MAURICE JANET

Équations intégrales et applications à certains problèmes de la physique mathématique

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 101-102 (1941)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1941__101-102__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULES CI ET CII

Équations intégrales et applications à certains problèmes de la physique mathématique

Par M. Maurice JANET,
Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1941

AVANT-PROPOS

Le présent fascicule est la reproduction d'un cours fait à des étudiants n'ayant que des connaissances générales de Calcul Différentiel et Intégral. Cette origine expliquera certains caractères de sa rédaction, en particulier les détails que j'ai donnés en bien des endroits. J'ai préféré laisser à ce cours son aspect primitif, m'étant convaincu, par ce qu'on m'en a dit, qu'une initiation de ce genre pouvait rendre des services. Je dois beaucoup à l'Ouvrage fondamental d'Hilbert et Courant. On se reportera à cet Ouvrage et à celui de MM. Volterra et Pérès pour un développement complet de la théorie, et l'on ne cherchera ici ni bibliographie étendue, ni étude complète des divers aspects des problèmes soulevés : je m'interdis, par exemple, de parler de l'intégrale de Lebesgue, si utile dans ce genre de questions. Je remercie M. H. Villat et la maison Gauthier-Villars d'avoir bien voulu accueillir ce petit livre dans la série des fascicules du *Mémorial des Sciences mathématiques*. Je remercie aussi M. Deperrois, professeur au lycée Pasteur, qui avait recueilli mon cours et dont la collaboration m'a été précieuse.

ÉQUATIONS INTÉGRALES

ET

APPLICATIONS A CERTAINS PROBLÈMES

DE LA

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Par M. Maurice JANET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

INTRODUCTION.

1. Cet exposé comprendra l'étude de certaines questions posées par la Physique mathématique, qui conduisent à des équations *linéaires* (différentielles ou « intégrales »).

Si l'on connaît deux solutions d'une telle équation supposée homogène ([1]), on en obtient une autre en faisant leur somme.

D'une manière plus générale, soient u_1, u_2, ..., u_n, n solutions particulières, l'expression

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n$$

où les C sont des constantes, sera encore une solution.

Dans le cas où l'on connaît une infinité de solutions

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

on sera tenté de considérer la somme

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n + \ldots,$$

([1]) Autrement dit, suivant l'usage, « sans second membre ».

où les C_n sont des constantes, comme une solution (à condition bien entendu qu'elle soit convergente), et il en sera ainsi dans des cas très généraux.

On pourra être conduit à rechercher si les constantes permettent de satisfaire aux « conditions initiales » et aux « conditions aux limites », ce qui posera le problème du développement d'une fonction arbitraire en série de fonctions données.

Dans certains cas d'ailleurs, la suite des fonctions devant servir à un tel développement s'imposera d'elle-même dans la question traitée. Par exemple, le problème des *cordes vibrantes homogènes* amène naturellement aux développements en *séries trigonométriques*.

FORMES QUADRATIQUES.

2. On appelle forme quadratique à n variables tout polynome homogène du second degré par rapport à l'ensemble de ces n variables.

Exemple :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \qquad (a,\ b,\ c \text{ constantes}).$$

Nous n'introduirons que des éléments réels.

Étant donné l'équation d'une conique, on sait que l'on peut, par une rotation des axes (supposés rectangulaires), la simplifier et ramener l'ensemble des termes du second degré à ne contenir que des termes carrés; on est d'ailleurs conduit, dans le cas des équations à coefficients réels, à la distinction algébrique des courbes du genre ellipse, hyperbole, parabole.

Plus généralement nous allons montrer que l'on peut toujours, par une *substitution orthogonale* à coefficients réels, transformer une forme quadratique à coefficients réels en une autre ne contenant *que des termes carrés*.

Considérons la transformation

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{array} \right.$$

où les a_{hk} sont des constantes données.

Nous supposerons essentiellement que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro et nous écrirons sous forme abrégée

$$\Delta = \| a_{hk} \| \neq 0;$$

cette supposition permettra de faire correspondre à *tout* système de valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ un système de valeurs pour $y_1, y_2, \dots, y_n$ (et un seul).

Nous dirons qu'une substitution linéaire (1) est *orthogonale* si l'on a l'*identité*

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2; \tag{2}$$

on dit alors que la forme $x_1^2 + \dots + x_n^2$ est invariante par la substitution. Les transformations de coordonnées rectangulaires donnent lieu à de telles substitutions.

Cherchons à quelles conditions doivent satisfaire les a_{hk} pour qu'il en soit ainsi. On doit avoir

$$\left(\sum_{k=1}^{k=n} a_{1k} y_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{k=n} a_{2k} y_k\right)^2 + \dots + \left(\sum_{k=1}^{k=n} a_{nk} y_k\right)^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2,$$

quels que soient les y_i, et, par suite,

1°

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{ni}^2 = \sum_\lambda a_{\lambda i}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

2°

$$a_{1p} a_{1r} + a_{2p} a_{2r} + \dots + a_{np} a_{nr} \equiv \sum_\lambda a_{\lambda p} a_{\lambda r} = 0$$
$$(p \neq r;\ p, r = 1, 2, \dots, n).$$

Nous résumerons ces conditions en écrivant

$$\begin{cases} \sum_\lambda a_{\lambda p} a_{\lambda r} = 0, & \text{si } p \neq r, \\ \sum_\lambda a_{\lambda p} a_{\lambda r} = 1, & \text{si } p = r. \end{cases} \tag{3}$$

Remarque. — Si un système de n^2 nombres satisfait à ces conditions, le déterminant Δ de la transformation est différent de zéro. En effet, si l'on forme son carré, on trouve, en tenant compte des relations précédentes, 1 comme valeur des éléments de la diagonale principale, tous les autres étant nuls. On a donc

$$\Delta^2 = 1, \qquad \text{d'où} \quad \Delta = \pm 1.$$

Le double signe correspond, dans le cas des changements d'axes, aux deux sens relatifs possibles des deux « trièdres » de coordonnées.

Formons la substitution inverse de la substitution précédente. Pour cela multiplions les deux membres de chaque équation par a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1} successivement et ajoutons. En utilisant les conditions trouvées (3) on obtient

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} y_1 = a_{11}\,x_1 + a_{21}\,x_2 + \ldots + a_{n1}\,x_n, \\ y_2 = a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{n2}\,x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{array}\right.$$

la « matrice » de la substitution inverse provient de la « matrice » primitive par échange des lignes et des colonnes.

Autres conséquences. Remplaçons les y par leurs expressions dans l'identité

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

un calcul analogue au précédent nous donnera

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \sum_\lambda (a_{p\lambda})^2 = 1 & (p = 1, 2, \ldots, n), \\ \sum_\lambda a_{q\lambda} a_{r\lambda} = 0 & (q \neq r;\ q, r = 1, 2, \ldots, n), \end{array}\right.$$

les conditions (5) sont donc des conséquences des conditions (3) et inversement.

Notation abrégée. — Nous représenterons d'une manière générale

$$x_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n$$

par $\sum_\lambda a_{i\lambda}y_\lambda$, et dans les questions où interviennent des sommations relatives à un indice répété deux fois dans un monome, nous conviendrons de supprimer le signe Σ. Nous écrirons donc

$$x_i = a_{i\lambda} y_\lambda \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Avec cette convention les conditions (3) s'écriront

$$a_{\lambda p} a_{\lambda r} = 0 \qquad (p \neq r),$$
$$a_{\lambda p} a_{\lambda r} = 1 \qquad (p = r)$$

(indiquer les indices p et r pour éviter les confusions dans le cas où $p = r$).

3. Démontrons maintenant le fait annoncé, à savoir qu'une forme quadratique à n variables à coefficients réels peut toujours être ramenée par une *substitution linéaire orthogonale* à une forme quadratique ne contenant pas de termes rectangles.

Soit la forme

$$K(x_1, x_2) = k_{11} x_1^2 + k_{12} x_1 x_2 + k_{21} x_2 x_1 + k_{22} x_2^2$$

à deux variables, où $k_{12} = k_{21}$.

Traçons le cercle de centre o et de rayon 1. Pour tous ses points on a la relation

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

et en chacun des points de cette circonférence la forme quadratique a une valeur bien déterminée qui est une fonction continue du point (on pourrait prendre, suivant les points, x_1 ou x_2 comme variable indépendante).

Cette fonction, *continue sur un ensemble fermé*, atteint sa borne supérieure S_1 en un point au moins, soient $x_1 = a_{11}$, $x_2 = a_{12}$ les coordonnées d'un tel point A. Considérons la perpendiculaire au vecteur OA et choisissons arbitrairement l'un de ses deux points d'intersection avec le cercle. Soient a_{21}, a_{22} les coordonnées d'un tel point. On a

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1,$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$$

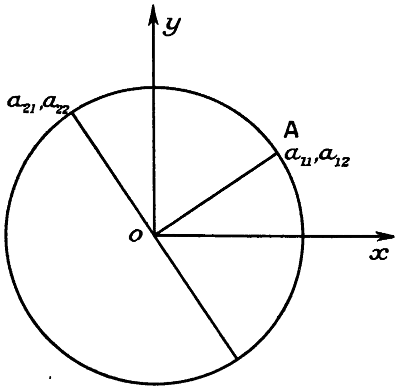
et

$$a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} = 0.$$

Nous avons ainsi les coefficients d'une substitution linéaire et orthogonale

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2,$$
$$x_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2.$$

Fig. 1.



La fonction $K(x_1, x_2)$ se transforme en une nouvelle forme quadratique

$$C_{11}y_1^2 + 2C_{12}y_1y_2 + C_{22}y_2^2,$$

pour laquelle $C_{12} = 0$ comme nous allons le montrer.

La différence

$$K(x_1, x_2) - S_1(x_1^2 + x_2^2)$$

est négative ou nulle quels que soient x_1, x_2. En effet, *sur la circonférence de centre* o *et de rayon* 1, nous avons

$$K(x_1, x_2) - S_1 \leqq 0.$$

Le cas général se ramène à ce cas particulier. Soit x_1, x_2 un système de valeurs non toutes deux nulles. Déterminons ρ de manière que le point

$$X_1 = \rho x_1, \qquad X_2 = \rho x_2$$

appartienne à la circonférence, ce qui est possible puisque

$$x_1^2 + x_2^2 \neq 0.$$

Sur le cercle nous avons

$$k_{11}X_1^2 + 2k_{12}X_1X_2 + k_{22}X_2^2 - S_1(X_1^2 + X_2^2) \leqq 0;$$

en multipliant par $\frac{1}{\rho^2}$, nous trouvons

$$K(x_1, x_2) - S_1(x_1^2 + x_2^2) \leqq 0.$$

Quels que soient y_1 et y_2, on aura donc toujours

$$C_{11} y_1^2 + 2 C_{12} y_1 y_2 + C_{22} y_2^2 - S_1(y_1^2 + y_2^2) \leqq 0.$$

D'ailleurs pour $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $K(x_1, x_2) = S_1$, ce qui donne $C_{11} = S_1$, il reste donc

$$2 C_{12} y_1 y_2 + C_{22} y_2^2 - S_1 y_2^2 \leqq 0$$

ou

$$y_2[2 C_{12} y_1 + (C_{22} - S_1) y_2] \leqq 0;$$

si C_{12} *était différent de zéro*, le premier membre changerait de signe quand y_2 traverserait la valeur zéro (y_1 étant fixe et différent de zéro). Par conséquent $C_{12} = 0$ et de plus $C_{22} \leqq S_1$; la forme en y se réduit à

$$S_1 y_1^2 + S_2 y_2^2 \qquad \text{avec} \quad S_1 \geqq S_2.$$

Il peut arriver que S_1 et S_2 soient égaux, ou que S_2 soit nul. Dans le cas où les deux nombres sont différents de zéro et de même signe, on dit que la forme quadratique est *définie* (positive si S_1 et $S_2 > 0$, négative si S_1 et $S_2 < 0$).

Considérons maintenant la forme quadratique *à trois variables*

$$K(x_1, x_2, x_3) = k_{11} x_1^2 + k_{22} x_2^2 + k_{33} x_3^2 + 2 k_{23} x_2 x_3 + \ldots$$

et ses valeurs sur la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine. On aura

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Sur cet ensemble borné et fermé, $K(x_1, x_2, x_3)$ atteint sa borne supérieure S_1 en un ou plusieurs points. Soient a_{11}, a_{12}, a_{13} les coordonnées d'un tel point A ou $K(x_1, x_2, x_3) = S_1$.

Considérons maintenant le plan perpendiculaire au vecteur OA et son intersection Γ avec la sphère, qui est un grand cercle. Ce plan a pour équation

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0.$$

Sur ce grand cercle $K(x_1, x_2, x_3)$ atteint son maximum S_2, en un point B au moins, de coordonnées

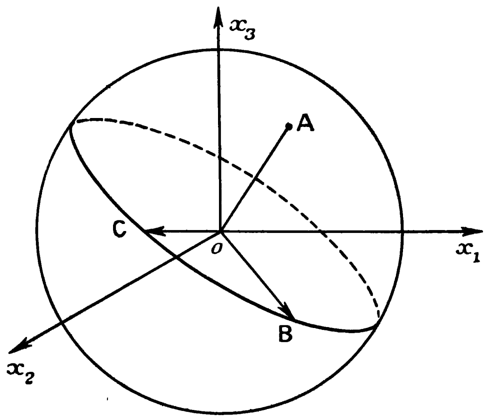
$$a_{21}, \quad a_{22}, \quad a_{23},$$

soit $\overrightarrow{OC}$ un troisième vecteur orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, de projections a_{31}, a_{32}, a_{33} le tableau des a satisfait à toutes les conditions requises pour un tableau de substitution orthogonale

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3, \\ x_2 &= a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3, \\ x_3 &= a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3. \end{aligned}$$

Nous vérifierons que cette transformation fait disparaître les termes

Fig. 2.



rectangles de la forme quadratique $K(x_1, x_2, x_3)$, qui prendra la forme

$$S_1 y_1^2 + S_2 y_2^2 + S_3 y_3^2, \qquad \text{où} \quad S_1 \geqq S_2 \geqq S_3.$$

Plus généralement, nous allons étudier *le cas de n variables* x_1, x_2, ... x_n et suivre une méthode analogue. Les nombres S que nous allons déterminer ont une signification importante. Ils sont liés très simplement dans certains problèmes de géométrie aux *longueurs des axes d'une quadrique*, dans certains problèmes de mécanique aux «*périodes propres* » d'un système matériel dépendant de n paramètres.

Soit une forme quadratique à n variables

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k_{11}x_1^2 + k_{22}x_2^2 + \ldots + 2k_{12}x_1x_2 + \ldots$$

et ses valeurs sur la sphère de rayon 1

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Sur cet ensemble borné, et fermé la fonction $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ atteint sa borne supérieure S_1 en un point au moins, A par exemple, de coordonnées $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$.

La différence

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) - S_1(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \leqq 0$$

est négative ou nulle sur la sphère. Il en est de même pour tout système de valeurs, puisque le premier membre de l'inégalité est homogène.

Assujettissons le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à être non seulement sur la sphère, mais aussi dans le plan

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0.$$

La multiplicité M_{n-2} sera constituée par les points dont les coordonnées satisfont aux relations

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0;$$

sur ce domaine borné et fermé, K atteint son maximum S_2 en un point au moins B de coordonnées $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ et l'on sait que $S_1 \geqq S_2$.

Une fois ce point fixé, assujettissons le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de la multiplicité M_{n-2} à la condition

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,$$

ce qui donne au total une multiplicité à $n - 3$ dimensions, soit M_{n-3}.

Sur cette multiplicité à M_{n-3} dimensions, K atteint son maximum S_3 en un point au moins, soient $a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{3n}$ les coordonnées d'un tel point.

En continuant ainsi nous parvenons à un tableau carré de nombres

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

C'est ce tableau carré que nous utiliserons pour définir la transformation linéaire orthogonale (en échangeant toutefois les lignes et les colonnes).

Nous poserons

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{n1}y_n, \\ x_2 &= a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{n2}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Cette substitution est orthogonale, car

$$\sum_\lambda a_{p\lambda}^2 = 1,$$

$$\sum_\lambda a_{q\lambda}a_{r\lambda} = 0 \qquad (q \neq r).$$

La fonction $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se transforme en $C(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv C(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

ou, en explicitant le second membre,

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv C_{11}y_1^2 + C_{22}y_2^2 + \ldots + 2C_{12}y_1y_2 + \ldots.$$

Nous allons voir que *les termes rectangles disparaissent.*

L'inégalité

$$C(y_1, y_2, \ldots, y_n) - S_1(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \leqq 0$$

est vérifiée quels que soient les y_i. Au point A de coordonnées $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$, obtenu pour $y_1 = 1, y_2 = y_3 = \ldots = y_n = 0$, la forme $C(y_1, \ldots, y_n)$ se réduit à S_1, par conséquent

$$C_{11} = S_1,$$

le terme en y_1^2 disparaît alors du premier membre de l'inégalité. Vérifions que y_1 ne figure pas dans ce premier membre. Considérons par exemple le terme en $y_1 y_2$ de la différence

$$C(y_1, y_2, \ldots, y_n) - S_1(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \leqq 0.$$

Posons $y_3 = y_4 = \ldots = y_n = 0$, y_1 et y_2 restant arbitraires, il reste

$$2C_{12}y_1y_2 + C_{22}y_2^2 - S_1y_2^2 \leqq 0$$

que l'on peut écrire

$$y_2(2C_{12}y_1 + C_{22}y_2 - S_1y_2) \leqq 0,$$

quels que soient y_1 et y_2. Faisons $y_1 = 1$. Si C_{12} était $\neq 0$, l'expression changerait de signe quand y_2 traverserait la valeur zéro. De même $C_{13} = 0$, etc.; $C(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est alors identique à une expression de la forme

$$S_1 y_1^2 + C_1(y_2, \ldots, y_n)$$

et la différence

$$C(y_1, y_2, \ldots, y_n) - S_1(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$$

se réduit à

$$C_1(y_2, \ldots, y_n) - S_1(y_2^2 + \ldots + y_n^2) \leqq 0,$$

quels que soient les $y_2, \ldots, y_n$.

Considérons maintenant ce qui se passe sur la multiplicité M_{n-2} définie par les conditions

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = 0.$$

Sur cette multiplicité M_{n-2}, la forme $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ atteint sa borne supérieure S_2 en un point au moins, de coordonnées

$$a_{21}, \quad a_{22}, \quad \ldots, \quad a_{2n},$$

auxquelles correspondent pour les y les valeurs

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 1, \qquad y_3 = y_4 = \ldots = y_n = 0;$$

il en résulte $C_{22} = S_2$.

D'autre part, on a sur cette multiplicité

$$C_1(y_2, \ldots, y_n) - S_2(y_2^2 + \ldots + y_n^2) \leqq 0.$$

En raisonnant comme précédemment on montre que la forme $C_1(y_2, \ldots, y_n)$ ne contient pas de termes rectangles en y_2. On pourra donc écrire

$$C_2 = S_2 y_2^2 + C_2(y_3, y_4, \ldots, y_n)$$

et ainsi de suite.

La forme $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ après la substitution se réduit donc à

$$K(y_1, y_2, \ldots, y_n) = S_1 y_1^2 + S_2 y_2^2 + \ldots + S_n y_n^2,$$

où les S_i vérifient les inégalités

$$S_1 \geqq S_2 \geqq \ldots \geqq S_n.$$

Si l'un au moins des S est nul, la forme est dite dégénérée. Si tous les S sont de même signe, la forme est dite définie (positive si les S sont tous positifs, négative dans le cas contraire).

Remarque. — Considérons les demi-dérivées premières d'une forme quadratique. Le déterminant formé par leurs coefficients est appelé discriminant de la forme. Si l'on fait une substitution $x_p = \alpha_{pq} y_q$, le discriminant de la forme quadratique en (y) obtenue est égal au discriminant primitif multiplié par le carré du déterminant α_{pq} de la substitution. Admettons ce résultat (¹). Il en résulte que si la substitution est orthogonale, le nouveau discriminant est égal à l'ancien. Appliquons ce résultat à la forme

$$S(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - K(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

qui, par la substitution $x_p = a_{qp} y_q$, devient

$$S(y_1^2 + \ldots + y_n^2) - (S_1 y_1^2 + \ldots + S_n y_n^2).$$

On en déduit l'identité

$$\begin{vmatrix} S - K_{11} & -K_{12} & \ldots & -K_{1n} \\ -K_{21} & S - K_{22} & \ldots & -K_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ -K_{n2} & \ldots\ldots\ldots & \ldots & S - K_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S - S_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & S - S_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & S - S_3 & \ldots \\ . & . & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

Ainsi le déterminant

$$\begin{vmatrix} S - K_{11} & -K_{12} & \ldots \\ -K_{21} & S - K_{22} & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

est égal au produit de n facteurs $(S - S_h)$, où *tous les* S_h *sont réels.*

Nous nous trouvons avoir démontré ce résultat important : « l'équation en S » formée avec les nombres réels K d'un tableau carré symétrique a toutes ses racines réelles.

On voit d'autre part que, si par un changement linéaire orthogonal, on a mis K sous la forme $T_1 z_1^2 + T_2 z_2^2 + \ldots + T_n z_n^2$ où $T_1 \geqq T_2 \geqq \ldots \geqq T_n$, *les* T *sont respectivement égaux aux* S.

(¹) Qui est d'ailleurs démontré plus loin (nº 16).

4. On a vu la définition du premier S_1 des nombres S. C'est le maximum de K sur la sphère $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$. On va donner la définition de S_2, *sans avoir à passer par l'intermédiaire de* S_1.

Assujettissons $x_1, x_2, \ldots, x_n$, toujours sur la sphère de rayon 1, à la relation $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0$, *où les a sont des constantes données.*

1° Je dis que pour un système de valeurs des x au moins satisfaisant à cette relation, K est $\geqq S_2$. En passant aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, la relation entre les x devient une relation $b_1y_1+\ldots+b_ny_n=0$. Pour rendre $S_1y_1^2+\ldots+S_ny_n^2\geqq S_2$, il suffira de prendre

$$y_3=y_4=\ldots=y_n=0 \qquad \text{et} \qquad b_1y_1+b_2y_2=0,$$

ce qui est sûrement compatible avec $y_1^2+y_2^2=1$; la relation imposée sera vérifiée et de plus $S_1y_1^2+S_2y_2^2+\ldots+S_ny_n^2$ se réduira à

$$S_1y_1^2+S_2y_2^2\geqq S_2(y_1^2+y_2^2)=S_2.$$

On peut donc affirmer que sur la multiplicité à $n-2$ dimensions $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$ *le maximum de* K *est* $\geqq S_2$.

2° Il y a un choix particulier des a pour lequel le maximum est effectivement S_2. Il suffit de poser $y_1=0$: la relation correspondante entre les x répond à la question, puisque

$$S_2y_2^2+\ldots+S_ny_n^2\leqq S_2.$$

Ainsi :

Théorème. — S_2 *est le minimum des maxima de* K *quand on assujettit les x à* une *relation linéaire au plus, et que l'on fait varier de toutes les manières possibles cette relation.*

On a une définition analogue pour S_3, c'est le minimum des maxima de K quand on assujettit les x à un système de deux relations linéaires au plus, et que l'on fait varier de toutes les manières possibles ce système de relations, etc.

5. Transformation simultanée de deux formes quadratiques. — Considérons deux formes quadratiques $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la première étant définie positive, ce qui signifie que $H(x_1, \ldots, x_n)$ prend des valeurs toujours positives sauf pour

$$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n=0.$$

Je dis qu'on peut, par une substitution linéaire, faire en sorte que H et K prennent respectivement les formes

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2,$$
$$S_1y_1^2+S_2y_2^2+\ldots+S_ny_n^2.$$

On a traité précédemment le cas où $H=x_1^2+\ldots+x_n^2$. Si l'on n'est pas dans ce cas, commençons par ramener $H(x_1, \ldots, x_n)$ à la forme $y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$ par une substitution *linéaire* (non nécessairement orthogonale). C'est possible (*voir* les cours d'Algèbre ou de Géométrie analytique). Appliquons ensuite la méthode indiquée plus haut. Le produit des deux substitutions linéaires donne une substitution répondant à la question.

Supposons, d'une manière un peu plus générale, que nous ayons trouvé une substitution linéaire qui transforme $H(x_1, x_2\ldots x_n)$ et $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en expressions sans termes rectangles

$$a_1y_1^2+a_2y_2^2+\ldots+a_ny_n^2,$$
$$b_1y_1^2+b_2y_2^2+\ldots+b_ny_n^2.$$

En appliquant à la forme SH — K le résultat indiqué plus haut au sujet du discriminant des formes quadratiques, on trouve

$$\begin{vmatrix} Sh_{11}-k_{11} & Sh_{12}-k_{12} & \ldots & Sh_{1n}-k_{1n} \\ Sh_{21}-k_{21} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & & \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} Sa_1-b_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & Sa_2-b_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & Sa_3-b_3 & & \end{vmatrix}$$

où λ est indépendant de S.

On voit que les nombres $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}$ sont indépendants de la substitution choisie (à l'ordre près) et sont les zéros du déterminant

$$\| Sh_{pq}-k_{pq} \|.$$

OSCILLATIONS LINÉAIRES.

6. Les formes quadratiques se rencontrent dans beaucoup de problèmes de Mécanique et de Physique; nous allons donner une idée de la manière dont elles interviennent.

Problème I. — *Mouvement d'un point sur une droite, le point étant attiré par un point* O *de cette droite proportionnellement à la distance.*

Soit m sa masse, x l'abscisse $\overline{\mathrm{OM}}$, l'équation du mouvement s'écrit

$$mx'' + kx = 0 \qquad (k \text{ const. positive donnée}).$$

L'intégrale générale est la fonction $x = \mathrm{A}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right)$, où t désigne le temps. La période a pour valeur

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Reprenons l'équation $mx'' + kx = 0$ et multiplions ses deux membres par x', une intégration donne

$$\frac{1}{2}mx'^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \mathrm{C},$$

C étant une constante. Le premier membre est constant au cours du mouvement. C'est la somme de l'*énergie cinétique* et de l'*énergie potentielle*, *forme quadratique en* x, x'.

Problème II. — *Décharge d'un condensateur.*

Supposons la résistance négligeable et écrivons les équations de la décharge. Soit L le cofficient de self-induction, i l'intensité du courant comptée positivement si dans le fil le courant va de A vers B, Q la charge de la face A du condensateur, C sa capacité, V le potentiel

$$\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B} - \mathrm{L}\frac{di}{dt} = 0, \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{C}(\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B}) \qquad \text{et} \qquad i = -\frac{d\mathrm{Q}}{dt};$$

en éliminant $\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B}$, on obtient

$$\mathrm{LQ''} + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C}} = 0,$$

équation analogue à la précédente. On trouvera comme période des oscillations

$$2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}.$$

Multiplions par Q' et intégrons; nous obtenons

$$\frac{1}{2}\mathrm{LQ'^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{C}}\mathrm{Q^2} = \text{const.}$$

Autrement dit la somme de l'*énergie électromagnétique* et de l'*énergie électrostatique*, forme quadratique en Q, Q', est constante.

Ces deux problèmes n'introduisent qu'un paramètre. On peut considérer des problèmes analogues à deux, trois, n paramètres.

Cas général. — Considérons un système à n paramètres q_1, $q_2, \ldots, q_n$ à liaisons indépendantes du temps. Supposons que l'*énergie cinétique* du système soit une forme quadratique, à coefficients constants. des dérivées des paramètres par rapport au temps, soit $T = a_{hk} q'_h q'_k$ où les a_{hk} sont des constantes.

D'autre part supposons que l'*énergie potentielle* soit une forme quadratique de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, soit

$$U = b_{hk} q_h q_k,$$

où les b_{hk} sont des constantes.

Ces conditions sont fréquemment réalisées. Exemple : Étude des petits mouvements d'un système autour d'une position P d'équilibre stable (par exemple point pesant mobile sans frottement sur une surface à plan tangent en P horizontal, concave vers le haut). En un tel point les dérivées premières de l'énergie potentielle s'annulent; si les mouvements sont *petits*, l'énergie potentielle se réduit aux termes du second degré. (On prend bien entendu zéro pour valeur de l'énergie potentielle en P). En général, les a_{hk} dans l'expression de T seront des fonctions des q, mais si le système reste au voisinage d'une position P, on assimile les a_{hk} aux valeurs qu'ils ont en P.

Remarquons que l'énergie cinétique

$$T = \Sigma a_{hk} q'_h q'_k$$

est toujours une forme définie positive. Dans le cas que nous considérons, U sera aussi une forme quadratique définie positive.

Ecrivons les équations de Lagrange (simplifiées en tenant compte des hypothèses faites),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_h}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_h},$$

on obtient

$$(a_{h1} q'_1 + a_{h2} q'_2 + \ldots + a_{hn} q'_n)' = -(b_{h1} q_1 + b_{h2} q_2 + \ldots + b_{hn} q_n)$$

ou, en mettant tous les termes dans le premier membre,

$$(a_{h1} q'_1 + a_{h2} q'_2 + \ldots + a_{hn} q'_n)' + b_{h1} q_1 + b_{h2} q_2 + \ldots + b_{hn} q_n = 0.$$

On peut, par une substitution linéaire, ramener les deux formes T et U, la première à être une somme de carrés, la seconde à ne pas contenir de termes rectangles.

La substitution sera de la forme

$$q_h = \lambda_{h1} Q_1 + \lambda_{h2} Q_2 + \ldots + \lambda_{hn} Q_n,$$

les λ étant des constantes. Si l'on prend les dérivées par rapport au temps, on obtient

$$q'_h = \lambda_{h1} Q'_1 + \lambda_{h2} Q'_2 + \ldots + \lambda_{hn} Q'_n.$$

mêmes coefficients, par conséquent.

Avec ces nouveaux paramètres, on aura

$$\begin{aligned} T &= (Q'_1)^2 + (Q'_2)^2 + \ldots + (Q'_n)^2, \\ U &= S_1 Q_1^2 + S_2 Q_2^2 + \ldots + S_n Q_n^2. \end{aligned}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent plus simplement : on obtient

$$Q''_1 + S_1 Q_1 = 0, \qquad Q''_2 + S_2 Q_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad Q''_n + S_n Q_n = 0.$$

Les paramètres seront fournis séparément par des équations

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_1 \sin(S_1 t + \varphi_1), \\ Q_2 &= A_2 \sin(S_2 t + \varphi_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_n &= A_n \sin(S_n t + \varphi_n). \end{aligned}$$

Imaginons un mouvement où Q_1 varie, les autres paramètres restant nuls; on obtient un mouvement *périodique simple*. C'est ce que l'on appelle *une vibration principale*. Sa période est une *période propre*.

Tout mouvement du système est la superposition de tels mouvements simples.

Considérons maintenant une vibration principale en coordonnées (q)

$$q_1 = \lambda_{11} Q_1(t), \qquad q_2 = \lambda_{21} Q_1(t), \qquad \ldots,$$

le *rapport* de deux coordonnées quelconques est *indépendant du temps*.

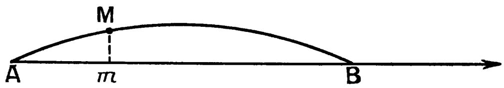
Réciproquement on démontre qu'un mouvement du système pour lequel le rapport de deux coordonnées quelconques q_h est indépendant du temps *est une vibration principale* du système.

Du cas d'un système à un nombre fini de paramètres, passons à celui d'un système dépendant d'une infinité de paramètres, en nous bornant au cas le plus simple, cas typique qui sert de modèle à beaucoup d'autres, celui des cordes vibrantes.

CORDES VIBRANTES.

7. Vibrations transversales d'une corde homogène. — On pourrait procéder de la manière suivante : partager la corde supposée homogène en un certain nombre de parties égales, chaque segment étant affecté de la même masse; on aurait un système dépendant

Fig. 3.



d'un nombre fini de paramètres. Pour ce système, dans certains mouvements spéciaux, les q varient synchroniquement, ce sont les « mouvements propres »; on passerait ensuite à la limite.

Mais nous allons procéder directement. Considérons la corde et l'un de ses points M dont le déplacement sera d'une part fonction de l'abscisse, d'autre part fonction du temps, soit $u(x, t)$ cette fonction.

Au lieu de chercher une infinité de fonctions de t, $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)$, nous aurons à déterminer une seule fonction de *deux* variables x, t.

Cette fonction satisfait à une équation aux dérivées partielles (qui remplacera une infinité d'équations différentielles).

En supposant la corde sans raideur et en négligeant les forces extérieures, on trouve

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où μ est la masse par unité de longueur et τ la tension.

Si nous posons $a^2 = \frac{\tau}{\mu}$, a aura les dimensions d'une vitesse.

La fonction u devra satisfaire à d'autres conditions :

1° Les *conditions aux limites*, qui expriment, par exemple, que la corde est fixée aux deux bouts, ou liée à l'un élastiquement et fixée à l'autre, etc.

2° Les *conditions initiales*, qui expriment qu'à l'instant initial $t = 0$ on connaît, pour chaque valeur de x, u et $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Sans nous préoccuper pour le moment de ces dernières conditions, nous allons chercher un mouvement particulier où les différentes parties de la corde vibrent synchroniquement.

