MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD

La relativité restreinte et la première mécanique broglienne

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 103 (1944)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1944__103__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CIII

La Relativité restreinte et la première Mécanique Broglienne

Par M. Olivier COSTA DE BEAUREGARD.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1944

LA

RELATIVITÉ RESTREINTE

ET LA

PREMIÈRE MÉCANIQUE BROGLIENNE

Par M. Olivier COSTA DE BEAUREGARD.

AVERTISSEMENT.

Bien que notre exposé de la Relativité restreinte puisse évidemment servir d'introduction à la gravifique einsteinienne, c'est surtout en vue de la Mécanique ondulatoire et quantique qu'il a été rédigé. L'on ne s'étonnera donc pas de nous voir négliger un certain nombre de questions relevant de la Physique macroscopique, comme, par exemple, l'Électrodynamique des corps pondérables, ou des développements de Mécanique des fluides. Par contre, l'existence des nouvelles Théories quantiques de l'*électron* et du *photon* nous a amené à examiner comment la question des *moments cinétiques propres* se présente au point de vue strictement relativiste; un raisonnement purement formel nous permet de justifier *a posteriori* certains des résultats de Dirac.

Ce que nous avons cherché avant tout, c'est à mettre en pleine lumière les nouvelles acquisitions *de principe* que la Cinématique, l'Optique, l'Électromagnétisme et la Mécanique doivent à la Relativité restreinte. Limitant ainsi notre exposé aux lois que la Physique préquantique considérait comme *élémentaires*, nous avons essayé de bien faire sentir en quoi consiste *l'esprit de la Relativité*. Pour cela, nous raisonnons systématiquement dans l'Univers quadridimensionnel de Minkowski, après avoir introduit cette importante notion dès le départ, à propos de l'expérience de Michelson. Nous introduisons également de manière systématique, dans chaque problème, *la forme différentielle complète*, qui résulte de la considération d'événements à la fois distants dans l'espace et successifs dans le temps; cela nous permet de rendre leur symétrie à des expressions dont la forme tronquée habituelle résulte de l'hypothèse — souvent implicite — de la *simultanéité à distance*.

On sait que la Mécanique ondulatoire est relativiste en ce sens qu'elle n'a pu se constituer et rester d'accord avec l'expérience qu'en respectant les nouvelles variances cinématiques, mais qu'*elle n'a pas l'esprit vraiment relativiste*. Le temps, notamment, y joue un rôle privilégié par rapport à l'espace, et cette dissymétrie des conceptions se répercute sur la totalité des formules. Bien entendu, il ne s'agit pas — il n'a jamais été question — d'assimiler purement et simplement la variable temps aux coordonnées d'espace; mais il reste que la Relativité établit de la manière la plus nette, et dans un esprit qui n'est pas sans rappeler celui de la Thermodynamique : 1° une *équivalence*, c'est-à-dire une *identité de nature profonde* entre l'espace et le temps; 2° une *distinction dans les comportements*, expliquant que l'espace soit réversible alors que le temps ne l'est pas. Dans notre Chapitre I, nous cherchons à énoncer d'une manière parfaitement claire ce que nous appelons le *premier* et le *second principe* de la Relativité (nos 2 et 3). Du strict point de vue relativiste, il semblerait étonnant d'avoir à revenir sur des indications aussi nettes qui, dictées par l'expérience macroscopique, reçoivent de l'expérience microscopique une confirmation remarquable : pour réussir, en effet, la Mécanique ondulatoire a dû naître relativiste avec Louis de Broglie, et redevenir relativiste avec Dirac.

Le conflit de la Relativité et des Quanta n'en reste pas moins très aigu, comme on peut le voir sur beaucoup d'exemples, et notamment sur celui-ci : en Relativité, les grandeurs bien définies d'une manière intrinsèque sont les densités; lorsqu'on veut passer aux grandeurs finies par intégration, et aussi lorsqu'on veut se ramener ensuite à la considération d'un *point matériel* par passage à la limite, on rencontre souvent de l'arbitraire, et quelquefois des difficultés (nos 23, 24 et 27, 28). La Relativité — tant restreinte que générale — est vraiment une *Physique du continu*, dans laquelle le *point matériel* n'est admis qu'après coup. En Physique quantique, c'est tout le contraire : les *corpuscules* sont regardés comme *rigoureusement ponctuels*, et les densités — qui ne servent que d'intermédiaires de calcul — sont considérées comme *fictives* du fait de leur interprétation probabiliste ; du reste, on constate qu'elles ne sont généralement définies qu'à des fonctions additives près. Mais on peut se demander si le conflit ne met pas en réalité beaucoup moins en cause les rapports de l'espace et du temps entre eux, qu'il n'oppose les nouvelles conceptions quantiques — encore incomplètement dégagées — aux anciennes conceptions continues — qui s'avèrent périmées. Il s'agirait alors moins d'un conflit entre les Quanta et la Relativité qu'entre les Quanta et la Physique du Continu. On peut penser que si l'on parvenait à élucider le comportement élémentaire de l'espace et du temps, l'on verrait s'éclairer bien des conceptions encore énigmatiques, et peut-être une symétrie meilleure se rétablir dans les calculs.

Quoi qu'il en soit, nous avons cherché à donner un exposé de la Relativité restreinte qui ne soit plus en rien « révolutionnaire ». Ce qui a rendu très paradoxale en fait l'apparition des théories relativistes, c'est que, les beaux édifices de la Physique traditionnelle étant pour ainsi dire achevés, elles sont venues retoucher, parmi les diverses notions utilisées, les plus « primitives » de toutes : celle d'espace et celle de temps, dont certains doutaient encore qu'elles fussent d'origine expérimentale. On a découvert en finissant des lois qui, logiquement, étaient des prémisses. Mais, cette remarque faite, il faut se souvenir que l'histoire de la Physique a connu plusieurs grands renouvellements des conceptions admises : il serait d'autant plus inexact de méconnaître *l'esprit très classique* de la Relativité que, précisément, la Physique classique n'attendait que la Relativité pour trouver son expression synthétique. Synthèse incomplète, on le sait, même en Physique macroscopique : la belle construction relativiste n'aura fait que préfacer la « révolution quantique », dont le déroulement semble encore loin de son achèvement.

Dans notre exposé, nous nous sommes attaché à présenter les choses sous la forme d'un raisonnement suivi, non pas axiomatique, mais *physique* et *historique* : étroitement appuyé aux faits expérimentaux nouveaux, et à l'acquis théorique ancien. De la sorte, nous avons tout naturellement été amené à suivre l'ordre de la découverte et de l'exposition d'Einstein, ce que nous avons fait en nous inspirant largement des progrès ultérieurs, et en cherchant à réduire le plus possible la part de l'induction.

Rappel de quelques notions. — Nous employons continuellement le *calcul tensoriel* (1), mais toujours en axes cartésiens orthogonaux et d'égale mesure $Ox_1, \ldots, x_n$, ce qui est la condition pour que les composantes covariantes et contrevariantes d'un tenseur soient toujours égales entre elles : dans ces conditions, il n'y a donc aucun sens particulier à attacher à la position haute ou basse des indices. Nous utilisons la *convention de sommation*, suivant laquelle un indice répété deux fois dans un monome est dit muet, et s'entend automatiquement avec sommation. Par exemple, $A^i{}_{jk}B_i{}^j$ s'entend pour $\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} A^i{}_{jk}B_i{}^j$, n désignant le nombre de dimensions de l'espace euclidien considéré. De même, $A^i{}_{ij}{}^k$, par exemple, s'entend pour $\sum_{i=1}^{i=n} A^i{}_{ij}{}^k$; cette opération de *contraction* abaisse de 2 le rang d'un tenseur; notamment en partant d'un tenseur de rang pair, on peut former par contraction complète un invariant. Nous prenons toujours soin d'écrire les indices muets l'un supérieur et l'autre inférieur, ce qui est une règle indispensable en calcul tensoriel général.

Problème du changement d'axes. Définition d'un tenseur. — Les formules d'un changement de n-èdre cartésien oblique constituent une *substitution linéaire homogène* à coefficients constants, et s'écrivent

$$\bar{x}^i = \bar{o}^i_j x^j, \qquad x^i = o^i_j \bar{x}^j :$$

les coefficients o^i_j de la transformation inverse sont les *mineurs normalisés* du déterminant des coefficients $\bar{o}^i_j$ de la transformation directe. Substituant les x^i dans l'expression des $\bar{x}^i$, et *vice versa*, on établit les identités

$$o^i_j \bar{o}^j_k = o^j_k \bar{o}^i_j = \delta^i_k :$$

δ^i_k désigne le *symbole de Kronecker* qui, par définition, vaut 1 si $i = k$, et zéro si $i \neq k$.

Si de plus, comme nous le supposons, les deux n-èdres sont formés d'axes orthogonaux et d'égale mesure, la substitution linéaire homogène est *ortho-*

(1) Pour le Calcul tensoriel, le lecteur pourra se reporter aux excellents traités classiques, notamment à P. APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. V (Gauthier-Villars), et à L. BRILLOUIN, *les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité* (Paris, 1938).

gonale et caractérisée par le système de conditions

$$\overline{\delta}^{i}_{j} = \alpha^{i}_{j}.$$

Les identités précédentes montrent alors que son déterminant vaut ± 1; nous retiendrons seulement l'hypothèse où il vaut $+1$, et nous dirons que les deux n-èdres sont de même sens, et qu'on passe de l'un à l'autre par une *rotation*.

Par définition, un tenseur T est un « être géométrique » dont les composantes (à indices covariants ou contrevariants) se transforment comme des produits de composantes de vecteurs; on aura par exemple

$$\overline{T}_{ij}^{\;\;k} = \alpha_{i}^{i'} \alpha_{j}^{j'} \alpha^{k}_{k'} T_{i'j'}^{\;\;\;k'}.$$

En particulier, les identités auxquelles satisfont les α^{k}_{j} montrent que δ^{k}_{j} est un tenseur symétrique singulier, dont toutes les composantes mixtes non diagonales sont nulles, et les composantes diagonales égales entre elles :

$$\overline{\delta}^{k}_{j} = \alpha^{l}_{j} \alpha^{k}_{l'} \delta^{l'}_{l} = \alpha^{l}_{j} \alpha^{k}_{l} = \delta^{k}_{j}.$$

En coordonnées cartésiennes orthogonales et d'égale mesure, les symboles de dérivation partielle successifs ont directement variance tensorielle, ce qu'il est avantageux de mettre en évidence par l'écriture ∂_{ijk}, par exemple [1], pour $\frac{\partial^3}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}$.

Rappelons les notions de tenseur symétrique ou antisymétrique par rapport à deux indices, de tenseur complètement symétrique ou antisymétrique. Du fait que certaines symétries ou antisymétries doivent être conservées par un changement d'axes, nous pourrons souvent conclure à la symétrie ou à l'antisymétrie complète d'un tenseur.

Dans une équation tensorielle, tous les termes doivent avoir les mêmes variances (indices significatifs), et les deux membres doivent présenter les mêmes symétries; ces règles nous permettront souvent de conclure au caractère tensoriel de certaines grandeurs, ou de fixer *a priori* certaines variances ou certaines symétries.

Dans un tenseur complètement antisymétrique, les seules composantes non nulles sont celles dont tous les indices sont différents; si p est le rang de ce tenseur, il y a donc, abstraction faite du signe, C^{p}_{n} composantes non nulles. Deux tenseurs antisymétriques de rangs p et $n-p$ ont le même nombre de composantes non nulles, en vertu de l'égalité

$$C^{p}_{n} = C^{n-p}_{n}.$$

Tenseurs complémentaires ou « duals ». — Faisons correspondre chacune

---

[1] Nous écrirons souvent ∂^t ou ∂_t au lieu de $\frac{\partial}{\partial t}$ (t désignant le temps).

à chacune les composantes des deux tenseurs antisymétriques précédents de telle manière qu'un ensemble de deux composantes contienne une fois et une seule chaque indice. Ces deux tenseurs seront dits *complémentaires* ou *duals* si les composantes correspondantes sont : 1° de même module, et 2° de même signe lorsque, prenant les deux tenseurs dans un ordre bien déterminé, la permutation globale des indices est de classe paire [1]. Comme application classique des tenseurs duals on connaît, dans l'espace à 3 dimensions, le *produit extérieur* et le *rotationnel*; dans les deux cas, on remplace un tenseur antisymétrique du second rang T_{uv} par un vecteur T_w en profitant du fait que *toutes les permutations circulaires u, v, w des nombres 1, 2, 3 sont de classe paire.*

Dans l'Univers à 4 dimensions de la Relativité restreinte, qui nous intéresse, le moyen le plus sûr de passer au tenseur complémentaire est de distinguer l'indice 4 des indices 1, 2, 3, dont nous désignerons toujours par u, v, w une *permutation circulaire;* le quadrivecteur complémentaire d'un tenseur antisymétrique du 3e rang sera alors défini par les formules [2]

$$T_{uvw} = iT_4, \qquad T_{uv4} = -iT_w.$$

De même, on définira deux tenseurs complémentaires du second rang par les formules

$$E_{uv} = iH_{w4}, \qquad E_{w4} = iH_{uv};$$

remarquons que *cette dernière règle d'écriture est indépendante de l'ordre dans lequel les deux tenseurs antisymétriques du même rang sont énoncés;* cette circonstance heureuse est due au fait que le nombre de dimensions de l'Univers est de la forme $n = 2p$, p étant pair.

Formule générale de transformation des intégrales multiples

$$\int_p A_{\alpha\beta..\rho\sigma..}[dx^\lambda dx^\mu \ldots dx^\rho dx^\sigma \ldots]$$

$$= \int_{p+1} \partial_\omega A_{\alpha\beta..\rho\sigma..}[dx^\lambda dx^\mu \ldots dx^\rho dx^\sigma \ldots dx^\omega];$$

les indices ρ, σ, ... et ω sont muets, les α, β, ... et les λ, μ, ... non muets. Pour nous, les A seront des composantes de tenseurs. Quant aux éléments différentiels entre crochets (*éléments p linéaires*), ce sont des tenseurs com

(1) On démontre que, lors d'un changement des axes orthogonaux et d'égale mesure, les composantes homologues restent égales chacune à chacune. En axes obliques ou curvilignes, la définition des tenseurs complémentaires est moins simple que celle que nous avons rappelée (*voir* par exemple L. Brillouin, *Les tenseurs en Mécanique et en Élasticité*, Chap. III).

(2) La raison de l'introduction du coefficient i dans ces formules sera indiquée plus loin (n° 4, III).

plètement antisymétriques dont voici la définition. Prenons p *vecteurs de base* linéairement indépendants $\overrightarrow{dx_i}$, et soit dx_i^j la $j^{\text{ième}}$ composante du $i^{\text{ième}}$ vecteur; considérons le tableau rectangulaire à p lignes et n colonnes

$$\| dx_i^j \|.$$

Par définition, la valeur de la composante de l'élément p-linéaire écrite symboliquement sous la forme $[dx^\lambda dx^\mu \ldots]$ est celle du déterminant extrait en prenant les colonnes λ, μ, ..., le signe étant + ou — suivant que la permutation des indices est de classe paire ou impaire.

Cela étant, dans la formule précédente l'intégration d'ordre p est étendue à un domaine à p dimensions *fermé*, et l'intégration d'ordre $p+1$ au domaine à $p+1$ dimensions enclos dans le précédent. Il est facile d'établir par récurrence cette formule générale, et de vérifier qu'elle contient comme cas particuliers les formules classiques dites de Stockes, de la Divergence, du Gradient et du Rotationnel ([1]). On voit que la règle pour former l'élément différentiel du second membre à partir de celui du premier membre consiste à dériver sous le signe d'intégration par rapport aux indices *ne figurant pas* dans le crochet. Nous serons parfois amenés à remplacer ce crochet par son dual; dans ce cas, la règle à appliquer sera de *dériver par rapport aux indices figurant dans le dual du crochet.*

Nota. — Dans tout le cours de l'exposé, nous n'employons que les deux jeux d'indices suivants :

$$u, \quad v, \quad w, \quad 4, \qquad \text{et} \qquad i, \quad j, \quad k, \quad l;$$

u, v, w désigne une permutation *circulaire* des *indices d'espace* 1, 2, 3; i, j, k, l, une permutation *quelconque* des *indices d'Univers* 1, 2, 3, 4.

CHAPITRE I.

LA CINÉMATIQUE ET L'OPTIQUE RELATIVISTES.

1. Les trois paramètres d'espace $x_u (u = 1, 2, 3)$ et celui de temps t figurent dans les équations de la Mécanique, de l'Optique et de l'Électromagnétisme : la Cinématique est donc le cadre commun dans lequel s'expriment ces trois sciences, dont la majorité des faits physiques relève.

([1]) Pour ces formules, *voir* par exemple R. Bricard, *Calcul vectoriel*, p. 140.

Le comportement des grandeurs x et t étant ainsi vérifiable soit directement, soit par ses conséquences, *la Géométrie et la Cinématique relèvent de l'expérience.* On doit considérer la Géométrie d'Euclide comme la plus ancienne théorie de Physique mathématique. C'est aussi, et de beaucoup, celle dont la longévité fut la plus grande : l'espace de la Relativité restreinte n'est plus *absolu* au sens de Newton, mais il reste *euclidien.*

En fait, les classiques ont étudié la Cinématique surtout dans ses rapports avec la Dynamique, et plus particulièrement avec la Dynamique du point. Le succès de cette étude a été si complet que la cinématique et la dynamique galiléo-newtoniennes apparaissent comme un tout organiquement cohérent. Lorsque la nécessité des rectifications est apparue, elles ont dû les subir ensemble : la *relativité de la simultanéité* a entraîné la *relativité de la masse.*

En Physique classique, la Dynamique restreignait les possibilités de la Cinématique par sa loi d'*équivalence privilégiée des systèmes d'axes galiléens*, visible sur les équations et vérifiée en fait par la direction des étoiles dites *fixes*; on sait que la Relativité restreinte devait reprendre cette loi pour en faire le postulat de base de sa cinématique. En Physique classique, les prévisions théoriques relatives aux altérations de la loi d'inertie dans les *espaces accélérés* ou *tournants* par rapport aux précédents se vérifiaient parfaitement; un tel succès ne pouvait que renforcer la confiance accordée aux postulats de Newton, que le sens commun acceptait aisément : l'*espace absolu* et le *temps universel.*

En Optique, les classiques ont beaucoup étudié les effets du mouvement des corps, mais *toujours avec l'idée de résoudre des problèmes d'Optique,* particulièrement celui dit de « l'entraînement de l'éther par les corps matériels ». Nous voyons aujourd'hui que ce problème était un « faux problème », la question essentielle étant précisément celle du *contrôle par l'Optique des postulats de Newton*; mais cette question n'était pas posée.

Pourtant, l'Optique jouit en la matière d'un privilège incontestable. D'abord et surtout, c'est une science *essentiellement cinématique*, dans laquelle (une fois mises de côté les questions d'intensité) toutes les grandeurs sont homogènes à des espaces, à des temps ou à des nombres purs. En second lieu, c'est une science qui dispose, avec les phénomènes d'interférence, d'un moyen de mesure directe des espaces (et indirecte des temps) d'une précision rarement atteinte en d'autres domaines.

Or, l'intérêt primordial de la question vient de ce que l'Optique (géométrique ou ondulatoire) *associée à la cinématique de Newton* affirme l'existence d'un système de référence privilégié, et nie, en ce qui la concerne, l'équivalence des systèmes galiléens. En effet, si, dans l'un de ces systèmes, la vitesse de propagation de la lumière est isotrope et vaut c, dans un second système animé d'une translation uniforme $\vec{v}$ elle sera anisotrope, et aura des valeurs comprises entre $c \pm v$. On peut aussi vérifier que, dans les mêmes conditions, l'équation dalembertienne ne reste pas invariante.

Il apparaît donc que le moyen de vérification des postulats de Newton à la fois le plus *direct* et le plus *précis* consiste à mesurer, ou plutôt à *comparer la valeur de la vitesse de la lumière dans diverses directions*. Tel est l'objet de *l'expérience de Michelson*, dont le *résultat négatif* a été le suivant : *la vitesse de la lumière dans le vide mesurée par rapport à la Terre est isotrope* (1).

Pour les raisons que nous avons rappelées, ce résultat a été considéré comme tout à fait paradoxal; lorsque H. A. Lorentz, après avoir critiqué les diverses explications proposées, a admis l'existence d'une *contraction du bras longitudinal de l'appareil*, il a implicitement considéré cette contraction comme un effet mécanique du « vent d'éther ». On sait que la contraction de Lorentz, convenablement interprétée, a été retenue par la Relativité restreinte d'Einstein; sous sa forme initiale, elle n'était pas satisfaisante en ceci qu'*elle affirmait à la fois l'existence d'un système de référence privilégié* (l'éther) *et l'impossibilité complète de définir expérimentalement ce système*.

