Mémorial des sciences mathématiques

Georges Valiron

Directions de Borel des fonctions méromorphes

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 89 (1938)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1938__89__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LXXXIX

Directions de Borel des fonctions méromorphes

Par M. Georges VALIRON

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1938

DIRECTIONS DE BOREL

DES

FONCTIONS MÉROMORPHES

Par M. Georges VALIRON.

INTRODUCTION.

Depuis la publication du fascicule II de cette Collection, la théorie des fonctions entières ou méromorphes a fait des progrès considérables. Le but de ce petit livre est de donner un exposé indépendant de ceux qui concernent l'étude des directions d'accumulation des points où la fonction considérée prend une valeur donnée arbitraire et dans lesquelles la densité de ces points est suffisamment grande.

On entendra par fonction entiere une fonction $f(z)$ de la variable complexe z qui est holomorphe en tout point à distance finie, mais qui ne se réduit pas à un polynome; par fonction méromorphe, une fonction $f(z)$, uniforme, dont les seules singularités à distance finie sont des pôles, mais qui n'est pas une fraction rationnelle. Les fonctions entières sont donc les fonctions méromorphes spéciales ne prenant pas la valeur infinie.

On désignera par $n(r, f-a)$ le nombre des points de module inférieur à r en lesquels la fonction $f(z)$, méromorphe pour $|z| \leqq r$, prend la valeur a, chaque point étant compté avec son ordre de multiplicité, q fois s'il est d'ordre q. Pour a infini,

$$n(r, f-\infty) = n(r, 1/f).$$

E. Borel a montré que, à toute fonction méromorphe donnée $f(z)$

correspond un nombre $\rho = \rho(f)$, qu'il a appelé *ordre* (ou *ordre réel*) de $f(z)$, tel que, pour tous les x finis ou infinis, on ait

$$(1) \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log^{+} n(r, f-x)}{\log r} = \rho$$

sauf au plus pour deux valeurs de x. u^{+} désigne u si $u \geqq 0$, 0 si $u < 0$. Pour les deux valeurs exceptionnelles possibles, appelées *valeurs exceptionnelles de Borel*, le premier membre de (1) est inférieur à ρ. L'ordre ρ peut être nul, fini positif, ou infini. Dans ce dernier cas, Borel introduisit un ordre variable $\rho(r)$ et montra que, pour certaines catégories de fonctions, (1) peut être remplacée par

$$(2) \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log^{+} n(r, f-x)}{\rho(r) \log r} = 1,$$

l'égalité valant pour tous les x sauf deux au plus pour lesquelles le premier membre de (2) est inférieur au second. Ses résultats complétés, notamment dans le cas des fonctions entières, par Lindelof, Blumenthal, Denjoy, Wiman, Boutroux, Littlewood, Valiron, etc., ont été mis sous une forme générale très précise par R. Nevanlinna dont une partie des méthodes, base des recherches dont il va être question, sera résumée plus loin. Les théorèmes de Nevanlinna se rapportent, comme ceux de Borel, à l'étude des modules des zéros des fonctions $f(z) - x$, ou à l'étude des modules de ces zéros appartenant à certains secteurs. Au lieu d'utiliser directement la fonction $n(r, f-x)$, on emploie la moyenne de Jensen, introduite systématiquement par G. Valiron dans ces questions :

$$(3) \qquad N(r, 0) = N(r, 1/f) = \int_0^r [n(x, f) - n(0, f)] \frac{dx}{x} + n(0, f) \log r \quad (^1)$$

qui s'écrit aussi

$$(4) \qquad \log \frac{r^n}{r_{p+1} r_{p+2} \cdots r_n} \qquad [n = n(r, f),\ p = n(0, f)],$$

$r_{p+1}, r_{p+2}, \ldots, r_n$ désignant les modules des $n - p$ zéros non nuls de module moindre que r, chacun figurant avec son ordre de multiplicité. $f(z)$ étant donné, si l'on représente les nombres x sur une

(1) D'une façon générale on aura $N(r; x) = N[r, 1/(f-x)]$, la notation abrégée $N(r; x)$ étant utilisée dans tous les cas où une seule fonction est en jeu.

sphère de Riemann de rayon 1 et si l'on désigne par $\tau(r, C)$ la moyenne superficielle de $N(r; x)$ pour les x appartenant à un cercle C de la sphère, la différence $\tau(r, C) - \tau(r, C')$ reste bornée lorsque r croît indéfiniment, et l'on a

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r; x)}{\tau(r, C)} = 1 \tag{5}$$

pour tous les x, sauf au plus pour des x dont les points représentatifs sur la sphère forment un ensemble de mesure linéaire nulle (c'est-à-dire peuvent être enfermés dans des cercles dont la somme des rayons est arbitrairement petite). Pour les x exceptionnels, le défaut

$$\delta_x = 1 - \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r; x)}{\tau(r, C)}$$

est en général nul, la somme totale des défauts étant au plus égale à 2. Ces brèves indications suffisent pour montrer le degré de perfection qui a été atteint dans l'étude des modules de la distribution des valeurs grâce aux méthodes de Nevanlinna.

La recherche de propriétés générales des arguments des points où $f(z) = x$ a été abordée en premier lieu par G. Julia. Dans de mémorables travaux où il utilise la théorie des familles normales de P. Montel, il montra notamment que, si $f(z)$ est une fonction entière ou une fonction méromorphe possédant une valeur asymptotique (c'est-a-dire tendant vers une limite finie ou infinie lorsque z s'éloigne indéfiniment sur un chemin allant à l'infini), il existe au moins une suite de points z_n, $n = 1, 2, \ldots$ telle que $|z_{n+1}| \geqq k |z_n|$, $k > 1$, et telle que, si petit que soit le nombre positif ε, $f(z)$ prenne une infinité de fois toute valeur sauf deux au plus dans la suite des cercles $|z - z_n| < \varepsilon |z_n|$. Ses résultats furent complétés et étendus, en particulier par A. Ostrowski qui établit, d'une part qu'on peut choisir la suite z_n pour que, dans chaque cercle $\Gamma_n : |z - z_n| < \varepsilon_n |z_n|$, $f(z)$ prenne une fois au moins toute valeur sauf au plus celles qui sont représentées sur la sphère de Riemann dans deux cercles, γ_n, γ'_n dont les rayons, ainsi que ε_n tendent vers 0 avec $1/n$; d'autre part, que la propriété vaut pour toute fonction méromorphe sauf pour une classe de fonctions d'ordre nul, fonctions pour lesquelles $\tau(r, C) : (\log r)^2$ reste borné. H. Milloux, en conservant l'hypothèse de Julia (existence d'une valeur asymptotique), mais en remplaçant la théorie des familles normales par l'emploi du théorème de Schottky et d'une inégalité de Carleman, précisa la grandeur du rayon des cercles Γ_n, cercles qu'il appela *cercles de remplissage* : il relia la valeur de ε_n à la façon dont $f(z)$ tend vers sa valeur asymptotique. Ce genre d'étude fut poursuivi par G. Valiron qui, par le seul emploi de la forme précise du théorème de Schottky, obtint une valeur très exacte du rayon des cercles de remplissage des fonctions entières, et en utilisant les théorèmes de Nevanlinna trouva pour les fonctions méromorphes d'ordre positif une limite moins bonne mais ne faisant intervenir que la fonction $\tau(r, C)$. La méthode de Nevanlinna, qui avait conduit à des démonstrations des théorèmes de Landau et de Schottky, permit alors une étude quantitative précise du nombre des zéros de $f(z) - x$ dans certains cercles de remplissage. On montra que, pour toute fonction d'ordre positif fini ρ, existe une suite de points z_n, avec $\lim |z_n| = \infty$, et de cercles correspondants $\Gamma_n : |z - z_n| < \varepsilon |z_n|$, où ε est arbitrairement petit, telle que, dans chaque Γ_n, $f(z)$ prend au moins $|z_n|^{\rho-\varepsilon_n}$ fois toute valeur x représentée sur la sphère à l'extérieur de deux cercles de rayon η'_n, η_n et η'_n tendant vers 0 avec $1/n$. De tels cercles seront dits des *cercles de remplissage d'ordre* ρ. C'est l'étude de ces cercles et de cercles jouissant de propriétés analogues plus précises, et l'étude des directions Δ dans lesquelles les centres de ces cercles s'éloignent indéfiniment, qui sera l'objet de ce fascicule. Si A est un angle de bissectrice Δ et d'ouverture arbitrairement petite, il existe une suite infinie de cercles Γ_n intérieurs à A et par suite, pour tous les x sauf deux au plus l'égalité (1) reste vraie lorsqu'on y remplace $n(r, f - x)$ par le nombre des points z appartenant à A et tels que $f(z) = x$, $|z| < r$. *Le théorème de Borel reste vrai dans tout angle de bissectrice* Δ, ce qui justifie le nom de *direction de Borel* donné à une telle direction et le titre de cet exposé.

Le premier chapitre donne les théorèmes fondamentaux de la théorie avec des démonstrations assez détaillées justifiant des propositions qui avaient été jusqu'ici énoncées seulement dans de brèves notes; dans le second chapitre, ces théorèmes sont appliqués à l'étude des directions de Borel des fonctions les plus générales. Un troisième chapitre traite des fonctions spéciales, notamment des fonctions entières.

Il convient de signaler que les fonctions algébroïdes auxquelles les résultats concernant la distribution circulaire des valeurs ont été étendus, n'ont pas pu être encore étudiées d'une façon satisfaisante au point de vue qui nous occupe.

CHAPITRE I.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

1. Le théorème de Jensen et la fonction $T(r)$ de Nevanlinna. — Si $F(z)$ est une fonction méromorphe pour $|z| \leqq R$ et si $F(0) \neq 0$, $F(0) \neq \infty$, la formule de Jensen

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(Re^{i\varphi})|\,d\varphi = \log|F(0)| + \log\frac{R^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} - \log\frac{R^p}{r'_1 r'_2 \ldots r'_p},$$

où les r_j sont les modules des zéros et les r'_k les modules des pôles de $F(z)$ contenus dans le cercle, peut s'écrire en séparant les éléments positifs et négatifs ([1]). En utilisant la définition de la fonction N [formule (3) de l'introduction] et en posant

$$m(R, F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|F(Re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

on a

$$(7) \quad m(R, F) + N(R, F) = m(R, 1/F) + N(R, 1/F) + \log|F(0)|.$$

Si $F(0) = 0$ ou $F(0) = \infty$, on a autour de l'origine $F(z) = c_q z^q + \ldots$, $q \gtrless 0$; en appliquant (7) à $F(z) z^{-q} R^q$, on voit que la formule reste vraie à condition d'y remplacer $|F(0)|$ par $|c_q|$. Nous désignerons dans tous les cas le dernier terme de (7) par $C(F)$.

Le premier membre de (7) est la fonction $T(R, F)$ de R. Nevanlinna. Comme $m(R, F)$ n'est pas négatif, $N(R, F)$ est au plus égal à $T(R, F)$, et l'on a, pour $r < R$ et $F(0)$ fini,

$$n(r, 1/F)\log R/r \leqq T(R, F).$$

Les a_j étant positifs, on a ([2])

$$\log^+\left(\sum_1^n a_j\right) \leqq \sum_1^n \log^+ a_j + \log n; \qquad \log^+\left(\prod_1^n a_j\right) \leqq \sum_1^n \log^+ a_j.$$

---

(1) Cette séparation des éléments positifs et négatifs de la formule de Jensen semble avoir été faite d'abord par P. Fatou (*Bull. Sc. math.*, 2e série, 45, 1921).

(2) *Voir* le livre de R. Nevanlinna dans la *Collection Borel*. Ce livre sera désigné par (Na).

d'où il suit, que, pour Z fini,

$$|m(r, F) - m(r, F - Z)| \leqq \log^+|Z| + \log 2,$$

donc

(8) $$|T[r, 1/(F - Z)| - T(r, F) + C(F - Z)| \leqq \log^+|Z| + \log 2.$$

En supposant F(o) fini, on peut [H. Cartan, *b*] écrire la formule de Jensen

$$N(r;\, e^{i\theta}) - N(r;\, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}|\, d\varphi - \log|F(0) - e^{i\theta}|,$$

multiplier par $\frac{1}{2\pi}\, d\theta$ et intégrer de o à 2π. En intervertissant l'ordre des intégrations dans la première intégrale du second membre et en utilisant la formule de Jensen dans le résultat et dans la seconde intégrale, on trouve

$$T(r, F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r;\, e^{i\theta})\, d\theta + \log^+|F(0)|.$$

Si F(o) est infini, on voit que log | F(o) | doit être remplacé par C(F). D'après la définition de N, l'intégrale du second membre est égale à

$$\int_0^r t(x, F)\frac{dx}{x}, \qquad t(x, F) = \int_0^{2\pi} n(x, F - e^{i\theta})\, d\theta.$$

Ceci montre que T(*r*, F) *est une fonction différentiable croissante*, *r*T'(*r*, F) *est non décroissante*, donc T(*r*, F) *est une fonction convexe de* log *r* [Na, Cartan, *b*]. On peut aussi montrer que T(*r*, F) *est une fonction analytique de r* dans des intervalles adjacents [14, *l*; 6, *b*].

En procédant de même en remplaçant $e^{i\theta}$ par $xe^{i\theta}$, on peut faire une double intégration après avoir multiplié par $2x\, dx\, d\theta/\pi(1 + x^2)^2$, ce qui montre, en tenant compte de (8), que la différence entre la fonction T(*r*, *f*) d'une fonction méromorphe et la moyenne appelée $\tau(r, C)$ dans l'introduction est bornée quel que soit le cercle C de la sphère.

2. Théorème de Nevanlinna sur la dérivée logarithmique. — En faisant une transformation conforme du cercle $|z| < R$ en lui-même

(9) $$Z = \frac{R}{\chi(z, z_0)}, \qquad \chi(z, z_0) = \frac{R^2 - \bar{z}_0 z}{(z - z_0)R} \quad (^1)$$

(1) $\bar{z}_0$ est le nombre imaginaire conjugué de z_0.

et en appliquant la formule de Jensen à la transformée de $F(z)$, on a

$$\log|F(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r_0^2}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi$$
$$+\sum_1^p \log|\chi(z_0, b_k)| - \sum_1^n \log|\chi(z_0, a_j)|,$$

les a_j étant les zéros et les b_k les pôles de $F(z)$, $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, $r_0 < R$. Cette égalité, appelée par R. Nevanlinna, formule de Poisson-Jensen, est relative aux fonctions harmoniques, on en déduit l'égalité de R. Nevanlinna en observant que le second facteur dans l'intégrale est la partie réelle du quotient de $Re^{i\varphi}+z_0$ par $Re^{i\varphi}-z_0$, ce qui donne en mettant z au lieu de z_0,

$$\log F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(Re^{i\varphi})|\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi$$
$$+\sum_1^p \log\chi(z, b_k) - \sum_1^n \log\chi(z, a_j) + iC,$$

C étant une constante. En dérivant (Na), on obtient

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(Re^{i\varphi})|\frac{2Re^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi}-z)^2}d\varphi$$
$$+\sum_1^p \frac{|b_k|^2-R^2}{(z-b_k)(R^2-\bar{b}_k z)} - \sum_1^n \frac{|a_j|^2-R^2}{(z-a_j)(R^2-\bar{a}_j z)},$$

ce qui conduit à l'inégalité

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z)}\right| < \frac{2R}{(R-r)^2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|F(Re^{i\varphi})||\,d\varphi\right.$$
$$\left.+\sum_1^p |\chi(z, b_k)| + \sum_1^n |\chi(z, a_j)|\right\}.$$

Comme $|\chi(z, b_k)| > 1$, la formule de Jensen donne

$$m[r, \chi(z, b_j)] = \log\frac{R}{|b_j|} - \log^+\frac{r}{|b_j|},$$

d'autre part, si $F(0) = c_0$ n'est ni nul ni infini, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|F(Re^{i\varphi})||\,d\varphi = m(R, F) + m\left(R, \frac{1}{F}\right) < 2\,T(R, F) + \log\left|\frac{1}{c_0}\right|,$$

donc

$$m\left(r, \frac{F'}{F}\right) < \log^+ \frac{2R}{(R-r)^2} + \log^+ 2\,T(R, F) + \log^+ \left|\log^+ \frac{1}{|c_0|}\right|$$
$$+ N(R, F) - N(r, F) + N\left(R, \frac{1}{F}\right) - N\left(r, \frac{1}{F}\right)$$
$$+ \log\left[n(R, F) + n\left(R, \frac{1}{F}\right) + 2\right].$$

Les valeurs de la fonction n qui figurent dans le dernier terme sont majorées au moyen de $T(R', F)$, $R' > R$, en supposant $F(z)$ méromorphe pour $|z| \leqq R'$. On utilise la convexité de $N(r, F)$ en $\log r$, pour majorer les différences de la forme $N(R, F) - N(r, F)$. En prenant enfin

$$R - r = \frac{r(R' - r)}{2\left[T(R', F) + \log^+ \frac{1}{|c_0|} + 1\right] R' + 1},$$

et en mettant R à la place de R' dans la formule finale, on arrive à l'énoncé fondamental suivant :

Si $F(z)$ *est méromorphe pour* $|z| \leqq R$ *et si* $c_0 = F(0)$ *n'est ni nul ni infini, on a pour* $r < R$

$$(10) \qquad m\left(r, \frac{F'}{F}\right) < 4 \log^+ T(R, F) + 3 \log^+ \frac{1}{R - r} + 4 \log^+ R$$
$$+ 2 \log^+ \frac{1}{r} + 4 \log^+ \left|\log^+ \frac{1}{|c_0|}\right| + 16.$$

3. **Inégalité fondamentale pour** $T(r, F)$. — Si $F(z)$ est méromorphe pour $|z| \leqq R$,

$$F(0) = c_0 \neq 0, 1, \infty, \qquad F'(0) = c_1 \neq 0, \infty,$$

l'identité de Borel et Nevanlinna

$$F \equiv \frac{\frac{F'}{F - 1}}{\frac{F'}{F - 1} - \frac{F'}{F}},$$

donne, pour $r \leqq R$,

$$m(r, F) \leqq m\left(r, \frac{F'}{F - 1}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F - 1}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F}\right) + \log 2 + N\left(r, \frac{1}{F}\right)$$
$$+ N\left(r, \frac{1}{F - 1}\right) - N\left(r, \frac{1}{F'}\right) + \log\left|\frac{c_0(c_0 - 1)}{c_1}\right|,$$

et *a fortiori*

$$T(r, F) \leqq 2m\left(r, \frac{F'}{F-1}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F}\right) + N(r; 0) + N(r; 1)$$
$$+ N(r; \infty) + \log\left|\frac{c_0(c_0-1)}{c_1}\right| + 1.$$

En tenant compte de (10), il s'ensuit que, si $r < R' < R$,

$$T(r, F) < N(r; 0) + N(r; 1) + N(r; \infty) + 12 \log^+ T(R', F) + 9 \log^+ \frac{1}{R'-r}$$
$$+ 12 \log^+ R' + 6 \log^+ \frac{1}{r} + 57 + \log\left|\frac{1}{c_1}\right| + \log|c_0(c_0-1)|$$
$$+ 8 \log^+\left|\log^+\left|\frac{1}{c_0-1}\right|\right| + 4 \log^+\left|\log^+ \frac{1}{|c_0|}\right|,$$

et, comme la somme des trois derniers termes reste inférieure à $8 + 2\log^+|c_0|$, on peut écrire

$$T(r, F) < 12 \log^+ T(R', F) + 9 \log \frac{R}{R'-r} + H, \tag{11}$$

où

$$H = N(R; 0) + N(R; 1) + N(R; \infty) + 12 \log^+ R + 15 \log^+ \frac{1}{R}$$
$$+ 81 + 2 \log^+|c_0| + \log^+ \frac{1}{|c_1|},$$

pourvu que $\frac{1}{2}R \leqq r < R' < R$. On élimine la fonction T dans le second membre de (11) en utilisant les propriétés des fonctions croissantes découvertes par E. Borel. D'après une remarque de Landau, (11) entraîne

$$T(r, F) < 12\sqrt{T(R', F)} + 9 \log \frac{R}{R'-r} + H,$$

et, en procédant par l'absurde et itérant, on voit que, si $r < R$,

$$T(r, F) < 5H + 14 \log \frac{R}{R-r}.$$

On peut simplifier H en supposant d'abord $R = 1$, puis en appliquant le résultat à $T(r, F) = T\left(\frac{r}{R}, F(zR)\right)$. On arrive ainsi au théorème qui servira de point de départ à notre étude :

I. *Si* $F(z)$ *est méromorphe pour* $|z| \leqq R$,

$$F(0) \neq 0, 1, \infty, \qquad F'(0) \neq 0, \infty,$$

on a pour $r < \mathrm{R}$

$$(12)\quad \mathrm{T}(r, \mathrm{F}) < 5[\mathrm{N}(\mathrm{R}; 0) + \mathrm{N}(\mathrm{R}; 1) + \mathrm{N}(\mathrm{R}; \infty)] + 405 + 10 \log^+ |\mathrm{F}(0)| + 5 \log^+ \frac{1}{|\mathrm{F}'(0)|\mathrm{R}} + 14 \log \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} - r}.$$

Si $\mathrm{F}(z)$ ne prend pas les valeurs 0, 1, ∞ dans le cercle $|z| \leqq \mathrm{R}$, le premier terme du second membre disparaît, $\mathrm{T}(r, \mathrm{F})$ peut être remplacé par $m(r, \mathrm{F})$ et, en appelant $\mathrm{M}(r, \mathrm{F})$ le maximum de $|\mathrm{F}(re^{i\varphi})|$, l'inégalité de Jensen-Poisson donne,

$$(13)\qquad \log \mathrm{M}(kr, \mathrm{F}) < \frac{1+k}{1-k} m(r, \mathrm{F}) \qquad (0 < k < 1).$$

Comme

$$\log \mathrm{M}(kr, \mathrm{F}) > \log[kr\,|\mathrm{F}'(0)|],$$

la formule (12) dans laquelle on prend $\mathrm{R} = \frac{r}{k}$, donne

$$\log |kr\,\mathrm{F}'(0)| < \frac{k+1}{1-k}\left[405 + 10 \log^+ |\mathrm{F}(0)| + 5 \log^+ \frac{k}{|\mathrm{F}'(0) r|} + 14 \log \frac{1}{1-k}\right].$$

En prenant, par exemple, $k = \frac{1}{2}$, cette inégalité fournit le théorème classique de Landau sous la forme suivante :

Si $\mathrm{F}(z) = c_0 + c_1 z + \ldots$ *est holomorphe autour de l'origine, cette fonction cesse d'être holomorphe ou bien prend la valeur* 0 *ou la valeur* 1 *dans le cercle de rayon*

$$\mathrm{A}\,\frac{1}{|c_1|}[1 + |c_0|]^{30},$$

A est une constante numérique.

