Potron

Les groupes de Lie

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 81 (1936)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1936__81__1_0>

MEMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut
Professeur a la Sorbonne
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXXI

Les groupes de Lie

Par M. POTRON
Professeur à l'Institut catholique de Paris

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1936

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LES GROUPES DE LIE

Par M. POTRON,

Professeur à l'Institut catholique de Paris.

INTRODUCTION.

Un ensemble est dit pourvu d'une loi de composition lorsqu'à tout arrangement ab de deux éléments de l'ensemble correspond un élément déterminé c de cet ensemble. Cette loi est associative quand, x correspondant à ab, et y à bc, un même élément correspond à xc et à ay, quels que soient les trois éléments a, b, c. Un ensemble pourvu d'une loi de composition associative est dit un *corps*.

Dans un espace à n dimensions, une transformation ponctuelle S définie analytiquement par

$$x'_i = s_i(x_1, \ldots, x_n) = s_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

remplace le point (x) de coordonnées x_i par le point (x') de coordonnées x'_i. Si une transformation T est définie par

$$y'_i = t_i(y_1, \ldots, y_n) = t_i(y) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

elle remplace le point (x') par le point (x'') de coordonnées $x'' = t_i(x')$. Aux deux transformations S et T, prises dans cette ordre, correspond donc naturellement une transformation qui remplace le point (x) par le point (x''). Cette transformation est dite la *transformation-produit* ST. Elle est définie analytiquement par

$$x''_i = t_i[s_1(x), \ldots, s_n(x)] = t_i[s(x)].$$

On voit immédiatement que cette loi de composition est associative.

Un *groupe* est un corps dans lequel étant donnés deux éléments quelconques a et b, il existe toujours deux éléments x et y tels que b corresponde à xa et à ay. On démontre qu'il existe alors un *élément-unité* unique u, tel que tout élément a réponde à au et à ua et que, pour tout élément a, il existe un élément unique x tel que u réponde à xa et à ax. Cet élément x est dit l'*inverse* de a, et représenté par a^{-1}. Si un ensemble de transformations ponctuelles contient le produit de deux quelconques d'entre elles et la transformation inverse de chacune d'elles. il forme évidemment un groupe.

Je m'occuperai ici seulement des groupes *continus finis*, c'est-à-dire dont les éléments dépendent d'un nombre fini de paramètres variant d'une manière continue, et correspondent par suite aux points d'une certaine région d'un espace à un nombre fini de dimensions. Un groupe à r paramètres sera dit un r-groupe. Les paramètres seront supposés *essentiels*, condition équivalente à la biunivocité de la correspondance entre les éléments du groupe et les points d'une certaine région de l'espace à r dimensions.

Les variables et les paramètres sont considérés comme des nombres complexes, et toutes les fonctions supposées analytiques. Cette hypothèse, pratiquement nécessaire au développement de la théorie, est moins restrictive qu'on ne pourrait le croire. En effet, dans le cas d'un groupe transitif opérant sur des variables réelles, si les fonctions figurant dans la représentation des transformations ne sont pas analytiques, mais possèdent des dérivées partielles d'ordres 1 et 2, on peut toujours, au moyen d'un changement de variables, obtenir une représentation des transformations par des formules où ne figurent que des fonctions analytiques [**3**, p. 360 et 792].

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES ANALYTIQUES.

1. Soient n fonctions x'_i d'une variable t, définies par

$$(1)\qquad \begin{cases} dx'_i/dt = \xi_i(x'_1, \ldots, x'_n) = \xi_i(x') \\ x'_i = x_i \quad \text{pour} \quad t = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Si $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ et $y' = f(x'_1, \ldots, x'_n)$, y' est une fonction de t

se réduisant à y pour $t = 0$. Si l'on introduit le symbole opératoire

(2) $$X = \Sigma \xi_i(x) p_i, \quad p_i = \partial/\partial x_i,$$

et si X' désigne ce que devient X quand on y remplace partout chaque x_i par x'_i, on a $dy'/dt = X'y'$. Si l'on convient que X^n représente XX^{n-1}, la fonction y' est représentée par le développement

(3) $$y' = y + tXy + (t^2/1.2)X^2y + \ldots = e^{tX}y.$$

En particulier, pour $y = x_i$, on a

(4) $$x'_i = e^{tX}x_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ces formules définissent une transf. dépendant de t. Quand t varie, le point (x') décrit une courbe dont la tangente a les paramètres directeurs $X'x'_i = \xi_i(x')$.

