MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

J. DIEUDONNÉ

La théorie analytique des polynômes d’une variable (à coefficients quelconques)

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 93 (1938)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1938__93__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XCIII

La théorie analytique des polynomes d'une variable (à coefficients quelconques)

Par M. J. DIEUDONNÉ

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1938

LA THÉORIE ANALYTIQUE

DES

POLYNOMES D'UNE VARIABLE

(A COEFFICIENTS QUELCONQUES)

Par M. J. DIEUDONNÉ.

On peut étudier les zéros d'un polynome à deux points de vue bien différents. Le premier est celui de l'Algèbre proprement dite : il consiste à rechercher les propriétés de nature arithmétique des zéros, connaissant des propriétés arithmétiques des coefficients ; c'est la *théorie de Galois*, en liaison étroite avec la théorie des nombres. Dans ce genre de recherches, on ne se soucie pas, ou fort peu, de la *grandeur* des zéros, de leur position dans le plan complexe ; un second point de vue consiste, au contraire, à s'occuper exclusivement de ces problèmes de position, sans tenir compte de la nature arithmétique des zéros ni de celle des coefficients du polynome. Les problèmes de cette catégorie s'apparentent à ceux que l'on se pose sur les zéros des fonctions analytiques ; et, d'une façon plus générale, un polynome étant une fonction analytique particulière, on peut l'envisager à tous les points de vue sous lesquels on considère une fonction analytique, et se proposer, dans chaque cas, de trouver les propriétés du polynome qui tiennent à sa nature de fonction analytique spéciale. C'est l'ensemble de ces questions que nous proposons de réunir sous le nom de *théorie analytique des polynomes*.

Historiquement, jusqu'à la fin du XIXe siècle, on n'a guère abordé ces questions que pour les polynomes à coefficients *réels*, en cherchant surtout à préciser le nombre et la position des zéros *réels* suivant les propriétés des coefficients. Les travaux de théorie des fonctions (en particulier ceux de Landau) ont attiré l'attention sur les polynomes à coefficients quelconques; c'est de ceux-ci seulement que nous nous occuperons en principe; un autre fascicule de cette collection, dû à M. Obrechkoff, traitera la théorie des polynomes à coefficients réels, que la nature des questions et des méthodes utilisées différencie profondément de celle que nous allons exposer.

Les *moyens* mis en œuvre dans la théorie qui nous occupe sont, d'une part, les propriétés formelles des polynomes; d'autre part, la représentation géométrique des nombres complexes, et les propriétés élémentaires des fonctions analytiques, en particulier les propriétés de caractère topologique (maximum du module, principe de l'argument).

En relation avec le caractère « élémentaire » de ces moyens, on doit signaler un genre de questions qui rentrent dans notre théorie et lui confèrent un nouvel intérêt (outre celui qui s'attache à l'étude des propriétés des polynomes, au même titre qu'à celle des propriétés d'autres catégories de fonctions spéciales, comme les fonctions entières ou les fonctions bornées) : comme on peut toujours approcher une fonction holomorphe dans un domaine fermé par une suite uniformément convergente de polynomes, on peut espérer obtenir des propriétés des polynomes se conservant par passage à la limite, et donnant ainsi, soit des propriétés nouvelles de la fonction limite, soit des propriétés connues, mais obtenues par des moyens « transcendants ».

A la vérité, il n'y a encore que fort peu de résultats dans cette direction; en particulier, on n'a pas encore pu obtenir de démonstration du théorème de Landau par ce procédé.

Cette remarque nous amène à insister sur le caractère fragmentaire de beaucoup des résultats que nous exposerons : la théorie analytique des polynomes est encore à l'heure actuelle dans un état bien imparfait, et il serait vain de le dissimuler. Nous espérons que cet exposé, en « faisant le point » en ce qui concerne l'état actuel de la théorie, pourra susciter de nouvelles recherches susceptibles de la développer et de la perfectionner.

Nous avons divisé ce fascicule en deux parties : dans la première, nous avons réuni toutes les propriétés des zéros d'un polynome déduites des propriétés des coefficients. La seconde, qui présente moins d'unité, et peut être intitulée *Géométrie des polynomes*, a pour objet l'étude des relations entre les zéros de polynomes liés entre eux par des propriétés fonctionnelles diverses, en particulier des relations entre les zéros d'un polynome et ceux de sa dérivée.

Définitions et notations. — Nous ferons constamment usage, dans ce fascicule, de la représentation géométrique des nombres complexes. Nous désignerons en général par la même lettre x un nombre complexe et son point représentatif, et nous parlerons indifféremment du « nombre x » ou du « point x » suivant les cas. Pour éviter les confusions possibles, le segment de droite joignant les points x_1, x_2 sera représenté par $\underline{x_1 x_2}$, ou $\overrightarrow{x_1 x_2}$ s'il est orienté.

Le plan complexe est toujours considéré comme *fermé* par l'adjonction du point à l'infini.

Les *domaines* du plan complexe qu'on considérera sont toujours *fermés* quand le contraire n'est pas spécifié. Quand nous dirons qu'un point « appartient à », « est contenu dans » ou simplement « est dans » un domaine, cela signifiera que le point est *point intérieur* ou *point frontière* du domaine, les deux cas étant possibles *a priori*.

Un *domaine circulaire* est un domaine dont la frontière est une circonférence ou une droite. Une transformation homographique transforme un domaine circulaire en un domaine circulaire.

Conformément à la convention ci-dessus, pour définir un domaine circulaire, nous devrions dire qu'il se compose de l'intérieur (ou de l'extérieur) d'un cercle *et de sa circonférence* (ou d'un demi-plan *et de sa droite frontière*). Pour abréger, nous parlerons simplement de domaines constitués par l'intérieur, ou l'extérieur d'un cercle, ou un demi-plan, étant convenu qu'il s'agit toujours de ces domaines complétés par leur frontière, sauf si le contraire est spécifié.

Précisons encore que, d'une façon uniforme, en ce qui concerne l'emploi des mots « zéro » et « racine », nous parlerons de « zéros » d'un polynome et de « racines » d'une équation.

Indiquons enfin quelques notations d'emploi courant :

$\bar{x}$ désigne le nombre complexe conjugué de x;

$\arg x$, $\mathcal{R}(x)$, $\mathcal{I}(x)$ désignent respectivement l'argument, la partie réelle, la partie imaginaire de x;

$\mathrm{E}(a)$, où a est un nombre réel positif, désigne la partie entière de a.

PREMIÈRE PARTIE.

LES PROPRIÉTÉS DES ZÉROS D'UN POLYNOME DÉDUITES DES PROPRIÉTÉS DES COEFFICIENTS.

L'objet principal de cette première Partie est la limitation des *modules* des zéros en fonction des coefficients : il y a fort peu de résultats relatifs aux *arguments;* nous les exposerons au Chapitre V.

CHAPITRE I.

LA SÉPARATION DES MODULES DES ZÉROS.

1. Étant donnée une équation

$$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0,$$

le premier problème qui se pose (par analogie avec le problème de la séparation des racines pour les équations réelles) est de *séparer* les modules des racines, c'est-à-dire, étant donnés deux nombres, r_1 et $r_2 (0 \leqq r_1 < r_2)$, de *trouver le nombre des zéros de $f(x)$, comptés avec leur ordre de multiplicité, tels que*

$$r_1 \leqq |x| \leqq r_2.$$

Il suffit encore, étant donné un nombre $r > 0$, de savoir déterminer le nombre des zéros tels que $|x| < r$, et le nombre des zéros tels que $|x| = r$. De plus, en posant $x = rz$, on peut évidemment se ramener au cas où $r = 1$.

Inversement, d'ailleurs, si l'on sait résoudre ces problèmes, on pourra, à l'aide d'une transformation homographique, déterminer le nombre des zéros de $f(x)$, situés dans un *domaine circulaire* quelconque, ouvert ou fermé. Dans l'ordre historique, c'est le cas où le domaine est un demi-plan qui a été d'abord étudié; dans un Mémoire fondamental [48], Hermite résolvait en effet complètement la question pour le demi-plan situé au-dessus de l'axe réel, en la rattachant à la théorie des formes qu'il a introduites dans la Science. Sa méthode s'étend aisément au cas d'un cercle, comme l'a montré M. Fujiwara [39]; cependant, sa portée ne semble pas avoir été reconnue immédiatement, car on voit le problème repris par Routh [90], Hurwitz [49], Liénard et Chipart [65] pour le demi-plan à gauche de l'axe imaginaire et dans le seul cas des équations à coefficients *réels*. Pour le cercle, la solution explicite est donnée pour la première fois par les travaux de M. M. Schur [94] et Cohn [16]. (Dans le cas où les coefficients sont réels, *voir* aussi une solution antérieure de M. Petrovitch [88].)

Nous allons indiquer rapidement le principe de la méthode d'Hermite dans le cas du cercle, en suivant l'exposé de M. Fujiwara.

2. La méthode d'Hermite dans le cas du cercle. Les théorèmes de MM. Schur et Cohn. — Considérons le polynome dont les zéros sont symétriques de ceux de $f(x)$ par rapport au cercle unité

$$f^*(x) = x^n \overline{f\left(\frac{1}{\overline{x}}\right)} = \overline{a}_n + \overline{a}_{n-1}x + \ldots + \overline{a}_0 x^n$$

et formons l'expression

$$K(f) = \frac{f(x)f^*(y) - f(y)f^*(x)}{x-y} = \sum_{h,k=0}^{n-1} A_{hk}x^h y^k,$$

on vérifie aisément les relations

$$A_{hk} = A_{kh},$$
$$\overline{A}_{hk} = A_{n-h-1,n-k-1};$$

par suite, en remplaçant, dans $K(f)$, x^h par u_h, y^{n-k-1} par $\overline{u}_k$, et en posant

$$a_{hk} = A_{h,n-1-k},$$

on obtient une *forme d'Hermite*

$$H(f; u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = \sum_{h,k=0}^{n-1} a_{hk}u_h\overline{u}_k$$

associée à f. Le déterminant de H n'est autre, comme on s'en assure aisément, que le *résultant* de $f(x)$ et $f^*(x)$ sous la forme de Bezout.

Cela étant, un calcul sans difficulté permet de vérifier que, si

$$f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

on a

$$H[f; u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}] = \sum_{k=1}^{n} (1 - \alpha_k \bar{\alpha}_k) V_k \bar{V}_k,$$

où les V_k sont des formes linéaires en $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, qui sont indépendantes si, et seulement si $f(x)$ et $f^*(x)$ n'ont pas de racines communes ; d'après la valeur du déterminant de H, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que H soit *de rang n.*

On a donc les théorèmes suivants :

Théorème I (I. Schur [94]). — *La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ ait tous ses zéros intérieurs au cercle unité est que la forme* H *soit définie positive.*

Théorème II (Cohn [16]). — *Si les polynomes $f(x)$ et $f^*(x)$ n'ont pas de zéros communs et si, dans une décomposition en carrés de* H, *π et ν sont les nombres de carrés respectivement positifs et négatifs, $f(x)$ a π zéros intérieurs au cercle-unité et ν zéros extérieurs.* Il n'y a pas de zéros sur la circonférence, puisqu'un tel zéro serait commun à $f(x)$ et $f^*(x)$.

Il est facile de voir que la forme H peut s'écrire [94]

$$\begin{aligned} H[f; u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}] = & \sum_{\lambda=0}^{n-1} |\bar{a}_n u_\lambda + \bar{a}_{n-1} u_{\lambda+1} + \ldots + \bar{a}_{\lambda+1} u_{n-1}|^2 \\ & - \sum_{\lambda=0}^{n-1} |a_0 u_\lambda + a_1 u_{\lambda+1} + \ldots + a_{n-\lambda-1} u_{n-1}|^2, \end{aligned}$$

et, en partant de cette forme, M. Cohn [16] a pu montrer que les déterminants

$$\delta_k = \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{k-1} \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_0 & \ldots & a_{k-2} \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & . & . & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & . & \ldots & a_n & 0 & 0 & \ldots & a_0 \\ \bar{a}_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \ldots & \bar{a}_{n-k+1} \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \bar{a}_n & \ldots & \bar{a}_{n-k+2} \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & . & . & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{a}_{k-1} & \bar{a}_{k-2} & . & \ldots & \bar{a}_0 & 0 & 0 & \ldots & \bar{a}_n \end{vmatrix}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

forment une chaîne de mineurs principaux de H. Lorsque le théorème de Cohn est applicable, c'est-à-dire lorsque $\delta_n \neq 0$, le nombre ν est égal au *nombre de variations* de la suite

$$1, \quad \delta_1, \quad \delta_2, \quad \ldots, \quad \delta_n.$$

En particulier, pour que toutes les racines soient intérieures au cercle unité, il faut et il suffit que tous les δ_k soient positifs.

3. La règle de Cohn. — Le théorème de Cohn ne s'applique pas lorsque $f(x)$ et $f^*(x)$ ont des zéros communs ; mais il est clair que, dans ce cas, on pourra l'appliquer pour obtenir le nombre des zéros intérieurs aux cercles $|x| \leqq 1-\varepsilon$ et $|x| \leqq 1+\varepsilon$, ε étant un nombre positif suffisamment petit; la différence entre les nombres trouvés est égale au nombre des zéros de module *un*.

Pour une équation à coefficients numériques, l'application du théorème de Cohn est malaisée. Il vaut mieux utiliser un algorithme, dû également à M. Cohn [16], qui permet de former, dans tous les cas, à partir de $f(x)$, un polynome $f_1(x)$ de degré moindre, et tel que le nombre de ses zéros intérieurs au cercle unité soit connu en fonction du nombre des zéros de $f(x)$ intérieurs à ce même cercle.

Cette règle s'énonce de la manière suivante :

1° *Si* $|a_0| < |a_n|$, *le polynome* $f_1(x)$ *défini par*

$$xf_1(x) = \bar{a}_n f(x) - a_0 f^*(x)$$

a un zéro de moins que $f(x)$ *à l'intérieur du cercle unité.*

2° *Si* $|a_0| > |a_n|$, *le polynome* $f_1(x)$ *défini par*

$$f_1(x) = \bar{a}_0 f(x) - a_n f^*(x)$$

a autant de zéros que $f(x)$ *à l'intérieur du cercle unité.*

3° *S'il existe un nombre* $k \leqq \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$ *tel que*

$$a_n = \varepsilon\bar{a}_0, \qquad a_{n-1} = \varepsilon\bar{a}_1, \qquad \ldots, \qquad a_{n-k+1} = \varepsilon\bar{a}_{k-1}, \qquad a_{n-k} \neq \varepsilon\bar{a}_k,$$
$$|\varepsilon| = 1,$$

on pose

$$b = \frac{a_{n-k} - \varepsilon\bar{a}_k}{\varepsilon\bar{a}_0} \neq 0, \qquad \gamma = 2\frac{b}{|b|}.$$

et l'on forme le polynome

$$g(x) = (x^k + \gamma) f(x).$$

$g(x)$ a autant de zéros que $f(x)$ à l'intérieur du cercle unité, et le deuxième cas de la règle lui est applicable; on obtient ainsi un polýnome

$$g_1(x) = \bar{\gamma}\bar{a}_0 g(x) - \varepsilon \bar{a}_0 g^*(x)$$

de degré n, ayant autant de zéros que $f(x)$ à l'intérieur du cercle unité, et auquel le premier cas de la règle est applicable.

4° *Si l'on a $a_{n-k} = \varepsilon \bar{a}_k$, quel que soit k, le polynome*

$$f_1(x) = x^{n-1} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

a autant de zéros que $f(x)$ à l'intérieur du cercle unité.

Il est intéressant de remarquer que la règle de Cohn permet également d'obtenir le nombre des zéros de $f(x)$ *sur la circonférence unité* $|x| = 1$. En effet, dans l'application successive de la règle, tous les polynomes que l'on est amené à former ont les mêmes zéros (avec le même degré de multiplicité) sur la circonférence unité, tant que le quatrième cas ne se présente pas. Soit $f_\sigma(x)$ le premier polynome pour lequel ce cas se présente, et soit s son degré. Si α est un de ses zéros, $\frac{1}{\alpha}$ en est un autre, et du même degré de multiplicité; donc, si $f_\sigma(x)$ a l zéros intérieurs au cercle unité, il aura $t = s - 2l$ zéros sur la circonférence, et ces zéros sont aussi ceux de $f(x)$ d'après ce qui précède.

En particulier, on déduit très aisément de la règle de Cohn le théorème suivant [94] :

Théorème III. — *La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ ait tous ses zéros de module* un *est que l'on ait*

$$a_{n-k} = \varepsilon \bar{a}_k, \qquad |\varepsilon| = 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

et que $f'(x)$ ait tous ses zéros intérieurs au cercle unité; ou sur la circonférence.

4. La méthode d'Hermite dans le cas du demi-plan. — Supposons par exemple qu'il s'agisse du demi-plan à gauche de l'axe imaginaire. On procède comme au n° 2, en remplaçant $f^*(x)$ par le polynome $\bar{f}(x)$ dont les zéros sont symétriques de ceux de $f(x)$ par rapport à l'axe imaginaire. On obtient une forme d'Hermite sur laquelle les raisonnements se poursuivent comme au n° 2.

On est ainsi conduit à des théorèmes tout à fait analogues à ceux de Schur et Cohn, et qui se réduisent à ceux de Liénard et Chipart quand on se borne au cas où les a_i sont réels.

5. Le théorème d'Hurwitz. — Par une méthode analogue à celle d'Hermite, Hurwitz, en se bornant au cas où les a_i sont réels, a obtenu la condition pour que tous les zéros aient leur partie réelle négative sous la forme très élégante suivante [49] :

Théorème IV. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les zéros du polynome à coefficients réels*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (a_0 > 0)$$

aient tous leur partie réelle négative, est que les déterminants

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \ldots,\ \Delta_n$$

soient tous positifs, en posant, pour $\lambda > 1$,

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2\lambda-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2\lambda-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & a_{2\lambda-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & a_{2\lambda-4} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & \ldots & a_\lambda \end{vmatrix} \qquad (a_k = 0 \text{ si } k > n).$$

M. Fujiwara a d'ailleurs vérifié, par un calcul direct [36], que les Δ_λ sont identiques, à un facteur positif près (égal à une puissance de a_0), à une chaîne de mineurs principaux de la forme d'Hermite du n° 4.

