PAUL VINCENSINI

Corps convexes. Séries linéaires. Domaines vectoriels

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 94 (1938)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1938__94__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XCIV

Corps convexes. Séries linéaires. Domaines vectoriels

Par M. Paul VINCENSINI

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1938

CORPS CONVEXES. SÉRIES LINÉAIRES.

DOMAINES VECTORIELS;

Par M. Paul VINCENSINI.

INTRODUCTION.

Il est bien connu que lorsqu'on essaye d'aborder par l'analyse les différents problèmes que pose la théorie des corps convexes, on se trouve, dès les cas les plus simples, en présence de difficultés extrêmement difficiles à surmonter. Ces difficultés ne doivent d'ailleurs pas nous étonner; elles sont, pour ainsi dire, dans l'ordre logique des choses.

A partir du moment où, par l'emploi des coordonnées curvilignes appliquées à l'étude des propriétés des surfaces, Gauss a créé la géométrie différentielle, des progrès remarquables ont été réalisés en matière géométrique, dont beaucoup auraient sans doute été impossibles sans le secours de l'analyse. Mais, si la géométrie doit beaucoup à l'analyse, elle n'en a pas moins contribué à déterminer le sens du développement de cette dernière. Si, par exemple, la nécessité d'une étude des corps convexes s'était manifestée au moment où l'analyse cherchait sa voie, il est probable que ce développement se serait trouvé, de ce fait, sensiblement modifié.

Ceci explique que certaines théories géométriques, telle précisément la théorie des corps convexes, résistent à un instrument analytique qui n'a pas été fait spécialement pour elles.

Cette résistance a eu un double effet. Au point de vue analytique elle est à l'origine de notions fort importantes comme, par exemple, la notion de *fonctions convexes*. D'autre part, l'étude complète des inégalités entre volumes et volumes mixtes (Chap. I) semble, comme l'observe M. Favard [17], devoir exiger l'élargissement de certaines conceptions sur le calcul des variations.

Au point de vue géométrique, elle a suscité un ensemble brillant de travaux, à l'origine desquels il convient de placer les recherches de H. Brunn [10], prolongées par les célèbres travaux de Minkowski [33], et qui n'ont sans doute pas encore atteint leur plein développement.

C'est à l'exposé de certains de ces travaux, caractérisés surtout par une simplicité parfois surprenante des moyens mis en œuvre, qu'est consacré le présent fascicule.

Ce qui frappe aussitôt dans les différentes études géométriques relatives à la théorie des corps convexes, c'est le rôle primordial qu'y joue l'ingéniosité du chercheur. Qu'un auteur ait l'idée d'introduire une notion nouvelle, judicieusement adaptée à l'objet en vue, et immédiatement, un bond en avant est fait, qui conduit à la connaissance d'un grand nombre de faits nouveaux, dont certains pourraient sans doute être fournis par l'analyse, mais non sans grandes difficultés.

Il ne saurait être dans notre intention de donner ici une idée complète de la théorie des corps convexes. Pour un exposé d'ensemble des principaux résultats acquis dans ce domaine, le lecteur pourra se reporter, en dehors des travaux déjà signalés de H. Brunn et Minkowski, aux ouvrages de M. W. Blaschke [5], [6], de T. Bonnesen [7], et de T. Bonnesen et W. Frenchel [8].

Nous nous proposons seulement, conformément à l'esprit de cette collection, de passer en revue les notions auxquelles la théorie est redevable des progrès les plus importants et dont l'étude gagnerait à être approfondie.

Parmi celles-ci, deux méritent spécialement de retenir l'attention; ce sont, la notion de *série linéaire de corps convexes*, déjà ancienne puisque son introduction remonte à H. Brunn [10], et celle, beaucoup plus récente (*voir* Rademacher [38]) de *domaine vectoriel d'un corps convexe*.

Ces deux notions sont extrêmement riches de contenu géométrique, et c'est autour d'elles que gravitent la plupart des développements qui vont suivre. En ce qui concerne les séries linéaires, nous avons peu insisté sur les applications d'un caractère classique. L'étude des inégalités entre volumes et volumes mixtes, à laquelle il a été fait allusion plus haut, est à peine mentionnée. Nous avons surtout tenu à mettre le lecteur en possession d'instruments nouveaux de recherche, susceptibles, de par leur nouveauté même, d'orienter le chercheur vers des voies encore inexplorées. Nous pensons y être en partie parvenu par l'emploi du *prolongement des séries linéaires de corps convexes* (Chap. II), et par un emploi combiné de ce prolongement et de la notion de domaine vectoriel.

En ce qui concerne les domaines vectoriels, la nouveauté du sujet nous a obligé à être un peu plus complet. Le meilleur moyen d'apprendre à utiliser un instrument et d'en discerner les avantages consiste à l'observer dans son fonctionnement. C'est pourquoi nous n'avons pas craint de reprendre certains résultats de MM. Estermann ou Ganapathi (Chap. III), lorsqu'il s'est agi de mettre en lumière l'élégance et la souplesse avec laquelle la nouvelle notion peut être maniée, ou certains autres résultats de M. B. Segre (Chap. IV) pour en montrer le rôle unificateur

Mais, notre but principal est resté le même : montrer l'importance et l'efficacité de la notion de domaine vectoriel dans la recherche de résultats nouveaux.

CHAPITRE I.

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES CORPS CONVEXES.

Dans ce premier chapitre nous avons rassemblé les éléments essentiels de la théorie des corps convexes. Nous y passons rapidement en revue les définitions et propriétés fondamentales, ainsi que les principales notions géométriques qui se sont successivement introduites dans la théorie et dont nous aurons, par la suite, à faire un usage constant. Pour sa rédaction nous avons fait largement appel à l'ouvrage que T. Bonnesen a consacré au *Problème des isopérimètres et des isépiphanes* [7].

1. **Ensembles convexes; corps convexes.** — Envisageons, dans l'espace euclidien à n dimensions, un ensemble ponctuel E. L'ensemble est dit convexe si le segment rectiligne joignant deux points quelconques A et B de E appartient tout entier à E.

Si E n'est pas contenu dans un espace linéaire d'ordre inférieur à n, la définition précédente entraîne, pour E, l'existence de points intérieurs.

E peut être borné ou non, ouvert ou fermé. S'il est borné et fermé et si, en outre, il admet des points intérieurs, nous dirons qu'il constitue un corps convexe de l'espace à n dimensions.

La frontière F d'un corps convexe est un *continu* [9] qui peut d'ailleurs contenir des variétés linéaires convexes à 1, 2, ..., $n-1$ dimensions.

Une droite quelconque, passant par un point intérieur quelconque de E, coupe F en deux points seulement, et cette condition *suffit* à assurer la convexité de E.

L'ensemble F des points frontières d'un corps convexe est une figure convexe au sens que l'on attribue à ce mot en géométrie élémentaire dans les expressions courbe ou surface convexe, mais ce n'est pas un corps convexe au sens précédemment défini en raison de l'inexistence de points intérieurs.

2. Plans d'appui. — Une variété plane P à $n-1$ dimensions, issue d'un point frontière d'un ensemble quelconque E, est dite *plan d'appui* de E, si elle laisse dans un même demi-espace *fermé* tous les points de E. Il résulte de cette définition que les points d'un ensemble situés dans un plan d'appui ne peuvent être que des points frontières. On démontre qu'en chaque point frontière d'un ensemble convexe il existe un plan d'appui au moins.

L'existence d'un plan d'appui au moins en chaque point de la frontière F d'un ensemble E suffit à assurer la convexité de E, sous la condition expresse que E admette des points intérieurs. Si E est un corps convexe de l'espace à n dimensions, les deux ensembles E et F ont les mêmes plans d'appui sans que F soit un corps convexe de l'espace à n dimensions au sens du numéro 1.

L'étude des plans d'appui aux différents points de la frontière d'un corps convexe conduit à envisager, sur cette frontière, n classes de points : les points de classe *un* par lesquels passe un seul plan d'appui, et les plans de classe $p(1<p\leq n)$ par lesquels passent ∞^{p-1} plans d'appui.

La première classe de points existe toujours et constitue un ensemble d'aire positive. L'ensemble (éventuel) des points appartenant aux classes restantes à une aire nulle.

Pour un tétraèdre de l'espace à trois dimensions, par exemple, les points de classe *un* sont les points intérieurs des faces, les points de classe *deux* sont les points intérieurs des arêtes, les points de classe *trois* sont les sommets.

Le Mémoire de M. J. Favard *Sur les corps convexes* [17] contient une étude tres complète sur les plans d'appui et la classification des points frontières.

Si tous les points de la frontière d'un corps convexe sont de classe un, l'unique plan d'appui en chacun de ces points est le plan tangent au sens habituel.

Tout corps convexe admet deux plans d'appui parallèles à toute variété plane à $n - 1$ dimensions; la distance de ces deux plans est une *largeur* du corps.

On trouvera, dans un Mémoire de M. A.-E. Mayer [32], consacré à un essai de généralisation de la notion de convexité, consistant à substituer (si l'on se borne aux figures planes) au concept du segment rectiligne compris entre deux points quelconques d'un ensemble ponctuel celui d'*arc unitaire* (arc prélevé sur une courbe convexe fermée et centrée dite *courbe unitaire*), une analyse approfondie de la qualité d'appui des corps convexes, et de ceux qui jouissent de la propriété de convexité élargie, dits *superconvexes*.

Pour les figures superconvexes planes on est conduit à substituer aux droites d'appui des *courbes unitaires d'appui*.

Le Mémoire de M. Mayer contient quelques résultats sur la possibilité d'extension de la notion de superconvexité à l'espace à n dimensions, et appelle de nouvelles recherches sur ce sujet. A propos de la superconvexité plane on peut voir aussi [45].

En ce qui concerne la classification des points frontières, signalons ici un travail de M. G. Durand [11], portant sur une généralisation des surfaces convexes de l'espace à trois dimensions, et dont il semble possible d'étendre les résultats aux espaces d'ordre supérieur.

3. **Fonctions convexes.** — Dans la théorie des corps convexes telle qu'elle a été développée par Minkowski, une classe particulière de fonctions convexes joue un rôle essentiel.

Considérons un corps convexe quelconque C de l'espace euclidien à n dimensions, et soit $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ l'un quelconque de ses points. Une fonction $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ est *convexe dans* C si l'on a

$$(1) \qquad \varphi\left(\frac{x_1^1 + x_2^1}{2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \ldots, \frac{x_1^n + x_2^n}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\varphi(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n) + \frac{1}{2}\varphi(x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n),$$

(x_1^i) et (x_2^i) étant deux points arbitraires de C.

Si l'on change le sens de l'inégalité dans (1) on définit une fonction *concave*.

Les fonctions convexes considérées par Minkowski jouissent des propriétés spéciales suivantes : elles sont *positivement homogènes* et du premier degré; en outre, $\varphi(0, 0, \ldots, 0) = 0$, et $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) > 0$ pour un ensemble de valeurs non toutes nulles des (x^i).

Le fait que la fonction $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ est positivement homogène consiste en ce que l'on a

$$(2) \qquad \varphi(kx^1, kx^2, \ldots, kx^n) = k\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

pour tout nombre *positif* k.

Moyennant (2) la condition générale (1) de convexité peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \varphi(x_1^1 + x_2^1, x_1^2 + x_2^2, \ldots, x_1^n + x_2^n) \leqq \varphi(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n) + \varphi(x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n).$$

(2) montre d'ailleurs que, l'origine des coordonnées étant un point intérieur de C, si φ est définie dans C, elle l'est dans tout l'espace.

4. Fonction de distance d'un corps convexe. — L'origine O d'un système d'axe de coordonnées rectangulaires étant à l'intérieur d'un corps convexe C, soit $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point distinct de O. La demi-droite $\overrightarrow{OM}$ coupe la frontière F de C en un point unique $M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ distinct de O. On a

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{x_1}{x'_1} = \frac{x_2}{x'_2} = \ldots = \frac{x_n}{x'_n} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

et nous poserons

$$f(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

La fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, définie dès que le corps C est donné, est ce que Minkowski a appelé la *fonction de distance* du corps. Les points intérieurs du corps sont définis par l'inégalité

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 1;$$

ceux de sa frontière F sont définis par l'équation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1.$$

La fonction f jouit des propriétés indiquées au numéro précédent, à savoir :

$$(4)\quad \begin{cases} 1^{\circ}\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{pour} \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \\ \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \quad \text{pour} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0), \\ 2^{\circ}\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ est positivement homogène et de degré } \textit{un}, \\ 3^{\circ}\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ est convexe.} \end{cases}$$

Les deux premières propriétés sont évidentes ; la troisième s'établit sans peine [7].

Réciproquement, toute fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ possédant les propriétés (4) définit un corps convexe de l'espace euclidien à n dimensions.

5. **Fonctions d'appui.** — C étant un corps convexe supposé d'abord contenir l'origine O des coordonnées, soit Σ la sphère unitaire de centre O. Désignons par π et P deux plans d'appui parallèles de Σ et C, et supposons que ces plans soient *également situés*, cette dernière expression signifiant que, si l'on soumet Σ à l'une des translations amenant π en coïncidence avec P, après la translation, C et Σ sont situés, par rapport à P, dans un même demi-espace.

π admet un seul point d'appui ω, que l'on peut regarder comme l'image de P. La distance algébrique du point O au plan P, comptée positivement dans le sens du vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ (cette distance est constamment positive dans l'hypothèse où nous nous sommes placés : O intérieur à C), est une certaine fonction univoque, $H(\omega)$, du point ω, dite *fonction d'appui de* C, dont la connaissance détermine C.

Pour avoir les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire une fonction $H(\omega)$, du point ω de la sphère unitaire Σ, pour être la fonction d'appui d'un corps convexe, désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque ω de la frontière de Σ $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1)$, posons

$$a_i=\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2}},$$

et envisageons, avec Minkowski, la fonction $H(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ définie par l'égalité suivante :

$$\mathcal{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2}\,.\,H(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Si H est la fonction d'appui d'un corps convexe contenant l'origine, on a évidemment $\mathcal{H}(0, 0, \ldots, 0)=0$, et il est facile de vérifier [7] que $\mathcal{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que nous appellerons *fonction d'appui de Minkowski* pour eviter la confusion avec la fonction d'appui $H(\omega)$ déjà définie, appartient à la famille des fonctions convexes définies par les propriétés (4) du numero **4**.

Réciproquement d'ailleurs, toute fonction $\mathcal{H}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jouissant des propriétés (4) peut être regardée comme la fonction d'appui de Minkowski d'un corps convexe.

Si l'origine n'est pas à l'intérieur de C, une translation des axes montre que la fonction d'appui de Minkowski est à remplacer par

$$\mathcal{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\mathcal{H}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)+m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n,$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des constantes et où $\mathcal{H}_1$ jouit des propriétés (4). Dans tous les cas, le corps convexe est l'enveloppe du plan

$$x_1X_1+x_2X_2+\ldots+x_nX_n=\mathcal{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où les x_i sont des variables arbitraires.

Ajoutons que, suivant que l'on considère une fonction vérifiant (4) comme fonction de distance ou comme fonction d'appui de Minkowski, on obtient deux corps convexes dont les frontières sont polaires réciproques par rapport à la sphère du rayon *un* centrée à l'origine des coordonnées.

6. Séries linéaires de corps convexes. — La connaissance de deux corps convexes (non congruents par translation) entraîne immédiatement la connaissance d'une infinité de corps convexes nouveaux.

