b, β), (c, γ) sont situés sur une même sphère, qui est σ; donc à chaque congruence paratactique orientée, positive (ou négative), déterminée par son image globale c (ou γ) correspond un cycle de σ appartenant à cette congruence, et il n'y en a pas d'autre, puisque deux cycles d'une même congruence ne peuvent être cosphériques ([1]).

Étant donnés deux points M, M_1 *arbitraires, il existe une opération paratactique et une seule, d'espèce donnée, orthogonale à* I, *transformant* M en M_1 *: les deux opérations d'espèce contraire ainsi trouvées ont la même amplitude en valeur absolue.* Cette proposition, presque évidente, a besoin néanmoins d'être étudiée en détail; si la concision est une qualité, elle a souvent pour inconvénient, même pour l'auteur, de ne pas laisser entrevoir toutes les conséquences

---

([1]) Il est intéressant de montrer par un nouvel exemple la puissance du principe cité au paragraphe 1 de ce chapitre. Les congruences paratactiques, positives par exemple, orthogonales à I forment une variété V_2, indécomposable, à deux dimensions. Les plans pivotant autour de O déterminent, sur σ, ∞^2 cycles appartenant chacun à une certaine congruence positive, de sorte que les ∞^2 congruences ainsi obtenues constituent une variété W_2, à deux dimensions, contenue dans V_2, *donc l'épuisant* : la proposition est ainsi obtenue, et la géométrie fournit ensuite ce renseignement que chaque congruence ne peut fournir qu'un cycle.

et c'est sans doute pour des raisons de ce genre que les progrès de la théorie de la parataxie ont été si longs. Considérons deux cycles axiaux $\vec{C}$, $\vec{\Gamma}$ et deux points M, M_1 sur $\vec{C}$; la rotation d'axe $\vec{\Gamma}$, qui amène M sur M_1, est unique et déterminée (à 2π près), en grandeur et signe; si nous la complètons par la rotation, d'axe $\vec{C}$, de même amplitude (mais de même signe ou de signe contraire), nous avons par le total des deux rotations successives une opération paratactique orthogonale à l'inversion orthogonale à $\vec{C}$, $\vec{\Gamma}$, qui fait venir M en M_1 et nous voyons bien pourquoi ces deux opérations paratactiques, d'espèce opposée, ont la même amplitude, chacune étant, *si on ne l'applique qu'au point* M, équivalente à la simple rotation autour de $\vec{\Gamma}$. Si nous revenons à la proposition précise donnée ici, nous n'avons qu'à associer aux points donnés M, M_1 leurs opposés M', M'_1 pour avoir le cycle (jouant le rôle de $\vec{C}$) qui reste invariable (dans son ensemble) au cours de l'opération; (a, α) étant l'image de ce cycle, le cycle conjugué par rapport à I, est celui qui joue le rôle de $\vec{\Gamma}$; il a pour image (a, α') ou (a', α).

Il est instructif de voir l'épure à laquelle conduit notre représentation imagée : le point M est figuré par deux cycles qui s'y croisent, en même temps qu'en M'; choisissons pour l'un (a, α) le cycle qui réunit M, M', M_1, M'_1 ; de la sorte M est figuré par deux cycles (a, α), (b, β) avec $\widehat{ab} = \widehat{\alpha\beta}$; pour le point M_1 nous pouvons adopter (a, α), puis (b, β_1) et (b_1, β), puisque nous avons vu qu'il y a dans chaque congruence déjà connue b ou β un cycle et un seul qui passe en M_1 ; nous avons ainsi sur le feuillet positif S un triangle *isocèle* sphérique abb_1 égal au triangle *isocèle* sphérique $\alpha\beta_1\beta$ du feuillet négatif S, *et de même disposition* (a, α étant homologues, b et β_1, puis b_1 et β) : on a en effet $\widehat{\alpha\beta_1} = \widehat{ab} = \widehat{\alpha\beta}$, $\widehat{ab_1} = \widehat{\alpha\beta} = \widehat{ab}$ et $\widehat{bb_1} = \widehat{\beta\beta_1}$. Il y a donc deux opérations paratactiques positives, d'amplitude différant de π, laissant le feuillet négatif S inchangé et faisant pivoter le feuillet positif autour de a, de sorte que b vienne en b_1 ; le *bipoint* MM' (couple de deux points opposés) défini par (a, α), (b, β) devient donc le bipoint $M_1M'_1$ défini par (a, α), (b_1, β); l'amplitude est mesurée (à π près) par la moitié de l'angle dièdre en a du triangle sphérique abb_1 ; nous gardons l'opération qui échange M avec M_1 ;

on aperçoit de même les opérations paratactiques négatives qui laissent sur le feuillet négatif S le point α immobile et font passer de β à β_1, donc échangent (MM') avec $(M_1 M'_1)$; l'angle dièdre en α est égal à l'angle en a, de sorte que les opérations précises conservées ont même amplitude [au premier abord, on peut craindre qu'elles diffèrent de π; mais le principe de continuité (M_1 très voisin de M) montre que les amplitudes sont égales]. — D'ailleurs ce que nous venons de dire se rattache à la remarque déjà faite qu'à chaque bipoint (MM') correspond un déplacement de l'espace autour de O; puisque $\widehat{ab} = \widehat{\alpha\beta}$, le déplacement qui amène le feuillet positif (ou négatif) S sur le feuillet négatif (ou positif) de façon que a vienne en α, et b en β (ou α en a, et β en b) correspond à une opération paratactique R positive ou négative, amenant M en O; il suffit donc d'envisager l'opération paratactique de même espèce R_1 amenant M_1 en O et d'opérer la composition $R\,R_1^{-1}$, qui transforme M en M_1.

Étudions maintenant comment se transforme une sphère σ après une opération paratactique : deux cas, suivant que σ est orthogonale à I, ou non. *Une sphère σ orthogonale à* I, *soumise à une opération paratactique orthogonale à* I, *tourne, autour du cycle de la congruence axe qu'elle contient, d'un angle égal à l'amplitude de l'opération :* car l'opération se décompose en deux rotations égales, l'une autour du cycle (a, α) en jeu, l'autre autour du conjugué (a, α') par rapport à I; la première rotation remplace σ par une sphère σ_1 contenant encore (a, α), le plan tangent de σ ayant tourné de l'angle indiqué; l'axe de la seconde rotation est orthogonal à σ_1, de sorte que σ_1 reste σ_1.

D'autre part, que σ soit ou non orthogonale à I, il existe un cycle $\vec{C}$ et un seul de la congruence axe qui est orthogonal à σ, et la sphère σ reste, après l'opération, orthogonale à $\vec{C}$ qui n'a pas changé: (en effet si σ est orthogonale à I, elle contient un cycle $\vec{C}'$, de la congruence). Indiquons maintenant une construction de $\vec{C}$ valable dans tous les cas (même si σ est orthogonale à I). Nous joignons O au centre c de σ et le diamètre obtenu perce σ en deux points U, V; sur une perpendiculaire à Oc menée par O, nous portons une longueur $O\Omega = R$, et nous remarquons qu'un angle droit pivotant autour de Ω dans le plan $O\Omega c$ coupe toujours Oc en deux points opposés; si donc on mène les bissectrices de l'angle $U\Omega V$ (qui est droit si σ est orthogonale à I), on obtient deux points opposés M, M' qui sont en même temps inverses par rapport à σ; il passe par M et M' un cycle et un seul $\vec{C}$ de la congruence paratactique axe; il ne change pas au cours de l'opération et la proposition est établie, car il est orthogonal à σ (¹).

Et alors se pose la question suivante : *un bipoint* (M, M') *détermine* ∞^2 *cycles orthogonaux à* I; *quelle est la configuration offerte par leurs conjugués? Il sont sur une même sphère orthogonale à* I, car trois cycles (a, α), (b, β), (c, γ) issus de M et M' donnent deux triangles sphériques (abc), $(\alpha\beta\gamma)$ *égaux*, tandis que les cycles conjugués (a, α'), (b, β'), (c, γ') donnent deux triangles (abc), $(\alpha'\beta'\gamma')$ dont chacun est égal au symétrique de l'autre; on considère une droite $O\Omega$ de longueur R perpendiculaire à OMM' en O et dans le plan $O\Omega MM'$ on construit les bissectrices de $\widehat{M\Omega M'}$ (qui sont inclinées à 45° sur ΩM et $\Omega M'$); elles percent OMM' en deux points U, V extrémités du diamètre de la sphère σ correspondant à MM' [d'ailleurs les bipoints (M, M'), (U, V) sont en position réciproque l'un par rapport à l'autre]. *La transformation qui remplace un cycle orthogonal à* I *par son conjugué remplace deux cycles sécants par deux cycles, sécants encore et sous le même angle; elle remplace un bipoint par une sphère orthogonale à* I *et inversement; elle est tout à fait analogue à la transformation par polaires réciproques.* Elle permet des transformations de théorèmes : ainsi, dire que, par un point donné, passe un cycle et un seul d'une congruence donnée, revient à dire que, sur une sphère orthogonale à I, court un cycle et un seul de cette même congruence, et, de plus, ceci montre que l'angle de deux cycles sécants est égal à celui de leurs conjugués, car c'est l'angle des deux congruences paratactiques correspondantes.

(¹) Pour savoir ce que devient σ au cours de l'opération paratactique en jeu, quand l'amplitude en est variable, on décompose l'opération en une rotation autour de $\vec{C}$ et une autre égale autour du cycle conjugué $\vec{C}'$: la première transforme σ en elle-même. Il suffit donc de faire tourner σ autour de $\vec{C}'$. Si σ est orthogonale à I, le cycle $\vec{C}'$ est sur σ et l'on a un faisceau de sphères. Si $\vec{C}'$ n'est pas sur la sphère σ, on peut prendre une figure réduite où $\vec{C}'$ est une droite, de sorte que σ enveloppe une cyclide de Dupin (un tore sur la figure réduite).

On peut donc dire aussi que *notre figuration met en évidence l'image d'une sphère orthogonale à* I : *déplacement du feuillet positif de* S, *le point* a *venant en* α *sur le feuillet négatif, puis* α *étant remplacé par le point diamétralement opposé* α'.

Deux questions se posent encore : *lieu des symétriques d'un point fixe* M *par rapport aux cycles d'une congruence paratactique ou lieu des transformés de* M *par rotation d'amplitude* φ (*non égale à* π) *autour des cycles d'une congruence.* Le premier lieu s'obtient sans peine en formant une figure réduite, car, par inversion, un cercle et deux points symétriques par rapport à ce cercle donnent une figure de même définition et une congruence paratactique reste paratactique : on peut donc supposer que M est le point à l'infini; chaque symétrique est le centre, le lieu est le plan central, donc parlant anallagmatiquement, *la sphère contenant le point* M *et le cycle conjugué du cycle issu de* M *dans la congruence.* Une autre figure réduite s'obtient, s'il s'agit d'une congruence paratactique positive, en effectuant la transformation paratactique négative qui change M en l'image globale a de la congruence; celle-ci n'a pas changé; le symétrique est, pour chaque cycle, l'image négative α dont le lieu est le feuillet négatif. sphère contenant a et le cycle conjugué du cycle $\overrightarrow{Oa}$; en revenant au langage anallagmatique, on retrouve la conclusion.