Signalons encore, à propos du théorème IV, la remarque élémentaire suivante, qui peut être utile : une condition *nécessaire* pour que tous les zéros de $f(x)$ aient leur partie réelle négative, est que tous les coefficients a_i soient positifs (c'est évident pour des polynomes du premier et du second degré, et $f(x)$ est un produit de tels polynomes).

CHAPITRE II.

LA COMPARAISON DES ÉQUATIONS.

1. Les théorèmes du chapitre précédent permettent de résoudre exactement tous les problèmes relatifs aux modules des zéros d'un polynome à coefficients numériques *donnés*. Mais la complexité inextricable des calculs auxquels ils conduisent lorsqu'on veut les appliquer aux divers problèmes qui se posent pour des classes de polynomes dépendant de paramètres variables, laisse subsister l'utilité de résultats moins complets. mais plus maniables.

Il est intéressant à ce point de vue de pouvoir *comparer* la position des zéros de deux polynomes liés par des relations simples entre leurs coefficients : si l'on peut connaître les zéros de l'un d'eux, on aura ainsi des renseignements sur ceux de l'autre.

Citons d'abord dans cet ordre d'idées, une ancienne proposition de Cauchy et sa généralisation due à Pellet [87 *bis*].

THÉORÈME V (Cauchy). — *Tous les zéros du polynome*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

sont contenus dans le cercle $|x| \leqq x_0$, x_0 *étant la racine positive de l'équation*

$$|a_0| + |a_1|x + \ldots + |a_{n-1}|x^{n-1} - |a_n|x^n = 0.$$

THÉORÈME VI (Pellet). — *Si un nombre positif r est tel que*

$$|a_k|r^k > |a_0| + |a_1|r + \ldots + |a_{k-1}|r^{k-1} + |a_{k+1}|r^{k+1} + \ldots + |a_n|r^n,$$

$f(x)$ a exactement k zéros intérieurs au cercle $|x| \leqq r$.

La démonstration de ce dernier théorème résulte immédiatement du théorème de Rouché. Pour qu'il soit applicable, il faut que l'équation

$$|a_0| + |a_1|x + \ldots + |a_{k-1}|x^{k-1} - |a_k|x^k + |a_{k+1}|x^{k+1} + \ldots + |a_n|x^n = 0$$

ait des racines positives; ces racines sont alors au nombre de deux, r_1 et r_2, et si elles sont distinctes, $f(x)$ n'a pas de zéros dans la couronne $r_1 < |x| < r_2$. M. Walsh [112] a étudié les cas où $f(x)$ a des zéros sur la frontière de cette couronne, et aussi le cas où $r_1 = r_2$.

2. Le théorème de Grace. — Une autre série de théorèmes de comparaison découle d'une importante proposition, due à Grace [42] :

THÉORÈME VII. — *Considérons* $2n$ *nombres complexes*, x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n; *soient* s_1, s_2, ..., s_n *les fonctions symétriques élémentaires des* x_k; σ_1, σ_2, ..., σ_n *celles des* y_k. *On suppose que ces nombres vérifient la relation*

$$s_n - \frac{1}{C_n^1} s_{n-1}\sigma_1 + \frac{1}{C_n^2} s_{n-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^n \sigma_n = 0. \tag{1}$$

Dans ces conditions, tout domaine circulaire contenant tous les x_k *contient au moins un des* y_k.

La relation (1) doit ses propriétés remarquables au fait que c'est la *seule* relation symétrique entre les x_k et y_k qui soit *linéaire* par rapport à chacune de ces variables, et *invariante* lorsque l'on effectue une même transformation homographique sur toutes les variables [20].

On connaît de nombreuses démonstrations du théorème VII ([16], [17], [20], [25], [54], [99], [110]). La plupart s'appuient sur la propriété précédente et sur un procédé de récurrence.

On peut compléter le théorème VII en précisant les cas limites, à savoir les cas où, les x_k appartenant à un domaine circulaire (Γ), les y_k appartenant à ce domaine sont tous situés *sur sa frontière* (γ) ([20], [25]). Cette circonstance ne peut se produire que dans les deux cas suivants :

1° Ou bien $(n+1)$ au moins des nombres x_k, y_k sont confondus en un point de (γ); les autres nombres x_k, y_k peuvent alors être pris arbitrairement sans que (1) cesse d'être vérifiée.

2° Ou bien tous les x_k et tous les y_k sont sur (γ); dans ce cas, on peut prendre $(2n-1)$ de ces nombres arbitrairement sur (γ), le dernier est déterminé par (1) et est aussi sur (γ).

Indiquons plusieurs énoncés équivalents du théorème VII, qui peuvent être utiles dans les applications :

Théorème VII *a* (Szegö [99]). — *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux polynomes de degré n*

$$f(x) = a_0 + C_n^1 a_1 x + \ldots + C_n^p a_p x^p + \ldots + a_n x^n,$$
$$g(x) = b_0 + C_n^1 b_1 x + \ldots + C_n^p b_p x^p + \ldots + b_n x^n.$$

Désignons par (K) *un domaine circulaire contenant tous les zéros de $f(x)$; par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les zéros de $g(x)$. Soit $h(x)$ le polynome*

$$h(x) = a_0 b_0 + C_n^1 a_1 b_1 x + \ldots + C_n^p a_p b_p x^p + \ldots + a_n b_n x^n$$

déduit de $f(x)$ et $g(x)$ par composition. *Un zéro quelconque de $h(x)$ est de la forme*

$$\xi = -\beta_\nu . k,$$

où β_ν est un zéro de $g(x)$, k un nombre contenu dans (K).

Théorème VII *b*. — *Soit*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

un polynome dont les coefficients vérifient la relation

$$(2) \qquad l_0 a_n + l_1 a_{n-1} + \ldots + l_n a_0 = 0.$$

Il y a au moins un zéro de $f(x)$ dans chaque domaine circulaire contenant toutes les racines de l'équation

$$l_0 - C_n^1 l_1 z + C_n^2 l_2 z^2 - \ldots + (-1)^n l_n z^n = 0$$

qu'on obtient en écrivant que le polynome $g(x, z) = (x - z)^n$ satisfait à la condition (2).

Théorème VII *c*. — *Si n nombres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifient une relation de la forme*

$$(3) \qquad a_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_n s_n = 0,$$

il existe, dans tout domaine circulaire (K) *contenant $x_1, x_2, \ldots, x_n$, un point x tel que*

$$a_0 + C_n^1 a_1 x + C_n^2 a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

ou encore, n nombres confondus en x et vérifiant la relation (3).

3. Applications du théorème de Grace à la comparaison des équations. — 1° L'équation

$$|a_0| + |a_1| x + \ldots + |a_{n-1}| x^{n-1} - |a_n| x^n = 0 \tag{4}$$

résulte de la *composition* des équations

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0 \tag{5}$$

et

$$\bar{\varepsilon}_0 + C_n^1 \bar{\varepsilon}_1 x + \ldots + C_n^{n-1} \bar{\varepsilon}_{n-1} x^{n-1} - \bar{\varepsilon}_n x^n = 0, \tag{6}$$

où

$$a_k = \varepsilon_k |a_k| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

En appliquant le théorème VII *a* à la racine positive x_0 de (4), on voit que, si r est le plus grand des modules des racines de (5), on a ([16], [7])

$$r \geqq x_0(\sqrt[n]{2} - 1).$$

La limite est d'ailleurs atteinte pour le polynome $(1 + x)^n$.

2° Si l'on compare de même les deux équations

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0, \tag{7}$$

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} = 0, \tag{8}$$

on voit que si ρ est le plus petit des modules des zéros de (7), ρ' le plus petit des modules des zéros de (8), on a [99]

$$\rho \leqq 2\rho'$$

si n est pair,

$$\rho \leqq 2\rho' \cos\frac{\pi}{2n}$$

si n est impair.

L'égalité est atteinte pour le polynome $(1 + x)^n$.

3° Du théorème VII *c*, on déduit en particulier la conséquence suivante [110] :

Théorème VIII. — *Étant donnés n nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, appartenant à un domaine circulaire* (K), *il existe, quel que soit x, un α appartenant à* (K) (*et dépendant de x*) *tel que*

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) = (x - \alpha)^n.$$

On en déduit que si $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + . . + a_n$ est un polynome dont les zéros appartiennent à un domaine circulaire (K), l'équation

$$P(x) - a = 0 \tag{9}$$

peut s'écrire

$$(x - \alpha)^n - a = 0 \qquad [\alpha \text{ dans } (K)]$$

ou

$$x = \alpha + a^{\frac{1}{n}}.$$

Par suite [110], *les racines de l'équation* (9) *sont dans les* n *domaines déduits de* (K) *par les translations* $a^{\frac{1}{n}}$.

En particulier [110] :

Théorème IX. — *Si tous les zéros du polynome*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

sont contenus dans le cercle $|x| \leqq r$, *tous les zéros du polynome* $P(x) - a$ *sont contenus dans le cercle*

$$|x| \leqq r + \left|\frac{a}{a_n}\right|^{\frac{1}{n}}.$$

CHAPITRE III.

LIMITES DIVERSES DES MODULES DES ZÉROS EN FONCTION DES COEFFICIENTS.

1. Les mêmes considérations que celles exposées au début du Chapitre II conduisent à chercher des limites supérieures des modules des zéros des polynomes, s'exprimant simplement à l'aide des coefficients $\left(\text{pour les limites inférieures des modules, il suffit de passer à la transformée en } \frac{1}{x}\right)$. On connaît un grand nombre de telles expressions; nous allons passer en revue les plus importantes.

Auparavant, remarquons que, d'une limite, on peut souvent en déduire d'autres par un des procédés suivants : ou bien poser $x = rz$, appliquer la limite trouvée au polynome $\varphi(z) = f(rz)$ et si, en revenant à la variable x, on obtient une limite fonction de r, donner à r la valeur qui la rend minima; ou bien appliquer la limite au polynome

$$f_1(x) = \mathrm{P}(x) f(x),$$

où $\mathrm{P}(x)$ est un polynome à racines numériques connues et convenablement choisies.

2. La plus ancienne limite connue est due à Cauchy. Si x est un zéro de

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

on a

$$|x| < \mathrm{R}_1 = 1 + \operatorname*{Max}_{k<n} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|.$$

3. Le théorème IX permet d'obtenir une limite supérieure des zéros en l'appliquant successivement aux polynomes

$\mathrm{P}(x)$.	$\mathrm{P}(x) - a$.
$a_n x^2 + a_{n-1} x$	$a_n x^2 + a_{n-1} x + a_{n-2}$
$a_n x^3 + a_{n-1} x^2 + a_{n-2} x$	$a_n x^3 + a_{n-1} x^2 + a_{n-2} x + a_{n-3}$
....	....
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x$	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = f(x)$

ce qui donne la limite [111]

$$\mathrm{R}_2 = \left| \frac{a_0}{a_n} \right|^{\frac{1}{n}} + \left| \frac{a_1}{a_n} \right|^{\frac{1}{n-1}} + \ldots + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right|^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|.$$

Cette limite est *atteinte* quand tous les $a_k (k < n)$ sont nuls, à l'exception d'un seul.

M. Westerfield [115] a obtenu une limite supérieure qui améliore la précédente.

4. Méthode de M. Fujiwara [38]. — D'après le théoréme V, le nombre r est une limite supérieure si l'on a

(10) $$|a_n| r^n \geqq |a_{n-1}| r^{n-1} + \ldots + |a_1| r + |a_0|.$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n nombres *positifs* tel que

(11) $$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} = 1,$$

L'inégalité (10) est certainement vérifiée si

$$|a_n|r^n \geqq \lambda_k |a_{n-k}| r^{n-k},$$

quel que soit k. D'où la limite

$$R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \text{Max}\left[\lambda_k \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|\right]^{\frac{1}{k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

qui est *atteinte* pour

$$a_{n-k} = \frac{a_n R^k}{\lambda_k}.$$

En choisissant de diverses manières les λ_k de façon à satisfaire à la condition (11), on a ainsi des limites supérieures plus ou moins bonnes suivant la valeur des coefficients :

1° $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = n$:

$$R_3 = \text{Max}\left[n\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|\right]^{\frac{1}{k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

limite due à Cauchy.

2° $\lambda_k = \rho^k$. où ρ est la racine positive de l'équation

$$\rho^n = \rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \ldots + \rho + 1; \tag{12}$$

d'où

$$R_4 = \rho\, \text{Max}\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|^{\frac{1}{k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

On a

$$1 < \rho < 2$$

et pour n grand

$$2 - \rho \sim \frac{1}{2^n}.$$

3° $\lambda_k = \dfrac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_{n-k}|}$. La valeur de R se trouve alors aisément :

si $\dfrac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|} \geqq 1$, $\quad R_5 = \dfrac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|}$;

si $\dfrac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|} < 1$, $\quad R_5 = \left(\dfrac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|}\right)^{\frac{1}{n}}$.

5. Avec ce dernier choix des λ_k, on peut encore exprimer plus grossièrement le résultat obtenu en disant que le nombre

$$R_6 = \text{Max}\left(1, \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|}\right)$$

est une limite supérieure. Cette dernière est un cas particulier de la limite générale donnée par MM. Kuniyeda [61] et Montel [76]

$$R(m) = \left[1 + S_m^{\frac{1}{m-1}}\right]^{\frac{m-1}{m}},$$

où $m \geqq 1$ et

$$S_m = \left|\frac{a_0}{a_n}\right|^m + \left|\frac{a_1}{a_n}\right|^m + \ldots + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|^m.$$

On a, en effet, en particulier,

$$R(1) = R_6, \qquad R(\infty) = R_1.$$

Pour $m = 2$, on a la limite ([15], [55])

$$R(2) = R_7 = \sqrt{1 + \frac{|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_{n-1}|^2}{|a_n|^2}}.$$

On peut aussi obtenir la limite R_7 en appliquant le théorème de Jensen; on voit même ainsi que, si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_p$ $(p \leqq n)$ les zéros extérieurs au cercle unité, on a [36]

$$|x_1 x_2 \ldots x_p| \leqq R_7.$$

6. Dans la limite R_4, on peut remplacer le maximum des nombres $\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|^{\frac{1}{k}}$ par celui des nombres $\left|\frac{a_{k-1}}{a_k}\right|$, qui est plus grand [3]. Mais, à l'aide de ces derniers nombres, on peut obtenir une autre limite, de la façon suivante : le nombre r est limite supérieure s'il satisfait *simultanément* aux inégalités

$$(13) \qquad \left\{\begin{array}{l} |a_1| r \geqq |a_0|, \\ |a_2| r^2 \geqq 2 |a_1| r, \\ |a_3| r^3 \geqq 2 |a_2| r^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |a_n| r^n \geqq 2 |a_{n-1}| r^{n-1}; \end{array}\right.$$

car on en déduit

$$|a_n| r^n \geqq |a_{n-1}| r^{n-1} + \ldots + |a_1| r + |a_0|.$$

D'où la limite ([58], [59])

$$R_8 = \text{Max}\left(\left|\frac{a_0}{a_1}\right|, 2\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|\right) \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1)$$

qui est *atteinte* pour le polynome

$$2+x+x^2+\ldots+x^{n-1}-x^n.$$

Pour un polynome lacunaire

$$a_0+a_1x^{n_1}+a_2x^{n_2}+\ldots+a_px^{n_p},$$

on a de même la limite

$$R'_8 = \text{Max}\left[\left|\frac{a_0}{a_{n_1}}\right|^{\frac{1}{n_1}}, \left(2\left|\frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}}\right|\right)^{\frac{1}{n_{k+1}-n_k}}\right] \qquad (k=1, 2, \ldots, p-1).$$

7. Conformément à l'une des méthodes indiquées au n° **1**, on peut obtenir de nouvelles limites en appliquant les précédentes au polynome

$$f_1(x) = (1-x)f(x) = a_0+(a_1-a_0)x+\ldots+(a_n-a_{n-1})x^n-a_nx^{n+1}.$$

En particulier, l'application de la limite R_7 donne la nouvelle limite [116]

$$R_9 = \sqrt{1+\left|\frac{a_0}{a_n}\right|^2+\left|\frac{a_1-a_0}{a_n}\right|^2+\ldots+\left|\frac{a_n-a_{n-1}}{a_n}\right|^2}.$$

En appliquant la limite R_6 à $f_1(x)$, on obtient une nouvelle limite qui a une interprétation géométrique simple : désignons par O, A_0, A_1, ..., A_n les points représentatifs des nombres

$$0, \quad \frac{a_0}{a_n}, \quad \frac{a_1}{a_n}, \quad \ldots, \quad 1.$$

Si L est la longueur de la ligne brisée $OA_0A_1\ldots A_n$, on a la limite supérieure [76]

$$R_{10} = L;$$

M. Marty [74] a donné des limites analogues et plus précises.

8. Un cas particulier intéressant est celui où les a_k sont *réels*, et

$$0 \leqq a_0 \leqq a_1 \leqq \ldots \leqq a_n.$$

Dans ce cas $L = 1$, d'où le théorème d'Eneström-Kakeya ([27], [52]) :

Théorème X. — *Si les coefficients d'un polynome $f(x)$ sont réels et vérifient les inégalités*

$$0 \leqq a_0 \leqq a_1 \leqq \ldots \leqq a_n,$$

tous les zéros de $f(x)$ sont contenus dans le cercle unité $|x| \leqq 1$.

Hurwitz [50] a montré en outre que la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ ait des zéros sur la circonférence $|x| = 1$ est qu'il soit de la forme

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^p)(b_0 + b_1 x^{p+1} + \ldots + b_k x^{k(p+1)}),$$

où $(p+1)$ est un diviseur de $(n+1)$ et

$$0 \leqq b_0 \leqq b_1 \leqq \ldots \leqq b_k.$$

On peut encore donner l'énoncé équivalent au théorème X :

Théorème X *a*. — *Si les coefficients d'un polynome $f(x)$ sont réels et positifs, le nombre*

$$\rho_1 = \mathrm{Max}\left(\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

est une limite supérieure des modules des zéros de $f(x)$.