Soient C_1 et C_2 deux corps convexes quelconques, H_1 et H_2 deux plans d'appui de C_1 et C_2, parallèles et également situés. Considérons le plan H, parallèle à H_1 et H_2, et tel que le rapport algébrique de ses distances à H_1, H_2 soit un nombre *négatif fixe* λ (H est situé entre H_1 et H_2). Lorsque H_1 et H_2 varient en enveloppant respectivement C_1 et C_2, H enveloppe un certain corps *convexe* C, en restant situé, par rapport à C, comme H_1 et H_2 par rapport à C_1 et C_2. L'ensemble des corps convexes obtenus en donnant à λ toutes les valeurs possibles constitue une *série linéaire de corps convexes;* C_1 et C_2 sont les éléments extrêmes de la série. Il est clair que si l'on imprime à C_1 ou C_2 une translation déterminée, l'ensemble des ∞^1 corps de la série linéaire se trouve simplement déplacé par translation.

Si les fonctions d'appui de C_1 et C_2 sont $H_1(\omega)$ et $H_2(\omega)$, la fonction d'appui du corps générateur de la série est

$$H(\omega) = \frac{H_1(\omega) - \lambda H_2(\omega)}{1 - \lambda}.$$

Si l'on pose

$$\lambda = -\frac{x_2}{x_1} \qquad (x_1,\ x_2 \geqq 0;\ x_1 + x_2 = 1),$$

on peut écrire

$$H = x_1 H_1 + x_2 H_2.$$

D'une façon générale, considérons m corps convexe $C_1, C_2, \ldots, C_m$, de fonctions d'appui respectives H_1, H_2, $\ldots$, H_m; la fonction

$$H = x_1 H_1 + x_2 H_2 + \ldots + x_m H_m$$
$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m \geqq 0;\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1)$$

définit un corps convexe, et l'ensemble des ∞^{m-1} corps obtenus en donnant à x_1, x_2, $\ldots$, x_m, toutes les valeurs possibles constitue *la série linéaire définie par* C_1, C_2, $\ldots$, C_m. Une translation quelconque des corps C_i ne fait que déplacer par translation les corps de la série.

7. Approximation d'un corps convexe par des polyèdres convexes. — Soit H (ω) la fonction d'appui d'un corps convexe C contenant l'origine à son intérieur. Divisons l'espace en un réseau de cubes (à n dimensions) d'arête d par des hyperplans parallèles aux hyperplans de coordonnées, et considérons l'ensemble E constitué par ceux de ces cubes qui ont un point commun au moins avec C. Désignons par C_1 le plus petit corps convexe contenant E; c'est un certain polyèdre dont nous désignerons la fonction d'appui par $H_1(\omega)$. C étant évidemment intérieur à C_1 on a $H(\omega) < H_1(\omega)$; d'autre part, la distance de deux plans d'appui parallèles et également situés de C et C_1 est au plus égale à la diagonale des deux cubes subdivisionnaires $(d\sqrt{n})$; on peut donc écrire

$$(5) \qquad H(\omega) < H_1(\omega) \leqq H(\omega) + d\sqrt{n}.$$

ρ étant le rayon d'une sphère centrée a l'origine et complètement intérieure à C, on a $H(\omega) > \rho$. et (5) peut encore s'écrire

$$(6) \qquad H(\omega) < H_1(\omega) < H(\omega)\left(1 + \frac{d\sqrt{n}}{\rho}\right).$$

Le polyèdre C_2, homothétique de C_1 par rapport à l'origine dans le rapport $1 : \left(1 + \frac{d\sqrt{n}}{\rho}\right)$, est intérieur à C car on a

$$H_2(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{1 + \frac{d\sqrt{n}}{\rho}} < H(\omega).$$

Lorsque $d \to 0$, C_1 et C_2 tendent l'un vers l'autre et leur limite commune est C.

La possibilité d'approximer un corps convexe C par des suites de polyèdres intérieurs et extérieurs deux à deux homothétiques a été mise en évidence par Minkowski; elle permet de définir les étendues superficielle et spatiale d'un corps convexe à partir des mêmes notions relatives aux polyèdres.

8. Périmètre, surface et volume d'un corps convexe. — On doit à Cauchy une expression remarquable du périmètre L d'un corps convexe plan C. $B(\theta)$ étant la mesure de la projection orthogonale de C sur une droite D faisant l'angle θ avec un axe fixe Ox [largeur de C dans la direction θ], on a

$$(7) \qquad L = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} B(\theta)\,d\theta.$$

Pour un segment de droite de longueur L, $P(\theta)$ désignant la mesure de la projection du segment sur D, on voit aussitôt que l'on a

$$L = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} P(\theta)\,d\theta. \tag{8}$$

Pour un polygone quelconque on a la même formule (8), $P(\theta)$ représentant la somme des valeurs absolues des projections orthogonales des côtés sur D. Si le polygone est *convexe*, $P(\theta) = 2B(\theta)$, et la formule (8) donne (7). La considération des polygones d'approximation étend (7) à un corps convexe quelconque.

Il est a noter que si C n'est pas convexe, pour toutes les directions d'un certain angle au moins, on a $P(\theta) > 2B(\theta)$, et par suite

$$L > \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} B(\theta)\,d\theta.$$

En appliquant la formule (7) aux *courbes orbiformes* (limitant des corps convexes de largeur constante a), on constate que *toutes les orbiformes de même largeur a ont même longueur* $L = \pi a$.

Une formule analogue (7) vaut pour la surface S de la frontière d'un corps convexe. Si σ est la mesure de la projection du corps sur un plan P [*travers extérieur* du corps relatif à P], et si $d\omega$ est l'élément superficiel de la sphère unitaire entourant l'image de P, on a

$$S = \frac{1}{\pi}\int \sigma\,d\omega.$$

Pour tout corps non convexe on a

$$S > \frac{1}{\pi}\int \sigma\,d\omega.$$

Rappelons enfin la formule qui donne le volume d'un corps convexe quelconque

$$V = \frac{1}{n}\int H(\omega)\,dS, \tag{9}$$

où n est le nombre de dimensions de l'espace, dS la mesure de l'élément de frontière entourant le point d'image sphérique ω, et $H(\omega)$ la fonction d'appui du corps.

9. Les principaux éléments géométriques attachés aux figures

convexes. — Les éléments dont il va être question seront définis pour des ensembles ponctuels quelconques fermés et bornés, mais, dans la suite, nous n'aurons à les utiliser que dans le cas des corps convexes.

Épaisseur et diamètre. — Considérons un ensemble ponctuel plan E, fermé et borné, et contenant des points intérieurs. La largeur de l'ensemble (largeur de la plus petite bande, limitée par deux droites d'appui parallèles à une direction donnée. contenant l'ensemble) admet un maximum D et un minimum d. D et d sont, respectivement, le *diamètre* et *l'épaisseur* de l'ensemble.

Si E est convexe, il nous arrivera d'appeler *diamètres* de E les *droites* joignant les différents couples de points en lesquels les droites d'appui sont parallèles. Il ne saurait y avoir de confusion entre deux éléments, dont l'un est métrique et l'autre purement géométrique.

Cercles inscrit et circonscrit. — Envisageons l'ensemble des cercles ayant pour centres les différents points de E et dont tous les points appartiennent à E; cet ensemble est borné et fermé; le rayon ρ d'un cercle quelconque de l'ensemble a un maximum r effectivement atteint; le cercle (c) [éventuellement les cercles (c)] de l'ensemble, de rayon r, est appelé *cercle inscrit* dans E.

On démontre sans peine [7] que si un arc de (c) contient tous les points communs à (c) et à la frontière de E (en nombre au moins égal à 2), cet arc n'est pas moindre qu'une demi-circonférence.

La considération de l'ensemble des cercles centrés aux différents points du plan et contenant à leur intérieur ou sur leur circonférence tous les points de E, conduit à la notion de *cercle circonscrit* à E. C'est le cercle (C) de l'ensemble dont le rayon R est *minimum.* Ce cercle est toujours *unique:* les points communs à (C) et à E sont sur la frontière de E, leur nombre est au moins égal à deux. et si un arc de (C) les contient tous il n'est pas moindre qu'une demi-circonférence.

Couronne circulaire minima. — Reprenons l'ensemble E, et considérons les couples de cercles concentriques (C) et (c), de rayons respectifs R et r, tels que tous les points de E soient à l'intérieur de (C) ou sur (C), tandis que tous les points situés à l'intérieur de (c) sont intérieurs à E.

La quantité $R - r$ n'est pas bornée supérieurement et est toujours positive ou nulle; elle a un minimum effectivement atteint; les cercles fournissant ce minimum déterminent une *couronne circulaire d'épaisseur minima* attachée à l'ensemble. Chaque cercle d'une telle couronne a au moins deux points sur la frontière de E et, si E est *convexe*, la couronne minima est *unique* [7].

Toutes les notions qui viennent d'être introduites s'étendent d'elles-mêmes aux ensembles fermés et bornés d'un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

10. Aire mixte de deux figures convexes planes. — Soient C_1 et C_2 deux figures convexes fermées et bornées d'un même plan, H_1 et H_2 les distances algébriques (*voir* le n° 5) d'un point fixe O du plan à deux droites d'appui parallèles et également situées T_1 et T_2 de C_1 et C_2, dL_1 et dL_2 les éléments linéaires correspondants décrits sur les frontières de C_1 et C_2 par les points d'appui de T_1 et T_2.

Les aires de C_1 et C_2 ont respectivement pour expressions

$$S_0 = \frac{1}{2}\int H_1\, dL_1, \qquad S_2 = \frac{1}{2}\int H_2\, dL_2,$$

les intégrations étant étendues aux contours de C_1 et C_2.

Envisageons la droite T, parallèle à T_1 et T_2, définie par

$$H = x_1 H_1 + x_2 H_2 \qquad (x_1,\ x_2 \geqq 0;\ x_1 + x_2 = 1);$$

elle enveloppe une figure convexe C de la série linéaire déterminée par C_1 et C_2, série que, dans toute la suite, nous désignerons par $[C_1, C_2]$.

L'aire S de C a pour expression

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int (x_1 H_1 + x_2 H_2)(x_1\, dL_1 + x_2\, dL_2) \\ &= x_1^2 \int \frac{1}{2} H_1\, dL_1 + x_1 x_2 \left[\int \frac{1}{2} H_1\, dL_2 + \int \frac{1}{2} H_2\, dL_1\right] + x_2^2 \int \frac{1}{2} H_3\, dL_2. \end{aligned}$$

On vérifie simplement que

$$\int \frac{1}{2} H_1\, dL_2 = \int \frac{1}{2} H_2\, dL_1.$$

La valeur commune de ces intégrales est ce que Minkowski a appelé *l'aire mixte* de C_1 et C_2. Si l'on désigne cette aire mixte par

S_1, on a

(10) $$S = x_1^2 S_0 + 2 x_1 x_2 S_1 + x_2^2 S_2.$$

11. Aire mixte de deux surfaces. — Soient C_1 et C_2 deux corps convexes de l'espace, H_1 et H_2 les distances algébriques d'un point fixe O à deux plans d'appui parallèles et également situés T_1 et T_2 de C_1 et C_2, dS_0 et dS_2 les éléments d'aire décrits par les points d'appui de T_1 et T_2 sur les frontières de C_1 et C_2.

Le plan T, parallèle à T_1 et T_2 dont la fonction d'appui est

$$H = x_1 H_1 + x_2 H_2 \qquad (x_1, x_2 \geqq 0;\ x_1 + x_2 = 1),$$

enveloppe un corps C de la série linéaire $[C_1, C_2]$.

L'élément d'aire de la frontière de C correspondant à dS_0, dS_2 a une expression de la forme

$$dS = x_1^2\, dS_0 + 2 x_1 x_2\, dS_1 + x_2^2\, dS_2,$$

où dS_1 est un certain élément différentiel que nous interpréterons comme une aire.

La surface de C est donnée par la formule

$$S = x_1^2 S_0 + 2 x_1 x_2 S_1 + x_2^2 S_2.$$

S_1 est l'*aire mixte* des surfaces de C_1 et C_2.

Minkowski a montré [33] que l'aire mixte S_1 de deux figures convexes planes C_1, C_2 et les aires S_0, S_2 de ces deux figures, aussi bien d'ailleurs que l'aire mixte de deux corps convexes quelconques de l'espace et les surfaces de leurs frontières. sont liées par l'inégalité

$$S_1^2 \geqq S_0 S_2,$$

le signe d'égalité exprimant une condition nécessaire et suffisante pour que C_1 et C_2 soient *directement homothétiques*.

De là résulte le théorème important suivant dû à Hermann Brunn :

La racine carrée de l'aire S *du corps générateur* C *de la série linéaire* $[C_1, C_2]$ *est une fonction concave de* x_1 (*ou de* x_2). *La fonction* $\sqrt{S}$ *est linéaire si* C_1 *et* C_2 *sont directement homothétiques et dans ce cas seulement.*

Si l'on tient compte de ce que $x_1 + x_2 = 1$, on a en effet

$$\frac{dS}{dx_1} = -\frac{dS}{dx_2} = 2\{x_1(S_0 - S_1) + x_2(S_1 - S_2)\},$$

$$\frac{d^2 S}{dx_1^2} = \frac{d^2 S}{dx_2^2} = 2(S_0 - 2S_1 + S_2),$$

$$\frac{d^2\sqrt{S}}{dx_1^2} = \frac{d^2\sqrt{S}}{dx_2^2} = \frac{S_0 S_2 - S_1^2}{S^{\frac{3}{2}}},$$

et l'inégalité de Minkowski montre que $\sqrt{S}$ est une fonction concave, sauf si $S_1^2 = S_0 S_2$ (corps C_1 et C_2 directement homothétiques), auquel cas la fonction est linéaire.

12. Volumes mixtes de deux corps convexes. — Envisageons, dans l'espace euclidien à n dimensions, deux corps convexes que, pour plus de commodité, nous désignerons par C_0 et C_n. Soient H_0 et H_n les distances algébriques d'un point fixe O à deux hyperplans d'appui parallèles et également situés, T_0 et T_n, de C_0 et C_n. L'hyperplan T. parallèle à T_0 et T_n, situé entre T_0 et T_n. défini par $H = \lambda H_0 + \mu H_n$ ($\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$), enveloppe le corps convexe $C_{\lambda\mu}$ de la série linéaire $[C_0, C_n]$.

Le volume $V_{\lambda\mu}$ de $C_{\lambda\mu}$ a une expression de la forme

$$V_{\lambda\mu} = \lambda^n V_0 + C_n^1 \lambda^{n-1}\mu V_1 + C_n^2 \lambda^{n-2}\mu^2 V_2 + \ldots + C_n^{n-1}\lambda\mu^{n-1} V_{n-1} + \mu^n V_n,$$

où les C_i^j sont les coefficients de la formule du binome, V_0 et V_n les volumes respectifs des corps extrêmes C_0 et C_n de la série, et où $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ sont ce que Minkowski a appelé les *volumes mixtes* des deux corps C_0, C_n; V_1 est le *premier volume mixte*, V_{n-1} le *dernier*.

Les volumes mixtes s'expriment par certaines intégrales (*voir* l'Ouvrage de T. Bonnesen [7], ou le Mémoire de M. Favard [17]).

Nous indiquons seulement ici les expressions du premier et du dernier volume mixte

$$(11) \qquad \begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int H_n \, dS_0, \\ V_{n-1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int H_0 \, dS_n, \end{cases}$$

où dS_0 et dS_n désignent les éléments d'aire des frontières de C_0 et C_n aux points d'appui de T_0 et T_n.