Pour le cas où M tourne de l'angle φ autour de chaque cycle de la congruence, prenons un cycle $\vec{C}$ de la congruence et soit σ la sphère $(M, \vec{C})$, σ' la sphère issue de $\vec{C}$ et coupant σ sous l'angle $\frac{\varphi}{2}$ (dans le sens convenable); on prend le symétrique de M par rapport à σ, ce qui donne M, puis le symétrique de M par rapport à σ'; or σ' se déduit de σ par l'opération paratactique, d'amplitude $\frac{\varphi}{2}$, ayant pour axe la congruence en jeu; σ' contient donc le bipoint (P, P′) déduit du bipoint (M, M′) par l'opération paratactique en jeu; or les inverses de M par rapport aux ∞^2 sphères issues de P et P′ décrivent, comme l'on sait, la sphère issue de M et M′ par rapport à laquelle P et P′ sont inverses.

4. Invariants anallagmatiques de deux cercles. — Un cercle dépend de 6 paramètres. et deux de 12; le groupe conforme de l'espace euclidien dépend de 10 paramètres et l'étude actuelle a prouvé que deux cercles *quelconques* ne peuvent admettre qu'un nombre fini de transformations anallagmatiques en eux-mêmes (car les feuillets de S avec les points images sur chacun doivent se reproduire); donc le *système de deux cercles n'a que deux invariants.* Il y a divers moyens d'obtenir un système de deux invariants et, par suite, se posera le problème de trouver les relations entre deux systemes d'invariants.

Les cycles $\overrightarrow{A_1}$ (a_1, α_1), $\overrightarrow{A_2}$ (a_2, α_2) orthogonaux à I étant donnés, déterminons leurs cycles perpendiculaires communs $\overrightarrow{B}$ (b, β), $\overrightarrow{B'}(b, \beta')$; l'observateur placé sur $\overrightarrow{Ob}$, pieds en O, tête en b, évalue, *en grandeur et signe, à* 2π *près*, l'angle $(Oa_1 . Oa_2) = t$; on mesure de même avec $\overrightarrow{O\beta}$ l'angle $(O\alpha_1, O\alpha_2) = \tau$; t et τ sont deux *invariants* qui peuvent conduire aux interprétations suivantes : le cycle $\overrightarrow{U_1}(a_1, \alpha_2)$ est paratactique à $\overrightarrow{A_1}$, positivement, avec $\frac{\tau}{2}$ comme angle de parataxie, à $\overrightarrow{A_2}$ négativement avec l'angle de parataxie $\frac{t}{2}$ et ces relations se conservent par une opération sphérique; de même pour $\overrightarrow{U_2}$ (a_2, α_1) et les cycles $\overrightarrow{U_1}$, $\overrightarrow{U_2}$ sont les seuls qui soient à la fois orthogonaux à I et paratactiques à $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$. Le problème des cercles perpendiculaires communs introduit les sphères de M. Hadamard

$$S_1 \begin{cases} (a_1\alpha_1) \\ (b\beta) \end{cases}, \quad S'_1 \begin{cases} (a_1\alpha_1) \\ (b\beta') \end{cases}, \quad S_2 \begin{cases} (a_2\alpha_2) \\ (b\beta) \end{cases}, \quad S'_2 \begin{cases} (a_2\alpha_2) \\ (b\beta') \end{cases}.$$

Pour un observateur couché sur $\overrightarrow{B}$, traversé par $\overrightarrow{B}$ des pieds à la tête, l'angle V (S_1, S_2), qui amène le plan tangent à S_1 en un point de $\overrightarrow{B}$ sur le plan tangent de S_2, est mesuré *en grandeur et signe à* π *près* et est un invariant; de même pour $\overrightarrow{B'}$ et V' angle de (S'_1, S'_2); nous devons donc chercher les relations qui existent entre ces angles, *pour lesquels les modules d'indétermination ne sont pas les mêmes*, difficulté qui s'impose à nous, comme au paragraphe 2. Nous pouvons désigner par A_i la transposition d'axe $\overrightarrow{A_i}$, par S_i l'inversion dont S_i est la sphere fondamentale; $(S_1 S_2)$ est la rotation d'amplitude

$2V$ autour de $\vec{B}$, $(S'_1 S'_2)$ d'amplitude $2V'$ autour de $\vec{B'}$; $(S_1 S_2 S'_1 S'_2)$ fait tourner le feuillet positif de l'angle $2V + 2V'$ autour de $\overrightarrow{Ob}$ et le feuillet négatif de $2V - 2V'$ autour de $\overrightarrow{O\beta}$; mais S_2 et S'_1 sont orthogonales, de sorte que $(S_1 S_2 S'_1 S'_2)$ peut être remplacée par $(S_1 S'_1 S_2 S'_2)$ ou $(S_1 S'_1)$ $(S_2 S'_2)$; $(S_1 S'_1)$ est la transposition A_1, $(S_2 S'_2)$ la transposition A_2 et leur produit $(A_1 A_2)$, équivalent à $(S_1 S'_1 S_2 S'_2)$ ou $(S_1 S_2 S'_1 S'_2)$ fait tourner le feuillet positif de l'angle $2t$ autour de Ob, le feuillet négatif de 2τ autour de $O\beta$ de sorte que l'on a

$$2t = 2V + 2V' + 2h\pi, \qquad 2\tau = 2V - 2V' + 2k\pi,$$

avec des entiers h, k déterminés de façon à avoir une égalité précise: on a donc

$$t = V + V' + h\pi \quad \text{et} \quad \tau = V - V' + k\pi;$$

si donc on change la détermination adoptée pour V en $V + \lambda\pi$, celle de V' en $V' + \mu\pi$, t est remplacé par $t + (\lambda + \mu)\pi$ et τ par $\tau + (\lambda - \mu)\pi$, ou, ce qui revient au même, h est remplacé par $h + \lambda + \mu$, k par $k + \lambda - \mu$, donc on peut, si h et k sont de même parité, les réduire à zéro tous les deux; s'ils sont de parité différente, on peut les réduire à 0 ou à 1; on peut donc hésiter entre les systèmes (*précis, s'excluant réciproquement*)

$$t = V + V', \qquad \tau = V - V', \qquad V = \frac{t}{2} + \frac{\tau}{2}, \qquad V' = \frac{t}{2} - \frac{\tau}{2};$$

$$t = V + V' + \pi, \qquad \tau = V - V', \qquad V = \frac{t}{2} + \frac{\tau}{2} - \frac{\pi}{2}, \qquad V' = \frac{t}{2} - \frac{\tau}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

On voit tout de suite que le premier système seul doit être pris, car si a_1, a_2 sont très voisins (et même tendent l'un vers l'autre) en même temps que α_1, α_2, tous les angles V, V', t, τ doivent être très petits simultanément. Donc nous écrivons

$$(1) \qquad t = V + V', \qquad \tau = V - V', \qquad V = \frac{t}{2} + \frac{\tau}{2}, \qquad V' = \frac{t}{2} - \frac{\tau}{2}.$$

Il y a un paradoxe à expliquer : si l'on donne $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$, les nombres t, τ sont déterminés à 2π près (une fois $\overrightarrow{Ob}$ choisi, plutôt que le vecteur opposé et de même pour $\overrightarrow{O\beta}$) et l'on retrouve pour V,

V' l'indétermination habituelle, multiple de π (avec cette restriction toutefois que les nombres $\lambda\pi$, $\mu\pi$ susceptibles d'être ajoutés à V et V' se rapportent à deux entiers λ, μ *ou bien pairs tous deux*, *ou bien impairs tous deux*). Mais si l'on se donne V, V'; chacun peut, *indépendamment l'un de l'autre*, être augmenté d'un multiple de π, $\lambda\pi$ ou $\mu\pi$, sans que la parité de λ et μ soit la même. Comment expliquer ce fait? Il tient, nous allons le voir, à une propriété de la figure et non à une obscurité de notre méthode. En effet, si, au lieu de donner t, τ on donne V, V', l'ensemble de nos sphères est déterminé à une opération sphérique près; comme le montre la figure réduite 6, mais $\overrightarrow{A_1}$ peut, par exemple, être remplacé par $\left(-\overrightarrow{A_1}\right)$ sans toucher à $\overrightarrow{A_2}$; dans ce cas a_1 et α_1 étant remplacés par a'_1, α'_1, *les nombres t et τ ont augmenté chacun de π, ce qui revient dans les formules* (1) *à augmenter* V, *par exemple*, *de π sans toucher à* V' (d'une façon plus générale si V, V' sont les variables indépendantes, t, τ peuvent augmenter chacun d'un multiple de π de même parité; si t, τ sont les variables indépendantes, c'est V, V' qui peuvent augmenter chacun d'un multiple de π de même parité).

Si nous comparons avec les résultats du n° 2 de ce chapitre, la composition $(A_1 A_2)$ est réduite à la forme canonique : deux rotations conjuguées, autour de $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{B'}$ d'amplitude $2V$, $2V'$ respectivement ou composition de deux opérations paratactiques, l'une positive, d'axe b et amplitude $V+V'$, l'autre négative d'axe β et amplitude $V-V'$ (et nous savons que nous pouvons remplacer les amplitudes par $V+V'+\pi$, $V-V'+\pi$).

Nous avons encore un moyen élégant d'arriver géométriquement aux formules (1). La sphere S_1 est déterminée par les cycles (a_1, α_1), (b, β); l'opération paratactique d'axe (b) et d'amplitude $\frac{t}{2}$ ne change pas le cycle $(b\beta)$ et remplace $\overrightarrow{A_1}$ par (a_2, α_1) qui est l'un des cycles envisagés plus haut; le plan tangent de S_1 en un point de $\overrightarrow{B}$ a tourné de l'angle $\frac{t}{2}$; continuons par l'opération paratactique d'axe (β) et amplitude $\frac{\tau}{2}$; le cycle (b, β) ne change pas, le cycle (a_2, α_1) devient (a_2, α_2), de sorte que S_1 est devenue S_2 en tournant toujours autour de $\overrightarrow{B}$, pendant que $\overrightarrow{A_1}$ s'est transformé en $\overrightarrow{A_2}$ et que l'angle de rotation V du plan tangent est la somme des angles $\frac{t}{2}$, $\frac{\tau}{2}$ des deux opérations paratactiques successives.

[Pour éviter toute confusion, signalons que dans cette démonstration si intuitive des formules (1), nous employons des opérations paratactiques de même axe que celles auxquelles conduit $(A_1 A_2)$, mais d'amplitude moitié; c'est ce qui explique pourquoi $\overrightarrow{A_1}$ s'est transformé en $\overrightarrow{A_2}$.]