Précédemment, on avait posé

$$q_1 = h_1 Q_1(t), \qquad q_2 = h_2 Q_2(t), \qquad \ldots,$$

en suivant la même idée nous rechercherons une solution u de la forme XT, où X est une fonction de x seul et T une fonction de t seul. On trouve

$$XT'' = a^2 X'' T, \qquad \text{d'où} \quad \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = k,$$

k étant une constante, puisqu'elle ne dépend ni de x ni de t. X doit satisfaire à une équation de la forme

$$X'' - kX = 0.$$

Utilisons maintenant les *conditions aux limites* les plus simples : la corde sera supposée fixée aux deux extrémités, u sera nul quel que soit t pour $x = 0$ et $x = L$, L étant la longueur AB de la corde, il en résulte que

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0.$$

Si $k > 0$, une intégrale nulle pour $x = 0$ et pour $x = L$ est *identiquement nulle.*

Si $k < 0$, posons $-k = h^2$, l'équation s'écrit

$$X'' + h^2 X = 0,$$

dont l'intégrale générale est de la forme

$$A \cos hx + B \sin hx;$$

les conditions $X(0) = X(L) = 0$ donnent ici

$$A = 0, \qquad \sin hL = 0,$$

d'où

$$hL = n\pi, \qquad h = \frac{n\pi}{L},$$

on a une infinité de valeurs pour h, soient

$$\frac{\pi}{L}, \quad \frac{2\pi}{L}, \quad \ldots, \quad \frac{n\pi}{L}, \quad \ldots$$

(les valeurs négatives pour n ne donneraient pas des solutions distinctes des précédentes). On en déduit ensuite pour T l'équation

$$L^2 T'' + n^2 a^2 \pi^2 T = 0.$$

La fonction T est donc de la forme

$$\alpha \cos n\pi \frac{a}{L} t + \beta \sin n\pi \frac{a}{L} t;$$

finalement la fonction $u(x, t)$ se mettra sous la forme

$$\sin n\pi \frac{x}{L} \left(\alpha \cos n\pi \frac{at}{L} + \beta \sin n\pi \frac{at}{L} \right),$$

avec deux constantes arbitraires une fois n fixé. Si n varie on obtiendra une infinité de solutions. α_n et β_n étant des constantes, on est naturellement amené à considérer la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \left(\alpha_n \cos \frac{na\pi}{L} t + \beta_n \sin \frac{na\pi}{L} t \right);$$

en admettant qu'elle soit convergente et aussi qu'elle puisse être dérivée jusqu'au second ordre inclus, sa somme sera solution de l'équation proposée. De plus, par le choix des α_n et β_n, on pourra chercher à satisfaire aux *conditions initiales* (on a déjà satisfait aux conditions aux limites).

Pour satisfaire aux conditions initiales, on demandera :

1° Que pour $t = 0$ la fonction cherchée $u(x, t)$ soit égale à une fonction donnée de x;

2° Que les dérivées des déplacements aient des valeurs données. En d'autres termes $u(x, 0)$ et $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$ prennent des valeurs $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ données à l'avance, on sera amené à « développer ces deux fonctions en séries trigonométriques »

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

la première donne

$$\alpha_n = A_n.$$

En dérivant par rapport à t la formule qui donne u et en y faisant $t = 0$, on a de même

$$\beta_n \frac{\pi n a}{L} = B_n,$$

la fonction $u(x, t)$ est alors entièrement déterminée. Beaucoup de questions de Physique conduisent à des calculs de ce genre.

8. Étude des vibrations longitudinales d'une verge non homogène. — La mécanique nous apprend que le déplacement longitudinal $u(x, t)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \beta(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

où $\alpha(x)$ est le « module » d'élasticité multiplié par la section et $\beta(x)$ la masse par unité de longueur. Ces deux fonctions sont toujours positives.

Il s'agit de trouver des solutions particulières de cette équation, qui détermineront les mouvements canoniques.

Posons $u(x, t) = XT$, X étant une fonction de x et T une fonction de t; en remplaçant dans l'équation, on obtient immédiatement

$$\frac{(\alpha X')'}{\beta X} = \frac{T''}{T},$$

la valeur commune de ces rapports est une constante $-\lambda$. On est conduit à étudier l'équation [1]

$$(\alpha X')' + \lambda\beta X = 0$$

ou

$$\alpha X'' + \alpha' X' + \lambda\beta X = 0.$$

Il faudra que la constante λ soit telle que l'équation ait une solution, non identiquement nulle, s'annulant aux deux extrémités. On s'apercevra qu'il existe une infinité de nombres λ pour lesquels il existe une solution non identiquement nulle s'annulant aux deux

---

[1] Ce genre d'équations, où α et α' sont les coefficients de X'' et X', se rencontrent dans le calcul des variations (elles sont identiques à leurs adjointes, *Cf.* n° 10).

extrémités. Une fois choisi λ on aura encore à résoudre l'équation

$$T'' + \lambda T = 0.$$

On obtiendra une infinité de solutions particulières, on en fera la somme et l'on tâchera de satisfaire aux conditions initiales (Exemple : position initiale donnée et vitesse initiale de chaque point égale à zéro).

On sera amené à se demander si $y = \varphi(x)$ représentant la forme initiale est développable en série de fonctions, ces fonctions étant des solutions correspondant aux différentes valeurs « singulières » de λ relatives à l'équation

$$(\alpha X')' + \lambda \beta X = 0.$$

Nous avons à traiter les deux questions suivantes :

1° Existence des valeurs singulières de λ.

2° Possibilité du développement en série suivant les fonctions singulières.

Nous ramènerons le problème à une équation intégrale; c'est cette réduction qui nous donnera la démonstration de l'existence des valeurs singulières pour λ.

Nous allons commencer par transformer l'équation

$$\frac{d(\alpha X')}{dx} + \lambda \beta X = 0,$$

en prenant une nouvelle variable ξ liée à x par la relation

$$\frac{dx}{\alpha(x)} = d\xi, \qquad \text{d'où} \quad \int \frac{dx}{\alpha(x)} = \xi,$$

l'équation devient

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} + \lambda \alpha \beta X = 0;$$

elle est de la forme

$$y'' + \lambda\, q(x) y = 0,$$

$q(x)$ étant une fonction continue et positive dans un intervalle a, b.

9. **Forme nouvelle de la solution. Équations intégrales.** — Soit $f(x)$

une fonction donnée continue dans l'intervalle (a, b) (1). Soit à trouver la solution de l'équation $y'' = f(x)$ qui s'annule aux deux extrémités de l'intervalle (a, b). On a successivement pour une solution particulière de $y'' = f(x)$

$$y' = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad y = \int_a^x du \int_a^u f(t)\,dt.$$

La solution générale sera

$$y = \int_a^x du \int_a^u f(t)\,dt + Cx + D,$$

C et D étant deux constantes arbitraires. Transformons l'expression de y pour éviter les signes $\int$ superposés. A cet effet traçons la première bissectrice et menons les droites $t = a$ et $u = x$, (axes Ou, Ot). Nous pouvons remarquer que l'expression

$$\int_a^x du \int_a^u f(t)\,dt$$

a pour valeur celle d'une intégrale double (étendue au triangle obtenu) dont le calcul peut se faire aussi en découpant le triangle en bandes parallèles à Ou. On obtient ainsi

$$\int_a^x (x-t)f(t)\,dt,$$

où x figure comme paramètre sous le signe $\int$.

L'intégrale générale s'écrit alors

$$y = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt + Cx + D.$$

Déterminons maintenant les deux constantes C et D de manière

(1) Plus généralement, on supposera que l'intervalle (a, b) peut être partagé en un nombre fini d'intervalles partiels à l'intérieur de chacun desquels la fonction $f(x)$ est continue; à chaque extrémité d'un tel intervalle partiel, la variable se déplaçant d'un côté, f est supposée tendre vers une limite; on exprimera ce fait en disant que $f(x)$ est *continue par morceaux*.

que pour $x = a$ et $x = b$, on ait $y = 0$. Nous obtenons l'expression de y

$$y = \int_a^x (x-t) f(t)\, dt - \frac{x-a}{b-a} \int_a^b (b-t) f(t)\, dt;$$

puisque $a < x < b$, écrivons y en décomposant la seconde intégrale en deux, relativement aux intervalles (a, x), (x, b) respectivement

$$y = \int_a^x \left[(x-t) - \frac{x-a}{b-a}(b-t) \right] f(t)\, dt - \int_x^b \frac{(x-a)(b-t)}{b-a} f(t)\, dt,$$

et après simplifications

$$y = \int_a^x \frac{(a-t)(b-x)}{b-a} f(t)\, dt + \int_x^b \frac{(a-x)(b-t)}{b-a} f(t)\, dt.$$

Par conséquent nous pouvons mettre y sous la forme

$$y = \int_a^b \mathrm{K}(x, t) f(t)\, dt,$$

la fonction $\mathrm{K}(x, t)$ étant définie de la façon suivante

$$\mathrm{K}(x, t) = \frac{(a-t)(b-x)}{b-a}, \qquad \text{pour } a < t < x,$$

$$\mathrm{K}(x, t) = \frac{(a-x)(b-t)}{b-a}, \qquad \text{pour } x < t < b.$$

Supposons par exemple x *fixé* entre a et b. Pour $t = x$ il y a coïncidence des deux valeurs de K. On a ainsi une fonction de t définie par deux procédés de calcul différents dans les deux parties de l'intervalle et qui présente une « singularité » quand t passe par la valeur x. Dans ces deux intervalles $\mathrm{K}(x, t)$ est une fonction linéaire de t, mais les coefficients angulaires sont inégaux, autrement dit les dérivées ne se raccordent pas au point x.

Vérifions que la fonction

$$y = \int_a^b \mathrm{K}(x, t) f(t)\, dt$$

satisfait bien à l'équation $y'' = f(x)$; ce calcul, non logiquement indispensable, nous montrera nettement que c'est grâce à la singularité de la fonction continue $\mathrm{K}(x, t)$ que l'on obtient une solution de l'équation *avec second membre*.

On a

$$y = \int_a^x K(x, t) f(t)\, dt + \int_x^b K(x, t) f(t)\, dt$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} y' = & \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} f(t)\, dt + K(x, x) f(x) \\ & + \int_x^b \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} f(t)\, dt - K(x, x) f(x), \end{aligned}$$

il reste

$$y' = \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} f(t)\, dt + \int_x^b \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} f(t)\, dt.$$

Dans la première intégrale

$$\frac{\partial K(x, t)}{\partial x} = \frac{t-a}{b-a}, \qquad \text{car } t < x$$

et, dans la seconde,

$$\frac{\partial K(x, t)}{\partial x} = \frac{t-b}{b-a}, \qquad \text{car } t > x.$$

Prenons la dérivée de y'; on obtient

$$y'' = \frac{x-a}{b-a} f(x) - \frac{x-b}{b-a} f(x) = f(x),$$

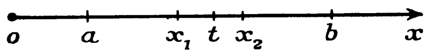
la fonction y vérifie bien l'équation $y'' = f(x)$ et elle s'annule pour $x = a$ et $x = b$.

La fonction de x, $K(x, t)$, s'annule aussi pour $x = a$ et $x = b$, elle est continue dans (a, b), mais sa dérivée est discontinue pour $x = t$.

Discontinuité de la dérivée. — Prenons x comme *variable;* considérons t comme *fixe*. Si $x < t$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{t-b}{b-a};$$

Fig. 4.



de même en utilisant la première expression de K, on a pour $t < x$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{t-a}{b-a},$$

et quand x traverse en croissant la valeur t, le saut de la dérivée est égal à

$$\left[\frac{\partial \mathrm{K}(x, t)}{dx}\right]_{x=t-\varepsilon}^{x=t+\varepsilon} = \frac{t-a}{b-a} - \frac{t-b}{b-a} = 1.$$

Conséquence. — Pour trouver une solution de l'équation

$$y'' + \lambda\, q(x) y = 0$$

s'annulant aux deux extrémités de l'intervalle, il suffirait de trouver une fonction $y(x)$ telle que

$$y(x) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(x, t)\, q(t)\, y(t)\, dt = 0$$

et nous serons ramenés à résoudre une équation « intégrale » (de « seconde espèce » : la fonction inconnue figure sous le signe $\int$ et en dehors de ce signe).

10. Généralisation des résultats précédents. Équation adjointe. Fonction de Green. — Nous allons effectuer des calculs analogues aux précédents pour une équation plus générale que l'équation $y'' = 0$; nous allons considérer une équation linéaire du second ordre « identique à son adjointe ».

Rappelons d'abord la définition de l'équation adjointe d'une équation du deuxième ordre donnée (¹).

Soit l'expression différentielle

$$ay'' + by' + cy,$$

a, b, c étant des fonctions de x, multiplions-la par une fonction z, elle devient $z(ay'' + by' + cy)$ qu'une intégration par parties transforme dans l'expression suivante

$$(zay')' - (za)'y' + zby' + zcy.$$

Une nouvelle intégration par parties donne finalement

$$(zay')' + \{[zb - (za)']y\}' + [zc - (zb)' + (za)'']y = z(ay'' + by' + cy).$$

Posons $\mathrm{L}y = ay'' + by' + cy$; nous voyons que l'expression $z\mathrm{L}y$

(¹) La théorie est analogue pour une équation d'ordre *pair* quelconque.

est égale à une dérivée exacte augmentée du produit de y par une expression du second ordre en z. Posons de plus

$$Mz = cz - (zb)' + (az)''.$$

Nous obtenons

$$zLy - yMz = \frac{d}{dx} F(x, y, y', z, z'),$$

$F(x, y, y', z, z')$ étant une expression bilinéaire en y, y', z et z'. Montrons que l'expression Mz est *la seule expression* telle que $zLy - yMz$ soit une dérivée exacte quels que soient y et z. En effet, supposons qu'il y en ait une autre, $M_1(z)$, on aurait

$$zLy - yM_1z = \frac{d}{dx} G(x, y, y', z, z'),$$

et, en retranchant membre à membre,

$$y(M_1z - Mz) = \frac{d}{dx}(Ay + By').$$

A et B étant des fonctions de x, z, z' uniquement, or si $B \not\equiv 0$, la dérivation donne un terme en y''. Soit donc $B \equiv 0$; si alors A n'est pas identiquement nul, le second membre contiendra un terme en y'; on doit donc avoir $A \equiv 0$, $B \equiv 0$.

Mz s'appelle *l'expression linéaire adjointe* de l'expression donnée. On a

$$Mz = az'' + (2a' - b)z' + (a'' - b' + c)z.$$

L'opérateur différentiel linéaire M est identique à L si l'on a

$$2a' - b = b, \qquad a'' - b' + c = c,$$

ce qui donne

$$a' = b, \qquad a'' = b'.$$

On est ainsi amené naturellement à considérer des expressions de la forme

$$(ay')' + cy,$$

ce sont des expressions qui interviennent en particulier dans les problèmes les plus simples du calcul des variations $\Big[$minimum de l'intégrale

$$\int (Ay'^2 + 2Byy' + Cy^2)\, dx,$$

où A, B, C sont des fonctions données de $x \Big]$.

Fonction de Green. — Nous allons généraliser les résultats du paragraphe précédent pour une équation de la forme

$$py'' + p'y' + qy = f(x),$$

en nous proposant de trouver la solution de cette équation qui satisfait à certaines conditions aux limites *homogènes* relativement à y et à y'. Par exemple,

$$y = 0 \quad \text{pour } x = a \text{ et } x = b$$

ou

$$y' = 0 \quad \text{pour } x = a \text{ et } x = b,$$

ou encore

$$y = 0 \quad \text{pour } x = a,$$
$$y' = 0 \quad \text{pour } x = b,$$

ou encore

$$y' + hy = 0 \quad \text{en A avec } h = \text{const. donnée},$$
$$y' + \mathrm{H}y = 0 \quad \text{en B avec } \mathrm{H} = \text{const. donnée}.$$

Nous allons supposer que l'équation

$$py'' + p'y' + qy = 0$$

n'a d'autre solution satisfaisant aux conditions aux limites que la fonction identique à zéro; il en résulte qu'il ne peut y avoir deux solutions de l'équation avec second membre différentes et satisfaisant aux conditions imposées; p, p', q sont supposées continues dans (a, b) fermé; $p \neq 0$.

Il n'est question que de solutions y continues; de plus on suppose qu'on peut partager l'intervalle en un nombre fini d'intervalles où les dérivées premières et secondes y', y'' sont continues, y est alors dit *régulier* dans chacun de ces intervalles.

Nous allons chercher une fonction (dite fonction de Green) solution de l'équation sans second membre qui satisfasse aux conditions aux limites imposées, mais qui ne sera pas régulière dans tout l'intervalle. Elle présentera une singularité en un point d'abscisse ξ, nous la désignerons par $\mathrm{K}(x, \xi)$ et la définirons de la manière suivante.

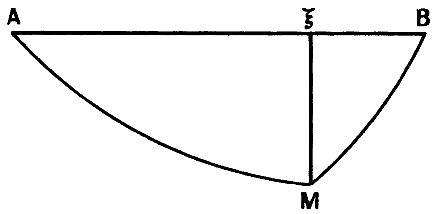
$\mathrm{K}(x, \xi)$ aura deux définitions analytiques différentes pour $a < x < \xi$ et $\xi < x < b$. Dans le premier intervalle $a < x < \xi$ la fonction $\mathrm{K}(x, \xi)$ est une solution de l'équation différentielle sans second membre, continue, ainsi que ses dérivées $\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x^2}$ et elle satisfait aux conditions limites en A.

De même si $\xi < x < b$ la fonction sera continue ainsi que ses dérivées du premier et du deuxième ordre et satisfera à la condition imposée en B.

Pour fixer les idées, la fonction $K(x, \xi)$ sera supposée nulle en A et en B.

Imaginons alors une solution de l'équation sans second membre qui

Fig. 5.



s'annule en A sans être identiquement nulle. Pour $x = \xi$ la fonction prend une certaine valeur, et pour $x = b$ une valeur non nulle [1].

Si nous imaginons maintenant une solution de l'équation, non identiquement nulle et s'annulant en B, nous pourrons toujours, en la multipliant par une constante, nous arranger pour qu'elle coïncide avec la première au point $x = \xi$.

On pourrait partir d'une autre courbe en A, la dérivée première subira une nouvelle discontinuité pour $x = \xi$; nous nous astreindrons à ce que le saut de la dérivée soit égal à $\frac{1}{p(\xi)}$

$$\left[\frac{\partial K(x, \xi)}{dx}\right]_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Cela fait, je dis que l'expression $\int_a^b K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$ représente une solution de l'équation différentielle

$$py'' + p'y' + qy = f(x)$$

satisfaisant aux conditions aux limites en A et B et régulière partout.

---

[1] Nous excluons donc le cas où une solution de l'équation sans second membre, nulle en A, s'annulerait en B.

Vérification. — Décomposons l'intégrale en deux autres

$$y = \int_a^x K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \int_x^b K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$\begin{aligned} y' = & \int_a^x \frac{\partial K}{\partial x}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + K(x, x) f(x) \\ & + \int_x^b \frac{\partial K}{\partial x}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi - K(x, x) f(x); \end{aligned}$$

il reste

$$y' = \int_a^x \frac{\partial K}{\partial x}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \int_x^b \frac{\partial K}{\partial x}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Prenons maintenant la dérivée seconde

$$\begin{aligned} y'' = & \int_a^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \frac{\partial K}{\partial x}(x, x - 0) f(x) \\ & + \int_x^b \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi - \frac{\partial K}{\partial x}(x, x + 0) f(x) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} y'' = & \int_a^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi \\ & + \int_x^b \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \left[\frac{\partial K(x, x - 0)}{\partial x} - \frac{\partial K(x, x + 0)}{\partial x} \right] f(x). \end{aligned}$$

Or, on a ([1])

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x, x - 0) = \frac{\partial K}{\partial x}(x + 0, x),$$

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x, x + 0) = \frac{\partial K}{\partial x}(x - 0, x)$$

et

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x + 0, x) - \frac{\partial K}{\partial x}(x - 0, x) = \frac{1}{p(x)},$$

y'' a donc pour valeur

$$\int_a^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \int_x^b \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \frac{f(x)}{p(x)};$$

([1]) Étant entendu que $\frac{\partial K}{\partial x}$ représente la dérivée partielle par rapport au *premier* argument.

l'expression $py'' + p'y' + qy$ est donc identique à $f(x)$ et la fonction

$$y = \int_a^b K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$$

satisfait à l'équation avec second membre ainsi qu'aux conditions aux limites. Elle est de plus régulière dans tout l'intervalle. Quant à la fonction $K(x, \xi)$, c'est une « fonction de Green » satisfaisant à l'équation différentielle sans second membre, ainsi qu'aux conditions aux limites, mais elle n'est pas régulière partout. La discontinuité a permis de passer à une solution de l'équation avec second membre (1).

11. **Symétrie de la fonction de Green.** — Revenons à l'expression L identique à son adjointe. On a posé

$$\begin{aligned} Ly &= py'' + p'y' + qy, \\ Lz &= pz'' + p'z' + qz. \end{aligned}$$

Formons la combinaison $zLy - yLz$, nous trouvons

$$zLy - yLz = p(zy'' - yz'') + p'(y'z - yz') = [p(zy' - yz')]'.$$

Intégrons de a à b

$$\int_a^b (zLy - yLz)\, dx = [p(zy' - yz')]_a^b,$$

relation vérifiée par deux fonctions y et z continues ainsi que leurs dérivées du premier et du second ordre.

Si ces fonctions ou leurs dérivées présentent des discontinuités, nous prendrons un intervalle α, β où elles sont continues ainsi que leurs dérivées, on aura donc alors

$$\int_\alpha^\beta (zLy - yLz)\, dx = [p(zy' - yz')]_\alpha^\beta.$$

Nous allons obtenir une conclusion intéressante en appliquant cette

---

(1) Supposons $f(x)$ nulle partout, sauf dans un petit intervalle d'étendue ε comprenant le point ξ, intervalle où elle est égale à 1. La solution de l'équation avec second membre, nulle aux limites, s'écrit $\varepsilon K(x, \xi_1)$, ξ_1 étant dans le petit intervalle, donc voisin de ξ. On voit que ε étant considéré comme infiniment petit, la partie principale de la solution est $\varepsilon K(x, \xi)$. On a là une signification intuitive de la fonction de Green.

formule à deux fonctions de Green correspondant à deux valeurs différentes du paramètre.

Pour y nous prendrons la fonction de Green correspondant à ξ et pour z la fonction de Green correspondant à η. Supposons pour fixer les idées $\eta > \xi$, nous avons

$$y(x) = \mathrm{K}(x, \xi), \qquad z(x) = \mathrm{K}(x, \eta),$$

l'intégrale disparaîtra, car $y(x)$ et $z(x)$ satisfont à l'équation sans second membre, par suite

$$\mathrm{L}(y) = 0, \qquad \mathrm{L}(z) = 0.$$

Posons, dans la relation trouvée précédemment,

$$\mathrm{H} = p(zy' - yz'),$$

nous obtenons

$$0 = (\mathrm{H}_{\xi-0} - \mathrm{H}_a) + (\mathrm{H}_{\eta-0} - \mathrm{H}_{\xi+0}) + (\mathrm{H}_b - \mathrm{H}_{\eta+0})$$

avec $\mathrm{H}_a = 0$, et $\mathrm{H}_b = 0$ puisque les fonctions y et z s'annulent aux extrémités de l'intervalle. Il reste

$$(\mathrm{H}_{\xi+0} - \mathrm{H}_{\xi-0}) + (\mathrm{H}_{\eta+0} - \mathrm{H}_{\eta-0}) = 0.$$

Considérons d'abord la différence

$$\mathrm{H}_{\xi+0} - \mathrm{H}_{\xi-0}$$

au point $x = \xi$, z et z' sont continues, y est continue, la seule discontinuité est celle de sa dérivée y', alors

$$\mathrm{H}_{\xi+0} - \mathrm{H}_{\xi-0} = \left(pz\frac{1}{p}\right)_\xi = \mathrm{K}(\xi, \eta).$$

Considérons maintenant de même

$$\mathrm{H}_{\eta+0} - \mathrm{H}_{\eta-0} = -\left(py\frac{1}{p}\right)_\eta = -\mathrm{K}(\eta, \xi).$$

Nous voyons qu'en définitive

$$\mathrm{K}(\xi, \eta) = \mathrm{K}(\eta, \xi).$$

La fonction de Green est *symétrique*, ce résultat s'étend aux équations différentielles d'ordre supérieur pair identiques à leurs adjointes, et aux équations aux dérivées partielles d'une forme particulière qui les généralisent ([1]).

12. Nous avons ramené le problème de la recherche d'une intégrale, satisfaisant à des conditions aux limites données, à la résolution d'une équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi = f(x),$$

$K(x, \xi)$ étant une fonction continue donnée des deux variables x et ξ dans l'intervalle (a, b) et $f(x)$ une fonction continue donnée dans le même intervalle.

Le cas qui nous intéressera particulièrement est celui où le « noyau » $K(x, \xi)$ est symétrique. On y ramène immédiatement celui où $K(x, \xi)$ est le produit d'une fonction symétrique $G_1(x, \xi)$ par une fonction de ξ seul gardant un signe invariable dans (a, b), soit $q(\xi)$: il suffira, en supposant $q(\xi) > 0$, de prendre pour nouveau noyau $G_1(x, \xi)\sqrt{q(\xi)}\sqrt{q(x)}$ et pour nouvelle inconnue le produit $\sqrt{q(x)}u(x)$, le second membre étant alors $\sqrt{q(x)}f(x)$. L'équation s'écrit en effet

$$\sqrt{q(x)}\,\varphi(x) - \lambda \int_a^b G_1(x, \xi)\sqrt{q(\xi)}\sqrt{q(x)}\sqrt{q(\xi)}\,\varphi(\xi)\,d\xi = \sqrt{q(x)}f(x);$$

on peut d'ailleurs se ramener, grâce à un changement de variables, au cas où l'intervalle (a, b) se réduit à l'intervalle $(0, 1)$.

Partageons l'intervalle $(0, 1)$ en n parties égales et posons

$$\frac{1}{n} = h = s_1, \qquad \frac{2}{n} = s_2, \qquad \frac{n-1}{n} = s_{n-1}, \qquad \frac{n}{n} = s_n,$$

$$f(s_h) = f_h, \qquad \varphi(s_h) = \varphi_h.$$

L'expression

$$h[K(x, s_1)\varphi_1 + \ldots + K(x, s_n)\varphi_n]$$

sera une valeur approchée de l'intégrale. Remplaçons x par $s_1, s_2, \ldots,$

([1]) La symétrie de la fonction de Green est l'expression essentielle d'une réciprocité qui se présente fréquemment en Physique, et dont le type est le suivant, qui se présente dans des questions d'Élasticité : si une force (cause) F agissant en ξ provoque un certain déplacement (effet) D en η, *cette force* (cause) F agissant en η provoque en ξ *précisément le déplacement* (effet) D.

s_n successivement, nous aurons « approximativement »

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 - \lambda h[K(s_1, s_1)\varphi_1 + \ldots + K(s_1, s_n)\varphi_n] = f_1,\\
&\varphi_2 - \lambda h[K(s_2, s_1)\varphi_1 + \ldots + K(s_2, s_n)\varphi_n] = f_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\varphi_n - \lambda h[K(s_n, s_1)\varphi_1 + \ldots + K(s_n, s_n)\varphi_n] = f_n.
\end{aligned}$$

En résolvant par rapport aux φ_i, on peut penser qu'on obtiendra « approximativement » les valeurs de la fonction $\varphi(x)$ aux points de subdivision : dans la résolution du système linéaire obtenu, deux cas sont à distinguer $\Delta(\lambda) \neq$ ou $= 0$. Nous n'utiliserons pas en fait cette décomposition de l'intervalle. Mais pour donner une idée des résultats que nous obtiendrons sur les équations intégrales, il est bon de préciser quelques points au sujet des systèmes d'équations linéaires ordinaires, en particulier de ceux qui ont la forme qui vient d'être indiquée.

13. Étude des systèmes linéaires (¹). — Considérons d'une manière générale le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = X_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = X_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = X_n
\end{aligned}$$

et considérons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme les composantes d'un vecteur x dans l'espace à n dimensions, de même $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seront considérés comme les composantes d'un vecteur X.

Un tableau carré quelconque

$$\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{matrix}$$

peut être envisagé comme formé par les coefficients d'un système

(¹) L'étude des systèmes linéaires que nous plaçons ici est, en partie, tout à fait classique : notre but est surtout d'arriver à la résolution canonique des systèmes linéaires symétriques; on verra peut être mieux d'ailleurs l'intérêt de cette résolution canonique après avoir vu les formules analogues de la théorie des équations intégrales n° 38 (3°).

linéaire tel que le précédent, on pourrait le désigner sous le nom de « tenseur » A, on dirait que le vecteur X *provient* de l'opération tensorielle représentée par le tenseur A *appliquée* au vecteur $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Nous conviendrons de remplacer le système d'égalités (1) par l'égalité unique, symbolique,

$$Ax = X,$$

« le tenseur A *opérant* sur x *donne* X ».

Supposons d'autre part que nous ayons les formules analogues

$$\begin{aligned} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n &= Y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n &= Y_n, \end{aligned}$$

que nous écrirons sous forme abrégée

$$By = Y.$$

Choisissons, pour vecteur x, le vecteur Y. Les deux opérateurs introduits permettront de passer du vecteur y au vecteur X

$$A(By) = X;$$

or, X se déduit de y par une opération tensorielle de même espèce que A, B, nous écrirons

$$C(y) = X,$$

le tenseur C pourra remplacer les deux opérations tensorielles successives B, puis A. Nous exprimerons ce fait en écrivant

$$AB = C,$$

mais ce genre d'opérations n'est pas commutatif. Autrement dit

$$BA \neq AB,$$

en général; la propriété d'associativité se conserve au contraire; on a

$$(AB)C = A(BC).$$

Notations abrégées. — Au lieu d'écrire toutes les équations du système, nous n'en écrirons qu'une seule

$$a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \ldots + a_{hn}x_n = X_h$$

et même sous forme plus abrégée

$$a_{hk}x_k = X_h,$$

en se rappelant que si, dans un produit de deux facteurs un même indice est répété deux fois, la sommation doit être faite par rapport à cet indice.

De même le système donnant les Y en fonction des y s'écrit

$$b_{hk}y_k = Y_h.$$

Déterminons les éléments du tenseur

$$C = AB,$$

on peut changer les indices et écrire au lieu de $b_{hk}y_k = Y_h$ la relation $b_{k\lambda}y_\lambda = Y_k$; après substitution, nous obtenons

$$a_{hk}(b_{k\lambda}y_\lambda) = X_h.$$

Il faut effectuer la sommation par rapport à λ, puis par rapport à k.

En changeant les notations

$$a_{h\lambda}b_{\lambda k}y_k = X_h.$$

D'autre part,

$$c_{hk}y_k = X_h.$$

Nous pouvons donc écrire

$$c_{hk} = a_{h\lambda}b_{\lambda k} = a_{h1}b_{1k} + a_{h2}b_{2k} + \ldots + a_{hn}b_{nk}.$$

Remarque. — Le déterminant des c est égal au produit du déterminant des a par le déterminant des b.

Le *tenseur unité* est le tenseur suivant :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & . & \ldots & . \end{pmatrix}$$

Tous les termes sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale égaux à 1, ce tenseur donne la transformation identique

$$x_1 = X_1, \qquad x_2 = X_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = X_n;$$

on a évidemment

$$A.E = A,$$
$$E.A = A,$$

A étant un tenseur quelconque. E joue le même rôle que 1 dans la multiplication des nombres.

14. Résolution d'un système linéaire. — Changeons légèrement de notations et considérons le système d'équations

$$a_{hk}x_k = y_h.$$

Soit

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hk} & \dots & a_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

le déterminant du système.

Appelons A_{hk} le mineur correspondant à a_{hk} avec son signe. C'est, comme on le sait, la valeur du déterminant obtenu en supprimant dans A la ligne et la colonne qui se croisent sur a_{hk} précédé du signe $+$ si $h+k$ est pair, du signe $-$ si $h+k$ est impair.

Le système donné a une solution et une seule, si $A \neq 0$. Pour l'obtenir on multiplie

La première ligne par.............. $\dfrac{A_{11}}{A}$,

La deuxième ligne par............. $\dfrac{A_{21}}{A}$,

La $n^{\text{ième}}$ ligne par.................. $\dfrac{A_{n1}}{A}$.

En ajoutant, on trouve

$$x_1 = \frac{A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + \ldots + A_{n1}y_n}{A},$$

et, d'une façon générale,

$$x_r = \frac{A_{1r}y_1 + A_{2r}y_2 + \ldots + A_{nr}y_n}{A}$$

ou, sous forme abrégée,

$$x_r = \frac{A_{\lambda r}y_\lambda}{A}.$$

Utilisation de la forme condensée. — Il s'agit de résoudre le système

$$a_{hk}x_k = y_h;$$

multiplions les deux membres par A_{hr} et ajoutons, nous obtenons

$$A_{hr} a_{hk} x_k = A_{hr} y_h.$$

Nous allons calculer les coefficients des x_k pour les différentes valeurs de k, l'une est égale à r.

1° $k \neq r$ la quantité $A_{hr} a_{hk}$ est nulle;
2° $k = r$; on a, dans ce cas,

$$A_{hk} a_{hr} = A \qquad \text{(déterminant des } a\text{)}.$$

Supposons le déterminant $A \neq 0$

$$x_r = \frac{A_{hr} y_h}{A} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

le système a une solution et une seule donnée par ces formules.

Tenseur inverse. — Nous venons de définir un nouveau tenseur

$$\bar{a}_{hk} = \frac{A_{kh}}{A}.$$

Nous le désignerons par $\bar{A}$.

Nous voyons que

$$\bar{A}.A = E,$$

nous dirons pour cette raison que $\bar{a}_{hk} = \frac{A_{kh}}{A}$ est le tenseur inverse du tenseur a_{hk} (on aura d'ailleurs aussi $A.\bar{A} = E$).

Cas particulier où $a_{hk} = 0$ dès que $h \neq k$ et $\neq 0$ pour $h = k$. On aura aussi $\bar{a}_{hk} = 0$ dès que $h \neq k$ et $\bar{a}_{hk} = \frac{1}{a_{hk}}$ pour $h = k$.

15. Conditions de compatibilité d'un système linéaire avec second membre. — Plaçons-nous dans le cas où le déterminant

$$\| a_{hk} \|$$

est nul. Soit r son rang (ordre maximum d'un déterminant non nul déduit de la matrice a_{hk}). Ici $r \leqq n - 1$. Pour que le système

$$a_{hk} x_k = y_h$$

soit compatible, on sait qu'il faut que les y satisfassent à $n - r$

conditions linéaires distinctes qui s'expriment ordinairement en égalant à zéro $n-r$ déterminants d'ordre $r+1$ déduits d'un déterminant principal (déterminant différent de zéro, d'ordre r) en le bordant d'une certaine manière par certains y et certains coefficients.

Je dis que l'ensemble de ces $n-r$ conditions peut s'exprimer de la manière suivante : le vecteur (y) doit être orthogonal à tout vecteur (z) satisfaisant aux conditions

$$a_{kh}z_k = 0,$$

qui font intervenir la matrice A′ déduite de A par changement des lignes en colonnes :

1° La condition est nécessaire. Si $a_{hk}x_k = y_h$ est compatible, la quantité $y_h z_h$ s'écrit $a_{hk}x_k z_h = (a_{hk}z_h)\,x_k$, ce qui est nul si toutes les conditions $a_{hk}z_h = 0$ sont vérifiées.