Tandis que l'Électromagnétisme entre directement et sans difficulté dans le cadre de la nouvelle cinématique (Chapitre II, § 1 et 2), on considère souvent que, pour devenir relativiste, la Dynamique doit subir d'importants remaniements. Il est remarquable que cette inégalité de traitements, maintes fois signalée, s'évanouisse pour ainsi dire totalement si l'on prend commme base de la Dynamique *les équations des milieux continus* (Chapitre III, § 1). Le passage,

(1) Pour la description de l'expérience de Michelson, *voir* par exemple H. OLLIVIER, *Cours de Physique générale*, t. III, p. 384 et p. 652.

traditionnel depuis Einstein, de l'Électromagnétisme à la Dynamique relativistes devient ainsi remarquablement aisé et naturel, en même temps que l'attention se trouve attirée sur un fait intéressant : *les équations de base de l'Électromagnétisme* (équations de Maxwell-Lorenz) *sont des équations densitaires*; là pourrait bien résider la cause de « l'affinité » de l'Électromagnétisme avec la Relativité. La Relativité restreinte, comme la Relativité générale, est tout naturellement une science des milieux continus, qui n'admet l'introduction du point matériel qu'après coup.

Depuis celle de Michelson, un très grand nombre d'expériences d'Optique ([1]), d'Electrostatique (Trouton et Noble) et d'Électrodynamique (Guye et Lavanchy) est venu enrichir le fonds d'observations sur lequel s'appuie la Relativité restreinte; nous mentionnerons seulement les plus classiques, dont l'interprétation est la plus directe et la portée la plus générale ([2]). Le présent Chapitre traite solidairement de la Cinématique et de l'Optique; l'établissement tant expérimental que théorique de la Relativité restreinte a en effet montré que ces deux sciences ont entre elles les rapports les plus étroits.

I. — *Établissement de la nouvelle Cinématique. Principes généraux de la Relativité restreinte.*

2. Postulat d'Einstein. Transformation réciproque de l'espace en temps. — Devant l'échec constant des expériences destinées à mettre en évidence le repère galiléen privilégié ou « éther » des classiques, Einstein postule en 1905 que *la loi d'équivalence privilégiée des repères galiléens n'est pas seulement une loi de Dynamique, mais une loi générale de la Physique*; plus précisément, *c'est une loi de Cinématique*.

Le problème posé est donc essentiellement le *problème expérimental et théorique du changement de repère galiléen*. En Relativité restreinte, à l'intérieur d'un même repère galiléen, Einstein

---

([1]) Parmi celles-ci figurent des expériences anciennes nouvellement interprétées : effet d'entraînement Fresnel-Fizeau, effet d'aberration Bradley, effet Döppler-Fizeau.

([2]) Pour la théorie détaillée de l'expérience de Trouton et Noble, on pourra consulter M. Von Laue, *La Théorie de la Relativité*, t. 1, p. 145 et p. 267 (trad. G. Létang).

ne modifiera en rien ni la géométrie ni la cinématique classiques; l'espace, notamment, continuera d'être euclidien. Par contre, en ce qui concerne le changement de repère galiléen, il est certain d'après ce qui précède que les conséquences du nouveau postulat devront différer des lois traditionnelles.

Ces lois dérivaient des postulats célèbres du *temps universel* et de l'*espace absolu* de Newton, et s'exprimaient dans les formules bien connues du groupe dit « de Galilée »

$$\bar{x}_u = x_u - vt \quad (u = 1, 2, 3), \qquad \bar{t} = t. \tag{1}$$

D'après ces formules, le changement de repère galiléen mélangeait le temps à l'espace, mais non pas l'espace au temps : la quatrième formule était complètement indépendante des trois premières, et son existence permettait d'adopter pour le temps une échelle unique ou *universelle;* il résultait notamment de là que la notion de *simultanéité de deux événements distants* possédait un sens intrinsèque. Quant au postulat de l'*espace absolu*, il se traduisait par le fait que la distance entre deux points de l'espace considérés d'une manière simultanée ne dépendait pas du repère galiléen utilisé.

Ainsi amené à reprendre pour les généraliser les formules (1), Einstein admet que la quatrième formule, relative à la transformation du temps, doit faire intervenir *aussi* les coordonnées d'espace. De ce fait, le temps cessera d'être *universel*, et chaque système galliéen se trouvera muni de son *temps propre*. En d'autres termes, Einstein pose en principe que *chaque repère galiléen sera un repère non seulemement spatial*, *mais aussi temporel.*

Imaginons alors, comme le faisaient parfois les classiques, que tout *événement* se produisant en un point et à un instant donnés soit rapporté à un système de quatre axes x_1, x_2, x_3 et t, dont la nature géométrique est provisoirement indéterminée. Le postulat d'Einstein revient en principe à traiter le temps de la même manière que l'espace, le changement de repère galiléen devant modifier les quatre coordonnées *à la fois*; c'est précisément en cela que consiste l'apport de la Relativité restreinte. Il fait passer le *continuum quadridimensionel* (x_1, x_2, x_3, t) du rang de simple artifice à celui de seule représentation objective possible des phénomènes de l'Univers, ainsi qu'il apparaîtra clairement plus loin. Comme corollaire, le fait que le changement de repère galiléen mélangera entre eux le temps et l'espace doit à priori se traduire comme une sorte d'*équivalence* (au sens thermodynamique) entre ces deux grandeurs; le coefficient d'équivalence c, qui a évidemment dimension de vitesse, donnera la possibilité de réduire de *un* le nombre des unités fondamentales, et d'exprimer les espaces et les temps avec la même unité.

Dans le cas particulier de l'Optique du vide, interprétant directement le *résultat négatif* de l'expérience de Michelson, Einstein énonce son postulat fondamental (destiné à remplacer ceux de Newton) sous la forme suivante : *dans tous les repères galiléens, la vitesse de propagation de la lumière est isotrope, et égale à une même constante universelle c* [1]. Ce postulat entraîne directement les nouvelles lois cherchées pour le *changement de repère galiléen*.

Prenons en effet un système de référence galiléen (x_1, x_2, x_3, t), et considérons une région du vide parcourue par des ondes lumineuses. D'après le *principe de Huygens*, tout vecteur élémentaire dx_u ($u = 1, 2, 3$) de cette région est parcouru par *de la lumière* cheminant à une vitesse c: d'après le *postulat d'Einstein*, c *est une constante universelle*, et, dt désignant la durée de parcours du vecteur élémentaire, on doit avoir, *dans tous les repères galiléens*,

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2\,dt^2 = 0.$$

Pour rendre cette expression symétrique, posons avec Minkowski

$$(2) \qquad \boxed{x_4 = ict;}$$

la loi de propagation de la lumière s'écrit alors

$$\sum_{i=1}^{i=4} (dx_i)^2 = 0.$$

Toujours avec Minkowski, rapportons les *événements* à un système de quatre axes cartésiens orthogonaux et d'égales mesures x_i, et appelons *Univers* le « continuum » ainsi défini. Le premier membre de l'expression précédente représente une distance d'Univers dont, par hypothèse, l'expression reste invariante pour tout changement de

[1] En Relativité générale, l'espace ne sera plus euclidien, mais possédera une courbure riemannienne. La vitesse de propagation de la lumière sera généralement anisotrope, et inférieure à la constante universelle c.

repère galiléen. On voit que, dans l'Univers de Minkowski, *les repères galiléens sont représentés par les systèmes de quatre axes rectilignes, orthogonaux, et d'égale mesure*, et par ces systèmes seulement; la notion d'*équivalence privilégiée des repères galiléens* se trouve ainsi rattachée à une propriété géométrique bien connue, et prend pour la première fois un sens cinématique parfaitement clair (¹).

Finalement les formules du changement de repère galiléen seront des substitutions linéaires homogènes à coefficients constants du type

$$\boxed{\bar{x}_i = o_i^j x_j, \qquad x_i = o_i^j \bar{x}_j \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),} \tag{3}$$

substitutions dont les coefficients *directs* et *inverses* satisfont aux identités (où δ_i^k désigne le symbole de Kronecker)

$$\boxed{o_i^j o_j^k = o_i^j \bar{o}_j^k = \delta_i^k;} \tag{4}$$

de plus, ces substitutions devront être *orthogonales*, c'est-à-dire satisfaire au système de conditions

$$\boxed{o_j^i = o_i^j;} \tag{5}$$

les coordonnées covariantes et contrevariantes sont ainsi rendues toujours égales chacune à chacune, de sorte que *la position haute ou basse des indices devient indifférente*.

Il est évident que le système des formules (2), (3), (4), (5) conserve l'expression de l'opérateur dalembertien

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

et que, réciproquement, nous aurions pu l'établir en raisonnant sur

(¹) A la suite d'Einstein, on appelle souvent *postulat de Relativité générale* le principe géométrique d'après lequel il y a équivalence de droit entre tous les systèmes de coordonnées, curvilignes ou non; les repères curvilignes sont évidemment inévitables en Relativité générale. Il est clair qu'il n'y a pas contradiction entre le *privilège des repères galiléens* affirmé en Relativité restreinte et *l'équivalence de tous les repères*, galiléens ou non, affirmé en Relativité générale. Dans le premier cas, on affirme simplement le privilège d'écriture simplifiée bien connu des axes cartésiens au sens étroit; dans le second, le droit qu'on a d'utiliser un repère absolument arbitraire.

le dalembertien comme nous l'avons fait sur le carré de la distance d'Univers.

Insistons un peu sur les circonstances qui accompagnent le rejet des postulats du *temps universel* et de *l'espace absolu*. Deux événements qui, dans un certain repère galiléen (x^i), se produisent simultanément en deux points distants, sont représentés dans l'Univers par deux *points* situés dans un même hyperplan tridimensionnel normal à l'axe Ox^4; cette dernière circonstance ne se conservant pas en général lorsqu'on change de quadrèdre cartésien, on voit qu'en général les deux événements considérés cessent d'être simultanés lorsqu'on change de repère galiléen. De même, deux événements qui, rapportés à un certain repère galiléen, affectent successivement le même point de l'espace, sont représentés dans l'Univers par deux *points* d'une même parallèle à l'axe Ox^4; cette dernière propriété n'étant pas invariante pour un changement de quadrèdre cartésien, il en est de même de la première pour un changement de repère galiléen. Ainsi, ni la *simultanéité à distance*, ni la *co-localisation de deux événements successifs* ne sont des notions douées d'un sens intrinsèque. Il n'en est pas de même de la coïncidence à la fois spatiale et temporelle; son interprétation dans l'Univers étant indépendante de tout mode de repérage, *la notion de coïncidence spatio-temporelle possède un sens intrinsèque.*

Plus généralement, soit un couple d'événements quelconques, représentés par deux points E^1 et E^2 dans l'Univers de Minkowski. Les *lieux* et les *instants* où ils se manifestent dans un repère galiléen donné (x_i) s'obtiennent en projetant E^1 et E^2 d'une part sur l'hyperplan $Ox_1x_2x_3$, d'autre part sur l'axe Ox_4; il est clair que ni la *distance spatiale* $|e^2 - e^1|$, ni l'*intervalle temporel* $t^2 - t^1$ ne sont des invariants. Par contre, l'*intervalle spatio-temporel*

$$(\Delta s)^2 = \Delta x^i \, \Delta x_i = \Delta x^u \, \Delta x_u - c^2 (\Delta t)^2 \tag{6}$$

(écrit avec la convention de sommation: $i = 1, 2, 3, 4$; $u = 1, 2, 3$) est un invariant, et, par conséquent, possède un sens intrinsèque. Par définition, suivant que Δs^2 est négatif ou positif (c'est-à-dire Δs imaginaire pur ou réel), le *quadrivecteur d'Univers* $E^2 - E^1$ sera dit *du genre temps* ou *du genre espace;* il sera dit *isotrope* dans le *cas frontière* $\Delta s^2 = 0$. Il est bien évident que cette classification possède un sens objectif.

La formule (6), plus encore que les formules (2), (3), (4) et (5), peut être considérée comme une véritable expression du *principe d'équivalence entre l'espace et le temps*, qui est un corollaire obligé du postulat d'Einstein.

3. Distinction entre l'espace et le temps. Interprétation des coefficients o_j^i. — La découverte d'une *équivalence* (au sens thermodynamique) entre l'espace et le temps ne doit pas faire oublier la différence de caractères extrêmement nette que l'espace et le temps présentent entre eux; la principale est que, contrairement à l'espace, le temps n'est pas réversible. Avant la découverte de la loi d'équivalence, on rendait compte tout naturellement de ce fait banal sans la moindre difficulté; en Relativité, on devine qu'il va falloir formuler clairement un *second principe*, à associer au *premier principe* dont l'étude a fait l'objet du numéro précédent.

A la suite d'Einstein, la plupart des auteurs ont écrit que la manière dont la Relativité rend compte de la différence des comportements de l'espace et du temps consiste dans le signe négatif du carré temporel dans le Δs^2. Montrons qu'en effet l'irréversibilité du temps ainsi que divers corollaires sont étroitement liés à ce fait.

Tout événement objectif est caractérisé par quatre valeurs réelles des paramètres x_1, x_2, x_3, t, c'est-à-dire, en variables de Minkowski, par *trois x_u réels* ($u = 1, 2, 3$) et par x_4 *imaginaire pur*. Comme nous allons le voir, cet énoncé purement formel entraîne les divers énoncés « à inégalités » du *principe d'évolution* relativiste.

D'après les formules (3), un premier corollaire immédiat est que les coefficients o_j^i d'un changement de repère galiléen *objectif* doivent être réels s'ils contiennent l'indice 4 zéro ou deux fois, imaginaires purs s'ils le contiennent une fois. Prenant alors la formule (4) pour $i = k = 4$, et tenant compte de (5), on peut écrire (en utilisant la convention de sommation pour $u = 1, 2, 3$) :

$$(7) \qquad (o_4^4)^2 = 1 - \bar{o}_4^u o_u^4, \qquad (\bar{o}_4^4 = \underline{o}_4^4 = o_4^4, \qquad \bar{o}_4^u = \underline{o}_u^4).$$

Or, la somme $\bar{o}_4^u \underline{o}_u^4$ étant essentiellement négative d'après ce qui vient d'être dit, on doit avoir l'*inégalité*.

$$(o_4^4)^2 \geq 1,$$

c'est-à-dire encore

$$o_4^4 \leq -1, \qquad \text{ou} \qquad +1 \leq o_4^4.$$

Ainsi, tout comme en thermodynamique, un « second principe » vient restreindre les possibilités offertes par le « premier principe ». Le groupe initial des transformations (3), (4), (5) est maintenant scindé en deux familles complètement distinctes.

Si l'on postule alors, comme il semble naturel, que *les transformations restant permises doivent encore former un groupe*, la première famille se trouve éliminée comme ne contenant pas la transformation identique. Au contraire, la seconde famille, qui contient la transformation identique, forme bien un groupe car, comme on le vérifie sans peine, la transformation (o_j^i) produit de deux transformations $(o_j'^i)$ et $(o_j''^i)$ telles que $o_4'^4 \geqq 1$ et $o_4''^4 \geqq 1$ satisfait à la condition $o_4^4 \geqq 1$.

Finalement, les coefficients o_j^i d'un changement de repère galiléen objectif doivent, en plus des relations (4) et (5), satisfaire à l'*inégalité* importante pour la suite

$$\boxed{o_4^4 \geqq 1}. \tag{8}$$

Comme *a fortiori* $o_4^4 > 0$, on peut dire que *le sens d'écoulement du temps est le même dans tous les repères galiléens objectifs.*

Prenons d'abord l'hypothèse $o_4^4 = 1$. D'après (7), les $\overline{o}_4^u = \underline{o}_u^4$ sont alors nuls, et la transformation (3) se réduisant à

$$\overline{t} = t, \qquad \overline{x}_u = \overline{o}_u^v x_v \qquad (u, v = 1, 2, 3), \tag{9}$$

s'interprète comme une simple rotation du trièdre d'espace, et non pas comme un changement de repère galiléen proprement dit. Du coup l'interprétation des neuf coefficients $\overline{o}_v^u = \underline{o}_u^v$ se trouve donnée.

Afin d'étudier un véritable changement de repère galiléen, supposons $o_4^4 > 1$. Pour « suivre le mouvement » de l'origine o des axes d'espace du repère galiléen (x_i) faisons, dans les (3_1), $x_u \equiv 0$ $(u = 1, 2, 3)$; il vient

$$\overline{x}_u = \overline{o}_u^4 x_4, \qquad \overline{x}_4 = \overline{o}_4^4 x_4. \tag{10}$$

Portant alors x_4 de (10_2) dans les (10_1), il vient les *équations du mouvement de l'origine spatiale o des axes ox_u par rapport au repère galiléen $(\overline{x}_i)$*

$$\overline{x}_u = \frac{1}{o_4^4} \overline{o}_u^4 \overline{x}_4 = \frac{ic}{o_4^4} o_u^4 t; \tag{10'}$$

ainsi, les trois quantités réelles $\frac{ic\bar{o}_0^4}{o_4^4}$ sont les composantes de la vitesse de l'origine des espaces o du système galiléen « mobile » (x_i) par rapport au système « fixe » $(\bar{x}_i)$. En Relativité, il est d'usage de poser

$$\boxed{\vec{\beta} = \frac{1}{c}\vec{v},} \tag{11}$$

de sorte qu'on écrira finalement (pour $u = 1, 2, 3$)

$$\bar{v}_u = \frac{ic}{o_4^4}\bar{o}_u^4, \qquad \bar{\beta}_u = \frac{i}{o_4^4}\bar{o}_u^4; \tag{12}$$

les composantes de la *vitesse réduite* $\vec{\beta}$ s'interprètent donc, dans l'Univers de Minkowski, comme les trois « coefficients angulaires » de l'axe Ox_4 dans le quadrèdre $O\bar{x}_i$.

Montrons enfin que le coefficient o_4^4 est relié à la valeur absolue de la vitesse réduite; formant le produit scalaire *d'espace* $\beta_u\beta^u = \vec{\beta}^2$, et tenant compte de (7_1), il vient

$$\beta^2 = \frac{(o_4^4)^2 - 1}{(o_4^4)^2} \quad \text{ou} \quad o_4^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \tag{13}$$

on conclut de là l'*égalité en module des deux vitesses relatives* de l'origine spatiale o par rapport au système galiléen $(\bar{x}_i)$ et de l'origine spatiale $\bar{o}$ par rapport au système (x_i). Par ailleurs, o_4^4 étant réel, on a nécessairement

$$\boxed{\vec{\beta}^2 \leqq 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{v}^2 \leqq c^2;} \tag{14}$$

la vitesse relative des origines spatiales de deux repères galiléens objectifs est toujours inférieure à c en module (vitesse limite d'Einstein).

Écrivons alors le ds^2 de l'axe Ox_4 du repère galiléen « mobile » (x_i) avec le système de coordonnées « fixes » $(\bar{x}_i)$; on a

$$ds^2 = dx^u\,dx_u - c^2\,dt^2 = (v^2 - c^2)\,dt^2 \leqq 0, \tag{15}$$

ce qui montre que *les axes temporels des repères galiléens objectifs sont tous du genre temps*, et par conséquent que *les axes spatiaux des repères galiléens objectifs sont tous du genre espace.*

Ce double résultat fournit une interprétation concrète de la classification des intervalles d'Univers suivant le signe de leur Δs^2 donnée à la fin du numéro précédent : on voit qu'un quadrivecteur ΔE sera *du genre temps* ou *du genre espace* suivant qu'il existe un certain repère galiléen objectif dit *propre* dans lequel il se trouve parallèle ou perpendiculaire à l'axe temporel Ox^4.

Les inégalités (8), (14), (15) peuvent être considérées comme trois expressions différentes du *principe d'évolution* de la Relativité.

Remarque. — Les grandeurs α_4^4 et β sont reliées à l'angle θ des deux axes temporels par les formules

$$\cos\theta = \alpha_4^4 \geqq 1, \qquad \beta = i \tan\theta \tag{16}$$

(16_2 résulte de 13_2); *l'angle θ est donc imaginaire pur.*

4. Autres principes de la Relativité. — Nous allons énoncer quelques principes qui prépareront le passage de la Cinématique à la Physique relativiste.

I. Certains phénomènes (idéalement susceptibles d'une localisation parfaitement ponctuelle dans l'espace et dans le temps) ont la propriété de pouvoir être suivis au cours du temps; leurs propriétés physiques évoluent d'une manière suffisamment continue pour qu'on puisse reconnaître le « même » phénomène à des instants successifs. Un exemple important de *phénomène subsistant* est celui du *point matériel*, que la Physique (préquantique) considérait comme entièrement caractérisé par sa masse et par sa charge électrique.