Il existe entre les volumes V_0, V_n de C_0, C_n et les volumes mixtes V_1, V_2, ..., V_{n-1}, des relations d'inégalité très importantes, sur lesquelles Minkowski a fondé toute sa théorie des corps convexes. L'étude complète des inégalités de Minkowski et de celles qui peuvent en dériver est loin d'être faite, et son intérêt, comme le fait observer M. Favard [17], dépasse de beaucoup la théorie des corps convexes.

Il n'est pas dans l'esprit de ce fascicule d'entrer dans le détail de cette étude. Nous nous bornerons à indiquer les deux inégalités suivantes, que nous aurons à utiliser dans la suite :

$$(12) \qquad \begin{cases} (V_1)^n \geqq V_n(V_0)^{n-1}, \\ (V_{n-1})^n \geqq V_0(V_n)^{n-1}, \end{cases}$$

où les égalités ont lieu si les corps C_0 et C_n sont homothétiques et dans ce cas seulement.

Nous signalerons aussi que le théorème de H. Brunn, établi au numéro précédent, s'étend aux volumes des corps des séries linéaires de corps convexes de l'espace à n dimensions :

$V_{\lambda\mu}$ *étant le volume du corps générateur de la série* $[C_0, C_n]$, $\sqrt[n]{V_{\lambda\mu}}$ *est une fonction concave de* λ (*ou de* μ) [7].

Tout récemment, M. W. Frenchel a donné une importante généralisation de cette proposition, concernant les séries linéaires définies par plusieurs corps convexes de l'espace à n dimensions [19*].

CHAPITRE II.

PROLONGEMENT DES SÉRIES LINÉAIRES DES CORPS CONVEXES.

13. Séries linéaires prolongeables. — Soient C et C′ deux corps convexes, de fonctions d'appui respectives $H(\omega)$ et $H'(\omega)$, limités par deux hypersurfaces convexes fermées et bornées S et S′.

P et P′ étant deux hyperplans d'appui, parallèles et également situés, de C et C′, envisageons l'hyperplan P_λ, parallèle à P et P′, et dont le rapport algébrique des distances à P et P′ est un nombre fixe λ. P_λ enveloppe une certaine hypersurface fermée et bornée S_λ.

Si $\lambda \leqq 0$, S_λ est *convexe* et l'ensemble des corps C_λ limités par les S_λ successives constitue la série linéaire $[C, C']$.

Si $\lambda > 0$, S_λ peut être convexe ou non. Si, pour toutes les valeurs de λ comprises entre $+\infty$ et une valeur λ_1 supérieure à *un*, S_λ limite un corps convexe. C_λ, tel que P_λ soit situé, par rapport à C_λ, comme P et P' par rapport à C et C', la série $[C, C']$ sera dite *prolongeable* dans le sens $C \to C'$, jusqu'au corps C_{λ_1}.

Si, dans les mêmes conditions, pour toutes les valeurs de λ comprises entre 0 et λ_2 ($\lambda_2 < 1$), S_λ limite un corps convexe, la série $[C, C']$ est prolongeable, dans le sens $C' \to C$, jusqu'au corps C_{λ_2}.

Si λ_1 (ou λ_2) $= 1$, la série est *indéfiniment prolongeable* dans le sens $C_1 \to C$.

Lorsque les hypersurfaces frontières S et S' des corps extrêmes de la série $[C, C']$ sont douées d'un hyperplan tangent continu et de $n - 1$ rayons de courbure principaux finis et non nuls, le prolongement de la série est toujours possible dans les deux sens.

Ce résultat est à peu près évident, et tient à ce que, des prolongements suffisamment petits de la série effectués soit au delà de C soit au delà de C', conservent les signes des rayons de courbure principaux du corps qui réalise le prolongement ainsi que les positions du corps par rapport aux différents hyperplans tangents.

Le prolongement indéfini est possible dans un sens au plus, à moins que C et C' ne soient congruents par translation, auquel cas il l'est évidemment dans les deux sens.

14. Condition de prolongeabilité indéfinie. Cas du plan. — Nous allons, en vue d'applications ultérieures, déterminer les conditions précises de prolongement indéfini dans un sens. d'une série linéaire de corps convexes.

Soient d'abord C et C_1 deux corps convexes d'un même plan dont les frontières admettent en chaque point une courbure finie. En déplaçant au besoin l'un des corps par translation (ce qui ne modifie pas les corps de la série $[C, C_1]$), nous pouvons amener l'origine O d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires Ox. Oy à être intérieure aux deux corps. Ceux-ci seront alors définis tangentiellement par les deux équations

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = p(\varphi),$$
$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = p_1(\varphi).$$

$p(\varphi)$ et $p_1(\varphi)$ [fonctions d'appui de C et C_1] sont des fonctions périodiques (de période 2π) vérifiant les conditions

$$p(\varphi) > 0, \qquad p(\varphi) + p''(\varphi) > 0,$$
$$p_1(\varphi) > 0, \qquad p_1(\varphi) + p''_1(\varphi) > 0;$$

$\frac{\pi}{2} + \varphi$ est l'angle que font. avec Ox, deux tangentes parallèles et également situées, T et T_1, aux frontières des deux corps.

Le rayon de courbure de la frontière du corps C_λ $(\lambda > 1)$, de fonction d'appui

$$\pi(\varphi) = \frac{p - \lambda p_1}{1 - \lambda}$$

a pour expression

$$\rho(\varphi) = \pi(\varphi) + \pi''(\varphi) = \frac{(p + p'') - \lambda(p_1 + p''_1)}{1 - \lambda} = \frac{r(\varphi) - \lambda r_1(\varphi)}{1 - \lambda},$$

où r et r_1 sont les rayons de courbure des frontières de C et C_1.

C_λ sera convexe, et appartiendra au prolongement de la série [C, C_1] dans le sens $C \to C_1$, si l'expression précédente reste constamment positive. Les pressions de $p + p''$ et $p_1 + p''_1$ étant par hypothèse positives, on voit que l'on pourra commencer le prolongement, et le poursuivre, jusqu'à ce qu'on ait atteint le corps Γ, défini par une valeur de λ égale au maximum du rapport $\frac{r}{r_1}$ des rayons de courbure des frontières de C et C_1 en deux points correspondants.

Pour que l'on puisse prolonger *indéfiniment* la série [C, C_1] dans le sens $C \to C_1$, il faut et il suffit que l'ont ait constamment $\frac{r}{r_1} \leqq 1$, c'est-à-dire, *qu'en un couple quelconque de points correspondants, le rayon de courbure de la frontière de* C *ne dépasse pas celui de la frontière de* C_1.

Le prolongement indéfini dans le sens $C_1 \to C$ exige $\frac{r}{r_1} \geqq 1$.

Le prolongement indéfini dans les deux sens n'est possible que si l'on a simultanément

$$\frac{r}{r_1} \leqq 1, \qquad \frac{r}{r_1} \geqq 1,$$

ce qui entraîne $r = r_1$ en chaque couple de points homologues, et exige que C et C_1 soient congruents par translation.

La condition $\frac{r}{r_1} \leqq 1$ en chaque couple de points homologues est évidemment remplie, et la série $[C, C_1]$ est indéfiniment prolongeable dans le sens $C \rightarrow C_1$, si le rayon de courbure maximum de C est inférieur au rayon de courbure minimum de C_1.

15. **Cas de l'espace.** — Les résultats du numéro précédent se généralisent. Le mémoire [48] étudie les conditions de prolongeabilité, limitée ou indéfinie, de la série linéaire définie par deux corps convexes C et C′ de l'espace à trois dimensions, limités par des surfaces S et S′, admettant en chaque point deux rayons de courbure principaux finis et non nuls.

La méthode employée en [48], qui fait intervenir les propriétés de la congruence formée par les droites joignant les différents couples de points homologues (même représentation sphérique) sur S et S′, s'étend aux séries linéaires de corps convexes de l'espace euclidien à n dimensions limitées par des corps dont les hypersurfaces frontières S. S′ admettent, en chaque point, $n-1$ rayons de courbure principaux finis et non nuls. Le résultat général est le suivant :

Pour que la série $[C, C']$ soit indéfiniment prolongeable dans le sens $C \rightarrow C'$, il faut et il suffit que, pour tout couple de sections de S et S′ par deux variétés planes parallèles à deux dimensions, issues de deux points homologues quelconques M, M′, *le rayon de courbure de la section de* S *en* M *soit inférieur à celui de la section de* S′ *en* M′.

Cette condition n'est d'ailleurs pas autre chose que la condition nécessaire et suffisante, pour qu'après les différentes translations $\overrightarrow{MM'}$ appliquées à C, tous les points de C appartiennent à C′.

La condition de prolongement indéfini dans le sens $C \rightarrow C'$ est évidemment remplie si la valeur du maximum, sur S, du plus grand rayon de courbure principal en chaque point, valeur que nous appellerons le *rayon de courbure principal maximum sur* S, est inférieur au *rayon de courbure principal minimum sur* S′. Ce cas es celui où S peut rouler librement à l'intérieur de S′.

Ce qui précède conduit à la remarque suivante :

Si trois corps convexes C_1, C_2, C_3 déterminent deux séries linéaires $[C_1, C_2]$, $[C_2. C_3]$ indéfiniment prolongeables dans les sens respectifs $C_1 \rightarrow C_2$ et $C_2 \rightarrow C_3$, *la série* $[C_1, C_3]$ *est indéfiniment prolongeable dans le sens* $C_1 \rightarrow C_3$.

Désignons, en effet, par M_1, M_2, M_3 un système quelconque de trois points de même image sphérique sur les frontières des trois corps. La translation $\overrightarrow{M_1 M_2}$ amène C_1 à l'intérieur C_2, et la translation $\overrightarrow{M_2 M_3}$ amène C_2, *et par suite* C_1 à l'intérieur de C_3. La prolongeabilité indéfinie de la série linéaire $[C_1, C_3]$, dans le sens $C_1 \rightarrow C_3$, résulte alors d'une remarque antérieure.

16. Quelques exemples de séries linéaires indéfiniment prolongeables. — Si C' est homothétique direct de C dans une homothétie de centre O et de rapport $k > 1$, le prolongement indéfini de la série $[C, C']$ est possible dans le sens $C \rightarrow C'$.

Dans le sens inverse on ne peut prolonger la série que jusqu'au corps $C_{\frac{1}{k}}$ (*voir* les notations du numéro 13), qui se réduit au point O. Les corps C_λ $\left(\frac{1}{k} < \lambda < 1\right)$ sont bien convexes, mais ne prolongent pas la série $[C, C']$, dans le sens $C' \rightarrow C$, au delà du point O. Cela tient à ce que le plan P_λ qui enveloppe C_λ, n'est pas situé, par rapport à C_λ, comme P et P' par rapport à C et C'

Un autre exemple simple, de séries indéfiniment prolongeables dans un sens, est fourni par deux corps convexes dont les frontières sont des hypersurfaces parallèles. Deux tels corps déterminent une série indéfiniment prolongeable dans le sens qui va de la frontière intérieure vers la frontière extérieure.

L'exemple précédent est un cas particulier du suivant, dont l'importance apparaîtra au Chapitre IV, et qui permet de construire une série linéaire indéfiniment prolongeable dans un sens, à partir de deux corps convexes *arbitraires* C. C' dont les frontières S, S' admettent. en chaque point, $n - 1$ rayons de courbure principaux finis et non nuls.

C restant fixe, amenons, par translation, la frontière S' de C', à être tangente extérieurement à la frontière S de C. Si nous imprimons alors à C' une translation (à $n - 1$ paramètres), au cours de laquelle S' ne cesse de rester tangente extérieurement à S le point de contact décrivant S en entier, S' enveloppera une certaine hypersurface σ limitant le corps Σ *réunion* de C et des ∞^{n-1} positions de C'.

On démontre aisément [49] que Σ est *convexe*. Si l'on observe en outre que chacune des ∞^{n-1} translations, qui amènent S' à être tangente extérieurement à S, réalise le contact de S' et de σ par la coïncidence de deux points *de même image sphérique*, on voit qu'après les différentes translations $\overrightarrow{M'\mu}$ (M' et μ étant deux points quelconques de même image sphérique de S' et Σ) tous les points de C' appartiennent à Σ. Il résulte de là (*voir* le numéro 15) que les deux corps convexes C' et Σ définissent une série linéaire $[C', \Sigma]$ indéfiniment prolongeable dans le sens $C' \to \Sigma$.

Si C' est un corps de *largeur constante*, la frontière σ de Σ est parallèle extérieurement à celle de C, et l'on retrouve le deuxième exemple.

Dans le cas où C' est doué d'un centre de symétrie, le corps Σ qui vient d'être associé au couple de corps convexes C, C' est susceptible d'une définition simple. Le corps *somme* de deux corps convexes C et C' de fonctions d'appui respectives $H(\omega)$ et $H'(\omega)$ étant le corps *convexe* de fonction d'appui $H(\omega) + H'(\omega)$, et l'homothétique d'un corps quelconque C dans une homothétie de rapport k étant désigné par kC, Σ est alors la somme des deux corps C et $2C'$.

Si l'on suppose en effet (ce qui est indifférent) que C' ait son centre au centre O de la sphère image, la largeur $\Delta(\omega)$ de C' relative à la direction $\overrightarrow{O\omega}$ est $2H'(\omega)$. Or, la construction même de Σ prouve que la fonction d'appui de Σ est $H(\omega) + \Delta(\omega)$, soit $H(\omega) + 2H'(\omega)$. Cette fonction d'appui est celle du corps somme de C et de $2C'$ conformément à la proposition énoncée.

Ajoutons ici que si $\Delta(\omega)$ et $\Delta'(\omega)$ sont les largeurs de deux corps convexes quelconques C et C', relatives à une même direction, la largeur du corps C_λ de la série $[C, C']$ (ou de l'un des corps de la série prolongée) est

$$\Delta_\lambda = \frac{\Delta - \lambda\Delta'}{1 - \lambda}.$$

CHAPITRE III.

LES DOMAINES VECTORIELS DES CORPS CONVEXES.

17. Définition et premières propriétés du domaine vectoriel d'un corps convexe. — Considérons, dans l'espace à n dimensions, un corps convexe quelconque C. O étant un point fixe quelconque de l'espace, menons par O les vecteurs équipollents à tous les vecteurs ayant pour origine et pour extrémité deux points quelconques de C. Les extrêmités de ces vecteurs remplissent une certaine région Δ de l'espace dite [38] *domaine vectoriel* du corps C. Δ est *convexe* [44] et admet évidemment O pour centre de symétrie.

Si C admet un centre de symétrie, Δ est homothétique de C dans une homothétie de rapport 2, de sorte qu'un corps convexe centré est complètement défini (si l'on néglige une translation) par la connaissance de son domaine vectoriel.

On déduit immédiatement de la définition précédente la génération suivante du domaine vectoriel d'un corps convexe C. Déplaçons C par les différentes translations qui amènent un point quelconque de sa frontière à passer par le point fixe O; nous obtenons ainsi un ensemble de ∞^{n-1} corps convexes congruents à C. La région de l'espace remplie par ces ∞^{n-1} corps est précisément le domaine vectoriel Δ de C.

Supposons que la frontière de C soit douée d'un hyperplan tangent variant continûment avec le point de contact, de manière qu'il existe une correspondance biunivoque et bicontinue entre l'hypersurface frontière du corps et sa représentation hypersphérique. Chacun des ∞^{n-1} corps précédemment définis touche alors la frontière de Δ en un certain point A, et les hyperplans tangents à un même corps, en O et en A, sont *parallèles*.