4. Théorème de Boutroux-Cartan sur le minimum du module d'un polynome. — Dans les recherches sur les fonctions entières, on a fréquemment besoin de connaître une borne inférieure du module d'un polynome canonique $\mathrm{P}(z) = \prod_{1}^{n} (z - z_\nu)$ dont le degré n est connu, mais dont la position des zéros est inconnue, lorsqu'on supprime un certain voisinage des zéros. Boutroux donna un premier résultat qui fut complété par H. Cartan sous la forme suivante :

e étant la base des logarithmes, H *un nombre positif arbitraire, on a*

$$|P(z)| > \left(\frac{H}{e}\right)^n,$$

pourvu que l'on supprime du plan n cercles au plus dont la somme des rayons est au plus 2H.

Étant donnée l'importance de ce théorème pour la suite, nous reproduisons sa démonstration [*voir* Cartan (*a*)]. Considérons le plus grand entier λ_1 qui est tel qu'il existe un cercle C_1 de rayon $\frac{\lambda_1 H}{n}$ contenant exactement λ_1 points z_ν. (λ_1 existe, car s'il n'y avait pas de cercle C_1 pour $\lambda_1 = n$, puis $n-1$, ..., puis $\lambda_1 = 2$, les cercles de centres z_ν et rayon $\frac{H}{n}$ contiendraient chacun un seul point z_ν. Supposons, en effet, le contraire; un de ces cercles contiendrait q points, le cercle concentrique de rayon $q\frac{H}{n}$ en contiendrait $q' > q$, le cercle concentrique de rayon $q'\frac{H}{n}$ en contiendrait $q'' > q'$, etc., ce qui conduirait à une contradiction). Les points contenus dans C_1 étant appelés *points de rang* λ_1, considérons uniquement les autres points, il existera un plus grand entier λ_2 évidemment au plus égal à λ_1 et un cercle correspondant C_2 de rayon $\lambda_2\frac{H}{n}$ contenant λ_2 points qu'on appellera *points de rang* λ_2. Prenant ensuite les points qui ne sont ni de rang λ_1 ni de rang λ_2, on définira les *points de rang* λ_3, $\lambda_3 \leq \lambda_2$, etc. On a vu ce qui se passe si l'on arrive aux *points de rang* 1. La somme des rayons des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p$ obtenus est

$$\frac{H}{n}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p) = H.$$

D'après la définition du rang, tout cercle S de rayon $\lambda\frac{H}{n}$, où λ est un entier inférieur ou égal à n, contient au moins un point de rang $\geq \lambda$ s'il contient au moins λ points. Par suite, si l'on marque les cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ concentriques respectivement aux C_1, $C_2, \ldots, C_p$ et de rayons respectivement doubles, et si z est pris à l'extérieur des cercles Γ, un cercle S de centre z et de rayon $\lambda\frac{H}{n}$ contient au plus $\lambda - 1$ points. Car, λ_j étant le rang d'un point z_ν intérieur à S et a_j le centre du cercle C_j correspondant, on a

$$2\lambda_j \frac{H}{n} \leqq |z - a_j| < \lambda_j \frac{H}{n} + \lambda \frac{H}{n},$$

donc $\lambda_j < \lambda$. Si l'on range les z_ν dans l'ordre des distances croissantes à z, la distance à z du $q^{\text{ième}}$ point est au moins $q\frac{H}{n}$, et l'on a

$$|P(z)| \geqq \left(\frac{H}{n}\right)^n n! \geqq \left(\frac{H}{e}\right)^n,$$

ce qui démontre le théorème puisque la somme des rayons des Γ est $2H$.

5. **Théorème fondamental sur la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe dans un cercle.** — (*Voir* [14, *a*]; [7, *a*, *b*]; [14, *b*]. Nous supposons que la fonction $F(z)$ est méromorphe pour $|z| < 1$ et ne prend que n fois au plus dans ce cercle les valeurs $0, 1, \infty$. Nous nous proposons d'obtenir une borne du nombre des zéros de $F(z) - x$ lorsque x est arbitraire et $|z| < r < 1$. Il est loisible de supposer $r \geqq \frac{1}{2}$ et de prendre pour $r \leqq \frac{1}{2}$ la borne obtenue pour $\frac{1}{2}$.

Appelons a_j les zéros, b_k les pôles de $F(z)$ et c_ν les zéros de $F(z) - 1$ situés dans le cercle $|z| < 1$. D'après le théorème de Cartan les produits

$$\Pi|z_0 - a_j|, \qquad \Pi|z_0 - b_k|, \qquad \Pi|z_0 - c_\nu|,$$

formés avec ces zéros, pôles et uns sont supérieurs à $(2eh)^{-n}$ pourvu que z_0 soit extérieur à $3n$ cercles γ au plus dont la somme des rayons est $\frac{3}{h}$. Prenons $\frac{1}{h} = \frac{1-r}{30}$; il existera une droite $x = x_0$ (on pose $z = x + iy$) qui ne coupe pas les cercles γ et dont la distance à l'origine est inférieure à $\frac{6}{h}$ donc à $\frac{1-r}{5}$. Prenons $z_0 = x_0$, il existera une circonférence Γ : $|z - z_0| = a$, qui ne coupe pas les cercles γ, qui contient $|z| = r$ et dont la plus courte distance à cette circonférence et à $|z| = 1$ est au moins égale à $\frac{1-r}{5}$.

Il est loisible de supposer $|F(z_0)| \leqq 1$; dans le cas contraire on opérerait sur $\frac{1}{F(z)}$. Si $|F'(z_0)| < 1$, nous faisons décrire à z le segment

$x = x_0, y > 0$ intérieur à Γ : tant que $|F'(z)|$ est inférieur à 1, $|F(z)|$ sera inférieur à 2. Si ceci a lieu jusqu'au point z'_0 situé sur Γ, on décrit à partir de ce point, dans les deux sens, la circonférence Γ : tant que $|F'(z)| < 1$, on a encore $|F(z)| < 2 + \pi$. On a ainsi deux cas à envisager :

Premier cas. — Sur tout Γ, on a $|F(z)| < 2 + \pi$, donc

$$|F(z) - Z| < 2 + \pi + |Z|$$

et

$$T[a, F(z_0 + z) - Z] < \log(2 + \pi + |Z|) + \log \prod \frac{1}{|z_0 - b_k|} + n \log 2$$
$$< \log(6 + |Z|) + n \log(4he),$$

donc

$$n[a - \eta, F(z_0 - z) - Z] < \frac{1}{\log \dfrac{a}{a - \eta}} \left[n \log(4eh) + \log \frac{6 + |Z|}{|Z - F(z_0)|} \right].$$

Il s'ensuit que, dans $|z| < r$, le nombre des zéros de $F(z) - Z$ est au plus égal à

$$\frac{5}{1 - r} \left(n \log \frac{340}{1 - r} + 3 + K \right),$$

pourvu que

$$\log |Z - F(z_0)| > -K.$$

Deuxième cas. — Il existe un point z_1 sur Γ ou à son intérieur, extérieur aux cercles γ, en lequel $|F(z_1)| < 6$ et $|F'(z_1)| \geqq 1$. La transformation conforme

$$\zeta = \frac{z - z_1}{1 - z\bar{z}_1}, \qquad F(z) = G(\zeta),$$

qui conserve le cercle unité, remplace le cercle $|z| = r$ par une circonférence dont la plus courte distance au cercle unité est au moins $\frac{1}{10}(1 - r)^2$. On peut appliquer l'inégalité (12) à $G(\zeta)$ en y remplaçant r par $1 - \frac{(1 - r)^2}{20}$ et en y faisant tendre R vers 1. On a

$$\log^+ |G(0)| < 2, \qquad |G'(0)| = |F'(z_1)| (1 - |z_1|^2) > \frac{1}{5}(1 - r),$$

puis

$$N(R, G) < \sum \log \left| \frac{1 - b_k \bar{z}_1}{b_k - z_1} \right| < \sum \log \frac{2}{|b_k - z_1|} < n \log(4eh),$$

et les inégalités analogues pour $N\left(R, \frac{1}{G}\right)$ et $N\left(R, \frac{1}{(G-1)}\right)$. On obtient ainsi

$$T\left(1-\frac{1}{20}(1-r)^2, G\right) < 15n\log(4eh) + 500 + 30\log\frac{1}{1-r}.$$

Il s'ensuit que le nombre des zéros de $G(\zeta) - Z$ pour

$$|\zeta| < 1 - \frac{1}{10}(1-r)^2,$$

et *a fortiori* le nombre des zéros de $F(z) - Z$ pour $|z| < r$ est au plus égal à

$$\frac{20}{(1-r)^2}\left[15n\log\frac{340}{1-r} + 30\log\frac{1}{1-r} + 500 + \log\frac{1+|Z|}{|Z-F(z_1)|}\right].$$

En groupant les résultats obtenus dans les deux cas, on obtient l'énoncé suivant :

II. *Soit* $F(z)$ *une fonction méromorphe pour* $|z| < 1$, *qui ne prend pas plus de n fois dans ce cercle les valeurs* $0, 1, \infty$. *Dans le cercle* $|z| < r$, $r < 1$, $F(z)$ *prend au plus*

$$(14)\qquad \frac{1}{(1-r)^2}\left[(A'n + B')\log\frac{1}{1-r} + C'\log\frac{1}{d}\right]$$

fois toute valeur Z *arbitraire*, *d désignant la distance sphérique de* Z *à une valeur* $Z(r)$. A', B', C' *sont des constantes numériques positives* [1].

On passe de cet énoncé à un théorème général relatif à une fonction $F(z)$ méromorphe pour $|z| < 1$ et ne prenant pas plus de n fois trois valeurs distinctes a, b, c, en appliquant II à la fonction

$$(15)\qquad \Phi(z) = \frac{F(z)-a}{F(z)-b}\,\frac{c-b}{c-a}.$$

L'expression (14) fournira une borne du nombre des racines de $\Phi(z) - Z'$ dans le cercle $|z| < r$, si l'on suppose que la distance sphérique de Z' à un point $Z'(r)$ est supérieure à d. Désignons par $|Z, Z'|$ la distance sphérique des points représentatifs de Z et Z'. Si l'on suppose $|a, b| > \delta$, $|b, c| > \delta$, $|c, a| > \delta$, et si le point représentatif de Z' décrit un cercle de rayon d, le point représentant le

(1) M. Milloux a obtenu récemment une formule plus précise (*C. R. Acad. Sc.*, t. 202, 1936, p. 1480).

nombre Z défini par

$$Z' = \frac{Z-a}{Z-b}\,\frac{b-c}{a-c},$$

décrit un cercle dont le rayon est au plus égal à $5000\,\frac{d}{\delta^5}$. On arrive ainsi à l'énoncé général :

III. *Si* $F(z)$ *est méromorphe pour* $|z| < R$ *et prend* n *fois au plus dans ce cercle trois valeurs* a, b, c *telles que* $|a, b| > \delta$, $|b, c| > \delta$, $|c, a| > \delta$, *dans le cercle* $|z| < kR$, $k < 1$, $F(z)$ *prend au plus*

$$\frac{1}{(1-k)^7}\left[(An + B)\log\frac{2}{1-k} + C\log\frac{1}{\delta} + D\log\frac{1}{|Z, Z(k)|}\right] \tag{16}$$

fois toute valeur Z. $Z(k)$ *est un nombre dépendant de* r (*et de* F). A, B, C, D *sont des constantes numériques positives.*

On sait que la méthode des familles normales de P. Montel fournit également, dans les conditions de l'énoncé, une borne du nombre des zéros de $F(z) - Z$, mais la forme de la borne n'est pas connue explicitement. La propriété de la borne donnée ici, qui jouera un rôle essentiel dans la suite, est d'être une fonction linéaire de n. Le cas des polynomes montre d'ailleurs qu'on ne peut pas avoir une limite dont le rapport à n tendrait vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

6. Extensions du théorème de Schottky. Cas des fonctions holomorphes. — La méthode précédente a fourni une borne de la fonction T dans le cas où l'on avait $|F(z_0)| < 1$. Si $F(z)$ est holomorphe, l'inégalité (13) permet d'en déduire une borne de $|F(z)|$; le passage de la borne de T à celle de F se faisant dans les mêmes conditions que le passage de la borne de T à celle de n (sauf que la valeur $|F(z_0) - Z|$ n'intervient plus ici). Pour remplacer l'hypothèse sur $|F(z_0)|$ par une autre ne faisant pas intervenir le point indéterminé z_0, mais suffisant pour l'application de la méthode d'exclusion du voisinage des zéros et des uns, il importe de remarquer que, dans l'emploi du théorème de Cartan, il est loisible de supposer les cercles d'exclusion extérieurs les uns aux autres (puisque deux cercles sécants ou tangents peuvent être remplacés par un seul sans augmenter la somme des rayons).

Supposons alors que $F(z)$, holomorphe pour $|z| < 1$, prenne au plus

n fois dans ce cercle les valeurs 0 et 1 et que dans le cercle $|z| \leq \tau < 1$, l'inégalité

$$(17) \qquad |F(z)| < M < \infty$$

soit réalisée en des points qui ne puissent pas être enfermés dans $2n$ circonférences dont la somme des rayons est inférieure à $d(d < \tau)$. Si l'on marque les cercles γ d'exclusion relatifs aux zéros et uns de $F(z)$, extérieurs les uns aux autres, en nombre au plus égal à $2n$, et dont la somme des rayons est $\frac{2}{h} < d$. il existera un point z_0, $|z_0| < \tau$, extérieur aux γ, en lequel (17) sera vérifiée. r étant pris tel que $\tau < r < 1$, il existe une circonférence $|z| = a$, avec

$$r + \frac{1}{3}(1 - r) < a < 1 - \frac{1}{3}(1 - r),$$

ne coupant pas les cercles γ, pourvu que $\frac{1}{h} < \frac{1-r}{12}$. Cette circonférence que nous appellerons encore Γ, remplacera la circonférence de même nom du numéro précédent. En joignant z_0 au point le plus proche de Γ, puis en remplaçant chaque portion QQ' de ce segment qui appartient à un cercle γ par l'un des arcs de la circonférence de ce cercle joignant Q à Q', on obtient un chemin S de longueur moindre que $r + \frac{4\pi}{h} < 3$ joignant z_0 à un point z'_0 de Γ. On applique alors la méthode de cheminement en allant de z_0 à z'_0, puis à partir de z'_0 dans les deux sens sur Γ, tant que $|F'(z)| < 1$. Dans le cas où z'_0 est atteint, puis Γ parcouru entièrement, on a sur tout Γ

$$\log |F(z)| < \log[M + 3].$$

Dans le cas où l'on est arrêté en un point z_1, on fait la transformation conforme du numéro précédent, et de la borne obtenue pour $T\left[1 - \frac{1}{12}(1 - r)^2, G\right]$ on déduit au moyen de (13) une borne de $|G(\zeta)|$ pour $|\zeta| < 1 - \frac{1}{6}(1 - r)^2$ et par suite de $|F(z)|$ pour $|z| < r$. On obtient ainsi le théorème suivant, qui, pour $n = 0$ [et par suite d arbitrairement petit, c'est-à-dire (17) vérifiée en un point], se réduit au théorème de Schottky :

IV. *Si* $F(z)$ *est holomorphe pour* $|z| < 1$, *prend n fois au plus* *dans ce cercle les valeurs* 0 *et* 1, *et vérifie* (17) *en des points du cercle* $|z| < \tau < 1$ *qui ne peuvent pas être enfermés dans* $2n$ *cercles dont la somme des rayons est inférieure à* d $(d < \tau)$, *on a, pour* $|z| \leqq r$ *et* $\tau < r < 1$,

$$\log|F(z)| < \frac{1}{(1-r)^2}\left[\alpha' n \log\frac{2}{d(1-r)} + \beta' \log\frac{2}{1-r} + \gamma' \log^+ M\right],$$

α', β', γ' *sont des constantes numériques positives.*

Comme plus haut, on passe de là à l'énoncé général relatif aux fonctions holomorphes :

V. *Si* $F(z)$ *est holomorphe pour* $|z| < 1$, *prend au plus* n *fois dans ce cercle deux valeurs* Z *et* Z' *telles que*

$$|Z| < P, \qquad |Z'| < P, \qquad |Z - Z'| > \frac{1}{P} \qquad (P > 1),$$

et vérifie (17) *en des points du cercle* $|z| < \tau$ *qui ne peuvent pas être enfermés dans* $2n$ *cercles dont la somme des rayons est inférieure à* $d < \tau$, *on a pour* $|z| \leqq r$ *et* $\tau < r < 1$,

$$\log|F(z)| < \frac{1}{(1-r)^2}\left[\alpha n \log\frac{2}{d(1-r)} + \beta \log\frac{2}{1-r} + \gamma \log(P + M)\right],$$

α, β, γ *sont des constantes numériques positives.*

Cette proposition renferme celles énoncées par H. Milloux (*b*, *d*) et G. Valiron (*m*, *r*) puisque la condition relative à (17) a lieu lorsque (17) vaut dans un cercle, ou sur un segment, ou en moyenne sur un segment. V s'applique aussi dès que (17) est vérifiée en $2n+1$ points; mais la théorie des familles quasi normales de Montel fournit une borne, non explicitée, dès que (17) a lieu en $n+1$ points seulement. Nous verrons que l'on peut déduire ce résultat de la méthode actuelle.