X est dit *symbole d'une transformation infinitésimale* (j'écrirai : transf.∞le). Si y et z sont deux fonctions des x_i, on a évidemment $X(y+z) = Xy + Xz$, $X(yz) = yXz + zXy$.

Si les $\xi_i(a)$ ne sont pas tous nuls, X est dite *d'ordre o au point* (a). S'ils sont tous nuls, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre $q - 1$, les dérivées d'ordre q n'étant pas toutes nulles, X est dite *d'ordre q au point* (a) [**2**, **4**].

2. Si $X = \Sigma\xi_i(x)p_i$, $Y = \Sigma\eta_i(x)p_i$, on voit que l'opération $XY - YX$ se réduit à $\Sigma(X\eta_i - Y\xi_i)p_i$. Cette nouvelle transf.$\infty$le est dite l'*alternée de* X *et* Y, et représentée par $(X\,Y)$. On a évidemment $(X\,Y) + (Y\,X) = 0$, $(X\; aY + bZ) = a(X\,Y) + b(X\,Z)$, et l'on vérifie l'identité dite de Jacobi $[(X\,Y)\,Z] + [(Y\,Z)\,X] + [(Z\,X)\,Y] = 0$.

En un point où X et Y sont d'ordres respectifs h et k $(h + k > 0)$, $(X\,Y)$ est d'ordre $\geqq h + k - 1$.

3. Soit un changement de variables réversible

(5) $$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad x_i = g_i(y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

donnant, pour une fonction quelconque, $F(x_1, \ldots, x_n) = G(y_1 \ldots, y_n)$. A toute transf. ∞le $X = \Sigma\xi_i(x)p_i$, correspond $Y = \Sigma\eta_i(y)q_i$ $(q_i = \partial/\partial y_i)$ telle que l'on ait, en vertu de (5), $XF = YG$. Les $\eta_i(y)$ sont les transformées, par (5) des Xy_i [**4**, **2**].

On voit directement que X et Y sont de même ordre en deux points (a) et (b) se correspondant par (5) [**2**, **4**], et que la transformée de l'alternée est l'alternée des transformées.

4. Soient r transf. ∞les $X_h = \Sigma \xi_{hi}(x) p_i$, elles sont dites [**5**]:

indépendantes, s'il n'existe aucun systeme de quantités l_h indépendantes des x_i, non toutes nulles, et telles que l'on ait identiquement $\Sigma l_h X_h = 0$;

divergentes, s'il n'existe aucun système de r fonctions $f_h(x)$, non toutes nulles, et telles que l'on ait identiquement $\Sigma f_h(x) X_h = 0$.

Pour qu'il ait divergence, il faut et suffit que la matrice des ξ_{hi} soit, en général, de rang r. Cette matrice sera dite matrice des X_h,

Supposons les X_h indépendantes, et désignons par X_h^k ce que devient X_h quand on y remplace partout les x_i par x_i^k. Si l'on pose

$$\mathfrak{X}_h^m = \Sigma_1^m X_h^k,$$

et si ρ_m désigne le rang de la matrice des $\mathfrak{X}_h^m$, on a évidemment $\rho_{m+1} \geqq \rho_m$, et l'on démontre [6] que l'égalité ne peut avoir lieu que si $\rho_m = r$.

5. Une fonction $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ est dite un *invariant de la trans. ∞le* X lorsque, les x'_i étant définis par (1) ou (4), on a toujours $f(x'_1, \ldots, x'_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Pour cela il faut et suffit que y soit solution de l'équation aux dérivées partielles $Xf = 0$.

6. Soit, entre n variables x_i, et m variables y_k, un système différentiel

$$\partial y_k / \partial x_i = f_{ik}(x, y) \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m). \tag{6}$$

Soient, d'autre part, les n transf. ∞les à $n + m$ variables

$$T_i = p_i + \Sigma f_{ik}(x, y) q_k \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

On démontre [6] que toute intégrale de (6) est invariant commun des T_i et que les conditions de complète intégrabilite de (6) sont

$$(T_i\, T_j) = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Le système différentiel (6) et les transf. ∞les T_i sont dits *associés.*

Soient d'autre part n transf. ∞les divergentes $G_j = \Sigma g_{ji}(x, y) p_i$.