5. **Les symétries du système de deux cercles. Bissecteurs et faux bissecteurs.** — Il est clair que la transposition par rapport à un cercle quelconque perpendiculaire commun à $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ remplace ces cycles par $-\overrightarrow{A_1}$, $-\overrightarrow{A_2}$; il n'existe pas d'autre transposition assurant cet échange, de sorte qu'il y en a 2 dans le cas général, ∞^1 dans le cas des cercles paratactiques ou cosphériques, ∞^2 dans le cas des cercles axiaux. Le fait qu'il n'y a pas d'autre transposition se démontre en remarquant que, si les cycles n'ont qu'une inversion I orthogonale commune (que nous supposerons négative), l'axe de la transposition doit être orthogonal à I; marquons les images (a_1, α_1), (a_2, α_2) des cycles, (b, β) du cycle axe; par rotation de π autour du diamètre Ob, a_1 s'échange avec a'_1, et a_2 avec a'_2, de sorte que b est l'un des pôles du grand cercle qui réunit $a_1 a_2$, et notre résultat est acquis.

Cherchons maintenant les *opérations sphériques* qui remplacent chacun des deux cycles par lui-même, toujours dans le cas d'une inversion I négative. Si a_1, a_2 sont distincts, et non diamétralement opposés, le feuillet positif reste inchangé; de même pour α_1, α_2; donc, si les cycles ne sont ni paratactiques, ni antitactiques, il n'y a que la transformation identique et l'inversion I. Examinons le cas des cycles paratactiques (si $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ sont antitactiques, $\overrightarrow{A_1}$ et $-\overrightarrow{A_2}$ sont paratactiques et une transposition qui échange $\overrightarrow{A_2}$ avec $\overrightarrow{A_2}$ échange aussi $-\overrightarrow{A_2}$ avec $-\overrightarrow{A_2}$); supposons $a_1 = a_2$; le feuillet positif peut subir une rotation de grandeur arbitraire autour de $\overrightarrow{Oa}$ (a étant l'image positive commune); il y a donc ∞^1 opérations paratactiques positives qui échangent chaque cycle avec lui-même; elles ont (a)

pour axe, et leur amplitude est arbitraire; elles forment un groupe. D'ailleurs, puisque chaque transposition autour d'un cycle perpendiculaire commun change chaque cycle $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ de sens, il est bien clair que la composition de deux telles opérations est une solution de notre problème : les axes de ces transpositions sont perpendiculaires à $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$; mais nous avons remarqué déjà qu'une opération paratactique est, de ∞^3 façons différentes, décomposable en le produit de deux transpositions; *b_1 et b_2 étant deux points quelconques du grand cercle de pôle a et γ étant un point quelconque du feuillet négatif, les deux transpositions (b_1, γ), (b_2, γ) forment encore une opération paratactique échangeant $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ avec eux-mêmes : les axes ne sont plus perpendiculaires à $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$*. Lorsque l'amplitude de l'opération change, chaque point de $\overrightarrow{A_1}$ reste sur $\overrightarrow{A_1}$, mais peut venir occuper une position arbitraire sur $\overrightarrow{A_1}$, de sorte que *l'on peut ainsi changer un cercle perpendiculaire commun en un autre fixé a priori.*

Occupons-nous maintenant des transpositions échangeant entre eux $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$; le feuillet positif de S, si a_1, a_2 ne sont ni confondus ni diamètralement opposés, subit une transformation qui échange a_1 avec a_2; c'est donc une rotation d'amplitude π autour de l'un des rayons $\overrightarrow{Om}$, $\overrightarrow{Om'}$ où m, m' sont les milieux opposés de $\overparen{a_1 a_2}$; de même pour $\overparen{\alpha_1 \alpha_2}$ et ses milieux μ, μ'; finalement on trouve, l'une ou l'autre des deux transpositions d'axe $(m\mu)$ ou $(m\mu')$; en passant, rappelons qu'une transposition étant à elle-même son inverse, son axe n'a pas besoin d'être orienté, tandis que deux rotations de même amplitude, non égale à π, autour de deux cycles opposés sont inverses l'une de l'autre; *les cercles axiaux (m, μ), (m, μ') sont les vrais bissecteurs de* $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$. Si l'on veut échanger $\overrightarrow{A_1}$ avec $-\overrightarrow{A_2}$ (de sorte que $\overrightarrow{A_2}$ s'échange avec $-\overrightarrow{A_1}$), on a à prendre, sur le grand cercle $a_1 a_2 m m'$, les points m_1, m'_1 aux extrémités du diamètre perpendiculaire à $O\,mm'$; de même pour μ_1, μ'_1; on a ainsi *deux faux bissecteurs perpendiculaires aux vrais bissecteurs*. Les faux bissecteurs de $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ sont les vrais bissecteurs de $\overrightarrow{A_1}$. $-\overrightarrow{A_2}$.

Deux cycles positivement paratactiques ont deux vrais bissec-

teurs, mais ∞^1 *faux bissecteurs, négativement paratactiques entre eux : sur la figure* 20 [1] on voit que a_1, a_2 étant confondus en a, le point m est aussi en a, m' en a', mais il y a ∞^1 grands cercles réunissant les points confondus a_1, a_2, de sorte qu'il y a ∞^1 couples m_1, m'_1 sur le grand cercle de pôle a; sur le feuillet négatif, il n'y a rien de changé avec le cas général : donc *deux cycles positivement antitactiques ont deux faux bissecteurs et* ∞^1 *vrais bissecteurs, négativement paratactiques.*

En réunissant les deux propositions qui précèdent, et remarquant que *deux cycles positivement axiaux sont négativement antitactiques, on voit qu'ils ont* ∞^1 *vrais bissecteurs, positivement paratactiques et en même temps* ∞^1 *faux bissecteurs, négativement paratactiques.*

Si l'on considère deux cycles paratactiques (a, α_1), (a, α_2) et un cycle (c, γ) cosphérique à chacun, l'image γ est sur le grand cercle de pôle μ_1 (*fig.* 20); il existe donc deux faux bissecteurs de (a, α_1), (a, α_2) conjugués, perpendiculaires à (c, γ), obtenus en menant la perpendiculaire $Om_1m'_1$ au plan Oac; les faux bissecteurs annoncés sont $(m_1\mu_1)$, (m'_1, μ_1); la transposition (m_1, μ_1) change $C(c, \gamma)$ en $-\vec{C}(c', \gamma')$ et $\vec{A}_1$ en $-\vec{A}_2$, de sorte que l'angle $(\vec{A}_1, \vec{C})$ est égal à $(-\vec{A}_2, -\vec{C})$, ou à $(\vec{A}_2, \vec{C})$; nous avons trouvé ce théorème que deux cycles paratactiques sont coupés suivant le même angle par tout cycle cosphérique commun; ce théorème, qui n'a été aperçu qu'après de nombreuses recherches et démontré souvent péniblement, a été obtenu dès le début par notre méthode de représentation doublement sphérique; nous avons tenu à reproduire la démonstration ci-dessus, due à M. Hadamard, et obtenue en fin de théorie.

On doit aussi signaler que, *dans le cas de l'antitaxie, et dans ce cas seulement, toutes les opérations simples qui transforment l'un des cycles en l'autre sont des transpositions.* En effet, pour le cas *général*, une opération simple transformant $(a_1\alpha_1)$ en $(a_2\alpha_2)$ s'obtient en prenant un point b sur le grand cercle de S médiateur de $\overset{\frown}{a_1a_2}$, un point β sur le médiateur de $\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2}$, en faisant correspondre b et β de façon que les dièdres (Oba_1, Oba_2), $(O\beta\alpha_1, O\beta\alpha_2)$ soient

(1) Il est souvent commode de séparer les deux feuillets de S afin de mieux voir les résultats.

égaux; dans le cas de cycles antitactiques, $a_2 = a'_1$ et le dièdre (Oba_1, Oba_2) est égal à π, de sorte que ces opérations simples sont des transpositions; si a_2 ne coïncide pas avec a'_1, il n'y a que deux positions de b qui donnent un dièdre droit.

CHAPITRE IV.

CYCLIDES DE DUPIN.

1. Tore. Cyclide de Dupin. — Nous avons eu l'occasion à plusieurs reprises de constater que le tore a deux axes de rotation *anallagmatique* (Chap. I, § 5, ou Chap. II, § 4); l'axe de rotation métrique (en même temps qu'anallagmatique) est l'axe du second axe (qui est circulaire). Les cercles de Villarceau d'une même famille sont tous paratactiques aux deux axes, sous les angles V, $\frac{\pi}{2} - V$ respectivement; ceux de la famille de Villarceau complémentaire donnent la même propriété, les mêmes angles V, $\frac{\pi}{2} - V$, mais la parataxie d'espèce opposée; une transformation paratactique ayant pour axe la congruence paratactique à laquelle appartient une série v de Villarceau (c'est-à-dire un *demi-tore* porté par notre tore) conserve chacun de ces cercles dans leur ensemble et remplace un cercle de l'autre série w par un cercle encore de la série w. Deux sphères variables issues respectivement de deux cercles v, v_1 fixes d'un même demi-tore et contenant un cercle variable w du demi-tore complémentaire se coupent à angle constant, égal à la moitié de l'angle de rotation qui amène v_1 sur v par rotation autour de l'un des deux axes anallagmatiques [1].

Un tore est la figure réduite de la surface appelée *cyclide de Dupin*, déduite du tore par une inversion quelconque et susceptible d'être engendrée par rotations arbitraires d'un point M autour de l'un et l'autre de deux cercles axiaux qui sont les axes de la cyclide.

---

[1] Nous retrouvons la proposition : au cours d'une opération paratactique, une sphère σ orthogonale à I tourne, autour du cycle de la congruence axe porté par elle, d'un angle égal à celui de l'opération. Une opération paratactique, d'amplitude convenable, effectuée autour de la congruence (w) laisse le cercle w inaltéré et change v en v_1; le choix du cercle spécial w sur la demi-cyclide n'intervient donc pas pour changer l'angle des sphères de notre énoncé.

Une cyclide de Dupin dépend de 9 paramètres : huit pour définir les deux axes anallagmatiques, et ensuite l'angle V; le fait qu'il existe un invariant V entraîne que la cyclide admet ∞^2 transformations anallagmatiques en elle-même (rotations autour des axes) au lieu de ∞^1 seulement.

2. Représentation, sur le double feuillet sphérique, de deux demi-cyclides complémentaires. — Soient deux points arbitraires a, β des feuillets, positif et négatif, de S (*fig.* 21); traçons les petits cercles C, Γ qui ont a, β pour pôle sphérique et pour rayon sphérique $2\mathrm{RV}$. Considérons maintenant deux points variables b, α décrivant l'un C l'autre Γ; le cycle (a, α) engendre une surface, lieu de ∞^1 cycles de la congruence positive a, le cycle (b, β) une surface lieu de ∞^1 cycles de la congruence négative β et ces deux surfaces coïncident, puisque, en vertu de $\widehat{ab} = \widehat{\alpha\beta}$, chaque cycle (a, α) coupe chaque cycle (b, β). La surface ainsi obtenue est la cyclide de Dupin d'axes (a, β), (a, β'); V est l'angle de parataxie de chaque série de Villarceau avec l'axe (a, β).