7. Extensions du théorème de Schottky. Cas des fonctions méromorphes. — Si $F(z)$ est méromorphe pour $|z| < 1$, prend n fois au plus les valeurs 0, 1, ∞ et satisfait à (17) en des points qui ne peuvent être enfermés dans $3n$ cercles dont la somme des rayons est d, la méthode employée fournit encore dans la première alternative une borne pour $\log|F(z)|$ sur Γ (et la borne vaut encore dans les cercles exclus ne contenant pas de pôles), dans la seconde alternative on trouve une borne pour $T\left[1-\frac{1}{18}(1-r)^2, G\right]$. Dans les deux cas, les b_k étant toujours les pôles de $F(z)$, si l'on pose

$$H(z) = F(z)\prod \frac{z-b_k}{1-z\bar{b}_k},$$

$|H(z)|$ est inférieur à $|F(z)|$ pour $|z|<1$, la borne trouvée dans la première alternative vaut encore pour $|H(z)|$; dans la seconde, $K(\zeta) = H(z)$ a aussi son module moindre que $|G(\zeta)|$ et n'a plus de pôles, $T(R, K)$ est inférieur à $T(R, G)$. On a donc dans les deux cas une borne de $|H(z)|$ analogue à celle trouvée dans le cas des fonctions holomorphes, les coefficients étant seulement augmentés. Enfin, comme

$$|F(z)| < |H(z)|\prod \frac{2}{|z-b_k|},$$

le théorème de Cartan fournit une borne de $|F(z)|$ à l'extérieur de n cercles d'exclusion au plus contenant les pôles. En faisant la même transformation que plus haut, on arrive à cette proposition :

VI. *Si* $F(z)$ *est méromorphe pour* $|z|<1$, *ne prend pas plus de* n *fois dans ce cercle les valeurs* Z, Z', ∞ *telles que*

$$|Z|<P, \qquad |Z'|<P, \qquad |Z-Z'|>\frac{1}{P} \qquad (P>1),$$

et vérifie (17) *en des points de* $|z|<\tau<1$ *qui ne peuvent pas être enfermés dans* $3n$ *cercles dont la somme des rayons est inférieure à* $d<\tau$, *on a pour* $|z|\leqq r$ *et* $\tau<r<1$,

$$\log|F(z)| < \frac{1}{(1-r)^7}\left[\alpha_1 n \log\frac{2}{d(1-r)} + \beta_1\log\frac{2}{1-r} + \gamma_1\log(P+M)\right] + n\log\frac{1}{H},$$

sauf au plus dans n *cercles, indépendants de* r, *dont la somme des rayons est au plus égale à* $H>0$ *arbitraire.* α_1, β_1, γ_1 *sont des constantes numériques positives.*

On en tire ce corollaire :

VII. *Si* $F(z)$ *est holomorphe pour* $|z|<1$, *et ne prend que* *n fois au plus dans ce cercle les valeurs* o *et* 1, *et si* $|F(z)| < \varepsilon$ *en* $n+1$ *points du cercle* $|z| < \tau < 1$, *on a* $|F(z)| < \varepsilon^{\sigma}$ *pour* $|z| < \tau'$, σ *étant un nombre compris entre* o *et* 1 *et dépendant de* τ, τ' *et* n, *l'inégalité ayant lieu dès que* ε *est assez petit.*

Car, dans le cas contraire, chaque circonférence $|z| = \text{const.}$ de la couronne $\tau' < |z| < \frac{1}{2}(\tau' + 1)$ contiendrait un point en lequel $\frac{1}{|F(z)|} < \frac{1}{\varepsilon^{\sigma}}$, et en appliquant VI, on arriverait à une contradiction pourvu que σ soit convenablement choisi et ε assez petit.

On a un résultat analogue, mais avec n cercles d'exclusion, si $F(z)$ est méromorphe et ne prend pas plus de n fois les valeurs o, 1, ∞, la condition relative à (17) restant la même. Ces propositions sur la convergence vers les valeurs remarquables conduisent alors, par le même raisonnement par l'absurde, au théoreme de la théorie des familles quasi normales rappelé à la fin du n° 6 : on a encore un résultat de la forme VI lorsque (17) est réalisée en $n+1$ points seulement.

La proposition VI s'étend, sous une forme nécessairement moins précise, au cas général où les trois valeurs prises n fois au plus sont quelconques. H. Milloux a donné une proposition que nous compléterons [*voir* 7, *d*]. Tout d'abord, en faisant la transformation (15), en appliquant (12) a $\Phi(z)$, puis en revenant a $F(z)$, on voit que I s'exprime aussi comme suit :

VIII. *Si* $F(z)$ *est méromorphe pour* $|z| \leqq R$, *si* a, b, c *sont donnés tels que* $|a, b| > \delta$, $|b, c| > \delta$, $|c, a| > \delta$, *si* $F'(o)$ *est fini, on a*

$$\begin{aligned} T(r, F) < \Omega \sum_{x=a,b,c} N(R, x) + \Omega' \sum_{x=a,b} \left[\log^+ \frac{1}{|F(o) - x|} + \log^+ |x|\right] \\ + \Omega'' \log\left(\left|\frac{c-a}{c-b}\right| + \left|\frac{c-b}{c-a}\right|\right) \\ + \Omega'''\left[\log^+ \frac{1}{|F'(o)|\,R} + \log \frac{R}{R-r} + \log^+ |F(o)| + \log^+ \frac{1}{\delta}\right]. \end{aligned}$$

On peut aussi supprimer le terme de coefficient Ω'' *en étendant la seconde somme à* c. Ω, Ω', Ω'', Ω''' *sont des constantes numériques positives.*

Supposons alors que $F(z)$ méromorphe pour $|z|<1$ ne prenne que n fois au plus trois valeurs a, b, c satisfaisant aux conditions de VIII, et que, pour $|z|<\tau<1$, (17) soit vérifiée en des points qui ne puissent pas être enfermés dans $3n$ cercles dont la somme des rayons est d. On peut supposer δ très petit. Si $K=M+\frac{1}{\delta}$ et si $|c|>K^2$, on chemine à l'extérieur des cercles d'exclusion relatifs aux zéros de $F(z)-x$, $x=a, b, c$. Si l'on a pas constamment $|F(z)|<4K^2$, il y a un point en lequel

$$|F'(z)|>1 \quad \text{et} \quad 2K^2<|F(z)|<4K^2,$$

c'est à partir de ce point que l'on fait la transformation conforme, on applique ensuite VIII qui borne le nombre des pôles et on achève comme dans la démonstration de VI. Si l'on a toujours $|F(z)|<4K^2$ à l'extérieur des cercles d'exclusion, on a trouvé une borne dans ce domaine extérieur. Lorsque $|c|\leqq K^2$, on prend le théorème VIII sous sa seconde forme et l'on procède de même; c'est ici $|G(0)|$ qui sera très grand vis-à-vis de a, b et au moins égal à $2K^2\geqq 2|c|$, tandis que, dans le premier cas, c étant très grand par rapport à a et b, $G(0)-c$ n'intervenait pas.

Le résultat peut se mettre sous la forme suivante :

IX. *Si* $F(z)$ *est méromorphe pour* $|z|<1$, *et prend* n *fois au plus dans ce cercle trois valeurs* a, b, c *dont les distances sphériques mutuelles sont au moins* δ, *et si* (17) *est vérifiée en des points de* $|z|<\tau<1$ *qui ne peuvent pas être enfermés dans* $3n$ *cercles dont la somme des rayons est au plus* $d<\tau$, *on a pour* $|z|\leqq r$, $\tau<r<1$,

$$\log|F(z)|<\frac{1}{(1-r)^2}\left[\alpha n\log\frac{1}{(1-r)dH}+\beta\log\frac{1}{1-r}\right.$$
$$\left.+\gamma\log^+\left(M+\frac{1}{\delta}\right)\right]\left(\log\frac{2}{H}\right),$$

sauf au plus dans des cercles dont la somme des rayons est H *au plus et le nombre inférieur au coefficient de* $\log\frac{2}{H}$ *dans l'inégalité précédente.* α, β, γ *sont des constantes numériques positives.*

8. Extensions des résultats relatifs aux zéros de $F(z)-x$. — En employant une méthode analogue à celle du n° 5, mais en évitant de faire la représentation conforme ramenant le point z_1 à l'origine, et en opérant sur la fonction

$$\frac{F(z)-P(z)}{F(z)-Q(z)}\,\frac{R(z)-Q(z)}{R(z)-P(z)},$$

où $P(z)$, $Q(z)$, $1(z)$ sont des fonctions de z qui, en moyenne ne sont ni trop grandes ni trop voisines les unes des autres dans le cercle $|z|<1$, A. Rauch [*a*] a obtenu le théorème suivant :

X. *Soient* $F(z)$, $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ *des fonctions méromorphes dans un cercle* $|z|<1$. *d et* δ *des nombres donnés inférieurs à* $\frac{1}{2}$, *n le nombre total des points en lesquels* $F(z)$ *est égal à l'une des fonctions* P, Q, R *et p le nombre total des zéros et des pôles des fonctions* P, Q, R, $P-Q$, $Q-R$, $R-P$ *dans ce cercle. Si l'on a dans ce cercle*

$$\frac{1}{\pi}\int\!\!\int \log^+\left(|P|+|Q|+\frac{1}{|P-Q|}+\frac{1}{|Q-R|}+\frac{1}{|R-P|}\right)d\sigma<\log\frac{1}{d},$$

le nombre des racines de $F(z)-x$ *dans le cercle* $|z|<\frac{1}{20}$ *est au plus égal à*

$$\lambda_1 n+\lambda_2 p+\lambda_3\log\frac{1}{d}+\lambda_4\log\frac{1}{\delta}+\lambda_5,$$

sauf au plus pour des x représentés sur la sphère à l'intérieur d'un cercle de rayon δ. λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 *sont des constantes numériques.*

On doit pouvoir donner à cet énoncé une forme analogue à celle de III et généraliser aussi dans une certaine mesure dans cet ordre d'idées le théorème de Schottky.

CHAPITRE II.

CERCLES DE REMPLISSAGE ET DIRECTIONS DE BOREL EN GÉNÉRAL.

9. **Procédé d'investigation.** — Supposons qu'une fonction $F(z)$ soit méromorphe dans un domaine borné D et désignons par D′ un domaine complètement intérieur à D. Couvrons D′ au moyen de p cercles

C_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ tels qu'il existe des cercles Γ_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ intérieurs à D, Γ_j étant concentrique à C_j et de rayon égal à k fois celui de C_j, k étant donné supérieur à 1. Considérons le nombre des zéros de $F(z) - x$ (ou le nombre des pôles si $x = \infty$) appartenant à Γ_j; pour les divers x ce nombre a un minimum n''_j, minimum atteint pour une valeur x''_j au moins. Supprimons sur la sphère le voisinage de x''_j par un cercle de rayon $\delta < 1$. Pour les points restants on a un nouveau minimum n'_j et un point correspondant x'_j dont on supprime le voisinage sphérique par un cercle de même rayon δ. Soit n_j le minimum du nombre des zéros de $F(z) - x$ pour les points n'appartenant pas à ces deux cercles, il est atteint en x_j. On peut appliquer le théoreme III à x_j, x'_j, x''_j dont les distances sphériques mutuelles sont au moins δ. Dans C_j, $F(z)$ prendra au plus

$$A(k)\left[n_j + \log\frac{2}{\delta} + \log^+\frac{1}{\delta_j}\right] \qquad (\delta_j = |Z, Z_j|),$$

toute valeur Z, Z_j étant un certain point. En ajoutant ces nombres, on obtient une borne

$$A(k)\left[\Sigma n_j + p\log\frac{2}{\delta} + \Sigma\log^+\frac{1}{\delta_j}\right]$$

du nombre des zéros de $F(z) - Z$ dans D'. Le dernier terme du crochet sera calculé dans bien des cas en supposant simplement Z représenté à l'extérieur de p cercles de même rayon. Dans d'autres cas on remplacera ce terme par $p\log\frac{\varpi}{h}$, ϖ étant une certaine constante, et l'on supposera Z extérieur à p cercles dont la somme des rayons est h [14. c]. Alors :

XI. *Si dans* D', $F(z)$ *prend plus de* Q *fois des valeurs dont les points représentatifs ne peuvent pas être enfermés dans des cercles dont la somme des rayons est* h, *on a*

$$\Sigma n_j > BQ - p\log\frac{2\varpi}{\delta h} \qquad \left(B = \frac{1}{A(k)}\right).$$

En particulier, il existe un cercle Γ_j *dans lequel* $F(z)$ *prend au moins*

$$B\frac{Q}{p} - \log\frac{2\varpi}{\delta h} \tag{18}$$

fois toute valeur sauf au plus celles représentées dans deux cercles de rayon δ.

On applique ce résultat soit en choisissant des cercles de recouvrement sensiblement égaux avec p maximum, on obtiendra les cercles de remplissage de rayon minimum fournis par la méthode, soit en prenant p assez petit pour que (18) reste de l'ordre de Q, on obtiendra un cercle de remplissage d'ordre maximum.

10. Rayon minimum des cercles de remplissage. Cercles de remplissage d'ordre ρ. — Si $f(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre fini ρ, $n(r, f-x)$ est inférieur à $r^{\rho+\varepsilon}$ si petit que soit ε pourvu que $r > r(\varepsilon, x)$. On a

$$\mathrm{N}(\mathrm{R}, x) < \mathrm{N}(r; x) + n(\mathrm{R}, f-x)\log\frac{\mathrm{R}}{r},$$

et moyennant un choix convenable de R, on voit que VIII donne

$$\mathrm{T}(r, f) < \Omega[\mathrm{N}(r; a) + \mathrm{N}(r, b) + \mathrm{N}(r; c)] + \mathrm{O}\left(\log\frac{r}{\delta}\right),$$

pourvu que $|a, b|$; $|b, c|$; $|c, a|$ soient $> \delta$ et r assez grand. D'après les théorèmes précis de R. Nevanlinna, on peut prendre pour Ω un nombre supérieur à 1 d'aussi peu que l'on veut; mais on pourra aussi se borner ici à la valeur grossière 5 résultant des calculs faits. On tire de là une borne inférieure du nombre des zéros de $f(z) - x$ dans une couronne $r < |z| < \mathrm{R}$ pour tous les x représentés à l'extérieur de deux petits cercles, et XI s'applique. Le résultat obtenu peut s'exprimer sous cette forme [Milloux(b)] :

XII. *Si $f(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre fini (positif ou nul) la couronne $r < |z| < \mathrm{R}$ contient un point z_l centre d'un cercle de remplissage C_l de rayon $\frac{|z_l|}{q}$. Dans C_l, $f(z)$ prend au moins n_l fois toute valeur sauf au plus des valeurs représentées dans deux cercles de rayon e^{-n_l} de la sphère. On a*

$$n_l = \frac{\mathrm{K}}{q^2}\,\frac{\mathrm{T}(\mathrm{R}, f)}{\left(\log\frac{\mathrm{R}}{r}\right)^2}, \tag{19}$$

K *étant une constante numérique. On doit supposer q supérieur* *à une constante numérique, r assez grand et $\frac{R}{r}$ assez grand pour que*

$$T(R, f) > K' T(\sqrt{Rr}, f),$$

K' *étant une constante numérique convenable.*

Cet énoncé contient le suivant [Valiron (c)] :

XIII. *Pour toute fonction méromorphe telle que*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} = \infty,$$

il existe une suite infinie de cercles de remplissage C_j : $|z - z_j| < \eta_j |z_j|$, tels que, dans C_j, $f(z)$ prend n_j fois au moins toutes les valeurs représentées à l'extérieur de deux cercles de rayon ε_j; ε_j, η_j, $\frac{1}{n_j}$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{j}$.

On rejoint ainsi un résultat obtenu par Ostrowski et Saxer (10) par la méthode des familles normales et quasi normales. Il faut remarquer que la méthode directe exposée ici ne donne plus rien lorsque le rapport $\frac{T(r, f)}{(\log r)^2}$ tend vers zéro, tandis que la méthode des familles normales conduit à cette proposition valable pour toute fonction méromorphe [14, c] :

Étant donnée une suite de nombres R_n, $n = 1, 2, \ldots$, telle que $\frac{R_{n+1}}{R_n}$ tende vers l'infini, à toute fonction $f(z)$ méromorphe autour du point à l'infini correspond une suite infinie de couronnes $C(n, f)$, $R_{n-1} < |z| < R_{n+1}$ telles que, dans $C(n, f)$, $f(z)$ prend au moins une fois toute valeur sauf au plus celles qui sont représentées (sur la sphère) dans deux cercles dont le rayon tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

Il n'a pas été fait jusqu'ici de recherches sur le rayon minimum des cercles de remplissage des fonctions *méromorphes* d'ordre nul générales. Pour les fonctions d'ordre fini positif ρ, des résultats assez précis ont été donnés. Il est commode de les exprimer en introduisant la notion d'*ordre précisé* introduite par l'auteur (Thèse, 1914). C'est une fonction $\rho(r)$ telle que, lorsque r croît indéfiniment,

$$(20) \qquad \lim \rho(r) = \rho, \qquad \lim \rho'(r)\, r \log r = 0,$$

$$(21) \qquad \overline{\lim} \frac{T(r, f)}{U(r)} = 1 \qquad \text{si} \quad U(r) = r^{\rho(r)}.$$

Il est clair que

$$(22) \qquad \lim \frac{U'(r)\, r}{U(r)} = \rho, \qquad \lim \frac{U(kr)}{U(r)} = k^{\rho} \qquad \text{si} \quad k < \infty.$$

Il existe des ordres précisés monotones (au sens large). Pour définir un ordre précisé, on peut prendre $r_1 > 25$, les r_p de proche en proche tels que $T(r_p, f) = \left(1 + \frac{1}{p}\right) T(r_{p-1}, f)$, puis $\rho(r) = \rho(r_1)$ si $r \leqq r_1$ tandis que pour $r > r_1$, $\rho(r)$ est le maximum des quantités

$$\frac{\log T(r_q, f)}{\log r_q} + \log_3 r - \log_3 r_q \qquad (r_q \geqq r),$$

$$\frac{\log T(r_q, f)}{\log r_q} - \log_3 r + \log_3 r_q \qquad (r_q \leqq r).$$

et d'une fonction constante par intervalles tendant vers ρ par valeurs moindres que ρ.

Le théorème XII peut alors s'appliquer en prenant pour R une valeur pour laquelle le rapport $\frac{T(r, f)}{U(r)}$ est voisin de 1 :

XIV. $\rho(r)$ *étant un ordre précisé de* $f(z)$ *et* $U(r)$ *la fonction correspondante, il existe une suite infinie de cercles de remplissage* C_j

$$|z - z_j| < \frac{1}{q} r_j \qquad (r_j = |z_j|),$$

$f(z)$ *prend* n_j *fois au moins dans* C_j *toute valeur sauf au plus celles représentées dans deux cercles (de la sphère) de rayon* e^{-n_j}. *On a*

$$n_j = \frac{K}{q^2} T(r_j, f) \qquad [T(r_j, f) > K_1 U(r_j)],$$

K *et* K_1 *sont des constantes ne dépendant que de* ρ, q *doit dépasser une certaine valeur numérique.*

On en déduit ces corollaires :

XV. *Pourvu que* $K'H > 1$, *il existe des cercles de remplissage* C_j

d'équation

$$|z - z_j| < \frac{r_j H}{\sqrt{T(r_j, f)}}, \quad \lim r_j = \infty,$$

dans chacun desquels $f(z)$ prend toute valeur sauf au plus celles représentées dans deux cercles de rayon $e^{-K'H}$, K' ne dépend que de ρ.

XVI. *ε étant donné arbitrairement petit, il existe des cercles de remplissage C_j: $|z - z_j| < \varepsilon r_j$, $f(z)$ prenant dans C_j $(j = 1, 2, \ldots)$ n_j fois au moins toute valeur sauf celles représentées dans deux cercles de rayon e^{-n_j}, et l'on a*

$$n_j = K'' \varepsilon^2 U(r_j)$$

D'après la propriété (20), ces cercles sont des cercles de remplissage d'ordre ρ.

La proposition XV montre aussi qu'il existe des cercles de remplissage de rayon arbitrairement petit dès que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r, f)}{r^2} = \infty, \tag{23}$$

puisqu'on peut alors choisir $U(r)$ pour que $\frac{r^2}{U(r)}$ tende vers zéro. Par suite [Valiron (a, d)] :

Si la fonction $f(z)$ vérifie la condition (23) et si ω et ω' sont deux nombres donnés dont le rapport est complexe, la famille de fonctions $f(z + m\omega + m'\omega')$, où m et m' sont des entiers arbitraires, n'est pas partout normale.

La borne donnée dans XV pour le rayon des cercles de remplissage est exacte à un facteur près, on le voit en considérant les fonctions elliptiques et les fonctions analogues, mais elle s'abaisse dans le cas des fonctions entières (Valiron) et des fonctions méromorphes admettant une valeur exceptionnelle de Borel [Milloux (b)] (*voir* n° 18).

11. Cas de l'ordre infini. — Pour les fonctions d'ordre infini, H. Milloux [b] a donné ce théorème :

XVII. *Si $f(z)$ est méromorphe d'ordre infini, la couronne $r < |z| < R$ contient un point z_j centre d'un cercle C_j de* *rayon* $100\,\dfrac{|z_j|}{q}$ *dans lequel* $f(z)$ *prend au moins* n_j *fois toute valeur sauf au plus celles représentées dans deux cercles de rayon* e^{-n_j}. *On a*

$$n_j = \frac{1}{1800\,q^4}\,\frac{T\left[R - \dfrac{2}{T(R-1)}\right]}{\log\dfrac{R}{r}},$$

et l'on doit supposer que q *et* n_j *sont assez grands, que* R *est assez grand, et que*

$$T\left(R - \frac{2}{T(R-1)}\right) > 24\,T(r) \quad \text{et} \quad > 24\,\frac{T(kr)}{\log k}\log\frac{R}{r},$$

k *étant un nombre pris entre* 1 *et* $\dfrac{R}{r}$.