Il résulte immédiatement de là que si $H(\omega)$ est la fonction d'appui de C [distance algébrique du point O à l'hyperplan tangent au point A, de la frontière de C, d'image sphérique ω], la fonction d'appui du domaine vectoriel Δ est $H(\omega)+H(\omega_1)$, où ω_1 est l'image sphérique du point A_1 *opposé* à A sur la frontière de C. Nous appellerons *points opposés* sur la frontière de C, deux points en lesquels les hyperplans tangents sont parallèles (points situés sur un même *diamètre* de C).

Il résulte aussi du mode de génération précédent que, si deux corps convexes C et C′ ont même domaine vectoriel, deux diamètres *parallèles* quelconques des deux corps *sont égaux et font le même angle avec les hyperplans tangents en leurs extrémités*. On peut en effet, par des translations, amener les diamètres parallèles envisagés à coïncider avec un même rayon vecteur du domaine vectoriel (de sa frontière).

On peut dire si l'on veut que, C et C′ étant deux corps convexes admettant même domaine vectoriel, si T et T′ sont deux hyperplans tangents parallèles et également situés, touchant respectivement C et C′ en A et A′, la translation $\overrightarrow{AA'}$ amène les frontières des deux corps à être bitangentes en deux points opposés.

Notons que l'expression $H(\omega) + H(\omega_1)$, de la fonction d'appui du domaine vectoriel Δ d'un corps convexe quelconque C, est aussi celle de la largeur de C dans la direction ω (distance des plans tangents à la frontière de C aux points d'images sphériques ω et ω_1). Δ étant centré, il en résulte aussitôt que, dans toute direction, la largeur d'un corps convexe est la moitié de celle de son domaine vectoriel, et que, par suite, *deux corps convexes ayant même domaine vectoriel ont même largeur dans toutes les directions.*

Les largeurs maxima et minima de C [*diamètre* et *épaisseur* définis au n° 9] sont respectivement égales aux rayons vecteurs maximum et minimum du domaine vectoriel Δ.

18. Relations entre les frontières d'une figure convexe plane et de son domaine vectoriel. — En géométrie plane, il existe des relations très simples entre les frontières d'une figure convexe C et de son domaine vectoriel Δ. Désignons par φ l'angle que fait la tangente à la frontière de C avec une droite fixe, et soit p la distance algébrique du centre O du domaine vectoriel à la tangente. La longueur de la frontière de C a pour expression

$$L(C) = \int_0^{2\pi} p\, d\varphi.$$

p et p' correspondant à deux points opposés M, M′ sur la frontière de C, on peut écrire

$$L(C) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p + p')\, d\varphi.$$

Or, $\overline{p} = p + p'$ est la distance du point O aux tangentes à la frontière de Δ aux points opposés A et A′, correspondant à M et M′; on a donc

$$L(C) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \overline{p}\, d\varphi = \frac{1}{2} L(\Delta).$$

Ainsi, *le périmètre d'une figure convexe plane est la moitié de celui de son domaine vectoriel.*

Les courbes orbiformes (de largeur constante) limitent des figures convexes admettant des cercles pour domaines vectoriels. Toutes les orbiformes de même largeur a ont pour domaine vectoriel un cercle de rayon a; elles ont donc toutes même longueur πa, comme on l'a déjà constaté au n° 8.

Admettons pour C (et par suite pour Δ) l'existence d'un rayon de courbure en chaque point frontière M. Si ρ_M et $\rho_{M'}$ sont les rayons de courbure en deux points opposés de la frontière de C, on a

$$\rho_M = p + \frac{d^2p}{d\varphi^2}, \qquad \rho_{M'} = p' + \frac{d^2p'}{d\varphi^2},$$

d'où ce résultat

$$\rho_M + \rho_{M'} = \bar{p} + \frac{d^2\bar{p}}{d\varphi^2}.$$

La somme des rayons de courbure de la frontière d'une figure convexe plane C, *en deux points opposés, est égale au rayon de courbure en l'un quelconque des deux points (opposés) correspondants de la frontière du domaine vectoriel.*

Réciproquement, si deux courbes convexes planes sont telles, que les sommes des rayons de courbure en deux couples quelconques de points opposés homologues (en lesquels les tangentes sont parallèles) sont égales, les domaines vectoriels correspondants sont limités par des courbes ayant même rayon de courbure aux différents couples de points homologues, et sont par suite identiques.

Les différents ensembles de corps convexes du plan, limités par des courbes douées d'une courbure en chaque point, admettant même domaine vectoriel, peuvent donc être définis *par une propriété relative à la courbure*. Ce résultat est susceptible de généralisation, comme nous le verrons plus loin.

Pour une courbe orbiforme de largeur a, par exemple, la somme des rayons de courbure en deux points opposés quelconques *est constante et égale à* a, et cette propriété *caractérise* les orbiformes.

Le fait que la somme des rayons de courbure en deux points opposés d'une orbiforme est égale à la largeur prouve que les centres de courbure en deux points opposés sont confondus et que, par suite, la développée d'une orbiforme est une courbe *double*. Il faut entendre par là que le centre de courbure parcourt la développée deux fois lorsque le point correspondant de la courbe parcourt celle-ci une fois. Toute normale à une orbiforme est une normale double, et si une courbe fermée est telle que toutes ses normales soient doubles, la courbe est une orbiforme.

Les courbes orbiformes ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux. Elles ont été considérées pour la première fois par Reulaux [39], qui en a donné des exemples particuliers constitués par des courbes composées d'arcs de cercle. Pour une détermination complète de ces courbes par les développements en séries de Fourier des coordonnées (x, y) du point courant, nous renvoyons le lecteur à un important Mémoire de A. Hurwitz [26]. Nous verrons au Chapitre IV le rôle important, bien que mis tout récemment seulement en évidence, que peuvent jouer les courbes orbiformes quant à l'édification de l'ensemble des corps convexes du plan.

Notons cette propriété générale, résultant du théorème relatif à la somme des rayons de courbure en deux points opposés de la frontière d'une figure convexe énoncé plus haut :

Si deux figures convexes planes ont même domaine vectoriel, et si leurs frontières ont même rayon de courbure en deux points où les tangentes sont parallèles, elles ont aussi même rayon de courbure aux points opposés des précédents.

19. **Relations extrémales.** — La relation simple, liant les périmètres d'une figure convexe quelconque du plan et de son domaine vectoriel, établie au numéro précédent, conduit à étudier le rapport des aires d'une figure convexe plane quelconque et de son domaine vectoriel, et, plus généralement, le rapport des volumes d'un corps convexe de l'espace à n dimensions et de son domaine vectoriel.

On a pu trouver, pour ces rapports, des limites inférieures et supérieures effectivement atteintes, liées d'une façon très remarquable au nombre de dimensions de l'espace, et *ne dépendant que de ce nombre*.

L'étude de ces limites a été faite par M. Rademacher [38] pour les figures planes. M. Estermann [12] a retrouvé les résultats de M. Rademacher dans le cas du plan, et les a étendus aux corps convexes de l'espace à trois dimensions. M. Ganapathi [21] a ensuite étudié le problème dans toute sa généralité et a obtenu les résultats suivants : $V(C)$ et $V(\Delta)$ désignant les volumes respectifs d'un corps convexe quelconque de l'espace et de son domaine vectoriel, on a, quel que soit le nombre n de dimensions de l'espace,

$$\frac{V(\Delta)}{V(C)} \geqq 2^n,$$

le signe d'égalité valant si C est centré (donc homothétique à son domaine vectoriel) et dans ce cas seulement.

La recherche de la limite supérieure du rapport $\frac{V(\Delta)}{V(C)}$ conduit aux deux inégalités suivantes, se rapportant, respectivement, au cas où le nombre des dimensions de l'espace est pair ou impair :

$$\frac{V(\Delta)}{V(C)} \leqq 2 \left\{ 1 + C_n^1 n + \ldots + C_n^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{n-2}{2}} \right\} + C_n^{\frac{n}{2}} n^{\frac{n}{2}}.$$

$$\frac{V(\Delta)}{V(C)} \leqq 2 \left\{ 1 + C_n^1 n + \ldots + C_n^{\frac{n-2}{2}} n^{\frac{n-2}{2}} \right\}.$$

Dans les deux cas la limite supérieure est atteinte si C est un simplex à n sommets, et seulement lorsqu'il en est ainsi.

Pour $n = 2$, par exemple, on a, A(C) et A(Δ) désignant les aires des figures C et Δ,

$$4 \leqq \frac{A(\Delta)}{A(C)} \leqq 6;$$

et pour $n = 3$, V(C) et V(Δ) désignant les volumes respectifs de C et Δ,

$$8 \leqq \frac{V(\Delta)}{V(C)} \leqq 20.$$

Nous ne pouvons donner ici un exposé complet des travaux de MM. Rademacher, Estermann, Ganapathi, pour lequel nous renvoyons aux Mémoires originaux ci-dessus signalés. Nous nous bornerons à présenter deux modèles des méthodes employées, méthodes fort ingénieuses, où le contraste entre la simplicité des moyens mis en œuvre et les résultats obtenus, signalé dans l'introduction, est particulièrement saisissant.

En ce qui concerne la limite supérieure du rapport $\frac{V(\Delta)}{V(C)}$, nous montrerons comment M. Estermann a pu obtenir cette limite dans le cas du plan. Nous verrons ensuite comment M. Ganapathi a obtenu la limite inférieure de $\frac{V(\Delta)}{V(C)}$ dans le cas de n quelconque.

L'intérêt de ces questions tient, en grande partie, à la façon peut-être un peu inattendue dont elles sont liées aux notions, déjà si fécondes, de série linéaire et de volumes mixtes, notions dont elles contribuent à augmenter encore la puissance.

20. La méthode de M. Estermann pour la détermination de la limite supérieure du rapport $\frac{A(\Delta)}{A(C)}$. — La méthode repose sur les deux lemmes suivants :

a. C_1, C_2, C_3 étant trois figures convexes planes quelconques, si l'on peut, par translation, amener C_2 à avoir tous ses points dans C_3 (ce que l'on exprimera en écrivant $C_2 \subseteqq C_3$), on a

$$A(C_1, C_2) \leqq A(C_1, C_3),$$

$A(C_1, C_2)$ et $A(C_1, C_3)$ désignant les *aires mixtes* (*voir* le n° 10) de C_1, C_2 et de C_1, C_3 respectivement.

b. Étant donnée une figure convexe plane C, on peut toujours trouver une autre figure convexe C' *douée d'un centre de symétrie*, telle que l'on ait

$$C \leqq C', \qquad A(C') \leqq 2A(C).$$

Le lemme *a* est une conséquence immédiate de la définition de l'aire mixte. C_2 étant supposé placé de façon que tous ses points soient dans C_3, et l'origine O étant supposée intérieure à C_2 et C_3, on a (n° 10)

$$A(C_1, C_2) = \int \frac{1}{2} H_2 \, dL_1,$$

$$A(C_1, C_3) = \int \frac{1}{2} H_3 \, dL_1,$$

dL_1 étant l'élément d'arc sur la frontière de C_1, et H_2, H_3 les distances de O à deux droites d'appui parallèles et également situées de C_2 et C_3.

L'inégalité $A(C_1, C_2) \leqq A(C_1, C_3)$ résulte de ce que l'on a $H_2 \leqq H_3$. Pour vérifier le lemme *b*, il suffit de mener à C deux droites d'appui parallèles quelconques, puis les deux droites d'appui parallèles à la droite joignant les points d'appui des deux premières. On obtient ainsi un parallélogramme C', et l'on voit aussitôt que

$$A(C') \leqq 2A(C).$$

Si C est un triangle, on ne peut avoir que le signe d'égalité [12] ; C' est alors un parallélogramme construit sur le triangle.

Envisageons dès lors une figure convexe quelconque C ; soit Δ son domaine vectoriel de centre O; désignons par $\overline{C}$ la figure symétrique de C par rapport à O. Si $A(C, \overline{C})$ est l'aire mixte de C, $\overline{C}$, on vérifie aussitôt que l'on a

$$A(\Delta) = 2A(C) + 2A(C, \overline{C}). \tag{1}$$

Si C′ est une figure convexe centrée vérifiant les conditions du lemme *b* $[C \subseteq C', A(C') \leqq 2A(C)]$, et si $\overline{C'}$ est la symétrique de C′ par rapport à O, le lemme *a* montre que

$$A(C, \overline{C}) \leqq A(C, \overline{C'}) \leqq A(C', \overline{C'});$$

(1) peut donc s'écrire

$$A(\Delta) \leqq 2A(C) + 2A(C', \overline{C'})$$

ou, en remarquant que la symétrie de $\overline{C'}$ et C′ par rapport à O entraîne $A(C', \overline{C'}) = 2A(C')$,

$$A(\Delta) \leqq 2A(C) + 2A(C'). \tag{2}$$

Finalement, en tenant compte de $A(C') \leqq 2A(C)$, (2) montre que

$$\frac{A(\Delta)}{A(C)} \leqq 6,$$

l'égalité n'ayant lieu que si C est un triangle.

21. La méthode de M. Ganapathi pour la recherche de la limite inférieure du rapport $\frac{V(\Delta)}{V(C)}$. — Considérons la série linéaire dont les corps extrêmes C_0 et C_n sont, un corps convexe C de l'espace à *n* dimensions, et son domaine vectoriel Δ de centre O.

On aura ici, avec les notations du n° 12, $V(C) = V_0$, $V(\Delta) = V_n$. Le premier et le dernier volume mixte vérifient les inégalités (12), indiquées au numéro 12.

$$\left\{\begin{array}{l} (V_1)^n \geqq V_n(V_0)^{n-1} \\ (V_{n-1})^n \geqq V_0(V_n)^{n-1} \end{array}\right. \qquad \left(V_1 = \frac{1}{n}\int H_n\, dS_0;\ V_{n-1} = \frac{1}{n}\int H_0\, dS_n\right). \tag{12}$$

On peut écrire

$$V_{n-1} = \frac{1}{n}\int H_0\, dS_n = \frac{1}{2n}\int (H_0 + H_1)\, dS_n,$$

H_0 et H_1 étant les distances du point O à deux plans d'appui parallèles de C.

$H_0 + H_1$ n'est autre chose que la distance H_n du point O au plan d'appui du domaine vectoriel Δ; il en résulte

$$V_{n-1} = \frac{1}{2n}\int H_n\, dS_n = \frac{1}{2}V(\Delta).$$

Remplaçons V_{n-1} par cette expression dans la deuxième inégalité (12); en nous rappelant que $V_0 = V(C)$ nous obtenons

$$\frac{V(\Delta)}{V(C)} \geqq 2^n.$$

La limite supérieure 2^n est atteinte si C est homothétique à son domaine vectoriel, ce qui a lieu si C est centré, et dans ce cas seulement.

22. Aire du domaine vectoriel d'un corps convexe plan. — Nous avons vu que si L(C) est la longueur de la frontière d'un corps convexe plan quelconque C, $L(\Delta)$ celle de la frontière de son domaine vectoriel Δ, on a la relation

$$L(\Delta) = 2L(C).$$

Il n'existe pas de relation aussi simple entre l'aire A(C) de C et celle $A(\Delta)$ de son domaine vectoriel Δ. Si l'on pouvait évaluer $A(\Delta)$ au moyen de A(C) et d'éléments géométriques liés à C, on pourrait, d'une relation liant l'aire et la longueur d'une figure convexe *centrée* (d'une inégalité isopérimétrique relative aux figures centrées, par exemple). déduire une relation analogue relative à une figure convexe *quelconque*.

C'est dans ce but que, laissant pour l'instant les applications de côté, nous allons, avec M. Ganapathi, effectuer le calcul de $A(\Delta)$.