2° La condition est suffisante. Supposons que $y_k z_k = 0$ soit conséquence du système en z, $a_{kh}z_k = 0$, alors, d'après un résultat connu, les y_k se déduisent par une même combinaison linéaire des a_{kh} où l'on donne r valeurs convenables à h, à savoir h_1, $h_2, \ldots, h_r$ telles que le tableau

$$\begin{array}{cccc}
a_{1h_1} & a_{2h_1} & \ldots & a_{nh_1} \\
a_{1h_2} & \ldots & \ldots & a_{nh_2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
a_{1h_r} & \ldots & \ldots & a_{nh_r}
\end{array}$$

soit de rang r, mais cela revient à dire qu'on peut trouver des nombres $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_r}$ tels que

$$a_{kh_1}x_{h_1} + a_{kh_2}x_{h_2} + \ldots + a_{kh_r}x_{h_r} = y_k$$

pour toutes les valeurs de k. $a_{kh}x_h = y_k$ est donc compatible, puisque ce système est vérifié en prenant pour les x d'indices $h_1, h_2, \ldots, h_r$ les nombres que l'on vient d'indiquer et pour les autres x la valeur zéro.

16. Formes bilinéaires. — Au lieu de se donner les formes $a_{hk}x_k$ pour les différentes valeurs de h on pourrait se donner une « forme bilinéaire » par rapport aux x et à n autres variables u de la manière suivante.

Multiplions la forme $a_{hk}x_k$ par u_h et faisons la sommation avec l'indice h, il suffira d'écrire $a_{hk} u_h x_k$; on obtient une forme bilinéaire par rapport à $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que l'on désigne par $A(u, x)$. En particulier la forme bilinéaire correspondant au tableau unité sera $u_k x_k$ ou sous forme développée

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n.$$

Nous la désignerons par $E(u, x)$.

Écrire le système linéaire d'équations

$$a_{hp} x_p = y_h,$$

c'est écrire l'identité en u des formes bilinéaires $a_{hp} u_h x_p$ que nous appelons $A(u, x)$ et $u_h y_h$ que nous appelons $E(u, y)$.

La résolution peut se faire en posant dans cette identité

$$u_h = A_{hr} v_r,$$

A_{hr} désignant le mineur correspond à a_{hr}. L'identité

$$A(u, x) = E(u, y)$$

devient, après division par le déterminant A,

$$E(v, x) = \frac{A_{hr}}{A} v_r y_h \qquad = \qquad \overline{a}_{rh} v_r y_h = \overline{A}(v, y),$$

où l'on a posé $\overline{a}_{rh} = \frac{A_{hr}}{A}$ et où $\overline{A}(v, y)$ représente la forme bilinéaire en v, y, correspondant au tableau $\overline{A}$.

On peut remarquer que $\overline{A}(v, y)$ peut s'écrire sous la forme suivante

$$\overline{A}(v, y) = -\frac{1}{A} \begin{vmatrix} 0 & v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ y_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ y_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & \ldots & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Changement de variables. — Dans la forme bilinéaire

$$A(x, y) = a_{hk} x_h y_k,$$

faisons les changements de variables

$$x_h = p_{hr} \xi_r,$$
$$y_k = q_{ks} \eta_s.$$

Nous obtenons

$$A(x, y) = (a_{hk} p_{hr} q_{ks}) \xi_r \eta_s.$$

Si l'on pose $p_{hr} = p'_{rh}$, on voit que $a_{hk} p_{hr}$ est le terme b_{rk} du produit $B = (P'A)$; P' désignant la matrice formée avec les p', c'est-à-dire

$$\begin{matrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

et d'autre part que $(b_{rk} q_{ks})$ est le terme c_{rs} du produit $C = (P'A)Q$. On pourra donc écrire

$$A(x, y) = (P'AQ)(\xi, \eta),$$

en désignant par $(P'AQ)(\xi, \eta)$ la forme bilinéaire en ξ, η correspondant à la matrice $(P'AQ)$.

Applications : 1° Le déterminant des coefficients de la nouvelle matrice est, d'après ce qui précède, égal au produit du déterminant des coefficients de l'ancienne par les déterminants des deux transformations linéaires.

En particulier si dans une forme quadratique, on fait une même substitution linéaire sur les variables, le discriminant est multiplié par le *carré* du déterminant de cette substitution.

2° Supposons que l'on fasse sur les deux systèmes de variables, deux substitutions caractérisées par la même matrice P, et que cette substitution soit « orthogonale » (on dit encore unitaire) dans ce cas on sait que P' n'est autre que la matrice inverse $\overline{P}$ de P. Dans ce cas le produit des transformées de deux matrices A et B est égal à

$$(\overline{P}AP)(\overline{P}BP)$$

et, par suite, à

$$\overline{P}A(P\overline{P})BP = \overline{P}(AB)P,$$

ce n'est autre que la transformée du produit.

En particulier en faisant $B = \overline{A}$, on voit que $\overline{P}(\overline{A})P = \overline{\overline{P}AP}$, la transformée de l'inverse d'une substitution est l'inverse de la transformée de cette substitution.

17. Résolution canonique des systèmes linéaires symétriques. — Cette dernière remarque a une application intéressante à la résolution du système d'équations linéaires représenté par l'identité en u

$$A(u, x) = E(u, y),$$

où $a_{mn} = a_{nm}$; nous en avons tiré l'identité en v (identité de résolution)

$$E(v, x) = \overline{A}(v, y).$$

Supposons que la transformation *unitaire*

$$x_p = b_{pr} X_r$$

transforme $A(x, x)$ en une somme de n carrés

$$S_1 X_1^2 + S_2 X_2^2 + \ldots + S_n X_n^2,$$

où S_1; $S_2, \ldots, S_n \neq 0$. On aura identiquement ([1]), en posant encore

$$u_p = b_{pr} U_r,$$
$$A(u, x) = S_1 U_1 X_1 + \ldots + S_n U_n X_n.$$

La transformée de $\overline{A}(v, y)$ par la substitution

$$y_p = b_{pr} Y_r,$$
$$v_p = b_{pr} V_r$$

sera, d'après ce qui précède, la forme linéaire en V, Y correspondant à la matrice inverse de celle dont les éléments de la diagonale principale sont $S_1, S_2, \ldots, S_n$, les autres éléments étant nuls. Par suite

$$\overline{A}(v, y) = \frac{V_1 Y_1}{S_1} + \frac{V_2 Y_2}{S_2} + \ldots + \frac{V_n Y_n}{S_n}.$$

Posons

$$b_{pq} X_q = B_p(X), \qquad b_{pq} x_p = B'_q(x);$$

on voit que la résolution de

$$\sum_{p=1}^{p=n} S_p B'_p(u) B'_p(x) = E(u, y)$$

est donnée par

$$E(v, x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{B'_p(v) B'_p(y)}{S_p}.$$

([1]) Comme on le voit en égalant les termes du premier degré en ρ dans les deux expressions

$$A(u + \rho x, u + \rho x) \text{ et } S_1(U_1 + \rho X_1)^2 + S_2(U_2 + \rho X_2)^2 + \ldots + S_n(U_n + \rho X_n)^2.$$

Les systèmes que nous étudions ont l'aspect suivant

$$E(u, x) - \lambda K(u, x) = E(u, y).$$

On donne à leur formule de résolution la forme

$$E(v, x) = E(v, y) + \lambda R(v, y, \lambda).$$

En appliquant la méthode précédente, on est amené à écrire $K(u, x)$ sous la forme

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{L'_p(u) L'_p(x)}{\lambda_p},$$

où les λ_p sont des constantes et les L' des formes linéaires (¹); S_p prend (²) la valeur $1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}$; $R(v, y, \lambda)$ s'écrit alors (³)

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{L'_p(v) L'_p(y)}{\lambda_p - \lambda}.$$

Remarquons que c'est pour les valeurs $\lambda = \lambda_p$ du paramètre que le système sans second membre

$$E(u, x) - \lambda K(u, x) = 0$$

a quelque solution non nulle, comme le montre immédiatement l'identité

$$\begin{aligned} &E(u, x) - \lambda K(u, x) \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) U_1 X_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) U_2 X_2 + \ldots + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) U_n X_n \end{aligned}$$

et que cette solution non nulle est définie par

$$X_q = 0 \quad \text{ou} \quad \neq 0,$$

suivant que $q \neq$ ou $= p$, ce qui (en nous bornant au cas où tous les λ sont distincts) donne nécessairement pour les x_μ des nombres proportionnels aux $b_{\mu p}$, autrement dit, par exemple, $E(u, x) = B'_p(u)$.

(¹) Liées à K comme les B′ le sont à A dans l'étude précédente.

(²) Puisque $E(u, x) = \sum_{p=1}^{p=n} L'_p(u) L'_p(x)$.

(³) *Cf.* nº 38.

Les « vecteurs » solutions correspondant à deux valeurs différentes de $\lambda(\lambda_p, \lambda_q)$ sont orthogonaux, puisque

$$b_{\mu p} b_{\mu q} = 0$$

dès que $p \neq q$.

Remarques complémentaires (*noyaux itérés*). — La forme bilinéaire

$$E(v, y) + \lambda R(v, y, \lambda) = E(v, y) + \lambda \sum_{p=1}^{p=n} \frac{L'_p(v) L'_p(y)}{\lambda_p - \lambda}$$

est une fonction rationnelle de λ régulière pour $\lambda = 0$, elle est donc développable en une série entière en λ convergente tant que $|\lambda|$ est inférieure au plus petit des nombres $|\lambda_p|$.

Les coefficients de ce développement ont une forme intéressante que l'on peut découvrir par la méthode des approximations successives.

$$E(u, x) - \lambda K(u, x) = E(u, y)$$

s'écrit sous l'une ou l'autre des deux formes

$$E(u, x) = E(u, y) + \lambda K(u, x),$$
$$x_p = y_p + \lambda k_{pq} x_q.$$

D'où

$$E(u, x) = E(u, y) + \lambda k_{hp} u_h (y_p + \lambda k_{pq} x_q),$$

en tenant compte de l'une et de l'autre des deux formes.

Ainsi

$$E(u, x) = E(u, y) + \lambda K(u, y) + \lambda^2 K^{(2)}(u, x),$$

$K^{(2)}$ désignant le produit de la matrice K par elle-même et $K^{(2)}(u, x$ la forme bilinéaire en u, x correspondant à ce produit.

Remplaçons de nouveau les x_p par $y_p + \lambda k_{pq} x_q$; on est amené à considérer la série

$$E(u, y) + \lambda K(u, y) + \ldots + \lambda^r K^{(r)}(u, y) + \ldots.$$

Appelons M un nombre au moins égal au plus grand des nombres $|k_{pq}|$, les nombres du tableau $K^{(r)}$ sont au plus égaux en valeur absolue à $(n^{r-1} M^r)$ (comme on le voit de proche en proche pour $r = 2, 3, \ldots$). Il suffit donc de prendre $|\lambda| < \frac{1}{nM}$ pour être assuré que la série converge et soit égale à $E(u, x)$.

Autrement dit, le développement en série au voisinage de $\lambda = 0$ de la fonction

$$\sum_{p=1}^{p=+n} \frac{L'_p(v)\, L'_p(y)}{\lambda_p - \lambda}$$

est

$$K(v, y) + \lambda\, K^{(2)}(v, y) + \lambda^2\, K^{(3)}(v, y) + \ldots.$$

Mais, d'autre part,

$$\frac{1}{\lambda_p - \lambda} = + \frac{1}{\lambda_p} \sum_{r=1}^{r=+\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^r,$$

d'où la formule générale

$$K^{(r)}(v, y) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{L'_p(v)\, L'_p(y)}{\lambda_p^r},$$

formule que l'on connaissait déjà pour $r = 1$.

ÉTUDE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES A NOYAU DÉGÉNÉRÉ.

18. Considérons l'équation intégrale

$$(1) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s),$$

où $K(s, t)$ est une fonction donnée continue par rapport à l'ensemble s, t; $f(s)$ est une fonction donnée continue dans l'intervalle a, b, λ est une constante donnée. Il s'agit de trouver une fonction continue $\varphi(s)$ satisfaisant à cette relation.

Nous examinerons d'abord le cas où la fonction $K(s, t)$ est « dégénérée », c'est-à-dire se présente sous la forme

$$K(s, t) = \alpha_1(s)\, \beta_1(t) + \ldots + \alpha_n(s)\, \beta_n(t).$$

Les fonctions $\alpha(s)$ sont supposées « linéairement indépendantes », il n'existe pas de constantes k non toutes nulles telles que l'on ait identiquement

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \ldots + k_n \alpha_n = 0$$

[s'il existait une telle relation avec des k_i non tous nuls, l'un des α_i serait fonction linéaire des autres, il faudrait le remplacer, dans le noyau $K(s, t)$ par cette expression, ce qui diminuerait le nombre des termes].

De même les β_i sont supposés linéairement indépendants.
L'équation donnée (1) s'écrit

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b [\alpha_1(s)\beta_1(t) + \ldots + \alpha_n(s)\beta_n(t)]\varphi(t)\,dt = f(s),$$

ou encore

$$\varphi(s) - \lambda \left[\alpha_1(s) \int_a^b \varphi(t)\beta_1(t)\,dt + \alpha_2(s)\int_a^b \varphi(t)\beta_2(t)\,dt + \ldots \right] = f(s).$$

En posant d'une manière générale

$$x_k = \int_a^b \beta_k(t)\varphi(t)\,dt,$$

nous pouvons écrire, sous forme abrégée,

$$\varphi(s) - \lambda x_k \alpha_k(s) = f(s) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Multiplions les deux membres par $\beta_h(s)$, h quelconque, et intégrons entre a et b, nous aurons

$$\int_a^b \beta_h(s)\varphi(s)\,ds - \lambda x_k \int_a^b \alpha_k(s)\beta_h(s)\,ds = \int_a^b f(s)\beta_h(s)\,ds.$$

Si nous posons maintenant

$$c_{hk} = \int_a^b \alpha_k(s)\beta_h(s)\,ds \qquad \text{et} \qquad y_h = \int_a^b f(s)\beta_h(s)\,ds,$$

le système devient

$$x_h - \lambda c_{hk} x_k = y_h;$$

c'est un système de n équations linéaires à n inconnues; une fois les x connus, on aura $\varphi(s)$ par la relation

(2) $$\varphi(s) = f(s) + \lambda x_k \alpha_k(s).$$

Cette expression (2) est d'ailleurs une solution, comme on le voit en substituant (2) dans l'équation intégrale elle-même. Ce sera la seule solution si le déterminant du système linéaire en x_k est différent de zéro.

Deux cas sont à considérer :

1° Le déterminant

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1-\lambda c_{11} & -\lambda c_{12} & \dots & -\lambda c_{1n} \\ -\lambda c_{21} & 1-\lambda c_{22} & \dots & -\lambda c_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ -\lambda c_{n1} & -\lambda c_{n2} & \dots & 1-\lambda c_{nn} \end{vmatrix}.$$

est différent de zéro (cela arrive par exemple pour $\lambda = 0$) le système linéaire en x_k aura une solution et une seule; cette solution est donnée par (2).

2° $\Delta = 0$, le système homogène

$$(3) \qquad x_h - \lambda c_{hk} x_k = 0$$

sera possible avec des x non tous nuls. Si le rang du tableau des coefficients est $r < n$, le système a $n - r$ solutions indépendantes exactement.

Je dis que l'équation intégrale sans second membre a aussi $n - r$ solutions indépendantes. Elle s'écrit sous la forme

$$\psi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\,\psi(t)\,dt = 0$$

et sa solution est donnée par l'égalité

$$\psi(s) = \lambda x_k \alpha_k(s).$$

Imaginons, pour fixer les idées, que l'on ait $n - r = 3$. Le système homogène (3) admet trois solutions

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_{n-2}^{(1)} & x_{n-1}^{(1)} & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_{n-2}^{(2)} & x_{n-1}^{(2)} & x_n^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & \dots & x_{n-2}^{(3)} & x_{n-1}^{(3)} & x_n^{(3)} \end{matrix}$$

indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas une même relation linéaire et homogène entre les éléments d'une même colonne de ce tableau.

A ces trois solutions correspondent pour l'équation intégrale trois solutions $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, $\psi_3(s)$.

Si l'on avait identiquement

$$u_1\,\psi_1(s) + u_2\,\psi_2(s) + u_3\,\psi_3(s) = 0,$$

les u étant des constantes, on en déduirait, puisque les α sont linéairement indépendantes

$$u_1 x_1^{(1)} + u_2 x_1^{(2)} + u_3 x_1^{(3)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_1 x_n^{(1)} + u_2 x_n^{(2)} + u_3 x_n^{(3)} = 0,$$

ce qui n'est pas possible d'après l'hypothèse faite sur les x.

Il est d'ailleurs évident que toute solution est combinaison linéaire homogène de ψ_1, ψ_2, ψ_3.

Nous sommes parvenus à cette conclusion : si pour la racine λ le déterminant est de rang r, l'équation intégrale sans second membre admet $n - r$ solutions indépendantes

$$\psi_1(s), \quad \psi_2(s), \quad \ldots, \quad \psi_{n-r}(s)$$

et la solution générale est de la forme

$$\lambda_1 \psi_1(s) + \lambda_2 \psi_2(s) + \ldots + \lambda_{n-r} \psi_{n-r}(s),$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ étant des constantes arbitraires.

En particulier, si $r = n - 1$, l'équation sans second membre a une solution $\psi_1(s)$, $\psi_1(s)$ *n'étant pas identiquement nulle*, les autres étant de la forme $u_1 \psi_1(s)$, u_1 étant une constante arbitraire.

Étude de l'équation avec second membre pour une valeur de λ *vérifiant l'équation* $\Delta(\lambda) = 0$. — Relativement aux x le système s'écrit

$$x_h - \lambda x_k \int_a^b \alpha_k(s)\,\beta_h(s)\,ds = \int_a^b \beta_h(s) f(s)\,ds,$$

nous avons à exprimer que ce système est possible et pour cela nous devons considérer le système *associé* [1]. D'où l'idée de « l'équation intégrale homogène *associée* à l'équation donnée ». Elle s'écrira

$$(1') \qquad \chi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(t, s)\,\chi(t)\,dt = 0$$

(on a interverti les lettres t et s dans le noyau).

Si pour la valeur λ considérée l'équation

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

[1] Obtenu par échange des lignes et des colonnes (*voir* plus haut n° 15).

possède $n-r$ solutions indépendantes, l'équation associée (1') en a aussi $n-r$ exactement.

Pour le voir, il suffit de passer par l'intermédiaire des systèmes algébriques correspondants.

En ce qui concerne l'équation avec second membre (1), nous exprimerons les conditions de compatibilité par l'orthogonalité d'un vecteur y à un certain nombre d'autres vecteurs z, comme on l'a vu pour les systèmes algébriques. On a ici

$$y_h = \int_a^b \beta_h(s) f(s)\, ds$$

et les vecteurs z sont définis par le système associé au système en x sans second membre, autrement dit par les équations

$$z_h - \lambda c_{kh} z_k = 0 \qquad \text{(système associé).}$$

Désignons les $n-r$ solutions indépendantes de ce système par

$$z_1^{(\rho)}, \quad z_2^{(\rho)}, \quad \ldots, \quad z_n^{(\rho)} \qquad (\text{où } \rho = 1, 2, \ldots, n-r),$$

les conditions de compatibilité s'écrivent sous forme abrégée

$$y_h z_h^{(\rho)} = 0,$$

ou encore

$$\int_a^b \beta_h(s) z_h^{(\rho)} f(s)\, ds = 0,$$

$f(s)$ est donc « orthogonal » [1] aux fonctions

$$\beta_1(s) z_1^{(\rho)} + \beta_2(s) z_2^{(\rho)} + \ldots + \beta_n(s) z_n^{(\rho)} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n-r).$$

Mais ce sont là $n-r$ solutions, indépendantes, de l'équation intégrale associée :

$$\chi_1(s), \quad \chi_2(s), \quad \ldots, \quad \chi_{n-r}(s),$$

les conditions de compatibilité pour l'équation avec second membre seront

$$\int_a^b \chi_1(s) f(t)\, ds = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\int_a^b \chi_{n-r}(s) f(s)\, ds = 0,$$

[1] *Voir* n° 20.

ou, en abrégé,

$$\int_a^b \chi_\rho(s) f(s)\, ds = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n - r).$$

Les théorèmes fondamentaux que nous venons de démontrer peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

1° L'équation intégrale

$$(1) \qquad f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\, dt,$$

où le noyau $K(s, t)$ est *dégénéré*, c'est-à-dire de la forme

$$\alpha_1(s)\beta_1(t) + \alpha_2(s)\beta_2(t) + \ldots + \alpha_n(s)\beta_n(t)$$

(les α et β étant, séparément, linéairement indépendants) possède, pour chaque valeur donnée de λ telle que $\Delta(\lambda) \neq 0$ et pour chaque fonction continue $f(s)$ une et une seule solution continue $\varphi(s)$. En particulier la seule solution $\varphi = 0$ pour $f = 0$.

2° Pour les autres valeurs de λ (valeurs en nombre fini), l'équation intégrale homogène possède un nombre fini de solutions linéairement indépendantes $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$; dans ce cas l'équation associée

$$\chi(s) - \lambda \int_a^b K(t, s)\chi(t)\, dt = 0$$

a exactement le même nombre de solutions indépendantes χ_1, $\chi_2, \ldots, \chi_r$ et l'on peut affirmer que l'équation (1) est résoluble si la fonction $f(s)$ vérifie les r conditions d'orthogonalité

$$(f, \chi_i) = \int_a^b f(s)\chi_i(s)\, ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

et seulement dans ce cas. Alors la solution générale $\varphi(s)$ dépendra de r constantes arbitraires, on l'obtient en ajoutant à une solution particulière la solution générale de l'équation homogène

$$c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots + c_r\psi_r.$$

[On peut d'ailleurs disposer de ces r constantes c pour rendre $\varphi(s)$ orthogonale aux r fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$] [1].

---

[1] r désigne dans cet alinéa le nombre désigné plus haut par $n - r$.

19. Nous étendrons ces résultats au cas d'un noyau continu quelconque par passage à la limite.

Un noyau $K(s, t)$, continu par rapport à l'ensemble des deux variables (s, t), peut toujours être considéré comme la limite d'une suite uniformément convergente de termes de la forme précédente; cela résulte du théorème suivant :

Une fonction continue $K(s, t)$ peut être considérée comme la limite d'une suite uniformément convergente de polynomes en s et t (or tout polynome en s et t représente un *noyau dégénéré*).

Voici l'idée générale d'une des méthodes de démonstration de ce théorème fondamental.

Supposons (ce qu'on peut toujours réaliser par un changement de variables) que a et b soient compris entre o et 1. $0 < a < b < 1$. Choisissons deux nombres α, β tels que $0 < \alpha < a < b < \beta < 1$, et complétons arbitrairement la définition de $K(s, t)$ dans les parties du carré (α, β) (α, β) extérieures au carré (a, b) (a, b) primitif, en respectant toutefois la continuité. On démontre que le polynome

$$P_n(s, t) = \frac{1}{\left[\int_{-1}^{+1} (1-\rho^2)^n \, d\rho\right]^2} \times \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta K(\sigma, \tau)[1-(s-\sigma)^2]^n [1-(t-\tau)^2]^n \, d\sigma \, d\tau,$$

quand n tend vers $+\infty$, tend vers $K(s, t)$ *uniformément dans le carré* (a, b) (a, b).

FONCTIONS ORTHOGONALES.

20. **Définitions.** — Étant données deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ intégrables dans (a, b), $a < b$, nous appellerons *produit intérieur* de ces deux fonctions dans (a, b), $a < b$, l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Lorsque le produit intérieur est nul les fonctions sont dites *orthogonales*.

On appelle *norme* d'une fonction $f(x)$ le produit intérieur de cette fonction par elle-même, on écrit

$$\mathrm{N}f = \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Si l'on a

$$\mathrm{N}f = \int_a^b f^2(x)\,dx = 1,$$

on dit que la fonction f est normée.

Inégalité de Schwarz. — Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ continues dans a, b. Considérons l'intégrale

$$\int_a^b (f+\lambda g)^2\,dx \qquad (a<b),$$

où λ est une constante. Elle est positive ou nulle; elle n'est nulle que si $f+\lambda g = 0$ pour tout l'intervalle, c'est-à-dire si $\frac{f}{g}$ est une constante C et si la constante λ est convenablement choisie (à savoir égale à $-\mathrm{C}$). Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; nous avons en développant

$$\int_a^b (f^2 + 2\lambda fg + \lambda^2 g^2)\,dx > 0,$$

ou encore

$$\int_a^b f^2\,dx + 2\lambda \int_a^b fg\,dx + \lambda^2 \int_a^b g^2\,dx > 0$$

quel que soit λ.

Ce trinome en λ étant toujours du même signe a un discriminant négatif et, par suite, on a

$$\left(\int_a^b fg\,dx\right)^2 < \int_a^b f^2\,dx \int_a^b g^2\,dx.$$

Si $\frac{f}{g}$ était constante, les deux membres seraient évidemment égaux.

Systèmes de fonctions orthogonales et normales. — Soient n fonctions de x

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x),$$

nous dirons qu'elles sont linéairement indépendantes s'il n'existe pas de relation de la forme

$$\mathrm{C}_1\,\varphi_1(x) + \mathrm{C}_2\,\varphi_2(x) + \ldots + \mathrm{C}_n\,\varphi_n(x) = 0,$$

où les C_i constants ne sont pas tous nuls. Dans le cas contraire, elles sont dites linéairement dépendantes. Il est à remarquer qu'un système de fonctions orthogonales, continues, dont aucune n'est identiquement nulle $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ constitue un système de fonctions linéairement indépendantes. Si l'on avait en effet

$$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_n\varphi_n = 0,$$

la multiplication par φ_k suivie d'une intégration donnerait

$$C_k \int_a^b \varphi_k^2\, dx = 0 \qquad \text{et, par suite,} \qquad C_k = 0.$$

Orthogonalisation et normalisation d'une suite de fonctions. — Soit une suite de fonctions continues

$$v_1(x), \quad v_2(x), \quad \ldots, \quad v_n(x), \quad \ldots$$

assujetties à cette condition que les n premières sont linéairement indépendantes quel que soit n. Nous allons montrer que l'on peut remplacer cette suite par une autre

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots,$$

chaque fonction $\varphi_n(x)$ étant une combinaison linéaire et homogène de $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$ et les fonctions φ_i étant orthogonales et normales, c'est-à-dire qu'elles vérifient les conditions

$$\int_a^b \varphi_h(x)\,\varphi_k(x) = 0, \qquad \text{si } h \neq k,$$

$$\int_a^b \varphi_h(x)\,\varphi_k(x) = 1, \qquad \text{si } h = k.$$

Posons d'abord

$$\varphi_1 = C_1 v_1$$

et déterminons C_1 par la condition

$$C_1^2 \int_a^b v_1^2\, dx = 1,$$

cela donne C_1, car $v_1(x)$ est supposée continue et non identiquement nulle.

Pour φ_2 nous prendrons

$$\varphi_2(x) = C_1\varphi_1 + C_2 v_2$$

et nous déterminerons les *nouvelles* constantes C_1 et C_2 de manière que l'on ait

$$\int_a^b \varphi_1 (C_1 \varphi_1 + C_2 v_2)\, dx = 0,$$

$$\int_a^b \varphi_2^2\, dx = 1,$$

la première donne

$$C_1 \int_a^b \varphi_1^2\, dx + C_2 \int_a^b \varphi_1 v_2\, dx = 0,$$

et C_2 peut être choisi arbitrairement et différent de zéro, on en déduira C_1 par cette relation; φ_2 sera alors orthogonal à φ_1; on la normalisera ensuite en multipliant C_1, C_2 par une même constante convenablement choisie.

Pour φ_3 nous prendrons avec de *nouvelles* constantes C_1, C_2, C_3 :

$$\varphi_3 = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + C_3 v_3$$

et nous écrirons que cette fonction est orthogonale à φ_1 et à φ_2, nous aurons ainsi

$$C_1 \int_a^b \varphi_1^2\, dx + C_2 \int_a^b \varphi_1 \varphi_2\, dx + C_3 \int_a^b \varphi_1 v_3\, dx = 0,$$

$$C_1 \int_a^b \varphi_1 \varphi_2\, dx + C_2 \int_a^b \varphi_2^2\, dx + C_3 \int_a^b \varphi_2 v_3\, dx = 0,$$

et, après réduction,

$$C_1 + C_3 \int_a^b \varphi_1 v_3\, dx = 0,$$

$$C_2 + C_3 \int_a^b \varphi_2 v_3\, dx = 0.$$

Nous pourrons prendre arbitrairement C_3; C_1 et C_2 seront alors déterminés, on normalisera ensuite.

En continuant ainsi de suite on obtient une suite de fonctions

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n, \quad \ldots$$

orthogonales et normales (¹).

(¹) Si l'on part de la suite de fonctions $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ dans l'intervalle $-1, +1$,

21. Inégalité de Bessel. Systèmes complets. — Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ une suite de fonctions orthogonales et normales et $f(x)$ une fonction continue quelconque. Les nombres

$$a_i = \int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx$$

sont appelés les composantes de la fonction f par rapport au système orthogonal considéré.

L'inégalité évidente

$$(1) \qquad \int_a^b \left(f - \sum_{i=1}^{i=n} a_i \varphi_i\right)^2 dx \geqq 0$$

donne, lorsque l'on développe le carré et que l'on intègre terme à terme,

$$0 \leqq \int_a^b f^2\,dx - 2\sum_{i=1}^{i=n} a_i \int_a^b f\varphi_i\,dx + \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2,$$

ou encore

$$0 \leqq \int_a^b f^2\,dx - 2\sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 \leqq \int_a^b f^2\,dx = \mathrm{N}f.$$

Cette inégalité, qui est fondamentale, se désigne sous le nom d'inégalité de Bessel; en supposant que n augmente indéfiniment, on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a_i^2 \leqq \mathrm{N}f,$$

la série qui figure à gauche, composée de nombres positifs ou nuls, est certainement convergente quelle que soit la fonction f et quel que soit le système orthogonal considéré.

---

les fonctions orthogonales et normales que l'on en déduit sont à des facteurs numériques près ce qu'on appelle les polynomes de Legendre.

Les remarques faites dans le texte s'étendent au cas d'intégrales doubles. Nous aurons occasion d'utiliser un peu plus loin cette extension.

Nous allons retrouver tout naturellement l'intégrale (1) en nous proposant de rechercher une combinaison linéaire

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_n \varphi_n$$

permettant d'obtenir le minimum de l'intégrale

$$\int_a^b \left(f - \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \varphi_i \right)^2 dx.$$

Développons; une transformation simple nous conduit à l'égalité

$$\int_a^b \left(f - \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \varphi_i \right)^2 dx = \int_a^b f^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - a_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Le minimum sera atteint lorsque

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\alpha_i - a_i)^2 = 0,$$

c'est-à-dire pour

$$\alpha_1 = a_1, \qquad \alpha_2 = a_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = a_n.$$

S'il est possible pour chaque fonction $f(x)$ (composée d'un nombre fini de morceaux de fonctions continues) de faire correspondre à tout nombre positif ε un nombre entier N tel que l'inégalité $n > \mathrm{N}$ entraîne

$$\int_a^b \left(f - \sum_{i=1}^{i=n} a_i \varphi_i \right)^2 dx < \varepsilon,$$

nous dirons que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ constituent un système *complet* (1) de fonctions orthogonales (N dépend bien entendu de f). Ce cas est caractérisé par la condition

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a_i^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx$$

(1) Le système constitué par les polynomes de Legendre d'ordres 0, 1, 2,... normés constitue un système complet. Cela résulte du théorème fondamental de Weierstrass sur la possibilité du développement en série de polynomes uniformément convergente de toute fonction continue donnée (*voir* nos 19 et 39).

traduction de

$$\lim_{n=+\infty} \int_a^b \left(f - \sum_{i=1}^{i=n} a_i \varphi_i\right)^2 dx = 0.$$

Il suffit, pour qu'un système soit complet, qu'à toute fonction $f(x)$ (de la nature indiquée) et à tout nombre positif ε, on puisse faire correspondre une combinaison linéaire de fonctions φ, $\alpha_1 \varphi_1 + \ldots, \alpha_n \varphi_n$ telle que

$$\int_a^b [f - (\alpha_1 \varphi_1 + \ldots + \alpha_n \varphi_n)]^2 \, dx < \varepsilon,$$

puisque

$$\int_a^b [f - (\alpha_1 \varphi_1 + \ldots + \alpha_n \varphi_n)]^2 \, dx$$

$$\geqq \int_a^b [f - (a_1 \varphi_1 + \ldots + a_n \varphi_n)]^2 \, dx$$

$$\geqq \int_a^b [f - (a_1 \varphi_1 + \ldots + a_{n'} \varphi_{n'})]^2 \, dx,$$

pour tout $n' > n$.

ENSEMBLES INFINIS DE POINTS ET ENSEMBLES INFINIS DE FONCTIONS.

22. Ensemble de points. — Étant donné un ensemble *borné* de points en *nombre infini* [par exemple des points du segment $(0, 1)$ sur la droite Ox], on sait que cet ensemble a *au moins un point limite :* on peut extraire de l'ensemble une suite de points ayant une limite. Pour le démontrer, on utilise le procédé des subdivisions successives, on divise d'abord l'intervalle $(0, 1)$ en deux parties égales par le point d'abscisse $x = \frac{1}{2}$. Dans l'une des deux parties au moins il y a une infinité de points. On substituera l'intervalle correspondant (ou l'un des deux) à l'intervalle primitif et l'on raisonnera de la même façon. On obtiendra par ce procédé une suite d'intervalles emboîtés dont la longueur tend vers zéro et qui tendent vers un point limite A au voisinage duquel il y a une infinité de points de l'ensemble.

Ce résultat se généralise à l'espace à n dimensions. Si l'on a un nombre infini de points de l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

et si l'on suppose le carré de leur distance à l'origine borné par un nombre M, soit

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < \mathrm{M},$$

on peut extraire de l'ensemble une suite de points $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(\nu)}, \ldots$ ayant une limite L; le raisonnement est analogue à celui que nous venons de rappeler. L'élément général d'un de ces ensembles dépend d'un nombre *fini* n de paramètres.

Ensembles infinis de fonctions. — Si au lieu de points nous considérons des *fonctions continues*, nous remarquons qu'elles dépendent d'une infinité de paramètres.

Au lieu de considérer le carré de la distance d'un point à l'origine, nous considérons la « norme » sur (a, b) : $(a < b)$

$$\mathrm{N} = \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

C'est un nombre positif ou nul, qui n'est nul que si $f(x)$ est identiquement nulle sur (a, b).