Cette représentation rend presque évidente la réciproque d'une propriété angulaire citée un peu plus haut : *si* (b, β), (b_1, β) *sont deux cycles d'une même congruence négative* β *et si* S_1, S_2 *sont deux sphères issues respectivement de* (b, β), (b_1, β) *et tournant chacune du même angle autour de* (b, β) *ou* (b_1, β), *leur cercle d'intersection décrit une demi-cyclide de Dupin et leur angle reste constant.* En effet nous marquons les points b, b_1, β et nous prenons un couple particulier $S_1 . S_2$; leur cycle d'intersection est orthogonal à I et a une image (a, α); nous pouvons donc tracer le cercle C de pôle a passant en b et b_1, le cercle Γ de pôle β passant par α et alors nous voyons que la variation continue du point α sur Γ va déterminer successivement le couple le plus général de spheres $[(b, \beta), (a, \alpha)]$, $[(b_1, \beta), (a, \alpha)]$ répondant à la condition imposée : être issues de (b, β), ou (b_1, β) et tourner du même angle autour de (b, β) ou (b_1, β), car l'angle des sphères $[(b, \beta)\ (a, \alpha)]$, $[(b, \beta), (a, \bar{\alpha})]$ est l'amplitude de l'opération paratactique, d'axe β, qui remplace le point α du feuillet négatif, par le point $\bar{\alpha}$ de ce même feuillet : (moitié du dièdre $O\beta\alpha$, $O\beta\bar{\alpha}$); la position du point b ou b_1 sur C n'intervient pas, et cela justifie la proposition.

M. Bloch a fait remarquer l'analogie parfaite de la proposition rencontrée ici avec la suivante : a, a_1 étant deux points fixes d'un cercle et m un point mobile du cercle, l'angle orienté (ma, ma_1) des droites non orientées ma, ma_1 est constant et égal à la moitié de l'angle orienté des demi-droites $(\overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{Oa_1})$ où O est le centre du cercle; le cercle aa_1m est remplacé par une cyclide, les points a, a_1 par deux cercles de Villarceau d'une même famille, le point m par un cercle variable de la famille de Villarceau opposée et les droites ma, ma_1 par les spheres réunissant le cercle mobile aux cercles fixes; O est remplacé par un point arbitraire pris sur un axe de la cyclide, et $\overrightarrow{Oa}$ par la sphère réunissant ce point au cercle substitué à a. Nous reviendrons bientôt sur ces analogies.

Imaginons maintenant deux congruences paratactiques (relatives toujours à la même inversion I) et d'espèce différente, a et β. Si un cycle (a, α) de la première coupe un cycle (b, β) de la seconde, l'angle de ces deux cycles, mesuré par $\frac{\widehat{ab}}{R}$ ou $\frac{\widehat{\alpha\beta}}{R}$ est le double de l'angle de parataxie de $(a\beta)$ avec $(a\alpha)$ ou $(b\beta)$; ce cycle $(a\beta)$ est l'unique cycle commun aux deux congruences *orientées* a et β, [tandis que s'il s'agit de congruences *non orientées* le cycle $(a\beta')$ est un second cycle commun]. Donc *le lieu des points de l'espace tels que l'angle des cycles issus de ces points, appartenant respectivement à la congruence a et à la congruence β soit constant et égal à un angle* $2V$ *donné est une cyclide de Dupin dont* $(a\beta)$ *est l'axe*; les demi-cyclides complémentaires portées par cette cyclide s'obtiennent précisément avec les cercles C, Γ des feuillets positif, négatif de S, dont a, β sont pôles et $2RV$ le rayon sphérique.

3. Puissance réduite d'un point par rapport à une sphère, un plan, un cercle ou une droite. — Nous savons que, si nous étudions une figure et ses transformées par les opérations d'un certain groupe, il y a avantage à trouver les *invariants* de la figure relativement à ce groupe. Considérons le groupe conforme et l'ensemble formé de deux sphères σ_1, σ_2 et du point M; cet ensemble dépend de 11 paramètres et le groupe de 10; si l'ensemble n'admet qu'un nombre fini de transformations en lui-même. il n'a qu'un invariant $(11 - 10 = 1)$, mais s'il admet ∞^h transformations, il aura $1 + h$ invariants; or nous voyons les ∞^1 inversions dont le pôle est sur l'axe radical de σ_1, σ_2, M; il y a donc *deux* invariants; mais l'un est précisément l'angle de σ_1, σ_2 et ne fait pas intervenir M; il y a donc lieu de chercher ce second invariant ([1]); on y arrive aisément en prenant 3 sphères σ_0, σ_1, σ_2 qui donnent 3 invariants ($12 - 10 = 2$, mais l'ensemble admet ∞^1 transformations, par inversions de pôle pris sur l'axe radical); ces invariants sont, par exemple,

$$\frac{d_{12}^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2}, \quad \frac{d_{20}^2 - R_2^2 - R_0^2}{2R_2R_0}, \quad \frac{d_{01}^2 - R_0^2 - R_1^2}{2R_0R_1}.$$

Le quotient des deux dernières expressions

$$\frac{d_{02}^2 - R_2^2 - R_0^2}{2R_2} : \frac{d_{01}^2 - R_1^2 - R_0^2}{2R_1}$$

continue à avoir un sens, même si R_0 se réduit à zéro, c'est-à-dire si l'on prend deux sphères σ_1, σ_2 et un point M; nous avons ainsi le quotient de deux expressions de la forme $\frac{d^2 - R^2}{2R}$, ou *puissance réduite d'un point* M *par rapport à une sphère, quotient de la puissance, au sens habituel, par le diamètre*. Notre méthode prouve que, si l'on fait une inversion de pôle arbitraire O, de puissance arbitraire, *les puissances réduites d'un point* M *par rapport à diverses sphères se reproduisent à un facteur près de proportionnalité ne dépendant que du pôle, de la puissance de l'inversion et du point* M, car le quotient de deux de ces puissances réduites est un invariant absolu; Darboux a employé les puissances réduites comme coordonnées pentasphériques : M. Bloch est arrivé à cette notion de puissance réduite, par une méthode toute différente; mais il faut bien remarquer que cet invariant, absolu ou relatif, est irrationnel et *a deux déterminations égales et de signe contraire*,

---

([1]) L'invariant de deux sphères se prévoit de la même façon; deux sphères engagent 8 paramètres et $10 - 2 = 8$; si elles n'admettent que ∞^2 transformations en elles-mêmes, elles n'ont pas d'invariant; si elles admettent ∞^{2+h} transformations, elles en ont h. Or les inversions, dont le pôle est dans le plan radical, composées avec les rotations autour de la ligne des centres donnent ∞^3 transformations, donc $h = 1$. (Les inversions *isolées, échangeant* σ_1 *avec* σ_2 ne changent rien). Au lieu de l'angle, qui disparait du champ réel quand les sphères ne se coupent pas, on peut prendre $\frac{d^2 - R^2 - R'^2}{2RR'}$, ou d est la distance des centres, R, R' les rayons; avec le birapport des points ou un cercle orthogonal commun coupe les sphères, on a cet invariant, introduit par des considérations réelles quel que soit le cas de figure.

car R est fourni par un radical carré; l'invariant absolu que nous avons indiqué peut donc se reproduire exactement ou au signe près; pour séparer les deux cas, convenons de prendre R positivement : il suffira donc de voir si chaque puissance ordinaire du point par rapport à la sphere conserve ou non son signe; quant à la puissance d'inversion, elle ne joue aucun rôle, puisque la variation produit simplement une homothétie sur le résultat de l'opération; si nous considérons le point M, la sphère σ et le pôle d'inversion O, nous pouvons prendre comme puissance d'inversion celle de O par rapport à σ; si O est intérieur à σ, M et son inverse sont dans des régions différentes par rapport à σ, de sorte que les puissances réduites de M et M_1 sont de signe contraire; si O est extérieur à σ, M et M_1 sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs à σ, les puissances réduites sont de même signe.

Donc les *puissances réduites par rapport aux sphères contenant* O *à leur intérieur changent de signe* (*quand on convient de prendre le rayon positivement*); *pour les sphères contenant* O *à leur extérieur, elles gardent leur signe* : la valeur absolue du facteur par lequel les puissances réduites sont multipliées est toujours la même, mais elle est négative dans le premier cas, positive dans le second. La séparation entre les deux cas a lieu pour les sphères passant au pôle; nous devons donc définir la *puissance réduite par rapport à un plan* P (*fig.* 22); nous abaissons de M la perpendiculaire MA sur P et nous prenons sur la droite MA un point B arbitraire; la puissance réduite de M par rapport à la sphère décrite sur AB comme diametre est $\frac{\overline{MA}.\overline{MB}}{AB}$; quand B s'éloigne à l'infini, sur la droite MA, cette puissance réduite tend vers $(+MA)$, distance (en valeur absolue) de M à P, si B est le prolongement de $\overrightarrow{MA}$; elle tend vers $(-MA)$ si B est sur la demi-droite opposée; *la puissance réduite est donc égale, en valeur absolue, à la distance du point au plan* sans que l'on puisse préciser davantage le signe. Par une inversion arbitraire, le plan peut redevenir une sphère et la puissance réduite se trouve multipliée par le même facteur de proportionnalité que celui fourni par une sphere effective.

Nous avons maintenant à considérer la figure formée par un cercle γ et un point M; elle dépend de 9 paramètres; $10 - 9 = 1$, mais au lieu de n'admettre que ∞^1 transformations en elle-même, elle en admet ∞^2, car le plan radical de M et d'une sphère quelconque issue de γ coupe le plan de γ suivant une droite que l'on peut appeler *axe radical* de M et γ; chaque point de l'axe radical est pôle d'une inversion conservant M et γ; d'autre part, en faisant tourner, (anallagmatiquement) M autour de γ, nous obtenons un cercle γ_1 axial à γ, issu de M tel que les rotations d'axe γ_1 laissent γ et M immuables; nous avons ainsi découvert, en composant ces ∞^1 rotations et les inversions précédentes, ∞^2 transformations de γ et M en eux-mêmes; il y donc *un invariant*; pour le découvrir, nous prenons une figure réduite où γ est devenue une droite Δ; à chaque plan issu de Δ correspond une puissance réduite (distance du point au plan), qui a un maximum quand le plan est perpendiculaire au plan réunissant M à Δ; en revenant à la figure non réduite, *nous considérons la sphère* S *menée par* γ, *orthogonale le long de* γ *à celle que* M *et* γ *déterminent; la puissance réduite de* M *par rapport à* γ *est la puissance réduite de* M *par rapport à* S; prenons pour plan de la figure 23 le plan mené par M, le centre c de γ et l'axe de γ; les points A, B, extrémités du diamètre de γ contenu dans le plan de la figure, donnent les distances minima et maxima de M à un point de γ; si θ est l'angle (MA, MB), $\mathrm{MA}.\mathrm{MB}.\cos\theta$ est la puissance ordinaire, en grandeur et signe, de M par rapport à la sphère S_1 décrite sur γ comme cercle diamétral, et $\frac{\mathrm{MA}.\mathrm{MB}.\cos\theta}{\mathrm{AB}}$ la puissance réduite de M par rapport à S_1; or la sphere S a son centre à la rencontre de la médiatrice de AB avec la tangente en A au cercle MAB, de sorte que l'angle (S, S_1) est égal à θ; donc, au signe près, la puissance réduite de M par rapport à S, [égale à la puissance relative à S_1 divisée par $\cos(S, S_1)$, comme on le voit sur la figure réduite où γ est rectiligne] est égale à $\frac{\mathrm{MA}.\mathrm{MB}}{\mathrm{AB}}$: *la puissance réduite d'un point* M *par rapport à un cercle* γ *est le quotient par le diamètre du cercle du produit des distances minima et maxima de* M *à un point de* γ.