Dans l'Univers, un *phénomène ponctuel subsistant* décrit une *trajectoire*, curviligne dans le cas général d'un mouvement accéléré. Or, c'est un fait d'expérience érigé en *postulat fondamental* par la Relativité, qu'il y a toujours un repère galiléen objectif dans lequel, à un instant donné, le *phénomène subsistant* est au repos : c'est le *repère galiléen propre*, dit encore *entraîné* ou *tangent*, parce que, dans l'espace ordinaire, son mouvement est tangent à celui du phénomène ponctuel au sens de la mécanique rationnelle, et que, dans l'Univers, son axe temporel est géométriquement tangent à la trajectoire du phénomène.

Ainsi, *tout phénomène ponctuel subsistant est, à chaque instant, l'origine virtuelle d'un trièdre galiléen d'espace objectif.* Il suit de là que toutes les propriétés démontrées pour les origines de trièdres galiléens s'étendent aux phénomènes subsistants, et notamment : 1° *que la vitesse de propagation d'aucun phénomène objectif ne peut surpasser la valeur c*; 2° *que les trajectoires d'Univers des phénomènes objectifs sont du genre temps*, et leur abscisse curviligne une fonction constamment croissante du temps.

II. Imaginons maintenant un *observateur ponctuel;* c'est un *phénomène subsistant* doué des propriétés précédentes, et qui possède en outre une *conscience*. La Relativité pose en *postulat fondamental* que les cadres de temps et d'espace auxquels l'*observateur ponctuel* rapporte spontanément les phénomènes à chaque instant sont respectivement la *tangente* et l'*hyperplan tridimensionnel normal* à sa trajectoire d'Univers. Tout point matériel est considéré comme pouvant être occupé par un observateur, et l'on appelle *temps propre* et *espace propre* du point matériel les deux variétés planes précédentes; la *durée d'un point matériel accéléré* s'obtient par intégration du temps propre $d\tau$ ou, ce qui revient au même, de l'abscisse curviligne

$$ds = dx = ic\,d\tau,$$

III. La Physique relativiste pouvant s'interpréter en langage de *Géométrie d'Univers*, ses équations porteront sur des tenseurs, vecteurs et invariants d'espace-temps. Bien entendu, au moins en première approximation, les relations traditionnelles entre grandeurs réelles devront être retrouvées. Ce résultat sera atteint grâce au respect de la *règle* suivante : *toute composante de tenseur d'Univers sera prise réelle ou imaginaire pure suivant qu'elle contiendra l'indice 4 un nombre pair ou impair de fois*. Par exemple, les composantes associées de deux tenseurs antisymétriques complémentaires seront prises l'une réelle, l'autre imaginaire pure.

Considérons un quadrivecteur X_i; dans l'expression du carré de sa longueur

$$(S)^2 = X_i X^i = X_u X^u + X_4 X^4,$$

la somme $X_u X^u$ est essentiellement positive et le terme $X_4 X^4$ essentiellement négatif. Conformément à une définition antérieure, ce quadrivecteur sera dit *du genre temps* ou *du genre espace* suivant que S^2 sera négatif ou positif. Corollaires : 1° Un quadrivecteur est du genre temps ou du genre espace suivant qu'il est posssible d'annuler, dans un certain système galiléen objectif, ses trois composantes spatiales X_u ou sa composante temporelle X_4; 2° si, de deux quadrivecteurs orthogonaux, l'un est du genre temps, l'autre est nécessairement du genre espace; deux quadrivecteurs du genre espace peuvent être orthogonaux entre eux. *Cas frontière* : un vecteur de longueur nulle est dit *isotrope*.

Deux événements *simultanéisables*, c'est-à-dire deux événements tels qu'il existe un repère galiléen objectif dans lequel ils ont lieu en même temps, définissent un vecteur du genre espace.

II. — *Applications diverses*.

5. **Formules de H.-A. Lorentz.** — Les formules relativistes du changement de repère galiléen peuvent évidemment, en vertu de (12_2) et (13_2), être écrites de manière à mettre directement en évidence les composantes et le module de la vitesse $\vec{v}$ $\left(\text{ou de } \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}\right)$; pour simplifier, on supposera le tableau des neuf o_v^u diagonal, ce qui revient à prendre les deux systèmes d'axes d'*espace* parallèles chacun à chacun. Pour simplifier encore, on prendra $\beta_2 = \beta_3 = 0$, c'est-à-dire qu'on supposera le vecteur d'espace $\vec{v}$ parallèle à ox_1 et $\bar{o}\bar{x}_1$; les (3) donnent alors $o_2^2 = o_3^3 = 1$, de sorte qu'il vient déjà

$$x_2 = x_2, \qquad x_3 = x_3. \tag{17}$$

Les deux autres formules feront intervenir les x_1 et les x_4 seuls, de sorte que, dans l'Univers de Minkowski, la transformation s'interprétera comme une rotation des axes $x_1 O x_4$ dans leur propre plan; on peut écrire, θ désignant l'angle des axes de même nom,

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= (x_1 + x_4 \operatorname{tang}\theta)\cos\theta, & x_1 &= (\bar{x}_1 - x_4 \operatorname{tang}\theta)\cos\theta, \\ \bar{x}_4 &= (x_4 - x_1 \operatorname{tang}\theta)\cos\theta, & x_4 &= (\bar{x}_4 + \bar{x}_1 \operatorname{tang}\theta)\cos\theta; \end{aligned}\right. \tag{17'}$$

tenant compte enfin des (16), il vient

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1 + vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ t &= \frac{t + \frac{\beta x_1}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ t &= \frac{t - \frac{\beta \bar{x}_1}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \end{aligned}\right. \tag{17''}$$

Les formules (17) et (17″) constituent l'expression donnée par Lorentz et Poincaré du changement de repère galiléen dans la nouvelle cinématique, antérieurement à la Relativité restreinte d'Einstein. Les axes d'espace ox_1

et $\bar{o}\bar{x}_1$ glissent l'un sur l'autre avec la vitesse uniforme $\pm v$. Si l'on néglige β^2 devant 1, on retrouve comme première approximation les formules (1) du groupe de Galilée-Newton, *les axes d'espace étant essentiellement supposés galiléens* [1].

Allongement des périodes par le mouvement. — Considérons deux événements successifs affectant un même point matériel p (battements d'une minuscule *horloge*, par exemple). Dans le système galiléen propre x_i, ils sont séparés par l'intervalle de *temps propre* $\Delta t = \dfrac{\Delta x_4}{ic}$; dans tout autre système $\bar{x}_i$, leur intervalle de temps $\Delta\bar{t}$ est la projection sur l'axe temporel de la valeur précédente, soit $\overline{\Delta t} = o_4^4\,\Delta t = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\overline{\Delta t}$ est plus grand que Δt parce que $o_4^4 = \cos\theta$ est supérieur à l'unité.

Distance de deux points réels : contraction des longueurs par le mouvement. — Considérons deux points matériels p et q au repos dans un certain système galiléen propre x_i (*extrémités d'une règle* par exemple). Dans l'Univers, ils engendrent comme trajectoires deux parallèles à l'axe Ox_4; leurs manifestations spatiales *simultanées* $\bar{p}$ et $\bar{q}$ dans un système galiléen quelconque $\bar{x}_i$ sont les *traces* de ces trajectoires sur l'espace tridimensionnel $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. Comme $\cos\theta$ est plus grand que 1, le vecteur $\overrightarrow{\bar{q}-\bar{p}}$ est en général plus court que $\overrightarrow{q-p}$.

Décomposons le vecteur $\overrightarrow{\bar{q}-p}$ parallèlement et perpendiculairement à sa vitesse de translation $\vec{v}$: en raisonnant dans l'Univers, on voit clairement que la composante transversale a la même valeur qu'au repos, la composante longitudinale étant *contractée* dans le rapport $\Delta\bar{x} = \Delta x\sqrt{1-\beta^2}$. Par exemple, un corps réel qui se présente, dans un système galiléen *propre*, comme une sphère solide immobile, se présentera dans tout autre système galiléen comme un ellipsoïde aplati dans le sens du mouvement dans le rapport $\sqrt{1-\beta^2}$; si la vitesse de ce corps pouvait atteindre la valeur c, il se réduirait à un disque normal au déplacement.

Lois de composition des vitesses. — Rappelons que, à l'intérieur d'un système galiléen donné, les lois de la cinématique traditionnelle sont intégralement conservées. Le problème actuel est le suivant : étant donnés trois trièdres galiléens d'espace (I), (II), (III), et connaissant les vitesses $\vec{v}_2 = \vec{v}(\text{III},\text{II})$ et $\vec{v}_1 = \vec{v}(\text{II},\text{I})$, trouver la vitesse $\vec{v} = \vec{v}(\text{III},\text{I})$. Les formules (17) et (17″), par exemple, permettent de traiter le problème dans toute sa généralité; on constate que, par rapport à la cinématique traditionnelle, la correction relativiste est du second ordre en $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

[1] Cette dernière restriction n'était pas nécessaire en cinématique classique.

Nous allons porter plus spécialement notre attention sur le cas des vitesses parallèles, qui conduit à des conséquences physiques intéressantes.

6. **Composition des vitesses parallèles. Règle d'Einstein.** — Dans l'Univers, la composition de deux vitesses parallèles $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ se traduit par l'addition de deux angles coplanaires θ_1 et θ_2; en vertu de l'égalité (16_2), la composition de ces vitesses est ramenée à la « composition des tangentes », suivant la loi

$$\operatorname{tang}(\theta_1+\theta_2)=\frac{\operatorname{tang}\theta_1+\operatorname{tang}\theta_2}{1-\operatorname{tang}\theta_1\operatorname{tang}\theta_2}.$$

On trouve ainsi la *règle d'Einstein,* qui généralise la règle classique, et dans laquelle les deux vitesses interviennent symétriquement :

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+\beta_1\beta_2}=(v_1+v_2)(1-\beta_1\beta_2+\ldots).$$

Loi d'entraînement de Fresnel. — Si l'une des vitesses, par exemple v_2, vaut c, il vient $\beta=c$: *une vitesse quelconque ajoutée à la vitesse de la lumière redonne la vitesse de la lumière;* c'est là un nouvel énoncé du postulat initial d'Einstein. Si maintenant la vitesse v_2 correspond à la propagation de la lumière dans un milieu isotrope d'indice n, au repos dans un certain système galiléen, d'après l'Optique classique on a dans ce système $v_2=\frac{c}{n}$; par suite, dans un *système galiléen non propre* animé de la vitesse $\vec{v}$ par rapport au précédent, on a pour vitesses de propagation suivant $\vec{v}_1=\vec{v}$

$$c'=\frac{\frac{c}{n}\pm v}{1\pm\frac{v}{nc}}=\left(\frac{c}{n}\pm v\right)\left(1\mp\frac{v}{nc}+\ldots\right).$$

C'est l'*effet Fizeau, du premier ordre en* v; retenant le premier terme seul, il vient la loi bien connue de Fresnel

$$\boxed{c'=\frac{c}{n}\pm v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\ldots} \tag{18}$$

Pour la relativité, la loi de Fresnel est une *loi de Cinématique* dont la justification n'exige aucun postulat spécial; l'expérience de

Fizeau apparaît comme une *expérience de Cinématique* utilisant des vitesses suffisamment grandes pour mettre en défaut les postulats de Newton.

Théorie des expériences de Harress et de Sagnac. — Nous allons appliquer la formule (18) à une théorie de ces deux expériences célèbres qui ne sortira pas du cadre de la Relativité restreinte ([1]). On sait que ces expériences consistent à faire parcourir à la lumière dans les deux sens un même circuit matériel, primitivement au repos dans un certain repère galiléen; il est évident que le *retard optique*, ou différence des deux durées de parcours, est alors nul. Dans l'expérience de Harress, la première en date, la lumière chemine dans des prismes de verre d'indice n: dans celle de Sagnac, elle chemine dans l'air assimilé au vide ([2]).

Le circuit matériel est solidaire d'un disque qui peut être animé d'une vitesse de rotation uniforme autour de son axe; les dimensions de la projection sur le disque de l'aire $\mathcal{A}$ du circuit sont grandes par rapport à l'épaisseur des faisceaux lumineux, de sorte que la valeur de $\mathcal{A}$ est suffisamment bien déterminée. Lorsque le disque tourne avec la vitesse angulaire ω, l'expérience montre que le retard Δt est, dans les deux expériences, donné par la même formule

$$\boxed{\Delta t = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c^2}} \tag{19}$$

qui est indépendante de l'indice n. Nous allons justifier ce résultat.

A l'intérieur des deux faisceaux interférents, traçons un *circuit moyen* $\mathcal{C}$ solidaire du disque; soit $\mathcal{A}$ l'aire de sa projection, P l'un quelconque de ses points. Prenons un système de référence galiléen quelconque, dont nous négligeons la composante de vitesse normale au disque; soit I le centre instantané de rotation, c'est-à-dire le point du disque momentanément immobile dans ce système. Par rapport à la cinématique classique, toutes les corrections en position et en vitesse sont du second ordre en ω; comme l'effet considéré est du premier ordre en ω, nous pouvons négliger ces corrections. *Au premier ordre, la description de la rotation du disque sera la même qu'en cinématique classique :* tout se passe comme si le disque tournait en bloc autour du point I avec la vitesse angulaire ω (définie sans ambiguïté dans le repère galiléen solidaire de l'axe matériel de rotation). Posons $\vec{r} = \mathrm{P} - \mathrm{I}$.

Dans le système galiléen entraîné à un instant donné par le point P, la vitesse de la lumière en P est isotrope; cela, en vertu du postulat d'Einstein

([1]) Pour une théorie de Relativité générale, *voir* notamment P. LANGEVIN, *C. R. Acad. Sci.*, 173, 1921, p. 831. Nous avons donné la présente démonstration aux *C. R. Acad. Sci.*, 211, 1940, p. 634.

([2]) Pour la description de l'expérience de Sagnac, *voir*, par exemple, H. OLLIVIER *Cours de Physique générale*, p. 671.

dans l'expérience de Sagnac, et d'une loi d'optique classique dans l'expérience de Harress. Soit $\frac{c}{n}$ sa valeur ($n = 1$ dans l'expérience de Sagnac).

Soit maintenant, *dans le système galiléen entraîné par* I, v la composante tangentielle au circuit de la vitesse du point matériel P; elle a pour expression

$$v = \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)\vec{t} = \vec{\omega}\left(\vec{r} \wedge \vec{t}\right).$$

Sur le même axe et dans chaque sens, les vitesses de la lumière sont données par la formule (18); en retranchant $\pm v$, il vient les vitesses de la lumière *au point* P, *par rapport au disque*.

$$c_1 = \frac{c}{n}\left(1 - \frac{\beta}{n}\right), \qquad c_2 = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\beta}{n}\right);$$

par conséquent, pour un petit élément de circuit $\vec{dl}$ placé en P, il vient les deux *durées de parcours inégales*

$$dt_1 = \frac{n\,dl}{c}\left(1 + \frac{\beta}{n} + \ldots\right), \qquad dt_2 = \frac{n\,dl}{c}\left(1 - \frac{\beta}{n} + \ldots\right).$$

Par différence, on trouve le *retard partiel indépendant de l'indice* n

$$\delta t = 2\,\frac{v\,dl}{c^2} = 2\,\frac{\vec{\omega}\left(\vec{r} \wedge \vec{dl}\right)}{c^2} = \frac{4\omega}{c^2}\,d\mathcal{A}$$

et par suite, après intégration le long du circuit, l'expression (19) annoncée pour le retard total.

Ainsi, à bord d'un *solide tournant*, il existe une *anisotropie optique* proportionnelle : 1° à la distance r du point considéré au point occupé par l'observateur; 2° à la vitesse angulaire ω.

Il n'y a là aucune contradiction avec le postulat initial d'Einstein, parce que cette anisotropie disparaît : 1° lorsque $r \to 0$, c'est-à-dire au point occupé par l'observateur; 2° lorsque $\omega \to 0$, c'est-à-dire en tous les points d'un « solide galiléen ».

7. *L'onde plane monochromatique* est à l'Optique ce que le point matériel est à la Mécanique : une abstraction tirée de l'expérience, utile dans l'analyse et dans la synthèse des phénomènes réels.

La ou les fonctions F qui caractérisent l'onde plane dépendent des variables x^u et t par l'intermédiaire de la seule *fonction scalaire phase* dont l'expression est

$$(20) \qquad f = \frac{\alpha_u x^u}{L} - \frac{t}{T};$$

les α_u sont les trois cosinus directeurs des *rayons lumineux* ou normales aux *plans d'ondes* $f =$ const.; les constantes T et L (*période* et *longueur d'ondes*), respectivement homogènes à un temps et à une longueur, sont reliées entre elles par la *célérité* c

(21) $$L = cT.$$

Remplaçant dans (20) L en fonction de T, puis T par son inverse la *fréquence* ν, enfin t par $\frac{x^4}{ic}$, l'expression de la phase devient

$$f = (\alpha_u x^u + i x^4)\frac{\nu}{c};$$

pour qu'elle ait une signification tensorielle, il est nécessaire que la phase soit un *invariant relativiste;* l'expression considérée est donc le *produit scalaire* du quadrivecteur x^i par le quadrivecteur

(22) $$\boxed{\lambda_u = \alpha_u \frac{\nu}{c}, \qquad \lambda_4 = i\frac{\nu}{c},}$$

qu'on peut appeler *quadrivecteur fréquence spatio-temporelle*, et qui est *isotrope* en vertu de (21). Finalement, la phase s'écrit

(23) $$\boxed{f = \lambda_i x^i.}$$

Si l'on change de repère galiléen, *la fréquence ν se transforme comme un temps, et les trois α_u comme une vitesse;* les *rayons lumineux d'Univers* sont dirigés selon λ_i, et les *hyperplans d'onde d'Univers* $f =$ const. sont leurs normales; dans chaque trièdre d'espace galiléen et, à chaque instant t, les formules (22) et (20) définissent les *plans d'onde* par $f =$ const. et les *rayons lumineux* comme étant leurs normales.

Avant d'aller plus loin, il est indispensable d'écarter une difficulté : dans toute direction autre que celle des rayons, l'onde plane se propage avec une vitesse supérieure à c, ce qui semble contredire un des principes de base de la Relativité restreinte. L'objection peut et doit être levée de la manière suivante : *en fait, l'onde plane n'existe pas*, parce qu'elle devrait remplir l'espace entier (principe de Huygens); une onde réelle est toujours une superposition d'ondes planes, et c'est sa *vitesse de groupe* qui possède une signification physique (formule de Lord Rayleigh). Finalement, *l'on peut et doit* *admettre qu'aucun paquet d'ondes réel ne se déplace à une vitesse supérieure à c.* La véritable portée de cette remarque apparaît dans la *Mécanique ondulatoire* de L. de Broglie, dont nous rappelons les principes à la fin de notre Chapitre IV.

8. **Aberration et effet Döppler.** — Appliquons les formules de Lorentz (17) et (17″) au quadrivecteur λ_i (nous prenons, pour simplifier, $\bar{\lambda}_3 = \lambda_3 = 0$); il vient

$$(24)\qquad \bar{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1 - i\beta\lambda_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \bar{\lambda}_2 = \lambda_2, \qquad \bar{\lambda}_4 = \frac{\lambda_4 + i\beta\lambda_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Remplaçant, dans (24_3), les λ en fonction de ν d'après les (22), il vient la *loi de transformation des fréquences* ou *formule relativiste de l'effet Döppler* (α_1 est le cosinus de l'angle des rayons avec la vitesse de déplacement)

$$(25)\qquad \boxed{\bar{\nu} = \frac{1+\alpha_1\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\nu.}$$

De même, remplaçons dans (24_1) λ_4 par $\frac{i\lambda_1}{\alpha_1}$, et divisons les deux membres par $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2$: on fait apparaître les cotangentes χ_1 et $\bar{\chi}_1$ de l'angle des rayons avec la vitesse de déplacement, et il vient la *loi de transformation des directions des rayons* ou *formule relativiste de l'aberration*

$$(25')\qquad \boxed{\bar{\chi}_1 = \frac{1+\frac{\beta}{\alpha_1}}{\sqrt{1-\beta^2}}\chi_1.}$$

Ces deux effets sont du premier ordre en β, comme en théorie classique. *Si l'on néglige les termes du second ordre par l'assimilation de* $\sqrt{1-\beta^2}$ *à* 1, *on retrouve les formules classiques.* Supposons en effet que les ondes planes proviennent d'une source lointaine immobile dans le système non accentué; dans (25), $\alpha_1\beta$ n'est autre que la composante radiale β_r de la vitesse de translation réduite, et il vient

$$(26)\qquad \bar{\nu} = (1+\beta_r)\nu.$$

de même, dans (25′) $\frac{\chi_1}{\alpha_1}$ est l'inverse du sinus de l'angle des rayons avec la vitesse de translation, de sorte que $\frac{\chi_1}{\alpha_1 c}$ est l'inverse de la composante transversale c_t de la vitesse avec laquelle la lumière chemine le long des rayons, et qu'il vient

$$\bar{\chi}_1 = \chi_1 + \frac{v}{c_t}. \tag{26'}$$

Les formules (26) et (26′) sont bien les formules classiques de l'effet Döppler et de l'aberration, écrites d'après les règles usuelles de composition des vitesses, et vérifiées par l'expérience.