Imaginons un ensemble quelconque de fonctions continues dont les *normes soient bornées* $\mathrm{N}_f < \mathrm{M}$; il n'en résulte pas que l'on puisse en extraire une suite de fonctions tendant vers une fonction continue.

Exemple. — Prenons sur l'intervalle $(-1, +1)$ les fonctions suivantes :

$$\text{Pour } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \qquad y_n = f_n(x) = 1 - n^2x^2$$

$\Big[$ainsi pour $x = 0$ on a $f_n(0) = 1$ quel que soit n et pour $x = \frac{1}{n}$ $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$; de même $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = 0\Big]$;

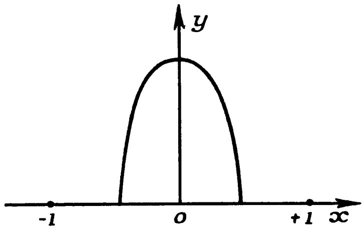
$$\text{pour } -1 < x < -\frac{1}{n}, \qquad y_n = 0;$$

$$\text{pour } \frac{1}{n} < x < 1, \qquad y_n = 0.$$

On a bien une suite infinie de fonctions continues de norme bornée et cependant on ne peut en extraire une suite de fonctions tendant vers une fonction continue, car une telle fonction étant nulle pour $x \neq 0$ devrait être nulle pour $x = 0$, ce qui n'est pas possible puisque $f_n(0) = 1$ quel que soit x.

Une autre différence est la suivante : Dans le cas d'un ensemble de points il suffisait d'imaginer une suite de points dont la distance à

Fig. 6.



l'origine tend vers zéro pour avoir une suite ayant zéro pour limite. L'exemple précédent montre que la norme d'une fonction peut tendre vers zéro sans que la fonction limite (existant d'ailleurs) soit identiquement nulle.

23. Nous allons introduire une notion qui va permettre de restreindre le choix des familles de fonctions que nous considérerons, de manière à pouvoir énoncer certains résultats simples; c'est la notion de l'*égale continuité*.

Définition. — Soit une famille comprenant une infinité de fonctions $f(x)$ définies dans l'intervalle $(0, 1)$ (fermé). Elles seront *également continues* si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre δ tel que l'inégalité

$$(1) \qquad |x' - x''| < \delta$$

entraîne

$$(2) \qquad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

le nombre δ étant valable pour *toutes les fonctions* de la famille. Si j'envisage une fonction particulière $f(x)$ continue, à tout nombre ε je puis faire correspondre δ tel que l'inégalité (1) entraîne l'inégalité (2). Seulement δ dépend en général de la fonction choisie $f(x)$; l'égale continuité indique que l'on peut choisir δ, dès que l'on s'est fixé ε. *une fois pour toutes*, c'est-à-dire quelle que soit la fonction $f(x)$ de de la famille considérée.

Théorème. — *Si les fonctions d'une famille sont également* *continues et également bornées* $[|f(x)| < \mathrm{M}$ *pour toutes les fonctions de la famille dans un intervalle fermé*], *on peut extraire de la famille une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction limite; cette fonction limite sera continue (puisqu'une suite de fonctions continues uniformément convergente a pour limite une fonction continue).*

(D'après cela les fonctions de l'exemple précédent ne constitueront pas une famille de fonctions également continues).

Démonstration. — Marquons sur l'intervalle (0, 1) une suite de points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *dénombrable*, *dense dans tout intervalle* (ce qui signifie que dans un intervalle quelconque il y aura au moins un point de l'ensemble). En fait, nous prendrons, pour abscisses, des nombres fractionnaires ayant pour dénominateur une puissance entière de 2

$$\begin{array}{llllllll} \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{1}{8}, & \frac{3}{8}, & \frac{5}{8}, & \frac{7}{8}, & \ldots; \\ x_1, & x_2, & x_3, & \ldots . \end{array}$$

C'est un ensemble dénombrable et dans un intervalle partiel si petit soit-il il y a toujours un point de l'ensemble. On peut même ajouter que, étant donnée une longueur ε on peut fixer un entier N tel que dans tout intervalle de la droite de longueur ε il y ait au moins un point correspondant à un indice inférieur ou égal à N; il suffit de choisir k de manière que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$, puis de choisir N tel que l'ensemble $(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{N})$ soit précisément l'ensemble de tous les nombres $\frac{p}{2^k}$, où p est entier.

Considérons alors la valeur en x_1 des fonctions de la famille; ces nombres $f(x_1)$ sont en module inférieurs ou égaux à M. Leur ensemble a au moins une valeur limite, on peut donc extraire de la famille une suite de fonctions

$$a_1(x), \quad a_2(x), \quad \ldots, \quad a_n(x), \quad \ldots,$$

telles que $a_1(x_1), a_2(x_1), \ldots, a_n(x_1), \ldots$ aient une limite quand n tend vers $+\infty$ [1].

[1] S'il se trouvait que les valeurs $f(x_1)$ soient en nombre fini, l'une d'elles au moins en tout cas serait prise par une infinité de fonctions de la famille; ce sont ces dernières fonctions qu'on appellerait $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots$; les nombres $a_n(x_1)$ étant tous égaux ont une limite qui leur est égale.

Nous ne considérerons dans ce qui suit que les fonctions de la famille $a(x)$.

Considérons les valeurs en x_2 de ces fonctions; les nombres $a_1(x_2)$, $a_2(x_2), \ldots, a_n(x_2), \ldots$, forment un ensemble borné. On peut en extraire une suite de nombres tendant vers une limite. On extrait ainsi de la première suite de fonctions une seconde suite de fonctions que nous appellerons

$$b_1(x), \quad b_2(x), \quad \ldots, \quad b_n(x), \quad \ldots,$$

telles que $b_n(x_2)$ ait une limite. Bien entendu $b_1(x_1)$, $b_2(x_1), \ldots$, tendent déjà vers une limite. Cette suite des $b_n(x)$ a une propriété de plus que la suite des $a_n(x)$: elle tend vers une limite aussi bien en x_2 qu'en x_1.

Soit maintenant

$$b_1(x_3), \quad b_2(x_3), \quad \ldots, \quad b_n(x_3), \quad \ldots$$

leurs valeurs en x_3; c'est une suite bornée, de la suite des $b_n(x)$ on pourra extraire une suite

$$c_1(x), \quad c_2(x), \quad \ldots. \quad c_n(x), \quad \ldots$$

qui tend vers une limite en x_3; cette suite a d'ailleurs une limite en x_1 et x_2.

Et ainsi de suite.... Nous avons obtenu une infinité de suites, chacune d'elles étant extraite de la précédente. Rangeons-les en un tableau rectangulaire

$$\begin{matrix} a_1(x) & b_1(x) & c_1(x) & \ldots \\ a_2(x) & b_2(x) & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{matrix}$$

et considérons les fonctions qui se trouvent sur la diagonale principale

$$\begin{matrix} a_1(x) & & \\ & b_2(x) & \\ & & c_3(x) \end{matrix}$$

c'est une suite infinie de fonctions extraites de la famille, nous allons montrer que cette suite est uniformément convergente dans l'intervalle fermé $(0, 1)$. Posons

$$a_1(x) = q_1(x), \qquad b_2(x) = q_2(x), \qquad \ldots.$$

Démontrons que $q_n(x)$ tend uniformément vers une fonction limite.

Donnons-nous ε et prenons le nombre δ correspondant à $\frac{\varepsilon}{3}$. D'aprés l'hypothèse de l'égale continuité, pour avoir

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3},$$

il suffira de prendre

$$|x'-x''|<\delta.$$

En allant assez loin dans la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$, on peut trouver un nombre p, tel que dans tout intervalle de longueur δ il tombe certainement un point au moins de la suite finie

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_p.$$

Considérons les valeurs des q en un des points x_h de cette suite $(h=1, 2, \ldots, p)$ on peut choisir un nombre $N(\varepsilon)$ tel que la double inégalité

$$n>N, \qquad m>N$$

entraîne

$$|q_n(x_h)-q_m(x_h)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

en raison de la convergence en x_h de la famille des fonctions q. En prenant N suffisamment grand, l'inégalité sera vérifiée pour

$$h=1, \qquad h=2, \qquad \ldots, \qquad h=p.$$

Évaluons maintenant la différence $|q_n(x)-q_m(x)|$, x étant quelconque; choisissons pour x_h un point tel que $|x-x_h|<\delta$, ce qui est possible d'après la manière dont on a choisi p. Grâce à l'égale continuité, nous aurons

$$|q_m(x)-q_m(x_h)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$|q_n(x)-q_n(x_h)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part

$$|q_n(x)-q_m(x)| \leqq |q_n(x)-q_n(x_h)|+|q_n(x_h)-q_m(x_h)| \\ +|q_m(x_h)-q_m(x)|,$$

c'est-à-dire

$$|q_n(x)-q_m(x)|<\varepsilon.$$

En conséquence, étant donné un nombre positif ε, on a pu lui faire correspondre un nombre N tel que les inégalités $n>N$, $m>N$

entraînent

$$| q_n(x) - q_m(x) | < \varepsilon,$$

cela pour tout point x du segment (o, 1). Cela prouve *la convergence uniforme de la suite* $q_n(x)$.

On peut affirmer que la suite

$$q_1(x), \quad q_2(x), \quad \ldots, \quad q_n(x), \quad \ldots$$

tend uniformément vers une limite $q(x)$, et que cette limite est une *fonction continue;* car la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues est continue.

24. On a fait une hypothèse surabondante : les fonctions étaient supposées également bornées. On peut la remplacer par une autre, comme nous allons le voir, mais *l'égale continuité ne suffit pas*, comme le montre l'exemple suivant : Considérons la famille de fonctions

$$f(x) + n,$$

qui sont évidemment « également continues » si $f(x)$ est supposée continue; mais on ne peut en extraire une suite tendant vers une fonction continue, car ces fonctions tendent vers $+\infty$ en chaque point. Il suffit d'ailleurs d'ajouter une restriction : on supposera que l'on peut extraire de la famille une suite de fonctions dont les valeurs *en un point particulier du segment* (o, 1) *sont bornées.*

On peut en effet prendre ce point comme premier de la série

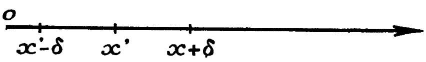
$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots.$$

La suite de fonctions $a_1(x)$, $a_2(x), \ldots,$ est bornée en x_1. La famille étant également continue, il en résulte, comme nous allons le voir, non seulement que chacune de ces fonctions est bornée dans l'intervalle, mais aussi qu'elles sont également bornées.

Nous savons qu'à tout nombre positif ε correspond un nombre δ tel que l'inégalité $| x' - x'' | \leqq \delta$ entraîne

$$| f(x') - f(x'') | < \varepsilon.$$

Fig. 7.



Prenons x' fixe; dès que $x' - \delta \leqq x \leqq x' + \delta$, on a

$$| f(x) - f(x') | < \varepsilon,$$

en particulier

$$|f(x'+\delta)-f(x')|<\varepsilon;$$

de même x étant un nombre quelconque de l'intervalle

$$x'<x<x'+2\delta,$$

on aura

$$|f(x)-f(x'+\delta)|<\varepsilon$$

et, par suite, dans le même intervalle

$$|f(x)-f(x')|<2\varepsilon.$$

En prenant suffisamment d'intervalles, on voit que pour

$$x'<x<x'+n\delta,$$

on aura

$$|f(x)-f(x')|<n\varepsilon.$$

On finira ainsi par recouvrir tout l'intervalle en prenant n suffisamment grand.

Si la famille de fonctions également continues est bornée en x', toutes les fonctions seront également bornées dans l'intervalle, car

$$|f(x)|\leqq|f(x)-f(x')|+|f(x')|<n\varepsilon+\mathrm{M}.$$

25. **Conditions suffisantes pour que les fonctions d'une famille soient également continues.** — Supposons que le taux de variation soit borné. On a

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<\mathrm{M},$$

M est le même pour toutes les valeurs de x et de h et pour toutes les fonctions de la famille. Nous pouvons écrire, en désignant par x' et x'' deux valeurs quelconques de l'intervalle

$$|f(x')-f(x'')<\mathrm{M}\,|x'-x''|.$$

Le premier membre sera plus petit que ε, si nous prenons

$$\mathrm{M}\,|x'-x''|<\varepsilon,$$

c'est-à-dire si

$$|x'-x''|<\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}.$$

Imaginons maintenant que ces fonctions aient des dérivées bornées dans leur ensemble; la condition précédente sera réalisée. On a en effet

$$\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} = f'(\xi),$$

ξ étant un point de l'intervalle, mais on a, quel que soit f et ξ,

$$|f'(\xi)| < \mathrm{M};$$

on retrouve la condition précédente et la famille de fonctions est une famille de fonctions également continues.

Exemple. — Considérons la famille de fonctions $g(x)$ qui découlent d'une *fonction arbitraire continue à norme bornée* au moyen d'un « noyau » $\mathrm{K}(x, y)$ par la formule

$$g(x) = \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, h(y)\, dy,$$

la fonction $\mathrm{K}(x, y)$ est supposée bien *définie* et continue dans le champ (a, b), (a, b); la fonction $h(y)$ est arbitraire mais continue et l'on suppose

$$\int_a^b h^2(y)\, dy < \mathrm{M}.$$

Puisque $\mathrm{K}(x, y)$ est donné, la formule fait correspondre à chaque fonction $h(y)$ une fonction $g(x)$. Je dis que ces fonctions g sont également continues et également bornées.

1° Elles sont *également bornées*. L'inégalité de Schwarz donne

$$g^2(x) \leqq \int_a^b \mathrm{K}^2(x, y)\, dy \int_a^b h^2(y)\, dy;$$

or,

$$\int_a^b h^2(y)\, dy < \mathrm{M};$$

d'autre part,

$$\int_a^b \mathrm{K}^2(x, y)\, dy$$

est une fonction continue de x dans ab fermé, son module est borné, les fonctions $g(x)$ sont également bornées.

2° Elles sont *également continues*. On a en effet

$$g(x') - g(x'') = \int_a^b [\mathrm{K}(x', y) - \mathrm{K}(x'', y)]\, h(y)\, dy$$

et. par suite,

$$[(g(x') - g(x'')]^2 < \int_a^b h^2(y)\,dy \int_a^b [K(x', y) - K(x'', y)]^2\,dy$$

ou, puisque les normes des fonctions $h(x)$ sont bornées,

$$[g(x') - g(x'')]^2 < M \int_a^b [K(x', y) - K(x'', y)]^2\,dy;$$

de plus, grâce à l'uniforme continuité de $K(x, y)$ on peut diminuer l'intégrale à volonté et par suite la quantité

$$[g(x') - g(x'')]^2$$

en prenant $|x' - x''|$ assez petit.

APPLICATION A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES.

26. Les résultats précédents peuvent servir à la résolution des équations intégrales de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

le noyau $K(x, y)$ et la fonction $f(x)$ sont supposés continus donnés; λ est un paramètre, la fonction $\varphi(x)$ est la fonction inconnue.

Lorsque la fonction $f(x)$ est identiquement nulle, l'équation précédente se réduit à l'équation homogène

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = 0,$$

qui admet toujours la solution $\varphi(x) = 0$. Si elle en possède une autre [1] $\varphi_1(x)$, on pourra normaliser $\varphi_1(x)$. Si elle en a plusieurs linéairement indépendantes $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., nous pourrons toujours les supposer orthogonales et normales, en appliquant le procédé qui a été indiqué précédemment.

Une valeur de λ pour laquelle l'équation homogène possède une solution non identiquement nulle, s'appelle *valeur singulière du paramètre*. Les solutions correspondantes φ_1, φ_2, ... supposées *orthogonales et normales* sont appelées fonctions fondamentales relatives

(1) Nous nous bornons aux solutions continues.

à la valeur λ; leur nombre, relativement à une valeur déterminée, est *limité* comme nous allons le montrer.

Formons les « composantes » relativement aux φ de la fonction $K(x, y)$ considérée comme fonction de y, nous aurons les expressions

$$\int_a^b K(x, y)\,\varphi_1(y)\,dy, \qquad \int_a^b K(x, y)\,\varphi_2(y)\,dy, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\lambda}\varphi_1(x), \quad \frac{1}{\lambda}\varphi_2(x), \quad \ldots.$$

En nous bornant aux h premières, l'inégalité de Bessel nous donne

$$\frac{1}{\lambda^2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_h^2) \leqq \int_a^b K^2(x, y)\,dy,$$

d'où l'on déduit, par une intégration

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\int_a^b \varphi_1^2\,dx + \ldots + \int_a^b \varphi_h^2\,dx\right) \leqq \int_a^b dx \int_a^b K^2(x, y)\,dy,$$

ou encore

$$\frac{1}{\lambda^2} h \leqq \int_a^b dx \int_a^b K^2(x, y)\,dy.$$

On obtient ainsi une limite supérieure pour h

$$h \leqq \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(x, y)\,dx\,dy.$$

Théorème fondamental pour un noyau continu quelconque. — Nous allons appliquer les résultats du chapitre précédent à la résolution de l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

la fonction $K(x, y)$ étant donnée et continue ainsi que $f(x)$, λ étant un paramètre dont la valeur est donnée.

Considérons le noyau $K(x, y)$ comme la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions

$$A_n(x, y) = \sum_{i=1}^{i=p_n} X_i Y_i,$$

X_i étant fonction continue de x et Y_i fonction continue de y. On peut, par exemple, prendre pour $A_n(x, y)$ un polynome en x, y.

Soit alors l'équation intégrale « approchée »

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b A_n(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x), \tag{1}$$

où $\lambda \neq 0$.

Si n croît indéfiniment, deux cas peuvent se présenter à l'exclusion l'un de l'autre.

Premier cas. — A chaque fonction $f(x)$ on peut faire correspondre *une infinité de valeurs de* n telles que l'équation (1) ait quelque solution $\varphi_n(x)$ dont la *norme est inférieure à un nombre fixe* M indépendant de n.

Deuxième cas. — L'hypothèse précédente n'est pas réalisée. Il existe alors au moins une fonction $f(x)$ à laquelle on ne puisse pas faire correspondre une telle infinité de valeurs de n. Une telle fonction sera dite exceptionnelle.

Ce cas se décompose lui-même en deux :

a. Celui où, pour l'une au moins des fonctions exceptionnelles $f(x)$, l'équation (1) a quelque solution pour une infinité de valeurs de n. Les normes de ces solutions ne sont pas bornées. En supprimant certaines valeurs de n, on peut faire en sorte que ces normes tendent vers $+\infty$.

b. Celui où, pour chaque fonction exceptionnelle, l'équation (1) n'a de solution que pour un nombre fini de valeurs de n : ayant choisi une de ces fonctions exceptionnelles, et supprimé ces valeurs de n, on aura une suite infinie de valeurs de l'indice pour lesquelles l'équation avec second membre sera impossible; alors, d'après un résultat vu dans le cas des noyaux dégénérés, on pourra affirmer que, pour chaque indice de cette suite, l'équation sans second membre correspondante pourra être satisfaite par une fonction normée.

Étude du premier cas (en supprimant au besoin certaines valeurs de n). — Soit $\varphi_n(x)$ une solution de norme inférieure à M, elle satisfait à la relation

$$\varphi_n(x) - \lambda \int_a^b A_n(x, y)\, \varphi_n(y)\, dy = f(x),$$

(1) *Voir* l'étude des équations à noyau dégénéré, faite plus haut.

que l'on peut écrire

$$\varphi_n(x) - f(x) = \lambda \int_a^b A_n(x, y)\, \varphi_n(y)\, dy,$$

avec la condition

$$\int_a^b \varphi_n^2(y)\, dy < M.$$

Nous pouvons alors affirmer que les fonctions $\varphi_n(x) - f(x)$ forment une famille de fonctions également continues et également bornées (¹). On pourra en extraire une suite de fonctions tendant uniformément vers une limite continue. Soit $\varphi(x) - f(x)$ cette limite; je dis que $\varphi(x)$ vérifie l'équation intégrale : il existe en effet parmi les $\varphi_n(x)$ une suite de fonctions

$$\varphi_{n_1}, \quad \varphi_{n_2}, \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}, \quad \ldots$$

tendant uniformément vers $\varphi(x)$; l'intégrale

$$\int_a^b A_{n_p}(x, y)\, \varphi_{n_p}(y)\, dy$$

tend uniformément vers

$$\int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy;$$

on a, par suite,

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x).$$

Étude du deuxième cas. — *a*. Soit $\varphi_n(x)$ une *solution de norme tendant vers* $+\infty$

$$C_n = \int_a^b \varphi_n^2(y)\, dy \qquad \text{avec } \lim_{n \to \infty} C_n = +\infty;$$

on a encore

$$\varphi_n(x) - \lambda \int_a^b A_n(x, y)\, \varphi_n(y)\, dy = f(x)$$

(¹) Voir la démonstration du n° 25, que l'on complétera aisément en utilisant l'inégalité

$$|A_n(x, y) - A_n(x', y)| \leqq |A_n(x, y) - K(x, y)| + |K(x, y) - K(x', y)| + |K(x', y) - A_n(x', y)|.$$

ou, en divisant par $\sqrt{C_n}$,

$$\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{C_n}} - \lambda \int_a^b A_n(x, y) \frac{\varphi_n(y)}{\sqrt{C_n}} dy = \frac{f(x)}{\sqrt{C_n}}.$$

La norme de $\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{C_n}}$ étant égale à 1.

On peut encore écrire

$$\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{C_n}} - \frac{f(x)}{\sqrt{C_n}} = \lambda \int_a^b A_n(x, y) \frac{\varphi_n(y)}{\sqrt{C_n}} dy$$

et remarquer que $\frac{f(x)}{\sqrt{C_n}}$ tend uniformément vers zéro lorsque n croît indéfiniment. D'après l'égalité, le premier membre est constitué par une famille de fonctions également continues et également bornées. On peut en extraire une suite de fonctions tendant uniformément vers une limite $\varphi(x)$ continue *normée*, puisque sa valeur est la limite de $\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{C_n}}$ qui est normée. Cette limite satisfait à l'équation sans second membre

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0.$$

b. On a, quel que soit n,

$$0 = \psi_n(x) - \lambda \int_a^b A_n(x, y)\, \psi_n(y)\, dy,$$

les fonctions $\psi_n(x)$ étant supposées normées. Elles constituent, d'après l'égalité même, une famille de fonctions également bornées et également continues. On peut en extraire une suite tendant uniformément vers une limite continue $\psi(x)$; cette limite sera solution de l'équation homogène

$$0 = \psi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \psi(y)\, dy$$

[comme on le voit encore en utilisant l'hypothèse de l'uniforme convergence de $A_n(x, y)$ et des $\psi_n(x)$ choisies].

Nous avons montré que l'équation sans second membre (à noyau continu quelconque) n'a qu'un nombre limité r de solutions linéairement indépendantes. *Si* $r = 0$, le « deuxième cas » ne peut se présenter, puisqu'il conduit toujours à une solution pour l'équation sans second membre

$$0 = \psi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \psi(y)\, dy;$$

nous sommes donc dans le premier cas et l'équation avec second membre *possède, quel que soit f, une solution.* (*Elle ne peut en posséder plusieurs* puisque la différence de deux d'entre elles serait une solution de l'équation homogène.)

Montrons maintenant que *si l'équation homogène a $r \geqq 1$ solutions indépendantes exactement, il en est de même pour l'équation associée*

$$\chi(x) - \lambda \int_a^b K(y, x)\, \chi(y)\, dy = 0.$$

Soient $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ des solutions orthogonales et normées de

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \psi(y)\, dy = 0. \tag{1}$$

Posons

$$\psi_1(x) - \lambda \int_a^b A_n(x, y)\, \psi_1(y)\, dy = \delta_{n1}(x),$$

cette fonction tend uniformément vers zéro, il en est de même des expressions analogues $\delta_{n,h} (h = 1, 2. \ldots, r)$.

Utilisons le noyau dégénéré ([1])

$$A_n(x, y) + \frac{1}{\lambda}\delta_{nh}(x)\, \psi_h(y) = A'_n(x, y).$$

On a

$$\psi_1(x) - \lambda \int_a^b \left[A_n(x, y) + \frac{1}{\lambda}\delta_{nh}(x)\, \psi_h(y)\right] \psi_1(y)\, dy$$
$$= \delta_{n1} - \delta_{nh} \int_a^b \psi_h(y)\, \psi_1(y)\, dy = 0,$$

$A'_n(x, y)$ est un noyau dégénéré qui tend uniformément, comme $A_n(x, y)$, vers $K(x, y)$, mais tel que l'équation sans second membre

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b A'_n(x, y)\, \psi(y)\, dy = 0 \tag{1'}$$

([1]) Rappelons une fois de plus que si h figure deux fois dans un terme monome, on doit considérer que l'on fait la sommation par rapport à cet indice.

admet les r solutions $\psi_h(x)$. Elle ne peut en avoir une $r+1^{\text{ième}}$ orthogonale à tous les ψ, du moins pour n assez grand, car on en déduirait en utilisant encore l'égale continuité et le passage à la limite l'existence d'une $r+1^{\text{ième}}$ solution pour (1).

D'après ce que nous avons vu sur les équations à noyau dégénéré, pour ces valeurs de n

$$(2) \qquad \chi(x) - \lambda \int_a^b A'_n(y, x)\,\chi(y)\,dy = 0$$

a aussi r solutions linéairement indépendantes (orthogonales et normées); d'où résulte en utilisant encore l'égale continuité et le passage à la limite, l'existence de r solutions indépendantes pour

$$(2') \qquad \chi(x) - \lambda \int_a^b K(y, x)\,\chi(y)\,dy = 0.$$

Cette équation n'en a d'ailleurs pas plus de r, puisqu'on en déduirait inversement l'existence de plus de r solutions indépendantes pour (1).

Dans le cas $r \geqq 1$, *conditions nécessaires pour que l'équation avec second membre ait quelque solution.* De

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

on tire

$$\int_a^b \varphi(x)\,\chi_1(x)\,dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, y)\,\chi_1(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy = \int_a^b f(x)\,\chi_1(x)\,dx,$$

mais l'intégrale double s'écrit

$$\int_a^b \varphi(y)\,dy \int_a^b K(x, y)\,\chi_1(x)\,dx$$

ou encore

$$\int_a^b \varphi(y)\,dy\,\frac{\chi_1(y)}{\lambda}.$$

Donc

$$\int_a^b f(x)\,\chi_1(x)\,dx = 0$$

et de même,

$$\int_a^b f(x)\,\chi_h(x)\,dx = 0 \qquad \text{pour } h = 1, 2, \ldots, r.$$

Montrons que les r conditions sont suffisantes. — Considérons r solutions, linéairement indépendantes, de (2), χ_{hn}, orthogonales et normées, pour lesquelles en ne prenant que des valeurs convenables de n, on pourra affirmer que $\chi_{hn}(x)$ tend uniformément vers une limite $\chi_h(x)$. Formons

$$f(x) - \chi_{hn}(x) \int_a^b \chi_{hn}(y) f(y)\, dy$$

que nous appellerons $f_n(x)$ [1]. Si les r conditions indiquées sont réalisées, $f_n(x)$ tend uniformément vers $f(x)$ puisque $\int_a^b \chi_{hn}(y) f(y)\, dy$ tend vers $\int_a^b \chi_h(y) f(y)\, dy$ qui est nul. D'autre part, on a

$$\int_a^b f_n(x)\chi_{1n}(x)\, dx = \int_a^b f(x)\chi_{1n}(x)\, dx - \int_a^b \chi_{1n}(y) f(y)\, dy = 0,$$

$f_n(x)$ étant donc orthogonale aux r fonctions $\chi_{hn}(x)$, l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b A'_n(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f_n(x)$$

a une solution au moins, et l'on a la possibilité de choisir cette solution orthogonale à $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$. La fonction $\varphi_n(x)$ ainsi choisie a une *norme bornée;* s'il n'en était pas ainsi, l'utilisation de l'égale continuité et du passage à la limite conduirait à la démonstration de l'existence d'une solution de (1) normée et orthogonale aux ψ, ce qui est impossible. Ce point acquis, une nouvelle application de la méthode (égale continuité et passage à la limite) montre l'existence d'une fonction $\varphi(x)$ (orthogonale d'ailleurs aux ψ) telle que

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x).$$

27. Formules de Fredholm. — En nous plaçant à un autre point de vue nous pouvons substituer à l'équation

$$\varphi(x) - \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

---

[1] Dans le second terme, il est entendu que l'on fait la sommation par rapport à h, qui figure deux fois dans le produit. *Au contraire n a une valeur déterminée.*

un système d'équations ordinaires. Au lieu de considérer le noyau comme la limite d'une suite de polynomes, nous pouvons revenir à la définition même de l'intégrale et décomposer l'intervalle $(0, 1)$ en n parties égales (*cf.* **12**).

Les valeurs des inconnues $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$, $\varphi\left(\frac{2}{n}\right)$, ..., sont des fractions dont les deux termes sont des déterminants. En recherchant ce qu'elles deviennent lorsque n tend vers l'infini, on est amené aux séries de Fredholm.

Séries de Fredholm. — Nous écrirons *a priori* les séries que l'on a été amené à imaginer; nous verrons qu'elles donnent bien la solution. Posons, en revenant à l'intervalle (a, b),

$$a_0(x, y) = K(x, y),$$

$$a_1(x, y) = \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, t) \\ K(t, y) & K(t, t) \end{vmatrix} dt,$$

et, d'une manière générale,

$$a_n(x, y) = \int_a^b \cdots \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, y) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n.$$

Posons aussi

$$A_n = \int_a^b a_{n-1}(t, t)\, dt;$$

le résultat fondamental sera le suivant : si la série

$$\Delta = 1 - \frac{A_1}{1} + \frac{A_2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{A_n}{n!} + \dots$$

n'est pas nulle, l'équation intégrale a une solution et une seule, qui s'exprime d'une manière simple à l'aide d'une fraction où Δ est le dénominateur, le numérateur étant la série

$$\delta = a_0(x, y) - \frac{a_1(x, y)}{1} + \frac{a_2(x, y)}{2!} - \dots .$$

Nous montrerons que ces deux séries sont convergentes, δ l'étant uniformément dans le carré fondamental.

Identités fondamentales. — En *admettant cette double convergence,* établissons tout d'abord deux identités que nous utiliserons dans la suite.

Développons le déterminant

$$\begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,t_1) & \dots & K(x,t_n) \\ K(t_1,y) & K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n,y) & K(t_n,t_1) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix};$$

par rapport aux éléments de la première colonne; on pourra l'écrire

$$K(x,y)\begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \dots & K(t_1,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix}$$

$$-K(t_1,y)\begin{vmatrix} K(x,t_1) & \dots & K(x,t_n) \\ K(t_2,t_1) & \dots & K(t_2,t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_n,t_1) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix}$$

$$+K(t_2,y)\begin{vmatrix} K(x,t_1) & \dots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_n) \\ K(t_3,t_1) & \dots & K(t_3,t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_n,t_1) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix}$$

$$-\dots\dots\dots\dots,$$

Dans le déterminant multiplicateur de $K(t_2, y)$ on amènera la colonne $K(., t_2)$ au premier rang. Dans le déterminant multiplicateur de $K(t_3, y)$, on amènera la colonne $K(., t_3)$ au premier rang, etc. Nous obtenons alors l'identité

$$a_n(x,y) = K(x,y)A_n - n\int_a^b K(t,y)\,a_{n-1}(x;t)\,dt,$$

quel que soit $n \geqq 1$.

Remplaçons n par $0, 1, 2, \dots$, nous aurons successivement

$$\begin{aligned} a_0(x,y) &= K(x,y), \\ -a_1(x,y) &= -K(x,y)A_1 + \int K(t,y)\,a_0(x,t)\,dt, \\ +a_2(x,y) &= K(x,y)A_2 - 2\int K(t,y)\,a_1(x,t)\,dt, \\ -&\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

ajoutons après multiplication par des facteurs convenables, nous avons l'identité

$$a_0(x, y) - \frac{a_1(x, y)}{1} + \frac{a_2(x, y)}{2!} - \ldots$$
$$= K(x, y)\left(1 - \frac{A_1}{1} + \frac{A_2}{2!}\cdots\right) + \int_a^b K(t, y)\left[a_0(x, t) - \frac{a_1(x, t)}{1}\cdots\right] dt$$

ou encore

$$\delta(x, y) = K(x, y)\Delta + \int_a^b K(t, y)\,\delta(x, t)\,dt.$$

Si l'on avait développé par rapport à la première ligne, on aurait obtenu d'une manière analogue

$$a_n(x, y) = K(x, y) A_n - n\int_a^b K(x, t)\, a_{n-1}(t, y)\, dt$$

et, par suite,

$$\delta(x, y) = K(x, y)\Delta + \int_a^b K(x, t)\,\delta(t, y)\,dt.$$

Remarque. — Étant donnée une fonction $\varphi(x)$, on peut lui faire correspondre la fonction

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy$$

lorsque l'on s'est donné le noyau $K(x, y)$. Le résultat de cette opération sera désigné par $S(\varphi)$.

Cherchons le résultat de deux opérations successives $S_1[S_2(\varphi)]$.