On peut en déduire des résultats analogues à ceux du n° **10** en majorant $T(r, f)$ par une fonction à croissance normale au sens de Borel.

Cette question a été traitée par K. L. Hiong [*a*, *b*]. On peut retrouver et compléter certains de ses résultats en utilisant la forme donnée par R. Nevanlinna (*Bull. Sc. math.*, 1931) au théorème de Borel. Soit $\chi(t)$ une fonction continue décroissante pour $t \geqq 1$ telle que $\int_1^{\infty}\chi(t)\,dt < \infty$. On peut définir $h(x)$ continue, linéaire pour $x_{n-1} \leqq x \leqq x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, par les conditions

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \chi(1), \qquad h(x_0) = 1,$$
$$x_n = x_{n-1} + \chi[h(x_{n-1})], \qquad h(x_n) = h(x_{n-1}) + \frac{1}{2}\tau,$$

où τ est donné positif. $h(x)$ est définie, croissante et convexe dans un certain intervalle $0, X$ et croît indéfiniment lorsque x tend vers X. En outre, elle vérifie la condition de croissance normale

$$h(x + \chi[h(x)]) < h(x) + \tau.$$

Désignons par $\lambda(y)$ la fonction inverse de $y = h(x)$ et soit, comme plus haut, une suite de nombres r_p définie par

$$T(r_p, f) = \left(1 + \frac{1}{p}\right) T(r_{p-1}, f).$$

Nous construisons $V(r)$ en prenant

$$V(r) \geqq \log r \quad \text{si} \quad r > e; \qquad V(r) \geqq 1 \quad \text{si} \quad r \leqq e;$$

et, pour chaque r assez grand, $V(r)$ égal au maximum des nombres

$$\frac{\log r}{\log r_p} \log T(r_p, f) \qquad \text{si} \quad r_p \leqq r,$$
$$h(r - r_p + \lambda[\log T(r_p, f)]) \quad \text{si} \quad r_p - \lambda[\log T(r_p, f)] \leqq r \leqq r_p.$$

Il s'ensuit que, *si l'on pose*

$$U(r) = r^{\rho(r)} = e^{V(r)},$$

$\rho(r)$ *est non décroissante* et qu'*à partir d'une valeur de r, on a*

$$U(r + \omega[U(r)]) < e^{\tau} U(r),$$

la fonction décroissante $\omega(x) = \chi(\log x)$ *pouvant être prise arbitrairement pourvu que*

$$\int^{\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx < \infty.$$

Nous supposerons encore que $\omega(x)\sqrt{x} > 1$. *On aura*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r)}{U(r)} = 1.$$

Toute fonction $U(r)$ jouissant des propriétés précédentes pourra être employée à la place de celle qui vient d'être construite.

On applique alors le théorème VIII à $f(z)$ en prenant r tel que $T(r, f) > \frac{9}{10} U(r)$ et $R = r + \omega[U(r)]$, de sorte que

$$T(R, f) < 2e^{\tau} U(r),$$

on en déduit une borne inférieure de $N(R; x)$ sauf pour les x voisins de deux valeurs : $N(R; x) >$ const. $U(r)$, et l'on peut continuer comme si l'ordre était fini, grâce à la circonstance que $\rho(r)$ ne décroît pas. On trouve $n(R; f - x) >$ const. $\rho(r)\, U(r)$ et en se servant du théorème XI, dans $\frac{R}{2} < |z| < R$, on arrive à cet énoncé :

XVIII. *Il existe une suite de cercles* C_j,

$$|z - z_j| < \frac{r_j}{q}, \qquad \lim(r_j = |z_j|) = \infty$$

et une constante positive H *tels que* $f(z)$ *prenne* n_j *fois au moins dans* C_j *les valeurs représentées à l'extérieur de deux cercles de* *rayon e^{-n_j} avec*

$$n_j = \frac{H}{q^2} U(r_j)\,\rho(r_j). \tag{24}$$

On pourrait dans (24) remplacer U par T et ρ par $\frac{\log T}{\log r}$, mais au détriment de la précision puisqu'on ne saurait plus rien sur l'ordre de grandeur de T dans les cercles C_j.

Les énoncés XVII et XVIII présentent l'inconvénient de faire intervenir dans les cercles C_j des points pour le module desquels la valeur de T ou de U peut être tres grande par rapport à sa valeur en r_j. On obtient avec K. L. Hiong une proposition assez précise n'ayant plus ce défaut en prenant $\frac{r}{q} = \omega[(U)]$, les cercles C_j ont alors pour équation $|z - z_j| < \omega(U_j)$, et l'on a

$$n_j = H\,\{\omega[U(r_j)]\}^2 r_j^{-2} \rho(r_j)\, U[r_j + \omega(U_j)] \qquad [U_j = U(r_j)],$$

valeur que l'on pourra comparer à la borne supérieure què l'on obtiendrait pour le nombre $n[r + \omega(U), f - x]$ et aux résultats explicites de K. L. Hiong.

On peut aussi donner une proposition moins précise mais entièrement analogue à celles obtenues dans le cas de l'ordre fini lorsqu'on se borne au degré d'approximation de Borel. *Appelons* [Hiong, a, b] *ordre de $f(z)$ toute fonction $\rho(r)$ non décroissante telle que, si l'on pose*

$$U(r) = r^{\rho(r)},$$

$U(r)$ *vérifie la condition de Borel*

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log U(r')}{\log U(r)} = 1, \qquad r' = r + \frac{1}{\log U(r)}$$

et que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log U(r)} = 1$$

[$U(r)$ existe d'après la construction faite plus haut, la démonstration directe de l'existence d'une telle fonction se simplifie beaucoup car on peut remplacer ici $h(x)$ par une fonction élémentaire telle que $2(1-x)^{-2}$]. On a alors le théorème suivant [*voir* Hiong] (1) :

---

(1) Nous couvrons ici le cercle $|z| > R$ par des cercles de rayon $\frac{1}{\log U(R)}$ $\left[\text{et non pas de rayon } \frac{R}{\log U(R)} \text{ comme fait Hiong}\right]$.

XIX. *Il existe une suite infinie de cercles* $C_j : |z - z_j| < \varepsilon_j$, $\lim \varepsilon_j = 0$, *tels que* $f(z)$ *prenne au moins* n_j *fois dans* C_j *toute valeur sauf au plus des valeurs qui peuvent être enfermées dans deux cercles de la sphère, de rayon* e^{-n_j}; *on a*

$$\lim_{j=\infty} \frac{\log n_j}{\log U(r_j + \varepsilon_j)} = 1.$$

On voit par ailleurs que, pour tous les x, sauf deux au plus,

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n(r, f - x)}{\log U(r)} = 1.$$

On dira que les cercles de l'énoncé XIX sont des cercles de remplissage d'ordre $\rho(r)$.

12. Directions de Borel dans le cas de l'ordre infini. — Δ étant une demi-droite $\varphi = \arg z = \varphi_0 =$ const., *nous désignons par* $r_n(\Delta, \varepsilon, Z)$ *les modules des zéros* (des pôles si $Z = \infty$) *de* $f(z) - Z$ *situés dans l'angle* $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon$. D'après XIX, si $f(z)$ est d'ordre infini, si $\rho(r)$ est un de ses ordres, si petits que soient les nombres positifs donnés ε et η, la série

$$(25) \qquad \Sigma \{ U[r_n(\Delta, \varepsilon, Z)] \}^{-1+\eta}, \qquad \log U = \rho(r) \log r$$

diverge pour tous les Z sauf deux au plus ne dépendant que de Δ, pourvu que Δ soit direction limite des directions joignant l'origine aux points z_j. *On dira donc qu'une telle direction est une direction de Borel d'ordre* $\rho(r)$ Le théorème XIX montre que :

XX. *Une fonction méromorphe d'ordre infini* $\rho(r)$ *possède au moins une direction de Borel d'ordre* $\rho(r)$.

A chaque Z, Δ, ε, correspond un nombre $k = k(\Delta, \varepsilon, Z)$, $0 \leqq k \leqq 1$, tel que la série

$$(26) \qquad \Sigma \{ U[r_n(\Delta, \varepsilon, Z)] \}^{-k'} \qquad (k' \geqq 0)$$

converge pour $k' > k$ et diverge pour $k' < k$. Z et Δ restant fixes et ε tendant vers zéro, $k(\Delta, \varepsilon, Z)$ tend vers une limite $k(\Delta, Z)$ au plus égale à 1; la série (26) diverge pour $k' < k(\Delta, Z)$ lorsque ε est positif arbitraire, elle converge pour $k' > k(\Delta, Z)$ dès que ε est assez petit. On dira que $k(\Delta, Z)\rho(r)$ *est l'ordre réel de* $f(z) - Z$ *dans la* *direction* Δ. En raisonnant sensiblement comme on le fera ci-dessous pour l'ordre fini, on démontre que :

XXI. *L'ordre réel de* $f(z) - Z$ *dans une direction arbitraire* Δ *a la même valeur* $k(\Delta)\rho(r)$ *quel que soit* Z *sauf au plus pour des* Z *dont les représentations sur la sphère forment un ensemble de mesure linéaire nulle; pour les* Z *exceptionnels la valeur de* $k(\Delta, Z)$ *est supérieure à* $k(\Delta)$ *sauf au plus pour deux d'entre eux.*

$k(\Delta)\rho(r)$ *est l'ordre moyen réel dans la direction* Δ.

Le même genre de raisonnement conduit à cette extension d'un théorème de Rauch (théorème XXVII ci-après) :

XXII. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une direction* Δ *soit direction de Borel d'ordre* $\rho(r)$ *est qu'elle soit direction limite des directions joignant l'origine aux centres de cercles de remplissage d'ordre* $\rho(r)$ *analogues à ceux du théorème* XIX.

13. Directions de Borel des fonctions d'ordre fini. Ordre réel moyen dans une direction. — Considérons une fonction $F(z)$ méromorphe à l'origine et dans un angle A, $|\varphi - \varphi_0| < \alpha$, dont la bissectrice est Δ. Les notations étant les mêmes que ci-dessus, supposons que la série

$$(27) \qquad \Sigma[r_n(\Delta, \varepsilon, Z)]^{-\sigma} \qquad (\varepsilon < \alpha)$$

converge pour une valeur σ positive finie et pour trois valeurs Z', Z'', Z''' de Z. En procédant à un découpage de l'angle A en quadrilatères limités par des droites $\varphi = \text{const.}$ et des arcs de cercles $|z| = \text{const.}$, en leur circonscrivant des cercles et en marquant les cercles de rayons doubles, enfin en appliquant le théorème III avec $a = Z'$, $b = Z''$, $c = Z'''$, on voit que la série (27) converge encore pour presque tous les Z en y remplaçant ε par un nombre plus petit. On a donc cette proposition [Valiron, *h*] :

XXIII. *Si* $F(z)$ *est méromorphe à l'origine et dans un angle de bissectrice* Δ *et ouverture* 2ε *et si* (27) *converge pour trois valeurs distinctes de* Z, *elle converge dans tout angle de bissectrice* Δ *et d'ouverture inférieure à* 2ε *pour tous les* Z *sauf au plus pour des* Z *formant sur la sphère un ensemble de mesure linéaire nulle.*

Supposons maintenant que $f(z)$ soit une fonction méromorphe d'ordre fini positif ρ. A chaque Δ, ε, Z correspond un nombre fini positif ou nul $\rho(\Delta, \varepsilon, Z)$ tel que (27) converge pour $\sigma > \rho(\Delta, \varepsilon, Z)$ et diverge pour $\sigma < \rho(\Delta, \varepsilon, Z)$. $\rho(\Delta, \varepsilon, Z)$ *est l'exposant de convergence ou ordre réel des zéros de* $f(z) - Z$ *dans l'angle de bissectrice* Δ *et ouverture* 2ε. La limite $\rho(\Delta, Z)$ de $\rho(\Delta, \varepsilon, Z)$ lorsque ε tend vers zéro est *l'ordre réel de* $f(z) - Z$ *dans la direction* Δ. Comme conséquence de XXIII on voit que :

XXIV. *L'ordre réel de* $f(z) - Z$ *dans une direction* Δ *a la même valeur* $\overline{\rho(\Delta)}$ *pour tous les Z sauf au plus pour les Z appartenant à un ensemble de mesure linéaire nulle (sur la sphère). Pour les Z exceptionnels on a* $\rho(\Delta, Z) > \overline{\rho(\Delta)}$ *sauf peut-être pour deux valeurs Z.*

Pour les Z extérieurs à un ensemble de mesure linéaire nulle, à chaque η *positif correspond une ouverture* $\varepsilon(\eta)$ *pour laquelle* (27) *converge si* $\sigma = \overline{\rho(\Delta)} + \eta$.

$\overline{\rho(\Delta)}$ *est l'ordre réel moyen dans la direction* Δ. Le résultat obtenu ainsi pour la distribution des valeurs dans une direction arbitraire est le même que dans le cas de l'ordre infini. L'énoncé fait intervenir un ensemble exceptionnel de mesure nulle dont les propriétés véritables sont encore très mal connues.

D'après la seconde partie de l'énoncé, il existe au moins une direction Δ pour laquelle $\overline{\rho(\Delta)} = \rho$. Lorsque $\overline{\rho(\Delta)} = \rho$, il n'y a plus que deux valeurs exceptionnelles possibles, pour lesquelles $\rho(\Delta, Z) < \rho$; *une telle direction est appelée direction de Borel.* Par suite :

XXV. $f(z)$ *étant une fonction méromorphe d'ordre fini positif* ρ, *il existe au moins une direction de Borel, c'est-à-dire une direction* Δ *telle que, si petit que soit* ε, *la série* (27) *diverge pour* $\sigma < \rho$ *et pour tous les Z sauf deux au plus.*

Les fonctions de la forme

$$\sum \frac{A_n}{(z - a_n)a_n^p}, \quad a_n \text{ réels positifs}, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\log a_n} = \rho,$$

où les A_n et p sont choisis pour que

$$\sum \frac{|A_n|}{a_n^{p+1}}$$

converge, sont des fonctions d'ordre ρ qui restent bornées dans tout angle ne contenant pas l'axe réel positif; elles ne possèdent qu'une seule direction de Borel. Le cas des fonctions entières sera examiné au Chapitre III.

D'autre part, le théorème XI conduit à celui-ci :

XXVI. *Si $f(z)$ est méromorphe à l'origine et dans un angle $|\varphi - \varphi_0| < \alpha$ et si la série (27) diverge pour des Z qui ne forment pas un ensemble de mesure linéaire nulle, il existe une suite infinie de cercles Γ_j, $|z - z_j| = o(z_j)$, $|z_{j+1}| > 2|z_j|$, dont les centres sont dans l'angle $|\varphi - \varphi_0| < \alpha$ et tels que, dans Γ_j, $F(z) - Z$ s'annule au moins P_j fois sauf si Z est représenté dans deux cercles γ_j, γ'_j de rayon $o(1)$, la série*

$$\sum \frac{P_j}{|z_j|^\sigma}$$

étant divergente.

On en déduit notamment ce théorème [Rauch, *a*] :

XXVII. *Si Δ est une direction de Borel, il existe des cercles de remplissage d'ordre ρ dont les centres sont aussi éloignés que l'on veut sur Δ.*

14. Compléments sur les fonctions d'ordre fini. — E. Borel avait considéré deux classes de fonctions entières d'ordre fini; ses résultats ont été complétés dans ce cas par l'auteur, puis, pour les fonctions méromorphes par R. Nevanlinna. $f(z)$ étant d'ordre fini positif ρ, on dit que $f(z)$ est *de la classe convergente* de cet ordre si

$$\int_1^\infty T(r, f)\, r^{-\rho-1}\, dr$$

converge, dans le cas contraire, $f(z)$ *est de la classe divergente de l'ordre* ρ. Une direction de Borel, Δ, sera d'ordre ρ convergent si, pour un certain ε positif, la série

$$(28) \qquad \Sigma[r_n(\Delta, \varepsilon, Z)]^{-\rho}$$

converge quel que soit Z. *Si $f(z)$ est de la classe convergente, toutes ses directions de Borel sont de la classe convergente.* Si $f(z)$ est de la classe divergente, il peut exister des directions Δ pour lesquelles (28) converge pour un ε positif et presque pour tous les Z, pour les autres directions de Borel (28) diverge si petit que soit ε pour tous les Z sauf deux au plus, une telle direction est *une direction de Borel d'ordre* ρ *divergent*. Les résultats précédents montrent que [Valiron, *c*] :

XXVIII. *Si* $f(z)$ *est de la classe divergente de l'ordre* ρ, *il existe au moins une direction de Borel d'ordre* ρ *divergent.*

En outre, il existe une suite de cercles de remplissage d'ordre ρ divergent dont les centres sont sur Δ. (On comprend, sans qu'il faille insister, ce que sont de tels cercles.)

Ces propositions, comme celles du n° 13, sont basées sur la comparaison de la fonction T ou du nombre des zéros de $f(z) - Z$ à r^ρ. On peut également utiliser l'ordre précisé $\rho(r)$ ou une fonction qui, sans être l'ordre précisé, jouisse des propriétés de cette fonction. De XVI résulte que [14, *l*] :

XXIX. *Si* $f(z)$ *est d'ordre précisé* $\rho(r)$ *et si* $U(r)$ *est la fonction définie par* (21), *il existe au moins une direction* Δ, $\varphi = \varphi_0$, *telle que le nombre* $n(r, \Delta, \varepsilon, Z)$ *des zéros de* $f(z) - Z$ *appartenant au secteur* $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon$, $|z| < r$, *vérifie l'inégalité*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r, \Delta, \varepsilon, Z)}{U(r)} > 0,$$

si petit que soit le nombre positif ε *et pour tous les* Z *sauf deux au plus.*

On peut dire qu'une telle direction est une *direction de Borel d'espèce maximum*. Sur une telle direction existent des points qui sont centres de cercles de remplissage satisfaisant aux conditions de XVI.

On peut généraliser la notion de classe convergente ou divergente en comparant $T(r, f)$ à une fonction croissante $V(r)$ telle que

$$\lim_{r=\infty} \frac{r\,V'(r)}{V(r)} = \rho \qquad \text{(Miss Collier)},$$

$f(z)$ sera de la classe convergente ou divergente par rapport à $V(r)$ suivant que

$$\int_1^\infty T(r, f) \frac{dr}{r\,V(r)}$$

convergera ou divergera. Une direction Δ sera direction de Borel divergente par rapport à $V(r)$ lorsque, si petit que soit $\varepsilon > 0$,

$$\sum \frac{1}{V[r_n(\Delta, \varepsilon, Z)]}$$

diverge pour tous les Z sauf deux au plus. La méthode précédente fournit cet énoncé (5) :

XXX. *Si $f(z)$ est de la classe divergente par rapport à $V(r)$, il existe une direction Δ au moins qui est de la classe divergente par rapport à $V(r)$. Si Δ est une telle direction, il existe une suite de cercles Γ_n, $|z - z_n| < o(z_n)$ dont les centres sont sur Δ, avec $\lim z_n = \infty$, et tels que la série $\Sigma\{V[r_m(Z)]\}^{-1}$ étendue aux modules $r_m(Z)$ des zéros de $f(z) - Z$ situés dans les Γ_p diverge pour tous les Z sauf deux au plus.*

En se plaçant à un point de vue un peu différent, on peut donner cette proposition [Valiron, *i*] :

XXXI. *Supposons que $T(r, f)$ vérifie la condition de croissance de Boutroux*

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{r\,T'(r, f)}{T(r, f)} > 0$$

et que $C(u)$ soit une fonction croissante dérivable telle que l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{du}{u\,C(u)}$$

diverge. Dans ces conditions, il existe au moins une direction Δ pour laquelle la série

$$\sum \frac{1}{T[r_m(Z)s]\,C\{T[sr_m(Z)]\}},$$

où s est arbitraire entre 0 et 1, étendue aux zéros de $f(z) - Z$ appartenant à un angle donné quelconque de bissectrice Δ, diverge pour tous les Z sauf deux au plus.