Quant à la puissance réduite d'un point par rapport à une droite, elle a été définie par la figure réduite même : distance d'un point à la droite. Il y a maintenant à trouver le facteur commun par lequel chaque puissance réduite se trouve multipliée après une inversion. Prenons une sphère σ et un point M (*fig.* 24); le plan de figure est celui qui contient M, le pôle O d'inversion, le centre c de σ. Joignons Oc qui coupe σ en A, B; MB coupe σ en A′ et $\widehat{AA'B}$ est droit, de sorte que si θ est l'angle $\widehat{AMB}$, la puissance ordinaire de M pour σ est $MA.MB.\cos\theta$ (en grandeur et signe) et la puissance réduite est $\frac{MA.MB\cos\theta}{AB}$, désignons-la par p. Une fois l'inversion faite, on a une nouvelle puissance réduite

$$p_1 = \frac{M_1A_1.M_1B_1\cos\theta_1}{A_1B_1},$$

et les angles θ, θ_1 sont ou égaux ou supplémentaires, car AM et M_1A_1 d'une part, MB et M_1B_1 de l'autre sont antiparallèles par rapport aux côtés de l'angle MOc; on voit que si O reste fixe et si la puissance d'inversion change, les points M_1, A_1, B_1 sont remplacés par des points M'_1, A'_1, B'_1 homothétiques par rapport à O et $\frac{p_1}{OM_1}$ ne change pas; prenons donc comme puissance d'inversion OM^2 de façon que M'_1 coïncide avec M; on a

$$\frac{p_1}{OM_1} = \frac{p'_1}{OM'_1} = \frac{p'_1}{OM};$$

p et p'_1 sont les puissances réduites du *même point* M par rapport à deux sphères σ et σ'_1; appliquons à ces deux sphères l'inversion de pôle O et puissance OM^2; le quotient $\left|\frac{p}{p'_1}\right|$ *ne change pas*, comme nous l'avons remarqué, et, puisque σ devient σ'_1 et que σ'_1 devient σ, on a

$$\left|\frac{p}{p'_1}\right| = \left|\frac{p'_1}{p}\right| \qquad \text{d'où} \qquad |p'_1| = |p|,$$

et par suite $\frac{|p_1|}{OM_1} = \frac{|p|}{OM}$; autrement dit

$$|p_1| = |p|\frac{OM_1}{OM} = |p|\frac{|k|}{OM^2}$$

en appelant k la puissance d'inversion; le facteur cherché est $\frac{OM_1}{OM}$ ou $\frac{|k|}{OM^2}$ (¹).

(¹) Ce résultat, obtenu synthétiquement, peut s'obtenir par une méthode terre à terre en remarquant que si $\mathcal{A}$ désigne l'aire du triangle MAB, $MA.MB = 2\mathcal{A} : \sin\theta$ et par suite $p = \frac{2\mathcal{A}}{AB}\cot\theta = h\cot\theta$, où h est la distance de M à AB, dans l'inversion

Cette même méthode nous conduit à la représentation *métrique* de la puissance réduite par rapport a une sphère; prenons le pôle O sur σ et OM^2 comme puissance d'inversion, de sorte que $M_1 = M$; la relation $\frac{|p|}{OM} = \frac{|p_1|}{OM_1} = \frac{|p_1|}{OM}$ fournit donc $|p| = |p_1|$; mais $|p_1|$ est *la distance de* M *au plan transformé* : sur la figure 25 (qui, au fond, n'est pas distincte de 23 ou 24), nous avons encore pris pour plan de figure le plan McO; le diametre Oc donne B sur σ, et son inverse B_1, la droite MB_1 étant antiparallele de MB par rapport aux côtés de l'angle $\widehat{MOB}$; l'angle $\widehat{OMB} = \theta$ se retrouve en $\widehat{OB_1M}$ et nous avons vu que $|p| = h|\cot\theta|$, ou h est la distance Mm; mais $h|\cot\theta|$ est égal à mB_1, *c'est-à-dire à la distance de* M *au plan transformé* (nous retrouvons donc géométriquement la notion de puissance réduite par rapport a un plan). Nous avons, en passant, trouvé ce théorème : *les plans transformés par inversion d'une sphère σ, quand le pôle* O *décrit σ et que la puissance est égale à* OM^2, *où* M *est un point fixe, restent tangents à une sphère fixe dont* M *est centre et dont le rayon est la puissance réduite de* M *par rapport à σ.*

Quand il s'agit d'un point M et d'un cercle γ, nous employons le même procédé : le pôle d'inversion O est pris sur le cercle et la puissance d'inversion égale à OM^2; la transformee du cercle est une droite Δ et la distance de M à Δ est la puissance réduite de M pour Δ; quand le pôle O varie sur γ, ces droites enveloppent un cercle dont le centre est la projection de M sur le plan de γ. La figure 26 est tracée dans le plan contenant M et l'axe de γ; A, B sont les extrémités du diamètre de γ contenu dans ce plan; prenons A pour pôle d'inversion, AM^2 pour puissance; B_1 étant l'inverse de B, la sphère $\sigma_1(M, \gamma)$ a pour inverse le plan mené par MB_1 perpendiculairement au plan de figure; la sphère σ, orthogonale à σ_1, menée par γ a pour inverse le plan π mené par B_1D perpendiculairement au plan de la figure, B_1D étant la perpendiculaire menée dans ce plan à MB_1; la puissance réduite de M par rapport à γ ou σ est MB_1; la puissance réduite de M par rapport à Δ, transformée de γ, perpendiculaire en B_1

MA, MB sont remplacees par des droites antiparallèles relativement aux côtés de l'angle $\widehat{MOc}$, donc θ_1 est égal à θ ou $\pi - \theta$ et

$$|p_1| = |h_1\cot\theta_1| = |h_1\cot\theta|, \qquad \left|\frac{p}{p_1}\right| = \left|\frac{h}{h_1}\right| = \frac{OM}{OM_1}.$$

au plan de la figure, est encore MB_1 : de la sorte, dans cette figure, nous avons condensé les puissances réduites d'un point par rapport à une sphère (sphère σ), un plan (plan π), un cercle (cercle γ) et une droite (droite Δ).

4. **Relations entre la géométrie des cyclides et la trigonométrie plane ou sphérique** [1]. — Cette notion de puissance réduite va nous être indispensable pour l'étude des cyclides. Comme on peut passer d'un point M d'une cyclide à un autre point quelconque M_1 de cette surface par deux rotations successives autour des axes anallagmatiques, rotations qui laissent ces axes invariants, on peut dire : *le lieu des points dont le rapport des puissances réduites relativements à deux cercles conjugués est constant est une cyclide de Dupin dont ces cercles sont les axes.* En prenant comme figure réduite le tore, cette constante se calcule aisément. en prenant un point remarquable tel que celui où une méridienne perce le plan équatorial; on trouve aisément que le quotient de la puissance réduite relative à l'axe métrique par la puissance relative à l'autre est tang V et cela montre que le lieu qui, théoriquement pourrait se composer de plusieurs cyclides, est constitué par *une seule cyclide.*

Cette proposition se généralise ainsi : *le lieu des points, dont le rapport des puissances réduites par rapport à deux cercles paratactiques* A_1. A_2 *est constant, est une cyclide de Dupin.* Pour le prouver, considérons trois cycles paratactiques $(a. \alpha)$, (a_1, α), (a_2, α); l'opération paratactique d'axe α, d'angle φ indéterminé, laisse ces 3 cycles invariants, de sorte que, *si un point* M *décrit le cycle* (a, α), *le rapport de ses puissances réduites par rapport à* (a_1, α), (a_2, α) *reste constant.* Pour calculer cette constante, nous réduisons par inversion (a, α) à une droite, qui est donc focale (de même espèce) des deux cycles (a_1, α), (a_2, α) de la figure réduite pour son pied O sur le plan des deux cycles; O est d'ailleurs le pôle de l'inversion fondamentale I de cette figure réduite; nous faisons l'évaluation précisément en prenant, pour point de (a, α), ce point O qui donne même puissance ordinaire; le rapport des puissances réduites est donc l'inverse de celui des rayons ρ_1, ρ_2; mais nous avons vu que, V_1. V_2 étant les angles de parataxie de (a_1, α), (a_2, α) avec

[1] Ce paragraphe suit de très près l'exposé de M. Hadamard.

leur focale commune, $\rho_1 \sin V_1$, $\rho_2 \sin V_2$ sont égaux au rayon R du feuillet S, de sorte que $\frac{\sin V_1}{\sin V_2}$ est la valeur du rapport cherché; et cela s'applique désormais à la figure non réduite; si nous considérons donc les images positives a, a_1, a_2, la corde aa_1, vue de O sous l'angle $2V_1$, a pour longueur $2R\sin V_1$; le rapport $\frac{\sin V_1}{\sin V_2}$ est égal au rapport des distances *rectilignes* $\frac{aa_1}{aa_2}$; donc le lieu du point a, si ce rapport est constant, est un petit cercle de S obtenu en coupant S par la sphère lieu des points dont le rapport des distances aux points fixes a_1, a_2 est constant; le cycle (a, α) décrit donc une semi-cyclide appartenant à la congruence α et notre proposition est établie.

La démonstration employée suggère des remarques intéressantes au sujet d'un système de 3 cycles paratactiques (a, α), (a_1, α), (a_2, α) *Ces trois cycles sont sur une demi-cyclide unique,* car il suffit de tracer le petit cercle γ de S circonscrit à aa_1a_2; le cycle $(\bar{a}, \alpha)$, où $\bar{a}$ décrit γ engendre la demi-cyclide annoncée. Nous allons maintenant donner des interprétations géométriques des éléments soit du triangle *rectiligne* aa_1a_2 soit du triangle *sphérique* de mêmes sommets (dont les côtés sont des arcs de grand cercle). Nous avons donné à l'instant une interprétation géométrique du rapport de deux côtés rectilignes; s'il s'agit des côtés du triangle sphérique, nous savons que $\frac{\overset{\frown}{aa_1}}{2R}$ est l'angle de parataxie des cycles (a, α), (a_1, α). [Il n'y a guère lieu de donner une interprétation de la longueur rectiligne aa_1, si ce n'est qu'elle permet de remonter à l'arc de grand cercle $\overset{\frown}{aa_1}$, et nous retrouvons l'angle de parataxie].