Pour raison de commodité nous choisirons l'origine O, centre du domaine vectoriel, à l'intérieur de C. Nous supposerons en outre (mais le résultat auquel nous allons parvenir est général) que la frontière de C admet en chaque point une courbure finie.

$p(\varphi)$ désignant la fonction d'appui de C (φ étant l'angle de la tangente à la frontière avec une direction fixe), nous désignerons par p

et p' les distances du point O à deux tangentes parallèles à la frontière de C $[p'(\varphi) = p(\varphi + \pi)]$.

La fonction d'appui du domaine vectoriel Δ est alors

$$\bar{p} = p + p'.$$

D'après une formule de M. W. Blaschke [6], on a

$$A(C) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[p^2 - \left(\frac{dp}{d\varphi}\right)^2\right]d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[p'^2 - \left(\frac{dp'}{d\varphi}\right)^2\right]d\varphi.$$

De même

$$A(\Delta) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\bar{p}^2 - \left(\frac{d\bar{p}}{d\varphi}\right)^2\right]d\varphi.$$

Si l'on forme la quantité $A(\Delta) - 4A(C)$ on trouve, en tenant compte de $\bar{p} = p + p'$,

$$(3) \qquad A(\Delta) - 4A(C) = \int_0^{\pi}\left[\left(\frac{d(p-p')}{d\varphi}\right)^2 - (p-p')^2\right]d\varphi.$$

Le lieu des milieux des diamètres de C est une courbe fermée, que nous appellerons *courbe moyenne* de C, dont la tangente en un point quelconque est parallèle aux tangentes à la frontière de C aux points correspondants; si h est la distance du point O à cette tangente, on a $h = \frac{p-p'}{2}$, et l'on constate que la formule (3) peut s'écrire

$$A(\Delta) - 4A(C) = 8 \times \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{dh}{d\varphi}\right)^2 - h^2\right]d\varphi.$$

L'intégrale $\int^{2\pi}\left[\left(\frac{dh}{d\varphi}\right)^2 - h^2\right]d\varphi$ est sûrement positive ou nulle (elle est nulle si C est centré); cela résulte de ce que (*voir* le numéro 19) $A(\Delta) \geqq 4A(C)$.

Eu égard à la formule de M. Blaschke, nous conviendrons de dire qu'elle représente l'*aire de la courbe moyenne de* C. En désignant cette aire par $A(M)$, nous obtenons la formule entièrement géométrique

$$(4) \qquad A(\Delta) - 4A(C) = 8A(M),$$

qui exprime l'aire $A(\Delta)$ du domaine vectoriel au moyen des aires de C et de la courbe moyenne.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS DE LA NOTION DE DOMAINE VECTORIEL A L'ÉTUDE DES CORPS CONVEXES.

I. — *Propriétés des corps convexes de l'espace.*

Nous nous proposons, dans ce Chapitre, de mettre en évidence, par quelques exemples en nombre obligatoirement réduit mais de caractères divers, l'intérêt que peut présenter la notion de domaine vectoriel comme instrument de recherche dans la théorie des corps convexes.

Le succès de l'introduction de cette notion tient, en grande partie, à ce qu'un domaine vectoriel est une espèce d'*indicatrice* : indicatrice des largeurs dans les différentes directions, et que, la connaissance de la largeur d'un corps convexe dans toute direction est un élément fort important, autant pour l'étude des propriétés du corps que, comme nous le verrons plus loin, pour celle de sa configuration dans l'espace.

Nous bornant pour l'instant au premier point de vue, nous allons montrer qu'il existe un lien très remarquable entre les rayons de courbure principaux aux différents points de l'hypersurface frontière d'un corps convexe quelconque et la largeur du corps dans les différentes directions. Nous commencerons, à cet effet, par rappeler quelques résultats relatifs à la détermination des corps convexes.

23. Résultats généraux sur la détermination des corps convexes. — Les recherches successives de Liebmann [31], Minkowski [33], et de M. M. Hilbert [25], Blaschke [3] et H. Weyl [51], ont abouti à la conclusion suivante : *une surface fermée convexe, prise dans sa totalité, n'admet aucune déformation infiniment petite.* En ce qui concerne la sphère, M. Hilbert a établi *qu'une sphère n'admet* (*dans sa totalité*) *aucune déformation finie*, ce qui revient à dire qu'une surface convexe fermée à courbure totale constante est nécessairement sphérique. M. H. Weyl a étendu le résultat précédent à une surface convexe fermée quelconque. Pour une analyse des recherches de M. H. Weyl, le lecteur pourra se reporter à un fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques* de M. B. Gambier [20].

Les résultats qui précèdent peuvent être considérés comme étant à l'origine du problème général suivant :

Un corps convexe fermé et borné de l'espace à n dimensions, limité par une hypersurface à plan tangent continu douée en chaque point de $n-1$ rayons de courbure principaux $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, peut-il être défini, à une translation près, par la connaissance, sur l'hypersphère image, d'une fonction symétrique élémentaire (continue et positive)

$$F_m(\omega) = \Sigma r_{i_1} r_{i_2} \ldots r_{i_m} \qquad (m \leqq n-1)$$

des $n-1$ rayons de courbure principaux (ω est l'image sphérique du point courant de la frontière du corps).

Dans le cas particulier où $m = n-1$, c'est-à-dire lorsqu'on se donne l'inverse de la courbe totale, M. Suss [43] a montré qu'il en est effectivement ainsi.

Les belles recherches de M. Favard, basées sur une étude approfondie des propriétés des séries linéaires de corps convexes [17]-[18], ont montré qu'il en est encore ainsi dans les deux cas $m = n-2$ et $m = 1$.

On trouvera dans le Mémoire [18] de M. Favard des aperçus sur le problème général, qui constitue un sujet, difficile sans doute, mais bien digne de retenir l'attention.

24. Relation entre la largeur d'un corps convexe et les rayons de courbure principaux de sa frontière. — Nous avons vu au numéro 18 que, pour un corps convexe plan, la somme des rayons de courbure en deux points opposés quelconques de la frontière ne dépend que du domaine vectoriel, c'est-à-dire, en somme, que de la largeur du corps dans les différentes directions.

Le résultat de M. Favard rappelé au numéro précédent, relatif au cas $m = 1$, permet d'étendre cette propriété aux corps convexes de l'espace à n dimensions.

Soit S une hypersurface convexe formée et bornée, douée en chaque point de $n-1$ rayons de courbure principaux, et limitant un corps convexe C de fonction d'appui $H(\omega)$. ω est l'image sphérique d'un point quelconque M de S, et H la distance du centre O de la sphère image (que nous pouvons supposer intérieur à S) à l'hyperplan tangent en M, comptée positivement suivant $\overrightarrow{O\omega}$. Nous supposerons ici H analytique, mais la seule hypothèse nécessaire est l'existence des $n-1$ rayons de courbure principaux.

Soit D le domaine vectoriel de C, centré en O (nous désignerons également par D sa frontière). La fonction d'appui de D est évidemment

$$\mathcal{H}(\omega) = H(\omega) - H'(\omega), \tag{1}$$

H' étant la distance algébrique du point O à l'hyperplan tangent à S au point M' opposé à M.

Si $\Delta_2 H$ est le paramètre différentiel du deuxième ordre de H, relatif au ds^2 de la représentation sphérique de S, la somme des $n-1$ rayons de courbure principaux $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ de S au point M est [2*]

$$\sum_{n-1} r_i = \Delta_2 H + (n-1)H. \tag{2}$$

De même, la somme des $n-1$ rayons de courbure principaux de S au point M' opposé à M est

$$\sum_{n-1} r'_i = -\Delta_2 H' - (n-1)H'. \tag{3}$$

Si μ est le point de D de même image sphérique que le point M de S, la formule (2) appliquée à D donne

$$\sum_{n-1} \rho_i = \Delta_2 \mathcal{H} + (n-1)\mathcal{H}, \tag{4}$$

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ étant les rayons de eourbure principaux de D en μ.

Ajoutons (2) et (3); la propriété de distributivité du paramètre différentiel Δ_2 permet d'écrire

$$\sum_{n-1} r_i + \sum_{n-1} r'_i = \Delta_2(H - H') + (n-1)(H - H');$$

soit, d'après (1) et (4),

$$\sum_{n-1} r_i + \sum_{n-1} r'_i = \sum_{n-1} \rho_i. \tag{5}$$

On peut donc énoncer ce résultat [47] :

La somme des rayons de courbure principaux, en deux points opposés quelconques de la frontière d'un corps convexe quelconque de l'espace à n dimensions, est égale à la somme des rayons de courbure principaux au point correspondant de la frontière de son domaine vectoriel.

Supposons dès lors que l'on connaisse la somme $\left(\sum_{n-1} r_i + \sum_{n-1} r'_i\right)$ des $2(n-1)$ rayons de courbure principaux de S en deux points opposés quelconques, et soit $F(\omega)$ la fonction qui exprime cette somme sur la sphère image. $F(\omega)$ est aussi, d'après ce que l'on vient de voir, la somme des $n-1$ rayons de courbure principaux de la frontière D du domaine vectoriel, au point d'image sphérique ω.

D est une hypersurface convexe fermée et bornée, pour laquelle on connaît, sur la sphère image, la fonction

$$F(\omega) = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_{n-1}.$$

Le résultat de M. Favard s'applique donc : D *est déterminée à une translation près.*

Si l'on se rappelle que, dans toute direction, la largeur d'un corps convexe est la moitié de celle de son domaine vectoriel dans la même direction, on peut dire que *la connaissance de la somme des* $2(n-1)$ *rayons de courbure principaux d'une hypersurface convexe fermée et bornée* S, *aux différents couples de points opposés, détermine la largeur de l'hypersurface dans toutes les directions.*

Réciproquement, si l'on connaît la largeur Δ de S dans toute direction, on connaît le domaine vectoriel D (qui a pour fonction d'appui Δ), donc $\sum_{n-1} \rho_i$, et par suite aussi, d'après (5), la somme $\sum_{n-1} r_i + \sum_{n-1} r'_i$.

23. Corps de largeur constante. — Si S est de largeur constante d, D est une sphere de rayon d, et l'on a

$$\sum_{n-1} \rho_i = (n-1)d.$$

(5) donne alors

$$\sum_{n-1} r_i + \sum_{n-1} r'_i = (n-1)d = \text{const.},$$

d'où cette propriété, *caractéristique* des corps convexes de largeur constante :

La somme des $2(n-1)$ *rayons de courbure principaux en deux points opposés de la frontière d'un corps de largeur constante est constante.*

Les frontières des corps de largeur constante de l'espace à n dimensions généralisent les orbiformes du plan, et jouissent de propriétés analogues à celles signalées au numéro 18 à propos des orbiformes.

La normale en un point quelconque A d'une surface S de largeur constante est normale *double* : elle coupe à nouveau S au point A′ opposé à A et est normale à S en A′. Il en résulte que la développée de S est *double*, en ce sens que, lorsque A décrit S une fois, chacune des $n-1$ nappes de la développée est obtenue deux fois.

Il suffit d'ailleurs que toutes les normales à une hypersurface fermée soient doubles, pour que celle-ci soit convexe et de largeur constante.

II. — *Propriétés des ovales du plan.*

26. Un théorème de M. B. Segre et quelques-unes de ses applications. — Si l'on s'en tient aux corps convexes du plan, on peut pousser plus loin l'étude des courbures des frontières [courbes convexes fermées dites *ovales*] des corps convexes admettant même domaine vectoriel.

Nous allons, à cet effet, commencer par rappeler une proposition de M. B. Segre, et montrer comment nombre de résultats que M. Segre en a déduits peuvent être groupés autour de la notion de domaine vectoriel.

Étant donné un arc de courbe convexe, doué, en chaque point, d'une tangente variant d'une façon continue, et d'une courbure également continue et non nulle, nous appellerons *déflexion* [35] de l'arc l'angle dont tourne la tangente en un point lorsque le point décrit l'arc. Un ovale est un arc convexe fermé dont la déflexion est égale à 2π.

Soient deux arcs convexes distincts C et C', dont les déflexions sont inférieures ou égales à π, ayant les mêmes extrémités et tangents en l'une des extrémités communes au moins. On peut établir entre ces deux arcs (ou entre l'un deux et une portion convenable de l'autre) une correspondance biunivoque par tangentes parallèles. La propriété de M. Segre consiste en ce que, dans cette correspondance, *la différence des courbures en deux points homologues de* C *et* C' *prend des valeurs positives et des valeurs négatives; il y a par suite, sur les deux arcs, un couple (au moins) de points homologues distincts des extrémités en lesquels les courbures sont égales.*

Ce théorème peut être présenté sous la forme légèrement différente suivante, parfois plus commode :

Soit un triangle quelconque ABC [C peut être à l'infini] et deux arcs de courbes convexes $\widehat{BM}$, $\widehat{BN}$ tangents en B au côté AB, situés à l'intérieur du triangle, et tels que les tangentes aux points M, N où ils aboutissent sur AC soient parallèles. Si l'on établit une correspondance par tangentes parallèles entre les deux arcs, la différence des courbures en deux points correspondants quelconques prend des valeurs des deux signes. et il existe par suite un couple au moins de points homologues en lesquels les courbures sont égales.

Si la différence des courbures en deux points homologues ne peut pas prendre de valeurs d'un signe déterminé, les deux arcs envisagés dans l'un ou l'autre des énoncés précédents *coïncident.*

Cela étant, envisageons deux ovales quelconques C et C' admettant même domaine vectoriel (même largeur dans toutes les directions), et faisons se correspondre, sur les deux ovales, les points en lesquels les tangentes sont paralleles et également situées. On a vu au numéro 17 que l'on peut amener, par translation, C et C' à être bitangents en un couple quelconque de points opposés A, B. Considérons alors les deux arcs de C et C' situés d'un côté déterminé de AB. Il y a sur ces deux arcs, en vertu du théorème précédent, deux points homologues en lesquels les courbures sont égales. A ces points correspondent. sur les deux demi-ovales situés de l'autre côté de AB, des points opposés en lesquels, d'après le numéro 18, les courbures sont aussi égales.

Nous pouvons supposer que la translation, dont il a été question plus haut, a eu pour effet de rendre C et C′ bitangents au couple de points opposés qui vient d'être mis en évidence; C et C′ ont alors même courbure en A et même courbure en B.

Continuons à appliquer le même théorème aux deux demi-ovales $\widehat{ACB}$, $\widehat{AC'B}$ situés d'un même côté de AB ; il existe, sur ces deux arcs, deux points homologues P et P′ en lesquels les courbures sont égales. Les point P_1 et P'_1 respectivement opposés à P et P′ sur C et C′ donnent lieu à la même conclusion.

Nous venons ainsi de mettre en évidence quatre couples de points homologues sur les deux ovales (les quatre points situés sur un même ovale étant deux à deux opposés), tels qu'aux points d'un même couple les courbures soient égales. On peut établir l'existence de deux nouveaux couples de points homologues jouissant de la même propriété.