Dans le cas particulier où la translation se fait suivant les rayons lumineux ($\alpha_1 = 1$), la formule relativiste de l'effet Döppler est

$$\bar{\nu} = \nu\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Au début de la Relativité, on a pu considérer la nouvelle explication de l'aberration et de l'effet Döppler comme moins simple et moins directe que l'ancienne, et invoquer l'analogie du son dans laquelle c'est l'ancienne explication qui joue. En fait, cette analogie ne tient pas, parce que le son se propage dans un milieu qui est, de par sa seule existence, un système de référence privilégié; en Optique du vide, le milieu « éther » ne peut pas être mis en évidence et l'on doit donc nier son existence. Si l'on remarque alors que, *dans les formules classiques* (26) *et* (26′), *les vitesses absolues s'éliminent* de manière à ne laisser figurer que les vitesses de translation relatives source-observateur, on conclut que *l'aberration et l'effet Döppler parlent pour la Relativité et non contre elle.*

Réflexion sur un miroir mobile. — Cette question, comme la précédente, est le plus souvent traitée au moyen des équations de l'Électromagnétisme. La nature *purement cinématique* du problème est ainsi quelque peu masquée, ce qui nous fait préférer un raisonnement portant directement sur la transformation du *quadrivecteur fréquence* (1).

En optique classique, on sait que l'ensemble d'une source ponctuelle s et d'un miroir plan x^2Ox^3 réputés « immobiles » est équivalent à la *source virtuelle* s' symétrique de s par rapport à x^2Ox^3. Nous allons montrer que *cette propriété subsiste en optique cinématique*, en ce sens que si l'on imagine que la lumière émane d'une source s fixe dans le système galiléen auquel on se réfère, *tout se passe comme si la lumière réfléchie par le miroir émanait de*

(1) Dans sa *Thèse*, M. Louis de Broglie a utilisé des raisonnements purement cinématiques, faisant intervenir l'impulsion-masse des photons.

la source s' symétrique de s et animée de la vitesse $2\vec{v}_r$ ($\vec{v}_r$ désignant la composante normale à lui-même de la vitesse du miroir); c'est bien là, en effet, la condition pour que s et s' restent symétriques par rapport au miroir.

Prenons d'abord comme repère le système galiléen $px^1x^2x^3$, t lié au miroir, px_1 étant dirigé suivant la normale. D'après la première loi de Descartes, les plans d'incidence et de réflexion sont confondus; soit $x^3 = 0$ ce plan. D'après la seconde loi de Descartes, les angles d'incidence et de réflexion sont égaux; enfin, d'après l'optique ondulatoire, il y a conservation de la fréquence. Dans le *système propre* considéré, les deux quadrivecteurs fréquence λ_i et λ'_i relatifs au rayon incident et au rayon réfléchi satisfont donc aux relations (*lois propres* de la réflexion) :

$$(27)\qquad \lambda'_1 = -\lambda_1, \qquad \lambda'_2 = \lambda_2 \neq 0, \qquad \lambda'_3 = \lambda_3 = 0, \qquad \lambda'_4 = \lambda_4.$$

Cherchons ce que deviennent ces lois dans un système galiléen non propre. Tout d'abord, il est facile de vérifier qu'une translation du miroir parallèlement à lui-même laisse inaltérées les trois lois classiques; mais, à cause du changement d'étalon du temps, il se produit deux effets du second ordre (contraction longitudinale des angles de Descartes, et changement de fréquence).

Une translation du miroir normalement à lui-même produit un effet Doppler et un effet d'aberration du premier ordre. Les formules (24) nous donnent en effet, compte tenu des (27),

$$(28)\qquad \bar{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1 - i\beta\lambda_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \bar{\lambda}'_1 = \frac{-\lambda_1 - i\beta\lambda_4}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$(28')\qquad \lambda_2 = \bar{\lambda}'_2 = \bar{\lambda}_2 = \lambda'_2;$$

$$(28'')\qquad \bar{\lambda}_4 = \frac{\lambda_4 + i\beta\lambda_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \bar{\lambda}'_4 = \frac{\lambda_4 - i\beta\lambda_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Divisant membre à membre les (28″) et tenant compte des définitions (22), il vient la *loi de l'effet Döppler par réflexion*

$$(29)\qquad \frac{\bar{\lambda}_4}{\bar{\lambda}'_4} = \frac{1 + i\beta\dfrac{\lambda_1}{\lambda_4}}{1 - i\beta\dfrac{\lambda_1}{\lambda_4}} = \frac{1+\alpha_1}{1-\alpha_1}, \qquad \boxed{\bar{\nu}' = \frac{1-\alpha_1}{1+\alpha_1}\bar{\nu} = (1 - 2\alpha_1 + \ldots)\bar{\nu}.}$$

De même, divisant membre à membre les (28) et introduisant les *cotangentes* χ_1 *et* χ'_1 *des angles d'incidence et de réflexion*, il vient la *loi de l'aberration par réflexion*

$$(29')\qquad -\frac{\bar{\lambda}'_1}{\bar{\lambda}_1} = -\frac{\bar{\chi}'_1}{\bar{\chi}_1} = \frac{1 + i\beta\dfrac{\lambda_4}{\lambda_1}}{1 - i\beta\dfrac{\lambda_4}{\lambda_1}} = \frac{1 - \dfrac{\beta}{\alpha_1}}{1 + \dfrac{\beta}{\alpha_1}}, \qquad \boxed{-\bar{\chi}'_1 = \frac{1 - \dfrac{\beta}{\alpha_1}}{1 + \dfrac{\beta}{\alpha_1}}\bar{\chi}_1 = \left(1 - 2\frac{\beta}{\alpha_1} + \ldots\right)\bar{\chi}_1.}$$

Les formules (29) et (29′) rapprochées des (25) et (25′) montrent : 1° que, en toute rigueur relativiste, il n'y a pas équivalence entre l'aberration et l'effet Döppler « naturels » et ceux produits par réflexion sur un miroir mobile; 2° que l'équivalence a lieu au premier ordre, la translation du miroir pouvant être remplacée par une translation de la source virtuelle hypothétique avec une vitesse $2\vec{v}_2$ $\left(\vec{v}_2\right.$ désignant la composante normale de la vitesse de translation $\vec{v}$ du miroir$\left.\right)$.

III. — *Généralités sur la physique relativiste.*

9. Le fluide matériel d'Univers. — Considérons un milieu matériel continu. Dire qu'il s'agit d'un *même* milieu étendu, c'est dire que deux *points matériels subsistants* du milieu sont susceptibles d'une manifestation simultanée, ou encore que les événements d'Univers correspondants sont *simultanéisables;* le quadrivecteur qui joint ces deux *événements* est donc du genre espace.

Dans l'Univers, les divers points ou *molécules* ([1]) d'un milieu continu engendrent une congruence de trajectoires, toutes du genre temps, dites *lignes de courant d'Univers.* Un *tube de courant* d'Univers, limité à distance finie par une certaine *hyperparoi*, correspond à un milieu matériel de dimensions limitées. Cette hyperparoi (tridimensionnelle) est engendrée par les points matériels de la surface-contour du milieu considéré; elle est *du genre temps*, comme contenant les trajectoires d'Univers de ces points matériels.

Il est évident qu'une section plane du tube précédent par un hyperplan tridimensionnel normal à l'axe temporel représente, *à un instant bien déterminé*, l'ensemble des points du volume matériel. Plus généralement, une *hypercloison* tridimensionnelle quelconque du même tube représentera l'ensemble des points du corps *pris à des instants non simultanés* ([2]); cette hypercloison est simplement astreinte à être *partout du genre espace*, ses divers points devant être deux à deux *simultanéisables* ([3]).

Supposons choisie, dans le tube de courant d'Univers, une famille

([1]) En cinématique des milieux continus, le mot « molécule » s'entend comme « point géométrique du fluide suivi dans son mouvement ».

([2]) *Voir* notamment E. CARTAN, *Leçons sur les Invariants Intégraux*, Chap. I, II et III.

([3]) Si tous les points infiniment voisins sont deux à deux simultanéisables, il en est de même *a fortiori* pour les points distants.

continue quelconque d'hypercloisons du genre espace. On définit alors, en chaque point-événement du tube, un *système galiléen de simultanéité locale* tel que les événements voisins du précédent soient simultanés : c'est le système dont les trois axes d'espace sont tangents à l'hyperclosion au point considéré. Contrairement au *système galiléen propre*, le *système galiléen de simultanéité locale* n'est pas physiquement imposé. Son arbitraire apparaîtra comme assez gênant dans certains problèmes que nous traiterons par la suite [1]; il semble bien être à l'origine d'une partie importante des difficultés que rencontre une « réconciliation » complète de la Relativité et de la Mécanique ondulatoire. Si l'on parvenait à le supprimer, une notion susceptible de remplacer la *simultanéité à distance* des classiques se trouverait physiquement rétablie.

Dans le cas où la congruence des lignes de courant admet des hypersurfaces orthogonales, il paraît très naturel de choisir les hypercloisons suivant ces surfaces; de cette manière, le système galiléen de simultanéité locale est rendu coïncident avec le système galiléen entraîné. Mais cette solution ne peut être générale. L'exemple important d'un cas où elle ne s'applique pas est celui, classique, du *solide en rotation uniforme*. Les hélices d'Univers, coaxiales et de même pas, engendrées par les points du solide n'admettent pas de trajectoires orthogonales; il s'ensuit notamment qu'aucun *système de référence entraîné par le solide* ne réalise la séparation en espace et temps propres d'une manière étendue, valable pour l'ensemble du corps tournant; *la Relativité rejette comme dénuée de sens la notion d'espace tournant de l'ancienne cinématique* [2].

Cherchons maintenant à définir, sur une hypercloison et sur l'hyperparoi, l'élément volumique au moyen de trois petits quadrivecteurs linéairement indépendants dx^i_1, dx^i_2, dx^i_3. Sur l'hypercloison, ces trois vecteurs seront du genre espace, et, dans le *système galiléen de simultanéité locale*, leurs composantes temporelles seront toutes nulles; le déterminant $|dx^u_v|$ $(u, v = 1, 2, 3)$, écrit sym-

---

[1] *Voir* notamment Chap. III, nos 23, 24 et 27, 28.

[2] Pour la cinématique du solide tournant, on pourra consulter P. Langevin, *C. R. Acad. Sci.*, 200, 1935, p. 48. Il est possible, sans sortir du cadre de la Relativité restreinte, d'établir un certain nombre de propositions de la géométrie et de la cinématique du solide tournant.

boliquement sous la forme $[dx^1 dx^2 dx^3]$, représentera alors l'élément de volume habituel δu. Mais, dans tout autre système, il faudra considérer à la fois les quatre déterminants $[dx^i dx^j dx^k]$ extraits du tableau $|dx^i_{r}|$ (i, j, $k = 1, 2, 3, 4$); il s'agit là du *tenseur antisymétrique du troisième rang élément de volume généralisé,* dont nous utiliserons souvent le quadrivecteur dual. Dans la définition de celui-ci, il est avantageux pour la suite d'introduire le coefficient c de telle manière qu'on ait

$$\delta u^4 = \frac{1}{ic}[dx^1\, dx^2\, dx^3] = \frac{1}{ic}\delta u. \tag{31}$$

Considérons maintenant l'élément volumique d'hyperparoi. On prendra comme quadrivecteurs de base d'abord deux vecteurs du genre espace dx^i_1 et dx^i_2 tangents au contour du milieu matériel, puis l'élément de trajectoire d'Univers correspondant $dx^i_3 = dx^i$, qui est du genre temps. Il est clair que, dans le système de simultanéité locale, les trois déterminants $[dx^u dx^v]$ (u, $v = 1, 2, 3$) définissent l'élément d'aire du contour extérieur du milieu à la manière habituelle; dans tout autre système, les six déterminants $[dx^i dx^j]$ (i, $j = 1, 2, 3, 4$) définissent le *tenseur antisymétrique du deuxième rang élément d'aire généralisé.*

Définissons le dual de ce tenseur de telle manière qu'on ait

$$\delta s^{uv} = \frac{1}{ic}[\delta x^u\, \delta x^v] \qquad (u,\ v = 1, 2, 3); \tag{31'}$$

à l'aide du tableau

$$\begin{vmatrix} dx^1_1 & dx^2_1 & dx^3_1 & dx^4_1 \\ dx^1_2 & dx^2_2 & dx^3_2 & dx^4_2 \\ dx^1 & dx^2 & dx^3 & dx^4 \end{vmatrix}$$

et des définitions générales de la page 6, on vérifie sans peine la relation

$$\boxed{\delta u_i = \delta s_{ij}\, dx^j} \tag{32}$$

dont nous ferons un usage fréquent par la suite; δu_j est le quadrivecteur *du genre espace* complémentaire de l'élément trilinéaire d'hyperparoi; les trois composantes en $(u,4)$ du tenseur antisymétrique $ic\,\delta s^{kl}$ représentent l'élément de contour proprement dit;

enfin, rappelons que dx^j est le quadrivecteur élément de trajectoire engendré par un point de ce contour.

10. Exemples d'effets du mouvement. Application aux éléments d'intégration. — Supposons qu'un tenseur soit attaché à un point matériel (isolé ou faisant partie d'un fluide); si certaines composantes de ce tenseur s'annulent dans le *système galiléen entraîné*, on trouve des relations cinématiques remarquables faisant intervenir la vitesse. Nous examinerons trois cas :

1° *Quadrivecteur tangent à la trajectoire.* — On a alors, $\vec{X}$ désignant le vecteur d'espace ayant pour composantes $X_u (u = 1, 2, 3)$

$$\frac{X_1}{dx_1} = \ldots = \frac{X_4}{dx_4}, \qquad X_u = X_4 \frac{dx_u}{dx_4}, \qquad \boxed{\vec{X} = -iX_4 \vec{\beta};} \tag{33}$$

cette relation se rencontre, par exemple, avec les quadrivecteurs *densité de courant électrique d'Univers* $(j_u = qv_u, j_4 = icq)$ (n° 12) et *impulsion-masse d'un point matériel* $(p_u = mv_u, p_4 = icm)$ (n° 24).

On peut dire que le vecteur d'espace $\vec{X}$ est engendré par la vitesse du « scalaire » X_4.

2° *Quadrivecteur normal à la trajectoire :*

$$X_i\, dx^i = X_u\, dx^u + X_4\, dx^4 = (X_u \beta^u + iX_4) c\, dt = 0, \qquad \boxed{X_4 = i(\vec{X}.\vec{\beta}).} \tag{34}$$

Ici, c'est le « scalaire » X_4 qui est engendré par la vitesse du trivecteur $\vec{X}$. Exemples : *densité de force prépondéromotrice* et *densité de moment cinétique propre.*

3° *Relation de Frenkel.* — Considérons un tenseur antisymétrique du second ordre X_{ij} dont les trois X_{u4} s'annulent dans le système entraîné; dans ce cas, le produit scalaire $X_{ij}\, dx^i$ est nul, comme le montrent les relations

$$X_{iv}\, dx^i = X_{uv}\, dx^u + X_{4v}\, dx^4, \qquad X_{i4}\, dx^i = X_{u4}\, dx^u,$$

supposées écrites dans le système entraîné. Introduisant alors les deux trivecteurs d'espace $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ tels que

$$Y^w = X_{uv}, \qquad Z^u = iX_{u4},$$

les relations précédentes donnent

$$(35)\quad \begin{cases} Y^{u'}dx^{u} - Y^{u}dx^{u'} - cZ^{v}\,dt = 0 & \text{ou} \quad \boxed{\vec{Z} = \vec{Y}\wedge\vec{\beta},} \\ Z_{u}\,dx^{u} = 0 & \text{ou} \quad \boxed{(\vec{Z}.\vec{\beta}) = 0.} \end{cases}$$

Pour un milieu doué de polarisation magnétique, la première de ces égalités vectorielles est connue sous le nom de *formule de Frenkel*; la seconde en est une conséquence. Finalement, le trivecteur $\vec{Z}$ est engendré par la vitesse du trivecteur $\vec{Y}$.

Dans les divers exemples que nous venons de donner, la vitesse $\vec{v}$ a une signification objective; il nous faut étudier maintenant un cas dans lequel sa signification est seulement fictive. *La physique traditionnelle a l'habitude de considérer d'une manière simultanée la totalité des points de l'espace*, ce qui, en Relativité, n'est possible que dans un seul système galiléen à la fois, système qui, de ce fait, est arbitrairement privilégié. Dans ce système, les tenseurs antisymétriques représentant les éléments d'intégration des divers ordres, ou les duals de ces tenseurs, ont leurs composantes d'indice 4 nulles; mais, si l'on change de repère galiléen, les formules précédentes vont jouer de manière à faire réapparaître les composantes manquantes, et à reconstituer les *formes différentielles complètes*, dont l'introduction systématique *a priori* se trouve ainsi justifiée; la vitesse $\vec{v}$, qui intervient dans ces formules, peut être considérée comme la *vitesse fictive* d'un hypothétique *solide de simultanéité*, immobile dans le système galiléen arbitrairement privilégié.

Comme exemples simples d'expressions tronquées des *formes différentielles complètes*, on a notamment celui d'une intégration simple portant sur le temps, faite « en un point fixe » dans un certain système galiléen, et celui d'une intégrale de circulation prise « à un instant donné » le long d'un certain contour d'espace. Des exemples analogues relatifs à des intégrales doubles et triples ont été indiqués au numéro précédent.

CHAPITRE II.

TRANSCRIPTION RELATIVISTE DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME.

11. La cinématique relativiste a été construite de manière à rendre invariante l'équation de propagation dalembertienne; comme cette équation est une conséquence du système fondamental de Maxwell-Lorentz, on s'attend à ce que ce système, avec tout l'Électromagnétisme qu'il entraîne, jouisse de l'invariance relativiste.

C'est en effet ce qui a lieu. L'unique apport de la Relativité aux lois de l'Électromagnétisme général consiste, au point de vue théorique, dans une *nouvelle écriture condensée* par laquelle l'expression de l'unité profonde des phénomènes électriques fournie par la théorie de Maxwell-Lorentz (¹) se trouve encore renforcée; et, au point de vue pratique, dans l'attribution aux diverses grandeurs observables de *variances cinématiques* antérieurement insoupçonnées. Par exemple, les champs électrique et magnétique apparaissent comme *relatifs*, le mouvement les transformant partiellement l'un dans l'autre.

Il est intéressant de remarquer que la Relativité vient résoudre le vieux conflit qui opposait les deux systèmes d'unités E. S. et E. M. Faisant en effet de la vitesse c une *constante universelle* à laquelle on peut attribuer la dimension zéro et la valeur numérique 1 (résultat que réalise l'écriture $x^4 = ict$), elle permet de faire disparaître des équations les deux coefficients des U. E. S. et des U. E. M. *à la fois*. Réciproquement, il est évident que le « conflit » n'admettait pas d'autre solution.

Enfin, il est important pour la suite de noter que *les équations fondamentales de Maxwell-Lorentz sont des équations densitaires*. Aux seconds membres, figurent les densités de courant et de charge; aux premiers membres, les champs sont homogènes à des densités de moment électrique et magnétique.

I. — *Le courant électrique d'Univers, les champs et les potentiels.*

12. Le système fondamental de Maxwell-Lorentz est le suivant :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\mathrm{E}} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{H}} = 0, \qquad -\,\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{H}} = 0; \tag{41}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\mathrm{H}} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{E}} = \vec{j}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}} = cq; \tag{41'}$$

nous avons à dessein multiplié par c les expressions usuelles des

(¹) L'expression la plus parfaite de l'Électromagnétisme classique est fournie par la *Théorie des Électrons* de H. A. Lorentz (1916); indépendamment de Maxwell (1864), L. Lorenz avait établi en 1867 le système des équations fondamentales.

densités de courant $\vec{j}$ et de charge q, afin de rendre plus élégante l'écriture des équations ultérieures; le système est ainsi écrit avec ce qu'on pourrait appeler les « unités E. M. d'Heaviside », qui, notons-le bien, seront conservées dans toute la suite.