On a, par définition,

$$S_1[S_2(\varphi)] = \chi(x) + \int_a^b K_1(x, y)\,\chi(y)\,dy$$

avec

$$\chi(x) = \varphi(x) + \int_a^b K_2(x, y)\,\varphi(y)\,dy,$$

c'est-à-dire

$$S_1[S_2(\varphi)] = \varphi(x) + \int_a^b K_2(x, y)\,\varphi(y)\,dy$$
$$+ \int_a^b K_1(x, y)\,dy\left[\varphi(y) + \int_a^b K_2(y, t)\,\varphi(t)\,dt\right]$$

ou encore

$$S_1[S_2(\varphi)] = \varphi(x) + \int_a^b K_2(x, y)\,\varphi(y)\,dy + \int_a^b K_1(x, y)\,\varphi(y)\,dy$$
$$+ \int_a^b K_1(x, y)\,dy \int_a^b K_2(y, t)\,\varphi(t)\,dt;$$

le dernier terme du second membre peut s'écrire

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt \int_a^b \mathrm{K}_1(x, y)\,\mathrm{K}_2(y, t)\,dy;$$

en changeant de notation (y pour t et t pour y), on trouve

$$\int_a^b \varphi(y)\,dy \int_a^b \mathrm{K}_1(x, t)\,\mathrm{K}_2(t, y)\,dt,$$

ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{S}_1[\mathrm{S}_2(\varphi)] = \varphi(x) + \int_a^b \varphi(y)\,dy\left[\mathrm{K}_1(x, y) + \mathrm{K}_2(x, y) + \int_a^b \mathrm{K}_1(x, t)\,\mathrm{K}_2(t, y)\,dt\right].$$

Ce résultat va nous permettre de démontrer que, si $\Delta \neq 0$, l'équation

$$\varphi(x) - \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

a une solution et une seule donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \frac{\delta(x, t)}{\Delta} f(t)\,dt.$$

Existence et unicité de la solution lorsque $\Delta \neq 0$. — Montrons d'abord que si l'équation intégrale a une solution, *elle n'en a qu'une*. Soit

$$(1) \qquad \varphi(x) - \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

l'équation intégrale considérée. Nous allons effectuer sur la solution $\varphi(x)$ l'opération

$$\mathrm{S}_{\frac{\delta}{\Delta}}[\mathrm{S}_{-\mathrm{K}}],$$

qui équivaut à une seule opération S de noyau

$$\frac{\delta(x, y)}{\Delta} - \mathrm{K}(x, y) - \int_a^b \frac{\delta(x, t)}{\Delta} \mathrm{K}(t, y)\,dt;$$

or, cette expression est identiquement nulle d'après l'identité

$$\delta(x, y) = \Delta\,\mathrm{K}(x, y) + \int_a^b \delta(x, t)\,\mathrm{K}(t, y)\,dt,$$

on obtient tout simplement $\varphi(x)$. Cela prouve que s'il y a une solution, elle ne peut avoir comme expression que

$$(2) \qquad f(x)+\int_a^b \frac{\delta(x, t)}{\Delta} f(t)\,dt.$$

Nous allons voir maintenant que *cette expression représente bien une solution;* en la substituant dans le premier membre de l'équation intégrale, on voit qu'il suffit de former

$$S_{-K}\left[S_{\frac{\delta}{\Delta}} f(x)\right],$$

le résultat est la substitution relative au noyau

$$-K(x, y)+\frac{\delta(x, y)}{\Delta}-\int K(x, t)\frac{\delta(t, y)}{\Delta}\,dt;$$

or, cette expression est nulle d'après l'identité

$$\delta(x, y)=\Delta\, K(x, y)+\int_a^b K(x, t)\,\delta(t, y)\,dt.$$

Il est ainsi démontré que (2) est bien solution de (1).

28. Passons aux démonstrations de convergence annoncées plus haut.

Lemme (Inégalité d'Hadamard). — *Valeur maximum d'un déterminant.* — Considérons un déterminant

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

à éléments réels. Nous allons démontrer l'inégalité

$$A^2 \leqq \prod_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}^2.$$

Supposons que les éléments varient, la somme des carrés des éléments de chaque ligne restant constante. On aura donc les n conditions

tions

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{=n} a_{ik}^2 = H_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

[Dans le cas où $n = 3$ par exemple, cela revient à dire que les vecteurs de composantes respectivement (a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33}) ont des longueurs constantes et l'inégalité exprime que le volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs est au plus égal à la valeur qu'il prend lorsque le parallélépipède devient rectangle.]

Désignons par A_{max} la plus grande valeur prise par le déterminant en tenant compte des conditions restrictives (1). Cette plus grande valeur est prise effectivement par A. (Théoreme relatif aux fonctions continues définies sur un ensemble fermé.)

Nous allons montrer que pour des valeurs des a donnant à A sa valeur maxima A_{max} les éléments du déterminant sont proportionnels aux mineurs correspondants.

Pour une valeur déterminée de h, on a

$$A = a_{h1} A_{h1} + \ldots + a_{hn} A_{hn}$$

et l'inégalité de Lagrange donne

$$A^2 \leqq \sum_{k=1}^{k=n} a_{hk}^2 \sum_{k=1}^{k=n} A_{hk}^2 = H_h^2 \sum_{k=1}^{k=n} A_{hk}^2.$$

Le signe d'inégalité correspond au cas où les éléments $a_{h1}, a_{h2}, \ldots, a_{hn}$ ne sont pas proportionnels aux mineurs correspondants. Si on les modifie alors en laissant la somme de leurs carrés constante de manière qu'ils deviennent proportionnels aux mineurs A_{hk}, la valeur du déterminant serait *augmentée*, ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'après laquelle A aurait précisément sa valeur maximum.

Multiplions maintenant le déterminant A_{max} par lui-même en tenant compte de la proportionnalité des mineurs aux éléments, le carré du déterminant A_{max} se réduit à un déterminant dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la diagonale principale et l'on a

$$A_{max}^2 = H_1^2 H_2^2 \ldots H_n^2.$$

Il en résulte, pour le déterminant primitif A, l'inégalité

$$A^2 < H_1^2 H_2^2 \ldots H_n^2 = \prod_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}^2.$$

Conséquence. — Supposons que l'on sache seulement que la valeur absolue de chaque élément du déterminant A soit au plus égal à un nombre donné M. Alors si n est le nombre des éléments d'une ligne on aura

$$|A| < \prod_{i=1}^{i=n} \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}^2} \leqq \left[(n M^2)^{\frac{1}{2}}\right]^n = M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

Supposons que l'on ait dans le carré fondamental

$$|K(x, y)| \leqq M,$$

on en déduit dans le même carré, une limitation en module pour les coefficients $a_0(x, y)$, $a_1(x, y)$, ..., $a_n(x, y)$

$$\begin{aligned} &|a_0| < M, \\ &|a_1| < (b-a) M^2 . 2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &|a_n| < (b-a)^n M^{n+1} (n+1)^{\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

ou encore, λ étant une constante quelconque,

$$|\lambda|^n \frac{|a_n|}{n!} < \frac{(b-a)^n}{n!} |\lambda|^n M^{n+1} (n+1)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Montrons que la série à termes positifs

$$u_n = \frac{(b-a)^n}{n!} |\lambda|^n M^{n+1} (n+1)^{\frac{n+1}{2}}$$

est convergente.

Formons à cet effet le rapport d'un terme au précédent; on trouve

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{b-a}{n+1} |\lambda| M \frac{(n+2)^{\frac{n+2}{2}}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$$

ou encore

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (b-a) |\lambda| M \sqrt{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}} \frac{\sqrt{n+2}}{n+1},$$

et l'on voit immédiatement que $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = e$ et que $\frac{\sqrt{n+2}}{n+1}$ tend vers zéro, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers zéro et la série envisagée u_n est bien convergente, la série de terme général $(-1)^n \lambda^n \frac{a_n(x, y)}{n\,!}$ est donc uniformément convergente dans le carré fondamental.

La démonstration est tout analogue pour $1 - \frac{\lambda}{1} A_1 + \frac{\lambda^2}{2} A_2 - \ldots$. Les calculs précédemment indiqués sont donc entièrement justifiés.

La solution de l'équation

$$(1) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

se présente sous la forme

$$(2) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\delta(x, t, \lambda)}{\Delta(\lambda)} f(t)\,dt,$$

où

$$\delta(x, y, \lambda) = a_0(x, y) - \frac{\lambda}{1} a_1(x, y) + \ldots$$

et

$$\Delta(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1} A_1 + \frac{\lambda^2}{2!} A_2 - \ldots.$$

En tant que fonction de λ, la résolvante $\frac{\delta(x, t, \lambda)}{\Delta(\lambda)} = R(x, t, \lambda)$ se présente comme le quotient de deux fonctions *entières* de λ puisque les deux séries convergent quel que soit λ. Ces deux séries gardent un sens pour λ complexe. Pour toute valeur de λ, *même complexe*, qui *n'annule pas* $\Delta(\lambda)$, l'équation (1) a une solution et une seule et cette solution est donnée par (2).

On démontre que si λ_0 est un zéro de $\Delta(\lambda)$, λ_0 est effectivement une valeur singulière de l'équation, c'est-à-dire que l'équation sans second membre admet effectivement des solutions non identiquement nulles. On démontre de plus que le nombre de solutions linéairement indépendantes de cette équation est au plus égal à l'ordre de multiplicité du zéro λ_0.

29. Remarques. — 1° Il peut se faire que $\Delta(\lambda)$ n'ait pas de zéro. En voici un exemple : prenons pour noyau

$$K(x, y) = \sin x \cos y$$

avec

$$0 \leqq x \leqq \pi, \qquad 0 \leqq y \leqq \pi;$$

l'équation intégrale s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi \sin x \cos y \, \varphi(y) \, dy = f(x)$$

ou encore

$$\varphi(x) - \lambda \sin x \int_0^\pi \cos y \, \varphi(y) \, dy = f(x),$$

ce qui conduit à poser

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda C \sin x,$$

C étant une constante inconnue qu'il s'agit de déterminer. Pour la calculer remplaçons $\varphi(x)$ par cette expression dans l'expression même de C, nous trouvons

$$C = \int_0^\pi \cos y \, \varphi(y) \, dy = \int_0^\pi f(y) \cos y \, dy + \lambda C \int_0^\pi \sin y \cos y \, dy.$$

Le terme λ disparaît et nous avons

$$C = \int_0^\pi f(y) \cos y \, dy.$$

Quel que soit λ, on a une solution

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sin x \int_0^\pi f(y) \cos y \, dy.$$

Exemple analogue $K(x, y) = \sin nx . \cos ny$ où n entier quelconque.

2° *Cas des noyaux dégénérés.* — Ce qui a été dit dans le cas des systèmes linéaires de n équations à n inconnues suggère un procédé de résolution de l'équation de Fredholm.

Reprenons le cas des noyaux dégénérés

$$K(x, y) = \alpha_1(x) \beta_1(y) + \alpha_2(x) \beta_2(y) + \ldots + \alpha_n(x) \beta_n(x),$$

l'équation s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \sum \alpha_h(x) \beta_h(y) \varphi(y) \, dy = f(x)$$

ou encore

$$\varphi(x) - \lambda \sum \alpha_h(x) \int_a^b \beta_h(y) \varphi(y) \, dy = f(x).$$

Nous pouvons écrire, en posant

$$x_h = \int_a^b \varphi(y)\,\beta_h(y)\,dy,$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum \alpha_h(x) x_h;$$

une fois les inconnues x_h déterminées, on aura la fonction $\varphi(x)$.

Multiplions les deux membres par $\beta_k(x)$ et intégrons de a à b, nous obtenons

$$x_k = \int_a^b f(x)\,\beta_k(x)\,dx + \lambda \sum x_h \int_a^b \alpha_h(x)\,\beta_k(x)\,dx,$$

le système est alors le suivant

$$x_k - \lambda \sum_{h=1}^{h=n} x_h t_{kh} = y_k;$$

en posant pour abréger

$$y_k = \int_a^b f(x)\,\beta_k(x)\,dx,$$

$$t_{kh} = \int_a^b \alpha_h(x)\,\beta_k(x)\,dx.$$

Ce système s'écrit sous forme abrégée

$$x_k - \lambda x_h t_{kh} = y_k,$$

comme on l'a déjà vu. La formule de résolution sera

$$u_p x_p = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \dots \\ y_1 & \dots & \dots & \dots \\ y_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\lambda t_{11} & -\lambda t_{12} & \dots & -\lambda t_{1n} \\ -\lambda t_{21} & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ -\lambda t_{n1} & \dots\dots & \dots & 1-\lambda t_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Pour former le numérateur on borde le déterminant qui figure au dénominateur en haut par $u_1, u_2, \dots, u_n$ et à gauche par 0, $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Nous avons à former $\Sigma x_h \alpha_h(x)$; il suffit dans la formule précédente de remplacer les u par les α, on trouve alors

$$\sum \alpha_h(x) x_h = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ y_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\lambda t_{11} & \dots & -\lambda t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\lambda t_{n1} & \dots & 1-\lambda t_{nn} \end{vmatrix}}.$$

avec $y_k = \int_a^b f(y)\,\beta_k(y)\,dy$, ce qui permet d'écrire

$$\sum \alpha_h(x) x_h = -\int_a^b f(y) \frac{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1(x) & \dots & \alpha_n(x) \\ \beta_1(y) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_n(y) & \dots & \dots & 1-\lambda t_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\lambda t_{11} & \dots & -\lambda t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\lambda t_{n1} & \dots & 1-\lambda t_{nn} \end{vmatrix}} dy.$$

La solution est alors donnée par l'expression

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b f(y)\,dy \frac{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1(x) & \dots & \alpha_n(x) \\ \beta_1(y) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_n(y) & \dots & \dots & 1-\lambda t_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\lambda t_{11} & \dots & 1-\lambda t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\lambda t_{n1} & \dots & 1-\lambda t_{nn} \end{vmatrix}} dy.$$

On peut montrer que les déterminants introduits ici sont égaux à ceux qui interviennent dans la méthode de Fredholm.

3° *Développement de la résolvante en série entière en λ. Noyaux itérés.* — Ce développement est évidemment possible puisque $\Delta(0) \neq 0$. Nous allons le retrouver sans nous servir de δ ni de Δ.

Cherchons, pour la solution de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

une série entière en λ de la forme

$$\varphi(x) = \psi_0(x) + \lambda\,\psi_1(x) + \dots + \lambda^n\,\psi_n(x) + \dots.$$

En remplaçant dans l'équation intégrale et en égalant les coefficients des mêmes puissances de λ, on trouve successivement

$$\psi_0(x) = f(x), \qquad \psi_1(x) = \int_a^b K(x, y)\,\psi_0(y)\,dy,$$
$$\psi_n(x) = \int_a^b K(x, y)\,\psi_{n-1}(y)\,dy;$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= \int_a^b K(x, y)\,dy \int_a^b K(y, t) f(t)\,dt \\ &= \int_a^b \int_a^b K(x, y)\,K(y, t) f(t)\,dy\,dt\end{aligned}$$

ou, en changeant de notation,

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= \int_a^b \int_a^b K(x, t)\,K(t, y) f(y)\,dt\,dy \\ &= \int_a^b f(y)\,dy \int_a^b K(x, t)\,K(t, y)\,dt;\end{aligned}$$

en posant $K_2(x, y) = \int_a^b K(x, t)\,K(t, y)\,dt$, nous aurons

$$\varphi_2(x) = \int_a^b K_2(x, y) f(y)\,dy$$

et, d'une manière générale,

$$\psi_n(x) = \int_a^b K_n(x, y) f(y)\,dy$$

avec

$$K_n(x, y) = \int_a^b K(x, t)\,K_{n-1}(t, y)\,dt.$$

On est ainsi amené à écrire une suite de fonctions de deux variables

$$K_2(x, y), \quad K_3(x, y), \quad \ldots, \quad K_n(x, y), \quad \ldots,$$

ce sont les noyaux itérés, qui permettent d'écrire la solution sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b [K(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \lambda^2 K_3(x, y) + \ldots] f(y)\,dy.$$

Le développement est bien convergent pour λ assez petit, car en supposant $|K(x, y)| \leqq M$, on voit immédiatement que l'on a

$$
\begin{gathered}
|K_2(x, y)| \leqq (b-a)\ M^2, \\
|K_3(x, y)| \leqq (b-a)^2 M^3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
|\lambda^{n-1} K_n(x, y)| \leqq |\lambda|^{n-1} (b-a)^{n-1} M^n,
\end{gathered}
$$

le développement converge certainement si $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$.

Comme le développement trouvé doit coïncider ([1]) avec celui de $\frac{\delta(x, y, \lambda)}{\Delta(\lambda)}$, il converge dans le plus grand cercle de centre O qui ne comprend aucun zéro de $\Delta(\lambda)$; et en particulier dans tout le plan si $\Delta(\lambda)$ n'a pas de zéro.

Ce dernier cas se présente certainement si $K_2(x, y)$ est identiquement nul, il en est ainsi par exemple pour les noyaux de la forme

$$
\sum_{n=1}^{n=+\infty} a_n \sin nx \cos ny,
$$

où $\sum_{n=1}^{n=+\infty} |a_n|$ est convergente, l'intervalle (a, b) étant $(0, 2\pi)$ (*cf.* exemple simple indiqué plus haut).

4° *Équation fonctionnelle à laquelle satisfait le noyau résolvant.* — Les deux relations (vues précédemment avec d'autres notations)

$$
\begin{gathered}
-K(x, y) + R(x, y, \rho) - \rho \int_a^b K(x, t) R(t, y, \rho)\, dt = 0, \\
-K(x, y) + R(x, y, \sigma) - \sigma \int_a^b K(t, y) R(x, t, \sigma)\, dt = 0,
\end{gathered}
$$

retranchées membre à membre, donnent

$$
\begin{aligned}
R(x, y, \rho) - R(x, y, \sigma) - \rho \int_a^b & K(x, t) R(t, y, \rho)\, dt \\
& + \sigma \int_a^b K(t, y) R(x, t, \sigma)\, dt = 0.
\end{aligned}
$$

---

[1] En effet, deux intégrales $\int_a^b u(x) f(x)\, dx$, $\int_a^b v(x) f(x)\, dx$ (où u, v, f sont des fonctions continues) ne peuvent être égales quel que soit f que si u et v sont égales.

Dans la première, remplaçons x par une variable d'intégration u, et multiplions les deux membres de la relation obtenue par $\sigma R(x, u, \sigma)\, du$, puis intégrons de a à b. Dans la seconde remplaçons y par une variable d'intégration v, et multiplions les deux membres de la relation obtenue par $\rho R(v, y, \rho)\, dv$, puis intégrons de a à b; les deux relations obtenues retranchées membre à membre donnent

$$-\sigma\int K(u, y)\, R(x, u, \sigma)\, du$$
$$+\rho\int K(x, v)\, R(v, y, \rho)\, dv + (\sigma-\rho)\int R(x, u, \sigma)\, R(u, y, \rho)\, du = 0.$$

Cette nouvelle relation comparée à la précédente donne enfin

$$\frac{R(x, y, \rho)-R(x, y, \sigma)}{\rho-\sigma} = \int_a^b R(x, u, \sigma)\, R(u, y, \rho)\, du,$$

qui ne contient plus le noyau K.

Comme le premier membre est symétrique en ρ, σ, il est d'ailleurs aussi égal à

$$\int_a^b R(x, u, \rho)\, R(u, y, \sigma)\, du.$$

Cette relation montre que si $R(x, y, \sigma)$ est pris comme noyau $\overline{K(x, y)}$ pour une nouvelle équation intégrale, le noyau résolvant correspondant $\overline{R(x, y, \lambda)}$ n'est autre que

$$R(x, y, \sigma+\lambda).$$

On peut trouver aussi la formule précédente par un calcul sur « opérateurs ». Appelons E l'opérateur *unité* (qui fait correspondre à la fonction φ cette fonction elle-même). A l'opérateur qui fait correspondre à φ la fonction $\int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy$, A_λ l'opérateur analogue où K est remplacé par $R(x, y, \lambda)$. Le fait que le produit de $E-\lambda A$ par $E+\lambda A_\lambda$, aussi bien à droite qu'à gauche, est l'unité E conduit à la conclusion : A et A_λ sont permutables et leur produit est égal à $\frac{A_\lambda - A}{\lambda}$. On en conclut aisément que $E-\rho A$, $E+\sigma A_\sigma$ sont permutables. Multiplions alors les deux membres de la relation évidente

$$\sigma(E-\rho A)-\rho(E-\sigma A) = (\sigma-\rho)E$$

à droite par $(E + \sigma A_\sigma)(E + \rho A_\rho)$; en permutant $E - \rho A$, $E + \sigma A_\sigma$ dans le premier terme, nous trouvons

$$\sigma(E + \sigma A_\sigma) - \rho(E + \rho A_\rho) = (\sigma - \rho)(E + \rho A_\rho + \sigma A_\sigma + \rho\sigma A_\sigma A_\rho).$$

En simplifiant et divisant par $\rho\sigma$, on trouve pour $A_\sigma A_\rho$ l'expression $\frac{A_\sigma - A_\rho}{\sigma - \rho}$. On a donc $A_\sigma A_\rho = A_\rho A_\sigma = \frac{A_\sigma - A_\rho}{\sigma - \rho}$ qui redonnerait la formule trouvée plus haut, mais est susceptible d'avoir une portée plus générale.

[On aperçoit d'ailleurs l'origine essentielle de la formule en prenant maintenant pour A l'opération qui consiste simplement à multiplier une fonction par une constante a. Nous résolvons l'équation

$$(1 - \lambda a)\varphi = \psi$$

par la formule

$$\varphi = \frac{\psi}{1 - \lambda a} = \left(1 + \frac{\lambda a}{1 - \lambda a}\right)\psi;$$

A_λ est donc l'opération qui consiste à multiplier par $\frac{a}{1 - \lambda a}$.

On a l'identité algébrique élémentaire

$$\frac{\dfrac{a}{1 - \rho a} - \dfrac{a}{1 - \sigma a}}{\rho - \sigma} = \frac{a}{1 - \rho a}\,\frac{a}{1 - \sigma a}.$$]

30. Propriétés des valeurs singulières et des fonctions singulières. — 1° Considérons deux équations de Fredholm (sans seconds membres) *associées*. Nous avons vu que leurs valeurs singulières sont les mêmes. Considérons deux solutions $\psi(x)$, $\chi(x)$ non identiquement nulles, respectivement de l'une et de l'autre équation correspondant à deux valeurs singulières ρ, σ *différentes*

$$\psi(x) - \rho \int_a^b K(x, y)\,\psi(y)\,dy = 0,$$

$$\chi(x) - \sigma \int_a^b K(y, x)\,\chi(y)\,dy = 0.$$

Multiplions les deux membres de la première par $\sigma\chi(x)\,dx$, les deux membres de la seconde par $-\rho\psi(x)\,dx$, intégrons de a à b et ajoutons membre à membre. L'équation obtenue

$$(\sigma-\rho)\int_a^b \psi(x)\chi(x)\,dx = 0$$

montre, puisque $\sigma \neq \rho$, que ψ et χ sont orthogonales.

2° Supposons en particulier le noyau *symétrique*. Les deux équations associées ont *même noyau*. S'il existait une valeur singulière *non réelle* ($\lambda_1+i\lambda_2$ où $\lambda_2 \neq 0$) donnant une solution non identiquement nulle $\psi_1+i\psi_2$, la valeur conjuguée, singulière aussi, serait *différente* $\lambda_1-i\lambda_2$; la relation que l'on vient de trouver, appliquée aux fonctions $\psi_1+i\psi_2$ et $\psi_1-i\psi_2$ donnerait

$$\int_a^b (\psi_1+i\psi_2)(\psi_1-i\psi_2)\,dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b (\psi_1^2+\psi_2^2)\,dx = 0,$$

ce qui est impossible.

Ainsi un *noyau symétrique ne peut avoir d'autres valeurs caractéristiques* que des *nombres réels*. Nous verrons bientôt qu'un noyau symétrique non identiquement nul a *au moins une* valeur caractéristique et que le cas où il n'en a qu'un nombre fini est celui où il est dégénéré.

3° Nous avons déjà vu qu'à une valeur caractéristique ne peut correspondre qu'un nombre fini de fonctions caractéristiques linéairement indépendantes. Du raisonnement même qui nous a donné ce résultat, nous allons tirer une conclusion plus précise en supposant le noyau *symétrique*, et par suite les λ tous réels.

Soient des valeurs singulières $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, peut-être d'ailleurs non toutes distinctes, auxquelles correspondent respectivement n fonctions singulières *linéairement indépendantes*. Deux de ces fonctions correspondant à des valeurs distinctes de λ sont orthogonales; en remplaçant celles qui correspondent à des λ égaux à un même nombre par des combinaisons linéairement indépendantes, on peut s'arranger pour que toutes les fonctions soient orthogonales deux à deux; normalisons ensuite et appelons $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ les fonctions obtenues; d'après l'inégalité de Bessel

$$\sum_{h=1}^{h=n}\left[\int_a^b \mathrm{K}(x, y)\,\varphi_h(y)\,dy\right]^2 \leqq \int_a^b \mathrm{K}^2(x, y)\,dy.$$

Donc

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\varphi_h^2(x)}{\lambda_h^2} \leqq \int_a^b \mathrm{K}^2(x, y)\,dy$$

et, en intégrant,

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{1}{\lambda_h^2} < \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}^2(x, y)\,dx\,dy.$$

Si donc on a une infinité dénombrable de valeurs singulières λ_p (distinctes ou non) auxquelles correspondent respectivement des fonctions linéairement indépendantes, la somme des inverses des carrés des valeurs singulières constitue une *série convergente* (et en particulier λ_p tend vers $+\infty$ avec p).

4° Considérons encore un noyau symétrique. La valeur que prend $\iint \mathrm{K}(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy$ pour une fonction φ singulière, correspondant à la valeur λ est évidemment

$$\frac{1}{\lambda}\int_a^b \varphi^2(x)\,dx,$$

ce qui se réduit à $\frac{1}{\lambda}$ si φ est normée.

Si donc on a

$$\iint \mathrm{K}(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy > 0,$$

pour toute fonction φ non identiquement nulle, ce qu'on exprime en disant que le noyau est défini positif, on peut affirmer qu'il n'*existe pas de valeurs singulières négatives*.

Conclusion analogue si $\iint \mathrm{K}(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy < 0$ pour toute fonction non identiquement nulle (noyau défini négatif); il n'y a pas de valeur *singulière positive*.

ÉQUATIONS INTÉGRALES A NOYAU SYMÉTRIQUE.

31. **Préliminaires.** — Soit l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x).$$

On a mis en évidence une certaine fonction $\Delta(\lambda)$ entière de λ définie par une série (pouvant se réduire à un polynome ou à une constante dans des cas particuliers).

Lorsque le noyau $K(x,y)$ est *symétrique*, c'est-à-dire si l'on a identiquement

$$K(x, y) = K(y, x),$$

$\Delta(\lambda)$ a *nécessairement des zéros*. D'une manière plus précise *il existe* au moins une *valeur de* λ *pour laquelle l'équation sans second membre a une solution non identiquement nulle*. (D'après une remarque faite plus haut cette valeur de λ est nécessairement réelle.)

Cette démonstration reposera sur la considération d'un *extremum* de l'intégrale

$$J(\varphi, \varphi) = \int_a^b \int_a^b K(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy$$

étendue au carré fondamental, pour les fonctions φ *normées*.

Commençons par démontrer que l'intégrale $J(\varphi, \varphi)$ ne peut être nulle quel que soit φ que si $K \equiv 0$. Remplaçons φ par $\varphi + \psi$; nous avons

$$J(\varphi + \psi, \varphi + \psi) = J(\varphi, \varphi) + 2\, J(\varphi, \psi) + J(\psi, \psi)$$

avec

$$J(\varphi, \psi) = \iint K(x, y)\, \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy$$

(cela grâce à la symétrie du noyau). Si $J(\varphi, \varphi) = 0$ quel que soit φ, on devra donc aussi avoir

$$J(\varphi, \psi) = 0$$

quelles que soient les fonctions φ et ψ.

Prenons alors $\psi(y) = \int_a^b K(x, y)\, \varphi(x)\, dx$, $J(\varphi, \psi)$ devient

$$\iint K(t, y)\, \varphi(t)\, dt\, dy \int K(x, y)\, \varphi(x)\, dx,$$

c'est-à-dire :

$$\int_a^b dy \int_a^b K(x, y)\, \varphi(x)\, dx \int_a^b K(t, y)\, \varphi(t)\, dt,$$

et finalement puisque les deux dernières intégrales sont égales à $\psi(y)$

$$\int_a^b \psi^2(y)\, dy = 0.$$

Comme la fonction $\psi(y)$ est continue, elle est identiquement nulle; on a en conséquence

$$\int_a^b K(x, y)\, \varphi(x)\, dx = 0,$$

quelle que soit la fonction $\varphi(x)$. Si nous prenons pour $\varphi(x)$ la fonction $K(x, y)$ où y est fixé mais quelconque, nous aurons pour cette valeur

$$\int_a^b K^2(x, y)\, dx = 0,$$

quel que soit y.

Ainsi le noyau $K(x, y)$ est identiquement nul. Autrement dit l'intégrale

$$J(\varphi, \varphi) = \iint K(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy,$$

dont le noyau *n'est pas identiquement nul*, prendra certainement pour certaines fonctions φ des valeurs différentes de zéro.

Supposons maintenant les fonctions $\varphi(x)$ bornées dans leur ensemble, et par suite

$$\int_a^b \varphi^2(x)\, dx \leqq m \qquad (m \text{ indépendant des } \varphi).$$

Appliquons la formule de Schwarz relative aux intégrales doubles, nous avons

$$\left[\iint K(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy\right]^2 < \iint K^2(x, y)\, dx\, dy \iint \varphi^2(x)\, \varphi^2(y)\, dx\, dy,$$

la dernière s'écrit

$$\left[\int_a^b \varphi^2(x)\,dx\right]^2,$$

elle est au plus égale à m^2. Par conséquent

$$\left[\iint \mathrm{K}(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy\right]^2 < m^2 \iint \mathrm{K}^2(x, y)\,dx\,dy,$$

donc bornée.

32. *L'étude des équations intégrales à noyau dégénéré* a été faite plus haut. Voici quelques compléments pour le cas des noyaux dégénérés *symétriques*.

Considérons un noyau dégénéré

$$\mathrm{K}(x, y) = \alpha_1(x)\,\beta_1(y) + \alpha_2(x)\,\beta_2(y) + \ldots + \alpha_n(x)\,\beta_n(y),$$

les fonctions $\alpha_i(x)$ étant linéairement indépendantes ainsi que les fonctions $\beta_j(x)$ [mais il se pourrait que des $\beta_j(x)$ soient fonctions linéaires des $\alpha_i(x)$].

Si nous orthogonalisons la suite

$$\alpha_1(x),\quad \alpha_2(x),\quad \ldots,\quad \alpha_n(x),\quad \beta_1(x),\quad \ldots,\quad \beta_n(x),$$

nous obtiendrons un système de q fonctions $(q \leqq 2n)$

$$\omega_1(x),\quad \omega_2(x),\quad \ldots,\quad \omega_q(x),$$

que nous pourrons supposer normales c'est-à-dire que les conditions suivantes seront vérifiées

$$\int_a^b \omega_h(x)\,\omega_k(x)\,dx = 0, \qquad \text{si } h \neq k,$$

et

$$\int_a^b \omega_h(x)\,\omega_k(x)\,dx = 1, \qquad \text{si } h = k,$$

en remplaçant les α et β par leurs expressions dans la fonction $\mathrm{K}(x, y)$, nous aurons finalement

$$\mathrm{K}(x, y) = \sum \mathrm{C}_{hk}\,\omega_h(x)\,\omega_k(y),$$

puisque les α_i et β_j sont des combinaisons linéaires des ω.

Nous allons montrer que les fonctions de deux variables $\omega_h(x)\,\omega_k(y)$ sont orthogonales et normales dans le carré fondamental.

Remarquons que h et k étant quelconques on a

$$\int_a^b\int_a^b [\omega_h(x)\,\omega_k(y)]^2\,dx\,dy = \int_a^b \omega_h(x)^2\,dx \int_a^b \omega_k(y)^2\,dy,$$

donc

$$\iint [\omega_h(x)\,\omega_k(y)]^2\,dx\,dy = 1,$$

quels que soient h et k.

Considérons maintenant

$$\iint \omega_h(x)\,\omega_k(y)\,\omega_{h'}(x)\,\omega_{k'}(y)\,dx\,dy$$

et supposons l'un des deux nombres (au moins) $h-h'$, $k-k'$ différent de zéro, cette intégrale double peut s'écrire

$$\int_a^b \omega_h(x)\,\omega_{h'}(x)\,dx \int_a^b \omega_k(y)\,\omega_{k'}(y)\,dy,$$

elle est nulle, l'un des deux facteurs étant certainement nul.

Les produits $\omega_h(x).\omega_k(y)$ constituent des fonctions orthogonales et normales. On en déduit [1] que ces fonctions sont linéairement indépendantes. Si nous supposons le noyau $K(x, y)$ symétrique, nous aurons identiquement

$$\sum_{h,k}^{q} C_{hk}\,\omega_h(x)\,\omega_k(y) = \sum_{h,k}^{q} C_{hk}\,\omega_h(y)\,\omega_k(x)$$

ou encore en changeant le nom des indices au second membre

$$C_{kh}\,\omega_k(y)\,\omega_h(x).$$

Par suite

$$\sum_{h,k}^{q} (C_{hk} - C_{kh})\,\omega_h(x)\,\omega_k(y) = 0,$$

[1] Comme s'il s'agissait de fonctions d'une seule variable.

les fonctions $\omega_h(x)\,\omega_k(y)$ étant indépendantes, on a

$$C_{hk} = C_{kh}$$

quels que soient h et k.

Existence d'une valeur singulière pour un noyau symétrique dégénéré. — Revenons à l'intégrale

$$J(\varphi, \varphi) = \int_a^b \int_a^b K(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy,$$

supposons-la susceptible de prendre des valeurs positives.

Imaginons que la fonction $\varphi(x)$, arbitraire, soit astreinte à la condition

$$N\varphi = \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \leqq 1.$$

Dans ces conditions les valeurs de $J(\varphi, \varphi)$ admettent une borne supérieure positive $S_1 = \frac{1}{\lambda_1}\cdot$ Nous allons montrer que cette borne supérieure est effectivement atteinte pour une fonction particulière $\varphi(x)$.

Remarquons que l'on peut se borner aux fonctions $\varphi(x)$ à norme égale à 1, car si une fonction $\varphi(x)$ avait une norme plus petite que 1, $J(\varphi, \varphi)$ aurait une certaine valeur que l'on pourrait augmenter en multipliant φ par une constante (sans que la norme de la fonction obtenue dépasse 1).

Le problème peut donc se poser de la manière suivante : rendre la fonctionnelle

$$J(\varphi, \varphi) = \iint \left[\sum C_{hk}\,\omega_h(x)\,\omega_k(y)\right] \varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy$$

maximum pour les fonctions $\varphi(x)$ de norme égale à 1.

Nous obtenons en décomposant l'intégrale double

$$J(\varphi, \varphi) = \sum C_{hk} \int_a^b \omega_h(x)\,\varphi(x)\,dx \int_a^b \omega_k(y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Posons maintenant

$$\int_a^b \omega_1(t)\,\varphi(t)\,dt = x_1, \qquad \int_a^b \omega_2(t)\,\varphi(t)\,dt = x_2, \qquad \ldots,$$

nous aurons

$$J(\varphi, \varphi) = \sum C_{hk} x_h x_k.$$

Or l'inégalité de Bessel

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_q^2 \leqq \int_a^b \varphi^2(t)\, dt,$$

donne

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_q^2 \leqq 1.$$

Cherchons à rendre maximum la forme quadratique

$$\sum C_{hk} x_h x_k,$$

où les x sont autant de *variables indépendantes assujetties seulement à la condition*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_q^2 \leqq 1;$$

on peut se borner au cas de l'égalité, car si l'on a

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_q'^2 < 1,$$

en multipliant chacune des variables par une quantité λ, nous aurons

$$(\lambda x_1')^2 + (\lambda x_2')^2 + \ldots + (\lambda x_q')^2 = 1$$

avec $\lambda^2 > 1$, et la valeur de J est aussi multipliée par ce nombre $\lambda^2 > 1$, donc augmentée.