Menons PR′ parallèle aux tangentes T et T′ en A et B à C et C′ (R′ étant sur $\widehat{AP'B}$), et soit R le point de C homologue du point R′ de C′. On voit sans peine [46] que la droite RR′ coupe l'une des deux droites T, T′ (T par exemple) en un point S (qui peut être à l'infini), de façon à former un triangle (AR′S, par exemple) à l'intérieur duquel sont situés les deux arcs $\widehat{AR}$, $\widehat{AR'}$ tangents à AS en A et coupant SR′ sous le même angle. Le théorème général du début, pris sous sa deuxième forme, montre qu'il existe sur les deux arcs $\widehat{AR}$, $\widehat{AR'}$ deux points homologues U, U′ en lesquels les courbures sont égales; les points U_1, U'_1 opposés à U, U′ sur les deux ovales jouissent de la même propriété. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Si, sur deux ovales quelconques C *et* C′ *admettant même domaine vectoriel, on fait se correspondre les points en lesquels les tangentes sont parallèles et également situées, il existe* six *points (au moins) sur* C *en lesquels les courbures sont égales aux courbures relatives aux points correspondants sur* C′.

M. B. Segre a rattaché ce résultat aux propriétés d'une correspondance entre deux ovales, dite par lui *équilongue*, pour l'étude de laquelle nous renvoyons à [40], [41].

Supposons que C′ dérive de C par une symétrie par rapport à un point (C′ et C ont bien même domaine vectoriel). Les six points de C′ en lesquels les courbures sont égales aux courbures aux six points homologues de C correspondent, dans la symétrie, à des points opposés aux six points de C, de sorte que :

Sur tout ovale il existe trois points (au moins) en lesquels les courbures sont égales aux courbures aux points opposés.

Si l'on a égard à la définition de la courbe moyenne d'un ovale (*voir* le numéro 22), le théorème précédent entraîne le suivant :

La courbe moyenne d'un ovale quelconque admet au moins trois points de rebroussement [23].

Supposons maintenant que les ovales C et C′ soient, respectivement, une orbiforme de largeur d et un cercle de diamètre d; C et C′ ont même domaine vectoriel; le théorème général démontré plus haut s'applique donc, et l'on voit que :

Sur toute orbiforme de largeur d, il existe au moins six points en lesquels le rayon de courbure est égal à $\frac{d}{2}$.

Ces six points déterminent six arcs, à l'intérieur de chacun desquels le rayon de courbure admet un extrémum. Si l'on appelle *sommet* d'un ovale tout point en lequel le rayon de courbure est un extrémum, on peut énoncer ce résultat :

Tout orbiforme admet au moins six sommets.

Signalons aussi la propriété suivante [40], conséquence immédiate du théorème initial de M. B. Segre. Soit d l'épaisseur (largeur minima) d'un ovale quelconque C différent d'un cercle.

Les tangentes à C distantes de d touchent C en deux points A, B tels que la corde AB soit normale à C en A et B. Considérons le cercle Γ de diamètre $AB = d$; il est bitangent à C en A et B; il existe donc deux points au moins (de part et d'autre de AB) en lesquels le rayon de courbure de C est égal à $\frac{d}{2}$, et le minimum m du rayon de courbure de C est inférieur à $\frac{d}{2}$.

De même, si D est le diamètre (largeur maxima) de C, il existe deux points au moins sur C en lesquels le rayon de courbure est $\frac{D}{2}$, le maximum M de ce rayon étant supérieur à $\frac{D}{2}$.

On a donc, pour tout ovale distinct d'un cercle

$$m < \frac{d}{2} \leqq \frac{D}{2} < M. \tag{5'}$$

Si $m = \frac{d}{2}$ $\left(\text{ou si } M = \frac{D}{2}\right)$, la différence des rayons de courbure en deux points correspondants quelconques de C et Γ ne peut pas prendre de valeurs négatives (ou positives); il résulte alors d'une remarque antérieure que C est confondu avec Γ et est par suite un cercle. Ainsi

Si le minimum (le maximum) du rayon de courbure d'un ovale est égal à la demi-épaisseur (au demi-diamètre), l'ovale est un cercle.

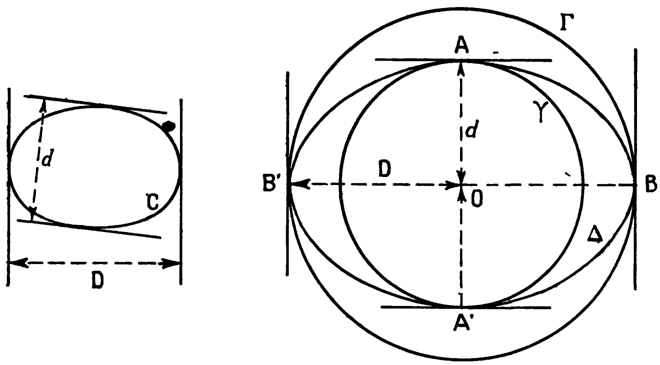
27. **Nouvelles propriétés des ovales.** — Dans le raisonnement fait au numéro 24, on est parti d'une propriété générale *connue* des corps convexes appliquée à *des corps convexes particuliers*, à savoir, la détermination d'un corps convexe par la fonction $F(\omega) = r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}$ appliquée aux domaines vectoriels (corps centrés), pour aboutir à une propriété *nouvelle* relative aux *corps convexes les plus généraux*, à savoir, le lien qui existe entre la somme des rayons de courbure principaux en deux points opposés de la frontière d'un corps convexe quelconque et la largeur du corps dans les différentes directions. Il semble bien que ce procédé représente la manière la plus naturelle et la plus féconde d'utiliser la notion de domaine vectoriel comme instrument de recherche dans la théorie des corps convexes. Les exemples qui suivent sont destinés à justifier cette assertion.

Associons à un ovale quelconque C (différent d'un orbiforme), la figure constituée par son domaine vectoriel Δ, de centre O. et les deux cercles minimum et maximum, γ et Γ, respectivement inscrit et circonscrit à Δ (*fig.* 1.)

γ et Γ ont pour centre O et touchent Δ aux couples de points opposés A et A', B et B'. OA et OB représentent, respectivement, les largeurs minima et maxima de l'ovale C (*voir* le numéro 17); nous poserons $OA = d$, $OB = D$.

Appliquons le théorème de M. Segre du numéro précédent à la figure formée par Δ, γ, Γ. Considérons les deux arcs de Δ et γ situés d'un côté déterminé de AA′; il existe, sur ces deux arcs, deux points (au moins) en lesquels les tangentes sont parallèles et où les rayons de courbure sont égaux; il existe donc un point au moins sur Δ en lequel le rayon de courbure est égal à d; en outre, la différence des rayons de courbure en deux points homologues de Δ et γ prenant des valeurs positives et négatives, le minimum du rayon de courbure de Δ est *inférieur* à d.

Fig. 1.



Substituons à Δ l'ovale C et transposons la propriété précédente. Le minimum du rayon de courbure de Δ est (*voir* le n° **24**) le minimum de la somme des rayons de courbure en deux points opposés de C; en désignant ce minimum par s nous avons, entre s et la largeur minima d de C, l'inégalité

$$s < d. \tag{6}$$

La considération de Δ et Γ donne de même, S étant le maximum de la somme des rayons de courbure en deux points opposés de C et D, le maximum de sa largeur

$$D < S. \tag{7}$$

Une autre propriété, évidente, du domaine vectoriel Δ est traduite par la double inégalité

$$\text{long. de } \gamma < \text{long. de } \Delta < \text{long. de } \Gamma,$$

qui résulte de ce que Γ enveloppe Δ qui, à son tour, enveloppe γ. Passons de Δ à C et transposons cette propriété. Les longueurs de γ et Γ sont respectivement 2π et $2\pi D$, et celle de Δ est $2l$ (l étant la longueur de C). On peut donc écrire, pour C

$$(8) \qquad d < \frac{l}{\pi} < D.$$

(6), (7) et (8) donnent, pour tout ovale distinct d'une orbiforme [41],

$$(9) \qquad s < d < \frac{l}{\pi} < D < S.$$

Le rapprochement de (9) et de (5′) fournit des propriétés extrémales du cercle. Pour tout ovale différent d'un cercle, on a $l > 2\pi m$ et $l < 2\pi M$; pour un cercle on a $l = 2\pi m$ ($l = 2\pi M$); il en résulte que

Parmi tous les ovales ayant un rayon de courbure minimum (maximum) donné m, c'est le cercle de rayon m qui a la longueur minimum (maximum).

28. Propriétés caractéristiques des orbiformes. — Les inégalités (9) donnent des propriétés caractéristiques des orbiformes. Pour qu'un ovale soit orbiforme *il faut et il suffit que deux quelconques des cinq quantités figurant dans* (9) *soient égales.*

Le caractère de nécessité de la proposition est immédiat. Si C est une orbiforme, dans la figure 1, C, γ et Γ sont confondus, d'où l'égalité des cinq quantités figurant dans (9). Montrons que la condition est suffisante.

La chose est évidente si l'on a $s = S$ ou $d = D$, car alors, la somme des rayons de courbure en deux points opposés, ou la largeur, sont constantes.

Si $d = \frac{l}{\pi}$, les ovales Δ et γ ont même longueur; or, Δ enveloppe γ; donc Δ et γ sont identiques. Δ étant un cercle, C est une orbiforme. Le même raisonnement s'applique si $D = \frac{l}{\pi}$.

Si $s = d$, la différence des rayons de courbure de Δ et γ en deux points homologues ne peut pas prendre de valeurs négatives; il résulte alors d'une remarque antérieure (*voir* le nº 26) que Δ et γ sont identiques; Δ est donc un cercle et C une orbiforme. Le même raisonnement conduit à la même conclusion si $S = D$.

Il serait intéressant de chercher à obtenir, pour les surfaces convexes, des propriétés analogues à celles qui viennent d'être établies pour les ovales. Dans une tentative de ce genre, la première chose à faire semblerait être un essai de généralisation spatiale du théorème fondamental de M. B. Segre énoncé au début du numéro 26.

Le lecteur désireux de poursuivre l'étude des propriétés de structure des ovales pourrait se reporter aux travaux de M. S. Mukhopadhyaya [34], [35], [36].

Pour de nouveaux développements sur la courbure, dont quelques-uns immédiatement rattachables aux domaines vectoriels, *voir* [23], [24], [42].

Signalons aussi certaines inégalités intéressantes de T. Kubota [27], [28] et diverses notes de M. Fujiwaria [19], ainsi que des travaux récents de L. Berwald et O. Varga [1], [2] relevant de la *Integralgeometrie* telle qu'elle est développée par W. Blaschke et ses disciples.

29. **Inégalités isopérimétriques.** — La théorie des corps convexes tire en partie son intérêt de son intervention dans le problème des isopérimètres, qui consiste à trouver parmi toutes les figures planes de périmètre donné celle dont l'aire est maximum, et dans celui des isépiphanes, qui consiste à trouver parmi tous les corps de même surface (corps isépiphaniques) celui dont le volume est maximum.

La propriété isopérimétrique du cercle, dont la première démonstration élémentaire est due à M. H. Lebesgue [29], peut être exprimée par l'inégalité

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geqq 0, \tag{10}$$

valable pour toute figure convexe plane de périmètre L et de surface S (et par suite aussi pour toute figure non convexe), le signe d'égalité n'ayant lieu que pour le cercle.

Le premier membre de (10) est ce qu'on appelle le ***déficit isopérimétrique*** de la figure.

Une fois l'attention attirée sur l'inégalité (10), divers problèmes devaient se poser. Il était d'abord naturel d'essayer d'*améliorer* cette inégalité, c'est-à-dire de la remplacer par d'autres de la forme $\frac{L^2}{4\pi} - S \geqq A$, exprimant que le déficit isopérimétrique est supérieur ou égal à quelque quantité positive ou nulle A, la définition de A faisant intervenir des éléments géométriques ayant, pour toute figure convexe, une signification bien déterminée.

L'ouvrage de T. Bonnesen [7] contient de nombreux exemples d'inégalités améliorées; en particulier, grâce à son procédé de symétrisation des figures, T. Bonnesen est parvenu à l'inégalité améliorée suivante

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geqq (R - r)^2, \tag{11}$$

où R et r représentent les rayons des cercles de la couronne minima (*voir* le n° 9) attachée à la figure. L'égalité n'a lieu que si $R = r$, c'est-à-dire si la figure est un cercle.

Nous sortirions de notre sujet si nous voulions entrer dans le détail des recherches de T. Bonnesen, approfondies et prolongées par J. Favard [14], [15], [16], [17]. Pour rester dans le cadre que nous nous sommes imposé, et donner un nouvel exemple d'application des considérations générales du début du numéro 27, nous allons, avec M. Ganapathi [22], montrer comment de l'inégalité améliorée (11) appliquée aux *seuls ovales centrés*, on peut déduire une *nouvelle* inégalité isopérimétrique améliorée relative aux ovales *quelconques*.

Dans la figure (1) du numéro 27, où C est un ovale quelconque, Γ et γ constituent la couronne circulaire minima attachée au domaine vectoriel Δ. On peut écrire, pour Δ, en remplaçant, dans l'inégalité (11), R et r par D et d (largeurs maxima et minima de C), et en appelant $L(\Delta)$ et $A(\Delta)$ la longueur et l'aire de Δ :

$$\frac{L^2(\Delta)}{4\pi} - A(\Delta) \geqq (D - d)^2, \tag{12}$$

l'égalité n'ayant lieu que si Δ est un cercle, c'est-à-dire si C est une orbiforme.

Au moyen des relations existant entre $L(\Delta)$, $A(\Delta)$ et les éléments correspondants de C (*voir* le n° 22), nous pouvons transformer (12) en une nouvelle inégalité relative à C, c'est-à-dire *à tout ovale*. Remplaçons $L(\Delta)$ par $2L(C)$ et $A(\Delta)$ par $4A(C) + 8A(M)$ [formule (4) du n° 22]; nous obtenons

$$\frac{L^2(C)}{4\pi} - A(C) \geqq \frac{(D - d)^2}{4} + 2A(M). \tag{13}$$

L'égalité n'a lieu, dans (12), que si $D = d$; Δ est alors un cercle et C une orbiforme. Dans ce dernier cas, (13) donne une représentation du déficit isopérimétrique

$$\frac{L^2(C)}{4\pi} - A(C) = 2A(M);$$

le déficit isopérimétrique d'une orbiforme *est égal au double de l'aire de la courbe moyenne.*

30. **Problèmes d'extrémums relatifs aux courbes convexes.** — L'inégalité isopérimétrique (10) fournit la solution d'un problème de minimum (minimum du déficit isopérimétrique), réalisé par le cercle. Ce problème rentre dans le type général suivant : L étant la longueur d'une courbe convexe C, S sa surface, considérons une fonction homogène par rapport à l'ensemble constitué par les variables L, $\sqrt{S}$ et les différents éléments géométriques linéaires attachés à la courbe (épaisseur, diamètre, rayons des cercles inscrit et circonscrit ou des cercles de la couronne minima). La fonction étant supposée non décroissante par rapport à L et non croissante par rapport à $\sqrt{S}$, trouver ses extrémums et les courbes qui les réalisent.

On s'est surtout attaché à l'étude de problèmes relatifs au minimum de fonctions du genre indiqué. Le problème classique des isopérimètres en est un, de même que celui de la recherche (effectuée par T. Bonnesen), parmi les courbes inscrites dans une couronne circulaire donnée. de celles réalisant le déficit isopérimétrique minimum.

Les problèmes de maximum n'ont commencé à être envisagés qu'à une époque relativement récente. Le premier problème de ce type a été traité en 1914 par M. H. Lebesgue [29] qui a recherché, parmi toutes les orbiformes de largeur donnée, celle dont la surface est minimum. MM. W. Blaschke [4] et H. Lebesgue [30] sont ensuite revenus sur le même sujet. M. J. Pál [37] a montré que parmi toutes les courbes convexes de même épaisseur, celle qui a la plus petite aire est le triangle équilatéral.