Il reste donc à interpréter les angles. Nous avons rencontré la proposition suivante, obtenue en envisageant la semi-cyclide complémentaire : b et b' étant les pôles sphériques du petit cercle aa_1a_2 nous considérons le petit cercle γ' du feuillet négatif, de pôle sphérique α et de rayon sphérique $\overset{\frown}{\alpha\beta} = \overset{\frown}{ba}$; quand β décrit γ', le cycle (b, β) engendre la semi-cyclide complémentaire et les sphères $[(a_1\alpha)(b\beta)]$, $[(a_2\alpha)(b\beta)]$ issues des cycles fixes $(a_1\alpha)$, $(a_2\alpha)$ et se croisant suivant le cycle variable (b, β) se coupent à angle constant, égal à la moitié de l'angle dièdre bOa_1, bOa_2; or Ob perce le plan de γ en un point o, centre de γ; le rectiligne du dièdre en jeu est $\widehat{a_1 o a_2}$ et sa moitié en est $\widehat{a_1 a a_2}$, *angle en a du triangle rectiligne* $a_1 a a_2$, *qui représente ainsi l'angle constant annoncé.*

Il reste à interpréter les angles du triangle *sphérique* $a a_1 a_2$. Pour cela remarquons qu'une *semi-cyclide équilatère* (que M. Hadamard appelle *série droite de Villarceau*) est définie par un grand cercle d'un feuillet de S et un point du feuillet opposé; sur la figure 27 nous indiquons deux grands cercles C, C_1 du feuillet positif, un point γ du feuillet négatif; les deux semi-cyclides (C, γ), (C_1, γ) ont en commun deux cycles axiaux (c, γ), (c', γ) et si φ est l'angle en c des cercles C, C_1 (que nous supposerons orientés pour definir l'angle en grandeur et signe), l'opération paratactique d'axe c et d'amplitude $\frac{\varphi}{2}$ transforme la première semi-cyclide en la seconde, les cycles (c, γ) ou (c', γ) restant fixes [on peut d'ailleurs arriver au même résultat par rotation d'amplitude φ autour du cycle (c, γ)]; si nous adoptons la rotation d'amplitude φ autour de (c, γ), nous voyons que chaque point de ce cycle reste immuable et que *l'angle des plans tangents aux deux semi-cyclides est égal à* φ, *quel que soit le point pris sur ce cycle;* comme les semi-cyclides sont équilatères, les cycles de Villarceau, d'espèce opposée à (c, γ), issus d'un même point de (c, γ) sur chacune, fournissent par leurs tangentes précisément le rectiligne de l'angle dièdre des plans tangents. Étant donné le triangle *sphérique* ($a a_1 a_2$) et le point α, nous avons ainsi, par les angles de ce triangle, l'angle de deux semi-cyclides déterminées par α et les grands cercles, supports des côtés.

Nous pouvons maintenant imaginer une surface cerclée engendrée par ∞^1 cycles prélevés dans une congruence paratactique; elle est définie par un point α, du feuillet négatif par exemple, et une courbe C tracée sur le feuillet positif; si a décrit C, le cycle (a, α) engendre la surface; deux surfaces (C, α), (C_1, α) se coupent donc suivant les cycles ayant tous α pour image négative, et dont les images positives sont les points communs à C et C_1; si donc C et C_1 ont un point de contact, les surfaces correspondantes se touchent tout le long du cycle correspondant. Il résulte aussi de là que, si C *et* C_1 *ne se touchent pas en un de leurs points communs* a, *les surfaces correspondantes se coupent à angle constant le long du cycle* (a, α), *cet angle étant celui de* C *et* C_1 *en* a : cela se voit aussitôt en substituant à C, C_1 les grands cercles qui les touchent en a et aux surfaces (C, σ), (C_1, α) les semi-cyclides équilatères correspondantes. Or, étant donnés deux points arbitraires a_1, a_2 du feuillet positif S, ils déterminent le système orthogonal le plus simple que l'on puisse tracer sur S : d'abord les cercles issus de $a_1 a_2$ sur S, puis le faisceau de cercles conjugué. Chaque cercle de la première famille, réuni à un point α fixe du feuillet négatif, est l'image d'une cyclide de Dupin, lieu du cercle commun à deux sphères issues respectivement de (a_1, σ), (a_2, α) et se coupant sous un angle donné (la variation de cet angle donnant ∞^1 cyclides); chaque cercle de la seconde famille, réuni à α, définit une cyclide de Dupin, lieu des points dont le rapport des puissances réduites à $\overrightarrow{A_1}(a_1, \alpha)$, $\overrightarrow{A_2}(a_2, \alpha)$ est constant (mais variable en passant d'une cyclide à une autre); nous avons ainsi réalisé *deux familles de cyclides, se coupant suivant les divers cycles de la congruence α, à angle droit:* comme le cercle commun à deux de ces surfaces n'est ligne de courbure pour aucune, *il n'y a pas de surface trajectoire orthogonale des cycles d'une congruence paratactique, autre bien entendu que la sphère fondamentale Σ de notre inversion négative.* (Ici nous sommes, bien entendu, obligés de recourir à une théorie qui n'est plus élémentaire.)

Nous voulons maintenant donner une interprétation géométrique de l'aire du triangle *sphérique* aa_1a_2. Considérons encore une surface (C, α) lieu de ∞^1 cycles appartenant à une congruence paratactique α et dont l'image positive décrit une courbe C du feuillet positif; *si* C *est fermée et à connexion simple, nous avons ainsi une surface σ topologiquement équivalente au tore;* portons notre attention sur un point a de C et un point M du cycle (a, α); de M part, sur σ, une trajectoire orthogonale des cycles portés par σ, rencontrant successivement tous les cycles et revenant couper (a, α) en un point $\overline{M}$; il s'agit d'évaluer le décalage $(M, \overline{M})$ sur ce cycle (a, α). Il est commode, comme M. Hadamard l'indique, quand on a des cycles d'une même congruence, d'évaluer le déplacement de M en M_1 d'un point sur un tel cycle, non pas au moyen de la longueur de l'arc MM_1 (rapportée au rayon du cycle) mais au moyen de l'amplitude de l'opération paratactique qui fait passer de M à M_1.

Commençons par supposer que la courbe C est un triangle sphérique aa_1a_2 (*fig.* 28); nous indiquons sur le feuillet négatif de S, (séparé, pour la commodité de la lecture, du feuillet positif) le point α et le grand cercle de pôle α. Les cycles perpendiculaires communs à $\overrightarrow{A}_2(a_2, \alpha)$ et $\overrightarrow{A}(a, \alpha)$ ont leur image négative sur le grand cercle de pôle α et leur image positive au point $\overline{a_1}$, pôle sphérique du grand cercle $a_2 a$; pour éviter toute ambiguïté, nous considérons l'angle triedre $\overrightarrow{Oa}$, $\overrightarrow{Oa_1}$, $\overrightarrow{Oa_2}$ et nous avons construit $\overrightarrow{O\overline{a}}$ perpendiculaire au plan Oa_1a_2, du même côté que $\overrightarrow{Oa}$ par rapport à ce plan; de même pour $\overrightarrow{O\overline{a_1}}$, $\overrightarrow{O\overline{a_2}}$ de façon à avoir deux angles triedres supplémentaires, au sens de la géométrie élémentaire; nous considérons un point M_2 de $\overrightarrow{A_2}$ et le cycle $\overrightarrow{M_2M}$ partant de M_2, perpendiculaire commun à $\overrightarrow{A_2}$ et $\overrightarrow{A}$; nous ne conservons de ce cycle que l'arc rencontrant successivement les cycles dont l'image négative est α, tandis que l'image positive décrit l'arc habituel, inférieur à un demi-grand cercle, $a_2 a$; arrivé en M, nous menons, d'après la même règle et permutation circulaire, l'arc de cycle $\overrightarrow{MM_1}$ perpendiculaire commun à $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{A_1}$; les cycles $\overrightarrow{M_2M}$, $\overrightarrow{MM_1}$ font, au point M, l'angle *supplémentaire* des deux portions de semi-cyclides équilatères d'arête $\overrightarrow{A}$, joignant $\overrightarrow{A}$ à $\overrightarrow{A_2}$ et $\overrightarrow{A_1}$; ces deux cycles font donc l'angle $\pi - \widehat{a}$, en appelant $\widehat{a}$ l'angle dièdre suivant $\overrightarrow{Oa}$ du trièdre $\overrightarrow{Oa}$, $\overrightarrow{Oa_1}$, $\overrightarrow{Oa_2}$; les images positives $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ de ces cycles sont précisément à la distance $\pi - \widehat{a}$ sur le grand cercle $\overline{a_1}\,\overline{a_2}$ (en rapportant les longueurs à R); leurs images négatives α_1, α_2 sont aussi à cette distance sur le grand cercle de pôle α; le point M_1 fournit le cycle $\overrightarrow{M_1\overline{M_2}}$ perpendiculaire commun à A_1, A_2, et d'images $\overline{a}$ sur le feuillet positif et, sur le feuillet négatif, α_0, telle que l'arc $\alpha_2\alpha_0$ soit égal à $\pi - \widehat{a_1}$, *les arcs* $\alpha_1\alpha_2$ *et* $\alpha_2\alpha_0$ (*inférieurs à un demi-grand cercle*) *étant portés dans le même sens* par raison évidente de continuité, comme on le voit en supposant que a, a_1, a_2 varient d'une façon continue et viennent se placer sur un même grand cercle, a se trouvant intercalé entre a_2 et a_1. Du point $\overline{M_2}$ part le cycle $\overline{M_2}\,\overline{M}$ d'images $\overline{a_1}$, $\overline{\alpha_1}$ où α_1 est encore obtenu par la même règle : l'arc $\alpha_0\overline{\alpha_1}$ est égal à $\pi - \widehat{a_2}$ et mené dans le même sens que $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_0$; il s'agit d'évaluer le décalage $M\bar{M}$; nous avons vu qu'il y a une opération paratactique amenant M sur $\bar{M}$, le point M décrivant le cycle $M\bar{M}$ ou $\overrightarrow{A}$, l'axe de cette opération étant la congruence α : comme $\overrightarrow{MM_2}$ devient $\overrightarrow{\bar{M}\bar{M}_2}$, le point image α_1 se déplace autour de α, centre sphérique de rotation, et vient en $\bar{\alpha}_1$; l'une des amplitudes de rotation amenant cette superposition est

$$\left(\pi-\widehat{a}\right)+\left(\pi-\widehat{a}_1\right)+\left(\pi-\widehat{a}_2\right) \quad \text{ou} \quad 3\pi-\left(\widehat{a}+\widehat{a}_1+\widehat{a}_2\right);$$

toutes les autres sont donc, au signe près $\pm\left[\widehat{a}+\widehat{a}_1+\widehat{a}_2-\pi\right]+2\lambda\pi$; l'amplitude de l'opération paratactique en jeu est donc (au signe près) $\frac{1}{2}\left(\widehat{a}+\widehat{a}_1+\widehat{a}_2-\pi\right)+\lambda\pi$ où λ est un entier à déterminer. La présence de $\lambda\pi$ ne nous étonne pas, car nous savons que notre méthode, quand nous ne connaissons que le déplacement du feuillet sphérique mobile (l'autre feuillet étant fixe) ne permet pas à elle seule de séparer deux opérations paratactiques, de même axe, mais d'amplitude différant de π. Le principe de continuité nous permet de préciser et de conserver uniquement $\frac{1}{2}\left(\widehat{a}+\widehat{a}_1+\widehat{a}_2-\pi\right)$, c'est-à-dire la *moitié de l'aire du triangle sphérique* (en prenant R pour unité de longueur et R^2 pour unité d'aire) : en effet si le triangle est de dimensions de plus en plus petite, le décalage doit être nul [1]. Cela posé, on passe à une courbe fermée C, à connexion simple, par le raisonnement classique : si les deux triangles a_2aa_1, a_2a_1b sont tels que les côtés aa_1, a_1b (*fig.* 29) se prolongent de façon à obtenir un triangle unique a_2ab dont l'aire est la somme des deux aires, on trace comme précédemment les trois cycles $\overrightarrow{M_2M}$, $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$