La démonstration de M. Kakeya est de nature géométrique : il construit la ligne brisée $OB_0B_1 \ldots B_n$ dont le côté $B_{k-1}B_k$ est équipollent au vecteur $a_k x^k$; en portant sur ce côté le segment

$$B_{k-1}C_k = B_{k-2}B_{k-1},$$

on voit aisément par récurrence que les points O et B_k sont de part et d'autre du cercle $B_{k-2}B_{k-1}C_k$ si $|x| > 1$, d'où la conclusion.

A l'aide de la même construction, on établit aisément les extensions suivantes du théorème X*a* [43] :

Théorème XI. — *Si les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont réels et positifs, le nombre*

$$\rho_2 = \mathrm{Max}\left(\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\right)$$

est une limite supérieure des modules des zéros complexes *du polynome*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} - a_n x^n.$$

Hurwitz [50] a donné une démonstration algébrique de ce théorème montrant que la limite ρ_2 est encore valable pour les zéros réels *négatifs* de $f(x)$.

THÉORÈME XII. — *Si les nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont réels et positifs, et si, en posant*

$$M = \operatorname{Max}\left(\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots, \frac{a_{r-1}}{a_r}\right),$$
$$N = \operatorname{Max}\left(\frac{a_{r+1}}{a_{r+2}}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}\right),$$

on a $M < N$, *il n'y a pas de zéros* complexes *du polynome*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r - a_{r+1} x^{r+1} - \ldots - a_n x^n$$

dans la couronne $M < |x| < N$.

D'autres théorèmes analogues au théorème X ont été obtenus en partant de résultats de M. Féjer sur les polynomes trigonométriques ([67], [26], [5], *voir* aussi [105], [93]). Citons entre autres les résultats suivants [5] :

THÉORÈME XIII. — *Étant donné le polynome*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

si ces coefficients sont réels et vérifient les inégalités

$$a_{k-1} < a_{k-2} < \ldots < a_1 < a_0 < 0 < a_n < a_{n-1} < \ldots < a_k$$
$$(0 \leq k \leq n+1; \qquad \text{on pose } a_{-1} = a_{n+2} = 0),$$

il a au plus un zéro sur la circonférence $|x| = 1$, *au point* $x = 1$, *et il a k ou $(k-1)$ zéros à l'intérieur du cercle unité, suivant que* $f(1) > 0$ *ou* $f(1) < 0$.

Ce théorème contient en particulier le théorème X pour $k = 0$.

THÉORÈME XIV. — *Si les coefficients de $f(x)$ sont réels et vérifient les inégalités*

$$a_0 \geq 0, \qquad a_1 \geq 2a_2, \qquad a_2 \geq 2a_3, \qquad \ldots, \qquad a_{n-1} \geq 2a_n > 0,$$

$f(x)$ a au plus un zéro à l'intérieur du cercle unité.

CHAPITRE IV.

LE PROBLÈME DE LANDAU-MONTEL.

1. Jusqu'à présent, les propriétés des polynomes que nous avons exposées provenaient d'hypothèses faites sur *tous* les coefficients supposés connus. On peut se demander s'il existe des propriétés ne dépendant que *d'un certain nombre* de ces coefficients, en particulier s'il existe un certain nombre de zéros bornés en module, lorsqu'on laisse certains coefficients fixes et qu'on fait varier *arbitrairement* les autres.

C'est M. Landau qui a le premier abordé un problème de cette nature, en montrant, à la suite de ses travaux sur le théorème de Picard ([63], [64]) que le polynome

$$f(x) = 1 + x + ax^n + bx^m \qquad (1 < n < m)$$

a toujours un zéro de module inférieur à *une constante absolue*, quels que soient a, b et les entiers n, m. Un peu plus tard, cette proposition était généralisée par M. M. Allardice [2] et Féjer [28]; enfin, M. Montel, dans un Mémoire fondamental [75], a repris la question en montrant nettement dans quels cas elle se pose, et l'a résolue dans toute sa généralité, tout au moins au point de vue *qualitatif* (c'est-à-dire en établissant seulement l'existence des limites dans le cas général).

Nous désignerons donc sous le nom de *problème de Landau-Montel* le problème général qui consiste à *limiter en module un certain nombre de zéros d'un polynome en fonction de certains de ses coefficients*.

2. **La position du problème.** — Étant donné un polynome

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

remarquons d'abord que, si un coefficient a_k est arbitraire, il y a au plus k zéros bornés en module; car, d'après le théorème VI, on peut toujours, quel que soit $r > 0$, choisir a_k de sorte qu'il y ait $(n - k)$ zéros extérieurs au cercle $|x| \leq r$.

Pour que p zéros soient bornés en module, il *faut* donc *fixer les coefficients* $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$.

D'autre part, si tous les autres coefficients sont arbitraires, on peut les faire tendre vers zéro, et par suite faire croître indéfiniment en module $(n-p+1)$ zéros de $f(x)$. Il en est de même si plusieurs de ces coefficients sont donnés égaux à zéro.

Il *faut* donc de plus qu'*un coefficient* $a_{p+h} (h \geqq 0)$ *soit donné et différent de zéro.*

Ces deux conditions nécessaires sont aussi suffisantes [77]

Plus généralement, p zéros sont bornés en module si le polynome doit satisfaire à un système de conditions tel qu'*il ne puisse être vérifié par un polynome de degré inférieur à* p. En particulier, il en est ainsi si $f(x)$ doit prendre des valeurs données en $(p+1)$ points, pourvu que ces valeurs ne soient pas celles d'un polynome de degré $(p-1)$.

On a aussi le théorème suivant, généralisation partielle du théorème VII *b*, et qui comprend en particulier le cas, étudié plus haut, où $(p+1)$ coefficients sont donnés :

Théorème XV. — *Si les coefficients d'un polynome vérifient les relations linéaires*

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} l_0^1 a_0 + l_1^1 a_1 + \ldots + l_n^1 a_n = 0, \\ l_0^2 a_0 + l_1^2 a_1 + \ldots + l_n^2 a_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_0^p a_0 + l_1^p a_1 + \ldots + l_n^p a_n = 0, \end{array} \right.$$

et si le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_0^1 & l_1^1 & \ldots & l_{p-1}^1 \\ l_0^2 & l_1^2 & \ldots & l_{p-1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_0^p & l_1^p & \ldots & l_{p-1}^p \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, le polynome a p *zéros inférieurs en module à un nombre fixe, ne dépendant que des* l_i^j.

3. L'étude des limites. — Revenons au problème de Landau-Montel proprement dit, en supposant donc les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ et a_{p+h} fixés $(h \geqq 0,\ a_{p+h} \neq 0)$.

Comme p zéros sont bornés en module, il existe une *borne inférieure finie* des nombres positifs r tels que le polynome ait q zéros au moins dans le domaine $|x| \leq r$, pour tout entier $q \leq p$; nous désignerons cette borne par r_q. On a évidemment

$$r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_p$$

et tous ces nombres sont des fonctions de $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_{p+h}$ et du degré n du polynome; l'étude de ces fonctions constitue un point essentiel du problème de Landau-Montel.

Un premier pas consiste à chercher des limites supérieures pour r_p, problème dont celui qui fait l'objet du Chapitre III est un cas particulier, pour $p = n$. En utilisant les résultats exposés dans ce chapitre, M. Montel [77] a montré comment on pouvait généraliser les diverses limites obtenues, par l'emploi d'une méthode uniforme : on suppose que $(n-p+1)$ zéros de $f(x)$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-p+1}$ sont extérieurs au cercle de centre l'origine et de rayon r. A l'aide de cette hypothèse, et en effectuant les divisions successives, on peut limiter les coefficients du polynome

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-p})}$$

de degré p, en fonction des coefficients donnés de $f(x)$ et de r.

Par suite, en appliquant à $g(x)$ une des limites du Chapitre III, on a une limite des modules de ses zéros, soit $\varphi(r)$, et il est clair que l'on doit avoir

$$r < \varphi(r),$$

ce qui donne la limite supérieure pour r, qui correspond à celle du Chapitre III d'où l'on est parti.

M. Montel a surtout étudié les cas où $h = 0$ et $h = n - p$.

C'est ainsi qu'au théorème V correspondent les énoncés suivants (dont le premier est dû à M. Van Vleck [107]) :

Théorème XVI. — *Le polynome*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

a p zéros au moins dans le cercle $|x| \leq X_1$, où X_1 est la racine positive de l'équation

$$C_n^p |a_0| + C_{n-1}^{p-1} |a_1| x + \ldots + C_{n-p+1}^1 |a_{p-1}| x^{p-1} - |a_p| x^p = 0,$$

Théorème XVII. — *Le polynome*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

a p zéros au moins dans le cercle $|x| \leqq X_2$, *où* X_2 *est la racine positive de l'équation*

$$C_{n-1}^{p-1}|a_0| + C_{n-2}^{p-2}|a_1|x + \ldots \\ + C_{n-p+1}^{1}|a_{p-2}|x^{p-2} + C_{n-p}^{0}|a_{p-1}|x^{p-1} - |a_n|x^n = 0.$$

Pour $p = n$, les deux équations précédentes se réduisent à celle du théorème V.

Les autres limites du Chapitre III se généralisent de même.

Par d'autres méthodes, M. M. Lipka [66] et Itihara [51] ont également obtenu, dans le cas où $h = n - p$, des bornes supérieures de r_p en fonction de a_0, a_1, ..., a_{p-1}, a_n (*voir* aussi [7]).

4. Parmi les variables dont dépendent les r_q, on peut particulièrement fixer son attention sur le *degré n*. De façon plus précise, supposons le nombre entier h et les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_{p+h}$ donnés; r_q est alors fonction de n seul, et cette fonction croît indéfiniment avec n. Le théorème suivant donne son ordre de croissance :

THÉORÈME XVIII [23]. — *La fonction* $r_q(n)$ *croît* en général *comme* $n^{\frac{1}{p-q+1}}$; *de façon précise, la fonction* $r_q(n)n^{-\frac{1}{p-q+1}}$ *reste comprise entre deux nombres positifs finis et non nuls, indépendants de n.*

Dans cet énoncé, les mots « en général » ont le sens précis suivant : le théorème XVIII s'applique si $a_0, \ldots, a_{p-1}, a_{p+h}$ ne vérifient pas une certaine relation

$$(15) \qquad F_q(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_{p+h}) = 0,$$

où F_q est un polynome en $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_{p+h}$ qu'un calcul régulier d'élimination permet de former. Si au contraire les valeurs données des coefficients vérifient cette relation, $r_q(n)$ croît comme $n^{\frac{1}{l}}$, où l est un entier compris entre 1 et $(p - q + 1)$ et qu'on peut déterminer exactement, en examinant si les coefficients donnés satisfont à certaines relations algébriques analogues à (15).

Dans le cas où $q = p$, la relation (15) n'est jamais vérifiée si $a_{p+h} \neq 0$; r_p croît donc toujours comme n. Cela résulte d'ailleurs aisément du théorème XVI.

5. Les polynomes lacunaires. — En dehors des coefficients a_0 $a_1, \ldots, a_{p-1}, a_{p+h} (a_{p+h} \neq 0)$ on peut encore fixer un certain nombre d'autres coefficients du polynome $f(x)$, en laissant arbitraires les coefficients restants.

Il existe naturellement toujours p zéros bornés en module, et l'on peut définir les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_p$ comme au n° 3. Seulement, ici, ces nombres sont en outre fonctions des coefficients supplémentaires que l'on s'est donnés; ils sont, d'ailleurs, évidemment, au plus égaux aux valeurs qu'ils prennent lorsque ces coefficients sont laissés arbitraires. C'est précisément cette influence des coefficients supplémentaires sur les r_q qu'il est intéressant d'étudier.

Un premier résultat concerne l'ordre de croissance des r_q en fonction de n, en supposant le nombre ν et les indices des coefficients supplémentaires donnés *indépendants de n*. On montre alors [23] que $r_q(n)$ est, *en général*, de l'ordre de $n^{\frac{1}{p-q+\nu+1}}$; « en général » signifiant, comme précédemment, que les coefficients donnés (y compris les ν coefficients supplémentaires) ne vérifient pas une certaine relation algébrique.

Mais les travaux les plus importants se rapportent au cas où tous les coefficients supplémentaires ont la valeur *zéro*, autrement dit, au cas où le polynome $f(x)$ possède des *lacunes*. Un tel polynome peut s'écrire, en mettant en évidence les degrés des termes non nuls,

$$\begin{aligned}(16)\qquad f(x) = {} & a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1} x^{p-1} + a_p x^p + \ldots \\ & + a_{p+h} x^{p+h} + \alpha_1 x^{n_1} + \alpha_2 x^{n_2} + \ldots + \alpha_k x^{n_k}\end{aligned}$$

avec

$$p + h < n_1 < n_2 < \ldots < n_k,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ étant arbitraires, ainsi qu'un certain nombre des coefficients $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{p+h-1}$.

Le résultat fondamental relatif aux polynomes lacunaires est le théorème suivant, dû à M. Montel [75] :

Théorème XIX. — *Pour un polynome $f(x)$ de la forme* (16), *le nombre r_p est borné supérieurement par une fonction des coefficients donnés et du seul nombre k des termes arbitraires, quels que soient les degrés $n_1, n_2, \ldots, n_k$ de ces termes.*

Dans le cas où $h = 0$, M. Biernacki a précisé quantitativement ce théorème en montrant que, si R_0 désigne la borne supérieure des modules des zéros du polynome

$$f_0(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$$

[où $a_0, a_1, \ldots, a_p$ ont les mêmes valeurs que dans $f(x)$], on a [8]

$$(17) \qquad r_p \leqq R_0 \frac{n_1}{n_1 - p} \frac{n_2}{n_2 - p} \cdots \frac{n_k}{n_k - p}.$$

Cette borne supérieure est particulièrement intéressante, car elle permet un passage à la limite qui conduit au résultat suivant relatif aux fonctions entières [8] :

THÉORÈME XX. — *Une fonction entière*

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \ldots + a_k x^{n_k} + \ldots$$

prend une infinité de fois toute valeur finie, si la série $\sum \frac{1}{n_k}$ *est convergente* (autrement dit, la fonction n'a pas de valeur exceptionnelle de Picard).

Des résultats plus précis encore ont été obtenus lorsque les coefficients donnés ont des valeurs particulières. C'est ainsi que, si

$$h = 0, \qquad a_0 = a_p = 1, \qquad a_1 = a_2 = \ldots = a_{p-1} = 0,$$

M. Biernacki [8] a montré que l'on a

$$(18) \qquad r_p \leqq R = \left(\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p} \cdots \frac{n_k}{n_k - p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus, $r_p = R$ lorsque

$$n_1 = p + 1, \qquad n_2 = p + 2, \qquad \ldots, \qquad n_k = p + k.$$

(Il existe d'autres cas où $r_p = R$, mais on ne sait pas quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette égalité ait lieu.)

La démonstration de l'inégalité (18) est longue et assez complexe. Auparavant M. Féjer [28] avait démontré l'inégalité (moins bonne lorsque $p > 1$)

$$(19) \qquad r_1 \leqq R$$

par une méthode très simple s'appuyant sur le théorème de Gauss-Lucas (*voir* plus loin théorème XXX). Cette méthode montre de plus que *le polynome*

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \ldots + a_k x^{n_k}$$

a au moins un zéro dans le cercle $|x| \leqq \rho$, *où*

$$\rho = \text{Min} \left| \frac{n_{r+1}}{n_{r+1} - n_r} \frac{n_{r+2}}{n_{r+2} - n_r} \cdots \frac{n_k}{n_k - n_r} \frac{a_0}{a_r} \right|^{\frac{1}{n_r}} \qquad (r = 1, 2, \ldots, k-1).$$

M. Fekete, à qui est due cette remarque [32], en a déduit un complément intéressant du théorème VII b :

Théorème XXI. — *Si les coefficients du polynome*

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_k x^{n_k}$$

vérifient une relation linéaire

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = 0, \tag{20}$$

où $\lambda_0 \neq 0$, $f(x)$ *a un zéro au moins dans le cercle* $|x| \leqq 2Mk$, *où*

$$M = \text{Max}\left(1, \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right|\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

On a, en effet,

$$|a_0| \leqq M(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k|). \tag{21}$$

Il en résulte que, pour un indice r au moins, on a

$$|a_0| \leqq 2^{n_r} M |a_r|,$$

sans quoi on aurait

$$|a_0| > |a_0| \left(\frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_k}} \right) > M(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k|),$$

contrairement à l'inégalité (21). On en déduit que

$$\left| \frac{a_0}{a_r} \right|^{\frac{1}{n_r}} \leqq 2M,$$

ce qui démontre la proposition, si l'on remarque que l'on a

$$\left(\frac{n_{r+1}}{n_{r+1} - n_r} \frac{n_{r+2}}{n_{r+2} - n_r} \cdots \frac{n_k}{n_k - n_r} \right)^{\frac{1}{n_r}}$$
$$\leqq \left(\frac{(n_r + 1)(n_r + 2) \ldots (n_r + k - r)}{1 . 2 \ldots (k - r)} \right)^{\frac{1}{n_r}} \leqq k.$$

6. La recherche des limites exactes. — La détermination exacte de r_1, r_2, ..., r_p est un problème difficile qui n'est résolu que dans un petit nombre de cas; nous en avons rencontré un ci-dessus. En théorie, on pourrait considérer le problème de la recherche de r_q comme résolu si l'on pouvait déterminer un polynome pour lequel la limite est *atteinte*, c'est-à-dire tel que, pour tout nombre $r < r_q$, le cercle $|x| \leqq r$ contienne au plus $(q-1)$ zéros du polynome.

On peut utiliser, pour la recherche de ces polynomes « extrémaux », un théorème dû à M. Biernacki [8] :

THÉORÈME XXII. — *Si m est le nombre des coefficients arbitraires des polynomes considérés, un polynome extrémal a au moins $(m+1)$ zéros de module r_q, à moins que son terme de plus haut degré ne soit nul.*

En s'appuyant sur ce résultat, on peut [18], dans certains cas particuliers, calculer exactement les valeurs des r_q.

C'est ainsi que, pour le polynome

$$f(x) = 1 + x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n, \tag{I}$$

où les a_k sont arbitraires pour $k \geqq 3$, on sait (*voir* plus haut) que

$$r_2 = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} = \mathrm{R}.$$

De plus [18], on a

$$r_1 = \sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Cette valeur de r_1 ne change pas quand on assujettit un nombre quelconque de coefficients a_k d'indices *impairs* à être nuls (il n'en est pas de même de la valeur de r_2 qui décroît en général).