Supposons qu'une fonction méromorphe $f(z)$ soit connue par les points où elle prend une valeur donnée et par d'autres propriétés. Que peut-on dire sur ses directions de Borel? En se ramenant par représentation conforme an cas d'une fonction méromorphe dans un cercle, on démontre ceci :

XXXII. *Supposons que* F(z) *soit méromorphe dans un angle de bissectrice* Δ *et d'ouverture* $2\alpha > \frac{\pi}{\sigma}$, $\sigma > \frac{1}{2}$. *Supposons que, pour une valeur de* Z, *la série*

$$\Sigma[r_n(\Delta, \alpha', Z)]^{-\sigma} \quad (r_n > 1) \tag{29}$$

soit divergente pour un $\alpha'_1 < \alpha$. *Alors* (29) *diverge pour tous les* Z *sauf deux au plus si* $\frac{\pi}{2\sigma} < \alpha' < \alpha$, $\alpha' > \alpha'_1$, *et il existe dans l'angle d'ouverture* 2α *au moins une direction d'ordre* σ *divergent.*

Il s'ensuit notamment que, si pour un couple Δ, a, $\rho(\Delta, a)$ est positif, il existe au moins une direction Δ' faisant avec Δ un angle au plus égal à $\frac{\pi}{2\rho(\Delta, a)}$ pour laquelle $\overline{\rho(\Delta')} \geqq \rho(\Delta, a)$.

15. Caractère d'une valeur dans une direction. Cas des fonctions d'ordre nul. — Les fonctions d'ordre nul ne peuvent être traitées comme celles d'ordre fini que si la condition suffisante pour l'existence des cercles de remplissage (théorème XIII) est vérifiée. Mais il est en outre clair que l'ordre dans les cercles de remplissage et dans tout le plan n'est plus le même dès que l'ordre est défini d'une façon suffisamment précise. L'étude des directions de Borel peut être faite directement en procédant comme au n° 13. Les résultats peuvent être présentés sous deux formes différentes, soit en faisant intervenir la moyenne logarithmique du nombre des zéros, soit en faisant intervenir directement ce nombre. Sous la première forme, on obtient des énoncés valables à la fois pour l'ordre fini positif et pour l'ordre nul [Valiron, s].

Si l'on suppose que le quotient de $T(r, f)$ par $(\log r)^2 \log_2 r$ ne reste pas borné, on peut construire une fonction $U(r)$ telle que

$$\lim_{r=\infty} \frac{U(r)}{(\log r)^2 \log_2 r} = \infty, \qquad \frac{U(2r)}{U(r)} \leqq K < \infty \quad \text{si} \quad r > r_0,$$

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r, f)}{U(r)} = 1.$$

Ce sera la fonction $U(r)$ du n° 10 définie par (20) et (21) dans le cas de l'ordre positif; sa construction est aisée dans le cas de l'ordre nul [*voir* 14, *s*]. Si l'on pose

$$N(r, \Delta, \varepsilon, Z) = \int_1^r n(t, \Delta, \varepsilon, Z)\frac{dt}{t}, \qquad \gamma(\Delta, \varepsilon, Z) = \overline{\lim_{r=\infty}}\, \frac{\pi N(r, \Delta, \varepsilon, Z)}{\varepsilon U(r)},$$

$$\gamma(\Delta, Z) = \overline{\lim_{\varepsilon=0}}\, \gamma(\Delta, \varepsilon, Z),$$

on peut appeler $\gamma(\Delta, Z)$ *le caractère de* Z *dans la direction* Δ [$n(t, \Delta, \varepsilon, Z)$ a été défini dans l'énoncé XXIX]. On démontre que :

XXXIII. Δ *étant donné, si le caractère de* Z', Z'', Z''' *est nul dans cette direction, le caractère est nul dans cette direction* Δ *pour tous les* Z *sauf au plus ceux appartenant à un ensemble de mesure nulle sur la sphère.*

Il s'ensuit que, Δ étant donné, le caractère dans cette direction est ou bien nul pour presque tous les Z ou bien positif pour tous les Z sauf deux au plus. Dans le premier cas la direction sera dite *de caractère moyen nul*, dans le second de *caractère positif*. En précisant un peu XXXIII on montre que :

XXXIV. *Il existe toujours au moins une direction de caractère positif.*

Ces propositions s'étendent en partie au cas où l'on suppose seulement

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\, \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} = \infty, \tag{30}$$

et restent aussi valables dans le cas des fonctions entières ne vérifiant pas (30), fonctions pour lesquelles on obtient cette forme précise :

Il existe au moins une direction dont le caractère est au moins 1.

Le passage de la moyenne N à la fonction n se fait dans le cas de l'ordre fini positif en utilisant les propriétés de l'ordre précisé, on retombe sur XXIX. Dans le cas de l'ordre nul, il suffit de supposer que $U(r)$ jouit de propriétés permettant la dérivation. On peut supposer que, en outre des propriétés déjà données, $U'(r)$ existe et est continue, que $rU'(r)$ finit par ne pas décroître et que $\frac{rU'(r)}{U(r)}$ est décroissant et tend vers zéro. Alors, quel que soit Z,

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r, f-\mathrm{Z})}{r\mathrm{U}'(r)} \leqq 4,$$

et l'on a le théorème suivant :

XXXV. *Il existe au moins une direction* Δ *telle que, si petit que soit le nombre positif* ε, *on ait pour tous les* Z *sauf deux au plus*,

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r, \Delta, \varepsilon, \mathrm{Z})}{r\mathrm{U}'(r)} > 0.$$

16. Généralisations. — Tout ce qui a été dit jusqu'ici s'applique non seulement aux fonctions méromorphes, mais aussi à celles qui sont méromorphes autour du point à l'infini, c'est-à-dire à l'extérieur d'un cercle, la définition et les propriétés de $\mathrm{T}(r, f)$ s'étendant à peu près complètement à ces fonctions comme on le verra dans les travaux de R. Nevanlinna.

Des généralisations moins immédiates peuvent être faites dans la voie même où E. Borel étendit son théorème. Il s'agit de chercher des propriétés communes des zéros de toutes les fonctions

$$f(z) + g(z),$$

où $f(z)$ est donnée et où $g(z)$ est une autre fonction méromorphe. Le cas où $g(z)$ est une fraction rationnelle arbitraire fut d'abord examiné [14,*a*], puis celui où $f(z)$ étant d'ordre fini positif, $g(z)$ est une fonction arbitraire d'ordre inférieur à $f(z)$ [Biernacki (*c*)]. Grâce à son théorème du n° 8, A. Rauch a obtenu des propositions précises qu'il développa surtout dans le cas de l'ordre fini positif. Il donne notamment la proposition suivante :

XXXVI. *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe d'ordre fini ou nul et soient* $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(z)$, $\mathrm{R}(z)$ *un système quelconque de trois fonctions méromorphes vérifiant les conditions*

$$\mathrm{T}(r, f) > \mathrm{C}(f), \qquad \mathrm{T}(\mathrm{R}, f) > 12\, \frac{\mathrm{T}(kr, f)}{\log k} \log \frac{\mathrm{R}}{r} \qquad \left(1 < k < \frac{\mathrm{R}}{r}\right),$$

$$(31) \qquad \mathrm{T}[(1+\alpha)\mathrm{R}, \varphi] < \frac{\alpha^4 \mathrm{T}(\mathrm{R}, f)}{\left(\log \frac{\mathrm{R}}{r}\right)^2}, \qquad [\varphi = \mathrm{P}(z), \mathrm{Q}(z), \mathrm{R}(z)],$$

$$(32) \quad \mathrm{C}(\psi) > -\frac{\alpha^4 \mathrm{T}(\mathrm{R}, f)}{\left(\log \frac{\mathrm{R}}{r}\right)^2}, \qquad (\psi = \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{P}-\mathrm{Q}, \mathrm{Q}-\mathrm{R}, \mathrm{R}-\mathrm{P}).$$

[$C(g)$ *a été défini au n° 1*]. *Alors, il existe un cercle* $|z - z'| < \alpha |z'|$, $r < |z'| < R$ *dans lequel le nombre des zéros de* $f(z) - \Pi(z)$, *où* $\Pi(z)$ *est l'une au moins des fonctions* $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$, *est supérieur à*

$$(33)\qquad n_1 = \frac{k\alpha^2 T(R, f)}{\left(\log \frac{R}{r}\right)^2},$$

α *est donné positif et suffisamment petit et* k *est une constante positive indépendante de* α; *on doit supposer* n_1 *assez grand.*

Il s'ensuit que s'il existe deux fonctions P et Q vérifiant les conditions (31), (32) et telles que, dans le cercle considéré le nombre des zéros de $f - P$ et $f - Q$ soit moindre que (33), le nombre des zéros dans ce cercle pour toutes les fonctions $f - R$, R vérifiant (31), sera au moins n_1 pourvu que l'écart à l'origine de R, P, Q soit assez grand [condition (32)].

Une proposition voisine est donnée par Rauch (a) pour le cas de l'ordre positif, fini ou infini.

En particulier le théorème s'applique à l'ensemble des fonctions $f(z) - \Pi(z)$ où $\Pi(z)$ est d'ordre inférieur à $f(z)$. On peut généraliser dans ce sens la plupart des théorèmes donnés ci-dessus. Lorsqu'on introduit une suite infinie de cercles de remplissage, il n'y a plus à tenir compte de l'écart à l'origine, écart qui sera toujours suffisant pour l'application de XXXVI dès que le cercle sera assez éloigné, la condition relative à la croissance interviendra seule. En particulier, on retrouve le théorème de Biernacki (c) :

XXXVII. *Si* $f(z)$ *est d'ordre fini positif* ρ, *il existe au moins une direction* Δ *telle que, dans tout angle donné de bissectrice* Δ, *la série*

$$\Sigma[r_n(\Pi)]^{-\rho+\eta}$$

diverge si petit que soit $\eta > 0$, *les* $r_n(\Pi)$ *étant les modules des zéros de* $f(z) - \Pi(z)$ *appartenant à cet angle et* $\Pi(z)$ *étant une constante ou une fonction quelconque d'ordre inférieur à* ρ *et différente de deux fonctions exceptionnelles possibles.*

En outre, *si* $f(z)$ *est de la classe divergente, on peut prendre* $\eta = 0$ *et supposer que* $\Pi(z)$ *est une fonction d'ordre moindre que* ρ *ou d'ordre* ρ *et de la classe convergente* [Rauch (a)].

De plus, *toute direction de Borel de* $f(z)$ (ou toute direction de

Borel d'ordre ρ divergent) *est une direction à laquelle* XXXVII (ou son complément) *s'applique* [Rauch (a)].

Les théorèmes XXIX et XXX s'étendent aussi au cas où l'on considère les zéros de $f(z) - \Pi(z)$, il n'y a que deux fonctions exceptionnelles, y compris les constantes, si l'on suppose que $\frac{T(r, \Pi)}{U(r)}$ tend vers zéro pour l'extension de XXIX et que

$$\int T(r, \Pi)\frac{dr}{r\,V(r)}$$

converge pour l'extension de XXX.

Rauch (a) étend encore les propriétés relatives à l'ordre moyen dans une direction et les théorèmes concernant les fonctions méromorphes dans un angle. Il donne aussi des résultats dans le cas de l'ordre infini, cas dans lequel il conviendrait d'introduire la notion d'ordre de Hiong [1].

17. **Les fonctions méromorphes dans le cercle unité.** — L'étude de ces fonctions a été faite par l'auteur en partant du théorème suivant de R. Nevanlinna, qui peut être déduit par intégration convenable à partir de I ou VIII :

Si $F(z)$ *est méromorphe pour* $|z| < 1$ *et si l'intégrale*

$$\int^1 T(r, F)(1-r)^{\lambda-1}\,dr \qquad (\lambda > 0) \tag{34}$$

est divergente, la série

$$\Sigma[1 - r_n(Z)]^{\lambda+1} \tag{35}$$

étendue aux modules des zéros de $F(z) - Z$ *appartenant au cercle* $|z| < 1$ *est divergente sauf au plus pour deux valeurs de* Z.

En utilisant une décomposition du cercle en secteurs, on en déduit cette proposition [14, k] :

XXXVIII. *La divergence de* (34) *entraîne l'existence d'au moins un point* z_0 *de module* 1 *tel que la série* (35) *diverge pour tous les* Z *sauf deux au plus lorsqu'on se borne à y faire figurer les modules des zéros de* $F(z) - Z$ *appartenant à un cercle de centre* z_0 *et de rayon arbitraire.*

---

(1) *Voir* à ce sujet des travaux de C. T. Chuang (*Rep. Tsing Hua Univ.*, t. 3, 1936 et *J. Chinese Math. Soc.*, t. 2, 1937) et de K. Lee (*Jap. Journal of Math.*, t. 13, 1936).

Le théorème XXXII permet alors de montrer que les deux cas suivants sont seuls possibles : 1° il existe une suite infinie de cercles de remplissage du type divergent de l'ordre $\lambda+1$ tendant vers z_0 et tels que les directions joignant leurs centres à z_0 ont une limite qui n'est pas confondue avec la tangente au cercle unité en z; 2° la série (35) diverge encore sauf pour deux valeurs de Z lorsqu'on se borne à y faire figurer les zéros de $F(z)-Z$ appartenant à l'un ou l'autre de deux angles d'ouverture arbitrairement petite dont le sommet est z_0 et dont la bissectrice est la tangente au cercle unité en z_0. On dit dans le premier cas que z_0 est *un point de Borel direct d'ordre* $\lambda+1$ *et du type divergent;* dans le second cas, z_0 *est un point de Borel indirect d'ordre* $\lambda+1$ *divergent.* Ceci s'applique dès qu'on suppose

$$\overline{\lim_{r=1}}\frac{\log T(r, F)}{\log\dfrac{1}{1-r}}=\rho>0,$$

et que (34) diverge pour $\lambda=\rho$.

On définit de même [14, *k*] les points d'ordre $\rho+1$, sans spécifier la divergence, et l'on pourrait comme au n° 14 introduire l'ordre précisé.

Il existe des fonctions pour lesquelles les points de Borel directs d'ordre $\rho+1$ sont denses sur la circonférence, mais dont presque tous les points de cette circonférence $|z|=1$ ne sont que des points indirects.

Dans le cas des fonctions holomorphes, il ne peut exister de points de Borel directs d'ordre $\rho+1$ que si

$$\overline{\lim_{r=1}}\frac{\log\log M(r, F)}{\log\dfrac{1}{1-r}}=\rho+1,$$

ce qui permet de montrer aisément qu'il existe des fonctions d'ordre ρ ne possédant pas de tels points. (Pour ces propriétés et d'autres analogues, *voir* [14, *k*]).

Le cas des fonctions d'ordre infini a été abordé par K. L. Hiong (*a*). L'ordre est défini comme au n° 11, mais en remplaçant r par $\dfrac{1}{1-r}$; il existe au moins un point z_0 de la circonférence unité qui est un point d'ordre au moins égal à celui de la fonction. Il serait loisible aussi de faire la distinction entre les points directs et indirects.

CHAPITRE III.

CAS DES FONCTIONS ENTIÈRES OU HOLOMORPHES DANS UN ANGLE.

18. Rayon minimum des cercles de remplissage des fonctions méromorphes à valeur exceptionnelle. — La valeur minimum obtenue dans XII et XV pour le rayon des cercles de remplissage peut être abaissée dans le cas des fonctions entières (Valiron) et plus généralement des fonctions méromorphes à valeur exceptionnelle au sens large [Milloux (*b*)]. On a, en effet, le théorème suivant :

XXXIX. *Si la fonction* $F(z)$ *est méromorphe dans un cercle* $|z| < R$, *n'y prend pas plus de* $\frac{n}{80}$ *fois une valeur* a *tandis que dans le cercle* $|z| < \frac{1}{2}R$ *elle prend au moins* n *fois toutes les valeurs sauf au plus celles qui sont représentées dans deux cercles de rayon* e^{-n} *de la sphère, il existe un cercle de remplissage* C *de rayon* $\frac{AR}{n}$ *dont le centre est dans le cercle* $|z| < R$. *Dans* C $F(z)$ *prend au moins une fois toute valeur sauf au plus celles qui sont représentées dans deux cercles de rayon* $e^{-\lambda A}$. λ *est une constante numérique,* n *et* A *sont arbitraires mais doivent être supérieurs à des constantes numériques.*

Pour le prouver, on peut prendre $R = 1$ et a infini. Milloux introduit alors la fonction holomorphe $\psi(z) = [F(z) - b]\Pi(z - b_\nu)$ où les b_ν sont les pôles de $F(z)$ dans $|z| < 1$ et b une valeur ordinaire dans $|z| < \frac{1}{2}$ convenablement choisie. Il montre qu'il existe un point z_0, $|z_0| \leqq \frac{29}{32}$ en lequel $\log|\psi| > \frac{n}{9}$, cette inégalité vaut donc sur un arc Γ traversant la couronne $\frac{29}{32} \leqq |z| < 1$ et entraîne sur cet arc une inégalité analogue pour $\log|F(z)|$. Moyennant une représentation conforme, on peut se ramener au cas $z_0 = 0$. Si z_1 est alors le point de moindre module en lequel $|F(z_1)| = 1$, point qui existe d'après les hypothèses, un théorème de Carleman appliqué au cercle $|z| < |z_1|$ montre que l'on a encore dans ce cercle

$$\log|F(z)| > \frac{\lambda n}{10}\left(1 - \left|\frac{z}{z_1}\right|\right).$$

On peut donc trouver un cercle de rayon $r = \frac{AR}{n}$ au centre duquel $|F(z)| = 1$, contenant une courbe qui traverse la couronne $\frac{r}{2} \leqq |z| < r$, et sur laquelle $\log |F(z)| > \lambda A$. Le théorème de Schottky (qu'on peut prendre sous la forme IX) conduit alors au résultat.

En se reportant à l'énoncé XIV, on voit que, dès qu'il existe dans le cercle C_j une valeur exceptionnelle qui n'est prise que $\frac{n_j}{80}$ fois au plus, il existe un cercle de remplissage de rayon $\frac{\lambda r_j}{q n_j}$ dont le centre est dans C_j. En particulier, en donnant à q une valeur fixe, on a ce résultat :

XL. *$f(z)$ étant une fonction méromorphe d'ordre fini positif ρ, $\rho(r)$ un ordre précisé de $f(z)$ et $U(r)$ la fonction correspondante, s'il existe un nombre a pour lequel $n(r, f-a) < \varepsilon U(r)$ si $r > r_0$, il existe une suite infinie de cercles de remplissage Γ_j,*

$$|z - z_j| < \frac{B_j |z_j|}{T(|z_j|, f)},$$

$f(z)$ prenant dans Γ_j toutes les valeurs sauf au plus celles représentées dans deux cercles de rayon $e^{-B_j\lambda}$ dès que ε est inférieur à une constante dépendant de ρ; λ est une constante numérique, B_j doit être supérieur à une certaine constante dépendant de ρ.

Dans le cas de l'ordre infini, H. Milloux donne aussi une valeur minimum déduite de son théorème XVII; on pourra également tirer de XVIII et de XIX des propositions analogues à XL. Dans le cas de l'ordre nul, les résultats obtenus ne rejoignent pas ceux de l'auteur relatifs aux fonctions entières.