[1] Autres vérifications : si a, a_1, a_2 se succèdent dans cet ordre sur un grand cercle, les dièdres $\widehat{a}$, $\widehat{a}_1$, $\widehat{a}_2$ étant tels que chacun soit égal à π, le décalage est π autrement dit sur le cycle *unique* M_2M, MM_1, $M_1\bar{M}_2$, $\bar{M}_2\bar{M}$, $\bar{M}$ est l'opposé de M ; si au contraire on suppose $\widehat{a}_2=\widehat{a}_1=\pi$, $\widehat{a}_0=0$, le décalage est nul, puisque le triangle est parcouru de a_2 en a, puis de a à a_1 et enfin retour de a_1 à a_2 en passant par a. Inutile aussi d'ajouter que le décalage $M_2\bar{M}_2$ est le même que $M\bar{M}$, puisque l'opération paratactique amenant M sur $\bar{M}$ amène M_2 sur $\bar{M}_2$.

correspondant à $\overrightarrow{a_2a}$, $\overrightarrow{aa_1}$, $\overrightarrow{a_1a_2}$; on trace ensuite $\overrightarrow{M_2M_1}$, $\overrightarrow{M_1N}$, $\overrightarrow{NP}$ et le décalage total M_2P est égal à la somme $\overline{M_2M_2}+\overline{M_2P}$; donc pour tout polygone sphérique limité par des arcs de grand cercle et la surface tubulaire formée par les semi-cyclides équilatères correspondant aux côtés (et au point α), le résultat s'étend sans difficulté; pour une courbe fermée C à connexion simple, on la décompose par un quadrillage de plus en plus serré d'arcs de grand cercle et le résultat est acquis.

CHAPITRE V.

RETOUR AUX ÉLÉMENTS IMAGINAIRES.

1. **Foyers d'un cercle.** — Jusqu'ici nous avons évité l'emploi des éléments imaginaires; pourtant, ils constituent un moyen puissant de découverte et même d'exposition et nous ne pouvons éviter d'en parler brievement.

Les foyers d'un cercle sont les centres des sphères de rayon nul qui passent par le cercle; les deux points F, F′ obtenus sont sur l'axe du cercle, à la distance Ri du centre, R étant le rayon. *Un cercle a deux foyers imaginaires conjugués et inversement deux points imaginaires conjugués sont les foyers d'un cercle réel, d'ailleurs unique.*

Dans une inversion, un foyer se transforme en foyer du nouveau cercle: toutefois, si le cercle devient une droite, les foyers sont les points cycliques communs à tous les plans perpendiculaires à la droite, et cette fois, deux foyers de cette espèce correspondent non à une seule droite, mais à ∞^2 droites parallèles.

Dans une inversion, si l'on considère 4 points A, B, C, D les rapports des produits AB.CD, AC.DB, AD.BC restent constants; de la sorte si nous avons deux cercles C, C_1 et leurs foyers (F, F′), (F_1, F'_1) les rapports des quantités $FF'.F_1F'_1$, $FF_1.F'F'_1$, $FF'_1.F'F_1$ restent invariants; c'est une façon d'obtenir un système de deux invariants distincts du système des deux cercles, qui aurait dû faire songer bien plus tôt les géomètres aux circonstances qui accompagnent la nullité de $FF_1.F'F'_1$, ce qui, en supposant les cercles réels, exige que FF_1 soit une droite isotrope, ainsi que $F'F'_1$. Il ne reste plus alors qu'un invariant (en dehors de celui qui est devenu nul); dès qu'un géomètre eut songé à faire cette remarque, la théorie de la parataxie se développa. Citons deux résultats élémentaires préliminaires (que le lecteur rétablira aisément) : *deux cercles sont cosphériques, si les foyers sont sur un même cercle et réciproquement.*

Une sphère est orthogonale à un cercle si elle en porte les foyers, et réciproquement.

Par définition, *les cercles d'une congruence paratactique sont ceux dont les foyers sont répartis sur deux droites conjuguées isotropes.*

2. Définition de la parataxie. — Imaginons une sphère $\Sigma(x^2+y^2+z^2+R^2=0)$ et un cercle Γ qui lui est orthogonal; F et F′ sont sur Σ et toutes les droites isotropes issues de F ou F′ s'appuient sur Γ; le cercle Γ coupe Σ en deux points A, B; la droite FA est isotrope, c'est une génératrice de Σ, car elle coupe Σ en F, A, et au point à l'infini sur elle; par FA passe donc un plan isotrope et un seul, asymptote à Σ, donc passant par O centre de Σ; ce plan OFA, isotrope, contient le rayon OA de Σ tangent à Γ : c'est donc l'un des 4 plans isotropes tangents à Γ que l'on peut mener par O; FB, F′A, F′B sont aussi des génératrices de Σ et les plans réunissant ces droites à O complètent l'ensemble des 4 plans isotropes menés de O et tangents à Γ; si Γ est réel, A, B sont imaginaires conjugués, ainsi que F et F′; donc les plans OFA, OF′B se coupent suivant une droite réelle Oa, les plans OFB, OF′A suivant une droite réelle $O\alpha$: ce sont nos deux focales (nous avons vu en effet qu'en projetant un cercle sur un plan quelconque, les perpendiculaires à ce plan issues des foyers de l'ellipse projection sont les focales du cercle, perpendiculaires au plan de projection). Nous voyons de plus que notre procédé permet de distinguer deux espèces de focales, car Σ possède deux systèmes de génératrices qui se séparent sans radical (ou du moins dont les équations dépendent rationnellement de R rayon de Σ); nous pouvons les appeler *positives* et *négatives*; si FA, F′B (qui sont imaginaires conjuguées, donc de *même système*) sont positives, les plans isotropes correspondants donnent la focale Oa *positive*, et FB, F′A la focale *négative* $O\alpha$.

Cela posé, supposons qu'un nouveau cercle Γ_1 soit défini en choisissant ses foyers F_1. F'_1 l'un F_1 au hasard sur FA, l'autre F'_1 imaginaire conjugué de F_1, donc sur $F'B$; le cercle Γ_1 de foyers (F_1, F'_1) est orthogonal à Σ et sa focale positive est confondue avec la focale positive de Γ, de sorte que la définition donnée en fin du paragraphe 1 de ce Chapitre entraîne que la focale (positive ou négative) de ces cercles relative à O soit la même (suivant que les 2 droites isotropes sont génératrices positives ou négatives de la sphère unique Σ qu'elles déterminent).

Réciproquement. si deux cercles Γ, Γ_1, orthogonaux à Σ, ont leur focale positive $O\alpha$ confondue, l'un des deux plans isotropes issus de $O\alpha$ coupe Σ suivant deux génératrices, l'une positive, l'autre négative; la génératrice positive porte un foyer F de Γ et un foyer F_1 de Γ_1; le second plan isotrope issu de $O\alpha$ donne sur Σ la génératrice positive conjuguée qui porte F' et F'_1; de la sorte on voit que la définition adoptée dans ce chapitre est équivalente à celle qui a été donnée aux chapitres précédents.

3. **Images d'un cycle.** — On voit donc que si l'on a choisi un point a du feuillet positif de S, il y a ∞^2 cycles, positivement paratactiques entre eux correspondant au point a; leurs foyers décrivent deux génératrices G, G' positives de Σ, imaginaires conjuguées; leurs axes D et les droites conjuguées des droites D par rapport a Σ (polaires de O par rapport à ces cercles) engendrent la congruence rectiligne dont les directrices sont les génératrices imaginaires conjuguées qui précèdent. Si maintenant on se donne la focale négative $O\alpha$, on en déduit deux génératrices négatives g, g', imaginaires conjuguées, de Σ portant elles aussi les foyers; en associant (G, g) pour avoir F, (G', g') pour avoir F', on a un cercle réel; mais en prenant (G, g'), (G', g) on définit un autre cercle, *conjugué* du premier, ayant pour foyers les pieds du premier sur Σ et inversement. On arrive à séparer ces cercles en orientant la focale Oa et la focale $O\alpha$ et nous retombons sur les images positives et négatives des divers cycles, en prenant les traces sur la sphère

$$S(x^2+y^2+z^2-R^2=0)$$

de ces focales orientées.

Nous allons montrer rapidement comment nous retrouvons la propriété angulaire fondamentale de cette représentation. Nous allons d'abord dessiner une figure 30, schématique, qui indique les foyers F, F' du cercle Γ, ses pieds A, B sur Σ et les génératrices G(FA), G'(F'B), g(FB), g'(F'A) réunissant les foyers aux pieds; G et G' sont du même système et conjuguées; g, g' de même système (opposé au précédent) et conjuguées. Le plan OFA coupe S, déduite de Σ par homothétie de pôle O et rapport $\pm i$, suivant deux génératrices parallèles à G que je puis appeler iG et $-i$G; nous définissons de même iG', $-i$G', ig, $-ig$, ig', $-ig'$. Les génératrices (iG, $-i$G') sont conjuguées sur S et se coupent au point appelé a tandis que ($-i$G, iG') se coupent au point diamétralement opposé a'; de même ($-ig$, ig') donneront α, et (ig, $-ig'$) donneront α'; (ces définitions abstraites sont celles que j'avais suivies pour obtenir les points a, a', α, α' dans mon travail de 1929, sans m'apercevoir qu'elles conduisaient aux *focales* Oaa', $O\alpha\alpha'$ issues de O). Prenons maintenant un autre cercle Γ_1 orthogonal à Σ; *si* Γ, Γ_1 *sont cosphériques, les pieds* A, B, A_1, B_1 *sont sur la sphère* (Γ, Γ_1), *donc sur un même cercle de* Σ; *réciproquement, si ces pieds sont sur un même cercle*, Γ *et* Γ_1 *sont cosphériques*, car le point commun à AB, A_1B_1 a même puissance par rapport aux deux cercles (puissance de ce point par rapport a Σ), et comme le centre O de Σ a même puissance ($-R^2$) par rapport à Γ, Γ_1, ces deux cercles sont cosphériques, puisqu'il y a *deux* points qui ont même puissance par rapport à Γ, Γ_1 (si ces *deux* points étaient confondus, cela entraînerait que Γ et Γ_1 seraient deux droites issues de O). La droite FF' est conjuguée de AB par rapport à Σ, $F_1F'_1$ de A_1B_1; donc si AB et A_1B_1 sont sécantes, FF' et $F_1F'_1$ le sont et inversement; donc on peut dire aussi que *la condition nécessaire et suffisante pour que* Γ *et* Γ_1 *soient cosphériques est que leurs foyers (ou leurs pieds) soient sur un même cercle.* Supposons Γ, Γ_1 cosphériques; si φ est l'un des angles de Γ, Γ_1, le birapport (ABA_1B_1) est égal à $-\tang^2\frac{\varphi}{2}$ (remplacer π par $\pi-\varphi$ revient à échanger A et B, de sorte que, orienter Γ ou Γ_1 revient à donner un ordre soit aux pieds, soit aux foyers d'un cercle); ceci se voit en faisant une inversion ayant pour pôle un point M commun à Γ, Γ' et pour puissance MO^2+R^2, de façon que Γ et Γ_1 deviennent deux diamètres de Σ se coupant sous l'angle φ; le birapport ABA_1B_1 n'a pas changé et se calcule aussitôt sous la nouvelle forme $\left(\text{birapport des quatre valeurs } 0,\ \infty,\ \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2},\ \frac{-1}{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}\right)$. D'autre part, en formant les tableaux