Pour le polynome

$$f(x) = 1 + x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-2} x^{n-2} + a_n x^n, \tag{II}$$

on a

$$r_2 = \sqrt{\frac{n(n-3)}{2}} = \mathrm{R}$$

et

$$r_1 = \sqrt{\frac{n}{2}}$$

si n est *pair* (d'après ce qui précède);

$$r_1 = \sqrt{\frac{n(n-3)}{2(n-1)}}$$

si n est *impair*.

On voit donc intervenir les *propriétés arithmétiques* des degrés des termes du polynome. L'étude du polynome

$$\text{(III)} \qquad f(x) = 1 + x + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

en fournit un autre exemple. On sait [15] que, dans ce cas,

$$r_1 \leqq \sqrt{n}.$$

Or, on ne peut avoir $r_1 = \sqrt{n}$ que si n est *carré parfait*.

Ces exemples montrent combien l'étude des r_q, à peine ébauchée jusqu'ici, présente de complexité : il ne faut sans doute pas en espérer de résultats simples et précis dans des cas très généraux.

CHAPITRE V.

LES ARGUMENTS DES ZÉROS.

1. Il n'existe qu'un très petit nombre de travaux concernant les relations entre les coefficients d'un polynome

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

et les arguments de ses zéros, lorsqu'on ne fait pas d'hypothèse particulière sur ses coefficients.

Citons d'abord une remarque très simple de M. Takahashi [103] qui donne une condition *nécessaire* pour que *tous* les zéros x_1, x_2, $\ldots$, x_n de $f(x)$ soient dans un angle A de sommet l'origine et d'ouverture $\alpha \leqq \pi$. On a

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = -\frac{a_1}{a_0};$$

donc le point $-\frac{a_1}{a_0}$ se trouve dans l'angle A′, symétrique de A par rapport à l'axe réel; ou encore, le point $-\frac{a_0}{a_1}$ est dans l'angle A. Appliquant maintenant la même remarque aux dérivées successives de $f(x)$, dont les zéros sont aussi dans A, d'après le théorème de Gauss-Lucas (*voir* plus loin, théorème XXX), on a le

THÉORÈME XXIII. — *Si tous les zéros de $f(x)$ sont dans un angle A de sommet l'origine et d'ouverture $\alpha \leqq \pi$, tous les points $-\frac{a_i}{a_{i+1}}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ sont aussi dans* A.

2. M. Kempner [56] a cherché, de son côté, à déterminer des angles ne contenant *aucun* zéro de $f(x)$, en s'appuyant sur la remarque suivante : si les points $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont dans un angle de sommet l'origine et d'ouverture $\alpha < \pi$, $f(x)$ ne peut avoir de zéro réel et positif (*voir* plus loin, Chap. X, n° 1). On en déduit que $f(x)$ ne peut avoir de zéros d'argument φ si les points

$$a_0, \quad a_1 e^{i\varphi}, \quad a_2 e^{2i\varphi}, \quad \ldots, \quad a_n e^{ni\varphi}$$

sont dans un angle de sommet l'origine et d'ouverture $\alpha < \pi$. Le problème consiste à chercher des valeurs de φ possédant cette propriété, les arguments de a_i étant donnés.

Pour les polynomes à un petit nombre de termes, cette méthode réussit parfois. Mais déjà pour le polynome

$$f(x) = 1 - x + x^2 + x^3 + x^4,$$

il n'existe aucune valeur de φ ayant la propriété voulue.

3. Le résultat le plus remarquable obtenu jusqu'ici sur les arguments des zéros fournit une limite du nombre des zéros de $f(x)$ *situés sur une droite passant par l'origine*, en fonction des *modules* des coefficients. Due à M. E. Schmidt [92] et perfectionnée par MM. Schur [96] et Szegö [101], cette proposition s'énonce de la manière suivante :

THÉORÈME XXIV. — *Si l'on pose*

$$P = \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|}{\sqrt{|a_0 a_n|}}$$

et si r désigne le nombre des zéros de $f(x)$ situés sur une droite quelconque passant par l'origine, on a

$$r^2 - 2r < 4n \log P,$$

et si $n > 6$

$$r^2 < 4n \log P.$$

De plus, au second membre de ces inégalités, le nombre 4 *ne peut être remplacé par un nombre plus petit.*

Par une analyse délicate, M. Schur [96] a déterminé le minimum exact de la quantité

$$Q = \frac{|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2}{|a_0 a_n|}$$

lorsqu'on suppose que $f(x)$ a exactement r zéros réels (on peut évidemment supposer que la droite de l'énoncé est l'axe réel). Cette quantité est d'ailleurs liée à P par les inégalités

$$Q \leqq P^2 \leqq (n+1)Q.$$

Par la suite, M. Szegö [101] a obtenu à son tour le minimum exact de P dans les mêmes conditions.

CHAPITRE VI.

LES POLYNOMES A TROIS ET QUATRE TERMES.

1. A la suite des recherches de M. Landau, rappelées au début du Chapitre IV, on a étudié de façon approfondie la répartition des zéros des polynomes à trois et quatre termes, tant en module qu'en argument.

Pour l'équation trinome, les résultats obtenus sont aussi complets que possibles ; ils sont, au contraire, très fragmentaires pour l'équation quadrinome.

2. **L'équation trinome.** — On peut toujours, par des transformations simples, supposer l'équation ramenée à la forme

$$1 + x^p + a x^n = 0, \tag{22}$$

n et p étant premiers entre eux. On posera

$$a = \rho e^{i\alpha}.$$

La séparation des modules des racines se fait ici, sans avoir recours au théorème de Cohn, au moyen d'une règle simple due à M. Bohl [12], et qui donne le nombre $N(u)$ des racines de (22) de module *inférieur* à u, quel que soit $u > 0$:

1° *Si l'on peut former un triangle dont les trois côtés ont respectivement pour longueurs* 1, u^p, ρu^n, *et si l'on désigne par* w_1 *et* w_2 *les angles opposés aux côtés* u^p *et* ρu^n *respectivement*, $N(u)$ *est égal au nombre des entiers intérieurs à l'intervalle ouvert* (λ, μ) *où*

$$\lambda = \frac{n\pi - p(\alpha+\pi)}{2\pi} - \frac{nw_1 + pw_2}{2\pi},$$

$$\mu = \frac{n\pi - p(\alpha+\pi)}{2\pi} + \frac{nw_1 + pw_2}{2\pi}.$$

2° *Si*

$$1 \geqq u^p + \rho u^n, \qquad N = 0.$$

Si

$$u^p > 1 + \rho u^n, \qquad N = p.$$

Si

$$\rho u^n > 1 + u^p, \qquad N = n.$$

(application du théorème VI).

3° *Si*

$$u^p = 1 + \rho u^n,$$

$N(u) = p$, *sauf si l'on a à la fois*

$$u^{n-p} \leqq \frac{p}{\rho n}$$

et $n - \frac{p\alpha}{\pi}$ *égal à un entier pair; dans ce cas*, $N(u) = p - 1$.

Si

$$\rho u^n = 1 + u^p,$$

$N(u) = n$, *sauf si* $p\left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\right)$ *est un entier pair; dans ce cas*, $N(u) = n - 1$.

Cette règle permet, en particulier, de résoudre complètement le problème de Landau-Montel pour l'équation (22) (où l'on suppose a arbitraire), en calculant exactement les r_q. Ce calcul a été fait d'abord par M. Herglotz [46], et repris ensuite par M. Biernacki [8], par une méthode différente. Les résultats sont les suivants :

THÉORÈME XXV. — *Si*

$$1 \leqq q \leqq \mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right), \qquad r_q = 1.$$

Si

$$\mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right) < q < p,$$

$$r_q = \mathrm{Max}\left[\frac{\sin\left(n\psi - \frac{q\pi}{p}\right)}{\sin\left[(n-p)\psi - \frac{q\pi}{p}\right]}\right]^{\frac{1}{p}}$$

pour $0 \leqq \psi \leqq \frac{q\pi}{np}$.

Enfin,

$$r_p = \left(\frac{n}{n-p}\right)^{\frac{1}{p}} = \mathrm{R}.$$

Les méthodes de MM. Herglotz et Biernacki permettent aussi d'étudier la répartition des arguments des racines de (22). On peut ainsi établir le

THÉORÈME XXVI. — *Il y a toujours une racine au moins dans chacun des p secteurs circulaires de rayon* $\mathrm{R} = \left(\frac{n}{n-p}\right)^{\frac{1}{p}}$, *d'ouverture* $\frac{2\pi}{n}$, *et ayant pour bissectrices les p demi-droites d'argument* $\frac{(2k+1)\pi}{p}$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$.

On montre aussi sans peine que *tout angle de sommet l'origine et d'ouverture* $\frac{4\pi}{n}$ *contient une racine au moins* [84].

M. Biernacki a étudié les problèmes analogues pour l'équation trinome mise sous la forme

$$(23) \qquad 1 + ax^p + x^n = 0 \qquad (n > p),$$

où a est arbitraire. En ce qui concerne le problème de Landau-Montel, il faut distinguer ici deux cas :

1° Si $n \geqq 2p$,

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_p = 1;$$

2° Si $p < n < 2p$,

$$r_p = \left(\frac{p}{n-p}\right)^{\frac{1}{n}};$$

$r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ peuvent se calculer par les mêmes méthodes qu'au théorème XXV. On a $r_q = 1$ si $q \leqq n - p$.

3. **L'équation quadrinome.** — Pour l'équation quadrinome, mise sous la forme canonique

$$(24) \qquad 1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} = 0,$$

où $p < n_1 < n_2$ (ces trois nombres étant premiers dans leur ensemble), on a surtout étudié le problème de Landau-Montel (calcul des r_q) et la détermination de secteurs circulaires contenant toujours une racine, lorsque a_1 et a_2 varient arbitrairement.

Les valeurs des r_q ne sont connues que dans un petit nombre de cas particuliers. En dehors du cas où il n'y a pas de lacunes

$$(n_1 = p + 1, \quad n_2 = p + 2),$$

on sait, par exemple [18], que

$$r_p = \mathrm{R} = \left(\frac{n_1}{n_1 - p}\,\frac{n_2}{n_2 - p}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{pour} \quad p = 1, \qquad n_2 = n_1 + 1;$$

mais, même pour l'équation quadrinome, on ne connaît pas les conditions nécessaires et suffisantes pour que $r_p = \mathrm{R}$.

L'étude des secteurs circulaires contenant toujours une racine est plus avancée, grâce aux travaux de M. Biernacki [8]. Citons le principal résultat, remarquable par sa précision, auquel l'ont conduit ses recherches :

Théorème XXVII. — *Si $n_2 \geqq \frac{3n_1}{2}$, l'équation* (24) *a une racine au moins dans chacun des p secteurs circulaires de rayon* R, *d'ouverture $\frac{2\pi}{n_1}$, et ayant pour bissectrices les p demi-droites d'argument $\frac{(2k+1)\pi}{p}$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$. De plus, dans cet énoncé, le rayon et l'ouverture des secteurs ne peuvent être remplacés par des nombres plus petits.*

Lorsque $4p \leqq n_2 < \frac{3n_1}{2}$, cet énoncé subsiste encore, en remplaçant les secteurs par d'autres ayant mêmes bissectrices et même rayon, mais d'ouverture $\frac{3\pi}{2n_2}$; mais ici, cette ouverture n'est pas la plus petite possible (le rayon R reste toujours le plus petit possible).

4. On s'est aussi demandé si, de même que pour l'équation trinome lorsque $p > 1$, il existe des cas où, pour l'équation (24), un certain nombre des r_q sont *égaux à un;* ou encore, si le cercle $|x| \leqq 1$ contient toujours des racines de (24), quels que soient a_1 et a_2, et quel est le nombre minimum N de ces racines.

Un premier résultat est dû à M. Biernacki [8], qui a montré que $r_1 = 1$ si $n_2 < 2p$.

M. Dieudonné [18] a repris la question par une autre méthode basée sur le principe de l'argument. Ses recherches aboutissent aux résultats suivants :

L'équation (24) étant mise sous la forme

$$1 + x^{2q} + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} = 0, \tag{25}$$

avec q, n_1, n_2 premiers dans leur ensemble [ce qu'on peut toujours faire en posant au besoin, dans (24), $x = z^2$], on pose

$$\rho = \left|\frac{a_2}{a_1}\right|,$$

et l'on est amené à distinguer deux cas :

1° $\rho \geqq 1$ ou $\rho \leqq \dfrac{n_1 - q}{n_2 - q}$. On peut alors déterminer, en théorie, une borne inférieure h, effectivement atteinte, du nombre de racines de (25) intérieures au cercle unité, par un procédé de caractère géométrique. On a toujours $h \geqq 1$, sauf si n_1 ou n_2 est multiple de $2q$; dans certains cas particuliers, on peut avoir effectivement la valeur de h; par exemple, *si n_1 et n_2 sont impairs*,

$$h = q.$$

Si $(n_2 - n_1)$ est multiple de q,

$$h = q,$$

si q est *pair*;

$$h = q - 1,$$

si q est *impair*, et l'un au moins des n_i *pair*.

2° *Cas général.* — A l'aide du nombre h précédent, on peut obtenir une limite inférieure pour N. Par exemple, si $h > n_2 - n_1$, on a

$$N \geqq h - (n_2 - n_1).$$

De façon plus particulière, *si n_1 et n_2 sont impairs et si $2q > n_2 - n_1$, on a*

$$N \geqq q - \frac{n_2 - n_1}{2}.$$

Quand on n'est pas dans un de ces deux cas, on peut encore, par des considérations plus compliquées, où les propriétés arithmétiques des degrés jouent un rôle prépondérant, arriver parfois à obtenir une limite inférieure positive pour N. Par exemple, pour l'équation

$$1 + x^{2q} + a_1 x^{q+m} + a_2 x^{q+2m} = 0,$$

où q est impair, $m > 2q$ pair et premier avec q, on a

$$h = q < \frac{n_2 - n_1}{2} = \frac{m}{2}.$$

On peut cependant montrer que, dans ce cas,

$$N \geqq \frac{5q}{6} - 1.$$

5. Notons enfin que, pour l'équation quadrinome particulière,

$$1 + ax^p + x^{2p} + bx^n = 0 \qquad (n > 2p), \tag{26}$$

la même méthode permet d'obtenir *exactement*, en fonction de a et b, le nombre de racines intérieures au cercle $|x| \leqq 1$ [22]. En particulier, on peut déduire des résultats obtenus *que l'équation* (26) *a toujours* $(p-1)$ *racines au moins dans le cercle* $|x| \leqq 1$, *quels que soient* a *et* b.

DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DES POLYNOMES.

CHAPITRE VII.

LE THÉORÈME DE GAUSS-LUCAS.

La donnée des zéros d'un polynome $f(x)$ détermine celui-ci à un facteur près et, par suite, également toutes ses dérivées. Les zéros d'une dérivée quelconque de $f(x)$ sont donc des fonctions bien déterminées des zéros de $f(x)$; l'étude de cette dépendance va être l'objet de plusieurs des Chapitres qui vont suivre.

1. La source commune d'une grande partie des résultats connus sur les zéros de la dérivée d'un polynome réside dans la forme remarquablement simple de la *dérivée logarithmique*

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \ldots + \frac{1}{x - x_n} \tag{27}$$

si

$$f(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Soit x un point quelconque du plan, différent des x_i; posons

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \lambda \qquad (\lambda \text{ fini}).$$

Regardons désormais x et λ comme *fixes*, et considérons la relation en $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f'(x) - \lambda f(x) = 0 \tag{28}$$

symétrique par rapport aux x_i et linéaire par rapport à chacune de ces variables. Formons l'équation en z obtenue en faisant dans (28)

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = z,$$

ce qui donne

$$(x - z)^{n-1}\,[n - \lambda(x - z)] = 0.$$

Appliquant le théorème VII et ses compléments aux deux systèmes de points formés, d'une part par les racines de cette équation, de l'autre par les points x_1, x_2, ..., x_n, on a la proposition, due à Laguerre [62] :

THÉORÈME XXVIII. — *x étant un point quelconque du plan, différent des zéros de $f(x)$, on considère le point z défini par l'équation*

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x - z}. \tag{29}$$

Soit (C) *une circonférence quelconque passant par x et z; ou bien tous les zéros de $f(x)$ sont sur* (C), *ou bien il existe un zéro au moins dans chacun des deux domaines circulaires ouverts limités par* (C).

De façon abrégée, on peut dire que (C) *sépare* les zéros de $f(x)$.

On en déduit immédiatement le théorème fondamental suivant [110] :

THÉORÈME XXIX. — *Si tous les zéros de $f(x)$ appartiennent à un domaine circulaire* (K), *à tout point x extérieur à* (K) *correspond un point z de* (K) *vérifiant la relation* (29).

La proposition est encore vraie si x est sur la frontière de (K) et différent des x_i. D'autre part, z est toujours *intérieur* à (K), sauf dans les deux cas suivants :

1° Tous les x_i confondus en un point de la frontière de (K), z est aussi en ce point quel que soit x ;

2° Tous les x_i étant également sur la frontière de (K), mais non confondus en un seul point, x étant également sur la frontière de (K).

3. Considérons, en particulier, dans le théorème XXIX, le cas où (K) est un *demi-plan; z* est toujours à *distance finie*, quel que soit x extérieur à (K) ou sur la frontière et différent des x_i, sauf dans le cas où tous les x_i seraient sur la frontière de (K) et non confondus en un seul point. Sauf dans ce cas spécial, on a donc $f'(x) \neq 0$: on en déduit immédiatement le célèbre théorème, démontré d'abord par Gauss [41], puis retrouvé indépendamment par Lucas [68] :

THÉORÈME XXX. — *Si* (P) *désigne le plus petit polygone convexe tel que tous les zéros de* $f(x)$ *soient à l'intérieur ou sur le contour de* (P), *un zéro quelconque de* $f'(x)$ *est situé à l'intérieur de* (P) *ou sur son contour et, dans ce dernier cas, il est confondu avec un zéro (multiple) de* $f(x)$.