On est amené au problème : *rendre maximum sur la sphère de rayon* 1 *une forme quadratique donnée* (susceptible de valeurs positives). On sait que le *maximum* est atteint; on sait d'autre part, qu'il ne peut être atteint que pour des valeurs de x rendant les dérivées de $\Sigma C_{hk} x_h x_k$ respectivement proportionnelles aux dérivées de $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

$$\begin{aligned}
C_{11} x_1 + C_{12} x_2 + \ldots + C_{1q} x_q &= S x_1,\\
C_{21} x_1 + C_{22} x_2 + \ldots + C_{2q} x_q &= S x_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots,\\
C_{q1} x_1 + C_{q2} x_2 + \ldots + C_{qq} x_q &= S x_q
\end{aligned}$$

avec la condition supplémentaire

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_q^2 = 1.$$

D'ailleurs en supposant ces relations vérifiées on voit immédiatement que la valeur de $\Sigma C_{hk} x_h x_k$ est S. Le facteur de proportionnalité S n'est donc autre que le maximum envisagé.

Désignons un tel système de solutions par $x_1, \ldots, x_q$ et posons

$$\varphi(x) = x_1\,\omega_1(x) + x_2\,\omega_2(x) + \ldots + x_n\,\omega_n(x),$$

nous aurons

$$\int_a^b \varphi^2(x)\,dx = 1$$

grâce à l'orthogonalité des fonctions ω_i et à la relation $\sum_{i=1}^{i=q} x_i^2 = 1$.

D'autre part, en multipliant les équations en $x_1, \ldots, x_q$ par $\omega_1(x), \ldots, \omega_q(x)$ respectivement et en ajoutant, on trouve

$$\sum C_{hk}\,x_k\,\omega_h(x) = S\,\varphi(x).$$

Cette relation se transforme si l'on tient compte des égalités

$$x_k = \int_a^b \omega_k(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

elle devient

$$\sum C_{hk} \int_a^b \omega_k(t)\,\omega_h(x)\,\varphi(t)\,dt = S\,\varphi(x),$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = S\,\varphi(x),$$

ce qui montre que la fonction $\varphi(x)$ est solution de l'équation intégrale sans second membre correspondant à la valeur $\lambda = \frac{1}{S}$.

Ainsi l'hypothèse de la symétrie du noyau, dans le cas dégénéré, nous permet d'affirmer non seulement que l'équation intégrale sans second membre a une solution normée pour une valeur réelle de λ au moins, mais aussi que cette valeur est l'inverse du maximum [1] de J_φ pour les φ assujetties à être normées, si nous supposons J_φ susceptible de valeurs positives.

---

[1] J_φ désigne l'expression $J(\varphi, \varphi)$.

Démonstration analogue en supposant J_φ susceptible de valeurs négatives et faisant intervenir le minimum de J_φ pour les φ normées.

33. **Cas d'un noyau symétrique continu quelconque.** — Remarquons tout d'abord qu'un noyau symétrique $K(x, y)$ est la limite d'une suite uniformément convergente de noyaux $K_n(x, y)$ dégénérés *symétriques*.

Si en effet $K(x, y)$ est la limite d'une suite uniformément convergente de noyaux dégénérés $K_n(x, y)$, la suite uniformément convergente $K_n(y, x)$ a pour limite évidemment $K(y. x)$; donc la suite $\frac{1}{2}[K_n(x, y) + K_n(y, x)]$ tend uniformément vers

$$\frac{1}{2}[K(x, y) + K(y, x)]$$

qui n'est autre que $K(x, y)$; or chaque terme $\frac{1}{2}[K_n(x, y)+K_n(y, x)]$ est non seulement dégénéré, mais symétrique.

Revenons maintenant à l'intégrale

$$J(\varphi, \varphi) = \iint K(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy,$$

où le noyau $K(x, y)$ est continu, symétrique et non identiquement nul. L'intégrale $J(\varphi, \varphi)$ n'est donc pas nulle pour toutes les fonctions φ. On peut même dire qu'elle n'est pas nulle pour toutes les fonctions φ telles que

$$\int_a^b \varphi^2\,dx = 1,$$

car, dans le cas contraire, en la multipliant par une constante on voit qu'elle serait nulle pour toutes. Nous nous bornerons dans ce qui suit aux fonctions φ de norme égale à 1.

L'intégrale $J(\varphi, \varphi)$ est susceptible de valeurs non nulles. Supposons-la susceptible de valeurs positives. Ces valeurs sont bornées supérieurement puisque l'inégalité de Schwarz permet d'écrire

$$J^2(\varphi, \varphi) \leqq \iint K^2(x, y)\,dx\,dy.$$

Soit alors S la borne supérieure des valeurs de $J(\varphi, \varphi)$ pour toutes les fonctions φ de norme égale à 1. De même désignons par S_n

la borne supérieure des valeurs de l'intégrale

$$J_n(\varphi, \varphi) = \iint K_n(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy$$

pour les mêmes fonctions.

Soit φ une fonction particulière. Formons la différence

$$J - J_n = \iint [K(x, y) - K_n(x, y)]\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy,$$

on a

$$(J - J_n)^2 \leqq \iint |K(x, y) - K_n(x, y)|^2\, dx\, dy.$$

Grâce à l'uniforme convergence de $K_n(x, y)$ vers $K(x, y)$, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un entier N tel que l'inégalité $n > N$ entraîne $|J - J_n| < \varepsilon$, cela pour toutes les φ normées. On en déduit que

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

En effet, tout d'abord, N étant choisi comme on vient de le dire, on aura

$$J_n < J + \varepsilon \leqq S + \varepsilon \qquad \text{donc} \quad S_n \leqq S + \varepsilon.$$

D'autre part, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre une fonction φ normée telle que $J > S - \frac{\varepsilon}{2}$, puis, pour cette fonction, un nombre N tel que l'inégalité $n > N$ entraîne $|J_n - J| < \frac{\varepsilon}{2}$, par suite $J_n > J - \frac{\varepsilon}{2} > S - \varepsilon$, donc $S_n > S - \varepsilon$.

Existence d'une valeur singulière. — On a démontré l'existence d'une fonction $\varphi_n(x)$ satisfaisant à l'équation intégrale

$$\varphi_n(x) - \frac{1}{S_n} \int_a^b K_n(x, y)\, \varphi_n(y)\, dy = 0$$

et vérifiant la condition

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\, dx = 1.$$

Nous avons désigné d'autre part la borne supérieure des valeurs de $J(\varphi, \varphi)$ par S ; on a, puisque cette intégrale a été supposée positive pour certaines fonctions $\varphi(x)$

$$S > 0,$$

le signe d'égalité étant exclu. Mais alors l'égalité

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{S_n} = \frac{1}{S}$$

montre que les valeurs $\frac{1}{S_n}$ sont bornées et toutes positives à partir d'une certaine valeur de n.

En conséquence, et d'après la relation

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{S_n} \int_a^b K_n(x, y)\, \varphi_n(y)\, dy,$$

les fonctions $\varphi_n(x)$ sont également bornées et également continues pour l'ensemble des valeurs de n. On peut en extraire une suite

$$\varphi_{n_1}(x), \quad \varphi_{n_2}(x), \quad \ldots$$

tendant uniformément vers une limite $\varphi(x)$ continue et normée $\left[\int_a^b \varphi^2(x)\, dx = 1\right.$, la fonction $\varphi(x)$ n'est donc pas identiquement nulle$\left.\right]$. Dans ces conditions, l'expression

$$\frac{1}{S_{n_p}} \int_a^b K_{n_p}(x, y)\, \varphi_{n_p}(y)\, dy$$

tend uniformément vers

$$\frac{1}{S} \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

Donc, puisque φ_{n_p}, égale à l'expression considérée, tend vers $\varphi(x)$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{S} \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

Il existe donc une solution normée pour l'équation linéaire homogène sans second membre, la valeur singulière étant $\frac{1}{S}$.

D'ailleurs, pour cette fonction $\varphi(x)$, l'intégrale $J(\varphi, \varphi)$

$$J(\varphi, \varphi) = \iint K(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy$$

s'écrit

$$\int_a^b \varphi(x)\, S\, \varphi(x)\, dx = S \int_a^b \varphi^2(x)\, dx$$

et est par suite égale à S. Ainsi J *atteint sa borne supérieure* S (la fonction φ trouvée la lui fait atteindre).

34. Recherche des autres valeurs singulières. — Si $J(\varphi, \varphi)$ est susceptible de valeurs positives, désignons maintenant par S_1 son maximum pour les φ normées atteint, nous l'avons vu, pour une [1] certaine fonction φ_1 satisfaisant à

$$(1) \qquad S_1 \varphi_1(x) - \int_a^b K(x, y)\, \varphi_1(y)\, dy = 0.$$

Assujettissons maintenant une fonction φ à être non seulement normée mais orthogonale à φ_1. La valeur prise, dans ces conditions, par $J(\varphi, \varphi)$ est la même que celle de

$$J_1(\varphi, \varphi) = \iint K_1(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy,$$

où

$$K_1(x, y) = K(x, y) - S_1 \varphi_1(x)\, \varphi_1(y).$$

Si nous admettons que pour une φ orthogonale à φ_1, J soit susceptible de valeurs positives, nous pouvons affirmer que J_1 est susceptible de valeurs positives. Supposons (que ce soit pour la raison précédente ou une autre) que J_1 soit susceptible de valeurs positives; soit alors φ_2 la fonction [2], dans le champ des fonctions simplement assujetties à être normées, qui fait atteindre à J_1 sa borne supérieure $S_2 > 0$, l'égalité

$$S_2 \varphi_2(x) = \int_a^b [K(x, y) - S_1 \varphi_1(x)\, \varphi_1(y)]\, \varphi_2(y)\, dy$$

donne

$$(2) \qquad S_2 \int_a^b \varphi_1(x)\, \varphi_2(x)\, dx = \iint K(x, y)\, \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)\, dx\, dy - S_1 \int \varphi_1(y)\, \varphi_2(y)\, dy;$$

---

[1] Au moins.

[2] Ou une des fonctions...

or, grâce à l'équation (1), l'intégrale double s'écrit $\int S_1 \varphi_1(y)\varphi_2(y)\,dy$, le second membre s'annule donc identiquement et φ_2 est orthogonale à φ_1, de sorte que :

1°
$$S_2\varphi_2(x) = \int K(x, y)\varphi_2(y)\,dy;$$

2° $J(\varphi_2, \varphi_2) = J_1(\varphi_2, \varphi_2)$ et, 3° S_2 est le maximum de J dans le champ des fonctions φ normées orthogonales à φ_1, et est par suite au plus égale à S_1.

Assujettissons maintenant une fonction φ à être non seulement normée mais orthogonale à φ_1 et à φ_2, et admettons que dans ces conditions $J(\varphi, \varphi)$ soit susceptible de valeurs positives. La considération de

$$J_2(\varphi, \varphi) = \iint K_2(x, y)\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy,$$

où

$$K_2(x, y) = K(x, y) - S_1\varphi_1(x)\varphi_1(y) - S_2\varphi_2(x)\varphi_2(y),$$

et où φ n'est assujettie qu'à être normée montre comme précédemment l'existence d'une fonction φ_3 normée et orthogonale à φ_1 et φ_2 faisant atteindre à J sa borne supérieure S_3. Cette fonction satisfait à

$$S_3.\varphi_3(x) - \int_a^b K(x, y)\varphi_3(y)\,dy = 0$$

et ainsi de suite.

Cette suite d'opérations pourra, suivant les cas, ou s'arrêter, ou se poursuivre indéfiniment.

Si $J(\varphi, \varphi)$ est susceptible de valeurs négatives, désignons par S_{-1} son minimum pour les φ normées; ce minimum est atteint pour une certaine φ_{-1}. Assujettissons ensuite φ non seulement à être normée, mais à être orthogonale à φ_{-1}, et admettons que *dans ces conditions* $J(\varphi, \varphi)$ soit encore susceptible de valeurs négatives, soit S_{-2} son nouveau minimum, il sera atteint pour une φ_{-2}, etc.

Cette suite d'opérations pourra, suivant les cas, ou s'arrêter, ou se poursuivre indéfiniment.

Pour un noyau défini une seule des deux suites existera.

Quoiqu'il en soit de ce point, étudions d'abord le cas (1°) où les suites ne comportent *l'une et l'autre qu'un nombre fini de termes* (p pour la première, q pour la seconde).

Posons

$$L(x, y) = K(x, y) - \sum_{h=1}^{h=p} S_h \varphi_h(x) \varphi_h(y) - \sum_{k=1}^{k=q} S_{-k} \varphi_{-k}(x) \varphi_{-k}(y).$$

Nous allons voir que

$$\bar{J} = \iint L(x, y) \varphi(x) \varphi(y) \, dx \, dy$$

n'est susceptible ni de valeurs positives, ni de valeurs négatives et par suite que $L(x, y)$ est identiquement nulle.

Remarquons d'abord que les $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \varphi_{-1}, \varphi_{-2}, \ldots, \varphi_{-q})$ au total forment un système de fonctions normées orthogonales deux à deux [1]. Si $\bar{J}$ était susceptible de valeurs positives, sa borne supérieure $\bar{S}$ serait atteinte pour une fonction $\bar{\varphi}$ satisfaisant à

$$\bar{S} \bar{\varphi}(x) - \int_a^b L(x, y) \bar{\varphi}(y) \, dy = 0.$$

On en déduirait comme précédemment que $\bar{\varphi}$ est orthogonale à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \varphi_{-1}, \ldots \varphi_{-q}$; de cette orthogonalité on déduirait que

$$\iint [K(x, y)] \bar{\varphi}(x) \bar{\varphi}(y) \, dx \, dy$$

a la valeur $\bar{S}$; or, par hypothèse, cette intégrale ne peut être positive pour une fonction orthogonale à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$.

On verrait de même que $\bar{J}$ n'est pas susceptible de valeurs négatives. Ainsi $K(x, y)$ n'est autre que

$$\sum_{h=1}^{h=p} S_h \varphi_h(x) \varphi_h(y) + \sum_{k=1}^{k=q} S_{-k} \varphi_{-k}(x) \varphi_{-k}(y).$$

Ce noyau dégénéré *n'a d'ailleurs pas d'autres valeurs singulières que les inverses des* S, *ni d'autres fonctions singulières que les* φ *trouvées* (et bien entendu pour une valeur déterminée σ de S les

---

[1] Pour deux fonctions dont les indices sont de signes différents, cela résulte de la remarque (1°) n° 30.

combinaisons linéaires des φ correspondant aux valeurs des S égales à σ).

Soient en effet un nombre σ et une fonction χ non identiquement nulle, tels que

$$\sigma\chi(x)-\int_a^b K(x,y)\chi(y)\,dy=0.$$

Si σ n'est égal à aucun des $S_1, S_2, \ldots, S_p, S_{-1}, \ldots, S_{-q}$, on sait que χ est orthogonal à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \varphi_{-1}, \ldots, \varphi_{-q}$. Supposons σ égal à un ou plusieurs des $S_1, \ldots, S_p, S_{-1}, \ldots, S_{-q}$, par exemple, $\sigma > 0$ égal à $S_{t+1}, S_{t+2}, \ldots, S_{t+r}$; S_t, S_{t+r+1} diffèrant de S_{t+1}, S_{t+r}.

On pourra toujours choisir les constantes $c_1, c_2, \ldots c_r$ pour que

$$\chi+c_1\varphi_{t+1}+c_2\varphi_{t+2}+\ldots+c_r\varphi_{t+r}$$

soit orthogonale à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$. Changeons éventuellement de notation et appelons de toute façon χ une fonction orthogonale à tous les φ d'indices tant positifs que négatifs.

L'expression qui a été trouvée pour $K(x, y)$ montre immédiatement :

$$\int_a^b K(x,y)\chi(y)\,dy=0,$$

mais, d'après l'équation à laquelle satisfait χ, cela prouve $\sigma\chi(x)=0$, ce qui est incompatible avec nos hypothèses. Démonstration analogue si $\sigma < 0$.

Supposons maintenant (2°) que l'une au moins des deux suites $S_1, S_2, \ldots, S_{-1}, S_{-2}, \ldots$, se poursuive indéfiniment. *Le noyau n'est certainement pas dégénéré*, puisqu'il a une infinité de valeurs singulières. Il a même une infinité de valeurs singulières *distinctes* puisque S_n (ou du moins S_{-n}) tend vers zéro [1] pour $n\to\infty$. Ici encore le *noyau n'a pas d'autres valeurs singulières que les inverses des* S *trouvés*, ni *d'autres fonctions singulières que les* φ *trouvées* (et bien entendu pour une valeur σ de S les combinaisons linéaires des φ correspondant aux valeurs des S égales à σ).

Soit un nombre $\sigma\neq 0$ et une fonction χ non identiquement nulle,

---

[1] *Voir* n° 30.

tels que

$$\sigma\chi(x) - \int_a^b K(x, y)\chi(y)\,dy = 0.$$

On voit, comme dans (1°) que la fonction χ, ou éventuellement si σ est égal à un ou plusieurs des S, une fonction $\bar{\chi}$ obtenue en ajoutant à χ une combinaison linéaire des fonctions singulières correspondant à ces S, est orthogonale à *toutes les* φ.

Supposons par exemple $\sigma > 0$. La fonction $\chi(x)$ donnerait à l'intégrale double J la valeur $\sigma \int_a^b \chi^2(x)\,dx$, *valeur positive*. Si la suite $S_1, S_2, \ldots$ ne comprend qu'un nombre fini p de termes, nous avons vu que ce signe est incompatible avec le fait que χ est orthogonale à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$. Si la suite $S_1, S_2, \ldots$, est infinie, le fait que χ est orthogonale à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ donne

$$\sigma \int \bar{\chi}^2(x)\,dx \leqq S_n,$$

mais comme $S_n \to 0$ avec n, $\int_a^b \bar{\chi}^2(x)dx = 0$ et par suite encore $\bar{\chi}(x) = 0$.

Si $\sigma < 0$, on fera un raisonnement analogue en utilisant cette fois la suite $S_{-1}, S_{-2}, \ldots$.

Corollaire. — *Si toutes les valeurs singulières sont positives*, $\iint K(x, y)\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy \geqq 0$ *pour toute* φ (¹).

35. Définition directe des S (Minimum maximorum, etc.). — S_n peut se définir par une propriété d'extremum *directement*, c'est-à-dire sans passer par l'intermédiaire de $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$.

Assujettissons φ non seulement à être normée, mais aussi à être orthogonale à $n - 1$ fonctions particulières $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ arbitrairement choisies. J a dans ces conditions une borne supérieure $\overline{B}$ qui dépend uniquement (K, a, b étant donnés) de ce système de $n - 1$ fonctions v. On sait d'ailleurs que lorsque les $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ sont justement $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ cette borne supérieure est S_n. D'où résulte immédiatement que si l'on considère maintenant l'ensemble des $\overline{B}$ (chacun de

(¹) Réciproque d'une position vue plus haut (n° 80, 4°).

ces $\overline{B}$ étant déterminé par le système des $n-1$ fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$) la borne inférieure m de cet ensemble est *au plus égale à* S_n.

Montrons que m n'est pas inférieure à S_n; il suffit pour cela de montrer qu'étant données $n-1$ fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ d'une manière quelconque, on peut trouver quelque fonction φ normée qui leur soit orthogonale et pour laquelle on ait $J \geqq S_n$: choisissons les n constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ par la condition de rendre $c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$ orthogonale aux $n-1$ fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ [on obtient un système de $n-1$ équations homogènes à n inconnues, certainement satisfait par quelque système (c) où les c ne sont pas tous nuls]; on peut de plus faire en sorte que la somme de leurs carrés soit égale à 1. Dans ces conditions $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n$ est normée et J calculé pour la fonction $\varphi = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$ se réduit à

$$S_1 c_1^2 + S_2 c_2^2 + \ldots + S_n c_n^2 \geqq S_n(c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2) = S_n.$$

Ainsi S_n est la borne inférieure m des $\overline{B}$, (borne inférieure d'ailleurs évidemment atteinte puisque lorsque les v se réduisent aux φ, on a $\overline{B} = S_n$). S_n est le minimum (dans le champ des systèmes de $n-1$ fonctions de x) de la borne supérieure (dans le champ des φ normées orthogonales aux $n-1$ fonctions précédentes) de l'intégrale J. On pourrait dire, en admettant que la borne supérieure en question soit atteinte (point que nous ne cherchons pas à élucider), que l'on a $S_n =$ minimum (v) maximorum (φ) de J.

On aurait un énoncé analogue pour la $n^{\text{ième}}$ valeur singulière négative (maximum-minimorum).

Application. — Ajoutons au noyau $K(x, y)$ un noyau défini positif $P(x, y)$ tel, par conséquent, que

$$\iint P(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy \geqq 0$$

pour toute fonction φ. Accentuons les lettres correspondant au nouveau noyau $K' = K + P$; on a évidemment pour chaque système de fonctions v, $\overline{B}' \geqq \overline{B}$ donc $S'_n \geqq S_n$. *Les valeurs singulières* S′ *de* K′ *sont supérieures ou égales aux valeurs singulières* S *correspondantes de* K. Énoncé analogue lorsqu'on ajoute à K un noyau négatif N c'est-à-dire tel que

$$\iint N(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy \leqq 0$$

pour toute φ.

36. Remarques sur le noyau, les nombres S et les fonctions singulières. — Dans le cas d'un noyau dégénéré, on a vu que $K(x, y)$ est la somme des quantités en nombre fini $S_h \varphi_h(x) \varphi_h(y)$. Considérons un noyau quelconque K, ses p premières valeurs singulières positives, $S_1, S_2, \ldots, S_p$, et ses q premières valeurs singulières négatives $S_{-1}, S_{-2}, \ldots, S_{-q}$.

Posons

$$\begin{aligned} L(x, y) \equiv K(x, y) - S_1\, \varphi_1(x)\, \varphi_1(y) - \ldots \\ - S_p\, \varphi_p(x)\, \varphi_p(y) - S_{-1}\, \varphi_{-1}(x)\, \varphi_{-1}(y) - \ldots \\ - S_{-q}\, \varphi_{-q}(x)\, \varphi_{-q}(y). \end{aligned}$$

Soient $\sigma \neq 0$, $\varphi \not\equiv 0$ telles que

$$\sigma\, \varphi(x) - \int_a^b L(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0.$$

On démontre comme plus haut que φ est orthogonale à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$; $\varphi_{-1}, \varphi_{-2}, \ldots, \varphi_{-q}$, et satisfait à

$$\sigma\, \varphi(x) - \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0.$$

Il résulte immédiatement de là que les valeurs singulières de l'équation

$$S\, \varphi(x) - \int_a^b L(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0$$

sont précisément $S_{p+1}, S_{p+2}, \ldots; S_{-q-1}, S_{-q-2}, \ldots$.

Supposons que le noyau K n'ait qu'un nombre fini q de valeurs singulières négatives (distinctes ou non), mais une infinité de valeurs singulières positives; φ étant supposée normée,

$$\iint L(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy$$

sera positif et au plus égal à S_{p+1}, ce qui tend vers zéro avec p.

Supposons que le noyau ait une infinité de valeurs singulières de chaque signe, l'intégrale

$$\iint L(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy$$

est au plus égale à S_{p+1} et au moins égale à S_{-q-1}.

Rangeons les S par ordre de valeurs absolues décroissantes, appelons-les

$$\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \ldots$$

et *appelons* ψ *les fonctions correspondantes.*

D'après ce qui précède

$$\iint [K(x, y) - \Sigma_1\,\psi_1(x)\,\psi_1(y) - \ldots - \Sigma_n\,\psi_n(x)\,\psi_n(y)]\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy,$$

où φ est normée, est au plus égale, en valeur absolue, à $|\Sigma_{n+1}|$. Si maintenant φ a une norme quelconque M, en appliquant ce qui précède à la fonction $\frac{\varphi}{\sqrt{M}}$, on trouve immédiatement

$$\left|\iint [K(x, y) - \Sigma_1\,\psi_1(x)\,\psi_1(y) - \ldots - \Sigma_n\,\psi_n(x)\,\psi_n(y)]\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy\right| < M\,|\,\Sigma_{n+1}\,|.$$

D'où la conclusion, si les $u_n(x)$ sont à norme bornée dans leur ensemble :

$$\iint \left[K(x, y) - \sum_{h=1}^{h=n} \Sigma_h\,\psi_h(x)\,\psi_h(y) \right] u_n(x)\,u_n(y)\,dx\,dy$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

D'ailleurs en posant

$$I(u, v) = \iint \left[K(x, y) - \sum_{h=1}^{h=n} \Sigma_h\,\psi_h(x)\,\psi_h(y) \right] u(x)\,v(y)\,dx\,dy,$$

on voit que

$$I(u + v,\ u + v) = I(u, u) + 2\,I(u, v) + I(v, v)$$

et, par suite,

$$2\,|\,I(u, v)\,| < |\,I(u + v,\ u + v)\,| + |\,I(u, u)\,| + |\,I(v, v)\,|.$$

On tire de cette inégalité que si les $u_n(x)$, et $v_n(x)$, [et par suite les $u_n(x)+v_n(x)$] sont bornées dans leur ensemble, l'intégrale $\mathrm{I}(u_n, v_n)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

37. Cette remarque va nous servir dans la démonstration (¹) du *Théorème fondamental de Hilbert pour le développement en série des fonctions de la forme* $\int_a^b \mathrm{K}(x,y)\,h(y)\,dy$; où h est une fonction *continue* (ou du moins telle qu'on puisse partager a, b en un *nombre fini* d'intervalles partiels où h soit continue : autrement dit « continue par morceaux » ; dans ce dernier cas, à l'extrémité d'un intervalle partiel nous supposons qu'à droite aussi bien qu'à gauche, la fonction tend vers une limite, mais que ces deux limites sont inégales.)

La composante g_n de la fonction $g(x)=\int_a^b \mathrm{K}(x,y)\,h(y)\,dy$ relativement à la fonction $\psi_n(x)$ s'écrit (²)

$$\begin{aligned}&\int_a^b \psi_n(x)\,dx\int_a^b \mathrm{K}(x,y)\,h(y)\,dy\\ &=\int_a^b h(y)\,dy\int_a^b \mathrm{K}(x,y)\,\psi_n(x)\,dx=\mathrm{S}_n\int_a^b h(y)\,\psi_n(y)\,dy=\mathrm{S}_n h_n.\end{aligned}$$

1° Montrons que la série $\sum_{n=1}^{n=+\infty} g_n\psi_n(x)$ est absolument et uniformément convergente

$$\begin{aligned}&|g_{n+1}\psi_{n+1}(x)|+\ldots+|g_{n+p}\psi_{n+p}(x)|\\ &=|h_{n+1}|\,|\mathrm{S}_{n+1}\psi_{n+1}(x)|+\ldots+|h_{n+p}|\,|\mathrm{S}_{n+p}\psi_{n+p}(x)|\\ &<\sqrt{h_{n+1}^2+\ldots+h_{n+p}^2}\sqrt{\mathrm{S}_{n+1}^2\psi_{n+1}^2(x)+\ldots+\mathrm{S}_{n+p}^2\psi_{n+p}^2(x)}.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bessel (n° 21) appliquée à la fonction de y : $\mathrm{K}(x,y)$, la somme de la série dont le terme général est

$$\left[\int_a^b \mathrm{K}(x,y)\,\psi_i(y)\,dy\right]^2,$$

(¹) Démonstration qui serait immédiate si l'on savait que

$$\mathrm{K}(x,y)=\mathrm{S}_1\psi_1(x)\psi_1(y)+\mathrm{S}_2\psi_2(x)\psi_2(y)+\ldots,$$

la série étant uniformément convergente par rapport à chacune des variables.

(²) Nous désignons dans ce qui suit par S_1, S_2, ... les nombres tant positifs que négatifs désignés dans ce qui précède par Σ_1, Σ_2, ... Rien n'empêche d'ailleurs de changer l'ordre du numérotage, à condition bien entendu de changer de la même manière l'ordre du numérotage des ψ.

ou $S_r^2 \psi_r^2(x)$, est au plus égale à

$$\int_a^b K^2(x, y)\, dy,$$

nombre qui en tant que fonction de x admet un maximum M^2; il en résulte que le second radical est au plus égal à M.

D'après l'inégalité de Bessel appliquée à la fonction $h(x)$, la série dont le terme général est h_r^2 est convergente; on pourra donc, ε étant un nombre positif donné quelconque, choisir N pour que l'inégalité $n > N$ entraîne

$$\sqrt{h_{n+1}^2 + \ldots + h_{n+p}^2} < \frac{\varepsilon}{M},$$

elle entraînera alors

$$|g_{n+1}\psi_{n+1}(x)| + \ldots + |g_{n+p}\psi_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

quel que soit x dans l'intervalle (a, b).

2° Montrons maintenant que la somme $\gamma(x)$ de la série

$$g_1\psi_1(x) + \ldots + g_n\psi_n(x) + \ldots$$

(fonction continue de x d'après 1°) n'est autre que $g(x)$.

Posons

$$\gamma_n(x) = g_1\psi_1(x) + \ldots + g_n\psi_n(x).$$

On a

$$\begin{aligned} g(x) - \gamma_n(x) &= \int K(x, y)\, h(y)\, dy - [S_1 h_1 \psi_1(x) + \ldots + S_n h_n \psi_n(x)] \\ &= \int [K(x, y) - S_1\psi_1(x)\psi_1(y) - \ldots - S_n\psi_n(x)\psi_n(y)]\, h(y)\, dy. \end{aligned}$$

Le produit scalaire de $g(x) - \gamma_n(x)$ par une fonction continue $\varpi(x)$ quelconque donnée s'écrit donc

$$\iint [K(x, y) - S_1\psi_1(x)\psi_1(y) - \ldots - S_n\psi_n(x)\psi_n(y)]\, \varpi(x)\, h(y)\, dx\, dy,$$

il tend donc vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

D'où résulte, puisque $\gamma_n(x)$ tend uniformément vers $\gamma(x)$,

$$\int_a^b [g(x) - \gamma(x)]\, \varpi(x)\, dx = 0,$$

et si nous prenons pour fonction $\varpi(x)$ la fonction $g(x) - \gamma(x)$ elle-même

$$\int_a^b [g(x) - \gamma(x)]^2\, dx = 0.$$

D'où

$$g(x) - \gamma(x) = 0.$$

Ainsi *toute fonction de la forme* $\int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, h(y)\, dy$ *où* h *est continu* (ou du moins continu « par morceaux ») *est développable en série absolument et uniformément convergente des* ψ : $g_1 \psi_1(x) + \ldots + g_n \psi_n(x) + \ldots$, les g_n étant

$$\int_a^b \psi_n(x)\, g(x)\, dx = \mathrm{S}_n \int_a^b \psi_n(x)\, h(x)\, dx.$$

Le développement en série uniformément convergente des ψ n'est d'ailleurs pas possible d'une autre manière, comme on le voit par multiplication par $\psi_p(x)$ et intégration dans (a, b).

38. **Applications.** — 1° $h(x)$ étant une fonction de la nature indiquée, l'*intégrale double*

$$\iint \mathrm{K}(x, y)\, h(x)\, h(y)\, dx\, dy$$

n'est autre que le produit scalaire de h par $g(x)$. C'est donc, d'après le développement obtenu pour $g(x)$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n=+\infty} \mathrm{S}_n h_n \int_a^b \psi_n(x)\, h(x)\, dx &= \mathrm{S}_1 h_1^2 + \mathrm{S}_2 h_2^2 + \ldots + \mathrm{S}_n h_n^2 + \ldots \\ &= \frac{h_1^2}{\lambda_1} + \frac{h_2^2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{h_n^2}{\lambda_n} + \ldots\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\iint \mathrm{K}(x, y)\, u(x)\, v(y)\, dx\, dy = \mathrm{S}_1 u_1 v_1 + \mathrm{S}_2 u_2 v_2 + \ldots + \mathrm{S}_n u_n v_n + \ldots.$$

2° *Noyaux itérés.* — Par définition

$$\mathrm{K}_2(x, y) = \int_a^b \mathrm{K}(x, t)\, \mathrm{K}(t, y)\, dt.$$

Donnons à y une valeur constante comprise entre a et b ; la fonction de x obtenue est développable en une série *uniformément convergente par rapport à x* dont le terme général est

$$\frac{\psi_n(x)}{\lambda_n}\int_a^b \psi_n(t)\,K(t, y)\,dt,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\psi_n(x)\,\psi_n(y)}{\lambda_n^2}.$$

De même, par définition [1]

$$K_p(x, y) = \int K(x, t)\,K_{p-1}(t, y)\,dt.$$

D'après le théorème fondamental $K_p(x, y)$, où y est fixe, est développable en une série uniformément convergente par rapport à x, dont le terme général est

$$\begin{aligned}\frac{\psi_n(x)}{\lambda_n}\int \psi_n(t)\,K_{p-1}(t, y)\,dt &= \frac{\psi_n(x)}{\lambda_n}\,\frac{1}{\lambda_n}\int \psi_n(t)\,K_{p-2}(t, y)\,dt\\ &= \frac{\psi_n(x)}{\lambda_n^2}\,\frac{1}{\lambda_n}\int \psi_n(t)\,K_{p-3}(t, y)\,dt\\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &= \frac{\psi_n(x)\,\psi_n(y)}{\lambda_n^p}.\end{aligned}$$

3°. *Résolution explicite de l'équation intégrale avec second membre*

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x).$$

Si $\Delta(\lambda) \neq 0$, et si $f(x)$ est une fonction continue donnée, on sait, d'après la théorie générale, que cette équation admet une solution continue et une seule. Nous allons retrouver ce fait et obtenir une expression explicite de cette solution φ à l'aide des S, ψ et de λ.