Dans une série de travaux [13]. [15], [16] parus en 1929, 1930, M. J. Favard a résolu de nombreux problèmes d'extrémums, en particulier des problèmes relatifs au maximum de fonctions du genre indiqué ci-dessus, les courbes C parmi lesquelles l'extrémum est recherché étant assujetties à des conditions géométriques variées : courbes inscrites dans un cercle, dans une bande ou dans une couronne circulaire.

Les conditions géométriques imposées aux courbes C ont pour effet d'assurer que C est bornée, de façon à rendre effective l'existence de l'extrémum, existence qui résulte alors d'une propriété de M. W. Blaschke suivant laquelle : de toute suite infinie de courbes convexes fermées et également bornées, on peut extraire une suite de courbes tendant vers une courbe limite elle-même convexe.

Comme condition géométrique imposée à C, on peut choisir celle qui consiste à attribuer à C un domaine vectoriel donné Δ.

On peut alors se poser des questions telle que la suivante :

Parmi toutes les courbes convexes admettant un domaine vectoriel donné Δ, quelles sont celles qui réalisent les extrémums de la surface S?

Le problème du maximum de S se trouve résolu au numéro **21**; S est maximum *lorsque* C *est homothétique de* Δ *dans le rapport* $\frac{1}{2}$.

Le problème du minimum est beaucoup plus complexe. Dans le cas où Δ est un cercle, c'est celui du minimum de l'aire d'une orbiforme de largeur donnée, résolu par M. H. Lebesgue. Il serait sans doute intéressant d'étudier le cas où Δ est une courbe centrée quelconque.

III. — *Séries linéaires de domaines vectoriels.*

31. Considérations générales. — Dans ce qui précède, les domaines vectoriels ont surtout été appliqués à l'étude de propriétés métriques des corps convexes. Les applications que nous allons en faire actuellement sont d'un ordre tout à fait différent. Si l'on veut tenter une exploration tant soit peu méthodique du champ des corps convexes de l'espace, on est amené à grouper ensemble tous les corps jouissant d'une propriété de nature déterminée, le champ de variation de cette propriété étant tel que sa considération fournisse précisément l'ensemble des corps convexes de l'espace. Un procédé d'exploration de ce genre consiste à grouper ensemble tous les corps admettant même domaine vectoriel, de façon à rattacher l'ensemble des corps convexes à l'ensemble constitué par les seuls domaines vectoriels, c'est-à-dire *par les seuls corps convexes centrés.*

Nous verrons plus loin les avantages que présente cette façon de procéder, non seulement en ce qui concerne la coordination dont il vient d'être question, mais aussi si l'on a égard au problème, fort délicat même dans le simple cas du plan, de la *construction effective de corps convexes*.

Ce dernier problème, fondamental pourtant, puisque, en somme, tous les développements auxquels a donné lieu la théorie des corps convexes s'appliquent à des êtres qu'il serait intéressant de connaître, ne semble pas avoir donné lieu à beaucoup de travaux. La seule tentative intéressante en ce sens, que l'on trouve dans les ouvrages consacrés à la théorie des corps convexes, semble bien consister en l'introduction des séries linéaires, qui permettent de construire effectivement une infinité de corps convexes à partir d'un nombre fini de corps convexes connus. Dans les mémoires [44], [49], nous avons pu, dans une certaine mesure, combler la lacune signalée, et les développements qui vont suivre sont consacrés à l'exposition des principaux résultats obtenus. Nous montrerons à la section suivante comment, si l'on se borne à la considération des corps convexes dont les frontières admettent en chaque point des rayons de courbure principaux finis et non nuls, on peut construire *tous les corps convexes de l'espace à partir de certains d'entre eux*. Dans la section actuelle, et pour prendre en quelque sorte contact avec le problème général qui vient d'être énoncé, nous nous bornerons à montrer comment, dès que l'on connaît *un corps convexe*, on peut en déduire une infinité d'autres admettant pour domaines vectoriels des corps convexes centrés *arbitrairement donnés*.

32. Séries linéaires et domaines vectoriels. — Nous allons établir une propriété des domaines vectoriels des corps d'une série linéaire, fondamentale pour la suite. Soient C et C′ deux corps convexes fermés et bornés de l'espace euclidien à n dimensions, Δ et Δ' leurs domaines vectoriels que nous supposerons centrés à l'origine O des coordonnées. Si ω est un point quelconque de la sphère unité centrée en O, et si $H(\omega)$, $H'(\omega)$ sont les fonctions d'appui respectives de C. C′, les fonctions d'appui des domaines vectoriels Δ et Δ' sont

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} h(\omega) = H(\omega) + H(\omega'), \\ h'(\omega) = H'(\omega) + H'(\omega'), \end{array}\right.$$

où ω' est le point opposé à ω sur la sphère unité.

Le corps générateur C_λ (*voir* le n° 13) de la série linéaire [C, C′]

est défini par la fonction d'appui

$$H_\lambda(\omega) = \frac{H(\omega) - \lambda H'(\omega)}{1-\lambda} \qquad (\lambda < 1). \tag{15}$$

Les domaines vectoriels Δ, Δ' déterminent une série linéaire $[\Delta, \Delta']$ dont le corps générateur Δ_λ a pour fonction d'appui

$$h_\lambda(\omega) = \frac{h(\omega) - \lambda h'(\omega)}{1-\lambda},$$

ce qui, eu égard à (14), (15) peut s'écrire

$$h_\lambda(\omega) = H_\lambda(\omega) + H_\lambda(\omega').$$

On voit que Δ_λ n'est autre chose que le domaine vectoriel de C_λ. On peut donc énoncer ce résultat :

Les domaines vectoriels des corps d'une série linéaire sont les éléments d'une nouvelle série linéaire; deux corps correspondants dans les deux séries correspondent à la même valeur du rapport λ *qui fixe chaque corps dans la série à laquelle il appartient.*

En particulier, *si deux corps convexes ont même domaine vectoriel, il en est de même de tous les corps de la série linéaire qu'ils déterminent et de tous ceux qui prolongent cette série dans un sens ou dans l'autre.*

33. Corps convexes admettant un domaine vectoriel donné. — Le résultat qui vient d'être établi permet de déduire, d'un corps convexe C admettant un domaine vectoriel donné Δ, une infinite de nouveaux corps convexes admettant Δ pour domaine vectoriel. Adjoignons à C le corps δ homothétique de Δ dans une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$. δ admet Δ pour domaine vectoriel; il en résulte que tous les corps de la série $[C, \delta]$ admettent Δ pour domaine vectoriel.

A l'origine de la détermination des corps précédents figure un corps convexe particulier *connu* admettant pour domaine vectoriel Δ. Si Δ est un corps convexe centré quelconque de l'espace à n dimensions, dont la frontière est douée en chaque point de $n-1$ rayons de courbure principaux (finis et non nuls, il est possible, *sans connaître d'avance aucun corps admettant pour domaine vectoriel* Δ (autre que l'homothétique de Δ dans une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$), d'obtenir l'ensemble de ces corps à partir de corps *simplement assujettis à la condition d'être convexes et d'admettre en chaque point frontière* $n - 1$ *rayons de courbure principaux finis et non nuls.*

Soit, en effet, C un corps convexe quelconque dont la frontière jouit de la propriété indiquée ; construisons son domaine vectoriel Γ.

En effectuant au besoin une même homothétie sur C et Γ, nous pouvons supposer que les rayons de courbure principaux de Γ et Δ en deux points homologues quelconques (points en lesquels les hyperplans tangents sont parallèles et également situés) vérifient la condition exigée (*voir* le n° 15) pour la prolongeabilité indéfinie de la série $[\Gamma, \Delta]$ dans le sens $\Gamma \rightarrow \Delta$. Soit alors Φ l'un des corps de la série prolongée ; construisons l'homothétique F de Φ dans une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$; F admet Φ pour domaine vectoriel. Le rapport λ qui fixe Δ dans la série $[\Gamma, \Delta]$ fixe aussi un certain corps D de la série $[C, F]$; d'apres le numéro précédent D *admet* Δ *pour domaine vectoriel.*

En faisant varier Φ dans la série $[\Gamma, \Delta]$ prolongée, on obtient une infinité de corps convexes admettant Δ pour domaine vectoriel. Nous avons utilisé une série $[\Gamma, \Delta]$ indéfiniment prolongeable dans le sens $\Gamma \rightarrow \Delta$, uniquement pour donner plus de latitude à la construction; une série admettant un prolongement limité aurait évidemment suffi.

Il est facile de voir qu'en faisant varier le corps convexe arbitraire C, qui est à la base de la construction précédente, on obtient, par le procédé indiqué, tous les corps convexes admettant Δ pour domaine vectoriel. Pour une démonstration précise de cette assertion nous renvoyons à [48], nous bornant ici à énoncer la propriété suivante sur laquelle la démonstration est basée :

Si une série linéaire de corps convexes est prolongeable, dans un certain sens, jusqu'à une certaine limite (définie par une certaine valeur du rapport λ*) la série des domaines vectoriels est prolongeable, dans le même sens, jusqu'à la même limite au moins.*

Corps de largeur constante. — Si l'on prend pour domaine vectoriel Δ une sphère de rayon a, la construction précédente fournit les corps de largeur constante a de l'espace à n dimensions.

IV. — *Construction de l'ensemble des corps convexes de l'espace à partir de certains sous-ensembles bases.*

34. Remarques relatives au problème de la recherche des corps convexes admettant un domaine vectoriel donné. — Nous arrivons maintenant à l'étude du problème, énoncé au numéro 31, relatif à un essai de détermination effective de l'ensemble des corps convexes de l'espace. Nous limiterons notre recherche à l'ensemble, que nous désignerons par $(\mathcal{E})$, des corps convexes de l'espace à n dimensions de volume positif, dont les frontières (à $n-1$ dimensions) sont douées en chaque point d'un plan tangent continu et de $n-1$ rayons de courbure principaux finis et non nuls.

Dans la construction, indiquée au numéro 33, des corps convexes admettant un domaine vectoriel donné, figure *un corps convexe arbitraire* C. De C, on déduit une infinité de corps convexes admettant un domaine vectoriel *donné* (une largeur donnée dans toute direction). En faisant varier arbitrairement C dans le champ des corps convexes, on obtient tous les corps admettant le domaine vectoriel voulu.

Or, l'ensemble des corps convexes admettant un domaine vectoriel donné est un sous-ensemble de l'ensemble des corps convexes de l'espace ; il doit donc être possible d'obtenir tous les corps admettant un domaine vectoriel donné, en choisissant le corps arbitraire C, qui est à la base de la construction. dans un sous-ensemble convenable de l'ensemble total $(\mathcal{E})$ présentant le même degré de généralité que l'ensemble des corps à construire.

C'est ce que nous allons montrer, en modifiant légèrement le procédé de construction indiqué au numéro 33, de façon à obtenir une limitation précise des éléments arbitraires mis en jeu. Le résultat auquel nous parviendrons est le suivant : *on peut obtenir géométriquement tous les corps convexes admettant un domaine vectoriel donné quelconque, dès que l'on connaît les corps convexes admettant un domaine vectoriel particulier* (*par exemple les corps de largeur constante*).

Ce résultat peut être envisagé comme fournissant une méthode géométrique de transformation, les uns dans les autres, des ensembles de corps convexes admettant même domaine vectoriel. Mais son intérêt réside surtout dans le fait qu'il permet (*voir* le n° 36), de donner une solution du problème, énoncé au numéro 31, de la reconstitution de l'ensemble des corps convexes à partir de certains d'entre eux.

35. **Transformation des ensembles de corps convexes admettant même domaine vectoriel les uns dans les autres.** — Envisageons l'ensemble des corps convexes $(\mathcal{E})$ de l'espace, dans lequel ne seront pas considérés comme distincts les corps homothétiques à un même élément. Désignons par (γ) l'ensemble [sous-ensemble de $(\mathcal{E})$] des corps convexes (D) possédant un centre de symétrie. D étant un corps quelconque de (γ) (défini à une homothétie près), associons à D tous les corps de $(\mathcal{E})$ admettant D pour domaine vectoriel; nous obtenons ainsi un sous-ensemble de $(\mathcal{E})$, soit $(e)_D$. A chaque élément D de (γ) correspond un $(e)_D$. Tout corps de $(\mathcal{E})$ appartenant à un $(e)_D$ déterminé, on peut dire que $(\mathcal{E})$ est la somme des différents $(e)_D$.

Cela étant, soient D et D' deux corps centrés *non homothétiques*, définissant les deux ensembles $(e)_D$ et $(e)_{D'}$. Les deux corps n'ont besoin d'être définis qu'à une homothétie près, mais, pour simplifier notre exposition, nous supposerons fixés les rapports d'homothétie, de sorte que D et D' seront des corps bien déterminés, en position relative d'ailleurs quelconque. Il s'agit *de trouver un procédé de transformation de l'ensemble* $(e)_D$ *en l'ensemble* $(e)_{D'}$.

k et k' étant deux nombres positifs, envisageons les corps $\frac{k}{2}D$ et $k'D'$. Si nous effectuons, au moyen de ces corps, la construction exposée au numéro 16 (troisième exemple de construction de séries linéaires indéfiniment prolongeables), $\frac{k}{2}D$ jouant le rôle du corps désigné par C à l'endroit rappelé et $k'D'$ jouant le rôle du corps désigné par C', nous associons aux deux corps $\frac{k}{2}D$ et $k'D'$ un corps convexe Σ définissant, avec $k'D'$, une série linéaire $[k'D', \Sigma]$ *indéfiniment prolongeable dans le sens* $k'D' \to \Sigma$.

Le corps $k'D'$ étant centré, la remarque faite à la fin du numéro 16 s'applique, et le corps Σ est la *somme* des deux corps $\frac{k}{2}D$ et $2k'D'$

$$\Sigma \equiv 2k'D' + \frac{k}{2}D.$$

Le corps Σ qui vient d'être construit dépend des deux paramètres k

et k' (dont un seul est paramètre de forme). Nous désignerons par (Σ) l'ensemble des corps obtenus en faisant varier les deux paramètres.

Une espèce de *perspective centrale par séries linéaires*, faite à partir d'un corps quelconque C de $(e)_D$ comme élément central, va nous permettre de projeter, en quelque sorte, un sous-ensemble convenable de (Σ) sur $(e)_{D'}$, et de réaliser ainsi, par l'intermédiaire de ce sous-ensemble, la transformation de $(e)_D$ en $(e)_{D'}$.

Si l'on associe à C l'un quelconque des ∞^2 corps Σ on obtient un faisceau de ∞^2 séries linéaires $[C, \Sigma]$. Nous allons voir que l'on peut limiter les variations des paramètres k, k' de façon à obtenir ∞^2 séries $[C, \Sigma]$ *indéfiniment prolongeables au delà de* Σ, *l'un des corps de chaque série prolongée appartenant à l'ensemble* $(e)_{D'}$. La perspective dont il est question plus haut se trouvera alors réalisée par le faisceau de séries (de sommet C) ainsi obtenu.

Pour atteindre notre but, et nous basant sur un résultat du numéro 15, commençons par déterminer le nombre k' de façon que la série auxiliaire $[C, k'D']$ soit indéfiniment prolongeable dans le sens $C \rightarrow k'D'$. Si r'_m et r_M sont. respectivement, les rayons de courbure principaux minimum et maximum sur les frontières de D' et de C, il suffira de choisir, parmi les ∞^2 corps Σ, ceux pour lesquels

$$k' > \frac{r_M}{r'_m} \tag{16}$$

pour qu'il en soit ainsi. Le rayon de courbure principal minimum de la frontière de $k'D'$ est alors $k'r'_m$ et, comme il est supérieur au rayon de courbure principal maximum de la frontière de C, la série $[C, k'D']$ est bien indéfiniment prolongeable dans le sens $C \rightarrow k'D'$.