19. Théorèmes généraux sur les fonctions entières d'ordre fini positif. — R. Nevanlinna (a) a donné le théorème suivant :

Supposons que $F(z)$ soit holomorphe dans un angle de bissectrice Δ et d'ouverture 2β et désignons par $M(r, \Delta, \beta')$ le maximum de $|F(z)|$ lorsque z appartient à l'angle de bissectrice Δ et ouverture $2\beta'$ et que $|z| \leqq r$. Si l'intégrale

$$\int^{\infty} \log M(r, \Delta, \beta') r^{-k-1} dr \qquad (\beta' < \beta)$$

diverge pour une valeur $k > \frac{\pi}{2\beta}$, *la série* $\Sigma[r_n(\Delta, \beta, Z)]^{-k}$ *diverge pour tous les* Z *finis sauf un au plus.*

L'auteur en déduisit [**14**, *a*] un résultat qu'il donna ensuite [**14**, *g*] sous cette forme plus précise :

XLI. *Si* $F(z)$ *est d'ordre k divergent dans un angle d'ouverture supérieure à* $\frac{\pi}{k}$, *cet angle contient une direction de Borel d'ordre k divergent.*

On peut aussi remplacer le théorème de R. Nevanlinna par la proposition suivante qui s'établit exactement de la même façon (¹) :

S*i* $F(z)$ *est holomorphe dans un angle de bissectrice* Δ *et ouverture* 2β, *si* $\rho(r)$ *jouit des propriétés de l'ordre précisé, si*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, \Delta, \beta')}{U(r)} > 0 \qquad [U(r) = r^{\rho(r)}], \tag{36}$$

avec $\beta' < \beta$, $\frac{\pi}{2\beta} < \lim \rho(r)$, *on a aussi*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r, \Delta, \beta, Z)}{U(r)} > 0$$

pour tous les Z *finis sauf un au plus.*

On en tire une proposition analogue à XLI et ce corollaire [**14**, *l*], [**4**, *e*, *i*] :

XLII. *Si* $f(z)$ *est une fonction entière d'ordre fini* ρ *supérieur à* $\frac{1}{2}$ *et d'ordre précisé* $\rho(r)$, *tout angle d'ouverture supérieure à* $\frac{\pi}{\rho}$ *renfermant un angle dans lequel* (36) *est vérifiée contient une direction de Borel d'espèce maximum.*

On sait, d'autre part (VALIRON, *Thèse*, 1914), que si l'on pose

$$h(\varphi, f) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{U(r)}, \tag{37}$$

(¹) J'ai indiqué cette méthode dans mon cours à Harvard en 1933.

la fonction $h(\varphi, f)$ possède des propriétés établies par Lindelöf et Phragmén (*Acta Math.*, t. 31) et complétées par Pólya (*Math. Zeits.*, t. 29), propriétés qui découlent du fait que, si l'on pose $\operatorname{tang} \rho(\varphi - \varphi_0) = X$, φ_0 étant quelconque et $|\varphi - \varphi_0| < \frac{\pi}{2\rho}$, $\frac{h(\varphi, f)}{\cos \rho(\varphi - \varphi_0)}$ est une fonction convexe de X. Il s'ensuit notamment qu'un intervalle où $h(\varphi, f) > 0$ a une longueur au moins égale à $\frac{\pi}{\rho}$. De XLII découlent alors les corollaires suivants [Valiron (l), Cartwright (e, i)] :

XLIII. *Si l'ordre ρ de $f(z)$ est supérieur à $\frac{1}{2}$, tout angle d'ouverture supérieure au plus grand des nombres $\frac{\pi}{\rho}$, $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ contient une direction de Borel d'espèce maximum. Il existe au moins deux directions de Borel d'espèce maximum.*

XLIV. *Si l'ordre ρ est supérieur à 1 et s'il n'existe que deux directions de Borel d'espèce maximum, leur angle aigu est $\frac{\pi}{\rho}$.*

De même, si $f(z)$ est de la classe divergente de l'ordre ρ, l'intégrale

$$\mathrm{L}(\varphi, f) = \int_1^\infty \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \, r^{-\rho-1} \, dr \tag{38}$$

a des propriétés voisines de celles de $h(\varphi, f)$; les valeurs de φ pour lesquelles elle diverge forment des angles d'ouverture au moins égale à $\frac{\pi}{\rho}$ [Valiron (g), Rauch (f)]. On a donc les propriétés suivantes déduites de XLI [14, g] :

XLV. *Si $f(z)$ est d'ordre $\rho > \frac{1}{2}$ et de la classe divergente, tout angle d'ouverture supérieure au plus grand des deux nombres $\frac{\pi}{\rho}$, $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ contient une direction de Borel d'ordre ρ divergent; il existe au moins deux telles directions; si $\rho > 1$ et s'il n'y a que deux directions de Borel d'ordre divergent, leur angle aigu est $\frac{\pi}{\rho}$.*

Ces résultats valent évidemment pour les fonctions holomorphes autour du point à l'infini, pour les fonctions holomorphes dans un angle d'ouverture suffisamment grande; le théorème XXVII de Rauch s'applique, donc on peut parler de cercles de remplissage; le théorème de Rauch du n° 16 permet également de considérer l'ensemble des fonctions $f(z)+g(z)$ [Cartwright (e, i)]. Enfin XLI et XLV peuvent se généraliser dans l'ordre d'idées signalé au n° 16.

H. Milloux (b) a traité les questions de ce genre par une méthode directe qui s'apparente à celle du n° 18 (emploi du théoreme de Carleman), mais qui nécessite par ailleurs l'intervention de la forme précise du théorème de Schottky déjà employée par l'auteur (*Journ. de Math.*, 1928) pour obtenir des directions de Julia [1]. Il s'agit de cet énoncé : *si* $\mathrm{F}(z)$ *est holomorphe et ne prend pas les valeurs* o *et* 1 *dans le cercle* $|z|<1$ *et si* $|\mathrm{F}(0)|$ *dépasse une certaine constante, on a*

$$\log|\mathrm{F}(z)| > \frac{1}{3}(1-|z|)\log|\mathrm{F}(0)|$$

H. Milloux en déduit cette proposition qui se généralise par la transformation (Z, z^k).

XLVI. *Supposons que* $\mathrm{F}(z)$ *soit holomorphe et ne prenne pas les valeurs* o *et* 1 *dans le secteur* $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, $r_1<|z|=r<r_2$. *On a pour* $2r_1<r<\frac{1}{2}r_2$.

$$\log|\mathrm{F}(r)| > \frac{1}{3}\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{|\varphi|}{4}\right)^5\log|\mathrm{F}(e^{i\varphi}\sqrt{r_1 r_2})|$$

Ceci dit, voici le schéma du raisonnement de Milloux. Supposons que $f(z)$, fonction d'ordre ρ, soit effectivement d'ordre ρ en un point z_0 de module r et considérons un secteur d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$ ayant ce point pour centre (les rayons extrêmes r_1 et r_2 ont r pour moyenne géométrique). Si pour un a le nombre N des zéros a_n de $f(z)$-a dans ce secteur est inférieur à $k\log|f(z_0)|$, on se ramène à $a=0$ et l'on applique la réciproque du théorème XLVI à la fonction

$$\frac{f(z)}{\Pi\left(1-\frac{z}{a_n}\right)}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{2\mathrm{N}},$$

---

[1] Le théoreme de Schottky, sous la forme ordinaire, fournit de telles directions et des théorèmes donnés dans le Mémoire de Seidel (11).

ce qui fournit une ligne Γ sur laquelle cette fonction a son module moindre que 1, donc sur laquelle $\log|f(z)| < -\frac{5}{2}\mathrm{N}\log\frac{r}{r_1}$. En appliquant le théorème de Carleman, on arrivera à trouver une ligne Γ' sur laquelle on aura encore une inégalité analogue, voisine d'un point en lequel $|f(z)| = 1$; le théorème V donnera alors un cercle de remplissage. En introduisant l'ordre précisé, le résultat final de Milloux prend cette forme :

XLVII. *Supposons que $f(z)$ soit d'ordre ρ et d'ordre précisé $\rho(r)$ et soit $\mathrm{U}(r)$ la fonction correspondante. A toute suite infinie de points z_n tels que*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log|f(z_n)|}{\mathrm{U}(|z_n|)} = \alpha > 0 \qquad (\arg z_n = \beta_n),$$

correspond une suite de cercles de remplissage Γ_n. Γ_n étant vu de l'origine sous un angle ε_n, son centre z'_n étant tel que

$$|\beta_n - \arg z'_n| < \frac{\pi}{2\rho} + , \qquad \frac{1}{\mathrm{K}} < \left|\frac{z'_n}{z_n}\right| < \mathrm{K}$$

(On prend les z_n de telle façon que les Γ_n ne se coupent pas.) Dans Γ_n, $f(z)$ prend au moins $p_n = e^{-k/\varepsilon_n}\mathrm{U}(|z'_n|)$ fois toutes les valeurs finies Z telles que $|\mathrm{Z}| < e^{p_n}$ sauf au plus celles appartenant à un cercle de rayon e^{-p_n}. k et K sont des constantes dépendant de ρ, ε, α; ε_n peut être fixe ou tendre vers 0 lorsque n croît indéfiniment.

Tous les théoremes de ce numéro s'étendent immédiatement au cas des fonctions méromorphes $f(z)$ admettant une valeur exceptionnelle a pour laquelle l'exposant de convergence de la suite des zéros est inférieur à l'ordre; on peut aussi supposer que a est valeur exceptionnelle minimum [*voir* Milloux (d) et Cartwright (e)].

20. Comparaison des ordres réel et apparent dans une direction. — Si $f(z)$ est holomorphe d'ordre fini positif ρ autour du point à l'infini et si Δ, $\varphi =$ const., est une direction, les nombres

$$\rho_a(\Delta) = \rho_a(\varphi) = \lim_{\varepsilon=0}\left[\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log^+\log^+ \mathrm{M}(r, \Delta, \varepsilon)}{\log r}\right],$$

$$\rho'_a(\Delta) = \rho'_a(\varphi) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log^+\log^+|f(re^{i\varphi})|}{\log r}$$

seront appelés respectivement *l'ordre apparent de $f(z)$ dans la direction Δ et l'ordre apparent de $f(z)$ sur Δ.* On démontre [14, *j*] que $\rho_a(\varphi)$, qui est constant et égal à ρ au moins sur un segment de longueur $\frac{\pi}{\rho}$, est alternativement non croissant et non decroissant dans des intervalles adjacents dont le nombre est au plus 2ρ. L'inégalité $\rho'_a(\varphi) < \rho_a(\varphi)$ ne peut avoir lieu qu'aux points où $\rho_a(\varphi)$ est discontinu et en 2ρ autres points au plus.

Le théorème de Jensen et le théorème de Schottky sous la forme V montrent que [14, *j*] :

XLVIII. *L'ordre réel moyen $\overline{\rho(\Delta)}$ dans une direction est toujours inférieur ou égal à l'ordre apparent $\rho_a(\Delta)$. L'ordre apparent dans une direction de Borel est égal à l'ordre de la fonction.*

XLIX. *$f(z)$ étant d'ordre ρ et $\rho' \leqq \rho$, les côtés des angles dans lesquels $\rho'_a(\varphi) \geqq \rho'$ sont, s'ils existent, des directions d'ordre réel moyen au moins égal à ρ'. Toute direction pour laquelle $\rho'_a(\varphi)$ n'est pas stationnaire est direction d'ordre réel moyen égal à $\rho_a(\varphi)$.*

Ces propositions ont été généralisées par A. Rauch (*g*) au cas où l'on considère les zéros de $f(z) + g(z)$, l'ordre de $g(z)$ dans la direction étant inférieur à celui de $f(z)$.

En observant que la fonction $\rho_a(\varphi)$ est la même pour $f(z)$ et $f'(z)$, on obtiendra dans certains cas des directions de Borel communes à une fonction et à ses dérivées.

On peut de même définir pour une fonction de la classe divergente de l'ordre ρ deux sortes de directions : *les directions d'ordre apparent ρ convergent pour lesquelles l'intégrale* $L(\varphi, f)$ *définie par* (38) *est convergente et celles d'ordre apparent ρ divergent pour lesquelles elle diverge* (14, *g*). On a ces propositions dont la dernière est due à Rauch (*b*) :

L. *Si Δ est direction d'ordre apparent ρ divergent, il existe une direction de Borel d'ordre ρ divergent faisant avec Δ un angle au plus égal à $\frac{\pi}{2\rho}$. Les directions de Borel d'ordre ρ divergent appartiennent aux angles $\left(d'ouverture\ au\ moins\ égale\ à\ \frac{\pi}{\rho}\right)$ formés par* *les directions d'ordre apparent ρ divergent ou sont frontières de ces angles. Les côtés des angles dans lesquels* (38) *diverge sont des directions de Borel d'ordre ρ divergent.*

Ceci se généralise en introduisant la fonction $V(r)$ déjà considérée au nº **14** et les angles (et leurs frontières) où l'intégrale

$$\int^{\infty} \log^{+}|f(re^{i\varphi})| \frac{dr}{rV(r)}$$

diverge [Valiron (r)]. Ici. encore, on aura dans certains cas des directions de divergence communes à une fonction et à ses dérivées.

21. Fonctions d'ordre ρ supérieur à un n'admettant que deux directions de Borel d'ordre ρ. — Une conséquence immédiate de XLII et XLIII est que si une fonction d'ordre $\rho > 1$ n'admet que deux directions de Borel d'ordre ρ, donc *a fortiori* que deux directions de Borel d'espèce maximum, l'angle aigu Ω de ces deux directions est $\frac{\pi}{\rho}$ [14, *a*]; si $\varphi = 0$ est la bissectrice de Ω, la fonction $h(\varphi, f)$ correspondant à un ordre précisé $\rho(r)$ est donnée par

$$(39) \quad h(\varphi, f) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2\rho} \leqq |\varphi| \leqq \pi, \qquad h(\varphi, f) = \cos(\rho\varphi) \quad \text{si} \quad |\varphi| \leqq \frac{\pi}{2\rho}.$$

L'étude détaillée de ces fonctions particulieres a été faite principalement par H. Milloux et Miss Cartwright. L'auteur [14, *a*] avait énoncé que ces fonctions sont *à croissance régulière* au sens de Borel, propriété qui se déduit des méthodes de Lindelof et Phragmén (*Mémorial*, II, nº 20), mais à condition de supposer que l'ordre apparent dans tout angle extérieur à Ω est au plus égal à $\rho' < \rho$ [Milloux (b)]. Qu'une restriction de cette espèce soit nécessaire résultera des exemples d'application du théorème LIV donné plus bas.

H. Milloux a donné ce théorème :

LI. *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini ρ supérieur à* 1 *ne possédant que deux directions de Borel qu'on peut supposer être $\varphi = \pm \frac{\pi}{2\rho}$. Si la fonction $f(z)$ est d'ordre au plus égal à $\rho' < \rho$ dans tout angle extérieur à Ω, quel que soit a l'ordre réel des zéros de $f(z)$-a est inférieur à ρ dans toute direction diffé-*

rente de $\varphi = \pm \frac{\pi}{2\rho}$ *et égal à* ρ *dans ces deux directions. En outre, si* $\theta(z)$ *est le produit canonique (d'ordre inférieur à* ρ*) formé avec les zéros de* $f(z)$ *appartenant à un angle intérieur à* Ω *on a, dans tout angle complètement intérieur à* Ω

$$\log\left|\frac{f(z)}{\theta(z)}\right| > |z|^{\rho-\epsilon(z)}, \qquad \lim_{z=\infty} \epsilon(z) = 0$$

Les fonctions de Mittag-Leffler, de Lindelof (voir *Mémorial*, fasc. VII de Buhl), les fonctions orientées de l'auteur lorsqu'elles sont à croissance régulière (Thèse 1914) rentrent dans cette catégorie.

Miss Cartwright (*d. f, j*) a fait une étude approfondie des fonctions, moins spéciales que celles de Milloux, qui vérifient (39). Elle démontre d'abord [4, *j*] que :

LII. *Si* $F(z)$ *est holomorphe et d'ordre précisé* $\rho(r)$ *pour*

$$|z| > r_0, \qquad \alpha \leqq \varphi \leqq \beta$$

et si

$$h(\varphi, F) = A\cos\varphi\rho + B\sin\varphi\rho$$

pour

$$\alpha < -\frac{\pi}{2\rho} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2\rho} < \beta,$$

on a, pour tout $\delta > 0$,

$$n\left(r, \varphi = 0, \frac{\pi}{2\rho} - \delta, 0\right) = o[U(r)]. \tag{40}$$

D'autre part, pour

$$|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2\rho} - \delta, \; \eta R \leqq r \leqq R, \qquad R > R_0(\varepsilon, \delta, \eta, \xi),$$

$$|\log|F(re^{i\varphi})| - [A(R)\cos\varphi\rho + B\sin\varphi\rho]U(r)| < \varepsilon U(r)$$

avec

$$\overline{\lim_{R=\infty}} A(R) = A, \quad \underline{\lim_{R=\infty}} \rho A(R) \geqq \max\left[-h'\left(-\frac{\pi}{2\rho} - 0, f\right) \text{ et } -h'\left(\frac{\pi}{2\rho} + 0, f\right)\right]$$

sauf au plus dans des cercles dont la somme des rayons est moindre que ξR.

Lorsque $B = 0$, $h(\varphi, F - a) = h(\varphi, F)$, il n'y a pas de direction de Borel d'espèce maximum pour lesquelles $|\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}$. Miss Cartwright (*j*) donne aussi cette réciproque :

LIII. *Si* $F(z)$ *est holomorphe et d'ordre précisé* $\rho(r)$ *pour*

$|z| \geqq r_0$ *et* $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$ *et ne possède pas de direction de Borel d'espèce maximum pour* $\alpha < -\frac{\pi}{2\rho} < \varphi < \frac{\pi}{2\rho} < \beta$, *on a* $h(\varphi, F) = h(0)\cos\varphi\rho$ *pour* $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2\rho}$.

Dans ses démonstrations, Miss Cartwright utilise, en outre des méthodes signalées dans cet exposé, une forme précise du théorème sur le minimum d'une fonction analytique due à Vl. Bernstein (*g*); elle donne une méthode de recherche des cercles de remplissage qui repose sur des principes différents de celle de Milloux donnée au n° 19. En appliquant ses théoremes LII et LIII à une fonction entière d'ordre précisé $\rho(r)$ vérifiant (39), elle donne, en dehors des conséquences immédiates de ces théorèmes, diverses propositions, notamment la suivante :

LIV. *$f(z)$ étant une fonction entière d'ordre précisé $\rho(r)$, si* (39) *a lieu, les directions* $\varphi = \pm\frac{\pi}{2\rho}$, *qui sont les seules directions de Borel d'espèce maximum, n'admettent pas de valeurs exceptionnelles, on a, pour* $\eta R \leqq r \leqq R$,

$$\left| n\left(r, \varphi = \pm\frac{\pi}{2\rho}, \zeta, 0\right) - \frac{1}{2\pi} A(R) U(r) \right| = o[U(r)]$$

avec $\overline{\lim}\, A(R) = 1$, $\underline{\lim}\, A(R) \geqq 0$, $R > R_0(\eta, \varepsilon)$.

Des exemples de telles fonctions, à croissance irrégulière, peuvent se déduire des fonctions orientées de l'auteur auxquelles on applique la méthode de Mittag-Leffler pour réduire à deux le nombre des directions de Borel d'espece maximum (*voir* 14, *r*).

Les résultats se précisent moyennant des hypotheses supplémentaires. Miss Cartwright donne en particulier des propositions contenant celles-ci :

LV. *ρ étant l'ordre, $\rho(r)$ un ordre précisé de $f(z)$, si l'on a*

$$h(\varphi, f) = A\cos\varphi\rho + B\sin\varphi\rho \tag{41}$$

pour $|\varphi| \leqq \alpha$ *avec* $\alpha > \frac{\pi}{2\rho}$; *on a* $n(r, 0, \alpha', 0) = o[U(r)]$ *pour tout* $\alpha' < \alpha$, *et, pour tout* $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $\zeta > 0$, *on a dès que* $r > r_0(\varepsilon, \eta, \zeta)$,

$$\log|f(re^{i\varphi})| > [A\cos\varphi\rho + B\sin\varphi\rho - \varepsilon]U(r)$$

sauf au plus dans des cercles, la somme des rayons de ceux de ces cercles dont le centre a un module compris entre $R\eta$ *et* R *étant au plus* $R\xi$.

LVI. *Supposons que* $f(z)$ *soit du type moyen de l'ordre* ρ, *c'est-à-dire que l'on puisse prendre* $U(r) = Cr^\rho$, *que* (41) *soit vérifiée pour* $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2\rho} = \theta$, *et que*

$$\int_1^\infty [\log|f(re^{i\theta})| + \log|f(re^{-i\theta})|]^+ r^{-1-\rho}\, dr < \infty. \tag{42}$$

Alors la conclusion de LV *vaut pour* $\alpha = \theta$ *et* $r_n e^{i\varphi_n}$ *désignant les zéros de* $f(z)$ *pour lesquels* $|\varphi_n| \leqq \theta$, *la série* $\Sigma(\cos\rho\varphi_n) r_n^{-\rho}$ *converge, et l'on a*

$$\lim_{r=\infty} \frac{2\rho}{\pi r^\rho} \int_{-\theta}^{\theta} \log|f(re^{i\varphi})| \cos\rho\varphi\, d\varphi = A.$$

Si, plus particulièrement, l'hypothèse relative à (41) est remplacée par (39), on peut ajouter que $n(r, f) \sim \frac{C}{\pi} r^\rho$.

Ces derniers résultats sont déduits par Miss Cartwright (h) d'un théorème de R. Nevanlinna (b). Lorsque (42) est remplacé par

$$\int_1^\infty [\log^+|f(re^{i\theta})| + \log^+|f(re^{-i\theta})|]\, r^{-1-\rho}\, dr < \infty,$$

les conséquences relatives aux zéros valent pour les zéros de $f(z) - a$ a fini quelconque, et fournissent des propositions sur les directions de Borel d'ordre ρ divergent. Notamment [Valiron (p) et Cartwright (h, k)] :

LVII. *Si* $f(z)$ *est du type moyen de l'ordre* ρ *et si toutes les directions appartenant à l'angle* $\theta \leqq \varphi \leqq 2\pi - \theta$ *sont d'ordre apparent* ρ *convergent, les directions* $\varphi = \pm\theta$ *sont les seules directions de Borel d'ordre* ρ *divergent* $\left(\theta = \frac{\pi}{2\rho}\right)$.