Admettant l'existence d'une solution continue φ, d'après l'équation même, la fonction

$$\frac{\varphi(x) - f(x)}{\lambda}$$

sera développable en série absolument et uniformément convergente des $\psi_n(x)$ le coefficient de $\psi_n(x)$ étant $\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b \psi_n(x)\,\varphi(x)\,dx$, mais

[1] *Voir* n° 29 (3°).

ce coefficient doit être aussi $\int_a^b \psi_n(x) \frac{\varphi(x) - f(x)}{\lambda} dx$. D'où l'égalité,

$$(\lambda_n - \lambda) \int_a^b \psi_n(x) \varphi(x)\, dx = \lambda_n \int_a^b \psi_n(x) f(x)\, dx.$$

a. Si λ ne coïncide avec aucun des λ_n, comme

$$\frac{\varphi(x) - f(x)}{\lambda} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \psi_n(x) \int_a^b \psi_n(x) \varphi(x)\, dx,$$

on aura

$$\frac{\varphi(x) - f(x)}{\lambda} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n(x) \int_a^b \psi_n(y) f(y)\, dy}{\lambda_n - \lambda}$$

ou

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\int_a^b \psi_n(y) f(y)\, dy}{\lambda_n - \lambda} \psi_n(x).$$

Une fois cette série Σ formée, on voit immédiatement que le module du terme général est à partir d'une certaine valeur de n inférieure à

$$2 \frac{\left| \int_a^b \psi_n(y) f(y)\, dy \right|}{|\lambda_n|} |\psi_n(x)|,$$

terme général positif d'une série uniformément convergente (démonstration identique à celle qui a été faite plus haut), et par suite que la série Σ est elle-même absolument et uniformément convergente. Utilisons cette expression pour calculer $\int K(x, y) \varphi(y)\, dy$. En se servant de l'égalité

$$\int K(x, y) f(y)\, dy = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n(x)}{\lambda_n} \int_a^b \psi_n(y) f(y)\, dy,$$

on constate que

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y)\, dy = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\int_a^b \psi_n(y) f(y)\, dy}{\lambda_n - \lambda} \psi_n(x).$$

D'où résulte, en comparant à l'expression même de φ, que φ satisfait à l'équation intégrale proposée.

Remarque. — On peut aller plus loin : ajoutons et retranchons à l'expression trouvée pour $\varphi(x)$, l'expression $\lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy$ qui, d'après ce qu'on vient de voir, est égale à

$$\lambda \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n(x)}{\lambda_n} \int_a^b \psi_n(y) f(y) dy.$$

Nous trouvons

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \lambda^2 \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\int_a^b \psi_n(y) f(y) dy}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} \psi_n(x),$$

expression un peu plus compliquée que celle que l'on avait trouvée, mais qui a un avantage : on est assuré que l'on a le droit d'y intervertir les signes Σ et $\int$.

Remarquons en effet qu'à partir d'une certaine valeur de n

$$\left| \frac{\psi_n(x) \psi_n(y)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} \right| < 2 \left| \frac{\psi_n(x) \psi_n(y)}{\lambda_n^2} \right|.$$

Or on a vu (2°) que la série dont le terme général figure au deuxième membre est absolument et uniformément convergente par rapport à y (x étant fixe) ; il en est donc ainsi de la série

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n(x) \psi_n(y)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}$$

et aussi de la série

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n(x) \psi_n(y) f(y)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)},$$

qu'on a par suite le droit d'intégrer terme à terme. Ainsi

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \lambda^2 \int_a^b \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n(x) \psi_n(y)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} f(y) dy.$$

D'où l'expression *explicite du noyau résolvant*

$$R(x, y, \lambda) = K(x, y) + \lambda \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n(x) \psi_n(y)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)},$$

fonction *méromorphe* n'ayant que des *pôles simples*, à savoir *les valeurs singulières de* λ. Soit μ une telle valeur; $n_1, n_2, \ldots, n_k$ les valeurs de n pour lesquelles $\lambda_n = \mu$. Le « résidu » de R relatif au pôle μ est

$$-[\psi_{n_1}(x)\psi_{n_1}(y) + \psi_{n_2}(x)\psi_{n_2}(y) + \ldots + \psi_{n_k}(x)\psi_{n_k}(y)].$$

b. Si λ est égale à une valeur singulière μ, le calcul fait au début de (3°) montre : pour que l'équation intégrale proposée soit possible, il est nécessaire que

$$\int_a^b f(x)\psi_{n_1}(x)\,dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x)\psi_{n_1}(x)\,dx = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_a^b f(x)\psi_{n_k}(x)\,dx = 0.$$

Si l'on fait ces hypothèses, la solution ne peut être $\left[\text{voir calcul } (a)\right.$ appliqué au noyau $\left.K(x, y) - \frac{\psi_{n_1}(x)\psi_{n_1}(y) + \ldots + \psi_{n_k}(x)\psi_{n_k}(y)}{\mu}\right]$ que

$$\varphi(x) = f(x) + c_1\psi_{n_1}(x) + \ldots + c_k\psi_{n_k}(x) + \mu\Sigma' \frac{\int \psi_n(y) f(y)\,dy}{\lambda_n - \mu}\psi_n(x),$$

où les c sont des constantes et où Σ' est étendue à toutes les valeurs entières positives de n, exception faite de $n_1, n_2, \ldots, n_k$. En utilisant cette expression de φ, on trouve

$$\int K(x, y)\varphi(y)\,dy = \frac{c_1\psi_{n_1}(x) + \ldots + c_k\psi_{n_k}(x)}{\mu} + \Sigma',$$

ce qui n'est autre que $\frac{\varphi(x) - f(x)}{\mu}$, de sorte que l'expression trouvée est bien solution quelles que soient les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Remarquons qu'*en développant* chaque terme de la série qui donne R *suivant les puissances entières croissantes de* λ, on retrouverait les développements indiqués plus haut pour les noyaux itérés.

---

(1) Remarquons d'autre part que, si l'on remplace $K(x, y)$ par la série dont il va être question au (4°), l'expression de R se simplifie et se présente comme la généralisation directe de l'expression donnée au n° 17.

4° Nous n'avons pas indiqué de développement pour le noyau $K(x, y)$ lui-même. Dans quelle mesure peut-on considérer la série dont le terme général est

$$\frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}$$

comme représentant $K(x, y)$?

Tout d'abord on peut affirmer que, x étant fixe

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\psi_h(x)\psi_h(y)}{\lambda_h}$$

tend *en moyenne* vers $K(x, y)$ quand n tend vers l'infini : on veut dire par là que l'intégrale portant sur le carré de la différence de ces deux fonctions tend vers zéro. Cela résulte immédiatement de l'identité

$$\int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\psi_h(x)\psi_h(y)}{\lambda_h}\right]^2 dy = \int_a^b K^2(x, y)\, dy - \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\psi_h^2(x)}{\lambda_h^2}$$

et du fait que la série

$$\frac{\psi_1^2(x)}{\lambda_1^2} + \frac{\psi_2^2(x)}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{\psi_n^2(x)}{\lambda_n^2} + \ldots$$

a pour somme $K_2(x, x)$. [*Voir* développement de $K_2(x, y)$.]

D'autre part, toutes les fois que l'on sera assuré que, x étant fixe entre a, b, l'expression

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}$$

converge uniformément par rapport à y on pourra affirmer que sa somme $H(x, y)$ est $K(x, y)$. On voit en effet en raison du résultat précédent et de la convergence *uniforme par rapport à y de la série considérée* que

$$\int_a^b [K(x, y) - H(x, y)]^2\, dy = 0,$$

d'où résulte, puisque $K(x, y) - H(x, y)$ est une fonction continue de y,

$$K(x, y) - H(x, y) \equiv 0.$$

Nous allons voir qu'il en est par exemple ainsi quand $K(x, y)$ est un noyau *défini;* supposons ce noyau défini *positif* pour fixer les idées, c'est-à-dire tel que

$$\iint K(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy > 0$$

pour toute fonction φ. Tous les λ seront positifs.

Remarquons d'autre part que la valeur numérique de la fonction $H(x, x)$, où $H(x, y)$ est un noyau défini positif continu, ne peut être négative; car si $H(x_0, x_0)$ était négatif, on pourrait trouver un carré de centre x_0, x_0 à l'intérieur duquel $H(x, y)$ resterait négatif, soit $|x - x_0| < \varepsilon$; $|y - x_0| < \varepsilon$ le système d'inégalités définissant ce carré; la fonction $\varphi(x)$ égale à 1 quand $|x - x_0| < \varepsilon$ et à 0 dans les autres cas [1], rendrait l'intégrale $\iint H(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy$ négative. Cette remarque appliquée au noyau

$$H(x, y) = K(x, y) - \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\psi_h(x)\,\psi_h(y)}{\lambda_h}$$

montre que

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\psi_h^2(x)}{\lambda_h} \leqq K(x, x),$$

la série dont le terme général est le nombre positif $\frac{\psi_n^2(x)}{\lambda_n}$ est donc convergente, et a pour somme un nombre $S(x)$ au plus égal à $K(x, x)$; soit M un nombre fixe supérieur à $S(x)$ quel que soit x. On a

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\psi_{n+1}(x)\,\psi_{n+1}(y)}{\sqrt{\lambda_{n+1}}\sqrt{\lambda_{n+1}}} + \ldots + \frac{\psi_{n+p}(x)\,\psi_{n+p}(y)}{\sqrt{\lambda_{n+p}}\sqrt{\lambda_{n+p}}} \right| \\
&\quad < \sqrt{\frac{\psi_{n+1}^2(x)}{\lambda_{n+1}} + \ldots + \frac{\psi_{n+p}^2(x)}{\lambda_{n+p}}} \sqrt{\frac{\psi_{n+1}^2(y)}{\lambda_{n+1}} + \ldots + \frac{\psi_{n+p}^2(y)}{\lambda_{n+p}}} \\
&\quad < \sqrt{M} \sqrt{\frac{\psi_{n+1}^2(y)}{\lambda_{n+1}} + \ldots + \frac{\psi_{n+p}^2(y)}{\lambda_{n+p}}},
\end{aligned}$$

y étant fixe, et la série dont le terme général est $\frac{\psi_r^2(y)}{\lambda_r}$ étant convergente, le dernier membre peut être rendu $< \varepsilon$ en faisant $n > N$,

---

[1] On modifierait sans peine la définition de $\varphi(x)$ pour la rendre continue partout.

N étant choisi en fonction de ε, *indépendamment de x*. Autrement dit y étant fixe, la série

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n(x)\,\psi_n(y)}{\lambda_n}$$

converge uniformément par rapport à x.

D'après la remarque faite plus haut [1], la somme de cette série est $K(x, y)$.

Le cas où il n'y a qu'un *nombre fini* de valeurs singulières λ *négatives* se ramène immédiatement au précédent en retranchant d'abord au noyau tous les termes $\frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}$ correspondant à des λ_n négatifs.

Ainsi, *si l'une au moins des deux suites de valeurs singulières* (désignées précédemment par $S_1, S_2, \ldots, S_{-1}, S_{-2}, \ldots$) *est finie* on a l'égalité

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n(x)\,\psi_n(y)}{\lambda_n},$$

la série du second membre étant uniformément convergente par rapport à x, une fois y fixé [et aussi par suite uniformément convergente par rapport à y une fois x fixé [2]].

Remarque. — L'énoncé que l'on vient d'obtenir au sujet de $K(x, y)$ et celui que l'on a obtenu précédemment au sujet de $K_2(x, y)$ peuvent être améliorés si l'on tient compte du théorème suivant : Si une série dont les termes sont des fonctions continues, *toutes positives*, a une somme *continue*, cette série est uniformément convergente.

Ce théorème nous apprend que si tous les λ_n sont positifs la série

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n^2(x)}{\lambda_n}$$

---

[1] L'interversion des lettres x, y importe peu, puisqu'il s'agit de fonctions symétriques.

[2] L'expression obtenue pour $K(x, y)$ simplifie celle de $R(x, y, \lambda)$. On trouve

$$R(x, y, \lambda) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n(x)\,\psi_n(y)}{\lambda_n - \lambda}$$

(*cf.* n° 17).

est *uniformément* convergente. L'inégalité

$$2|\psi_n(x)\psi_n(y)| < \psi_n^2(x) + \psi_n^2(y)$$

montre alors que

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}$$

l'est par rapport à l'ensemble des variables (x, y).

Démonstration analogue pour $K_2(x, y)$; d'où l'on déduit que les séries trouvées pour $K_p(x, y)$, quel que soit $p \geqq 2$, sont uniformément convergentes par rapport à l'ensemble des variables x, y.

39. Les fonctions fondamentales forment-elles un système complet ? — On a vu (inégalité de Bessel) que la somme des carrés des composantes d'une fonction continue quelconque par rapport aux fonctions d'un système orthogonal normé, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$, est *au plus* égale à la norme de cette fonction

$$\left(\int_a^b f(x)\psi_1(x)\,dx\right)^2 + \ldots + \left(\int_a^b f(x)\psi_n(x)\,dx\right)^2 + \ldots \leqq \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Si l'*égalité* a lieu pour toutes les fonctions *continues* f, le système des ψ_n est dit *complet* (¹). La question se pose naturellement de savoir si le système des fonctions fondamentales ψ_n correspondant à un noyau symétrique donné $K(x, \xi)$ est ou non complet.

Nous répondrons à cette question, d'une manière affirmative, dans le cas où l'équation intégrale provient du problème consistant à déterminer les fonctions nulles aux deux extrémités de l'intervalle (a, b) et vérifiant dans cet intervalle l'équation différentielle

$$u'' + q(x)u' + \lambda u = 0,$$

où $q(x)$ est une fonction continue donnée et λ une constante, ou plus généralement

$$pu'' + p'u' + q(x)u + \lambda\,\rho(x)u = 0,$$

où p est continue ainsi que sa dérivée première p', q et ρ continues, les fonctions p et ρ gardant des signes invariables dans l'inter-

(¹) La définition donnée au n° 21 semble légèrement différente; elle est équivalente à celle que l'on donne ici en raison de la remarque en note à la fin de la présente démonstration.

valle a, b; signes que l'on peut supposer les mêmes $p > 0$, $\rho > 0$; nous verrons plus loin que ce cas se ramène au précédent ($p = 1$, $\rho = 1$) par un changement simple *de variable* et *de fonction*.

Plaçons-nous dans le cas normal où $u'' + q(x)u = 0$ n'admet d'autre solution nulle pour $x = a$ et $x = b$, continue ainsi que sa dérivée première dans (a, b), que la solution identiquement nulle. On a vu (¹) que *la* solution nulle pour a et b continue ainsi que sa dérivée première dans (a, b) de

$$u'' + q(x)u = \varphi(x)$$

se met sous la forme

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

où $G(x, \xi)$ désigne une certaine fonction (symétrique en x, ξ) que nous avons appelée fonction de Green relative à l'expression $u'' + qu$ et au système de conditions aux limites envisagé.

Le problème envisagé relatif à

$$u'' + q(x)u + \lambda u = 0$$

revient à trouver les solutions non identiquement nulles de l'équation intégrale

$$u(x) = -\int_a^b G(x, \xi)\,\lambda\,u(\xi)\,d\xi,$$

c'est-à-dire

$$u(x) + \lambda \int_a^b G(x, \xi)\,u(\xi)\,d\xi = 0.$$

Soient donc λ_1, λ_2, ... les valeurs singulières et $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... les fonctions singulières normées correspondant au noyau $-G(x, \xi)$.

Les fonctions de la forme $\int_a^b G(x, \xi)\,h(\xi)\,d\xi$ où h est continue sont développables en séries uniformément convergentes des ψ. Ces fonctions sont nulles pour a, b et continues ainsi que leurs dérivées premières et secondes dans l'intervalle a, b. Soit réciproquement une fonction u nulle pour a et b, continue ainsi que ses dérivées première et seconde dans (a, b); on a

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)\,[u''(\xi) + q(\xi)\,u(\xi)]\,d\xi.$$

(¹) n° 10.

Le théorème du développement en série devient ici :

Toute fonction nulle en a et b *continue ainsi que ses dérivées première et seconde* dans a, b est *développable en série uniformément convergente des* ψ. On voit d'ailleurs immédiatement que pour la dérivée *seconde*, on peut supposer plus généralement qu'elle soit *continue par morceaux*. (a, b) est décomposable par un nombre fini de points $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, b = x_p$ en intervalles à l'intérieur desquels u'' est continue; cette fonction u'' tendant vers une valeur limite déterminée quand x tend d'un côté déterminé vers un point x_k déterminé.

En particulier si $q = 0$ les ψ_n sont les fonctions circulaires

$$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right).$$

Soit alors $v(x)$ une fonction continue quelconque donnée. A tout nombre positif ε on peut faire correspondre [1] une fonction $u(x)$ nulle en a et b, continue ainsi que sa dérivée première entre a et b, à dérivée seconde continue par morceaux entre a et b telle que

$$\int_a^b [v(x) - u(x)]^2 \, dx < \varepsilon.$$

Soit u_n la somme des n premiers termes de la série en ψ qui représente $u(x)$

$$\int_a^b (v - u_n)^2 \, dx$$
$$= \int_a^b (v - u)^2 \, dx + 2\int_a^b (v - u)(u - u_n) \, dx + \int_a^b (u - u_n)^2 \, dx.$$

On peut choisir n assez grand pour que les deux derniers termes du second membre soient eux-mêmes inférieurs en valeur absolue à ε.

---

(1) On commencera par exemple par chercher un polynome $P(x)$ différant suffisamment peu de $v(x)$ dans tout un intervalle (a', b') intérieur à (a, b), a', b' différent eux mêmes suffisamment peu de a, b. $u(x)$ sera égal à $P(x)$ pour x compris entre a', b'; on complétera la définition de la courbe représentative de $u(x)$ en utilisant par exemple deux arcs de cercle de rayons assez petits se raccordant avec la même portion déjà définie, et des tangentes menées respectivement à ces arcs de cercle par les points de l'axe des x d'abscisses (a, b) où la courbe u doit aboutir.

On voit qu'au total on aura

$$\int_a^b (v - u_n)^2 \, dx < 3\varepsilon,$$

nombre arbitrairement petit. Par suite, à tout nombre positif η, on peut faire correspondre un entier n et des coefficients $c_1^{(n)}$, $c_2^{(n)}, \ldots, c_n^{(n)}$ tels que

$$\int_a^b [c_1^{(n)}\psi_1 + c_2^{(n)}\psi_2 + \ldots + c_n^{(n)}\psi_n - v]^2 \, dx < \eta.$$

Cela suffit à prouver que le système des ψ est *complet* (¹), car v_1, $v_2, \ldots$ étant les composantes de v par rapport aux ψ, on aura *a fortiori*

$$\int_a^b (v_1\psi_1 + v_2\psi_2 + \ldots + v_n\psi_n - v)^2 \, dx < \eta,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int_a^b v^2 \, dx - (v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2) < \eta.$$

40. Conséquences. — 1° Il en résulte immédiatement que si pour une fonction continue (²) toutes les composantes sont nulles la fonction est identiquement nulle. (Le système des ψ est dit *fermé*.) Remarquons de plus que si toutes les composantes d'une fonction v sont nulles, sauf un nombre fini d'entre elles $v_1, v_2, \ldots, v_p$ par exemple, v est nécessairement une combinaison linéaire à coefficients constants de $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$. En effet déterminons les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_p$

(¹) Si dans la définition que nous avons utilisée des systèmes *complets*, on remplace le mot *continue* par les mots « continue par morceaux », on a une définition équivalente, comme il résulte des remarques suivantes :

1° à toute fonction continue par morceaux g, et à tout nombre positif ε on peut faire correspondre une fonction continue f telle que

$$\int (f - g)^2 \, dx < \varepsilon;$$

2° $(f - u)^2 \leqq 2[(f - g)^2 + (g - u)^2]$.

(²) Ou même continue par morceaux.

de manière que

$$v(x) - (c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots + c_p\psi_p)$$

soit orthogonale à $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$; cette fonction sera orthogonale à tous les ψ et par suite identiquement nulle.

2° Nous allons tirer du caractère complet du système des ψ une conséquence importante relativement aux propriétés extrémales des nombres fondamentaux.

La propriété extrémale liée à la démonstration que nous avons donnée de leur existence était relative au rapport

$$J = \frac{-\int_a^b \int_a^b G(x, \xi)\,\omega(x)\,\omega(\xi)\,dx\,d\xi}{\int_a^b \omega^2(x)\,dx},$$

où ω est une fonction continue quelconque, assujettie éventuellement à être orthogonale à un certain nombre de fonctions. Les valeurs singulières de λ étaient les extrema, ou les extrema extremorum, de

$$\frac{1}{J} = \frac{\int_a^b \omega^2(x)\,dx}{-\int_a^b u(x)\,\omega(x)\,dx},$$

en posant, pour abréger,

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)\,\omega(\xi)\,d\xi.$$

Considérons maintenant le rapport de

$$-\int_a^b u(x)\,\omega(x)\,dx \quad \text{à} \quad \int_a^b u^2(x)\,dx:$$

$$H = \frac{-\int_a^b u(x)\,\omega(x)\,dx}{\int u^2(x)\,dx} = \frac{-\int_a^b u(u'' + qu)\,dx}{\int_b^b u^2\,dx}$$

ou, puisque u s'annule aux deux extrémités de l'intervalle a, b,

$$H = \frac{\int_a^b (u'^2 - qu^2)\,dx}{\int_a^b u^2\,dx}.$$

Nous allons trouver une *expression simple de* H *à l'aide des* λ *et* *des composantes* u_n *de* u. Le système des ψ étant *complet*, on a (¹)

$$\int_a^b u\omega\,dx = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \int_a^b u\psi_n\,dx \int_a^b \omega\psi_n\,dx.$$

D'autre part, d'après un calcul fait plus haut (commencement de la démonstration du développement en série d'Hilbert-Schmidt)

$$\int_a^b \omega\psi_n\,dx = -\lambda_n \int_a^b u\psi_n\,dx.$$

Finalement, en posant

$$\int_a^b u(x)\,\psi_n(x)\,dx = u_n,$$

$$\int_a^b u(u''+qu)\,dx = -\sum_{n=1}^{n=+\infty} \lambda_n u_n^2.$$

D'ailleurs, en raison encore du caractère complet du système ψ_n

$$\int_a^b u^2\,dx = \sum_{n=1}^{n=+\infty} u_n^2.$$

Donc, en définitive,

$$\frac{\displaystyle\int_a^b (u'^2 - qu^2)\,dx}{\displaystyle\int_a^b u^2\,dx} = \frac{\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2 + \ldots}{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 + \ldots}.$$

41. Examinons, en détail, le cas où $q(x) = 0$

$$\frac{\displaystyle\int_a^b u'^2\,dx}{\displaystyle\int_a^b u^2\,dx} = \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 \frac{1^2 u_1^2 + 2^2 u_2^2 + \ldots + n^2 u_n^2 + \ldots}{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 + \ldots},$$

où

$$u_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \int_a^b u(x) \sin\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right) dx.$$

(¹) En appliquant l'égalité

$$\int_a^b v^2\,dx = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 + \ldots,$$

à la fonction $u + t\omega$, où t est une constante arbitraire.

Ainsi tout d'abord pour toute fonction u s'annulant en a et b continue ainsi que ses dérivées première et seconde [1]

$$\frac{\int_a^b u'^2\,dx}{\int_a^b u^2\,dx} \geqq \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2,$$

le signe $=$ n'étant obtenu que si $u_2 = u_3 = \ldots = u_n = \ldots = 0$ et par suite si u est de la forme $c \sin \pi \frac{x-a}{b-a}$.

Pour toute fonction u s'annulant en a et b (continue ainsi que ses dérivées première et seconde) *orthogonale aux* $n-1$ *fonctions* $\sin h\pi \frac{x-a}{b-a}$, où $h = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\frac{\int_a^b u'^2\,dx}{\int_a^b u^2\,dx} \geqq \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2.$$

Assujettissons u (s'annulant en a et b, continue ainsi que ses dérivées première et seconde) à être orthogonale à $n-1$ fonctions choisies comme on voudra $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ et soit alors B la borne inférieure de

$$\frac{\int_a^b u'^2\,dx}{\int_a^b u^2\,dx}.$$

Quand les v sont les ψ, cette borne inférieure est $\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$. D'où résulte immédiatement que si l'on considère maintenant l'ensemble des B (chacun de ces B étant déterminé par le système des $n-1$ fonctions v), la borne supérieure M de cet ensemble est au moins égale à $\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$. Montrons que M *n'est pas supérieure* à $\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$. Il suffit pour cela de montrer qu'étant données $n-1$ fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ d'une manière quelconque, on peut trouver une fonction u (satisfaisant aux conditions imposées) qui leur soit orthogonale et pour laquelle

[1] On pourrait laisser tomber l'hypothèse de l'existence de la dérivée seconde, et élargir un peu l'hypothèse faite sur la dérivée première.

$H \leqq \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$. Choisissons les n constantes c par la condition de rendre $c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots + c_n\psi_n$ orthogonale aux $n-1$ fonctions v_1, v_2, ..., v_{n-1} ($n-1$ équations linéaires et homogènes) les u_1, u_2, ..., u_n, ... relatifs à cette fonction u sont justement les c_1, c_2, ..., c_n, o, o, ... et l'on obtient pour cette fonction u

$$H = \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 \frac{1^2c_1^2 + 2^2c_2^2 + \ldots + n^2c_n^2}{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2} \leqq \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2.$$

Ainsi, en abrégé (*cf.* n° 35), le maximum (v) des bornes inférieures (u) de

$$\frac{\int_a^b u'^2\,dx}{\int_a^b u^2\,dx} \text{ est } \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2.$$

42. L'étude du cas général est tout analogue. Remarquons d'abord qu'*il ne peut y avoir une infinité de valeurs singulières négatives*. Choisissons en effet λ de manière que dans tout l'intervalle (a, b)

$$q(x) + \lambda < 0.$$

Soit f une fonction continue nulle pour a et b pourvue de dérivée première (et seconde) continues vérifiant l'équation

$$f'' + [q(x) + \lambda]f = 0.$$

Si f prenait quelque part dans (a, b) une valeur positive, soit x_0 une valeur lui faisant atteindre son maximum, f'', d'après l'équation, y serait *positive*, ce qui est impossible puisqu'il s'agit d'un *maximum*; f ne peut prendre dans (a, b) ni valeur positive, ni valeur négative, f est donc identiquement nulle.

Les valeurs singulières λ_n de l'équation intégrale qui nous intéresse ne peuvent donc être inférieures au minimum de $-q(x)$. Elles sont d'ailleurs toutes distinctes,

$$u'' + [q(x) + \lambda_n]u = 0$$

ne peut pas avoir deux solutions linéairement indépendantes s'annulant pour $x = a$.

Le raisonnement même qui a été fait dans le cas $q(x) = 0$ montre que λ_n est le maximum (v) des bornes inférieures (u) de

$$\frac{\int_a^b (u'^2 - qu^2)\,dx}{\int_a^b u^2\,dx};$$

mais

$$\left| \frac{\int_a^b (u'^2 - qu^2)\,dx}{\int_a^b u^2\,dx} - \frac{\int_a^b u'^2\,dx}{\int_a^b u^2\,dx} \right| \leqq A,$$

où A représente le maximum de $|q(x)|$ dans (a, b); on a donc aussi [1]

$$\left| \lambda_n - \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} \right| \leqq A,$$

inégalité qui donne un renseignement intéressant sur la croissance de λ_n avec n.

Remarquons qu'il en résulte que

$$\frac{\lambda_n}{\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2} \to 1,$$

quand n tend vers l'infini, ou encore en désignant par $N(\lambda)$ le nombre des valeurs singulières au plus égales à λ [de sorte que $N(\lambda_n) = n$] l'infiniment grand $N(\lambda)$ est équivalent à $\frac{b-a}{\pi}\sqrt{\lambda}$. (On démontre qu'il en serait de même pour les autres conditions aux limites simples que l'on peut imaginer).

43. Réduction de l'équation $pu'' + p'u' + qu + \lambda\rho u = 0$ **où** $p\rho > 0$, **à la forme canonique** (pour laquelle $p = \rho = 1$). Posons

$$L(u) = pu'' + p'u' + qu.$$

On a alors

$$u\,L(v) - v\,L(u) = \left[pu^2\left(\frac{v}{u}\right)'\right]'.$$

---

(1) Grâce aux remarques suivantes : 1° soient $f_1(w)$, $f_2(w)$ deux nombres, dépendant d'un élément variable w (fonction, ou point d'un espace à n dimensions), tels que, pour tout w, $|f_1(w) - f_2(w)| \leqq A$; leurs bornes inférieures B_1, B_2 diffèrent entre elles de A au plus; en effet $f_2(w) \geqq f_1(w) - A$, $f_1(w) \geqq B_1$ entraînent $f_2(w) \geqq B_1 - A$, donc $B_2 \geqq B_1 - A$; d'une manière analogue $B_1 \geqq B_2 - A$; 2° proposition analogue pour les bornes supérieures.

D'où, σ désignant une fonction quelconque de x.

$$\sigma\,L(\sigma U) = [p\sigma^2 U']' + \sigma\,L(\sigma)U.$$

L'équation

$$(pu')' + qu + \lambda\rho u = 0$$

s'écrit, en posant $u = \sigma U$,

$$L(\sigma U) + \lambda\rho\sigma U = 0,$$

et, d'après la formule précédente,

$$(p\sigma^2 U')' + \sigma\,L(\sigma)U + \lambda\rho\sigma^2 U = 0.$$

Faisons maintenant un changement de variable indépendante

$$U' = \frac{dU}{dX}\,\frac{dX}{dx},$$

$$(p\sigma^2 U')' = \left(p\sigma^2\,\frac{dX}{dx}\,\frac{dU}{dX}\right)'_X \frac{dX}{dx}$$

ou, en désignant cette fois par l'accent les dérivées par rapport à X,

$$\left(p\sigma^2\,\frac{dX}{dx}\,U'_X\right)'_X + \frac{dx}{dX}\,[\sigma\,L(\sigma) + \lambda\rho\sigma^2]\,U = 0.$$

Nous serons ramenés à la forme canonique étudiée plus haut si

$$p\sigma^2\,\frac{dX}{dx} = 1,$$

$$\rho\sigma^2\,\frac{dx}{dX} = 1.$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{\sigma} = \sqrt[4]{\rho p},$$

$$dX = \sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx,$$

et détermine le changement de fonction et de variable

$$U = \sqrt[4]{\rho p}\,u,$$

$$X = \int\sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx.$$

L'équation en U, X est

$$U'' + QU + \lambda U = 0,$$

où

$$Q = \frac{dx}{dX}\sigma L(\sigma).$$

D'après ce qui précède

$$U''_{X^2} + QU = \sigma\frac{dx}{dX}L(u).$$

D'où (¹)

$$-\int_A^B U(U''_{X^2} + QU)\,dX = -\int_a^b \frac{1}{\sigma}u\,\sigma\frac{dx}{dX}L(u)\frac{dX}{dx}dx$$
$$= -\int_a^b u\,L(u)\,dx$$
$$= \int_a^b (pu'^2 - qu^2)\,dx.$$

puisque u s'annule en a et b.

D'autre part

$$\int_A^B U^2\,dX = \int_a^b \frac{1}{\sigma^2}u^2\frac{dX}{dx}dx = \int_a^b \rho u^2\,dx.$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ les valeurs singulières correspondant à l'équation

$$U''_{X^2} + QU + \lambda U = 0,$$

U étant assujettie à être nulle aux extrémités de l'intervalle A, B. Cette équation s'écrit bien

$$\sigma\frac{dx}{dX}L(u) + \lambda\frac{1}{\sigma}u = 0$$

ou encore

$$L(u) + \lambda\sqrt{\rho p}\sqrt{\frac{\rho}{p}}u = 0,$$
$$L(u) + \lambda\rho u = 0.$$

Nous arrivons aux conclusions suivantes; p et ρ étant des fonctions continues toutes deux positives dans l'intervalle (a, b) (p ayant une

(¹) D'où aussi en posant $s = \frac{1}{\sigma}$; et, par suite $s\sigma = 1$,

$$s''_{X^2} + Qs = \sigma\frac{dx}{dX}L(1) = q\sigma\sqrt{\frac{p}{\rho}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{q}{\rho} - \frac{s''_{X^2}}{s}.$$

dérivée continue), il ne peut y avoir qu'un nombre fini de valeurs négatives λ telles que

$$\mathrm{L}\,u + \lambda \rho u = 0$$

ait une solution non identiquement nulle, nulle aux deux extrémités. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les valeurs de λ pour lesquelles une telle solution existe, rangées par ordre de grandeur croissante [1].

Le minimum de

$$\frac{\displaystyle\int_a^b (pu'^2 - qu^2)\,dx}{\displaystyle\int_a^b \rho u^2\,dx}$$

pour les fonctions nulles en a, b (continues, pourvues de dérivées premières et secondes continues) est λ_1.

Le maximum (quand on fait varier les v) des bornes inférieures de la même intégrale pour les fonctions u satisfaisant aux mêmes conditions et de plus astreintes à annuler les intégrales

$$\int_a^b \rho u v_k\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

où $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ sont $n-1$ fonctions données, est λ_n.

On peut écrire

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx\right)^2} + \theta\,\mathrm{M},$$

où M est fixe et $|\theta| < 1$.

Une conséquence est que

$$\frac{\lambda_n}{n^2\pi^2}\left[\int_a^b \sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx\right]^2 \to 1,$$

---

[1] Exemple

$$p = 1, \qquad q = 0, \qquad \rho = \frac{1}{x^2}; \qquad \mathrm{U} = \frac{u}{\sqrt{x}}; \qquad \mathrm{X} = \log x; \qquad \mathrm{Q} = -\frac{1}{4};$$

d'où

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{\left(\log\frac{b}{a}\right)^2}.$$

ce qu'on peut exprimer aussi en disant que si $N(\lambda)$ est le nombre des valeurs singulières inférieures ou égales à λ, l'infiniment grand $N(\lambda)$ est équivalent à

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_a^b \sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx\right)\sqrt{\lambda}.$$

44. Application aux verges vibrantes. — L'équation à laquelle satisfait le déplacement longitudinal v d'un point d'une verge vibrante est

$$(pv_x)_x - \rho v_{t^2} = 0 \qquad (x = \text{abscisse};\ t = \text{temps}),$$

où p et ρ sont deux fonctions positives de x données :

$p =$ module d'élasticité multiplié par section;

$\rho =$ densité linéaire.