Soit toujours u, v, w permutation circulaire des indices d'espace 1, 2, 3 et posons, comme nous l'avons déjà fait

$$x^4 = ict, \qquad ic\partial^4 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Les équations (41) se transcrivent sous la forme

$$\partial^v E_w - \partial^w E_v + \partial^4 . i H_u = 0, \qquad -\partial^u . i H_u = 0,$$

ou encore, si l'on introduit le système de fonctions antisymétriques E_{kl} (k, $l = 1, 2, 3, 4$) définies par les formules

$$E_u = E_{vw} = -E_{wv}, \qquad iH_u = E_{u4} = -E_{4u},$$

sous la nouvelle forme

$$\partial^l E_{ul} = 0, \qquad \partial^l E_{4l} = 0.$$

A leur tour, ces quatre équations se condensent en

$$\partial^l . E_{kl} = 0 \qquad (k,\ l = 1, 2, 3, 4),$$

les seconds membres nuls ayant évidemment la variance d'un quadrivecteur. Il s'ensuit que *les fonctions* E_{kl} *sont les composantes d'un tenseur antisymétrique du second rang.*

De même, sous la seule condition de poser

$$\boxed{j_4 = icq,} \tag{42}$$

les équations (41′) s'écrivent

$$\partial^v H_w - \partial^w H_v - \partial^4 . iE_u = j_u, \qquad \partial^u . iE_u = j_4.$$

Posant alors la définition d'un nouveau système de fonctions antisymétriques

$$H_u = H_{vw} = -H_{wv}, \qquad iE_u = -H_{u4} = H_{4u},$$

ces équations s'écrivent

$$\partial^l H_{ul} = j_u, \qquad \partial^l H_{4l} = j_4,$$

ou enfin

$$\partial^l \mathrm{H}_{kl} = j_k.$$

Or, les deux systèmes de définitions précédentes se condensant en

$$(43) \qquad \boxed{\mathrm{E}_u = \mathrm{E}_{vw} = i\mathrm{H}_{u4},} \qquad \boxed{i\mathrm{H}_u = \mathrm{E}_{u4} = i\mathrm{H}_{vw},}$$

les H_{ij} *ne sont autres que les composantes duales des* E_{kl}, de sorte que *les* j_k *sont les composantes d'un quadrivecteur d'Univers*. Finalement, la nouvelle *écriture condensée du système fondamental de Maxwell-Lorentz* est la suivante :

$$(44) \qquad \boxed{\partial^l \mathrm{E}_{kl} = 0,} \qquad \boxed{\partial^l \mathrm{H}_{kl} = j_k.}$$

Le quadrivecteur j_k *est tangent aux lignes de courant d'Univers du fluide électrique*. En effet, la définition classique

$$\vec{j} = q\frac{\overrightarrow{d\mathrm{M}}}{dt}$$

$\left(\text{dans laquelle } \frac{\overrightarrow{d\mathrm{M}}}{dt} \text{ représente la vitesse du fluide électrique}\right)$ se transcrit sous la forme

$$(42') \qquad j^u = ic\frac{q}{dx^4}dx^u \qquad (u = 1, 2, 3)$$

qui, rapprochée de (42), se généralise en

$$(42'') \qquad \boxed{j^l = ic\frac{q}{dx^4}dx^l \qquad (l = 1, 2, 3, 4).}$$

Comme j^l et dx^l sont des quadrivecteurs, la quantité $\frac{q}{dx^4}$ est nécessairement un invariant, et les deux quadrivecteurs j^l et dx^l nécessairement colinéaires. L'invariant que nous venons de mettre en évidence s'écrit donc indifféremment

$$\frac{j^1}{dx^1} = \frac{j^2}{dx^2} = \frac{j^3}{dx^3} = \frac{j^4}{dx^4} = \frac{j}{dx}.$$

Les formules de transformation des champs pour un changement de repère galiléen s'obtiennent sans la moindre difficulté à partir de la loi générale des transformations tensorielles; il vient dans le cas particulier de la *transfor* *mation de H. A. Lorentz*,

$$E'_1 = E_1, \qquad H'_1 = H_1,$$
$$E'_2 = \frac{E_2 - \beta H_3}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad H'_2 = \frac{H_2 + \beta E_3}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$E'_3 = \frac{E_3 + \beta H_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad H'_3 = \frac{H_3 - \beta E_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ perdent donc *l'invariance cinématique* que les classiques leur attribuaient; la Relativité ne reconnaît d'invariance qu'aux deux *produits contractés*.

$$(45) \qquad -E_{ij}E^{ij} = H_{kl}H^{kl} = 2\left(\vec{H}^2 - \vec{E}^2\right), \qquad E_{ij}H^{ij} = 4\left(\vec{E}.\vec{H}\right).$$

13. Suite de la théorie du champ sous forme relativiste. — Par dérivation contractée des (44_2), et compte tenu de l'antisymétrie du tenseur H_{ij}, il vient

$$(46) \qquad \boxed{\partial^i j_i = 0,}$$

ce qui est la nouvelle écriture de l'*équation de continuité*

$$(46') \qquad \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} q = 0.$$

D'autre part, d'après une démonstration qui généralise immédiatement celle relative au potentiel-vecteur à trois dimensions, les (44_1) montrent que le tenseur H_{kl} complémentaire de E_{ij} dérive d'un *potentiel-vecteur d'Univers* A_i; on peut donc écrire

$$(47) \qquad \boxed{H_{ij} = \partial_j A_i - \partial_i A_j,}$$

ce qui, sous la seule condition de poser

$$(48) \qquad \boxed{A_4 = iV,}$$

équivaut aux relations traditionnelles

$$(47') \qquad \vec{H} = -\overrightarrow{\operatorname{rot} A}, \qquad \vec{E} = \overrightarrow{\operatorname{grad} V} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}.$$

Signalons l'existence de l'*invariant relativiste*

$$A^i A_i = \vec{A}^2 - V^2; \tag{49}$$

dans une onde plane monochromatique se propageant suivant Ox_1, la relation maxwellienne bien connue

$$A_1 + V = 0$$

montre que le quadrivecteur A_i est, *dans ce cas*, du genre espace.

Les (44_2) ont comme conséquences les équations de propagation des champs et des potentiels. En effet, compte tenu de la définition (47), elles s'écrivent

$$\partial_l A_k - \partial^l_k A_l = j_k. \tag{50}$$

Or, le quadrivecteur A_k n'étant défini qu'à un gradient d'Univers $A'_k = \partial_k F$ près, on peut lui imposer de satisfaire à la condition

$$\boxed{\partial^i A_i = 0;} \tag{51}$$

en effet, cela revient à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\partial^i (A_i^0 - \partial_i F) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \partial^i_i F = \partial^j A_j^0.$$

Dans ces conditions, la formule (50) se réduit à

$$\boxed{\partial^l_l A_k = j_k.} \tag{52}$$

On reconnaît dans (51) la *condition de Lorentz*

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} V = 0, \tag{51'}$$

et dans (52) les *équations de propagation des potentiels*

$$\square \vec{A} = \vec{j}, \qquad \square V = cq. \tag{52'}$$

Enfin, appliquant l'opérateur dalembertien $\square = \partial^l_l$ à l'équation de définition (47) et tenant compte des (52), il vient

$$\boxed{\partial^l_l H^{kl} = \partial^l j^k - \partial^k j^l,} \tag{53}$$

qui est la nouvelle écriture des *équations de propagation des* *champs* [on n'écrit généralement ces équations que pour le cas du vide : $\vec{j} = 0$, $q = 0$ (1)]

$$(53') \qquad \square \vec{H} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}\, j}, \qquad \square \vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}\, cq} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{j};$$

les seconds membres ont la même forme que ceux des (47′), de même que la condition de Lorentz (51′) a la même forme que l'équation de continuité (46′).

14. Symétrisation de la formule des potentiels retardés (2). — Cette formule relie entre eux les quadrivecteurs *potentiel d'Univers* et *densités de courant-charge.* Plus précisément, elle donne en un certain point et à un certain instant que, pour simplifier, nous prendrons comme origines, le potentiel A^l créé par la distribution d'électricité j^l qui régnait aux points $x^u = r\alpha^u$ (distant de r) aux instants corrélatifs $\frac{r}{c}$:

$$(54) \qquad A^l = \frac{1}{4\pi}\iiint \{j^l\} \frac{\delta u}{r};$$

au voisinage du point x^u, le fluide électrique est considéré « d'une manière simultanée », et δu désigne « l'élément de volume pur » choisi en ce point.

Cette formule est une solution des équations (52) ou (52′), ainsi, du reste, que celle qu'on obtiendrait en considérant la distribution à l'instant $\frac{r}{c}$; « mais cette solution [*potentiel avancé*], qui ferait dépendre le présent de l'avenir, est considérée comme physiquement inacceptable » (L. de Broglie).

Pour restituer la symétrie à cette formule et la rendre utilisable pour des *états non simultanés* du fluide électrique, il suffit d'expliciter le quadrivecteur isotrope qui s'introduit tout naturellement, en posant

$$(55) \qquad \varpi_u = \frac{\alpha_u}{r}, \qquad \varpi_4 = \pm\frac{i}{r},$$

formules qui sont à rapprocher des (22), et qui définissent une *proximité spatio-temporelle;* d'après ce qui précède, c'est le signe négatif qu'il faut prendre dans la dernière équation. Cela étant, on écrira évidemment

$$(54') \qquad A^l = \frac{c}{4\pi}\iiint \{j^l\}\, \delta g,$$

(1) Voir cependant L. de Broglie, *La propagation guidée des ondes électromagnétiques*, Gauthier-Villlars, p. 38.

(2) Cette formule est initialement due à Kirchhoff; sa démonstration se trouve notamment dans les travaux classiques de H. A. Lorentz.

avec pour δg une définition très analogue à celle de la *phase* [équation (23)]

$$\delta g = \varpi_l \, \delta u^l. \tag{55'}$$

Ici, le quadrivecteur ϖ^l est, au même titre que j^l, du genre temps.

II. — *Densité de force et densité d'énergie.*

15. Comme pour les champs et les potentiels, l'Électromagnétisme relativiste se borne à transcrire les expressions des densités de force et d'énergie de Maxwell, de H. A. Lorentz et de Poynting. Mais le fait d'attribuer à la densité de force et à la densité d'énergie des variances cinématiques nouvelles se répercute évidemment sur la Physique tout entière; c'est dire l'importance que les formules de ce paragraphe et du suivant auront dans l'établissement des nouvelles dynamiques rationnelle (Chap. III) et analytique (Chap. IV).

L'équation suivante (56_1) donne, d'après Lorentz, la *densité de force pondéromotrice* résultant de l'action du champ sur le fluide électrique (Unités E. M. d'Heaviside); elle admet la conséquence (56_2) $\left(\text{où } \vec{v} = \frac{d\vec{M}}{dt} \text{ désigne la vitesse du fluide}\right)$

$$\vec{f} = cq.\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{H}, \qquad (\vec{f}.\vec{v}) = c(\vec{j}.\vec{E}). \tag{56}$$

Or, compte tenu des définitions (42) et (43), ces équations peuvent s'écrire

$$f_u = H_{uv} j^v + H_{u4} j^4, \qquad (\vec{f}.\vec{v}) = ic H_{u4} j^u;$$

sous la seule condition de poser

$$\boxed{f_4 = \frac{i}{c}(\vec{f}.\vec{v}),} \tag{57}$$

elles se condensent sous la forme

$$\boxed{f_k = H_{kl} j^l,} \tag{56'}$$

ou encore, compte tenu des (47),

$$\boxed{f_k = (\partial_l A_k - \partial_k A_l) j^l;} \tag{56''}$$

$(\vec{f}.\vec{v})$ est la ***densité de puissance*** acquise par le fluide sous l'action du champ.

Les (56′) montrent que f_i *est un quadrivecteur d'Univers*, qui est d'ailleurs *orthogonal au courant d'Univers* (donc du genre espace) puisqu'on a, du fait de l'antisymétrie de H_{kl},

$$f_k j^k = H_{kl} j^k j^l \equiv 0. \tag{58}$$

16. Reprenons les équations fondamentales (41′) et (56) sous la forme classique; elles donnent

$$\vec{f} = \vec{E}.\mathrm{div}\,\vec{E} + \overrightarrow{\mathrm{rot}\,H} \wedge \vec{H} + \vec{H} \wedge \frac{1}{c}\overrightarrow{\partial^t E},$$
$$\vec{f}.\vec{v} = c\vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{rot}\,H} - \vec{E}.\overrightarrow{\partial^t E}.$$

D'autre part, les équations fondamentales (41) permettent d'écrire

$$\frac{1}{c}\overrightarrow{\partial^t H} \wedge \vec{E} + \overrightarrow{\mathrm{rot}\,E} \wedge \vec{E} = 0, \qquad \vec{H}.\overrightarrow{\mathrm{div}\,H} = 0,$$
$$-\vec{H}.\overrightarrow{\partial^t H} - c\vec{H}.\overrightarrow{\mathrm{rot}\,E} = 0,$$

de sorte que les formules initiales se symétrisent sous la forme

$$\vec{f} = \left(\vec{E}.\mathrm{div}\,\vec{E} + \overrightarrow{\mathrm{rot}\,E} \wedge \vec{E}\right) + \left(\vec{H}.\mathrm{div}\,\vec{H} + \overrightarrow{\mathrm{rot}\,H} \wedge \vec{H}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E} \wedge \vec{H}\right),$$
$$\vec{f}.\vec{v} = c\left(\vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{rot}\,H} - \vec{H}.\overrightarrow{\mathrm{rot}\,E}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right).$$

Enfin, rappelons les identités suivantes (dont la seconde est classique)

$$\left(\vec{E}.\mathrm{div}\,\vec{E} + \overrightarrow{\mathrm{rot}\,E} \wedge \vec{E}\right)_1 = \partial^u E_1 E_u - \frac{1}{2}\partial_1 \vec{E}^2,$$
$$\vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{rot}\,H} - \vec{H}.\overrightarrow{\mathrm{rot}\,E} = -\,\mathrm{div}\left(\vec{E} \wedge \vec{H}\right).$$

Introduisant le système de notations (où δ_{uv} désigne un symbole de Kronecker)

$$\boxed{M_{uv} = E_u E_v + H_u H_v - \delta_{uv}\, w, \quad \vec{R} = c\left(\vec{H} \wedge \vec{E}\right), \quad w = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right),} \tag{59}$$

nos deux formules s'écrivent finalement

$$\boxed{f_u = \partial^v M_{uv} + \frac{1}{c^2}\partial^t R_u, \qquad (\vec{f}.\vec{v}) = \partial^u R_u - \partial^t w.} \tag{60}$$

Telles sont les expressions de la *densité de force pondéromotrice* appliquée au fluide électrique et de la *variation instantanée de la densité d'énergie* (*densité de puissance*) $(\vec{f}.\vec{v})$ correspondante. Nous avons tenu à donner ce calcul sous sa forme classique, car l'examen des équations prérelativistes (60) auquel il aboutit est fort instructif, surtout lorsqu'on le fait par comparaison avec les équations analogues (72) de la Dynamique (*voir* plus loin n° 22).

Tout d'abord, on voit figurer au premier membre de la formule (60_2) la *variation instantanée de la densité d'énergie du fluide électrique*; le second membre exprime que cette énergie est acquise aux dépens du champ, et justifie les expressions (59_3) de la *densité d'énergie du champ* et (59_2) du *vecteur densité de courant d'énergie* (vecteur radiant de Poynting). De même, les équations (60_1) montrent que les $\frac{R_u}{c^2}$ ont dimension de *densité d'impulsion*, ce qui manifeste un nouvel aspect du vecteur de Poynting; elles justifient aussi le qualificatif *élastique* que Maxwell a donné au *tenseur symétrique* M_{uv} [formule (59_1)].

Ainsi, le seul examen des équations (60) (fait à la lumière des équations analogues de la Dynamique) montre que *la Physique prérelativiste attribue à l'énergie radiante non seulement une densité d'énergie*, *mais encore une densité d'impulsion;* de la seule symétrie formelle de ces équations, elle aurait pu induire l'existence d'une proportionnalité entre la masse et l'énergie dans le rapport c^2. On voit que les équations classiques (60) et (72) constituent, par leur analogie formelle, un argument favorable à la Relativité.

Quoi qu'il en soit, compte tenu de la définition (57), nous sommes amenés à généraliser le tenseur $M_{uv} = M_{vu}$ de Maxwell en posant

$$(59') \qquad \boxed{M_{u4} = M_{4u} = \frac{i}{c} R_u = i(E_w H_v - E_v H_w), \qquad M_{44} = w,}$$

ce qui nous conduit à l'écriture condensée des (60) (expression du quadrivecteur densité de force pondéromotrice généralisée appliqué au fluide électrique par le champ) :

$$(61) \qquad \boxed{f_k = \partial^l M_{kl}.}$$

La manière dont f_k dérive du tenseur symétrique de Maxwell généralisé est exactement la même que celle dont la densité de force d'inertie généralisée dérive du tenseur symétrique d'inertie T_{ij} (*voir* plus bas, équations 72); par suite, les équations du mouvement du fluide électrique s'obtiendront en écrivant que la différence entre ces deux tenseurs a son quadrivecteur divergence d'Univers nul.

Il est évident que les M_{ij} s'expriment directement en fonction des composantes du tenseur antisymétrique H_{ij} et de son dual E_{kl}. Les relations en question, qui condensent les (59) et (59'), sont les suivantes :

(59'') $$\boxed{M_{ij} = \frac{1}{2}(E_{il}E_j{}^l + H_{il}H_j{}^l);}$$

en effet, il vient par différentiation

$$dM_{ij} = \frac{1}{2}(E_{il}.\ dE_j{}^l + dE_{il}.\ E_j{}^l + H_{il}.\ dH_j{}^l + dH_{il}.\ H_j{}^l).$$

Supposons d'abord $i \neq j$; chacun des quatre termes écrits est alors la somme de deux termes, et l'on vérifie sans difficulté l'égalité

$$E_{il}\,dE_j{}^l = H_{jl}\,dH_i{}^l;$$

comme cette égalité est évidente pour $i = j$, elle est générale, et nous pouvons écrire, comme conséquence de la définition (59''),

(62) $$\partial^i M_{ij} = E_{il}\,\partial^i E_j{}^l + H_{il}\,\partial^i H_j{}^l.$$

Or, en vertu des (44) de Maxwell-Lorentz, le premier terme est nul et le second égal à $H_{il}j^l$; on retombe donc sur les (56').

III. — *La charge, la force et l'énergie comme grandeurs finies.*

17. Invariance et conservation de la charge. — Le fait que le quadrivecteur j^i soit tangent aux trajectoires d'Univers du fluide électrique montre que, dx^i désignant l'élément de trajectoire, la grandeur $\frac{j}{dx}$ est un invariant. En multipliant cet invariant par l'élément quadrilinéaire $[dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4]$, dont l'expression en fonction de quatre vecteurs élémentaires de base δx_i est

$$[dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4] = \begin{vmatrix} \delta x_1^1 & \delta x_1^2 & \delta x_1^3 & \delta x_1^4 \\ \delta x_2^1 & \delta x_2^2 & \delta x_2^3 & \delta x_2^4 \\ \delta x_3^1 & \delta x_3^2 & \delta x_3^3 & \delta x_3^4 \\ \delta x_4^1 & \delta x_4^2 & \delta x_4^3 & \delta x_4^4 \end{vmatrix},$$

nous obtiendrons un nouvel invariant, infiniment petit du troisième ordre; soit $ic\,\delta Q$. Prenons alors les trois premiers vecteurs de base du genre espace et, pour le quatrième (du genre temps) *l'élément de trajectoire dx lui-même;* l'invariant δQ peut s'écrire

$$\delta Q = \frac{1}{ic}\begin{vmatrix} \delta x_1^1 & \delta x_1^2 & \delta x_1^3 & \delta x_1^4 \\ \delta x_2^1 & \delta x_2^2 & \delta x_2^3 & \delta x_2^4 \\ \delta x_3^1 & \delta x_3^2 & \delta x_3^3 & \delta x_3^4 \\ j^1 & j^2 & j^3 & j^4 \end{vmatrix}, \tag{65}$$

ou encore, $ic\,\delta u_l$ désignant le quadrivecteur dual de l'élément trilinéaire $[dx^i dx^j dx^k]$ [équ. (31)]

$$\boxed{\delta Q = j^l\,\delta u_l.} \tag{65'}$$

Il y a deux systèmes galiléens (et deux seulement) dans lesquels l'expression générale (65′) dégénère en la suivante

$$\delta Q = j^4\,\delta u_4 = q\,\delta u; \tag{65''}$$

ce sont : 1° *le système entraîné*, dans lequel les trois composantes j^u sont nulles; 2° *le système de simultanéité locale* (n° 9), dont l'axe temporel est orthogonal aux trois quadrivecteurs δx_u^i, et dans lequel par suite les δx_u^4 sont nulles. Dans ce dernier système, les trois quadrivecteurs δx_u^i déterminent un *élément de volume pur*, et l'on retombe sur la définition traditionnelle de la charge d'une gouttelette électrisée.