Le seul cas d'exception est celui où (P) *se réduit à un segment de droite.*

Avant d'indiquer les diverses extensions de ce théorème, signalons encore une conséquence importante du théorème XXVIII : supposons que tous les x_i soient à l'intérieur ou sur les côtés d'un angle A d'ouverture $\alpha \leqq \pi$ et de sommet x (différent des x_i) : *le point* z *correspondant à* x *par la relation* (29) *est aussi dans l'angle* A.

4. Les résultats précédents ne donnent aucun renseignement sur la disposition relative des zéros de $f(x)$ et de ceux de $f'(x)$ à l'*intérieur* de (P). En étudiant de façon plus approfondie la relation $\frac{f'(x)}{f(x)} = 0$, M. J. v. Sz. Nagy [82] est parvenu à apporter d'intéressantes précisions au théorème XXX.

Nous avons vu que $f'(x)$ ne peut avoir de zéros sur un côté de (P) qu'en un zéro de $f(x)$: si on laisse fixes les zéros de $f(x)$ qui sont sur le contour de (P) et qu'on fasse varier ceux qui sont à l'intérieur, un zéro de $f'(x)$ ne peut approcher d'un côté de (P) que si un zéro de $f(x)$ en approche également. Cette relation qualitative est précisée par le théorème suivant :

THÉORÈME XXXI. — *Soient* x_1, x_2, *deux zéros simples de* $f(x)$, *sommets consécutifs de* (P) *et tels que le côté* x_1x_2 *ne contienne pas d'autre zéro de* $f(x)$. *Soit* φ_1 *la valeur du plus grand angle de sommet* x_1, *dont un des côtés est* x_1x_2, *dont l'autre est dirigé vers l'intérieur de* (P), *et qui ne contient pas de zéro de* $f(x)$ *à son intérieur; soit* φ_2 *l'angle analogue de sommet* x_2. *Enfin, soit* x_3 *un zéro de* $f(x)$ *tel que le triangle* $x_1x_2x_3$ *ne contienne pas d'autre zéro de* $f(x)$ *à son intérieur; soient* x_{12} *le milieu de* x_1x_2, x' *le milieu de* $x_3\,x_{12}$, δ_1, δ_2 *les angles* $\widehat{x_3x_1x'}$, $\widehat{x_3x_2x'}$ *respectivement. Si l'on désigne par* φ *le plus petit des angles* φ_1, φ_2, δ_1, δ_2, *l'angle sous lequel on voit le segment $x_1 x_2$ d'un zéro quelconque de $f'(x)$ est inférieur à $\pi - \varphi$.*

De même, il est clair que si tous les zéros de $f(x)$, sauf un seul, x_1, varient en restant à une distance de x_1 supérieure à un nombre fixe, aucun zéro variable de $f'(x)$ ne peut tendre vers x_1. Ce fait est précisé par le

Théorème XXXII. — *Soit* (D) *le domaine formé par la réunion de tous les cercles passant par un zéro x_1 de $f(x)$ et ne contenant aucun autre zéro à leur intérieur; soit p la multiplicité de x_1 et soit s le nombre maximum des zéros de $f(x)$ qui se trouvent d'un même côté d'une droite quelconque passant par x_1. Le domaine* (D') *déduit de* (D) *par une homothétie de centre x_1 et de rapport $\frac{p}{s+p}$ ne contient aucun zéro de $f'(x)$ différent de x_1.*

Le lecteur trouvera dans le Mémoire de M. J. v. Sz. Nagy d'autres théorèmes analogues.

5. Les théorèmes de M. Walsh. — Une autre série d'extensions du théorème de Gauss-Lucas provient de l'étude des zéros des dérivées du produit de plusieurs polynomes, dont les zéros sont dans des domaines circulaires connus.

De façon précise, supposons que le polynome $f(x)$, de degré n, soit le produit de deux polynomes, $f_1(x)$ et $f_2(x)$, de degrés respectifs p et q, les zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de $f_1(x)$ appartenant à un domaine circulaire (K_1), les zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ de $f_2(x)$ à un domaine circulaire (K_2).

Soit x_0 un zéro de la dérivée $f^{(k)}(x)$. La relation

$$f^{(k)}(x_0) = 0,$$

où on laisse x_0 et les β_i fixes, est symétrique par rapport aux α_i et linéaire par rapport à chacun d'eux; d'après le théorème VII *c*, il existe donc un point α appartenant à (K_1) et tel que la dérivée $k^{\text{ième}}$ du polynome

$$g(x) = (x - \alpha)^p f_2(x)$$

s'annule au point x_0. En faisant le même raisonnement sur la relation

$$g^{(k)}(x) = 0,$$

où on laisse fixes x_0 et α, on voit qu'il existe un point β appartenant à (K_2) et tel que la dérivée $k^{\text{ième}}$ du polynome

$$h(x) = (x-\alpha)^p (x-\beta)^q \tag{30}$$

s'annule en x_0.

Si donc on désigne par (Δ) le domaine décrit par les zéros de $h^{(k)}(x)$ lorsque α et β décrivent respectivement (K_1) et (K_2) indépendamment l'un de l'autre, on voit que *tous les zéros de $f^{(k)}(x)$ sont dans* (Δ) [110].

En particulier si $k=1$ et si (K_1) et (K_2) sont les *intérieurs* de deux cercles, on a le résultat suivant, dû comme le précédent à M. Walsh [109] :

Théorème XXXIII. — *Si p zéros de $f(x)$ sont dans un cercle* (K_1) *de centre λ_1, de rayon r_1, et les $q = n - p$ zéros restants dans un cercle* (K_2) *de centre λ_2, de rayon r_2, les zéros de $f'(x)$ sont, soit dans* (K_1), *soit dans* (K_2), *soit dans le cercle* (K) *de centre* $\lambda = \dfrac{p\lambda_2 + q\lambda_1}{p+q}$ *et de rayon* $r = \dfrac{pr_2 + qr_1}{p+q}$.

Ce dernier cercle est tangent aux tangentes extérieures communes à (K_1) et (K_2).

On voit de plus que, *si* (K), (K_1), (K_2) *n'ont aucun point commun deux à deux, $f'(x)$ a exactement $(p-1)$ zéros dans* (K_1), $(q-1)$ *dans* (K_2) *et un seul dans* (K). En effet, le nombre des zéros de $f'(x)$ dans chacun de ces domaines reste alors constant quand les zéros de $f(x)$ varient arbitrairement, de façon continue, à l'intérieur de (K_1) et (K_2); il suffit de supposer que $f(x)$ a la forme (30) pour en tirer la conclusion cherchée.

Un autre cas intéressant est celui où (K_1) est l'intérieur du cercle de centre l'origine et de rayon r, (K_2) l'extérieur du cercle de centre l'origine et de rayon $R \geqq \dfrac{2q+p}{p} r$. (Δ) se compose alors de (K_1) et du domaine circulaire (K) formé par l'extérieur du cercle de centre l'origine et de rayon $\rho = \dfrac{pR - qr}{p+q}$; $f'(x)$ a $(p-1)$ zéros dans (K_1) et $(q-1)$ dans (K). Si l'on supposait $R < \dfrac{2q+p}{p}$, (Δ) serait le plan tout entier.

Si l'on suppose maintenant $k > 1$, (K_1) et (K_2) étant toujours les intérieurs de deux cercles, il est facile de voir que le domaine (Δ) se compose, en dehors de (K_1) et (K_2), de k cercles analogues au cercle (K) du théorème XXXIII.

On peut généraliser sans difficulté au cas où $f(x)$ est le produit de m polynomes $(m > 2)$ dont chacun a ses zéros dans un domaine circulaire donné, mais le domaine de variation des zéros de $f^{(k)}(x)$ est alors moins simple ([109], [69]).

CHAPITRE VIII.

THÉORÈMES DIVERS SUR LES DÉRIVÉES D'UN POLYNOME.

1. Zéros des combinaisons linéaires d'un polynome et de ses dérivées. — Le théorème de Gauss-Lucas n'est qu'un cas particulier de résultats relatifs aux zéros d'un polynome de la forme

$$\varphi_k(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \ldots + a_k f^{(k)}(x), \tag{31}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_k$, sont des constantes, et où l'on suppose connus les zéros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $f(x)$. Soit (K) un domaine circulaire contenant les x_i; l'application du théorème VII*c* à la relation $\varphi_k(x) = 0$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, permet d'établir le

Théorème XXXIV ([99], [110], [54]). — *Les zéros de $\varphi_k(x)$ sont contenus dans le domaine (Δ) décrit par les zéros du polynome*

$$\begin{aligned} a_0(x-z)^n + na_1(x-z)^{n-1} + \ldots \\ + n(n-1)\ldots(n-k+1)a_k(x-z)^{n-k} \end{aligned} \tag{32}$$

quand z décrit (K).

Ce domaine est formé de (K) et des k domaines circulaires (K_i) $(i = 1, 2, \ldots, k)$ déduits de (K) par les k translations égales aux racines de l'équation

$$a_0 x^k + na_1 x^{k-1} + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)a_k = 0. \tag{33}$$

De plus, par le même procédé qu'au n° 5 du chapitre précédent, on voit que *si p des domaines circulaires (K_i) forment un domaine connexe (D) n'ayant aucun point commun avec (K) ni avec les $(k-p)$ domaines (K_i) restants, $\varphi_k(x)$ a exactement p*

zéros dans (D). *Si q domaines circulaires* (K_i) *forment avec* (K) *un domaine connexe* (D′) *n'ayant aucun point commun avec les domaines* (K_i) *restants*, $\varphi_k(x)$ *a exactement* $(n-k+q)$ *zéros dans* (D′).

En appliquant le théorème XXXIV au polynome

$$\varphi_1(x)=f(x)-c_1f'(x),$$

dans le cas où (K) est un demi-plan, on voit ([102], [37], [6]) que *les zéros de* $\varphi_1(x)$ *sont à l'intérieur ou sur le contour du plus petit polygone convexe* (Π_1) *contenant les* $2n$ *points* x_i, x_i+nc_1 $(i=1, 2, \ldots, n)$. Il est facile de voir que le cas où $\varphi_1(x)$ a un zéro ξ sur le contour de (Π_1) ne peut se produire que si ξ est un zéro multiple de $f(x)$, ou si (Π_1) se réduit à un segment de droite.

On peut étendre ce théorème, par récurrence, au polynome $\varphi_k(x)$ général [6].

2. La démonstration et l'énoncé du théorème XXXIV subsistent sans modification lorsqu'on suppose que les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_k$, qui figurent dans $\varphi_k(x)$ *sont eux-mêmes des polynomes en* x. Seulement, le domaine de variation des zéros de (37), quand z décrit (K), n'est plus en relation aussi simple avec (K). Dans le cas particulier où $a_q=\lambda_q(x-\alpha)^q$ $(q=0, 1, \ldots, k)$ les λ_q étant des constantes *réelles* soumises à certaines restrictions, on peut encore former simplement des polygones convexes contenant tous les zéros de $\varphi_k(x)$ [6].

3. M. Biernacki [8] a été amené à poser une autre catégorie de problèmes se rattachant aux précédents : *les coefficients a_q étant des polynomes dépendant d'un certain nombre de paramètres arbitraires, peut-on délimiter des régions contenant toujours un certain nombre de zéros de* $\varphi_k(x)$, *quels que soient ces paramètres et quels que soient les zéros de* $f(x)$ *dans* (K)?

On n'a envisagé jusqu'ici que des cas particuliers de ce problème : le mieux étudié est celui où l'on a

$$\varphi(x)=(x-a)f'(x)+\mu f(x), \tag{34}$$

a étant un paramètre variable, μ un nombre fixe ($\mu\neq 0$, $\mu\neq -n$), et où l'on suppose que le domaine (K) est le cercle unité $|x|\leq 1$.

Les zéros de ce polynome sont dans le lieu décrit par les racines de l'équation

$$(x-z)^{n-1}[n(x-a)+\mu(x-z)]=0,$$

lorsque z décrit (K) : on en déduit aisément que $(n-1)$ *zéros de* $\varphi(x)$ *sont bornés en module, quel que soit* a.

4. Désignons par R la borne inférieure des nombres positifs r tels que $\varphi(x)$ ait toujours $(n-1)$ zéros dans le cercle $|x|\leqq r$. On a évidemment $R\geqq 1$.

M. Dieudonné [23] a montré comment on peut avoir une limite supérieure de R, et même dans certains cas la valeur exacte de R, en utilisant le théorème XXIX et la théorie des fonctions bornées de la manière suivante :

Si x est un point extérieur à (K), on a, d'après le théorème XXIX,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{n}{x-\zeta(x)},$$

où $|\zeta(x)|\leqq 1$. Si x est un zéro de $\varphi(x)$, on a donc

$$\zeta(x)=\frac{n+\mu}{\mu}x-\frac{na}{\mu}$$

ou encore, en posant

$$\frac{n+\mu}{\mu}=\alpha,\qquad -\frac{na}{\mu}=\lambda,\qquad x=\frac{1}{z},\qquad \zeta\left(\frac{1}{z}\right)=u(z),$$

$$u(z)=\frac{\alpha+\lambda z}{z}. \tag{35}$$

D'après ce qui précède, quel que soit λ, l'équation (35) a *au plus une racine* dans le cercle $|z|\leqq\frac{1}{R}$. Or, dans cette équation $u(z)$ est une *fonction rationnelle* de z, vérifiant de plus la condition

$$|u(z)|\leqq 1 \qquad \text{pour} \qquad |z|\leqq 1. \tag{36}$$

Si l'on désigne par ρ la borne supérieure des nombres $r<1$ tels que, pour *toute* fonction holomorphe satisfaisant à (36) et pour *toute* valeur de λ, l'équation (35) ait au plus une racine dans le cercle $|z|\leqq r$, il est clair qu'on aura

$$R\leqq\frac{1}{\rho}.$$

Or, cette valeur de ρ peut s'obtenir à l'aide de la théorie des fonctions bornées [23]; on trouve

$$\rho = \sqrt{\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}}.$$

En examinant les fonctions bornées pour lesquelles la limite est atteinte, on voit de plus que, si θ est l'argument de α, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $R = \frac{1}{\rho}$ *est que l'on ait*

$$|\alpha| \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{m^2}{n^2 - m^2},$$

où m *est un entier de même parité que* n. Si $\theta = 0$ et n *pair,* cette condition est toujours remplie.

M. Biernacki [8] avait antérieurement obtenu les valeurs de R lorsque $\alpha = n+1$ et lorsque $\alpha = 1$; dans ce dernier cas, son analyse, très subtile, lui a permis de calculer également R lorsque n est *impair*.

5. **Le théorème de Grace-Heawood.** — Jusqu'ici, nous sommes partis d'hypothèses faites sur *tous* les zéros du polynome $f(x)$ pour en tirer des conclusions sur *tous* les zéros des dérivées de $f(x)$ ou des combinaisons linéaires de $f(x)$ et de ses dérivées. Il est naturel de se demander si des hypothèses convenables sur *un certain nombre* de $f(x)$ n'entraînent pas de conclusions pour *un certain nombre* de zéros de ses dérivées.

Pour les polynomes à coefficients réels, on connaît depuis longtemps un tel résultat, à savoir le théorème de Rolle. Mais on peut dire que, dans ce cas, on fait aussi des hypothèses sur *tous* les zéros, puisqu'on les suppose sur l'axe réel ou symétriques deux à deux par rapport à cet axe.

Cherchons donc ce qu'on peut dire des zéros de $f'(x)$ quand on suppose connus *deux* zéros, x_1, x_2 de $f(x)$, les $(n-2)$ autres étant *arbitraires*. On peut toujours supposer, pour simplifier, que $x_1 = -1$, $x_2 = +1$. Soit

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

On a

$$(37) \qquad \int_{-1}^{+1} f'(x)\,dx = 2a_0 + \frac{2a_2}{3} + \frac{2a_4}{5} + \ldots = 0,$$

relation linéaire et homogène par rapport aux coefficients de $f'(x)$.

On peut donc appliquer à $f'(x)$ le théorème VIIb, ce qui donne immédiatement le résultat démontré indépendamment par MM. Grace [42] et Heawood [45] :

THÉORÈME XXXV. — *x_1 et x_2 étant deux zéros de $f(x)$, $f'(x)$ a au moins un zéro dans le cercle de centre $\frac{x_1+x_2}{2}$ et de rayon*

$$R = \frac{|x_2 - x_1|}{2} \cot \frac{\pi}{n}.$$

Dans ce théorème, le rayon R ne peut être remplacé par un plus petit, comme le montre l'exemple du polynome

$$f(x) = \int_{-1}^{x} \left(x - i \cot \frac{\pi}{n}\right)^{n-1} dx.$$

Lorsqu'on a des renseignements supplémentaires sur le polynome $f(x)$, on peut parfois trouver un cercle de centre $\frac{x_1+x_2}{2}$ et de rayon inférieur à R, qui contient toujours un zéro de $f'(x)$.

Par exemple, si $x_1 = -1$, $x_2 = +1$, et si le polynome $f(x)$ est *lacunaire*, soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n} + \ldots + a_k x^{n_k}, \tag{38}$$

la relation $f(-1) = f(+1)$ entre les a_i permet d'appliquer le théorème XXI au polynome $f'(x)$. On voit ainsi que *si le polynome $f(x)$, de la forme* (38), *s'annule aux points $x = -1$ et $x = +1$, sa dérivée a un zéro au moins dans le cercle $|x| \leqq 2k$* [32].

Nous rencontrerons plus loin (*voir* Chap. X) d'autres compléments intéressants du théorème de Grace-Heawood, dus également à M. Fekete.

6. **Le problème de Kakeya.** — Au lieu de se donner deux zéros de $f(x)$, on peut seulement les supposer contenus dans un cercle donné (K), les autres zéros étant arbitraires ; on peut toujours se ramener au cas où (K) est le cercle unité. D'après le théorème de Grace-Heawood, il est clair qu'un zéro de $f'(x)$ est borné : des considé-

rations géométriques élémentaires permettent même de calculer exactement cette borne, qui a pour valeur [99]

$$\rho = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

De façon générale, M. Kakeya [53] a montré que *si p zéros d'un polynome sont bornés en module, il en est de même de* $(p-1)$ *zéros de sa dérivée.* Les résultats de M. Walsh, exposés au chapitre précédent (n° 5), permettent d'établir aisément cette proposition.