La méthode de Lindelöf (Calcul des Résidus) permet de construire des classes de fonctions entières, données par leur développement de Taylor, satisfaisant à ces conditions [Valiron (p)] et à LV et LVI. Il conviendrait de reconnaître si, pour ces fonctions, $f(z)$ tend vers l'infini à l'intérieur de Ω. Au contraire, la méthode de Mittag-Leffler permet de construire des fonctions justiciables des théorèmes précédents, bien connues dans Ω, mais dont le développement taylorien est mal déterminé.

On trouvera dans les mémoires (h, i, j) de Miss Cartwright de nombreux autres énoncés.

22. L'indicatrice de croissance et les directions de Borel d'espèce maximum. — A. Bloch avait observé (*Mémorial*, fasc. XX) que les directions de Julia des fonctions entières (directions dans lesquelles s'éloignent indéfiniment les centres de cercles de remplissage quelconques) étant les directions singulières ([1]), devaient probablement jouir de propriétés analogues aux singularités des fonctions définies par un développement de Taylor et que, en particulier, toute fonction entière dont le développement taylorien est suffisamment lacunaire doit admettre toute direction pour direction de Julia. Ce fait fut établi par G. Pólya (*Math. Z.*, 29) pour les fonctions entières d'ordre infini, l'hypothèse sur les lacunes étant celle qui entraîne dans le cas des séries de Taylor que le cercle de convergence est coupure, puis par Biernacki (b) pour toutes les fonctions entières à lacunes assez larges. Dans ses recherches, G. Pólya a utilisé, sous une forme nouvelle, ce théorème de Borel et Servant sur la méthode de sommation exponentielle (voir *Mémorial*, fasc. VII) : *si* $f(z) = \Sigma a_n z^n$ *est une fonction entière du type moyen de l'ordre un* $[\mathrm{U}(r) = \mathrm{C}r]$, *le polygone de sommabilité exponentielle de la fonction associée* $\mathrm{F}(z) = \Sigma a_n n!\, z^n$ *a pour équation polaire* $r\mathrm{H}(\varphi, f) = 1$ *avec* $\mathrm{H}(\varphi, f) = h(\varphi, f)^+$.

L'étude des méthodes et des résultats de G. Pólya a conduit Vl. Bernstein (b) à penser que les directions de Julia de la fonction $f(z)$ sont déterminées par les singularités de la fonction associée, donc finalement par $\mathrm{H}(\varphi, f)$. D'une façon précise, *les directions de Julia d'une fonction d'ordre un du type moyen correspondraient aux valeurs de* φ_0 *pour lesquelles* $H(\varphi, f)$ *n'est pas de la forme* $\mathrm{A}\cos\varphi + \mathrm{B}\sin\varphi$ *dans un petit intervalle contenant* φ_0. Vl. Bernstein

([1]) On peut remarquer que toute direction Δ telle que $f(z)$ ne tende pas vers une limite finie lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans un angle de bissectrice Δ peut aussi apparaître comme singulière.

justifia son énoncé dans des cas étendus en supposant que les singularités de $F(z)$ appartiennent à certains types. Mais, comme la multiplication de $f(z)$ par une fonction d'ordre ρ inférieur à un dont les modules des zéros sont suffisamment réguliers permet souvent d'introduire de nouvelles directions de Julia sans modifier $H(\varphi)$, l'énoncé de Bernstein ne pouvait être vrai en général sous la forme indiquée, il convenait au moins d'y introduire à la place des directions de Julia quelconques les directions de Borel d'espèce maximum qui seules peuvent être en relation étroite avec $H(\varphi, f)$ (**14**, *l*).

Ainsi se posa la question de l'étude des relations entre la position des directions de Borel d'espèce maximum et les propriétés de

$$H(\varphi, f) = h(\varphi, f)^{+} = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log^{+}|f(re^{i\varphi})|}{U(r)},$$

question que l'on peut préciser ainsi : *y a-t-il identité entre les directions de Borel d'espèce maximum et les directions* $\varphi = \varphi_0$ *pour lesquelles* $H(\varphi, f)$ *n'est pas sinusoïdal, c'est-à-dire n'est pas de la forme* $A\cos\varphi\rho + B\sin\varphi\rho$ *pour* $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon$*? Sinon, cette propriété est-elle vraie pour certaines classes de fonctions, ou même en général* (moyennant une définition du mot en général)?

Dans le cas du type moyen l'auteur avait signalé que la propriété est vraie si les singularités de la fonction associée (de Mittag-Leffler dans le cas général) situées dans un cercle contenant le domaine de sommabilité correspondant sont des pôles (**14**, *l*). Miss Cartwright (*g*, *i*) a établi qu'il suffit que les singularités appartenant au cercle considéré soient isolées. Vl. Bernstein (*i*) montre qu'il suffit que les singularités situées sur la frontière du domaine de sommabilité appartiennent aux types qu'il avait envisagés pour les directions de Julia. Il s'appuie notamment sur les deux propositions suivantes :

LVIII. [**1**. *h*]. *Si* $F(z)$ *est holomorphe et d'ordre fini dans un angle, si* $\rho(r)$ *est un ordre précisé,* $U(r)$ *la fonction correspondante,* $h(\varphi, f)$ *l'indicatrice de croissance ; à toute direction* φ *de l'angle considéré et à tout couple de nombres positifs* ε, ω *correspondent un nombre* δ *et une suite* r_k, $\lim r_k = \infty$, *tels que l'inégalité*

$$\log|F(re^{i\varphi})| > [h(\varphi, F) - \varepsilon]\, U(r)$$

est vérifiée pour $r_k \leqq r \leqq r_k(1+\delta)$ *dans des intervalles dont la somme des longueurs est* $\eta_k r_k$, *avec* $\overline{\lim}\, \eta_k > 1 - \omega$.

LIX. [1, i]. *Si* F(z) *est holomorphe d'ordre précisé* $\rho(r)$ *pour* $\alpha' \leqq \varphi \leqq \beta'$ *et si pour* $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha' < \alpha < \beta < \beta'$, $\rho(\beta - \alpha) < \pi$,

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log |F(re^{i\varphi})|}{U(r)} = h(\varphi, F) > 0, \tag{44}$$

les deux cas suivants sont seuls possibles : 1° *pour tous les Z finis*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n\left[r, \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \frac{1}{2}(\beta - \alpha) + \varepsilon, Z\right]}{U(r)} > 0;$$

2° $h(\varphi, F)$ *est sinusoïdal entre* α *et* β *et* (44) *a lieu pour tous les* φ *entre* α *et* β [*moyennant l'exclusion de certains intervalles* (1)].

Les résultats du n° 21 fournissent d'autres exemples de cas où l'assertion de Vl. Bernstein est exacte. Les théorèmes de Jensen et Schottky (th. V) montrent d'ailleurs [Valiron (l), Cartwright (e, i)] que :

LX. *Un angle dans lequel* $H(\varphi, f) = 0$ *ne contient pas de directions de Borel d'espèce maximum; les demi-droites limitant les angles où* $H(\varphi, f) > 0$, *sont lorsqu'elles existent, des directions de Borel d'espèce maximum.*

Miss Cartwright a montré, entre autres propriétés, que :

LXI. *Si* $\rho(r)$ *est un ordre précisé de* $f(z)$, $\rho = \lim \rho(r)$, $\log U(r) = \rho(r) \log r$, *et si l'on a*

$$\lim_{r=\infty} \frac{n(r, f)}{\rho U(r)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\varphi, f)\, d\varphi = H,$$

toute valeur $\varphi = \alpha$ *pour laquelle* $h(\varphi, f)$ *n'est pas sinusoïdal fournit une direction de Borel d'espèce maximum sans valeur exceptionnelle pourvu que* $h(\varphi, f) > 0$ *pour* $0 < |\varphi - \alpha| < \frac{\pi}{\rho}$. *Ces directions et celles correspondant aux côtés des angles où* $h(\varphi, f) > 0$ *sont les seules directions de Borel d'espèce maximum* [Cartwright (g, i)].

D'autre part, en utilisant ses résultats antérieurs sur la croissance

(1) Condition ajoutée par l'auteur.

des fonctions entières (**4**, a, b, c), Miss Cartwright (g, i) a montré que :

LXII. *Il existe des fonctions entières d'ordre un et du type moyen telles que* $h[(\varphi, f)] = \max.(\cos\varphi, \sin\varphi)$ *pour lesquelles toutes les droites* $\varphi = \text{const.}$ *avec* $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$ *ou* $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ *sont des directions de Borel d'espèce maximum et sont les seules droites de Julia.*

Il existe des fonctions du type moyen de l'ordre un telles que $h(\varphi, f) \equiv 1$ *et n'admettant que quatre lignes de Julia :* $\varphi = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi$; *lignes qui sont des directions de Borel d'espèce maximum sans valeur exceptionnelle.*

La première question posée plus haut est donc résolue négativement, la connaissance de $H(\varphi, f)$ n'entraîne pas toujours la connaissance des directions de Borel d'espèce maximum. Une direction $\varphi = \varphi_0$ pour laquelle $H(\varphi, f)$ n'est pas sinusoïdal est-elle en général direction de Borel? Vl. Bernstein a établi à ce sujet la proposition suivante :

LXIII. *Supposons que* $F(z)$ *soit d'ordre précisé* $\rho(r)$ *dans un secteur et soit* φ_0 *une direction non sinusoïdale pour* $h(\varphi, F)$. *Si* $\Pi_1(z)$ *et* $\Pi_2(z)$ *sont deux fonctions holomorphes quelconques d'ordre précisé inférieur à* $\rho(r)$ *dans un angle* $|\varphi - \varphi_0| < \delta$ *et si* q *est réel arbitraire, la direction* $\varphi = \varphi_0$ *est direction de Borel d'espèce maximum pour l'une au moins des fonctions*

$$F(z) - \Pi(z)\, e^{[h(\varphi_0, F) + iq]\, V(ze^{-i\varphi_0})}, \qquad \Pi = \Pi_1 \quad \text{ou} \quad \Pi_2, \tag{45}$$

$V(z)$ *est une fonction holomorphe telle que*

$$\lim_{r=\infty} \frac{V(re^{i\varphi})}{V(r)} = e^{i\varphi\rho}, \qquad |\varphi| \leq \frac{\pi}{\rho},$$

fonction qui existe d'après les travaux de l'auteur.

Lorsque $F(z)$ est une fonction entière, cette proposition est contenue dans les théorèmes de Rauch et peut s'en déduire dans le cas général. Elle peut recevoir une forme un peu différente [**1**, l] : parmi les fonctions (45) une seule est exceptionnelle. On trouvera dans le Mémoire (j) de Miss Cartwright des observations critiques sur ce théorème de Bernstein; la principale objection qu'on puisse lui faire est d'être de caractère local. La question à résoudre, qui reste entière, est de savoir si, pour une fonction prise au hasard parmi les fonctions $f(z)$ admettant un même ordre précisé $\rho(r)$ et la même fonction $H(\varphi, f)$; les directions de Borel d'espèce maximum sont données par les directions non sinusoïdales.

23. Détermination de l'indicatrice de croissance. — La fonction $H(\varphi, f)$ est une fonction quelconque vérifiant la condition de Lindelöf et Phragmén : toute fonction $K(\varphi)$ positive ou nulle (mais non identiquement nulle) de période 2π telle que $\frac{K(\varphi)}{\cos(\varphi-\varphi_0)\rho}$ soit fonction convexe de $\operatorname{tg}(\varphi-\varphi_0)\rho$ pour $|\varphi-\varphi_0|\rho < \frac{\pi}{2}$ et φ_0 quelconque, est la fonction $H(\varphi, f)$ d'une fonction entière d'ordre précisé donné $\rho(r)$ tel que $\lim \rho(r) = \rho$ [14, r]. Ce résultat a été étendu récemment par Vl. Bernstein (*C. R. Acad. Sc.*, 1936) au cas de $h(\varphi, f)$ et des fonctions du type moyen.

On a déjà vu que lorsque $f(z) = \Sigma a_n z^n$ est du type moyen de l'ordre un, $H(\varphi, f)$ est déterminé par les singularités de la fonction associée de Borel, l'équation polaire du polygone de sommabilité exponentielle de cette associée étant $r H(\varphi, f) = 1$. De même, si $f(z)$ est du type moyen de l'ordre ρ, le domaine de sommabilité de Mittag-Leffler a pour équation polaire $r^\rho H(\varphi, f) = 1$; les singularités de la fonction associée $F(z) = \Sigma a_n \Gamma\left(1+\frac{n}{\rho}\right) z^n$ déterminent ce domaine, donc $H(\varphi, f)$. Les relations obtenues entre la position des directions de Borel d'espèce maximum et les propriétés de $H(\varphi, f)$ peuvent se traduire dans ces cas par des relations entre la position des singularités de $F(z)$ et les directions B de $f(z)$. Notamment, si $F(z)$ est méromorphe, les directions B de $f(z)$ sont connues [14, l]. De même, les résultats de Miss Cartwright et de Vl. Bernstein, donnés au n° 22, peuvent être présentés sous cette forme; en particulier, le second de ces auteurs a démontré dans cet ordre d'idées cette proposition :

LXIV [1, j]. *Si $f(z)$ est une fonction entière, $f(0) \neq 0$, et si $f_1(z)$ est la fonction entière admettant pour associée de Borel la dérivée logarithmique de $f(z)$, la condition nécessaire et suffi-*

sante pour que les zéros de $f(z)$ soient réels, l'un de ses zéros au moins existant, est que les directions $\pm \frac{\pi}{2}$ soient les seules directions de Borel d'espèce maximum de $f_1(z)$.

Ce résultat se généralise [1, *j*] au cas où l'on introduit l'associée de Mittag-Leffler et peut s'étendre dans diverses directions [1, *j*].

Pour une fonction d'ordre ρ qui n'est pas du type moyen, le problème de la détermination de $H(\varphi, f)$ au moyen du domaine de sommabilité d'ordre ρ de Mittag-Leffler, attaché à une fonction associée convenablement définie, n'est pas encore résolu. On peut [1, *c*, *f*]; [14, *l*, *m*] définir deux fonctions associées $F_1(z)$ et $F_2(z)$ déterminant respectivement deux domaines de sommabilité d'équations $r^\rho H_1(\varphi) = 1$, $r^\rho H_2(\varphi) = 1$ tels que $H_1(\varphi) \leqq H(\varphi, f) \leqq H_2(\varphi)$, mais les conditions dans lesquelles $H_1(\varphi) \equiv H_2(\varphi)$ sont encore mal connues. Toutefois, Vl. Bernstein (*f*) a montré que $H(\varphi, f) = H_2(\varphi)$ *lorsque la frontière de l'étoile d'holomorphie de* $F_2(z)$ *est formée d'un nombre fini de demi-droites radiales*. D'autre part, Pflüger a annoncé (*Société Math. Suisse*, 1935) que, *lorsque* $U(r) = Cr\log r$, *la fonction associée obtenue en divisant le coefficient de z^n dans $f(z)$ par le coefficient de z^n dans $\frac{1}{z\Gamma(z)}$ fournit un polygone de Borel d'équation* $rH(\varphi, f) = 1$.

Une étude de l'ordre dans les diverses directions des fonctions définies par des séries lacunaires a été entreprise par D. Toïdzé [13].

24. Directions de Borel des fonctions entières d'ordre infini. — Il est bien connu qu'une fonction entière d'ordre infini peut rester finie à l'extérieur d'une bande infinie dont l'épaisseur est fonction de l'ordre. La relation entre l'épaisseur de la bande à la distance r de l'origine et l'ordre dans la bande, pour un ordre donné, a été précisée par H. Milloux (*e*, *f*, *g*, *h*, *i*) et lui a servi de base à l'étude des cercles de remplissage. Le but poursuivi par H. Milloux était surtout de montrer que, dans le cas de l'ordre infini, on peut encore parler, moyennant une convention convenable, de l'existence de deux suites au moins de cercles de remplissage d'ordre infini. La méthode suivie par Milloux est parallèle à celle exposée au n° 19 (sauf que la forme précise du théorème de Schottky n'intervient pas) et lui donne ce théorème :

LXV. *Toute fonction entière d'ordre infini possède deux suites au moins de cercles de remplissage* Γ_n, Γ'_n *vus de l'origine sous un angle tendant vers* 0 *avec* $\frac{1}{n}$. *Dans chacune des suites l'ordre réel des zéros de* $f(z) - Z$ *est infini pour chaque* Z *sauf une valeur au plus; le rapport des modules* r_n *et* r'_n *des centres de* Γ_n *et* Γ'_n *est compris entre* $\frac{1}{2}$ *et* 2, *la différence des arguments de deux points quelconques de* Γ_n *et* Γ'_n *est au moins égale à* $[\log T(2r_n, f)]^{-2}$.

Ce résultat n'est pas entièrement satisfaisant, la limite trouvée pour l'écart angulaire des cercles est trop faible, elle pourra être sans doute améliorée par l'emploi d'une nouvelle méthode (Milloux, *g*, *i*). La limite exacte semble être $\frac{\pi U(r)}{r U'(r)}$, $U(r)$ étant une majorante convenable de T ou $\log M(r, f)$. D'autre part, l'ordre trouvé dans les cercles de remplissage n'est pas comparable à celui de la fonction. Des résultats précis peuvent être obtenus dans le cas suivant :

LXVI. *Supposons que*, σ *étant fini positif*, *on ait*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log\log\log M(r, f)}{\log r} = \sigma,$$

désignons par $\sigma(r)$ *un ordre précisé de* $\log M(r, f)$ *et posons* $\log U(r) = \sigma(r)\log r$. *Il existe au moins une suite de couples de cercles de remplissage*

$$\log|z - z'_n| < -\varepsilon U(r'_n)$$
$$\log|z - z_n| < -\varepsilon U(r_n),$$

avec

$$r_n = |z_n|, \quad r'_n = |z'_n|$$

et

$$\frac{1}{K} < \frac{r_n}{r'_n} < K, \qquad |\arg z_n - \arg z'_n| > \frac{\pi - \eta}{2\sigma U(r_n)} + \frac{\pi - \eta}{2\sigma U(r'_n)},$$

le nombre des zéros de $f(z) - Z$ *dans chaque cercle étant au moins égal à* p, $\log p = U(\sqrt{r_n r'_n})^k$ *pourvu que* $|Z| < e^p$ *et que* Z *soit extérieur à un cercle de rayon* e^{-p}. ε *et* η *sont positifs et assez petits*, K *et* k *dépendent de* ε, η, σ.

Cette proposition s'obtient en faisant la transformation conforme $\log\zeta = V(ze^{i\tau})$, $V(z)$ étant la fonction introduite dans (45), puis en appliquant les résultats du n° 19, Elle contient un théorème de

Milloux (i) correspondant à $\sigma = 1$ et $U(r) = Ar$. La même méthode fournirait des résultats généraux. Des transformations conformes simples $[V(z) = z^\rho]$ ont été utilisées par Mandelbrojt et Gergen (*American J.*, t. 53) dans l'étude des directions de Julia des fonctions entières définies par certaines séries de Dirichlet, puis par l'auteur [14, o, r] dans l'étude des droites de Borel des fonctions d'ordre infini définies par certaines séries d'exponentielles.

A, Rauch (c) a étudié les fonctions correspondant à $\sigma = 1$, $U = Ar$ pour lesquelles $\int^{\infty} e^{-\sigma|z|}\log^+|f(z)|\,|dz|$ diverge sur une droite. La représentation conforme $Z = e^{az+b}$ fournit ses résultats comme application de ceux relatifs aux fonctions d'ordre fini de la classe divergente.

25. **Ordre apparent et ordre réel dans une direction dans le cas de l'ordre infini.** — Les résultats du n° 20 s'étendent au cas de l'ordre infini en introduisant l'ordre réel $\rho(r)$ $k(\Delta)$ dans la direction Δ défini à la fin du n° 12 et un ordre apparent dans la direction Δ défini par

$$\rho(r) \lim_{\varepsilon=0} \left[\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log^+\log^+ M(r, \Delta, \varepsilon)}{\rho(r)\log r} \right].$$

Le théorème V, le théorème de Jensen montrent que :

LXVII. *Dans chaque direction Δ, l'ordre réel moyen de $f(z)$ est égal à l'ordre apparent dans cette même direction.*

Dans certains cas, il y a intérêt à faire des approximations d'une nature différente. Soit $K(r)$ une fonction indéfiniment croissante telle que, pour tout $\lambda < 1$,

$$\lim_{r=\infty} \frac{K(r\lambda)}{K(r)} = 0. \tag{46}$$

Convenons de dire que $\log f(z)$ est de l'ordre de $K(r)$ dans la direction Δ, $\varphi = \varphi_0$, lorsque, à tout ε positif donné correspond η tel que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, \varphi = \varphi_0, \eta)}{K(r+\varepsilon r)} \leq 1,$$

tandis que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\log|f(z)| > K(r - \varepsilon r)$$

pour une suite de z dont les arguments tendent vers φ_0 et les modules vers l'infini. On a le théorème suivant :

LXVIII. *Pour que* $\log f(z)$ *soit de l'ordre de* $K(r)$ *dans la direction* $\varphi = \varphi_0$, *il faut et il suffit qu'il existe une suite de cercles* Γ_n,

$$|z - z_n| = o(|z_n|), \qquad \lim_{n=\infty} |z_n| = \infty, \qquad \lim_{n=\infty} \arg z_n = \varphi_0,$$

tels que, dans Γ_n, $f(z)$ *prenne au moins* $N = K[|z_n|(1 + \eta_n)]$ *fois toute valeur de module moindre que* e^N *sauf au plus celles appartenant à un cercle de rayon* e^{-N}, $|\eta_n|$ *tendant vers* o *avec* $\frac{1}{n}$, *et que à tout* ε *positif corresponde* ζ *tel que, à partir de* $r(Z)$, $n(r, \varphi = \varphi_0, \varepsilon, Z) < K(r + r\zeta)$ *sauf au plus pour les* Z *représentés dans un ensemble de mesure linéaire nulle.*

On peut dire que l'ordre réel moyen des zéros de $f(z) - Z$ est aussi $K(r)$.