Mais, dans tout autre système, il est nécessaire de conserver l'expression générale, et la charge d'une goutte finie sera donnée par l'intégrale

$$Q = \iiint j^l\,\delta u_l \tag{66}$$

étendue à une hypersurface tridimensionnelle dont tous les éléments sont du genre espace (le quadrivecteur δu_l étant donc du genre temps) [1]. On voit que l'intégrale précédente généralise à quatre

[1] Les trois nouveaux termes $j^w\,\delta u_w$ s'interprètent comme une *correction de non-simultanéité.* Ils s'écrivent en effet $\Sigma j^w\,[dx^u\,dx^v]\,dt$, et apparaissent comme le flux du vecteur d'espace *densité de courant* entrant dans le volume parallélépipédique élémentaire pendant le temps dt.

dimensions la notion de flux : *la charge d'une goutte électrisée finie* (représentée en général d'une manière « non simultanée » par une hypercloison courbe du genre espace) *est donnée par l'hyperflux du quadrivecteur densité de courant-densité de charge à travers cette hypercloison.* Si, dans le système galiléen utilisé, l'hypercloison est plane et horizontale, on retombe sur la définition usuelle de la charge, qui est donnée pour des *états simultanés*; sinon, on obtient une *charge généralisée*, au sujet de laquelle la question se pose naturellement de savoir si sa valeur est la même que celle de la charge traditionnelle.

Pour cela, prenons l'intégrale précédente sur une variété tridimensionnelle fermée, et transformons-la en intégrale quadruple : il vient

$$(66') \qquad \iiint j^l\,\delta u_l = \iiiint \partial_l j^l\,[dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4] = 0,$$

quantité nulle en vertu de l'équation de continuité : *l'hyperflux du quadrivecteur courant est conservatif.* En particulier, prenons comme domaine tridimensionnel fermé : 1° l'hyperparoi du tube engendré par une goutte fluide finie bien déterminée; 2° deux hypercloisons 1 et 2 du genre espace, courbes en général, coupant ce tube, c'est-à-dire *deux états non simultanés différents* de la goutte considérée. Je dis que *l'hyperflux électrique est nul à travers l'hyperparoi;* en effet, le déterminant (65) est nul sur l'hyperparoi comme ayant sa 4e ligne fonction linéaire des trois premières. Par suite, si Q_1 et Q_2 désignent les valeurs de l'intégrale (66) prise sur les deux hypercloisons, on a $Q_2 = Q_1 = Q$, ce qui exprime la *loi de conservation de l'électricité.*

Finalement, la charge d'une goutte finie n'est autre que l'*hyperflux conservatif* attaché au tube d'Univers correspondant; la valeur de Q est indépendante de la forme et de la position de la cloison, c'est-à-dire que, physiquement, *la valeur de* Q *est fonction seulement des « molécules électriques » considérées, mais nullement de leurs coordonnées spatio-temporelles.* En particulier, le fait que les molécules ne soient pas prises simultanément n'influe en rien sur le résultat.

Mais il faut bien remarquer que cette *conservation de la charge* provient uniquement d'une circonstance particulière : l'existence de l'équation de continuité. Si la divergence d'Univers du courant électrique n'était pas nulle, la grandeur Q serait bien invariante pour les changements de système de référence (invariance relativiste), *mais elle serait fonction de la cloison.* Pour les classiques, la charge s'entendait pour des états simultanés du système de molécules électriques; *c'est uniquement grâce à l'équation de continuité que deux observateurs classiques différents seront d'accord entre eux dans l'évaluation de la charge.*

Il est instructif de retrouver les résultats précédents par un autre raisonnement. Rappelons que, d'après la Cinématique des milieux continus, l'*accroissement d'un volume matériel δu suivi dans son mouvement pendant le temps dt* est

$$d\,\delta u = \left(\operatorname{div} \vec{v}\right) \delta u\, dt = \partial^u v_u\, \delta u\, dt;$$

d'autre part, l'accroissement correspondant d'une fonction quelconque F *attachée au fluide* est

$$d\mathrm{F} = (\partial^u \mathrm{F}\, v_u + \partial^t \mathrm{F})\, dt,$$

de sorte qu'on peut écrire l'équation générale (qui intéresse en fai les diverses densités)

$$\boxed{d(\mathrm{F}\,\delta u) = [\partial^u (\mathrm{F}\, v_u) + \partial^t \mathrm{F}]\, \delta u\, dt.} \tag{67}$$

Si l'on suppose l'intervalle de temps dt attaché au fluide comme l'est le volume δu, le produit $\delta u.\, dt$ est un invariant relativiste; en effet, δu varie comme $\sqrt{1-\beta^2}$ (contraction de Lorentz), et dt comme $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. En d'autres termes, le produit du *volume pur δu* par le *temps pur dt* est une expression particulière de l'élément quadrilinéaire $\frac{1}{ic}[dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4]$ (le 4^e vecteur de base dx^i_4 s'y trouvant orthogonal aux trois premiers). Dans (67), prenons pour F la densité de charge q; on a au premier membre la variation de la charge d'une gouttelette suivie dans son mouvement, et le crochet n'est autre que la divergence d'Univers du quadrivecteur courant. Comme le crochet est 1° invariant, et 2° nul, les propriétés d'*invariance* et de *conservation* de la charge sont bien établies. L'équation

$$d(\delta \mathrm{Q}) = \frac{1}{ic} \partial_l j^l [\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4\,] = 0,$$

sur laquelle on retombe, n'est autre que l'écriture « élémentaire » de (66').

18. Le quadrivecteur impulsion-énergie. — Multiplions les composantes du quadrivecteur densité de force-densité de puissance par l'invariant $\delta u . dt$ précédent : d'après la physique classique, les trois $f_u \, \delta u$ représentent la *somme* δF_u des forces appliquées à la gouttelette considérée, et $\vec{v}\, dt$ est le déplacement élémentaire moyen $\overrightarrow{dM}$ des points de cette gouttelette. Il vient donc (le symbole δ étant négligé) le quadrivecteur

$$\boxed{dp_u = F_u \, dt, \qquad dp_4 = \frac{i}{c} \vec{F} . \overrightarrow{dM} = \frac{i}{c} dW;} \tag{68}$$

dW désigne l'énergie élémentaire acquise par la gouttelette. Les (68) constituent la *définition pondéromotrice de l'impulsion-énergie élémentaire de la gouttelette.* Remarquons que les composantes dp_i sont *insensibles* au choix des quatre vecteurs de base dx_i de l'élément quadrilinéaire, pourvu simplement que la *valeur* du déterminant soit respectée; par suite, la relation qui existe entre les p_i et les f_i n'est pas assujettie à l'expression $\delta u . dt$, et l'on peut adopter l'écriture générale

$$d(\delta p_i) = \frac{1}{ic} f_i [dx^1 \, dx^2 \, dx^3 \, dx^4]. \tag{69}$$

En Relativité, les deux notions d'*impulsion* et d'*énergie* deviennent donc *relatives*, la notion d'*impulsion-énergie* étant seule douée de signification intrinsèque. Comme corollaire, les deux principes de *conservation de l'impulsion* et de *conservation de l'énergie* cessent d'être distincts : ils viennent fusionner en l'unique *principe de conservation de l'impulsion-énergie.*

Impulsion-énergie électromagnétique. — Compte tenu de l'équation de continuité, l'expression (56″) de la densité de force d'Univers s'écrit

$$f^k = \partial_l (A^k j^l) - j^l \partial^k A_l.$$

Multiplions par l'élément quadrilinéaire, et intégrons dans un tube d'Univers, entre deux hypercloisons 1 et 2; le premier terme se transforme en intégrale triple, à laquelle l'hyperparoi apporte une contribution nulle pour la même raison que précédemment; introduisant les valeurs moyennes $\overline{A}$ du potentiel sur les hypercloisons, il vient donc pour ce premier terme $[\overline{A}_2^k - \overline{A}_1^k] Q$.

Quant au second terme, à la condition de prendre comme quatrième vecteur de base l'élément de trajectoire d'Univers, il fait, lui aussi, intervenir une intégrale triple, et s'écrit successivement

$$\int dx^l \iiint \partial^k A_l (j^i \delta u_i) = Q \int_1^2 \partial^k A_l \, dx^l.$$

Considérons alors, dans un tube infiniment délié, deux hypercloisons infiniment voisines; *en admettant que la charge correspondante soit finie*, il vient l'*expression électromagnétique de l'impulsion-énergie élémentaire du point chargé* (unités E. M. d'Heaviside)

$$\boxed{dp_i = Q(dA_i - \partial_i A_j \, dx^j).} \tag{70}$$

Cette formule nous servira de point de départ, au Chapitre IV, pour établir l'extension relativiste de la Mécanique analytique.

CHAPITRE III.

RELATIVISATION DE LA DYNAMIQUE.

21. Dans ce Chapitre, suivant toujours la tradition d'Einstein, nous allons établir la nouvelle dynamique en nous appuyant sur les variances imposées à la force et à l'énergie par l'électromagnétisme. Mais, afin de réduire le nombre des postulats nécessaires, nous allons établir d'abord les équations des milieux continus. Précisément, nous allons montrer que *les anciennes équations d'inertie des milieux continus se transcrivent telles quelles en Relativité;* les deux nouveautés relativistes consisteront l'une dans une *variance cinématique attribuée à la densité massique,* l'autre dans une *proportionnalité universelle entre la densité massique et la densité d'énergie;* cette dernière loi aura évidemment une portée physique considérable. Nous établirons ensuite les lois valables pour le point matériel au moyen d'un passage à la limite.

On voit donc que, sous la seule condition de prendre comme lois fondamentales les lois des milieux continus, la dynamique relativiste n'est pas plus « révolutionnaire » que l'électromagnétisme relativiste; cette circonstance apparaît comme très naturelle si l'on se rappelle que les formules fondamentales de l'électromagnétisme portent sur des densités.

Il est incontestable que, à cause de la variance attribuée à la masse, la dynamique relativiste est plus compliquée que l'ancienne *dans les applications* (n° 25). Au contraire, les formules générales — tant celles des milieux continus que celles du point — sont aussi simples que les formules anciennes; elles sont même plus condensées grâce à l'écriture tensorielle.

I. — *Lois générales de l'inertie.*

22. Équations des milieux continus. — Soient respectivement ρ et $\vec{v}$ la densité massique et la vitesse d'un milieu continu, $\vec{f}$ la densité de force qui lui est appliquée et w celle de l'énergie acquise correspondante; soient δu un petit volume suivi dans son mouvement, dt un temps infinitésimal. D'après la loi d'inertie de Galilée, les accroissements d'impulsion et d'énergie de la gouttelette δu pendant le temps dt valent respectivement

$$(71) \qquad \vec{f}\,\delta u\,dt = d\left(\rho\,\vec{v}\,\delta u\right), \qquad \left(\vec{f}.\vec{v}\right)\delta u\,dt = d(w\,\delta u).$$

Transformons les seconds membres de ces équations d'après la formule générale (67) établie au chapitre précédent; le produit $\delta u\,dt$ se met en facteur, et il vient, après division des deux membres par cette quantité

$$(72) \qquad \boxed{f_u = \partial^v(\rho v_u v_v) + \partial^l(\rho v_u), \qquad \left(\vec{f}.\vec{v}\right) = \partial^u(w v_u) + \partial^l(w).}$$

Dans les trois premières de ces équations, qui expriment la traditionnelle *loi d'inertie des milieux continus*, les $\rho v_u v_v$ définissent un tenseur symétrique de l'espace ordinaire. La quatrième exprime la loi d'accroissement de la densité d'énergie du fluide par suite du travail des forces appliquées; lorsque les vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires entre eux $\left[\left(\vec{f}, \vec{v}\right) = 0\right]$, on reconnaît une équation de continuité pour l'énergie *du fluide*.

En Relativité, sous la seule réserve que toutes les grandeurs soient évaluées dans un même système galiléen, les équations (72) [et aussi les (71)] subsistent intégralement. En effet, comme l'Optique et l'Électromagnétisme nous l'ont enseigné, posons

$$\partial^l = ic\,\partial^4, \qquad f_4 = \frac{i}{c}\left(\vec{f}.\vec{v}\right);$$

toutes les quantités entre parenthèses aux seconds membres des (72) sont nécessairement les composantes d'un même tenseur d'Univers T_{ij}, qui est *symétrique* puisque ses neuf composantes T_{uv} le sont toujours. On peut donc poser

$$(73)\qquad \boxed{T_{uv} = \rho v_u v_v = T_{vu}, \qquad T_{u4} = ic\rho v_u = \frac{i}{c}\,w v_u = T_{4u}, \qquad T_{44} = -w,}$$

formules d'où résultent immédiatement les deux résultats annoncés

$$(74)\qquad \boxed{w = c^2 \rho,} \qquad \rho = -\frac{1}{c^2}T_{44};$$

on voit que la masse *du fluide* ne se conserve qu'en première approximation, approximation d'ailleurs très élevée à cause de l'énormité du coefficient d'équivalence c^2 entre la masse et l'énergie.

Les définitions (73) peuvent être résumées sous la forme suivante

$$(75)\qquad \boxed{T_{ij} = -\frac{c^2\rho}{dx_4\,dx_4}dx_i\,dx_j = -\frac{w}{dx_4\,dx_4}dx_i\,dx_j,}$$

qui montre que les tenseurs symétriques T_{ij} et $dx_i\,dx_j$ sont homothétiques $\left(\text{et aussi que } \frac{w}{dx_4^2} \text{ est un invariant}\right)$. Quant aux (72), elles prennent la forme condensée

$$(76)\qquad \boxed{f_i = \partial^j T_{ij}.}$$

23. L'impulsion-masse comme grandeur finie. — Intégrons les équations (76) dans un domaine quadridimensionnel, et transformons le second membre en intégrale triple étendue au contour tridimensionnel de ce domaine. Il vient, $ic\,\delta u^i$ désignant le quadrivecteur dual du tenseur $[dx_j\,dx_k\,dx_l]$

$$(77)\qquad \frac{1}{ic}\iiiint f_i\,[\overline{dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4}] = \iiint T_{ij}\,\delta u^j.$$

Pour interpréter ce résultat, prenons comme contour tridimensionnel : 1° l'hyperparoi d'un tube de courant d'Univers; 2° deux hypercloisons 1 et 2, courbes en général, partout du genre espace, représentant deux *états « non simultanés »* différents d'une même goutte fluide finie.

Étudions d'abord le second membre, et, dans ce second membre, l'intégrale d'hyperparoi; compte tenu de l'expression (32) de l'élément d'hyperparoi et de la définition (75) précédente, son élément différentiel s'écrit

$$T_{ij}\,\delta u^j = -\frac{w}{dx_4\,dx_4}\,\delta s^{kj}\,dx_i\,dx_j\,dx_k;$$

à la fraction invariante près, il s'agit du produit contracté d'un tenseur symétrique par un tenseur antisymétrique, quantité identiquement nulle. Ainsi, comme dans le problème de la charge électrique étudié au Chapitre précédent, *l'intégrale triple d'hyperparoi est identiquement nulle ;* dans les deux cas, ce fait résulte de l'homothétie du tenseur densitaire au tenseur défini par l'élément de ligne de courant.

Prenons maintenant les intégrales d'hypercloisons; lorsque ces hypercloisons sont planes et horizontales (c'est-à-dire lorsque toutes les molécules fluides sont considérées d'une manière simultanée : $\delta u^u \equiv 0$), elles s'interprètent immédiatement comme les trois composantes p_u de l'impulsion et comme la masse m (multipliée par ic) de la goutte fluide finie

$$(78)\qquad p_u = \iiint \rho v_u\,\delta u, \qquad p_4 = ic\iiint \rho\,\delta u = icm;$$

il s'agit là de la *définition cinétique* ou *inertique du quadrivecteur impulsion-masse*, qui sera conservée quelles que soient la forme et l'orientation de l'hypercloison (impulsion-masse généralisée) ([1]).

Finalement, le second membre de la formule (77) s'interprète comme l'accroissement du quadrivecteur impulsion-masse p_i d'un même milieu continu fini pris dans deux états différents. Quant au premier membre, son interprétation est évidemment la même que

([1]) L'interprétation des nouveaux termes $\rho v^u v^w \delta u_w$ et $\rho v^w \delta u_w$ est tout à fait analogue à celle que nous avons indiquée en note pour la charge électrique : il s'agit d'une *correction de non-simultanéité* faite de proche en proche.

celle que nous avons donnée au Chapitre précédent (n° 19); il s'agit de la définition *statique* ou *pondéromotrice* du quadrivecteur impulsion-énergie. Nous reviendrons explicitement, à propos du point matériel, sur la proportionnalité entre masse et énergie qui résulte de l'égalité des quadrivecteurs impulsion-masse et impulsion-énergie.

Contrairement à ce qui avait lieu dans le problème de la charge électrique, le quadrivecteur divergence f_i du tenseur T_{ij} n'est pas nul en général, l'impulsion-masse n'est pas conservative, et il n'est pas possible de parler d'une impulsion-masse attachée au tube d'hypercourant. En particulier, deux observateurs galiléens différents qui définissent *à la manière classique* le quadrivecteur impulsion-masse relatif aux *mêmes* molécules fluides seront en désaccord non seulement sur la valeur des composantes (comme il va de soi), *mais sur le quadrivecteur lui-même. Dans le cas général* où f_i n'est pas nul, *le quadrivecteur impulsion-masse est fonction* non seulement des molécules choisies, mais aussi *de l'hypercloison d'intégration;* on peut traduire ce fait d'une manière imagée en disant qu'*il existe une infinité de quadrivecteurs impulsion-masse attachés au même tube d'Univers;* cela, bien que le tenseur densité d'inertie T_{ij} soit parfaitement défini en tout point et à tout instant.

Dans le cas particulier où le quadrivecteur f_i est identiquement nul (c'est-à-dire le tenseur T_{ij} sans divergence), l'impulsion masse se trouve être conservative; à chaque tube d'Univers correspond une impulsion-masse parfaitement déterminée. Mais alors, non seulement le quadrivecteur impulsion-masse se trouve défini intrinsèquement par le système de molécules fluides considérées, mais encore il est invariable dans le temps. C'est seulement lorsque l'impulsion-masse est « intégrale première » qu'elle est définie indépendamment des instants relatifs auxquels on prend les diverses molécules fluides.

24. Équations de la dynamique du point. — Faisons tendre vers zéro dans toutes ses dimensions l'hypersection du tube d'Univers considéré, tout en admettant que son impulsion-masse généralisée reste finie. Celle-ci, en vertu des (75) et (77), a pour expression

$$\delta p_i = -\frac{c^2\rho}{dx_4\,dx_4}\,dx_i\,dx_j\,\delta u^j,$$

dans laquelle les dx_i caractérisent l'élément de trajectoire moyenne de l'hypertube et δu^j un quadrivecteur section de l'hypertube. Il est bien clair que *quelle que soit l'orientation de l'hyperplan de section, le produit scalaire $dx_j \delta u^j$ conserve la même valeur;* on voit ainsi disparaître, dans le cas limite du *point matériel*, l'indétermination fort gênante étudiée au numéro précédent. Finalement, *le quadrivecteur impulsion-masse attaché à une gouttelette infinitésimale* (engendrant un tube infiniment délié) *est* : 1° *défini d'une manière intrinsèque*; 2° *tangent à la trajectoire moyenne.*

Retournant alors à la *définition cinétique* (78) de l'impulsion-masse, et appelant m la masse de la gouttelette, il vient les expressions

(79) $$\boxed{p_u = m v_u, \qquad p_4 = icm,}$$

dont les trois premières sont classiques; la quatrième exprime, en langage ponctuel, la nouvelle variance cinématique de la masse. La formule condensée de ces expressions est

(79′) $$\boxed{p_i = ic\frac{m}{dx_4}dx_i,}$$

dans laquelle $\frac{m}{dx_4}$ est évidemment un invariant.

De même, retournant à la *définition pondéromotrice* (68) de l'impulsion-énergie qui convient pour le premier membre, il vient finalement les *équations relativistes de la dynamique du point*

(80) $$\boxed{F_u\, dt = d(mv_u), \qquad dW = c^2\, dm;}$$

les trois premières ne sont autres que les équations galiléennes écrites sous la forme dite *de l'impulsion;* la quatrième exprime, en langage ponctuel, la nouvelle proportionnalité universelle entre la masse et l'énergie.

Comme application, montrons que la dynamique relativiste retrouve *en première approximation* le classique *théorème de la force vive.* Soit en effet μ la *masse propre* du point matériel (valeur de la masse dans le système entraîné, comme τ était le *temps propre*); dans tout autre système, on aura

(81) $$m = \frac{\mu}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mu\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\ldots\right) \quad \text{ou} \quad \boxed{W = \mu c^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 + \ldots.}$$

Ainsi, pour augmenter l'énergie d'un point massique on dispose en principe de deux moyens : 1° augmenter sa masse propre ou, comme on dirait en thermodynamique, son *énergie interne;* 2° augmenter sa vitesse, c'est-à-dire son énergie cinétique, ou encore ce qu'on pourrait appeler sa *masse apparente.*

Un point qui serait animé de la vitesse limite c aurait une masse infiniment grande; si l'on voulait faire tendre vers c la vitesse d'un point massique donné, il faudrait lui fournir une énergie infiniment grande. On verra là des confirmations *a posteriori* de l'existence de la vitesse limite c.