Soit $\psi(n, p)$ la borne supérieure des modules de $(p-1)$ zéros de $f'(x)$ lorsque p zéros du polynome $f(x)$ de degré n sont contenus dans le cercle unité; on a vu ci-dessus que $\psi(n, 2) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}$. D'autre part, d'après le théorème de Gauss-Lucas, $\psi(n, n) = 1$. M. Kakeya [53] a indiqué une méthode générale pour le calcul de $\psi(n, p)$; elle lui a permis d'obtenir le premier la valeur de $\psi(n, 2)$, mais conduit à des calculs inextricables pour $p > 2$.

On peut remarquer que le problème de Kakeya est un cas particulier du problème plus général de M. Biernacki énoncé plus haut : si l'on désigne, en effet, par $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les zéros de $f(x)$ contenus dans (K), par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-p}$ les autres zéros (arbitraires) de $f(x)$, en posant

$$g(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_p), \qquad a(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{n-p}),$$

on est ramené au problème de M. Biernacki pour le polynome

$$\varphi(x) = a'(x) g(x) + a(x) g'(x)$$

quand les paramètres α_i, dont dépend $a(x)$, varient arbitrairement.

En particulier, pour $p = n - 1$, on est ramené au problème posé et résolu aux n^{os} 3 et 4, avec $\mu = 1$. On a donc

$$\psi(n, n-1) \leqq \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

et

$$\psi(n, n-1) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

si n est *impair.*

CHAPITRE IX.

LES ZÉROS DES DÉRIVÉES D'UNE FRACTION RATIONNELLE.

1. Une généralisation naturelle des problèmes traités dans les chapitres précédents consiste à étudier la relation entre les pôles et les zéros d'une fraction rationnelle

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

[$f(x)$ et $g(x)$ polynomes premiers entre eux] et les zéros de sa dérivée.

Pour obtenir des énoncés invariants par une transformation homographique quelconque, il est commode de faire les conventions suivantes : le *degré* n de $R(x)$ est le plus grand des degrés de $f(x)$ et $g(x)$; par « zéros de la dérivée » à distance finie, on entend les zéros du polynome

$$\varphi(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x).$$

De plus, si $R(x)$ a un zéro ou un pôle d'ordre k à l'infini, on convient que la dérivée a un zéro d'ordre $k-1$ à l'infini.

Avec ces conventions, il existe donc toujours $(2n-2)$ zéros de la dérivée dans le plan fermé.

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les zéros, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les pôles de $R(x)$: cherchons d'abord si l'on peut énoncer un théorème analogue à celui de Gauss-Lucas, c'est-à-dire délimiter des régions du plan où se trouvent les zéros de la dérivée, quand on suppose les zéros α_i dans un domaine circulaire (K_1) et les pôles β_i dans un domaine circulaire (K_2).

On peut appliquer le théorème VII c, de la même manière qu'au Chapitre VII, n° 5, à la relation en α_i et β_i

$$\varphi(x) = 0.$$

On voit ainsi que, si x est un zéro de $\varphi(x)$, il existe un α dans (K_1) et un β dans (K_2) tels que

$$(x-\alpha)^{n-1}(x-\beta)^{n-1}(\alpha-\beta) = 0.$$

Mais, pour tirer une conclusion de cette équation, il faut que $\alpha - \beta \neq 0$, ce dont on n'est assuré que si (K_1) et (K_2) *n'ont pas de point commun*. Cette méthode ne peut donc donner que le résultat suivant, dû à Bôcher [11] :

Théorème XXXVI. — *Si les zéros d'une fraction rationnelle* $R(x)$ *sont contenus dans un domaine circulaire* (K_1), *les pôles dans un domaine circulaire* (K_2), *et si* (K_1) *et* (K_2) *n'ont pas de point commun, la dérivée a* $(n-1)$ *zéros dans chacun des domaines* (K_1), (K_2).

En utilisant les compléments du théorème VII, on voit même que le théorème XXXVI est encore exact quand (K_1) et (K_2) ont *même frontière* (C) sans avoir de points intérieurs communs, sauf dans le cas où tous les zéros et tous les pôles de $R(x)$ sont sur (C) et le cas où il y a des zéros (ou pôles) multiples sur (C).

On peut aussi énoncer le théorème XXXVI de la façon suivante :

Théorème XXXVI *a*. — *Soit* (C) *une circonférence passant par un zéro de la dérivée de la fraction rationnelle* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *et telle que tous les zéros de* $g(x)$ *soient dans un des domaines circulaires* (K) *de frontière* (C); *dans ces conditions,* $f(x)$ *a un zéro au moins dans* (K). On peut même ajouter que $f(x)$ a un zéro au moins *à l'intérieur de* (K), sauf lorsque tous les zéros de $g(x)$ sont sur (C), auquel cas tous les zéros de $f(x)$ sont aussi sur (C).

En particularisant $g(x)$ dans le théorème précédent, on obtient aisément le théorème suivant, dû à M. Obrechkoff [85] :

Théorème XXXVII. — *x étant un point quelconque du plan, différent des zéros des polynomes* $f(x)$, *de degré* n, *et* $h(x)$, *de degré* $m \neq n$, *on considère le point* z *défini par l'équation*

$$\frac{\lambda f'(x)}{f(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\lambda n - m}{x - z} \qquad \left(\lambda > 0, \lambda \neq \frac{m}{n}\right). \tag{39}$$

Soit (C) *une circonférence passant par* x *et* z; *si tous les zéros de l'un des polynomes,* $h(x)$ *par exemple, sont contenus dans un des domaines circulaires* (K) *de frontière* (C), *l'autre polynome* $f(x)$ *a un zéro au moins dans* (K). Ce zéro est *intérieur* à (K), sauf si tous les zéros de $h(x)$ sont sur (C).

Pour $h(x) \equiv 1$, on retrouve le théorème XXVIII; pour $\lambda = \frac{m+1}{n}$, on a un résultat de M. Mordell [78].

3. Revenons au problème posé au début du n° 2. Il est facile de voir que, si (K_1) et (K_2) ont des points intérieurs communs, on peut trouver des fractions rationnelles ayant leurs zéros dans (K_1), leurs pôles dans (K_2) et dont un zéro de la dérivée est en un point quelconque du plan : il suffit de considérer la fraction rationnelle

$$\frac{x^n}{x^n + \lambda}$$

avec λ très petit, en supposant que (K_1) et (K_2) ont le point intérieur commun $x = 0$. On ne peut donc songer à limiter le domaine de variation de *tous* les zéros de la dérivée, mais seulement d'un *certain nombre* d'entre eux.

Un premier résultat dans cette direction est le théorème suivant [23] :

Théorème XXXVIII. — *Si tous les pôles (ou tous les zéros) d'une fraction rationnelle sont dans un domaine circulaire* (K_1), *la dérivée a au moins un zéro dans* (K_1).

Nous verrons plus loin, sur un exemple, qu'il n'est pas possible d'améliorer ce théorème si l'on ne fait aucune autre hypothèse sur les pôles ou les zéros de la fraction.

Le théorème XXXVIII avait été antérieurement démontré par M. Biernacki [8] dans le cas particulier où $n = 3$, puis par M. Dieudonné [20] quand les pôles de la fraction rationnelle sont *sur la frontière de* (K_1).

4. D'une façon générale, étant donnés deux *ensembles fermés* D, Δ, et deux entiers p, q, au plus égaux à n, considérons la famille $C(p, q, D, \Delta)$ des fractions rationnelles de degré n, dont p zéros au moins sont dans D, et q pôles au moins dans Δ ; on peut se proposer de chercher *le maximum* $\rho(p, q, D, \Delta)$ *des nombres* r *tels qu'il existe un ensemble fermé* E_r, *non identique au plan tout entier, et contenant toujours au moins* r *zéros de la dérivée d'une fraction rationnelle quelconque de la classe* $C(p, q, D, \Delta)$.

Ce qui précède montre que la situation respective des ensembles D et Δ intervient de façon essentielle dans la détermination du nombre ρ.

Les résultats obtenus jusqu'ici sur ce problème sont les suivants [24 *bis*] :

1° Si D et Δ sont réduits à *un seul et même point* ω, on a

$$\rho(p, q, \omega, \omega) = p + q - 1 \quad \text{si} \quad p \neq q$$
$$\rho(p, p, \omega, \omega) = 2p.$$

2° Dans tout autre cas, on a

$$\operatorname{Max}[p-1, q-1] \leqq \rho \leqq p + q - 2.$$

De plus, on a $\rho = \operatorname{Max}[p-1, q-1]$ lorsqu'un point au moins de D est *intérieur* à Δ, ou vice-versa; mais cette condition n'est nullement nécessaire, et ρ peut avoir la même valeur, dans certains cas, pour des ensembles D et Δ *sans point commun*.

De même, une condition *suffisante* pour que $\rho = p + q - 2$ est la suivante : par une transformation homographique, on peut transformer D et Δ en deux ensembles D_1 et Δ_1 tels que, si d est la plus grande distance de O aux points de D_1 et δ la plus petite distance de O aux points de Δ_1, on ait $\frac{\delta}{d} > L_0(p, q, n) \geqq 1$, où L_0 est un nombre ne dépendant que de p, q, n (on a $L_0 > 1$, sauf si $p = q = n$ [en vertu du théorème XXXVI], et si $p = q = 2$). Mais ici encore, la condition précédente n'est pas nécessaire pour que $\rho = p + q - 2$; par exemple, cette égalité est encore vraie lorsque la réunion de D et Δ se compose de *deux points*.

Lorsque ρ est connu, il resterait, pour chaque $r \leqq \rho$, à déterminer, en fonction de D et Δ, des ensembles E_r *minimaux* (c'est-à-dire ne contenant aucun ensemble E_r qui en soit distinct) : mais, en dehors des théorèmes XXXVI et XXXVIII, on ne connaît jusqu'ici aucun exemple de détermination de tels ensembles.

5. Tous ces résultats sont des cas particuliers de propositions analogues pour la dérivée $m^{\text{ième}}$ ($m \geqq 1$) d'une fraction rationnelle [24 *bis*]; mais, lorsque $m > 1$, il est nécessaire de distinguer un plus grand nombre de cas pour la détermination de ρ; de plus, les nombres p et q

ne jouent naturellement plus des rôles symétriques dans les formules obtenues.

Le théorème XXXVIII se généralise aussi aux dérivées d'ordre $m > 1$, lorsque l'hypothèse est que les *pôles* de la fraction rationnelle sont dans le domaine circulaire (K_1) [24 *bis*]; on ne sait pas si la proposition analogue, où l'hypothèse porte sur les *zéros* de la fraction rationnelle, est vraie.

6. On peut considérer un polynome comme un cas particulier d'une fraction rationnelle, lorsque celle-ci a tous ses pôles confondus au point à l'infini.

Entre ce cas particulier et le cas général, on peut envisager, comme cas intermédiaires, ceux où la fraction rationnelle a un pôle (simple ou multiple) au point à l'infini : ou encore, pour avoir des énoncés invariants par transformation homographique, les cas où l'on suppose *donné* un zéro ou un pôle de la fraction.

L'application du théorème VII *c* donne alors le théorème suivant de M. Walsh [108] (énoncé pour simplifier dans le cas où il s'agit d'une fraction ayant un pôle à l'infini) :

THÉORÈME XXXIX. — *$f(x)$ et $g(x)$ étant deux polynomes de degrés respectifs n et m $(n > m)$, si tous les zéros de $f(x)$ sont dans un domaine circulaire (K_1) et tous les zéros de $g(x)$ dans un domaine circulaire (K_2), les zéros finis de la dérivée de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{g(x)}$ sont contenus dans le domaine formé par la réunion de (K_1), (K_2) et du domaine circulaire (K), lieu du point $z = \frac{n\beta - m\alpha}{n - m}$ lorsque α décrit (K_1) et β décrit (K_2).*

7. Un autre cas particulier intéressant, voisin de celui des polynomes, est le cas où tous les pôles de la fraction rationnelle sont confondus en *deux* points.

Si l'on suppose tous les zéros intérieurs à un domaine circulaire (K_1), il est intéressant de rechercher le nombre minimum N des zéros de la dérivée contenus dans (K_1), suivant la position des deux pôles par rapport à (K_1). La solution est donnée par le

THÉORÈME XL. — *On a $N = n - 1$, sauf dans le cas où un des pôles a est intérieur à (K_1), l'autre pôle b étant extérieur à (K_1).*

Si p désigne la multiplicité de a, on a dans ce cas

$$N = p - 1 \quad \text{si} \quad p > \frac{n}{2},$$

$$N = p \quad \text{si} \quad p \leqq \frac{n}{2}.$$

La plus grande partie de ce théorème est due à M. Biernacki [8], qui y est parvenu en utilisant le théorème XXXIX et le théorème de Gauss-Lucas. Par les mêmes méthodes, on peut compléter sa démonstration en traitant le seul cas qu'il n'ait pas envisagé, celui où les points a et b sont dans (K_1).

On peut en effet supposer alors que (K_1) est l'extérieur d'un cercle (C), b étant le point à l'infini. Il suffit de démontrer que le polynome

$$\varphi(x) = (x-a)f'(x) - pf(x)$$

a toujours un zéro au moins dans (K_1); or, s'il n'en était pas ainsi, tous les zéros de $\varphi(x)$ seraient intérieurs à (C), et par suite aussi tous les zéros de ses dérivées successives. Mais

$$\varphi^{(p)}(x) = (x-a)f^{(p+1)}(x),$$

ce qui établit la contradiction, a n'étant pas intérieur à (C). Il est clair d'ailleurs que $(n-1)$ est bien le nombre minimum cherché, d'après ce qu'on a vu au n° 4.

La démonstration de M. Biernacki fournit, dans le cas où $p=1$, l'exemple montrant que le théorème XXXVIII ne peut être amélioré.

CHAPITRE X.

LES ZÉROS DES COMBINAISONS LINÉAIRES DE FRACTIONS RATIONNELLES. « THÉORÈMES DE LA MOYENNE » ET APPLICATIONS.

1. La plupart des propositions de ce chapitre sont des applications de la remarque très simple suivante : étant donnés n nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ non tous nuls et contenus dans un angle A de sommet l'origine et d'ouverture $\gamma < \pi$, on a

$$Z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n \neq 0.$$

2. Une première série d'applications consiste en propositions permettant d'obtenir des régions où se trouvent tous les zéros de combinaisons linéaires de polynomes ou de fractions rationnelles dont on connaît les zéros et les pôles, les coefficients de ces combinaisons étant soumis à certaines restrictions.

Considérons d'abord une combinaison linéaire de m polynomes de degré n

$$F(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_m f_m(x),$$

ou

$$f_k(x) = (x - x_{k1})(x - x_{k2}) \ldots (x - x_{kn}).$$

Théorème XLI. — *Si tous les x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ sont dans un domaine convexe Δ, et si tous les a_i sont dans un angle* A *de sommet l'origine et d'ouverture $\gamma < \pi$, les zéros de* $F(x)$ *sont tous contenus dans le domaine $\Delta\left(\frac{\pi - \gamma}{n}\right)$, lieu des points d'où l'on voit Δ sous un angle au moins égal à $\frac{\pi - \gamma}{n}$.*

On peut toujours supposer, en multipliant $F(x)$ par une constante de la forme $e^{i\lambda}$, que l'angle A est défini par les conditions

$$0 \leqq \arg x \leqq \gamma. \tag{40}$$

Supposons qu'il existe un zéro x de $F(x)$ extérieur à $\Delta\left(\frac{\pi - \gamma}{n}\right)$: le domaine Δ est donc dans un angle de sommet x et d'ouverture $\beta < \frac{\pi - \gamma}{n}$; soient $\overrightarrow{xu}$, $\overrightarrow{xv}$ les demi-droites limitant cet angle, prises dans un ordre tel qu'on passe de $\overrightarrow{xu}$ à $\overrightarrow{xv}$ en tournant dans le sens direct. Soit z un point pris sur $\overrightarrow{xu}$, et considérons l'expression

$$\frac{F(x)}{(x - z)^n} = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{f_i(x)}{(x - z)^n}.$$

On a

$$0 \leqq \arg \frac{x - x_{ij}}{x - z} \leqq \beta,$$

donc

$$0 \leqq \arg a_i \frac{f_i(x)}{(x - z)^n} \leqq n\beta + \gamma < \pi;$$

d'où le théorème, en appliquant la remarque du début.

De la même manière, on démontre le théorème plus général suivant :

THÉORÈME XLII. — *Soient $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$, m fractions rationnelles*

$$f_k(x) = \frac{(x-\alpha_{k1})(x-\alpha_{k2})\ldots(x-\alpha_{kp})}{(x-\beta_{k1})(x-\beta_{k2})\ldots(x-\beta_{kq})},$$

telles que tous les α_{ij} $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, p)$ et β_{ij} $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, q)$ soient dans un domaine convexe Δ. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_m$, m nombres contenus dans un angle A de sommet l'origine et d'ouverture $\gamma<\pi$; les zéros de la fraction rationnelle

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x) \tag{41}$$

sont tous contenus dans le domaine $\Delta\left(\frac{\pi-\gamma}{p+q}\right)$.

On construit sans peine des exemples montrant que les domaines de variation des zéros de $F(x)$ dans les théorèmes XLI et XLII ne peuvent être remplacés par de plus petits.

Le principe de ces théorèmes est dû à M. J. v. Sz. Nagy [80], qui les a démontrés pour $\gamma=0$; sous la forme générale ci-dessus, ils ont été établis par M. Marden [70].

Dans le cas où $\gamma=0$, $p=0$, $q=1$, $a_1=\ldots=a_m=1$, le théorème XLII n'est autre que le théorème de Gauss-Lucas.

3. Lorsqu'on remplace l'inégalité $\gamma<\pi$ par l'égalité $\gamma=\pi$, on ne peut plus fixer de domaine non identique au plan tout entier, et contenant tous les zéros de $F(x)$, même lorsque tous les a_i sont réels (mais de signe quelconque), ainsi qu'on l'a vu au chapitre précédent dans le cas particulier où $p=0$, $q=1$, $a_i=\pm 1$. Dans le cas un peu plus étendu, où $p=0$, $q=1$ et où les a_i sont dans l'un ou l'autre de deux angles opposés par le sommet et d'ouverture $\gamma<\pi$, M. Marden [70] a indiqué une généralisation du théorème XXXVI qui, pour certaines valeurs de γ, fournit des domaines non identiques au plan entier, et contenant tous les zéros de $F(x)$.