Le système (6) est équivalent à

(9) $$G_j y_k = \Sigma g_{ji}(x, y) f_{ik}(x, y) = h_{jk}(x, y);$$

et le système $T_i f = 0$ est équivalent à $Y_j f = 0$, où

(10) $$Y_j = \Sigma g_{ji} T_i = G_j + H_j, \quad H_j = \Sigma h_{jk} q_k.$$

Les Y_j et le système (9) sont encore associés, et l'on voit [6] que les conditions (8) équivalent à

(11) $$(Y_h\, Y_j) = \Sigma_1^n c_{hji}(x y)\, Y_i \qquad (h, i = 1, \ldots, n).$$

Ces conditions expriment que les Y_j forment un système complet.

7. On peut toujours former, sur $n + m$ variables, n transf. ∞les divergentes X_h $(h = 1, \ldots, n)$ ayant pour invariants communs m fonctions données u_k $(k = 1, \ldots, m)$ de ces variables. Pour que $F(x_1, \ldots, x_{m+n})$ soit invariant commun des X_h, il faut et suffit que $F(x_1, \ldots, x_{m+n}) = G(u_1, \ldots u_m)$. Si donc F dépend de n variables x_i et de r paramètres a_k, l'existence d'une transf. ∞le $A = \Sigma \alpha_k(a)\partial/\partial a_k$ vérifiant, quels que soient les x_i, $AF = 0$ suffit pour que les r parametres a_k ne soient pas essentiels dans F.

Soient encore $f_i(x_1, \ldots, x_{m+n})$ $(i = 1, \ldots, b)$ b fonctions distinctes vérifiant $X_h f_i = F_{hi}(f_1, \ldots, f_b)$ $(h = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, b)$. Pour qu'une fonction $G(f_1, \ldots, f_b)$ soit invariant commun des X_h, c'est-à-dire s'exprime par les u_k, il faut et suffit que l'on ait

(12) $$0 = \Sigma_1^b (\partial G/\partial f_i)\, X_h f_i = \Sigma_1^b (\partial G/\partial f_i)\, F_{hi}.$$

Soit $G_1, G_2, \ldots G_a$ $(a \leq m)$ un système fondamental de solutions de (12). On peut les prendre pour $u_1, \ldots, u_a$; et l'on démontre [4, p. 321] que les $b + m - a$ fonctions $f_1, \ldots, f_b, u_{a+1}, \ldots, u_m$ sont distinctes. On a donc $b \leq a + n$.

8. Si, au système différentiel (6) on adjoint a $(< m)$ relations finies

(13) $$0 = F_j(x_1, \ldots, x\ , y_1, \ldots y_m) = F_j(x, y) \qquad (j = 1, \ldots, a)$$

on obtient un *système mixte* [4, p. 9]. Un système mixte est dit *complet* lorsque :

a. les conditions de complète intégrabilité de (6) sont satisfaites, au moins en vertu de (13);

b. les équations obtenues par dérivation de (13) et élimination, par (6), des $\partial y_k / \partial x_i$ sont conséquences de (13).

Le système (13) peut se mettre sous la forme

$$(14) \qquad y_h = g_h(x_1, \ldots, x_n, y_{a+1}, \ldots, y_m) \qquad (h = 1, \ldots, a).$$

Si l'on désigne en général par [F] la fonction de $x_1, \ldots, x_n$, $y_{a+1}, \ldots, y_m$ obtenue en remplaçant, dans une fonction quelconque $F(x, y)$, $y_1, \ldots, y_a$ par leurs valeurs (14), le système mixte est équivalent à (14) et

$$(15) \qquad \partial y_k / \partial x_i = [f_{ik}(x, y)] \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = a+1, \ldots, a).$$

On démontre que les conditions de complète intégrabilité de (15) sont vérifiées en vertu des conditions *a* et *b*, qui s'expriment par $[(T_i\ T_j)] = 0$ et $[f_{ih}] = [T_i g_h]$. Ainsi [4, p. 12] *quand un système mixte à m fonctions inconnues et a relations finies est complet, il admet une solution dépendant de m — a constantes arbitraires, les valeurs initiales de m — a des fonctions inconnues.*

CHAPITRE II.