L'interprétation relativiste du *théorème de la force vive* est très nouvelle en ceci qu'*il s'agit au fond d'un théorème de cinématique :* l'énergie cinétique est en somme une *apparence due au mouvement.* Ce qui rend la nouvelle interprétation plus satisfaisante que l'ancienne, c'est qu'on voyait mal, en dynamique classique, comment le caractère *relatif* de l'énergie cinétique s'accordait avec le caractère *absolu* de l'énergie en général.

25. Si l'on veut utiliser dans la pratique ou vérifier par l'expérience les nouvelles lois d'inertie sur des corpuscules en mouvement rapide (expériences de Guye et Lavanchy sur l'électron), il faut les transformer de manière à faire apparaître la masse propre μ, l'espace et le temps habituels. *Compte tenu du fait que la masse est variable*, on peut écrire

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v};$$

la Relativité corrige donc l'expression classique par un second terme *colinéaire à la vitesse;* cette remarque suggère de décomposer la force et l'accélération tangentiellement et normalement à la trajectoire. Désignons par les indices l et t les composantes *longitudinale* et *transversale* correspondantes, et rappelons la relation classique $\gamma_l = \frac{dv}{dt} = v'$; l'équation vectorielle initiale sera remplacée par les deux suivantes :

$$F_l = mv' + m'v, \qquad F_t = m\gamma_t.$$

Nous voyons déjà que si l'on attribue au point sa masse relativiste m (et non sa masse propre μ), la loi d'accélération normale est conservée. Dans les mêmes conditions, cherchons la modification de la loi d'accélération tangentielle; on a, d'après (81_1),

$$m' = \mu\frac{\beta\beta'}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = m\frac{\beta\beta'}{1-\beta^2}, \qquad m'v = mv'\frac{\beta^2}{1-\beta^2};$$

finalement, les nouvelles lois d'accélération cherchées s'écrivent

$$F_l = \frac{m\gamma_l}{1-\beta^2} = \frac{\mu\gamma_l}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = \mu\gamma_l\left(1+\frac{3}{2}\beta^2+\ldots\right),$$

$$F_t = m\gamma_t = \frac{\mu\gamma_t}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \mu\gamma_t\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\ldots\right).$$

On appelle quelquefois *masse longitudinale* et *masse transversale* les deux coefficients de l'accélération

$$m_l = \frac{\mu}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad m_t = \frac{\mu}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

II. — *Le problème des moments cinétiques propres* (¹).

26. Rappel de quelques résultats d'Élasticité et de Dynamique pré-relativistes. — Soient, dans un milieu élastiquement tendu, T_{uv} les neuf coefficients qui expriment le vecteur *force superficielle élémentaire* δT_u en fonction du vecteur *aire élémentaire* correspondante (tenseur élastique)

$$\delta T_u = T_{uv}\,\delta s^v;$$

intégrant sur une aire fermée et transformant en intégrale triple, on fait apparaître la *densité volumique de force élastique* f_u

$$\iint \delta T_u = \iiint \partial^v T_{uv}\,\delta u, \qquad \boxed{f_u = \partial^v T_{uv}.} \tag{82}$$

De même, prenons le moment de la force superficielle à l'origine, intégrons et transformons; tenant compte que $\partial^w x_v = \delta^w_v$, on voit apparaître une *densité de moment pondéromoteur propre d'origine élastique* μ_{uv}

$$\begin{aligned} &\iint (T_{uw}x_v - T_{vw}x_u)\,\delta s^w \\ &= \iiint (x_v\,\partial^w T_{uw} - x_u\,\partial^w T_{vw})\,\delta u + \iiint (T_{uw}\,\partial^w x_v - T_{vw}\,\partial^w x_u)\,\delta u \\ &= \iiint (f_u x_v - f_v x_u)\,\delta u + \iiint (T_{uv} - T_{vu})\,\delta u, \qquad \boxed{\mu_{uv} = T_{uv} - T_{vu}.} \end{aligned} \tag{83}$$

(¹) Ce paragraphe reproduit, en l'abrégeant un peu, notre étude parue au *Journal de Mathématiques* [Sur la théorie des moments cinétiques propres en Relativité restreinte (*J. Math. pures et appliquées*, t. XXI, fasc. 3, 1942).] Depuis l'époque de la présente rédaction, nous avons notablement développé et étendu notre théorie.

Ainsi : (A) *l'Élasticité établit la possibilité d'existence d'une densité de moment pondéromoteur propre, qui est représentée par un tenseur antisymétrique du second rang, et qui s'annule lorsque le tenseur élastique est symétrique.*

Prenons alors les équations (72) de la Dynamique des milieux continus : elles montrent que la densité de force d'inertie est la somme d'un terme de forme élastique dérivant du tenseur symétrique $\rho v_u v_v$, et d'un terme $\partial^t(\rho v_u)$ non réductible à cette forme, c'est-à-dire proprement volumique. Par conséquent, la Dynamique affirme que *la densité de moment de force d'inertie propre est identiquement nulle*, et, en vertu du principe de d'Alembert appliqué aux moments : (B) qu'*il en est de même pour la densité totale (élastique + volumique) de moment pondéromoteur propre.*

D'ailleurs, il est facile de confirmer ce résultat de la manière suivante : prenons, dans un milieu continu, une gouttelette sphérique de rayon r suivie dans son mouvement; son moment d'inertie est $\frac{8}{15}\pi\rho r^5$, et sa vitesse angulaire $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}\, v}$. Son moment cinétique est donc un infiniment petit du 5^e ordre, ce qui ne permet pas de définir une densité de moment cinétique propre. En d'autres termes, la Dynamique affirme : (C) l'*inexistence d'une densité de moment cinétique propre.*

Or, l'existence des moments cinétiques propres à l'échelle atomique est mise en évidence par les expériences gyromagnétiques, par exemple; il semblerait intéressant d'élargir les conceptions classiques de la Physique du Continu de manière à pouvoir attribuer à la matière une densité de moment cinétique propre. D'autre part, l'existence d'un moment cinétique propre de l'électron est mise en évidence par la spectroscopie, et la Mécanique quantique utilise comme intermédiaire de calcul dans l'espace-temps une densité de moment cinétique propre σ, dont il est intéressant de justifier les propriétés, d'un point de vue purement relativiste.

En fait, nous allons pouvoir montrer que *les propriétés cinématiques de la densité σ de Dirac sont imposées par le formalisme relativiste* comme conséquences nécessaires de postulats très généraux (n° 27). De plus, on verra que *les résultats négatifs* (B) *et* (C) *de la théorie prérelativiste ont une origine très profonde*, l'élargissement sur ce point de la Dynamique ancienne ne devant pas être facile (n° 28).

27. Détermination relativiste des propriétés de la densité de moment cinétique propre. — Sous forme finie, la variance relativiste d'un moment cinétique C résulte sans ambiguïté de la considération d'un point matériel de coordonnées x^i et d'impulsion-masse p^i; en effet, d'après la Dynamique ancienne, il ne peut s'agir que du tenseur antisymétrique

(84) $$C^{ij} = p^i x^j - p^j x^i,$$

dont les trois C^{uv} représentent le *moment cinétique proprement dit* par rapport à l'origine des espaces. Quant aux trois C^{4u}, leur interprétation est facile par explicitation de x^4 et des p^i [équ. (79′)]; i vient en effet

(84′) $$C^{4u} = icm(x^u - v^u t),$$

et l'on voit qu'il s'agit, au facteur ic près, du *moment barycentrique* par rapport à l'origine, *généralisé par l'hypothèse de la non-simultanéité*. En particulier, pour t infiniment petit, on retrouve le moment barycentrique habituel à l'instant zéro ($-v^u\,dt$ représentant alors une « correction de non-simultanéité »).

Cela étant, nous savons que nous devons obtenir un tenseur antisymétrique du second rang δC^{ij} en multipliant convenablement les composantes inconnues de la densité σ par le tenseur antisymétrique *élément de volume généralisé* $[dx^i\,dx^j\,dx^k]$; la grandeur σ est donc nécessairement un tenseur, dont il faut déterminer l'ordre n et éventuellement les symétries.

Soient m le nombre de ses indices muets, qui viendront *saturer* certains indices du $[dx^i\,dx^j\,dx^k]$, s celui de ses indices significatifs; les trois entiers n, m et s sont essentiellement positifs et au plus égaux à 4, et l'on peut écrire les relations d'homogénéité

$$2 = (3 - m) + s \qquad \text{ou} \qquad m = 1 + s,$$
$$m + s = n \qquad \text{ou} \qquad n = 1 + 2s.$$

Pour $s = 0$, il vient $m = 1$, $n = 1$;
pour $s = 1$, il vient $m = 2$, $n = 3$;

l'hypothèse $s = 2$ n'est pas à retenir, puisqu'elle donnerait $n = 5$.

Ainsi, la densité σ, *si elle existe* (Postulat I) est nécessairement un *tenseur du premier ou du troisième rang*.

Prenons d'abord la première hypothèse. Elle s'écrit

$$(85) \qquad \delta C^{ij} = \sigma_{k}[dx^i\, dx^j\, dx^k],$$

formule grâce à laquelle *l'antisymétrie du tenseur* δC *est assurée quel que soit l'élément trilinéaire d'intégration*. De plus, on voit que, *dans l'hypothèse de la simultanéité, on retrouve pour la densité* σ *le caractère d'une densité vectorielle d'espace*, en ce sens : 1° que les trois composantes δC^{uv} du moment cinétique ne comportent qu'un seul terme dans leur expression : celui en σ_w; 2° que les trois composantes δC^{w4} du moment barycentrique sont nulles.

Si l'on introduit les duals $ic\,\delta B^{kl}$ et $ic\,\delta u^l$ des deux tenseurs antisymétriques de la formule (85), elle s'écrit

$$(85') \qquad \boxed{\delta B^{kl} = \sigma^k\, \delta u^l - \sigma^l\, \delta u^k.}$$

Prenons maintenant l'hypothèse $n = 3$, $m = 2$. Si l'on postule que : (II) *l'antisymétrie du tenseur produit doit être assurée quel que soit l'élément trilinéaire d'intégration*, il est nécessaire d'adopter, non pas le simple produit contracté sur deux indices, mais la combinaison classique

$$(85'') \qquad \delta B_{kl} = \frac{1}{2}\left\{ \sigma_{lij}[dx^k\, dx^i\, dx^j] - \sigma_{kij}[dx^l\, dx^i\, dx^j] \right\}.$$

Postulons alors que : (III) *dans l'hypothèse de la simultanéité, le caractère vectoriel spatial doit être retrouvé pour la densité* σ. Nous remarquons immédiatement que, pour un couple bien déterminé des indices muets, chacun des termes de (85″) est la somme de deux termes en général différents, correspondant à la permutation de ces indices dans σ, notre postulat (III) impose donc déjà l'antisymétrie du tenseur σ par rapport aux indices muets, pour que les deux termes précédents soient identiquement égaux. On peut alors les grouper ensemble et négliger le facteur $\frac{1}{2}$.

Compte tenu de cette remarque, et toujours dans l'hypothèse de la simultanéité, les (85″) s'écrivent (*la convention de sommation n'étant pas utilisée*)

$$\delta B_{uv} = (\sigma_{vvw} + \sigma_{uuw})[dx^1\, dx^2\, dx^3], \qquad \delta B_{w4} = \sigma_{4uv}[dx^1\, dx^2\, dx^3];$$

le postulat (III) exige que, en vertu d'une propriété intrinsèque du tenseur σ, l'un de ces deux groupes de trois composantes soit nul, et que l'expression de l'autre ne comporte qu'un seul terme. Il est facile de voir que cela n'est possible que d'une seule manière : les trois δB_{uv} seront nulles, et comme cela doit avoir lieu identiquement, le tenseur σ doit être antisymétrique par rapport à ses deux premiers indices. Finalement, le tenseur σ devant être complètement antisymétrique, *l'écriture* (85″) *devient équivalente à* (85′).

Ainsi, moyennant deux postulats généraux appropriés, nous avons ramené le cas $n=3$ au cas $n=1$.

Si alors on ajoute aux postulats précédents : (IV) la *nécessité de retrouver pour la densité σ le caractère d'un vecteur d'espace dans le système entraîné*, les (85′) montrent que σ^4 doit s'annuler dans ce système, c'est-à-dire que *le quadrivecteur σ^i doit être orthogonal au courant d'Univers*

$$(86) \qquad \sigma_i \, dx^i = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sigma^4 = \frac{i}{c}\left(\vec{\sigma}.\vec{v}\right).$$

On sait qu'en Théorie de Dirac la densité σ est un tenseur antisymétrique du troisième rang qui, en axes cartésiens au sens étroit, équivaut à un quadrivecteur, et que la relation (86) est effectivement vérifiée. Finalement, nous avons retrouvé l'ensemble des propriétés cinématiques de la densité σ de Dirac au moyen des quatre postulats généraux d'*existence* (I), d'*arbitraire de l'élément trilinéaire d'intégration* (II), d'*interprétation vectorielle dans le système de simultanéité locale* (III), et aussi *dans le système entraîné* (IV).

28. Étude de l'intégrale d'hyperparoi. La densité de moment pondéromoteur propre. — Il est nécessaire que nous complétions notre étude de la manière suivante : nous prendrons l'intégrale triple de l'expression (85′) sur le domaine particulier constitué par deux hypercloisons différentes relatives aux mêmes molécules, et par l'hyperparoi du tube de courant d'Univers correspondant. En effet, pour pouvoir affirmer que la différence des deux intégrales d'hypercloisons représente bien la variation du moment cinétique-moment barycentrique d'une même goutte fluide, il faut que nous sachions interpréter l'intégrale triple d'hyperparoi, et aussi l'intégrale quadruple obtenue au second membre par transformation.

Reprenant l'expression (32) de l'élément trilinéaire d'hyperparoi, l'intégrale correspondante s'écrit

$$(87) \qquad \delta B^{kl} = (\sigma^k \, \delta s^{il} - \sigma^l \, \delta s^{ik}) \, dx_i$$

(formule grâce à laquelle l'antisymétrie de δB^{kl} reste automatiquement assurée).

Le fait capital sur lequel il faut insister, c'est que, compte tenu de la relation entre la densité σ et l'élément de trajectoire d'Univers [formule (86)], *la nullité de l'intégrale d'hyperparoi n'est pas automatiquement assurée.* Dans ces conditions, nous allons envisager successivement plusieurs hypothèses.

Première hypothèse. — *L'intégrale d'hyperparoi est identiquement nulle, quelle que soit l'hyperparoi.* — Cela revient à dire que les choses doivent se passer, dans notre problème actuel, comme dans les problèmes de la charge électrique et de l'impulsion-masse. Prenons deux hypercloisons planes et perpendiculaires à l'axe de temps, infiniment voisines dans le temps, intégrons, et transformons en intégrale quadruple; au premier membre, il vient la *variation du moment cinétique moment barycentrique*, et l'on peut écrire, en introduisant au second membre le produit $\delta u\, dt$ d'un volume pur par un temps pur

$$dB^{kl} = dt \iiint (\partial^l \sigma^k - \partial^k \sigma^l)\, \delta u; \tag{88}$$

ainsi, *le dual μ^{ij} du rotationnel d'Univers de la densité σ représente par ses trois μ^{uv} la densité de moment pondéromoteur propre*, en pleine conformité avec le résultat d'Élasticité (A) [formule (83)]

$$\mu^{uv} = \frac{1}{ic}(\partial^4 \sigma^w - \partial^w \sigma^4). \tag{89}$$

Cette formule (89) est tout à fait analogue à la formule classique (82); dans les deux cas, la *densité dynamique* est une dérivée de la *densité inertique*.

Malheureusement, ces derniers résultats, qui semblent très satisfaisants du point de vue classique, ne peuvent être réalisés en fait. En effet, dire que l'intégrale de (87) doit être identiquement nulle, c'est dire que *la densité σ doit être identiquement nulle.* Nous retombons donc sur les *résultats négatifs* (B) et (C) de la Dynamique, mais la Relativité restreinte a le mérite de nous montrer que *ces résultats ont au fond une origine cinématique;* l'hypothèse de nullité de l'intégrale d'hyperparoi à elle seule nous ramène au cas classique, puisqu'elle suffit à entraîner le résultat positif (A) et les résultats négatifs (B) et (C).

Deuxième hypothèse. — *L'intégrale d'hyperparoi n'est pas nulle, mais l'intégrale quadruple est identiquement nulle.* — Ce qui rend séduisante *a priori* cette hypothèse, dont l'expression est

$$\partial^j \sigma^i - \partial^i \sigma^j = 0, \tag{89'}$$

c'est qu'elle permet en principe de remplacer la notion défaillante de densité volumique de moment pondéromoteur par celle de *densité superficielle.* Introduisant en effet la vitesse du fluide dans les (87), on peut mettre l'intervalle de temps dt en facteur, de sorte que les coefficients des $\delta s^{ij}\, dt$ seront les composantes de la *densité superficielle de moment pondéromoteur propre généralisé.*

Malheureusement, on tombe encore sur une difficulté tout à fait analogue à la précédente. En effet, explicitant les expressions de notre densité dans l'hypothèse de la simultanéité ($\delta s^{uv} = 0$), il vient pour l'intégrale d'hyperparoi (et $\vec{\delta s}$ désignant toujours l'élément d'aire proprement dite)

$$
(90)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta B^{uv} &= (\sigma^u\,\delta s^v - \sigma^v\,\delta s^u)\,dt = \left(\vec{\sigma}\wedge\vec{\delta s}\right)^{uv} dt,\\
ic\,\delta B^{u4} &= \sigma^u\,\delta s^v\,dx_v + \sigma^4\,\delta s^u\,dx_4\\
&= \left[\sigma^u\left(\vec{\delta s}.\vec{v}\right) - \left(\vec{\sigma}.\vec{v}\right)\delta s^u\right] dt = \left[\vec{v}\wedge\left(\vec{\sigma}\wedge\vec{\delta s}\right)\right]^u dt;
\end{aligned}
\right.
$$

et comme, toujours dans l'hypothèse de la simultanéité, les δB^{uv} *d'hypercloison* sont identiquement nulles, nous en concluons

$$
(90')\qquad \vec{\sigma}\wedge\vec{\delta s} = 0
$$

et par suite la nullité du quadrivecteur σ^i. L'hypothèse actuelle, tout comme la précédente, aboutit donc à *nier l'existence des moments propres.*

Troisième hypothèse. — *L'intégrale d'hyperparoi et l'intégrale quadruple ne sont pas nulles.* — Il résulte de ce qui précède que cette hypothèse est nécessaire pour sauver l'existence des moments propres. De plus, elle est en accord avec la Théorie de Dirac, où le quadrivecteur σ^i n'est pas irrotationnel. *Mais on ne peut pas l'interpréter du point de vue classique* : en effet, la disparition de l'une et l'autre des restrictions précédentes fait de la transformation de l'intégrale triple en intégrale quadruple une pure tautologie, *qui ne permet pas de définir une densité de moment pondéromoteur propre.* Faute de cela, la notion de *densité de moment cinétique propre* n'a guère de sens *au point de vue classique*; il faudrait faire appel, pour la justifier, à une hypothèse étrangère à la fois à la pure Cinématique et à la Dynamique traditionnelle, c'est-à-dire à une hypothèse tout à fait artificielle en l'état actuel de nos connaissances.

Comme le progrès de ces connaissances se fait très nettement dans le sens quantique, le plus sage est probablement de conclure que l'étude précédente fait bien sentir, sur un point particulier, la limite des possibilités d'explication de l'ancienne Physique du Continu.

CHAPITRE IV.

LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE DU POINT ÉLECTRIQUEMENT CHARGÉ COMME INTRODUCTION A LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

I. — *Formulation symétrique de la mécanique du point.*

31. Pour obtenir une Mécanique analytique jouissant de la symétrie relativiste, il est nécessaire de considérer un point matériel soumis à l'action non pas seulement d'un potentiel unique $V(x_1, x_2, x_3, t)$, comme on le fait le plus souvent, mais bien d'un quadripotentiel $A_i(\ldots x^j \ldots)$ avec $i, j = 1, 2, 3, 4$ et $A_4 = iV$, comme l'impose l'Électromagnétisme (¹). Outre sa généralité plus étendue, une telle méthode a l'avantage de bien montrer que ce n'est pas par des raisons fortuites que le point électriquement chargé suit les équations de la Mécanique analytique.