$$\begin{array}{lll} GG'G_1G'_1 & gg'g_1g'_1 & iGiG'iG_1iG'_1 \\ FF'F_1F'_1 & FF'F_1F'_1 & a\ a'\ a_1\ a'_1 \\ ABA_1B_1 & BAB_1A_1 & \end{array}$$

qui indiquent quatre génératrices d'un même système de Σ ou S et les points où elles sont coupées par un même plan (a est défini par iG et $-i$G', a' par iG', $-i$G), on voit que le birapport $(GG'G_1G'_1)$, égal à (ABA_1B_1), ou a $(iG,\ iG',\ iG_1,\ iG'_1)$, puisque l'homothétie de pôle O et rapport i ne change pas le birapport, ou à $(aa'a_1a'_1)$, donne $(aa'a_1a'_1) = -\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}$; *donc les diamètres* Oaa', $Oa_1a'_1$ *forment deux angles égaux à* φ *et* $\pi-\varphi$; il en est de même pour $(\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1)$, et *notre proposition fondamentale est établie :* il n'y a que quelques compléments à ajouter pour bien spécifier les orientations. Mais comme cela a été fait précédemment, inutile d'y revenir ici. *La propriété fondamentale que l'angle de deux cycles bisécants est égal à celui de leurs focales positives, ou négatives, relatives à un point quelconque choisi sur le segment joignant les points communs* est obtenue avec une facilité d'autant plus déconcertante qu'elle a pu échapper si longtemps aux chercheurs et qu'elle s'obtient avec la même aisance soit par voie réelle, soit par emploi des imaginaires. On a vu en passant que l'angle de deux cycles bisécants orthogonaux a Σ est égal a celui de leurs conjugués. Si les cycles Γ, Γ_1 orthogonaux à Σ ne sont pas sécants, on peut, pour invariants de leur système, choisir $(GG'G_1G'_1)$, $(gg'g_1g'_1)$ qui ne sont plus égaux, ou encore $(iG,\ iG',\ iG_1,\ iG'_1)$, $(ig,\ ig',\ ig_1,\ ig'_1)$ qui, ces derniers, peuvent être remplacés par $(aa'a_1a'_1)$, $(\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1)$ qui ne sont plus égaux, et nous retrouvons tous les résultats obtenus autrement.

4. Transformation de cycles en cycles avec conservation de la parataxie. — Un *cycle* est un cercle dont les *deux foyers* ont reçu un numéro de classement : *premier* pour l'un, *second* pour l'autre. Les premiers et seconds foyers des ∞^6 cycles réels remplissent deux espaces euclidiens complexes à trois dimensions, E_1 et E_2, conjugués l'un de l'autre (E_1 et E_2 ont en commun l'espace euclidien réel, chaque point de cet espace pouvant être regardé comme un cycle de rayon nul). Effectuons sur E_1 une transformation conforme complexe T_1 et sur E_2 la transformation conjuguée T_2 : le cycle réel $\vec{C}$ de foyers F_1, F_2 est remplacé par le cycle réel $\vec{C}'$ dont les foyers F'_1 et F'_2 sont F_1T_1, F_2T_2; *c'est la transformation réelle générale transformant un cycle réel en cycle réel, des cycles paratactiques en cycles paratactiques. Ces transformations forment un groupe à 20 paramètres réels; aucune n'est tranformation de contact, sauf celles qui appartiennent au sous-groupe constitué par le groupe conforme réel.*

On retrouve la transformation de M. Robert (p. 40-43) si T_1 est la translation $i\vec{V}$, ou $\vec{V}$ est un vecteur réel.

Nous avons tenu a présenter la théorie presque exclusivement au moyen d'éléments *réels*, mais ce dernier paragraphe offre l'intérêt de prouver que l'*exclusion des éléments imaginaires ne peut être absolue.*

NOTES COMPLÉMENTAIRES.

I. Il serait injuste de ne pas citer ici deux travaux importants et élégants, dus à M. Labrousse et à M. Lagrange, bien qu'ils ne rentrent pas dans le cadre précis de cette étude. Commençons par le travail de M. Labrousse; si les cycles $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ sont enlacés, en appelant O le pôle de l'inversion orthogonale à $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ et $(-R^2)$ sa puissance, puis D_1 l'axe de $\vec{A}_1$, Δ_1 la droite polaire de O par rapport à $\vec{A}_1$, et de même D_1, D_2, on remarque que D_1, Δ_1 sont orthogonales en direction, que leur perpendiculaire commune passe en O et que les pieds de cette perpendiculaire sont *opposés*; Δ_1 est l'axe du cercle, orthogonal à I, axial à A_1. Cela posé, D_1, Δ_1, D_2, Δ_2 ont deux sécantes communes qui sont les axes des deux cercles perpendiculaires communs (ou les polaires de O par rapport à ces cercles); *dans le cas de la parataxie, les quatre droites appartiennent à une même semi-quadrique et réciproquement.* M. Labrousse a développé cette théorie avec un nombre complexe j tel que $j^2 = +1$ (au lieu de -1 pour les cycles non enlaces) et a, grâce aux diviseurs $j-1$ et $j+1$ de j^2-1 élucidé le cas de la parataxie qui aurait dû, par cette méthode basée sur la recherche des sécantes communes à quatre droites, attirer depuis longtemps l'attention des géomètres, puisqu'il y a le cas de deux sécantes et celui de ∞^1 sécantes.

M. Lagrange a consacré un mémoire élégant aux définitions et théorèmes de métrique anallagmatique et retrouve, en particulier la notion de puissance réduite en étudiant ce qu'il appelle les distances, invariantes et covariantes, des éléments fondamentaux : point, cercle, sphère, bipoint.

II. On se demande parfois comment tel auteur a pu réaliser un progrès important : c'est souvent par l'étude, faite consciencieusement, d'un probleme que certains ont pu regarder comme futile. Je cite le théoreme dû à Petersen-Morley :

On prend trois droites de l'espace euclidien à 3 *dimensions,* A, B, C*; on appelle* A_1, B_1, C_1 *les perpendiculaires communes aux couples* (B, C), (C, A), (A, B), *puis* A_2, B_2, C_2 *aux couples* (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1) *: les trois droites* A_2, B_2, C_2 *rencontrent à angle droit une même droite* D. *Dans l'ensemble des* 10 *droites* A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, D *chacune rencontre trois autres à angle droit et chacune des* 10 *droites joue un rôle parfaitement symétrique.*

Ce théorème se démontre très simplement, *si l'on en possède la clé.* Il semblerait que le théoreme analogue pour le cas de cercles (orthogonaux à une même sphère Σ ou réelle ou d'équation réelle, mais de rayon imaginaire pure) est plus difficile : c'est le contraire, il est immédiat, car il se ramène, tout au moins quand Σ est de rayon imaginaire pure, au théorème de Petersen Morley relatif a 3 droites Oa, Ob, Oc *concourantes.* Cela revient à considérer un angle trièdre Oa, Ob, Oc, le triedre *supplémentaire* Oa_1, Ob_1, Oc_1, puis la droite Od commune aux plans Oaa_1, Obb_1, Occ_1 qui sont les plans menés par les arêtes du trièdre primitif perpendiculairement aux faces opposées et enfin les droites Oa_2, Ob_2, Oc_2 intersection des faces (Obc, Ob_1c_1), (Oca, Oc_1a_1), (Oab, Oa_1b_1) ; nous coupons ces droites par la sphère de centre O et rayon R et appelons a' le point diamétralement opposé a Oa trace de Oa sur S, et de même $b' \ldots d'$; nous recommençons la même opération avec un trièdre $O\alpha\beta\gamma$ quelconque par rapport au premier; les 10 *couples conjugués*

$[(a, \alpha), (a, \alpha')]$, ... $[(d, \delta), (d, \delta')]$ *sont tels que chaque couple rencontre à angle droit les cycles de* 3 *autres couples*. Si la sphère Σ est réelle, ces 10 couples existent encore et sont composés chacun d'un cercle réel et d'un cercle imaginaire d'équations réelles.

J'ai imaginé ce problème en 1929 et, après quelques échanges de vue avec M. Cartan, j'ai découvert la figuration des cycles orthogonaux à une même inversion négative par deux points prélevés sur l'un ou l'autre de deux feuillets sphériques superposés.

III. Pendant que ce fascicule attendait d'être imprimé, l'ouvrage posthume de Lebesgue a paru; il contient beaucoup de vues originales sur la parataxie dues soit à Lebesgue lui-même, soit à M. Robert, et il est juste que je rende ici hommage à ce grand géomètre Lebesgue, qui avait bien voulu s'intéresser à quelques-uns de mes travaux.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

D. F. BARROW. — *Transactions of the américan Math. Soc.*, t. XVI.

ANDRÉ BLOCH. — *Journal de Math.*, 9e Série, t. III, 1924, p. 51; *C. R. Acad. Sc.*, t. 177, 1923, nos 17 et 19.

G. DARBOUX. — *Théorie des surfaces*, t. 3, p. 492-500 ; *Principes de Géométrie analytique*, p. 319-340 et 484-503;

DEMOULIN. — *C. R. Acad. Sc.*, 8 août 1922; *Bulletin Acad. Roy. Belgique*, 5 août 1922, n° 8, p. 499.

B. GAMBIER. — *Journal de Math.*, 9e Série, t. IX, 1930, p. 179-199; t. XI, 1932, p. 377-384; t. XIX, 1940, p. 237-260.

GOURSAT. — *Ann. École norm. sup.*, 3e Série, t. VI, 1889.

HADAMARD. — *Nouvelles Annales de Math.*, 6e Série, t. II, 1927, p. 257-270 et 289-329. *Géométrie de l'Espace*, 7e édition, Armand Colin, Paris, 1932, p. 608-667.

G. KOENIGS. — *Ann. Faculté Sc. Toulouse*, t. II, 1888.

LABROUSSE. — *Journal de Math.*, 9e Série, t. X, 1931, p. 307-334.

LAGRANGE. — *Ann. École norm. sup.*, 3e Série, t. 59, 1942, p. 1-42.

H. LEBESGUE. — *Les Coniques*, Paris, Gauthier-Villars, 1942, p. 41-90.

VESSIOT. — *C. R. Acad. Sc.*, 10 et 25 avril 1920; *Journal de Math.*, 9e Série, t. II, 1929, p. 99-165.

E. VON WEBER. — *Archiv. der Math. und. Phys.*, t. VII, 3e Série, 1904.

Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.