Si $W(r)$ est une majorante de $\log M(r, f)$ telle que $\log M(r, f)$ soit de l'ordre de $W(r)$ au sens indiqué ci-dessus, $W(r)$ satisfaisant à la condition (46) $\Big[$on peut prendre pour $W(r)$ la plus petite majorante de $\log M(r, f)$ pour laquelle $\frac{\log W(r)}{\log r}$ est non décroissante$\Big]$, on peut considérer la fonction $K(r) = W\left(\frac{r}{k}\right)$, $k > 1$. A chaque φ correspond $k(\varphi) \geqq 1$ tel que l'ordre de $\log f(z)$ dans la direction φ soit celui de $W\left[\frac{r}{k(\varphi)}\right]$. Alors l'ordre réel moyen des zéros de de $f(z) - Z$ dans cette direction est encore celui de $W\left[\frac{r}{k(\varphi)}\right]$.

La détermination de $k(\varphi)$ est liée à la position des singularités de séries de Taylor convenablement associées à $f(z)$; on peut définir deux séries associées telles que, pour chaque φ, $k(\varphi)$ est compris entre les distances à l'origine des premières singularités rencontrées lorsqu'on prolonge le long de la droite d'argument φ. *Lorsque l'une de ces associées a une étoile d'holomorphie dont la frontière ne comprend que des demi-droites radiales,* $k(\varphi)$ *est égal à la distance à l'origine de la première singularité située sur le rayon d'argument* φ. Voir [**14**, *l*, *m*].

On obtient en particulier les résultats suivants qui précisent ceux de Pólya rappelés au n° **22** :

LXIX. *Si la densité des coefficients non nuls de $f(z) = \Sigma a_n z^n$ est égale à zéro, $k(\varphi)$ est égal à 1 pour tous les φ.*

LXX. *$f(z)$ étant défini comme dans* LXIX, *si l'on considère les fonctions $\Sigma a_n b_n z^n$ avec $b_n = \pm 1$, pour presque toutes les fonctions de cette famille $k(\varphi)$ est identique à 1.*

Dans LXX, on peut remplacer la condition $b_n = \pm 1$ par $|b_n| = 1$; la démonstration donnée dans [**14**, *m*] de ces propositions reposant sur ce principe : toute propriété des coefficients d'une série de Taylor qui permet de démontrer que le cercle de convergence est coupure sans faire intervenir l'ordre de grandeur des coefficients (naturellement, on suppose toujours que le rayon de convergence est fini non nul) permet d'établir que $k(\varphi) \equiv 1$.

Les méthodes du calcul des probabilités fournissent des résultats valables également pour l'ordre fini (*voir* une Note de L. Schwartz, *Bull. Sc. math.*, 1936). Mais il faut observer que la conséquence de LXX relative à l'ordre réel ne peut être vraie quel que soit l'ordre ; il existe des fonctions d'ordre nul pour lesquelles les fonctions de la famille considérée dans LXX n'auraient que deux directions de Julia, le nombre de ces directions resterait encore limité dans certains cas si le nombre des b_n était limité, un résultat général relatif à l'ordre réel ne peut être obtenu que si les b_n sont denses sur le cercle unité.

26. Questions diverses. — Pour les fonctions d'ordre infini, l'ordre apparent dans une direction est égal à l'ordre réel, l'ordre apparent est conservé dans la dérivation, dans la dérivation généralisée [**14**, *f*], donc les directions de Borel sont les mêmes pour une fonction et ses dérivées. Dans le cas de l'ordre fini, $H(\varphi, f)$ est conservé dans la dérivation, les directions de Borel sont les mêmes pour $f(z)$ et ses dérivées dans les cas envisagés plus haut où $H(\varphi, f)$ les détermine. A. Rauch a montré que, si Δ est une direction d'ordre moyen $\overline{\rho(\Delta)}$ et s'il existe un a pour lequel l'ordre réel $\rho(\Delta, a)$ est moindre que $\overline{\rho(\Delta)}$, Δ est aussi direction d'ordre moyen $\overline{\rho(\Delta)}$ pour $f'(z)$ [1]. Il a en outre précisé ce résultat dans le cas de l'ordre moyen divergent [**9**, *e*]. On peut observer que, dans un cercle de remplissage d'ordre ρ

[1] Un résultat analogue avait été signalé à l'auteur par Miss Cartwright dans une lettre de mai 1932.

de $f(z)$, $\log|f(z)|$ prend des valeurs supérieures à $r^{\rho-\varepsilon}$, donc aussi $\log|f'(z)|$. Si l'on marque dans ce cercle les domaines où $|f(z)| < A$ et si l'on étudie $f'(z)$ sur leur frontière en vue de l'application de V., on constate que, ou bien on peut conclure à l'existence d'un cercle de remplissage de $f'(z)$ [de rayon double de celui de $f(z)$], ou bien le plus grand diamètre des domaines considérés (prolongés) est inférieur à $e^{-r^{\varepsilon}}$. Ceci montre bien où réside la difficulté de l'étude des cercles de remplissage communs à une fonction et à sa dérivée.

L'étude des domaines de remplissage où $f(z)$ reste univalent a été entreprise par l'auteur dans le cas des fonctions d'ordre nul [**14**, *s*, *t*]. On trouvera également des propositions se rattachant au sujet de ce fascicule dans les Mémoires ou Notes de Soula [**12**], Rauch [**9**, *d*], Miss Young [**15**] et Valiron [*r*].

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Pour l'Introduction on pourra consulter :

G. VALIRON. — Fonctions entières et fonctions méromorphes (*Mém. Sci. Math.*, fasc. II, 1925).

R. NEVANLINNA. — Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes (*Collection Borel*, 1929).

— Beweis des Picard-Landauschen Satzes (*Gött. Nachr.*, 1924).

G. VALIRON. — Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes (*Acta Mathematica*, t. 47, 1925).

T. SHIMIZU. — On the theory of meromorphic functions (*Japanese J. of Math.*, t. 6, 1929).

L. AHLFORS. — Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen (*Comptes rendus du Congr. d'Oslo*, 1929).

J. E. LITTLEWOOD. — On exceptional values of power series (*J. London Math. Soc.*, t. 5, 1929).

G. VALIRON. — Sur les fonctions algébroïdes méromorphes (*C. R. Acad. Sci.*, t. 189, 1929).

L. AHLFORS. — Ein Satz von Henri Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen (*Comm. Soc. sci. Fennicae*, t. 16, 1931).

G. JULIA. — Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé (*Collection Borel*, 1924).

P. MONTEL. — Leçons sur les familles de fonctions analytiques et leurs applications (*Collection Borel*, 1927).

A. OSTROWSKI. — Ueber Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes (*Math. Zeitschr.*, t. 24, 1925).

A. OSTROWSKI. — Studien über des Schottkyschen Satz (*Basel*, 1931).

H. MILLOUX. — Le théorème de Picard, suites de fonctions holomorphes; fonctions holomorphes et fonctions entières [*Journ. de Math.*, (9), t. 3, 1924].

G. VALIRON. — Compléments au théorème de Picard-Julia (*Bull. Sc. math.*, t. 51, 1927).

1. Vl. BERNSTEIN. — *a.* Sulla crescenza delle funzioni olomorfe di topo esponenziale (*Rendic. R. Acad. dei Lincei*, 6e série, t. 15, 1932).

b. Sur l'analogie entre la distribution des droites de Julia des fonctions holomorphes et celle des points singuliers des fonctions analytiques (deux Notes) (*C. R. Acad. Sci.*, t. 194, 1932).

c. Sur une généralisation de la méthode de sommation exponentielle de M. Borel (*C. R. Acad. Sci.*, t. 194, 1932).

d. Sur les directions de Julia et de Borel des fonctions entières d'ordre fini (*C. R. Acad. Sci.*, t. 194, 1932).

e. Sur les directions de Julia de certaines fonctions entières (*Journ. École polytechn.*, 30e Cahier, 1933).

f. Sulla crescenza delle trascendente intere d'ordine finito (*R. Acad. d'Italia, Classe di sci. fisiche, mat. e. nat.*, t. 4, 1933).

g. Sulle direzioni di Borel di funzioni olomorfe (*Annali di mat.*, 4e sér., t. 12, 1933).

h. Sopra una proposizione relativa alla cresenza delle funzioni olomorfe (*Annali della R. scuola normale sup. di Pisa*, 2e sér., t. 2, 1933).

i. Sulle direzioni di Julia e di Borel di certe funzioni olomorfe (*Rendic. del R. Istituto Lombardo di sci.*, t. 66, 1933).

j. Sulla distribuzione degli zeri delle trascendenti intere (*Giorn. di Mat. di Battaglini*, t. 72, 1934).

k. Stato attuale della teoria delle trascendenti intere (*Rendic. del Seminario Mat. di Milano*, t. 8, 1935).

l. Sopra una proprieta degli ordini precisati (*Boll. dell Unione Mat. Italiano*, t. 14, 1935).

2. Biernacki (M.). — *a.* Sur les droites de Julia des fonctions entières (deux Notes) (*C. R. Acad. Sci.*, t. 186, 1928).

b. Sur la théorie des fonctions entières (*Bull. de l'Acad. polon. des sci. et des lettres, Classe des sci.*, sér. A, 1929).

c. Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes (*Acta Mathematica*, t. 56, 1930).

3. Cartan (H.). — *a.* Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés lacunaires et leurs applications (*Ann. École Norm.*, 3e série, t. 45, 1928).

b. Sur la dérivée par rapport à log r de la fonction de croissance T (r, f) (*C. R. Acad. Sci.*, t. 189, 1929).

4. Cartwright (M. L.). — *a.* The zeros of certain integral functions (*Quarterly J. of math., Oxford series*, t. 1, 1930).

b. On the maximum modulus principle for functions with zeros and poles (*Proc. London math. soc.*, 2e série, t. 32, 1930).

c. On integral functions of integral order (*Proc. London math. soc.*, 2e série, t. 33, 1931).

d. Sur certaines fonctions entières d'ordre fini (*C. R. Acad. Sci.*, t. 194, 1932).

e. Sur les directions de Borel des fonctions entières d'ordre fini (*C. R. Acad. Sci.*, t. 194, 1932).

f. Sur quelques propriétés des directions de Borel des fonctions entières d'ordre fini (*C. R. Acad. Sci.*, t. 194, 1932).

g. Sur la relation entre les directions de Borel des fonctions entières et les singularités des fonctions analytiques (*C. R. Acad. Sci.*, t. 194, 1932).

h. On functions which are regular and of finite order in an angle (*Proc. London math. soc.*, 2e série, t. 38, 1935).

i. On the directions of Borel of analytic functions (*Ibid.*).

j. On the directions of Borel of functions which are regular and of finite order in an angle (*Ibid.*).

k. On certain integral functions of order 1 and mean type (*Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, t. 31, 1935).

5. Collier (M.). — Sur quelques points de la théorie des fonctions entières ou méromorphes d'ordre fini (*Thèse de l'Univ. de Strasbourg*, 1930).

6. Hiong (K. L.). — *a.* Sur les fonctions méromorphes d'ordre infini (*C. R. Acad. Sci.*, t. 196, 1933).

b. Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphés d'ordre infini (*Thèse, Paris*, 1934 et *Journ. de Math.*, 9e série, t. 14, 1935).

c. Some properties of the meromorphic functions of infinite order (*Science reports of the national Tsing Hua Univ.*, série A, t. 3, 1935).

7. Milloux (H.). — *a.* Sur quelques propriétés des racines des fonctions méromorphes (*C. R. Acad. Sci.*, t. 186, 1928).

b. Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel (*Acta Mathematica*, t. 52, 1928).

c. Sur quelques propriétés des fonctions méromorphes ou holomorphes (*C. R. Acad. Sci.*, t. 187, 1928).

d. Remarques sur la théorie des fonctions méromorphes (*Proc. Soc. Physico-math. of Japan*, 3e série, t. 12, 1930).

e. Une propriété générale des fonctions entières d'ordre infini (*C. R. Acad. Sci.*, t. 191, 1930).

f. Remarques sur les fonctions entières (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 54, 1930).

g. Sur une inégalité de la théorie des fonctions et ses applications (*C. R. Acad. Sci.*, t. 194, 1932).

h. Sur les bandes de détermination infinie des fonctions entières (*Comptes rendus du Congrès de Zurich*, t. 2, 1932).

i. Quelques propriétés des fonctions entières d'ordre infini, distribution de leurs valeurs (*Ann. École Norm.*, 3e série, t. 49, 1932).

8. Nevanlinna (R.). — *a.* Untersuchungen über den Picard'schen Satz (*Acta soc. sci. Fennicae*, t. 50, 1924).

b. Ueber die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum (*Acta soc. sci. Fennicae*, t. 50, 1925).

9. Rauch (A.). — *a.* Généralisation du théorème de M. Valiron sur les fonctions méromorphes d'ordre positif (*C. R. Acad. Sci.*, t. 192, 1931). Extensions de théorèmes relatifs aux directions de Borel des fonctions méromorphes (*Thèse, Paris*, 1933 et *Journ. de Math.*, 9e série, t. 12, 1934).

b. Sur les directions de divergence des fonctions entières (*Bull. de la Soc. math.*, t. 61, 1933).

c. Sur les bandes de divergence de certaines fonctions d'ordre infini (*C. R. Acad. Sci.*, t. 198, 1934).

d. Remarques sur les fonctions holomorphes dans un angle et les algébroïdes méromorphes dans le plan (*C. R. Acad. Sci.*, t. 198, 1934).

e. Cas où une direction de Borel d'une fonction entière $f(z)$ est aussi direction de Borel pour $f'(z)$ (*C. R. Acad. Sci.*, t. 199, 1934).

f. Extension d'un théorème de MM. Phragmen et Lindelöf (*C. R. Acad. Sci.*, t. 201, 1935).

g. Extension d'un théorème de M. Valiron sur les directions de Borel (*C. R. Acad. Sci.*, t. 202, 1936).

10. SAXER (W.). — Ueber quasi-normale Funktionensscharen und eine Verschärfung des Picardschen Satzes (*Math. Annalen*, t. 99, 1928).

11. SEIDEL and LITTAUER. — Lines of Julia of integral functions (*Proc. Nat. Acad. of sciences*, t. 18, 1932).

12. SOULA (J.). — Sur les fonctions méromorphes au voisinage d'un point singulier à l'intérieur d'un angle (*Mathematica*, t. 10, 1935).

13. TOIDZÉ (D.). — Sur les fonctions entières (*C. R. Acad. Sci.*, t. 201, 1935).

14. VALIRON (G.). — *a.* Un théorème général sur les fonctions méromorphes d'ordre positif (*C. R. Acad. Sci.*, t. 186, 1928). Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes (*Acta mathematica*, t. 52, 1928).

b. Sur quelques propriétés des fonctions méromorphes (*C. R. Acad. Sci.*, t. 186, 1928).

c. Sur les cercles de remplissage des fonctions méromorphes (*C. R. Acad. Sci.*, t. 186, 1928).

d. Sur quelques propriétés des fonctions analytiques dans le voisinage de leurs singularités (*Atti del Congresso int. dei Mat., Bologna*, 1928).

e. Sur les valeurs d'une fonction méromorphe dans le voisinage d'une singularité (*C. R. Acad. Sci.*, t. 187, 1928).

f. Sur quelques propriétés des fonctions méromorphes et des fonctions entières (*Rend. Circolo mat. di Palermo*, t. 54, 1930).

g. Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini (*Journ. de Math.*, 9e série, t. 9, 1931).

h. Sur une propriété générale des fonctions méromorphes (*C. R. Acad. Sci.*, t. 192, 1931).

i. Remarques sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes (*C. R. Acad. Sci.*, t. 192, 1931).

j. Sur les directions de Borel des fonctions entières (*Annali di Mat.*, 4e série, t. 9, 1931).

k. Points de Picard et points de Borel des fonctions méromorphes dans un cercle (*Bull. sci. math.*, 2e série, t. 56, 1932).

l. Sur les directions de Borel de certaines fonctions entières (*C. R. Acad. Sci.*, t. 194, 1932).

m. Sur les directions de Borel de certaines fonctions entières d'ordre infini (*C. R. Acad. Sci.*, t. 194, 1932). Méthodes de sommation et directions de Borel (*Annali R. Scuola normale di Pisa*, 2e série, t. 2, 1933).

n. Le théorème de Borel-Julia dans la théorie des fonctions méromorphes (*Verh. des intern. Math. Kongress Zurich*, t. 1, 1932).

o. Croissance et zéros des fonctions entières définies par certaines séries d'exponentielles (*Tôhoku Math. J.*, t. 38, 1933).

p. Sur une classe de fonctions entières admettant deux directions de

Borel d'ordre ρ divergent (*C. R. Acad. Sci.*, t. **196**, 1933, et *Compositio math.*, t. **1**, 1934).

q. Généralisations de théorèmes de MM. Lindelöf et Phragmén (*C. R. Acad. Sci.*, t. **196**, 1933).

r. Entire functions and Borel's directions (*Proc. Nat. Acad. of sciences*, t. **20**, 1934).

s. Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre nul (*C. R. Acad. Sci.*, t. **200**, 1935, et *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. **59**, 1935).

t. Sur les domaines d'univalence des fonctions entières d'ordre nul (*Compositio math.*, t. **3**, 1936).

15. Young (R. B.). — The asymptotic behaviour $\int_{a-0}^{b+0} e^{zt}\, dg(t)$. (*Math. Zeitsch.*, t. **40**, 1935).

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

1. Le théorème de Jensen et la fonction T (r) de Nevanlinna 5
2. Théorème de Nevanlinna sur la dérivée logarithmique 6
3. Inégalité fondamentale pour T (r, F) 8
4. Théorème de Boutroux-Cartan sur le minimum du module d'un polynome 10
5. Théorème fondamental sur la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe dans un cercle 12
6. Extensions du théorème de Schottky. Cas des fonctions holomorphes .. 15
7. Extensions du théorème de Schottky. Cas des fonctions méromorphes .. 17
8. Extensions des résultats relatifs aux zéros de F $(z) - x$ 20

CHAPITRE II.

CERCLES DE REMPLISSAGE ET DIRECTIONS DE BOREL EN GÉNÉRAL.

9. Procédé d'investigation 21
10. Rayon minimum des cercles de remplissage. Cercles de remplissage d'ordre ρ 23
11. Cas de l'ordre infini 26
12. Directions de Borel dans le cas de l'ordre infini 30
13. Directions de Borel des fonctions d'ordre fini. Ordre réel moyen dans une direction 31
14. Compléments sur les fonctions d'ordre fini 33
15. Caractère d'une valeur dans une direction. Cas des fonctions d'ordre nul. 36
16. Généralisations 38
17. Les fonctions méromorphes dans le cercle unité 40

CHAPITRE III.

Cas des fonctions entières ou holomorphes dans un angle.

Pages.

18. Rayon minimum des cercles de remplissage des fonctions méromorphes à valeur exceptionnelle.. 42
19. Théorèmes généraux sur les fonctions entières d'ordre fini positif....... 43
20. Comparaison des ordres réel et apparent dans une direction........... 47
21. Fonctions d'ordre ρ supérieur à un n'admettant que deux directions de Borel d'ordre ρ.. 49
22. L'indicatrice de croissance et les directions de Borel d'espèce maximum. 53
23. Détermination de l'indicatrice de croissance............................ 57
24. Directions de Borel des fonctions entières d'ordre infini............... 58
25. Ordre apparent et ordre réel dans une direction dans le cas de l'ordre infini 60
26. Questions diverses.. 62

Index bibliographique.. 64