Reprenons donc les équations (70) qui donnent la variation élémentaire dp_i d'impulsion-énergie électromagnétique d'une charge ponctuelle Q en fonction de son déplacement spatio-temporel dx^i

$$dp_i = Q(dA_i - \partial_i A_j \, dx^j).$$

Au premier membre, nous supposerons avoir affaire à l'expression dynamique, ou *inertique*, de la même quantité, qui est aussi fonction du déplacement dx^i (n° 24); dans ces conditions, les quatre équations précédentes ne sont autres que les *équations du mouvement du point chargé.*

Si l'on remarque en passant que le premier membre n'est qu'une forme tronquée du second, l'hypothèse de la « présence virtuelle » d'un terme $-\partial_i p_j \, dx^j$ s'impose pour ainsi dire d'elle-même; il faut alors chercher à quelle condition ce terme est identiquement nul. Cette condition est évidemment que les quatre dérivées partielles (²) du quadrivecteur p_i soient orthogonales au déplacement spatio-temporel dx^i, ce qui arrive en particulier si l'on admet, avec les classiques, que p_i est tangent à la trajectoire et de longueur $ic\mu$ constante (³). On a en effet d'après (79')

$$p_i p^i = -(c\mu)^2 = \text{const.} \tag{91}$$

Quoi qu'il en soit, posons en général par *définition de l'impulsion-énergie totale* du point massique chargé (et éventuellement doué de spin)

$$\boxed{P_i = p_i - QA_i;} \tag{92}$$

(¹) La Mécanique analytique symétrique du point électriquement chargé en Relativité générale a été développée dans plusieurs publications par M. de Donder. On pourra consulter notamment sa *Théorie invariantive du Calcul des variations*, p. 174 et sq.

(²) En Mécanique analytique, on considère à la fois les trajectoires d'une congruence, de sorte qu'on a affaire à un *champ* de quadrivecteurs p_i.

(³) Cette hypothèse ne convient pas au point matériel doué de *moment cinétique propre* ou *spin; voir* par exemple AL. PROCA. *Thèse*, p. 145 : *Sur la théorie relativiste de l'électron de Dirac dans un champ nul*, Paris, 1933.

les équations du mouvement prennent la forme condensée

$$\boxed{dP_i = \partial_i P_j\, dx^j.} \tag{93}$$

32. Invariants intégraux de Poincaré-Cartan. — En Mécanique analytique, on associe à la trajectoire réellement décrite par le point une infinité multiple de trajectoires « virtuelles » formant avec la précédente une même congruence ; on les assimile aux lignes de courant d'un fluide fictif que, pour des raisons évidentes, nous appellerons *fluide de possibilité*. Dans l'Univers de Minkowski, nous aurons affaire à une triple infinité de trajectoires du genre temps.

Prenons alors, comme nous l'avons souvent fait, une famille continue d'hypersurfaces, partout du genre espace, s'étendant jusqu'à l'infini, et considérons plus particulièrement deux d'entre elles, soient (1) et (2). Intégrant les (93) le long du segment qu'elles déterminent sur une trajectoire, et posant par *définition de l'action totale* (invariant relativiste)

$$\Phi = \int P_j\, dx^j, \tag{94}$$

il vient

$$P^i_{(2)} - P^i_{(1)} = \partial^i[\Phi_{(2)} - \Phi_{(1)}].$$

Prenons alors sur l'hypersurface (1) une ligne fermée, évidemment du genre espace. Les trajectoires qui en émanent forment une paroi bidimensionnelle de tube d'Univers, sur laquelle les hypersurfaces que nous avons introduites déterminent une famille continue de contours du genre espace. Soit δx_i l'élément du contour général : c'est évidemment un vecteur du genre espace. Multiplions scalairement les deux membres de la formule précédente par δx_i, et intégrons tout autour du tube ; il vient

$$\oint_{(2)} P^i\,\delta x_i - \oint_{(1)} P^i\,\delta x_i = \oint \delta x_i\, \partial^i\,(\Phi_{(2)} - \Phi_{(1)}) = \oint \delta(\Phi_{(2)} - \Phi_{(1)}),$$

quantité évidemment nulle. Finalement, *la circulation du quadrivecteur* P_i *prise autour d'un tube du courant de possibilité est conservative*

$$\boxed{\oint P_i\,\delta x^i = \text{const.}} \tag{95}$$

L'invariant intégral précédent, qui a dimension d'action, est dit *relatif* parce qu'il doit être pris le long d'un *contour fermé*.

Réciproquement, il faut montrer que l'équation intégrale (95) entraîne les équations différentielles (93); chemin faisant, nous allons établir d'autres propriétés.

Associons maintenant au contour précédent une cloison courante du tube considéré ; transformant l'intégrale (95) en intégrale double prise sur cette surface, il vient

$$(95')\qquad \iint \partial_j \mathrm{P}_i [dx^i\, dx^j] = \text{const.};$$

compte tenu de l'antisymétrie du $[dx^i\, dx^j]$, cette formule exprime que *le flux du rotationnel de l'impulsion-énergie à travers la cloison courante est conservatif*. Explicitant l'élément bilinéaire en fonction de deux quadrivecteurs de base $\delta_1 x^i$ et $\delta_2 x^i$, il vient

$$\iint \partial_j \mathrm{P}_i(\delta_1 x^j\, \delta_2 x^i - \delta_2 x^j\, \delta_1 x^i) = \iint \delta_1 \mathrm{P}_i\, \delta_2 x^i - \delta_2 \mathrm{P}_i\, \delta_1 x^i = \text{const} ;$$

on sait que la Théorie des Quanta, sous sa forme ancienne, imposait à la dernière intégrale d'être un multiple entier de la constante universelle h (1); le raisonnement que nous venons de faire établit la *compatibilité de la Mécanique analytique relativiste avec les conditions de Quanta.*

Je dis maintenant que l'intégrale analogue à (95') *prise sur la paroi* est identiquement nulle. En effet, intégrant sur la surface fermée constituée par deux cloisons et par la paroi, et transformant en intégrale triple, il vient au second membre

$$\iiint \partial_{kj} \mathrm{P}_i [dx^i\, dx^j\, dx^k],$$

quantité identiquement nulle puisque l'élément différentiel est le produit contracté d'un tenseur symétrique par un tenseur antisymétrique. Nous pouvons donc écrire, le symbole d caractérisant le mouvement du point et δ étant relatif à un changement de trajectoire

$$(96)\qquad \boxed{d\mathrm{P}_i\, \delta x^i - \delta \mathrm{P}_i\, dx^i = 0}$$

[élément d'*invariant intégral absolu* de Poincaré-Cartan (2).]

(1) *Voir* par exemple L. Brillouin, *Les Statistiques quantiques*, p. 129.

(2) *Voir* par exemple E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Chap. II.

Dans cette dernière formule, remplaçant δP_i par son expression $\partial_j P_i \, \delta x^j$, il vient

$$\delta x^j (dP_j - \partial_j P_i \, dx^i) = 0,$$

et comme les δx^j sont arbitraires, les équations (93) sont bien rétablies comme conséquences de (95).

33. **Théorème de Hamilton. Équation de Jacobi.** — Soient deux points d'Univers (1) et (2) définissant un quadrivecteur du genre temps; ils peuvent appartenir en principe à une trajectoire réellement suivie par le point chargé.

Théorème. — *La trajectoire réelle est caractérisée par le fait qu'elle rend stationnaire l'intégrale d'action.* On a en effet, d'après un calcul de variations classique,

$$(97) \qquad \begin{aligned} \delta \int_1^2 P_i \, dx^i &= \int_1^2 \delta P_i \, dx^i + P_i \, d\,\delta x^i \\ &= (P_i \, \delta x^i)_1^2 + \int_1^2 (\delta P_i \, dx^i - dP_i \, \delta x^i); \end{aligned}$$

la partie tout intégrée est nulle, du fait que les points (1) et (2) sont considérés comme fixes; compte tenu de la définition (94), il est bien clair que la condition hamiltonienne

$$\delta(\Phi_{(2)} - \Phi_{(1)}) = 0$$

est équivalente aux équations du mouvement sous la forme (96).

Prenons maintenant le déplacement $\delta x'_{(1)}$ non plus nul, mais orthogonal à la ligne d'impulsion-énergie, et imposons-nous de satisfaire à la condition de Hamilton; la formule (97) montre que le quadrivecteur $\delta x'_{(2)}$ doit être pour cela orthogonal, lui aussi, à la ligne d'impulsion-énergie. On a donc le *théorème de Maupertuis-Malus généralisé : si la congruence des lignes d'impulsion-énergie* (¹) *admet une trajectoire orthogonale* (tridimensionnelle), *elle en admet une infinité.* Avec L. de Broglie, nous appellerons *hyperondes d'Univers* ces hypersurfaces.

Soit par hypothèse

$$(98) \qquad \Phi(x^1, x^2, x^3, x^4) = \text{const.}$$

(¹) Les lignes d'impulsion-énergie ne coïncident pas avec les trajectoires d'Univers par suite de la présence du terme électromagnétique.

leur équation, qui dépend évidemment des $A_j(\ldots x^i \ldots)$, de la masse propre μ, et de l'hypersurface (1). Comme Φ n'est définie qu'à une fonction de fonction près, nous pouvons choisir son gradient d'Univers égal à P_i, soit

$$\partial_i \Phi = P_i = p_i - QA_i. \tag{99}$$

Par suite, l'équation aux dérivées partielles admettant la solution cherchée s'écrit

$$\sum_{i=1}^{i=4} (\partial_i \Phi + QA_i)^2 = p_j p^j = -(c\mu)^2; \tag{100}$$

c'est l'*équation de Jacobi relativiste,* qui n'est autre qu'une *généralisation à quatre indices de l'équation de l'Optique géométrique.*

34. Équations de Lagrange. — Pour intégrer les équations du mouvement, on peut supposer à priori les P_i et x^i exprimées en fonction d'un paramètre unique η, de sorte que l'action élémentaire s'écrira

$$d\Phi = P_i x'^i \, d\eta = \mathcal{L}(\eta)\, d\eta, \tag{101}$$

avec, par définition de la *fonction de Lagrange* (invariant relativiste),

$$x'^i = \frac{dx^i}{d\eta}, \qquad \boxed{\mathcal{L} = P_i x'^i.} \tag{102}$$

Il est classique de considérer $\mathcal{L}$ comme fonction de η par l'intermédiaire des x^i et des x'^i; désignant par $\partial^i \mathcal{L}$ et $\partial'^i \mathcal{L}$ les dérivées partielles par rapport à ces 8 variables, il vient, d'après un calcul bien connu, et en vertu du théorème de Hamilton

$$\begin{aligned}
\delta \int_1^2 \mathcal{L}\, d\eta &= \int_1^2 (\partial^i \mathcal{L}\, \delta x_i + \partial'^i \mathcal{L}\, \delta x'_i)\, d\eta \\
&= \int_1^2 (\partial^i \mathcal{L}\, \delta x_i \, d\eta + \partial'^i \mathcal{L}\, d\, \delta x_i) \\
&= (\partial'^i \mathcal{L}\, \delta x_i)_1^2 + \int_1^2 \left[\partial^i \mathcal{L} - \frac{d}{d\eta}(\partial'^i \mathcal{L})\right] \delta x_i \, d\eta = 0.
\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, il en résulte les *équa-*

tions de Lagrange sous la « forme paramétrique » de M. de Donder

$$\boxed{\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}.} \tag{103}$$

D'ordinaire, on prend comme paramètre le temps ($\eta = t$) et l'on introduit les trois composantes v^u de la vitesse ainsi que la masse propre μ; on obtient ainsi pour le lagrangien $\mathcal{L}$ l'expression très dissymétrique

$$\mathcal{L} = p_u v^u - mc^2 - Q(A_u v^u - cV) = -\mu c^2 \sqrt{1-\beta^2} - cQ\left[V + \left(\vec{\beta}.\vec{A}\right)\right],$$

au lieu que si l'on prend le *paramètre naturel* $\eta = s = ic\tau$, en introduisant les quatre *cosinus directeurs d'Univers* $\gamma^i = i\dfrac{dx^i}{ds}$, il vient l'expression élégante (¹)

$$\mathcal{L} = (p_i - QA_i)\gamma^i = -(c\mu + QA_i\gamma^i).$$

II. — *La première Mécanique ondulatoire de L. de Broglie.*

35. Les grandes analogies de la Mécanique analytique et de l'Optique géométrique n'échappaient pas aux classiques; elles sont dues à l'existence d'un lien physique dont la formulation, découverte par L. de Broglie en 1924, fait intervenir les constantes universelles h des Quanta et c de la Relativité restreinte (²). Comme application de sa Théorie, L. de Broglie retrouvait la règle de quantification atomique de Bohr; bientôt après, les expériences de diffraction d'électrons et d'autres particules apportaient une vérification directe et de plus en plus précise des conceptions et des formules de l'auteur. Au point de vue théorique, cette première *Mécanique ondulatoire* réalisait un accord vraiment étroit des conceptions quantiques et des conceptions relativistes; c'est ce qui nous incite à terminer notre exposé par un bref rappel de ses principes.

Sur le terrain de l'Optique proprement dite, et dans le cadre de la Relativité restreinte qu'il venait de créer, Einstein avait, en 1905, énoncé le principe d'une synthèse quantique des traditionnelles conceptions « ondulatoire » et « corpusculaire » de la lumière. Il postulait pour cela que l'énergie d'une onde lumineuse, plane et monochromatique de fréquence ν, est transportée à la vitesse c par « quanta » d'énergie $h\nu$; d'après la Relativité, la masse propre de ces « grains de lumière », qu'on devait plus tard appeler photons, ne peut

---

(¹) Une transposition immédiate de cette équation fournit l'équation de Dirac sous la forme symétrique de von Neumann Weyl; on sait en effet que les quatre matrices de von Neumann-Weyl correspondent, *en un certain sens*, aux cosinus directeurs d'Univers (PROCA, *Thèse*, p. 28 et 29). Pour l'équation de von Neumann Weyl, voir L. DE BROGLIE, *L'Électron magnétique*, p. 150.

(²) LOUIS DE BROGLIE, *Recherches sur la Théorie des Quanta* (*Thèse*, Paris, 1924).

alors être que nulle ou négligeable, leur *masse cinétique* étant donnée par la formule

$$(106) \qquad \boxed{mc^2 = h\nu.}$$

Cette formule rendait compte de l'effet photoélectrique nouvellement découvert, ainsi que des lois du rayonnement thermique établies par Planck en 1900; elle allait recevoir des travaux de Bohr une confirmation remarquable (1913).

L'idée fondamentale de L. de Broglie fut que, s'il faut introduire la Mécanique en Optique, inversement l'Optique doit être introduite dans la Mécanique; plus exactement, les deux disciplines doivent être fondues ensemble, de telle manière que la congruence de trajectoires envisagée par la Mécanique analytique apparaisse *aussi* comme une congruence de rayons de l'Optique géométrique. Physiquement, et dans l'Univers de Minkowski, les vecteurs de ces congruences ne sont autres que l'*impulsion-masse inertique* ou *propre* p^i du point matériel (ou du « nuage » de points identiques), et la *fréquence spatio-temporelle* λ^i de l'onde *associée*; la constante quantique h, qui a dimension d'action, permet précisément d'égaler ces deux quadrivecteurs non seulement en direction, mais en grandeur suivant la formule

$$(107) \qquad \boxed{p^i = h\lambda^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).}$$

La définition du quadrivecteur p^i est toujours donnée par les formules (79) du Chapitre III. Par ailleurs, soient L et T la longueur d'onde et la période de l'onde associée, reliées entre elles par la vitesse de propagation w le long des rayons (que nous laissons momentanément indéterminée) d'après la formule

$$\mathrm{L} = w\mathrm{T} = \frac{w}{\nu};$$

le quadrivecteur λ^i ne sera évidemment plus isotrope, mais restera défini par les formules (22) du Chapitre I ($u = 1, 2, 3$)

$$(108) \qquad \lambda^u = \frac{\alpha^u}{\mathrm{L}} = \frac{w^u}{w^2}\nu, \qquad \lambda^4 = \frac{i}{c\mathrm{T}} = \frac{i}{c}\nu.$$

Dans ces conditions, la quatrième des relations (107) redonne la *loi d'Einstein* (106), tandis que les trois premières fournissent la valeur laissée indéterminée de la vitesse w suivant

$$v^u = \frac{w^u}{w^2}c^2;$$

multipliant scalairement les deux membres par w_u, il vient en effet la *loi de Louis de Broglie*

$$(108') \qquad \boxed{vw = c^2,}$$

qui semble au premier abord très paradoxale, puisqu'elle indique que les *ondes matérielles* associées à des corpuscules de vitesse $v < c$ cheminent plus rapidement que la lumière (*ondes supralumineuses*).

Louis de Broglie a levé le paradoxe, en montrant que la *vitesse de groupe* des ondes matérielles n'est autre que v. En effet, la masse propre μ du point restant bien déterminée, imaginons que son *quadrivecteur de propagation* p^i soit affecté d'une certaine *dispersion* $dp^i = h d\lambda^i$, satisfaisant nécessairement à la condition restrictive

$$\lambda_i \, d\lambda^i = 0.$$

En un *point d'Univers* x^i bien déterminé, le déphasage correspondant sera

$$df = x_i \, d\lambda^i;$$

par conséquent, le *déplacement d'Univers* δx_i le plus général tel que ce déphasage soit constant devra satisfaire à la condition

$$\delta(df) = \delta x_i \, d\lambda^i = 0.$$

Pour que cette condition soit satisfaite quelle que soit la dispersion $d\lambda^i$, il faut et suffit que le quadrivecteur δx_i soit colinéaire à p^i. Or, le *groupe* ou *paquet d'ondes* se déplaçant à phase constante par définition même, la propriété annoncée est bien établie.

36. Les équations de base (107) entraînent, pour *l'expression broglienne de la phase* de l'onde associée au corpuscule

$$\boxed{f = \frac{x^j p_j}{h};} \tag{109}$$

formant alors le dalembertien de la fonction

$$\Psi = e^{2i\pi f}, \tag{110}$$

il vient successivement

$$\partial_j \Psi = \frac{2\pi i}{h} p_j \Psi, \qquad \partial_j^j \Psi = -\frac{4\pi^2}{h^2} p^j p_j \Psi,$$

ou encore, en remplaçant le produit scalaire $p^j p_j$ en fonction de la masse propre μ

$$\boxed{\left(\partial_j^j - \frac{4\pi^2}{h^2} c^2 \mu^2\right) \Psi = 0.} \tag{111}$$

Cette équation aux dérivées partielles n'est autre que *l'équation de Gordon* qui régit, en Mécanique ondulatoire relativiste, la propagation d'un corpuscule matériel en *l'absence de champs*. Autrement dit, *cette équation exprime la nouvelle loi d'inertie du point matériel de masse propre* μ, qui est à l'ancienne ce que l'Optique ondulatoire est à l'Optique géométrique. La notion de trajectoire, tout comme celle de rayon lumineux, n'a plus qu'un sens statistique, d'autant plus clair que la longueur d'onde est plus courte; il y a *prévision physique des effets de diffraction* qui ont, comme on sait, été vérifiés sur un grand nombre de particules élémentaires de natures différentes (¹).

En l'absence de champ électromagnétique, le passage de l'ancienne à la nouvelle mécanique consiste à remplacer l'équation du premier ordre (100) par l'équation du second ordre (111); les tentatives faites pour utiliser l'équation (111) complétée d'une manière analogue à (100) ont échoué devant l'expérience, et il a fallu recourir, pour l'électron par exemple, à un système de quatre nouvelles équations du premier ordre (Dirac) (²).

BIBLIOGRAPHIE.

P. APPELL. — *Traité de Mecanique rationnelle*, tome V : *Éléments de Calcul tensoriel* (Gauthier-Villars, 1933).

L. BRILLOUIN. — *Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité* (Paris, 1938).

E. CARTAN. — *Leçons sur les Invariants intégraux* (Paris, 1922).

A. EINSTEIN. — *L'Ether et la Théorie de la Relativité* (trad. M. Solovine; Gauthier-Villars, 1921).

— *Quatre conférences sur la Theorie de la Relativité* (trad. M. Solovine; Gauthier-Villars, 1925).

— *Sur l'Électrodynamique des corps en mouvement* (trad. M. Solovine; Gauthier-Villars, 1925).

— *La Géométrie et l'Expérience* (trad. M. Solovine; Gauthier-Villars, 1934).

J. BECQUEREL. — *Le Principe de la Relativité et le Principe de la Gravitation* (Gauthier-Villars, 1922).

M. VON LAUE. — *La Théorie de la Relativité*. Tome I : *Le Principe de Relativité de la Transformation de Lorentz*; Tome II : *Le Principe de Relativité généralisée de la Théorie de la Gravitation d'Einstein* (trad. G. Létang, Gauthier-Villars, 1924 et 1926).

TH. DE DONDER. — *Introduction à la Gravifique einsteinienne* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. A VIII; Gauthier-Villars, 1925).

— *Théorie invariantive du Calcul des Variations* (Gauthier Villars, 1935; nouvelle édition).

L. DE BROGLIE. — *Recherches sur la Théorie des Quanta* (*Thèse*, Paris, 1924).

— *Introduction à l'Étude de la Mécanique ondulatoire* (Paris, 1930).

— *Conséquences de la Relativité dans le Développement de la Mécanique ondulatoire* (Paris, 1932).

(¹) Le nouvel *indéterminisme quantique* est lié au fait que la notion de *corpuscule* subsiste alors que celle de *trajectoire* disparaît.

(²) *Voir* par exemple LOUIS DE BROGLIE, *L'Électron Magnétique*.

TABLE DES MATIÈRES