$\Big($L'équation même rappelle que $\frac{p}{\rho}$ a la dimension du carré d'une vitesse.$\Big)$

La recherche de solutions de la forme

$$u(x)\,g(t)$$

conduit à l'égalité

$$\frac{(pu')'}{\rho u} = \frac{g''}{g}.$$

La valeur commune de ces rapports sera une *constante* $-\lambda$. D'où les équations

$$(pu'_x)'_x + \lambda\rho u = 0,$$
$$g''_{t^2} + \lambda g = 0.$$

La seconde montre immédiatement la signification physique des valeurs singulières λ_n; T_n désignant la période de la vibration correspondante à la valeur λ_n

$$\lambda_n = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2,$$

$\frac{1}{T_n}$ est appelée la fréquence de la vibration.

Le résultat obtenu plus haut s'énonce ainsi : Le nombre N de « fréquences propres » qui ne dépassent pas un nombre $\frac{1}{T}$ donné est asymptotiquement égal à

$$\frac{2}{T}\int_a^b \sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx$$

$\Big($d'après une remarque faite plus haut $\int_a^b \sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx$ a bien la « dimension » d'un temps$\Big)$.

45. Condition suffisante pour que toutes les valeurs singulières correspondant à l'équation $y'' + q(x)y + \lambda y = 0$ et aux conditions aux limites $y_a = 0$, $y_b = 0$ soient positives. — On a déjà vu une telle condition suffisante $q(x) < 0$. Nous allons voir une condition plus large.

Supposons qu'il existe quelque fonction $w(x)$ *positive* ([2]) *dans tout* a, b et *telle que à l'intérieur de cet intervalle*

$$w'' + qw \leqq 0.$$

Soit $N(x)$ la valeur $w'' + qw$ et λ une valeur singulière, y une fonction singulière correspondante. Nous aurons

$$\int_a^b y(y'' + qy)\,dx + \lambda \int_a^b y^2\,dx = 0,$$

d'où en remplaçant q par sa valeur $\frac{N - w''}{w}$ qui est continue puisque w

---

([1]) La signification extrémale des valeurs singulières entraîne immédiatement des propriétés importantes. Remarquons par exemple le principe simple que voici : Quand, dans un problème de minimum, on rend *plus strictes les conditions* auxquelles est assujetti l'élément cherché (autrement dit quand on *restreint le champ* où il peut varier), le minimum ne peut qu'*augmenter* (*ou rester constant*).

En gardant les fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, la borne inférieure, dépendant de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ que nous avons envisagée, est augmentée (ou du moins non diminuée); le maximum de ces bornes inférieures est alors augmenté (ou du moins non diminué).

Une application physique immédiate au problème des cordes vibrantes (vibrations transversales) est la suivante :

Si l'on fixe un point de la corde, les hauteurs des différents sons fondamentaux augmentent (*voir* de nombreuses applications de ce principe et d'autres analogues dans Courant et Hilbert, *Meth. der Math. Physik*).

([2]) On pourrait aussi bien supposer qu'il existe quelque fonction w_1 négative dans tout l'intervalle et y rendant $w_1'' + qw_1 \geqq 0$; ou encore supposer qu'il existe quelque solution de $y'' + qy = 0$, *ne s'annulant en aucun point de l'intervalle*, etc.

ne s'annule pas dans l'intervalle a, b

$$\int_a^b y\frac{wy''-yw''}{w}dx+\int_a^b y^2\frac{N}{w}dx+\lambda\int_a^b y^2\,dx=0$$

ou en remarquant que $wy''-yw''$ est la dérivée de $wy'-yw'$ et que y s'annule en a et b

$$-\int_a^b\left(\frac{y}{w}\right)'(wy'-yw')\,dx+\int_a^b y^2\frac{N}{w}dx+\lambda\int_a^b y^2\,dx=0.$$

La dérivation de $\frac{y}{w}$ introduit de nouveau le terme $wy'-yw'$. D'où pour λ une expression essentiellement positive.

(On a aussi une nouvelle démonstration du fait démontré déjà autrement : si $q(x)<0$, toutes les valeurs singulières sont positives ; on peut en effet choisir alors w constante positive rendant $w''+qw$ négative.)

Il résultera de ce qui suit que la condition est aussi *nécessaire* ; d'une manière plus précise, si tous les λ singuliers sont positifs on pourra trouver quelque fonction $w(x)$ *positive dans tout* (a, b) et y rendant $w''+q(x)w\leqq 0$.

46. Nombre des zéros des fonctions singulières. — Considérons de nouveau l'équation

$$y''+q(x)y+\lambda y=0,$$

où nous ne faisons plus aucune hypothèse de signe sur la fonction continue $q(x)$ ni sur la constante λ. Considérons la solution $y(x, \lambda)$ de cette équation répondant aux conditions initiales

$$y(a, \lambda)=0.$$
$$y'(a, \lambda)=1.$$

1° Elle n'a dans l'intervalle (a, b) extrémités comprises qu'*un nombre fini de zéro* (si elle en avait une infinité, un point limite existerait, qui lui-même serait un zéro, la valeur de y' en un tel point limite ne pourrait être que zéro, et puisque y satisfait à l'équation différentielle, y ne pourrait qu'être identiquement nulle, ce qui n'est pas puisque $y'(a, \lambda)\neq 0$).

2° Quand λ est tel que $\lambda+q(x)$ soit négatif dans tout l'intervalle (a, b), la démonstration même qui nous a montré plus haut que y ne peut s'annuler en b montre aussi que y ne peut s'annuler entre a et b.

3° Nous allons utiliser maintenant des considérations intuitives de continuité sans chercher à les rendre rigoureuses, au sujet de la variation des zéros de $y(x, \lambda)$ avec λ. Considérons un zéro ξ de $y(x, \lambda) = z$ autre que a (d'après 2° un tel zéro n'existera d'ailleurs que si λ est supérieur à une valeur convenable) et considérons d'autre part la fonction $z_1 = y(x, \lambda + \Delta\lambda)$; on a

$$zz_1'' - z_1 z'' + \Delta\lambda . zz_1 = 0.$$

D'où

$$(zz_1' - z_1 z')_a^\xi + \Delta\lambda \int_a^\xi zz_1 \, dx = 0,$$

et, puisque z et z_1 s'annulent en a et que z s'annule en ξ,

$$z_1(\xi) z'(\xi) = \Delta\lambda \int_a^\xi zz_1 \, dx.$$

Si $\Delta\lambda$ est petit, zz_1 est voisin de z^2 et $\int_a^\xi zz_1 \, dx$ est positif; et si $\Delta\lambda > 0$ le second membre est positif. Si ξ est un zéro pour lequel la fonction z passe du négatif au positif quand x traverse ξ en croissant, autrement dit pour lequel $z'(\xi) > 0$, on voit que $z_1(\xi) > 0$. Mais, comme $z(x)$, $z_1(x)$ est croissante au voisinage de ξ. Le zéro de $z_1(x)$ voisin de ξ ne peut donc qu'être *inférieur à* ξ.

Ce qui précède s'applique aussi bien à la valeur b qu'à une valeur quelconque autre que a de l'intervalle $(a. b)$; $a < \xi \leqq b$.

4° Il résulte immédiatement de ce qui précède que quand λ croît de $-\infty$ à $+\infty$, le nombre des zéros de $y(x, \lambda)$ *augmente d'une unité* chaque fois que λ atteint une valeur singulière, et dans ce cas seulement.

Mais alors il en résulte immédiatement que, *abstraction faite de a, $y(x, \lambda)$ ne s'annule pas dans (a, b)* quand $\lambda < \lambda_1$, *s'y annule une* fois quand $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, (ce zéro étant d'ailleurs b seulement si $\lambda = \lambda_1$) *s'y annule p* fois si $\lambda_p \leqq \lambda < \lambda_{p+1}$, (le $p^{\text{ième}}$ zéro étant d'ailleurs b seulement si $\lambda = \lambda_p$).

En particulier les fonctions singulières $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p, \ldots$ qui s'annulent par définition même en a et en b, s'annulent respectivement entre a et b, o, 1, ..., $p-1$ fois exactement.

D'autre part, si $\lambda < \lambda_1$, on voit, en raisonnant encore par continuité, qu'en modifiant légèrement la valeur initiale de $y(x, \lambda)$ on obtiendra une solution de l'équation différentielle qui restera positive dans tout l'intervalle.

En particulier si $\lambda_1 > 0$, on voit qu'il existera une fonction w *positive* dans tout l'intervalle, telle que

$$w'' + qw + \lambda w = 0,$$

λ désignant un nombre positif donné comme on voudra inférieur à λ_1 et par suite telle que

$$w'' + qw < 0$$

dans tout l'intervalle. C'est la réciproque annoncée plus haut.

Remarque. — On peut évidemment déduire de ce qui précède l'énoncé d'une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les valeurs singulières λ soient *supérieures à un nombre k donné;* il suffit d'écrire l'équation différentielle donnée sous la forme

$$y'' + [q(x) + k]y + (\lambda - k)y = 0$$

et d'appliquer le critérium précédent, où $q(x)$ est remplacé par $q(x) + k$.

On peut dire : la plus petite valeur singulière est la borne supérieure des nombres k tels qu'il existe une fonction y *positive dans tout* (a, b) qui rende $y'' + q(x)y + ky \leqq 0$.

47. Corrélation entre deux problèmes d'extremum. — On a vu plus haut (n^{os} 40 et 41) que le maximum (v) des bornes inférieures (u) de

$$R = \frac{\int_a^b (pu'^2 - qu^2)\,dx}{\int_a^b \rho u^2\,dx}$$

pour les fonctions u nulles en a, b est λ_n. D'une manière plus explicite, étant données $n-1$ fonctions v, si u nulle en a et b est assujettie à annuler les $n-1$ intégrales $\int_a^b \rho u v_k\,dx$, le rapport considéré a une borne inférieure; le maximum, quand les v varient, de cette borne inférieure est λ_n, maximum atteint lorsque les v sont les $n-1$ premières fonctions singulières satisfaisant aux équations

$$(pv')' + qv + \lambda \rho v = 0.$$

D'autre part, appliquons au cas présent (en nous bornant pour plus de netteté à l'hypothèse où λ_1 — et par suite tous les λ — sont positifs), la propriété d'extremum qui a servi à caractériser les valeurs singulières d'une équation intégrale à noyau symétrique. La fonction u nulle en a et b telle que

$$(pu')' + qu = f(x)$$

(supposée unique) s'écrit sous la forme $\int_a^b \mathrm{K}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$, où K désigne une certaine fonction symétrique en x, ξ. Si u nulle en a et b satisfait à

$$(pu')' + qu + \lambda\rho u = 0,$$

elle satisfait à l'équation intégrale

$$\sqrt{\rho(x)}\, u(x) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(x, \xi) \sqrt{\rho(x)} \sqrt{\rho(\xi)} \sqrt{\rho(\xi)}\, u(\xi)\, d\xi = 0,$$

λ_n est donc (*voir* n$^{\text{os}}$ 31 et 35) le maximum (ϖ) des bornes inférieures (ω) de

$$\mathrm{H} = \frac{\displaystyle\int_a^b \omega^2(x)\, dx}{\displaystyle -\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(x, \xi) \sqrt{\rho(x)} \sqrt{\rho(\xi)}\, \omega(x)\, \omega(\xi)\, dx\, d\xi}.$$

D'une manière plus explicite, étant données $n-1$ fonctions ϖ, si ω est assujettie à annuler les $n-1$ intégrales $\int_a^b \omega \varpi_k\, dx$, le rapport considéré a une certaine borne inférieure; le maximum, quand les ϖ_k varient, de cette borne inférieure est λ_n.

Le rapport H s'écrit d'ailleurs

$$\frac{\displaystyle\int_a^b \omega^2(x)\, dx}{\displaystyle -\int_a^b \sqrt{\rho(x)}\, \omega(x)\, z(x)\, dx}$$

en désignant par $z(x)$ la fonction nulle en a et b telle que

$$(pz')' + qz = \sqrt{\rho(x)}\,\omega(x),$$

et par suite

$$H = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{[(pz')' + qz]^2}{\rho}\,dx}{-\displaystyle\int_a^b [(pz')' + qz]\,z\,dx} = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{[(pz')' + qz]^2}{\rho}\,dx}{\displaystyle\int_a^b (pz'^2 - qz^2)\,dx}.$$

Pour rapprocher davantage les énoncés relatifs au rapport R et au rapport H, faisons la remarque suivante relative au rapport H. Au lieu de choisir arbitrairement $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-1}$, prenons pour ces fonctions des expressions de la forme

$$\int K(x, \xi)\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(\xi)}\,\chi_h(\xi)\,d\xi.$$

On laisse peut-être ainsi de côté certaines bornes inférieures; mais toutes celles que l'on fait intervenir intervenaient précédemment; par suite, le nouveau maximum des bornes inférieures du rapport H ne peut pas être supérieur à la valeur qu'il avait précédemment. D'ailleurs il n'est pas inférieur non plus à cette valeur puisque les $n-1$ premières fonctions singulières $\varphi_h(h = 1, 2, \ldots, n-1)$, qui, prises pour fonctions ϖ, donnaient ce maximum, peuvent s'écrire par définition même

$$-\lambda_h \int K(x, \xi)\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(\xi)}\,\varphi_h(\xi)\,d\xi,$$

et sont par suite de la forme choisie pour les nouvelles fonctions ϖ.

L'égalité

$$\int \omega(x)\,dx \int K(x, \xi)\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(\xi)}\,\chi_h(\xi)\,d\xi = 0$$

s'écrit d'ailleurs

$$\int_a^b \chi_h(\xi)\sqrt{\rho(\xi)}\,d\xi \int K(x, \xi)\sqrt{\rho(x)}\,\omega(x)\,dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b \chi_h(\xi)\sqrt{\rho(\xi)}\,z(\xi)\,d\xi = 0,$$

en désignant par z la fonction nulle pour a et b telle que

$$(pz')' + qz = \sqrt{\rho(x)}\,\omega(x).$$

Ainsi donc, considérons une fonction z s'annulant en a et b et assujettie à être orthogonale à $n-1$ fonctions arbitrairement données ([1]), le rapport R comme le rapport H a une certaine borne inférieure; faisons maintenant varier de toutes les manières les $n-1$ fonctions données; le *maximum* de la borne inférieure est *le même* qu'il s'agisse de R ou de H et il est obtenu par le même système de $n-1$ fonctions.

Le résultat s'obtient évidemment d'une manière tout analogue dans des circonstances plus générales : Considérons un noyau continu symétrique $K(x, \xi)$ tel que toute valeur singulière de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = 0$$

soit *positive*, et que le système des fonctions singulières $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ soit *complet*, et les deux rapports

$$R = \frac{\displaystyle\int_a^b u(x)\,U(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b U^2(x)\,dx}, \qquad H = \frac{\displaystyle\int_a^b u^2(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b u(x)\,U(x)\,dx},$$

où

$$U(x) = \int_a^b K(x, y)\,u(y)\,dy$$

(rapports évidemment tous deux positifs, et liés par l'inégalité de Schwarz $R \leqq H$).

Si l'on assujettit par exemple U pour le premier, u pour le second à être orthogonal à $n-1$ fonctions données, la borne inférieure du rapport considéré a, quand les $n-1$ fonctions varient de toutes les manières possibles, un maximum *qui est le même* pour R et pour H.

Il est aisé de mettre en évidence les fondements algébriques essentiels de ce lien. Pour nous borner au cas le plus simple, considérons une transformation linéaire symétrique à deux variables

$$X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$X_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

---

(1) En appelant $\chi_h(x)\sqrt{\rho(x)}$ ces $n-1$ fonctions, l'expression $\dfrac{(pz')' + qz}{\sqrt{\rho(x)}}$ est orthogonale aux $n-1$ expressions $\displaystyle\int_a^b K(x, \xi)\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(\xi)}\,\chi_h(\xi)\,d\xi$.

où $a_{12}=a_{21}$ où $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$ est une forme définie positive.

$$R=\frac{X_1x_1+X_2x_2}{X_1^2+X_2^2}, \qquad H=\frac{x_1^2+x_2^2}{X_1x_1+X_2x_2}$$

ont même maximum et même minimum atteints en même temps; cela revient simplement à dire, en considérant l'ellipse

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=1,$$

les distances de l'origine à une tangente à l'ellipse et au point de contact de cette tangente atteignent en même temps leur maximum et leur minimum, les demi-axes.

48. **Généralisations.** — Les résultats établis pour un noyau continu s'étendent facilement, pour la plupart, à des cas plus généraux. On peut par exemple admettre que le noyau ait un nombre fini de lignes de discontinuité ordinaires ([1]). On peut même admettre que le noyau devienne infini, en supposant toutefois que les intégrales simples portant sur son carré avec soit l'un soit l'autre des arguments comme variable d'intégration, et que l'intégrale double portant sur son carré aient toutes trois un sens, les deux premières étant, de plus, des fonctions bornées. Il revient au même de dire que l'on peut supposer infinie l'une des limites d'intégration, ou même les deux, en faisant des hypothèses convenables sur la régularité du noyau.

49. **Équations singulières.** — Mais il est des cas où les résultats sont essentiellement différents. Nous allons nous borner à quelques-uns de ceux que l'on peut tirer d'une relation remarquablement simple due à Fourier.

$f(x)$ étant une fonction définie de o à $+\infty$, continue, ayant une dérivée ne présentant dans tout intervalle fini qu'un nombre fini de points de discontinuité (de première espèce), et $\int_0^{+\infty}|f(x)|\,dx$

([1]) Toutefois la démonstration du théorème (de Mercer) au sujet du développement en série $\sum \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}$ des noyaux tels que $\int\int K(x,y)\omega(x)\omega(y)\,dx\,dy$ soit positif pour toute fonction ω fait intervenir essentiellement l'hypothèse de la continuité ω du noyau K (n° 38, 4°).

étant convergente, si l'on pose

$$g(x) = 2\int_0^{+\infty} f(y)\cos 2\pi xy\, dy,$$

on a

$$f(x) = 2\int_0^{+\infty} g(y)\cos 2\pi xy\, dy.$$

Les fonctions $f(x)$, $g(x)$ peuvent être qualifiées de complémentaires. Par exemple, e^{-x} et $\frac{2}{1+4\pi^2 x^2}$ sont complémentaires. $e^{-\pi x^2}$ est sa propre complémentaire.

Il peut être commode de considérer la fonction paire qui coïncide avec $f(x)$ de o à $+\infty$. C'est ce que nous ferons maintenant. Un calcul élémentaire montre que si f et g sont complémentaires $f(ax)$ où $a > 0$ et $\frac{1}{a} g\left(\frac{x}{a}\right)$ le sont aussi. $f(x)\cos 2\pi sx$ et $\frac{g(x+s)+g(x-s)}{2}$ le sont aussi.

De ces faits on peut tirer immédiatement un résultat intéressant relativement à l'équation intégrale singulière

$$u(x) - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} u(y)\cos 2\pi xy\, dy = 0. \tag{1}$$

Si λ a une valeur telle que cette équation admette une solution u non identiquement nulle, la complémentaire de cette solution est $\frac{u(x)}{\lambda}$; et par suite $\frac{u(x)}{\lambda^2} = u(x)$, les seules valeurs singulières [1] de λ sont donc $+1$ et -1. D'ailleurs pour $\lambda = 1$, il suffit d'ajouter deux fonctions complémentaires l'une de l'autre pour avoir une solution. On aperçoit donc la grande variété des solutions, par exemple

$$e^{-ax}\cos 2\pi bx + \frac{1}{a}\left[\frac{1}{1+4\pi^2\left(\frac{x+b}{a}\right)^2} + \frac{1}{1+4\pi^2\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}\right]$$

est solution. L'équation sans second membre a une *infinité* de solutions *linéairement indépendantes*.

---

[1] En comprenant par ce mot les valeurs pour lesquelles l'équation a une solution non identiquement nulle.

Une des remarques faites plus haut au sujet de deux fonctions complémentaires quelconques $f(x)$, $g(x)$ montre que

$$f(\nu)\cos 2\pi\nu x = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)\cos 2\pi\nu y\, dy.$$

D'après cela, l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)\,\varphi(y)\,dy = 0$$

admet une solution différente de zéro, à savoir $\cos 2\pi\nu x$, pour toute valeur de λ de la forme $\frac{1}{f(\nu)}$: *les valeurs singulières* (1) *forment un « spectre continu »*.

Il existe aussi d'ailleurs des équations intégrales singulières pour lesquelles « le spectre des valeurs singulières » se compose d'une partie continue et d'une partie discontinue.

50. Extension au cas de n variables. — Les théories que nous avons développées pour le cas d'une variable indépendante s'étendent au cas de n variables indépendantes.

On définit par exemple la fonction de Green relative à l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

et à la donnée $u = 0$ sur la frontière à $n-1$ dimensions d'un domaine D simplement connexe à n dimensions comme une solution de l'équation (1) satisfaisant à ces conditions aux limites et présentant en un point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ intérieur à D une singularité convenable (la fonction ne reste même plus finie en ce point, elle devient infinie d'une certaine manière que l'on impose, et qui diffère suivant l'indice n).

La recherche de la fonction de Green dans le cas le plus simple $n = 2$ est équivalente au problème de la représentation « conforme » du domaine D sur un cercle.

Le nombre $N(\lambda)$ des valeurs singulières, relatives au problème à deux dimensions

$$(pu_x)_x + (pu_y)_y + qu + \lambda\rho u = 0$$

à l'intérieur de D, u étant nul (¹) sur la courbe simple fermée, limitant D, inférieures à λ, est, quand λ tend vers $+\infty$, « équivalent » à

$$\frac{1}{4\pi}\left(\iint \frac{\rho}{p}\,dx\,dy\right)\lambda.$$

Le nombre $N(\lambda)$ des valeurs singulières, relatives au problème à trois dimensions,

$$(pu_x)_x + (pu_y)_y + (pu_z)_z + qu + \lambda\rho u = 0$$

à l'intérieur de D, u nul (¹) sur la surface fermée limitant D, inférieures à λ est, quand λ tend vers $+\infty$, équivalent à

$$\frac{1}{6\pi^2}\left[\iiint \left(\frac{\rho}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx\,dy\,dz\right]\lambda^{\frac{3}{2}}.$$

Supposons ρ et p constants; on voit que cette valeur asymptotique ne dépend (outre ces valeurs constantes) que *du volume* (de la surface dans le cas $n = 2$) et *non pas de la forme du domaine*. Ce résultat, important dans la théorie *du rayonnement*, avait été prévu par les physiciens (²).

EXERCICES.

I. — 1° Soit une fonction continue $\varphi(x)$ (dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$) satisfaisant à l'équation

$$(1)\qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = 0,$$

où

$$K(x, y) = (x-1)y, \qquad \text{si } y < x;$$
$$K(x, y) = x(y-1), \qquad \text{si } y > x.$$

Montrer que φ a des dérivées des deux premiers ordres, satisfait à $\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0$, s'annule pour $x = 0$ et pour $x = 1$.

(¹) On pourrait varier les conditions aux limites données, supposer, par exemple, la dérivée normale de u égale à zero.

(²) LORENTZ, *Physikalische Zeitschrift*, 1910, p. 248. Pour la démonstration mathématique, *voir* WEYL, *Math. Ann.*, t. 71, 1912, et HILBERT COURANT.

2° L'équation (1) ne peut avoir une solution continue non identiquement nulle que si $\lambda = -n^2\pi^2$ où n est entier; quelles sont alors les solutions?

3° Quelles sont les valeurs de λ pour lesquelles l'équation

$$(2) \qquad \varphi(x) + 2\lambda \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi y}{n^2\pi^2} \right) \varphi(y)\, dy = 0$$

a une solution continue non identiquement nulle. Quelles sont alors les solutions de cette équation?

Traiter (3°), *a.* en se servant de (2°); *b.* sans se servir de (2°).

4° Dans le cas où λ n'est pas de la forme $-n^2\pi^2$, montrer que l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

a une solution continue et une seule, et que cette solution est donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 R(x, y, \lambda) f(y)\, dy,$$

où R ne dépend pas de f.

Donner l'expression aussi explicite que possible de $R(x, y, \lambda)$. On trouve

$$\left\{ R(x, y, \lambda) = \frac{\left[\dfrac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda}(x - 1) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}\, y}{\lambda} \right]}{\left(\dfrac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right)} \qquad \text{pour } x > y \right\}.$$

II. — 1° c étant une constante donnée différente de zéro, $f(x)$ une fonction continue donnée, montrer que l'équation différentielle

$$y'' - c^2 y = f(x)$$

a une solution et une seule telle que

$$y(0) = y(1),$$
$$y'(0) = y'(1)$$

et que cette solution est représentée par

$$\int_0^1 K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

où

$$K(x, \xi) = -\frac{\operatorname{ch} c\left(-x + \xi - \frac{1}{2}\right)}{2c \operatorname{sh} \frac{c}{2}}, \qquad \text{si } 0 < x < \xi$$

et

$$K(x, \xi) = -\frac{\operatorname{ch} c\left(x - \xi - \frac{1}{2}\right)}{2c \operatorname{sh} \frac{c}{2}}, \qquad \text{i } \xi < x < 1.$$

2° Déduire de là une équation intégrale à laquelle doit satisfaire toute fonction φ telle que $\varphi'' + \mu\varphi = 0$ ($\mu = $ const.) et que

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = \varphi(1), \\ \varphi'(0) = \varphi'(1), \end{array}\right\} \text{ (on posera } \mu = -c^2 - \lambda\text{)},$$

et en conclure la formule

$$-K(x, \xi) = \frac{1}{c^2} + 2\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\cos 2n\pi(x-\xi)}{c^2 + 4n^2\pi^2}.$$

3° Montrer qu'il résulte de l'étude faite que toute fonction y continue ainsi que ses deux premières dérivées dans l'intervalle $(0, 1)$ telle que $y(0) = y(1)$ et $y'(0) = y'(1)$ est développable en série uniformément convergente des fonctions $\cos 2n\pi x$, $\sin 2n\pi x$ (n entier).

III. — 1° Trouver les solutions de l'équation $y'' + y = \sin x$ qui s'annulent pour $x = 0$; elles prennent toutes la même valeur pour $x = \pi$. Trouver les solutions de l'équation $y'' + y = \sin x$ qui s'annulent pour $x = \pi$; elles prennent toutes la même valeur pour $x = 0$.

2° Déterminer la fonction $\varphi(\xi)$ de manière que l'équation

$$y'' + y = \varphi(\xi) \sin x$$

(où ξ est un paramètre et x la variable) admette dans chacun des deux intervalles $(0. \xi)$; (ξ, π) une solution $G(x, \xi)$, s'annulant respectivement en $0, \pi$; les deux valeurs de G coïncidant en ξ, la dérivée par rapport à x éprouvant une discontinuité égale à $+1$

$$\left[\frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi)\right]_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} = +1;$$

cette fonction $G(x, \xi)$ étant de plus dans $(0, \pi)$ orthogonale à $\sin x$, montrer que $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

3° Pour que $y'' + y = f(x)$ ait quelque solution (continue ainsi que y') s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = \pi$, il faut que $f(x)$ soit orthogonal à $\sin x$ dans $(0, \pi)$. Cette condition étant supposée réalisée, montrer que la seule solution continue ainsi que y', orthogonale à $\sin x$ et s'annulant pour $x = 0$ et $x = \pi$, de l'équation $y'' + y = f(x)$ est

$$\int_0^\pi G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

4° Ce qui précède, appliqué au cas de l'équation $y'' + y + \lambda y = 0$, donne certains renseignements sur une équation intégrale que l'on formera.

5° Généralisation : formation de l'équation intégrale ayant pour solutions les fonctions telles que $(py')' + qy + \lambda y = 0$ satisfaisant à certaines conditions aux limites homogènes, $\lambda \neq 0$, quand on suppose que zéro est une valeur singulière pour ces conditions aux limites, autrement dit *qu'il existe quelque solution de l'équation relative à* $\lambda = 0$ (non identiquement nulle, à dérivées première et seconde continue), satisfaisant à ces conditions aux limites.

IV. — 1° Montrer que l'équation $x^2 y'' + 2xy' = f(x)$ a une solution et une seule telle que à la fois

$$y' = 0 \quad \text{pour } x = a \quad \text{et} \quad y = 0 \quad \text{pour } x = b \qquad (0 < a < b)$$

et mettre cette solution sous la forme $\int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$. Former une équation intégrale de Fredholm à laquelle satisfait toute solution y de $x^2 y'' + 2xy' + \lambda y = g(x)$, telle que à la fois

$$y' = 0 \quad \text{pour } x = a \qquad \text{et} \qquad y = 0 \quad \text{pour } x = b.$$

2° Grâce à un changement de variables ramener l'équation

$$x^2 y'' + 2xy' + \lambda y = 0$$

à une équation à coefficients constants. Former explicitement une équation ayant pour racines les valeurs singulières λ relatives à l'équation intégrale de (1°) et utiliser cette équation pour apercevoir l'existence d'une infinité de telles valeurs singulières.

3° Questions analogues pour

$$u'' = F(x), \qquad u'' + \frac{\mu}{x^2} u = G(x), \qquad u'' + \frac{\mu}{x^2} u = 0$$

avec les données aux limites

$$u = 0 \quad \text{pour } x = a \qquad \text{et} \qquad u' = 0 \quad \text{pour } x = b$$

(mêmes valeurs de a et de b que dans 1° et 2°).

Les valeurs singulières μ sont les mêmes que les valeurs singulières λ.

Lien entre les deux groupes de questions.

Propriétés de maximum ou minimum qui s'y rattachent.

V. — 1° y désignant une fonction inconnue de la variable x, on considère l'équation différentielle linéaire homogène

$$(1) \qquad y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$$

où λ est une constante donnée. Trouver deux séries entières satisfaisant à cette équation, l'une représentant une fonction paire, l'autre une fonction impaire, montrer que ces séries convergent quel que soit x; en déduire la solution générale de (1).

Toute solution, quand x tend vers l'infini avec l'un au moins des deux signes, croît (en valeur absolue) plus vite que n'importe quelle puissance de x. Il n'y a exception que si λ est un nombre pair, positif ou nul, auquel cas l'équation admet parmi ses solutions un polynome (déterminé à un multiplicateur constant près).

2° La dérivée d'ordre n de e^{-x^2} est égale au produit de $(-1)^n e^{-x^2}$ par un polynome que l'on appelle $H_n(x)$. Montrer que l'on a

$$H_{n+1}(x) - 2x\,H_n(x) + 2n\,H_{n-1}(x) = 0,$$

$$\frac{dH_n}{dx} = 2n\,H_{n-1}$$

et que H_n peut être considéré comme un des polynomes dont il a été question au (1°).

L'expression générale de $H_n(x)$ est

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - \ldots.$$

Si $p \neq n$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\, H_p(x)\, e^{-x^2}\, dx = 0.$$

Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x)\, e^{-x^2}\, dx$$

$\left(\text{en se rappelant que l'on a } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\right)$.

3° Si y satisfait à (1), la fonction $z = y e^{-\frac{x^2}{2}}$ satisfait à l'équation

$$(2) \qquad z'' + (\lambda + 1 - x^2) z = 0.$$

Pour quelles valeurs de la constante λ l'équation (2) a-t-elle une solution continue partout, qui s'annule à la fois pour $x = -\infty$ et $x = +\infty$? Ces valeurs λ_0, λ_1, ... étant rangées par ordre de grandeur croissante, que peut-on dire des zéros des fonctions successives correspondantes z_0, z_1, ...?

Bien que l'intervalle soit infini, les résultats sont ici de même nature que dans les exemples précédents. Les H_n sont les polynomes rencontrés autrefois par Hermite. Le problème actuel se rencontre dans la théorie récente des quanta (*oscillateur harmonique*) (*voir* par exemple Eug. Bloch, *L'ancienne et la nouvelle théorie des quanta*, Hermann, 1930, p. 294; L. de Broglie, *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire*, Hermann, 1930, p. 270).

VI. *Exemples de problèmes à « spectre continu »*. — 1° Les valeurs de λ pour lesquelles l'équation $u'' + \lambda u = 0$ a une solution *finie partout* sont les valeurs *positive ou nulle*, *qui forment une suite continue*.

2° *Problème de Schrödinger*. — On demande les valeurs de λ pour lesquelles l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} u + \lambda u = 0$$

(où c est une constante positive donnée) a une solution, continue en o, et finie quand $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ tend vers l'infini. On est amené à chercher les valeurs de λ telles que

$$\nu''_{r^2}+\frac{2}{r}\nu'_r+\left[\lambda+\frac{c}{r}-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]\nu=0$$

a une solution continue pour $r=0$, finie pour $r\to+\infty$. Ces valeurs sont

$$-\frac{c^2}{4l^2},$$

où l entier $>n$ (spectre discontinu, avec point d'accumulation en zéro) et les nombres positifs ou nuls (spectre continu) (*voir* Hilbert et Courant, *Methoden der Mathematischen Physik*, 2^e^ éd., p. 294).

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE.

1. COURANT et HILBERT. — *Methoden der Mathematischen Physik* (2e édit., Berlin, 1931).
2. FRÉCHET et HEYWOOD. — *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique* (Paris, 1912).
3. FREDHOLM. — Sur une classe d'équations fonctionnelles (*Acta Mathematica*, t. 27, 1903).
4. GOURSAT. — *Cours d'Analyse mathématique* (t. 3, Paris).
5. HILBERT. — *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Leipzig et Berlin, 1912).
6. KNESER. — *Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der Mathematischen Physik* (2e éd., Braunschweig, 1922).
7. LALESCO. — *Introduction à la théorie des équations intégrales* (Paris, 1912).
8. LIOUVILLE. — Mémoire sur le développement des fonctions (*Journ. Math. pures et appliquées*, t. 1, 1836: t. 2, 1837).
9. MISES et FRANK. — *Die partiellen Diff. und Int. Gleichungen der Mech. u. Physik* (Leipzig et Berlin, 1925-1927).
10. MONTEL. — Sur les suites infinies de fonctions (*Ann. Écol. Norm.*, 3e série, t. 24, 1907).
11. RAYLEIGH. — *The Theory of Sound* (Londres, 1894, 1896).
12. SCHMIDT. — Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen (*Math. Ann.*, t. 63 et 64, 1907).
13. VOLTERRA et PÉRÈS. — *Théorie générale des fonctionnelles* (Paris, 1936).
14. WHITTAKER et WATSON. — *A Course of Modern Analysis* (3e édit., Cambridge, 1920).

Pour une bibliographie plus étendue, se reporter particulièrement à (1) et (13).

Pour les équations intégrales singulières, à

1'. CARLEMAN. — *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique* (Uppsala Univ. Arsskrift, 1923).
2'. WEYL. — *Singülare Integralgleichungen* (*Diss.*, Göttingen, 1908).

TABLE DES MATIÈRES.