A fortiori, si l'on ne fait aucune hypothèse sur les a_i, on ne peut plus rien dire sur *tous* les zéros de $F(x)$; il est naturel de se demander s'il existe des régions contenant toujours *un certain nombre* de zéros de $F(x)$ lorsque les a_i sont arbitraires. Le seul résultat obtenu jusqu'ici dans cette direction (si l'on excepte la théorie du problème de Landau-Montel, qui apparaît comme un cas particulier du problème posé ici) est le suivant, dû à M. Biernacki [8] :

THÉORÈME XLIII. — *$f(x)$ étant un polynome de degré m, dont tous les zéros sont en module inférieurs à M, $g(x)$ un polynome de degré $n > m$ dont tous les zéros sont en module inférieurs à N, le polynome $f(x) + a\,g(x)$ a toujours m zéros inférieurs en module à*

$$R = \operatorname{Max}\left(N, \frac{mN + nM}{n - m}\right).$$

De plus, dans cet énoncé, le nombre R ne peut être remplacé par un nombre plus petit.

La démonstration de ce théorème est tout à fait étrangère aux considérations précédentes; elle utilise le principe de l'argument.

4. **Théorèmes de la moyenne.** — Une autre série de conséquences de la remarque du n° 1 est constituée par ce qu'on peut appeler, avec M. Marden ([71], [72]), des « théorèmes de la moyenne » pour les polynomes et les fractions rationnelles.

Pour les polynomes, le résultat le plus général de cette nature est le suivant :

THÉORÈME XLIV. — *Soient $f(x)$ un polynome arbitraire de degré n, C un arc de courbe rectifiable, d'équation $x = \varphi(t)$ (t réel, $\alpha \leqq t \leqq \beta$) contenu dans un domaine convexe Δ. Soit enfin $a(t)$ une fonction continue de t dans (α, β), dont les valeurs sont contenues dans un angle A de sommet l'origine et d'ouverture $\gamma < \pi$. Si l'on pose*

$$\sigma = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,a(t)\,dt}{\displaystyle\int_\alpha^\beta a(t)\,dt},$$

il existe au moins un zéro du polynome $f(x) - \sigma$ dans le domaine $\Delta\left(\frac{\pi - \gamma}{n}\right)$.

Ce théorème s'obtient immédiatement en passant à la limite dans la proposition analogue pour les sommes finies :

THÉORÈME XLV. — *Soient $f(x)$ un polynome arbitraire de degré n, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, m points contenus dans un domaine convexe Δ. Soient enfin $a_1, a_2, \ldots, a_m$, m points contenus dans un angle* A *de sommet l'origine et d'ouverture $\gamma < \pi$. Si l'on pose*

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i f(\alpha_i)}{\sum_{i=1}^{m} a_i},$$

il existe au moins un zéro du polynome $f(x) - \sigma$ dans le domaine $\Delta\left(\frac{\pi - \gamma}{n}\right)$.

Soit, en effet,

$$f(x) - \sigma = C(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

et supposons que tous les zéros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $f(x) - \sigma$ soient extérieurs à $\Delta\left(\frac{\pi - \gamma}{n}\right)$. Pour chaque point x_k, Δ est donc dans un angle limité par deux demi-droites $\overrightarrow{x_k u_k}$, $\overrightarrow{x_k v_k}$ et d'ouverture $\beta_k < \frac{\pi - \gamma}{n}$; soit $\beta < \frac{\pi - \gamma}{n}$ le maximum des β_k. Prenons sur chaque demi-droite $\overrightarrow{x_k u_k}$ un point z_k, et considérons l'expression

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i [f(\alpha_i) - \sigma]}{(z_1 - x_1)(z_2 - x_2)\ldots(z_n - x_n)} \\ &= C \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{(\alpha_i - x_1)(\alpha_i - x_2)\ldots(\alpha_i - x_n)}{(z_1 - x_1)(z_2 - x_2)\ldots(z_n - x_n)}. \end{aligned}$$

Or, les α_i étant dans Δ, on a

$$0 \leqq \arg \frac{\alpha_i - x_k}{z_k - x_k} \leqq \beta_k \leqq \beta$$

et, si l'on suppose que l'angle A est défini par (48), on a

$$0 \leqq \arg a_i \frac{(\alpha_i - x_1)(\alpha_i - x_2)\dots(\alpha_i - x_n)}{(z_1 - x_1)(z_2 - x_2)\dots(z_n - x_n)} \leqq n\beta + \gamma < \pi;$$

d'où $Z \neq 0$, contrairement à l'hypothèse.

Donnons l'énoncé du théorème analogue pour les fractions rationnelles :

Théorème XLVI. — *Soit* $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *une fraction rationnelle ayant p zéros et q pôles; soient* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, *m points contenus dans un domaine convexe* Δ. *Soient enfin* $a_1, a_2, \dots, a_m$, *m points contenus dans un angle* A *de sommet l'origine et d'ouverture* $\gamma < \pi$. *Si l'on pose*

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i R(\alpha_i)}{\sum_{i=1}^{m} a_i},$$

il existe au moins un pôle de $R(x)$ *ou un zéro de* $R(x) - \sigma$ *dans le domaine* $\Delta\left(\frac{\pi - \gamma}{n + q}\right)$, *où* $n = \max(p, q)$ *est le degré de* $R(x)$.

De ce théorème, dont la démonstration est calquée sur la précédente, on peut aussi déduire, par un passage à la limite, un théorème analogue au théorème XLIV. Signalons aussi que les théorèmes XLV et XLVI ne peuvent être améliorés sans hypothèses supplémentaires.

Le principe de ces démonstrations est dû à M. Fekete ([31], [32], [33], [34], [35]) qui a établi les théorèmes précédents dans des cas particuliers; M. J. v. Sz. Nagy [81] a ensuite obtenu le théorème XLV dans le cas $\gamma = 0$, et avec une moins bonne détermination du domaine contenant un zéro de $f(x) - \sigma$. Enfin, sous la forme générale ci-dessus, les théoremes sont dus à M. Marden [71].

5. Parmi les applications des propriétés précédentes, indiquons d'abord comment on peut en déduire des propositions analogues au théorème de Grace-Heawood.

Dans le théorème XLIV, si $a(t) \not\equiv 0$, on a $\int_\alpha^\beta a(t)\,dt \neq 0$; par suite, *si* $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,a(t)\,dt = 0$, $f(x)$ *a un zéro au moins dans* $\Delta\left(\frac{\pi-\gamma}{n}\right)$; appliquant cette remarque au cas où Δ se réduit au segment S de l'axe réel compris entre les points ± 1, et où $a(t) \equiv 1$, on a la proposition de M. Fekete [33] :

THÉORÈME XLVII. — *Si un polynome $f(x)$ de degré n, prend la même valeur aux points ± 1, sa dérivée a un zéro au moins dans le domaine* $S\left(\frac{\pi}{n-1}\right)$, *lieu des points d'où l'on voit* S *sous un angle au moins égal à* $\frac{\pi}{n-1}$.

Le domaine de variation d'un zéro de $f'(x)$ ainsi obtenu n'est pas intérieur au cercle déterminé par le théorème XXXV, mais ne contient pas non plus ce cercle tout entier dès que $n > 3$.

Une autre proposition de M. Fekete [33] étend qualitativement le théorème de Grace-Heawood aux zéros du polynome

$$g(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n)\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{x - x_k},$$

où les λ_k sont simplement supposés *positifs ou nuls* [$g(x)$ se réduit à la dérivée de $F(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n)$ quand $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$].

Supposons que les points $x_1, x_2, \dots, x_p$ $(2 \leq p \leq n)$ soient contenus dans un cercle (K) de rayon R. Posons

$$f(x) = (x - x_{p+1})(x - x_{p+2})\dots(x - x_n) \qquad [f(x) \equiv 1 \text{ si } p = n],$$

et remarquons qu'on a l'identité

$$\lambda_1\frac{f(x_1)}{g(x_1)} + \lambda_2\frac{f(x_2)}{g(x_2)} + \dots + \lambda_p\frac{f(x_p)}{g(x_p)} = 0,$$

comme on le vérifie sans peine. Si l'on applique à la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{g(x)}$ le théorème XLVI, on voit que *le cercle* (K′) *concentrique à* (K) *et de rayon* $R' = \dfrac{R}{\sin\frac{\pi}{4(n-1)}}$ *contient, soit un zéro de $g(x)$, soit un des points $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$.*

Appliquant cette proposition de proche en proche, on a le remarquable théorème de M. Fekete :

THÉORÈME XLVIII. — *Le polynome*

$$g(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n)\sum_{h=1}^{n}\frac{\lambda_k}{x - x_k} \qquad (\lambda_k \geqq 0,\ \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \neq 0)$$

a toujours un zéro dans un cercle de centre $\frac{x_1+x_2}{2}$ *et de rayon* $K(|x_2 - x_1|, n)$, *indépendant des* λ_k *et des valeurs de* x_3, $x_4, \dots, x_n$.

6. Une autre application des théorèmes généraux concerne les relations entre les zéros des polynomes $f(x) - z$ pour différentes valeurs du paramètre z.

Soit α un zéro de $f(x) - a$, β un zéro de $f(x) - b$, où $b \neq a$. Soit c une troisième valeur quelconque, différente de a et b; définissons λ et μ par les relations

$$\left\{\begin{aligned} \lambda + \mu \quad &= 1, \\ \lambda a + \mu b &= c. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

On a donc

$$c = \frac{\lambda f(\alpha) + \mu f(\beta)}{\lambda + \mu}. \tag{43}$$

Si φ est l'angle (compris entre o et π) sous lequel on voit du point c le segment ab, on voit de suite que $\frac{\lambda}{\mu}$ a pour argument $\pm(\pi - \varphi)$. L'application du théorème XLV donne alors le résultat suivant ([31], [34]) :

THÉORÈME XLIX. — *Le polynome* $f(x) - c$ *a au moins un zéro dans le domaine* $S\left(\frac{\varphi}{n}\right)$, *lieu des points d'où l'on voit le segment* S *d'extrémités* α *et* β *sous un angle au moins égal à* $\frac{\varphi}{n}$.

En particulier, $f(x)$ prend au moins une fois toute valeur c, située sur le segment ab, dans le domaine $S\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Le domaine ainsi délimité est le meilleur possible, quand on ne fait pas d'autres hypothèses sur $f(x)$. Mais si $f(x)$ a une forme particulière, on peut parfois trouver un domaine plus petit possédant la même propriété. Par exemple, si $f(x)$ est *lacunaire*

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_k x^{n_k}$$

et, si $\alpha = -1$, $\beta = +1$, en appliquant à la relation (43) le théorème XXI, on voit que $f(x) - c$ *a au moins un zéro dans le cercle* $|x| \leqq 2Mk$, *où* $M = \operatorname{Max}\left(1, \cot\frac{\varphi}{2}\right)$ [4].

Pour les fractions rationnelles, on peut également obtenir des résultats analogues au théorème XLIX, en appliquant cette fois le théorème XLVI [35].

7. Le théorème de Jentzsch. — Dans ce qui précède, de la connaissance d'*un* zéro de $f(x) - a$ et d'*un* zéro de $f(x) - b$, nous avons déduit des renseignements sur la position d'*un* zéro de $f(x) - c$. Plus généralement, on sait (Chap. IV, n° 2) que si l'on se donne la valeur de $f(x)$ en $(p+1)$ points, il existe en général des domaines bornés contenant toujours p zéros de $f(x) - z$, ces domaines étant fonctions de z. En dehors du cas précédent, on n'a cherché à préciser ces domaines que lorsqu'on suppose connus *tous* les zéros de $f(x) - a$ et *tous* les zéros de $f(x) - b$. Ces $2n$ points ne sont évidemment pas arbitraires, puisque $(n+1)$ d'entre eux déterminent en général les autres. Le théorème IX exprime déjà une conséquence de cette dépendance. Une autre, qui résulte immédiatement du théorème de Gauss-Lucas, est que *si les zéros de* $f(x) - a$ *sont intérieurs à un cercle* (K_1), *et les zéros de* $f(x) - b$ *intérieurs à un cercle* (K_2), (K_1) *et* (K_2) *ont des points intérieurs communs.*

Nous allons nous appuyer sur une forme remarquable de la fraction rationnelle

$$R(x) = \frac{f(x) - b}{f(x) - a}.$$

On peut l'écrire

$$R(x) = \frac{f'(x)}{f(x) - a} \, \frac{f(x) - b}{f'(x)} = \frac{n}{x - u(x)} \, \frac{x - v(x)}{n},$$

$$R(x) = \frac{x - v(x)}{x - u(x)}, \tag{44}$$

$u(x)$ et $v(x)$ étant déterminés en fonction de x à l'aide de la formule (29) appliquée respectivement à $f(x) - a$ et $f(x) - b$.

Cela étant, la remarque finale du n° 3 du Chapitre VII permet d'établir immédiatement le théorème suivant, dû à Jentzsch ([51 *bis*], [30]) :

THÉORÈME L. — *Si tous les zéros de* $f(x)-a$ *et tous ceux de* $f(x)-b$ *sont contenus dans un domaine convexe* Δ, *tous les zéros de* $f(x)-c$ *sont aussi dans* Δ, *quel que soit* c *sur le segment* ab.

Ou encore, avec l'énoncé de son auteur :

THÉORÈME L*a*. — *L'ensemble des valeurs de* z *pour lesquelles le polynome* $f(x)-z$ *a tous ses zéros dans un domaine convexe, constitue un domaine convexe.*

On peut encore dire que $f(x)$ *prend au moins une fois, à l'extérieur d'un domaine convexe* (Δ), *toute valeur extérieure à un certain domaine convexe* (D).

Mais la formule (44) permet d'obtenir des résultats plus généraux que le théorème de Jentzsch. Par exemple, on a le théorème suivant, qui en est une généralisation évidente [34] :

THÉORÈME LI. — *Si tous les zéros de* $f(x)-a$ *et tous ceux de* $f(x)-b$ *sont dans un domaine convexe* Δ, *tous les zéros de* $f(x)-c$ *sont dans le domaine* $\Delta(\varphi)$, *si* φ *est l'angle sous lequel on voit du point* c *le segment* ab.

Ces résultats sont obtenus en considérant seulement l'*argument* du second membre de (44). On peut aussi avoir des limitations du module de cette expression quand on suppose que les zéros de $f(x)-a$ et de $f(x)-b$ sont respectivement dans deux domaines circulaires donnés : il suffit d'appliquer le théorème XXIX.

Par une méthode analogue, on peut obtenir une autre généralisation du théorème de Jentzsch ([80], [70]). Supposons $f(x)$ de degré n, et soient $g_1(x)$, $g_2(x)$ deux polynomes de degrés au plus égaux à $m<n$. On peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{f-g_2}{f-g_1} &= \frac{f'-g'_1}{f-g_1}\,\frac{f''-g''_1}{f-g_1}\cdots\frac{f^{(m+1)}}{f^{(m)}-g_1^{(m)}}\,\frac{f-g_2}{f'-g'_2}\,\frac{f'-g'_2}{f''-g''_2}\cdots\frac{f^{(m)}-g_2^{(m)}}{f^{(m+1)}}\\ &= \frac{n}{x-u_1}\,\frac{n-1}{x-u_2}\cdots\frac{n-m}{x-u_{m+1}}\,\frac{x-v_1}{n}\,\frac{x-v_2}{n-1}\cdots\frac{x-v_{m+1}}{n-m}\\ &= \frac{x-v_1}{x-u_1}\,\frac{x-v_2}{x-u_2}\cdots\frac{x-v_{m+1}}{x-u_{m+1}},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en s'appuyant sur le théorème de Gauss-Lucas, le

THÉORÈME LII. — *Si tous les zéros de* $f(x) - g_1(x)$ *et tous les zéros de* $f(x) - g_2(x)$ *sont dans un domaine convexe* Δ, *tous les zéros du polynome*

$$F(x) = a_1[f(x) - g_1(x)] - a_2[f(x) - g_2(x)]$$

sont dans $\Delta\left(\frac{\varphi}{m+1}\right)$, *où* φ *désigne l'angle, compris entre* 0 *et* π, *sous lequel on voit de l'origine le segment* $a_1 a_2$.

8. Signalons enfin, à propos du théorème de Jentzsch, un théorème analogue relatif aux fractions rationnelles, dû à M. Cohn [16] :

THÉORÈME LIII. — *Une fraction rationnelle prend au moins une fois à l'extérieur d'un cercle* (K), *dans lequel elle n'a pas de pôle, toute valeur extérieure à un certain domaine convexe* (D).

La démonstration s'appuie sur les méthodes du Chapitre I. De plus, un exemple permet de voir qu'on ne saurait, dans ce théorème, remplacer le cercle (K) par un domaine convexe quelconque.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. ALEXANDER (J. W.). — Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions (*Annals of Mathematics*, t. 17, 1915, p. 12-22).
2. ALLARDICE (R. E.). — On a limit of the roots of an equation that is independant of all but two of the coefficients (*Bulletin of the American Mathematical Society*, t. 13, 1906-1907, p. 443-447).
3. ANGHELUTZA (Th.). — Sur une extension d'un théorème de Hurwitz (*Bulletin de l'Académie roumaine*, 16e année, 1934, p. 119).
4. BÁLINT (E.). — Bemerkung zu der Note des Herrn Fekete (*Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, t. 34, 1925, p. 233-237).
5. BERWALD (L.). — Ueber einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze (*Math. Zeitschrift*, t. 37, 1933, p. 61-76).
6. BERWALD (L.). — Ueber die Lage der Nullstellen von Linearkombinationen eines Polynoms und seiner Ableitungen in bezug auf einen Punkt (*Tôhoku Math. Journal*, t. 37, 1933, p. 52-68).
7. BERWALD (L.). — Elementare Sätze über die Abgrenzung der Wurzeln einer algebraische Gleichung (*Acta lit. ac. scient. Univ. Hung.* (Szeged), t. 6, 1934, p. 209-221).
8. BIERNACKI (M.). — Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires (Thèse) (*Bulletin de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres*, classe des Sciences Mathématiques, série A, 1927, p. 541-685).
9. BIERNACKI (M.). — Sur l'équation du troisième degré (*Mathematica*, t. 8, 1934, p. 196-200).
10. BIRKHOFF (G. D.). — An elementary double inequality for the roots of an algebraic equation having greatest absolute value (*Bulletin of the American Math. Society*, t. 21, 1914, p. 494-495).
11. BÔCHER (M.). — A problem in statics and its relation to certain algebraic invariants (*Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, t. 40, 1904, p. 469-484).
12. BOHL (P.). — Zur Theorie der trinomischen Gleichungen (*Math. Annalen*, t. 65, 1908, p. 556-566).
13. BOMPIANI (E.). — Sulle condizioni sotto le quali un' equazione a coefficienti reali ammette solo radici con parte reale negativa (*Giornale di Matematiche*, t. 49, 1911, p. 33-39).
14. CARMICHAEL (R. D.). — Elementary inequalities for the roots of an algebraic equation (*Bulletin of the American Math. Society*, t. 24, 1917-1918, p. 286-296).
15. CARMICHAEL (R. D.) and MASON (T. E.). — Note on the roots of algebraic equations (*Bulletin of the American Math. Society*, t. 21, 1914, p. 14-22).