Si l'on associe à C l'un quelconque des corps Σ correspondant à une valeur de k' vérifiant (16), la série $[C. \Sigma]$ est indéfiniment prolongeable dans le sens $C \rightarrow \Sigma$. Pour le voir il n'y a qu'à invoquer une propriété indiquée à la fin du numéro 15 : la série $[k'D', \Sigma]$ est indéfiniment prolongeable dans le sens $k'D' \rightarrow \Sigma$; la série $[C, k'D']$ est indéfiniment prolongeable dans le sens $C \rightarrow k'D'$; il en résulte que $[C, \Sigma]$ est indéfiniment prolongeable dans le sens $C \rightarrow \Sigma$.

k' étant limité par la condition (16), il suffira maintenant, comme nous allons le voir, de limiter k par la condition

$$k < 1, \tag{17}$$

pour obtenir le faisceau de séries linéaires (C, Σ) propre à réaliser la transformation de $(e)_D$ en $(e)_{D'}$.

Soit $[C, \Sigma]$ une quelconque des séries définies par les conditions (16), (17). Désignons par Δ et δ les largeurs respectives de D et Δ dans une même direction quelconque. La largeur de C dans la même direction est $\frac{\Delta}{2}$, et celle du corps $C_\lambda (\lambda > 1)$ [notations du n° **13**, où l'on remplace C′ par Σ] de la série $[C, \Sigma]$ est (*voir* la fin du n° **16**)

$$\Delta_\lambda = \frac{\frac{\Delta}{2} - \lambda\delta}{1-\lambda}.$$

Parmi les corps C_λ, considérons plus particulièrement le corps $C_{\frac{1}{k}}$ qui, en vertu de (17), fait bien partie de la série prolongée. La largeur de $C_{\frac{1}{k}}$ est

$$\Delta_{\frac{1}{k}} = \frac{\delta - \frac{k}{2}\Delta}{1-k}.$$

Le corps $\Sigma \equiv 2k'D' + \frac{k}{2}D$ a une largeur somme des largeurs des deux corps $2k'D'$ et $\frac{k}{2}D$; si Δ' désigne la largeur de D′, on a donc

$$\delta = 2k'\Delta' + \frac{k}{2}\Delta.$$

Avec cette expression de δ, on obtient, pour l'expression de $\Delta_{\frac{1}{k}}$,

$$\Delta_{\frac{1}{k}} = \frac{2k'\Delta'}{1-k},$$

d'où

$$\frac{\Delta_{\frac{1}{k}}}{\Delta'} = \frac{2k'}{1-k} = \text{const.}$$

Les largeurs de $C_{\frac{1}{k}}$ et de D′ relatives à une même direction quelconque sont donc *proportionnelles*. Il en résulte, qu'à une homothétie près (que nous négligeons) le corps $C' = C_{\frac{1}{k}}$ admet D′ pour domaine vectoriel et *appartient par suite à l'ensemble* $(e)_{D'}$.

Chaque série $[C, \Sigma]$ fournit donc, comme on l'avait annoncé, un corps C′ de l'ensemble $(e)_{D'}$.

Il est clair que C′ est un corps de $(e)_{D'}$ distinct du corps centré $\frac{1}{2}$ D′ connu *a priori*. Si, en effet, C′ était centré, Σ serait la somme de deux corps centrés et serait par suite centré; la série [C, C′] contenant deux corps centrés, tous ses corps seraient centrés, ce qui ne peut avoir lieu puisque C est un corps *quelconque* de $(e)_D$.

Le faisceau des ∞^2 séries [C, Σ] correspondant à $k' > \frac{r_M}{r'_m}$, $k < 1$, donne, pour chaque corps C de $(e)_D$, ∞^2 corps de $(e)_{D'}$.

Pour pouvoir affirmer que la considération des faisceaux issus des différents corps C de $(e)_D$ donne *tous* les corps de $(e)_{D'}$, et réalise par suite la transformation complète de $(e)_D$ en $(e)_{D'}$, il resterait à montrer que tout corps de C $(e)_{D'}$ peut être associé à un certain corps C de $(e)_D$ dans l'une des séries [C, Σ] définies plus haut. Il en est effectivement ainsi. La vérification se fait en suivant une marche inverse de celle qui a abouti à la construction [que nous désignerons par *construction* (A)], exposée en ce qui précède, permettant de déduire les corps de $(e)_{D'}$ de ceux de $(e)_D$ par l'intermédiaire des corps Σ. Pour cette assertion nous renvoyons le lecteur à [49].

36. La reconstitution de l'ensemble ($\mathcal{E}$) à partir de certains sous-ensembles bases. — Nous arrivons maintenant au problème général, posé au numéro 31, relatif à la possibilité de construire géométriquement l'ensemble des corps convexes ($\mathcal{E}$) de l'espace euclidien à n dimensions à partir de certains d'entre eux.

Considérons, dans l'ensemble ($\mathcal{E}$), le sous-ensemble ($\mathcal{E}_1$) somme des deux ensembles $(e)_{D_0}$ et (γ) suivants :

$(e)_{D_0}$ est un ensemble $(e)_D$ particulier arbitrairement choisi, par exemple l'ensemble des corps de largeur constante, pour lesquels D_0 est une sphère.

(γ) est l'ensemble des corps centrés.

Soit C un corps quelconque de ($\mathcal{E}$). Ce corps a un certain domaine vectoriel D, et appartient par suite à l'ensemble $(e)_D$ défini par D. Le corps D est centré et appartient par suite à l'ensemble (γ).

La construction géométrique (A) exposée au numéro précédent, faite avec D_0 et D, transforme l'ensemble des corps de $(e)_{D_0}$ en l'ensemble des corps de $(e)_D$; cette construction fournira donc, en particulier, le corps C envisagé.

Il résulte de là que chaque ensemble particulier $(\mathcal{E}_1) = (e)_D + (\gamma)$, obtenu en prenant pour $(e)_D$ l'ensemble des corps admettant pour domaine vectoriel un corps quelconque D de (γ) *est la base d'une reconstitution complète de* $(\mathcal{E})$.

L'étude actuelle montre tout l'intérêt qui s'attache au problème, dont il a été question au numéro 33, de la recherche des corps convexes admettant un domaine vectoriel donné, problème dont on obtient évidemment la forme la plus maniable en recherchant les corps convexes de largeur constante.

Nous ajouterons qu'il semble bien que les ensembles de la forme $(\mathcal{E}_1) = (e)_D + (\gamma)$ où, comme il a été expliqué, D est un corps arbitraire de (γ), soient les plus simples à partir desquels, par des opérations *linéaires* (nous entendons par là, ne mettant en jeu que les propriétés des séries linéaires ou des combinaisons de telles séries), on puisse construire géométriquement l'ensemble complet $(\mathcal{E})$ des corps convexes de l'espace.

37. Remarque analytique. — A l'ensemble $(\mathcal{E})$ des corps convexes de l'espace à n dimensions correspond l'ensemble $(\mathcal{H})$ des fonctions d'appui. $(\mathcal{H})$ est constitué par des fonctions convexes, positivement homogènes et de degré *un* (*voir* les n^{os} 4 et 5).

Les développements géométriques qui précèdent, mettent en évidence la possibilité de déduire l'ensemble $(\mathcal{H})$ des seules fonctions $\mathcal{H}$ satisfaisant aux équations fonctionnelles suivantes :

$$\mathcal{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \mathcal{H}(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = 0,$$
$$\mathcal{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \mathcal{H}(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

qui correspondent, respectivement, aux corps convexes centrés et aux corps convexes de largeur constante.

Si l'on se borne a la considération de l'ensemble des fonctions $\mathcal{H}$ pourvues de dérivées partielles jusqu'à l'ordre trois, l'obtention effective de l'ensemble $(\mathcal{H})$ au moyen des solutions des équations précédentes, traduction analytique de la construction géométrique exposée aux numéros 35 et 36, n'exige que la résolution d'équations algébriques et des calculs de dérivation [50].

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. BERWALD (L.) — Über die Körper Konstanter Helligkeit (*Math. Zeitschrift*, t. 42, 1937, p. 737-738).
2. BERWALD (L.) et VARGA (O.). — Über die Schiebungen im Raum (*Math. Zeitsch.*, t. 42, 1937, p. 710-736).
2*. BIANCHI (L.). — Lezioni di geometria differenziale (*Nicola Zanichelli*, Bologna, vol. II, parte II, 1924, p. 565).
3. BLASCHKE (W.). — *Nachr. der K. Ges. d. Wissenschaften zu Gottingen math.-physik*, *Sitzung vom* 18 mai 1902.
4. — Konvexe Bereiche gegebener Konstanter Breite und kleisten Inhalts (*Math. Annalen*, t. 76, 1915, p. 504-513).
5. — Kreis und Kugel (Leipzig, 1916).
6. — Worlesungen über Differentialgeometrie (t. II, Berlin, 1921-1923).
7. BONNESEN (T.). — Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes (*Collection de monographies; sur la théorie des fonctions publiées sous la direction de M. E. Borel*, Paris, Gauthier-Villars, 1929).
8. BONNESEN (T.). et FRENCHEL (W.). — Theorie der Konvexen Korper (Berlin, 1934).
9. BOULIGAND (G.). — Introduction à la géométrie infinitésimale directe (Paris, Vuibert, 1932, p. 90).
10. BRUNN (H.). — Über ovale und Eifläche (*Diss. Munchen*, 1877).
11. DURAND (G.). — Sur une généralisation des surfaces convexes (*Thèse*, Paris, 1931).
12. ESTERMANN (T.). — Über den Vectorenberich eines Konvexen Korpers (*Math. Zeitsch.*, t. 28, 1934).
13. FAVARD (J.). — Sur le déficit isopérimétrique maximum dans une couronne circulaire (*Matematisk Tidsskrift*, 1929, p. 62-68).
14. — Sur les inégalités de Minkowski (*Matematisk Tidsskrift*, 1930, p. 35-40).
15. — Problemes d'extrémums relatifs aux courbes convexes [*Ann. de l'École Normale supérieure*, (3), t. XLVI, 1929, p. 345-369].
16. — Problèmes d'extrémums relatifs aux courbes convexes : les couvercles [*Ann. de l'École Normale supérieure*, (3), t. XLVII, 1930, p. 311-324].
17. — Sur les corps convexes (*Journ. de Math. publié par H. Villat*, t. XII, 1923, p. 219-282).
18. — Sur la détermination des surfaces convexes (*Bull. de la classe des Sc. de l'Ac. royale de Belgique*, t. XIX, 1933, p. 65-75).
19. FUJIWARA (M.). — *Sc. reports of the Tôhoku Imperial University*, vol. IV, V; Sendai, 1915-1916.
19*. FRENCHEL (W.). — Généralisation du théorème de Brunn et Minkowski concernant les corps convexes (*Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, 203, 1936, p. 764-766).
20. GAMBIER (B.) — Applicabilité des surfaces étudiée au point de vue fini (*Mémorial des Sc. Math.*, fasc. XXXI, Paris, Gauthier-Villars, 1928).

21. GANAPATHI (P.) — The vector region of convex closed bodies (*Math. Zeitschrift*, t. 38, 1934, p. 488).
22. — The isoperimetric deficit of a closed curve (*Math. Zeitsch.*, t. 38, 1934, p. 691).
23. — A note on the oval (*Math. Zeitsch.*, t. 38, 1934, p. 490).
24. — On a certain class of ovals (*Math. Zeitsch.*, t. 38, 1934, p. 687).
25. HILBERT (D.). — Grundlagen der Goemetrie (Leipzig, 1909, 3e édition).
26. HURWITZ (M. A.). — Sur quelques applications des séries de Fourier (*Ann. Sc. de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 19, 1902, p. 357-408).
27. KUBOTA (T.). — Eine Ungleichheit für die Eilinien (*Tôhoku Math. Journ.*, 1923, p. 264-266).
28. — Einige Bemerkungen über die Eilinien (*Sc. reports of the Tôhoku Imperial University*, S. I, vol. XIII, n° I, 1924).
29. LEBESGUE (H.). — Sur les problèmes des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante (*Bull. de la Soc. Math. de France; Comptes rendus des séances de l'année* 1914, p. 72-76).
30. — Sur quelques questions de minimum relatives aux courbes orbiformes et leurs rapports avec le calcul des variations (*Journ. de math. pures et appliquées*, 8e série, t. IV, 1921, p. 76-96).
31. LIEBMANN (H.). — *Math. Annalen*, t. 53, 1900, p. 81-112; t. 54, 1901, p. 507-517.
32. MAYER (A. E). — Eine Uberkonvexität (*Math. Zeitschrift*, t. 39, 1935, p. 511-531).
33. MINKOWSKI (H.). — Volumen und Oberfläche (*Math, Annalen*, t. 57, 1903, p. 447-495).
34. MUKHOPADHYAYA (S.). — Extended minimum number Theorems of cyclic and sextactic points on a plane convex oval (*Math. Zeitsch.*, t. 33, 1931, p. 648-662).
35. — Circles incident on an oval of indefinite curvature (*Tôhoku Math. Journ.*, vol. 34, part. I, 1931, p. 115-129).
36. — Sur les nouvelles méthodes en Géométrie (*Bull. de la Soc. Math. de France; Comptes rendus des séances de l'année* 1933, p. 41-45).
37. PÁL (J.). — Ein Minimumproblem für ovale (*Math. Annalen*, t. 83, 1921, p. 311-319).
38. RADEMACHER (H.). — *Jahresbericht der D. Math. Ver.* t. XXXIV, 1925, p. 64.
39. REULEAUX. — Theoretische Kinematic (*Braunschweig*, 1875).
40. SEGRE (B.). — Proprieta in grande delle linee piane convesse : Sulla curvatura degli archi convessi sogetti a date condizioni agli estremi (*Atti della Reale Academia dei Lincei*, 6e série, 20, 1934, p. 407-410).
41. — Proprieta in grande.....: Le orbiforme (*Atti della R. Act. dei Lincei* 6e série, 20, 1934, p. 455-458).
42. — SU (B). — On the curvature. Axis of the convex closed curves (*Science reports of the Univ. of Tôhoku*, vol. 17, 1928, p. 35-42)
43. SUSS (W.). — Bestimmung einer..... (*Sitz. Ber. der Preussichen Akademie*, t. 31, 1931, p. 686-695).
44. VINCENSINI (P.). — Sur les domaines vectoriels des corps convexes (*Journ. de Math., publié par H. Villat*, t. XV, 1936, p. 373-383).
45. — Sur les figures superconvexes planes (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. LXIV, 1936, p. 197-208).
46. — Les domaines vectoriels et la théorie des corps convexes (*Enseignement mathématique*, 1937, p. 69-80).
47. — Sur une propriété des corps convexes de l'espace euclidien à *n* dimensions (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 3 mai 1937).

48. — Sur le prolongement des séries linéaires de corps convexes. Applications (*Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, t. LX, 1936).

49. — Sur une transformation des corps convexes et son application à la construction de l'ensemble des corps convexes de l'espace à n dimensions à partir de certains sous-ensembles bases (*Bull. de la Soc. Math. de France,* t. LXV, 1937, p. 175-189).

50. — Su una classe di funzioni convesse (*Rendiconti dell'Academia dei Lincei*, vol. XXVI, 1937, p. 366.

51. Weyl (H.). — *Wiertljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, t. 61, 1916, p. 40-72.

TABLE DES MATIÈRES.

108525 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55,