16. COHN (A.). — Ueber die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise (*Math. Zeitschrift*, t. 14, 1922, p. 110-148).

17. CURTISS (D. R.). — A note on the preceding paper (*Transactions of the American Math. Society*, t. 24, 1922, p. 181-184).

18. DIEUDONNÉ (J.). — Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe (Thèse) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 48, 1931, p. 247-358).

19. DIEUDONNÉ (J.). — Sur les polynomes dont toutes les racines sont intérieures au cercle unité (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 56, 1932, p. 176-178).

20. DIEUDONNÉ (J.). — Sur le théorème de Grace et les relations algébriques analogues (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 60, 1932, p. 173-196).

21. DIEUDONNÉ (J.). — Sur quelques propriétés des polynomes (*Actualités scientifiques et industrielles*, no 114, Hermann et Cie, Paris, 1934).

22. DIEUDONNÉ (J.). — Sur une équation quadrinome (*Mathematica*, t. 10, 1934, p. 37-45).

23. DIEUDONNÉ (J.). — Sur quelques points de la théorie des polynomes (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 58, 1934, p. 273-296).

24. DIEUDONNÉ (J.). — Sur un problème de la théorie des polynomes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 199, 1934, p. 999-1001).

24 *bis*. DIEUDONNÉ (J.). — Sur la variation des zéros des dérivées des fractions rationnelles (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. 54, 1937, p. 101-150),

25. EGERVARY (J.). — On a maximum-minimum problem and its connection with the roots of equations (*Acta lit. ac scient. Univ. Hung.* (Szeged), t. 1, 1922, p. 38-45).

26. EGERVÁRY (J.). — On a generalisation of a theorem of Kakeya (*Acta lit. ac. scient. Univ. Hung.* (Szeged), t. 5, 1931, p. 78-82).

27. ENESTRÖM (G.). — Remarque sur un théorème relatif aux racines de l'équation $a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$ où tous les coefficients sont réels et positifs (*Tohôku Math. Journal*, t. 18, 1920, p. 34-36).

28. FEJÉR (L.). — Ueber die Wurzel von kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung (*Math. Annalen*, t. 65, 1908, p. 413-423).

29. FEJÉR (L.). — Ueber Kreisgebiete, in denen eine Wurzel einer algebraischen Gleichung liegt (*Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, t. 26, 1917, p. 114-128).

30. FEKETE (M.). — Beweis eines Satzes von Jentzsch (*Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, t. 31, 1922, Nachtrag, p. 42-48).

31. FEKETE (M.). — Ueber Zwischenwerte bei komplexen Polynomen (*Acta lit. ac scient. Univ. Hung.* (Szeged), t. 1. 1923, p. 98-100).

32. FEKETE (M.). — Analoga zu den Sätzen von Rolle und Bolzano für komplexe Polynome und Potenzreihen mit Lücken (*Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, t. 32, 1924, p. 299-306).

33. FEKETE (M.). — Ueber Gebiete, in denen komplexe Polynome jeden Wert zwischen zwei gegebenen annehmen (*Math. Zeitschrift*, t. 22, 1925, p. 1-7).

34. FEKETE (M.). — Ueber die Nullstellenverteilung bei Polynomen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist (*Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, t. 34, 1926, p. 220-233).

35. FEKETE (M.). — Ueber Wertverteilung bei rationalen Funktionen einer komplexen Veränderlichen (*Acta lit. ac scient. Univ. Hung.* (Szeged), t. 4, 1930, p. 234-243).

36. FUJIWARA (M.). — Ueber die Wurzeln der algebraischen Gleichungen (*Tôhoku Math. Journal*, t. 8, 1915, p. 78-85).

37. FUJIWARA (M.). — Einige Bemerkungen über die elementare Theorie der algebraischen Gleichungen (*Tôhoku Math. Journal*, t. 9, 1916, p. 102-108).

38. FUJIWARA (M.). — Ueber die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung (*Tôhoku Math. Journal*, t. 10, 1916, p. 167-171).

39. FUJIWARA (M.). — Ueber die algebraische Gleichungen deren Wurzeln in einem Kreise oder in einer Halbebene liegen (*Math. Zeitschrift*, t. 24, 1926, p. 160-169).

40. FUSIANIS (C.). — Sur un théorème de MM. Carathéodory et Fejér (*C. R. Acad. Sc.*, t. 197, 1933, p. 1184-1185).

41. GAUSS (C. F.). — *Œuvres complètes*, t. 3, p. 112 et 492; t. 8, p. 32; t. 9, p. 187.

42. GRACE (J. H.). — The zeros of a polynomial (*Proceedings of the Cambridge Philos. Society*, t. 11, 1902, p. 352-357).

43. HAYASHI (T.). — On a theorem of Mr Kakeya's (*Tôhoku Math. Journal*, t. 2, 1912-1913, p. 215).

44. HAYASHI (T.). — On the roots of an algebraic equation (*Tôhoku Math. Journal*, t. 3, 1913, p. 110-115).

45. HEAWOOD (P. J.). — Geometrical relations between the roots of $f(x)=0$, $f'(x)=0$ (*Quarterly Journal of Math.*, t. 38, 1907, p. 84-107).

46. HERGLOTZ (G.). — Ueber die Wurzeln trinomischer Gleichungen (*Leipziger Berichte, Math.-Phys. Classe*, t. 74, 1922, p. 1-8).

47. HERGLOTZ (G.). — Ueber die Wurzelanzahl algebraischer Gleichungen innerhalb und auf dem Einheitskreis (*Math. Zeitschrift*, t. 19, 1924, p. 26-34).

48. HERMITE (C.). — Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprise entre des limites données (*Journal de Crelle*, t. 52, p. 39-51; *Œuvres complètes*, t. 1, p. 397-414).

49. HURWITZ (A.). — Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt (*Math. Annalen*, t. 46, 1895, p. 273-284).

50. HURWITZ (A.). — Ueber einen Satz des Herrn Kakeya (*Tôhoku Math. Journal*, t. 4, 1913-1914, p. 89-93).

51. Itihara (T.). — Note on the roots of algebraic equations (*Tôhoku Math. Journal*, t. 30, 1929, p. 468-471).

51 *bis*. Jentzsch (R.). — *Archiv der Math. und Phys.*, t. 25, 1917, p. 196 Aufgabe, n° 526.

52. Kakeya (S.). — On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients (*Tôhoku Math. Journal*, t. 2, 1912-1913, p. 140-142).

53. Kakeya (S.). — On zeros of a polynomial and its derivatives (*Tôhoku Math. Journal*, t. 11, 1917, p. 5-16).

54. Kakeya (S.). — On algebraic equations having the roots of limited magnitude (*Proceedings of the phys.-math. Society of Japan*, 3e série, t. 3, 1921, p. 94-100).

55. Kelleher (S. B.). — Des limites des zéros d'un polynome (*Journal de Math.*, 7e série, t. 2, 1916, p. 169-171).

56. Kempner (A. J.). — Ueber die Separation komplexer Wurzeln algebraischer Gleichungen (*Math. Annalen*, t. 85, 1922, p. 49-59).

57. Kimura (K.). — Ueber die Nullstellen von den Polynomen und den Potenzreihen (*Tôhoku Math. Journal*, t. 35, 1932, p. 233-236).

58. Kojima (T.). — On a theorem of Hadamard's and its application (*Tôhoku Math. Journal*, t. 5, 1914, p. 58).

59. Kojima (T.). — On the limits of the roots of an algebraic equation (*Tôhoku Math. Journal*, t. 11, 1917, p. 119-127).

60. Königsberger (L.). — Ueber die Abgrenzung der Lösungen einer algebraischen Gleichung (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. 26, 1908, p. 343-359).

61. Kuniyeda (M.). — Note on the roots of algebraic equations (*Tôhoku Math. Journal*, t. 9, 1916, p. 167-173).

62. Laguerre. — *Œuvres*, t. 1, p. 48-66, 133-143.

63. Landau (E.). — Ueber den Picardschen Satz (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, t. 51, 1906, p. 252-318).

64. Landau (E.). — Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 24, 1907, p. 179-201).

65. Liénard et Chipart. — Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique (*Journal de Math.*, 6e série, t. 10, 1914, p. 291-346).

66. Lipka (S.). — Ueber die Abgrenzung der Wurzeln von algebraischen Gleichungen (*Acta lit. ac scient. Univ. Hung.* (Szeged), t. 3, 1927, p. 73-80).

67. Lipka (S.). — Zur Theorie der algebraischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten (*Acta lit. ac scient. Univ. Hung.* (Szeged), t. 5, 1931, p. 69-77).

68. Lucas (F.). — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 77, 1874, p. 431-433; t. 78, 1874, p. 140-144, 180-183, 271-274; t. 89, 1879, p. 224-226. *Journal de l'École Polytechnique*, t. 46, 1879, p. 1-33. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 17, 1888, p. 2-69.

69. Marden (M.). — On the zeros of linear partial fractions (*Transactions of the American Math. Society*, t. 32, 1930, p. 81-109).

70. MARDEN (M.). — On the zeros of certain rational functions (*Transactions of the American Math. Society*, t. 32, 1930, p. 658-668).

71. MARDEN (M.). — A generalization of Weierstrass' and Fekete's mean-value theorems (*Bulletin of the American Math. Society*, t. 38, 1932, p. 434-441).

72. MARDEN (M.). — Further mean-value theorems (*Bulletin of the American Math. Society*, t. 39, 1933, p. 750-754).

73. MARDEN (M.). — The location of the zeros of the derivative of a polynomial (*American Math. Monthly*, t. 42, 1935, p. 277-286).

74. MARTY (F.). — Sur une inégalité que vérifient les zéros d'un polynome (*Bulletin des Sciences math.*, t. 56, 1932, p. 276-281).

75. MONTEL (P.). — Sur les modules des zéros des polynomes (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 40, 1923, p. 1-34).

76. MONTEL (P.). — Sur la limite supérieure du module des racines d'une équation algébrique (*C. R. de la Société des Sciences de Varsovie*, t. 24, 1932, p. 317-326).

77. MONTEL (P.). — Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynomes (*Commentarii Math. Helvetici*, t. 7, 1934-1395, p. 178-200).

78. MORDELL (L. J.). — On a circular region enclosing a root of an algebraic equation (*Journal of the London Math. Society*, t. 4, 1929, p. 202-204).

79. NAGY (J. v. Sz.). — Ueber geometrische Relationen zwischen den Wurzeln einer algebraischen Gleichung und ihrer Derivierten (*Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, t. 27, 1918, p. 44-48).

80. NAGY (J. v. Sz.). — Ueber die Lage der Wurzeln von linearen Verknüpfungen algebraischer Gleichungen (*Acta lit. ac scient. Univ. Hung.* (Szeged), t. 1, 1923, p. 127-138).

81. NAGY (J. v. Sz.). — Ueber einen Satz von M. Fekete (*Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, t. 32, 1924, p. 307-309).

82. NAGY (J. v. Sz.). — Ueber die Lage der Nullstellen der Derivierten eines Polynoms (*Tôhoku Math. Journal*, t. 35, 1932, p. 126-135).

83. NAGY (J. v. Sz.). — Ueber einen Satz von Laguerre (*Journal de Crelle*, t. 169, 1933, p. 186-192).

84. NEKRASSOFF (P.). — Ueber trinomische Gleichungen (*Math. Annalen*, t. 29, 1887, p. 413-430).

85. OBRECHKOFF (N.). — Sur les racines des équations algébriques (*Tôhoku Math. Journal*, t. 38, 1933, p. 93-100).

86. OBRECHKOFF (N.). — Sur les polynomes univalents (*C. R. Acad. Sc.*, t. 198, 1934, p. 2049-2050).

87. ORLANDO (L.). — Sui problema di Hurwitz relativo alle parti reali delle radici di un' equazione algebrica (*Math. Annalen*, t. 71, 1912, p. 233-245).

87 *bis*. PELLET (A.). — Sur un mode de séparation des racines des équations et la formule de Lagrange (*Bulletin des Sciences math.*, t. 5, 1881, p. 393-395).

88. PETROVITCH (M.). — Sur une suite de fonctions rationnelles rattachées aux équations algébriques (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 36, 1908, p. 141-150).

89. ROGOSINSKI (W.). — Ueber positive harmonische Entwickelungen und typisch-reelle Potenzreihen (*Math. Zeitschrift*, t. 35, 1932, p. 94-121).

90. ROUTH. — *Dynamique*, t. 2, Chap. VI, 1874.

91. RUDNICKI (J.). — Remarque sur un théorème de M. Walsh (*Bulletin de l'Académie roumaine*, t. 7, 1934, p. 527-529).

92. SCHMIDT (E.). — *Sitzungsberichte der preuss. Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse*, 1932, p. 321.

93. SCHOLZ (W.). — Bemerkungen zu einer Abhandlung von Herrn Takahashi (*Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, t. 45, 1935, p. 172-180).

94. SCHUR (I.). — Ueber Polynome, die nur im Innern des Einheitskreis verschwinden (*Journal de Crelle*, t. 148, 1918, p. 134-136).

95. SCHUR (I.). — Ueber algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen (*Zeitschrift für angewandte Math. und Mechanik*, t. 1, 1921, p. 307-311).

96. SCHUR (I.). — Bemerkungen zu einem Satz von E. Schmidt (*Sitzungsberichte der preuss. Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse*, 1933, p. 408-428).

97. SERGESCO (P.). — Sur le module minimum des zéros de l'équation trinome (*C. R. Acad. Sc.*, t. 181, 1925, p. 762-763).

98. SERGESCO (P.). — Quelques propriétés des polynomes (*C. R. de la Société des Sciences de Varsovie*, t. 24, 1931, p. 1-7).

99. SZEGÖ (G.). — Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen (*Math. Zeitschrift*, t. 13, 1922, p. 28-55).

100. SZEGÖ (G.). — Zwei Extremalaufgaben über Abbildungen, die durch Polynome vermittelt sind (*Acta lit. ac scient. Univ. Hung.* (Szeged), t. 5, 1932, p. 237-245).

101. SZEGÖ (G.). — Bemerkungen zu einem Satz von E. Schmidt über algebraische Gleichungen (*Sitzungsberichte der preuss. Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse*, 1934, p. 86-98).

102. TAKAGI (T.). — Note on the algebraic equations (*Proceedings of the Phys.-Math. Society of Japan*, 3e série t. 3, 1921, p. 175-179).

103. TAKAHASHI (S.). — Einige Sätze über die Lagen der Wurzeln algebraischer Gleichungen (*Tôhoku Math. Journal*, t. 31, 1929, p. 274-282).

104. TAKAHASHI (S.). — A note on Kakeya's theorem on algebraic equations (*Proceedings of the Phys.-Math. Society of Japan*, 3e série, t. 13, 1931, p. 287-291).

105. TAKAHASHI (S.). — On the algebraic equations whose roots lie in the unit circle (*Tôhoku Math. Journal*, t. 38, 1933, p. 262-264).

106. TÔYA (T.). — Some remarks on Montel's paper concerning upper limit of absolute values of roots of algebraic equations (*Science reports Tokyo Bunrika Daigaku*, A 1, 1933, p. 275-282).

107. VAN VLECK (E. B.). — On limits to the absolute values of the roots of a polynomial (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 53, 1925, p. 105-125).

108. WALSH (J. L.). — On the location of the roots of the Jacobian of two binary forms, and of the derivarive of a rational function (*Transactions of the American Math. Society*, t. 19, 1918, p. 291-298; t. 22, 1921, p. 101-116; t. 23, 1921, p. 87-88; t. 24, 1922, p. 31-69. *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. 46, 1922, p. 1-13).

109. WALSH (J. L.). — On the location of the roots of the derivative of a poly-, nomial (*C. R. du Congrès international des Mathématiciens*, Strasbourg, 1920, p. 339-342; *Proceedings of the National Academy of Sciences*, t. 8, 1922, p. 139-141).

110. WALSH (J. L.). — On the location of the roots of certain types of polynomials (*Transactions of the American Math. Society*, t. 24, 1922, p. 163-180).

111. WALSH (J. L.). — An inequality for the roots of an algebraic equation (*Annals of Math.*, 2^e série, t. 25, 1924, p. 285-286).

112. WALSH (J. L.). — On Pellet's theorem concerning the roots of a polynomial (*Annals of Math.*, 2^e série, t. 26, 1924-1925, p. 59-64).

113. WALSH (J. L.). — Note on the location of the roots of a polynomial (*Math. Zeitschrift*, t. 24, 1926, p. 733-742).

114. WALSH (J. L.). — Note on the location of the roots of the derivative of a polynomial (*Mathematica*, t. 8, 1934, p. 185-190).

115. WESTERFIELD (E.). — A new bound for the zeros of polynomials (*American Math. Monthly*, t. 40, 1933, p. 18-23).

116. WILLIAMS (K. P.). — Note concerning the roots of an equation (*Bulletin of the American Math. Society*, t. 28, 1922, p. 394-396).

TABLE DES MATIÈRES.