LES DEUX PREMIERS THEORÈMES FONDAMENTAUX.

1. Soient, sur n variables x_i ($i = 1, \ldots, n$), un ensemble de transformations réversibles T_a, dépendant de r paramètres essentiels a_h ($h = 1, \ldots, r$), et représentées analytiquement par

$$(1) \qquad x'_i = f_i(x, a), \qquad x_i = F_i(x', a) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Dans une certaine région d'un espace à r dimensions, dit *espace des paramètres*, il y a correspondance biunivoque entre les transformations T_a et les points (a) de coordonnées a_h. Pour que les T_a forment un corps, il faut et suffit qu'à tout arrangement de deux points $(a)(b)$ corresponde un point déterminé (c) tel que $T_a T_b = T_c$, c'est-à-dire qu'il existe r fonctions

$$(2) \qquad c_j = g_j(a, b) \qquad (j = 1, \ldots, r),$$

telles que (1) et (2) aient pour conséquences

$$f_i(x', b) = f_i(x, c) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Pour que les T_a forment un groupe, il faut et suffit en plus que les équations (2) soient résolubles par rapport, soit aux a, soit aux b. Pour éviter toute difficulté, il y a lieu de supposer qu'il existe une région de l'espace des paramètres dans laquelle :

1° toutes les fonctions considérées sont régulières;

2° il y a correspondance biunivoque entre les points (a) et les transformations T_a;

3° se trouve le point (a^0) correspondant à la transformation identique;

4° les deux déterminants fonctionnels des g_j par rapport, soit aux a, soit aux b, sont $\neq 0$.

2. Soient T_y, T_z, T_a, T_b, T_c, T_f des transformations d'un groupe G; et soient

$$T_y T_a = T_{y'} \quad \text{ou} \quad y'_k = g_k(y, a), \tag{4}$$

$$T_a T_b = T_c \quad \text{ou} \quad c_k = g_k(a, b), \tag{5}$$

$$T_a T_z = T_{z'} \quad \text{ou} \quad z'_k = g_k(a, z), \tag{6}$$

$$T_b T_a = T_f \quad \text{ou} \quad f_k = g_k(b, a). \tag{7}$$

L'associativité donne, comme conséquence de ces relations,

$$T_{y'} T_b = T_y T_c, \quad \text{ou} \quad g_k(y', b) = g_k(y, c), \tag{8}$$

$$T_b T_{z'} = T_f T_z, \quad \text{ou} \quad g_k(b, z') = g_k(f, z). \tag{9}$$

Ainsi, à toute transformation T_a de G correspond une transformation S^1_a, définie par (4), et une transformation S^2_a, définie par (6), de l'espace des parametres. D'après (8) et (9), on a $S^1_a S^1_b = S^1_c$, et $S^2_b S^2_a = S^2_f$. Les S^h_a $(h = 1, 2)$ forment donc un groupe P_h isomorphe [1] à G. P^h est le *$h^{\text{ième}}$-groupe des paramètres de G.*

Il résulte de ces définitions que les deux produits $S^1_a S^2_b$ et $S^2_b S^1_a$ remplacent un point (y) par un même point (z) tel que l'on ait $T_z = T_b T_y T_a$. On a donc $S^1_a S^2_b = S^2_b S^1_a$, c'est-à-dire que toute transformation de P^1 est permutable à toute transformation de P^2 [4].

Les mêmes formules (2) définissent les transformations des deux groupes de paramètres, suivant les rôles de variables ou de parametres donnés aux a et aux b.

3. Différentiant (1) et (2), en supposant les x et les c constants. puis éliminant les db, on obtient, pour chaque $\partial x_i/\partial a_k$, une expression, *à priori* indépendante des b, de la forme.

$$(10)\qquad \partial x_i/\partial a_k = \Sigma_1^r \xi_{hi}(x')\alpha^{hk}(a) \qquad (i=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,r).$$

Si, en général, aux u^{hk}, on fait correspondre les u_{hj} tels que $\Sigma u^{hk} u_{hj} = \varepsilon_{kj}$, et si l'on considère les $2r$ transf. ∞les

$$(11)\qquad X_h = \Sigma_1^n \xi_{hi}(x) p_i, \qquad A_h = \Sigma_1^r \alpha_{hk}(a)\partial/\partial a_k \qquad (h=1\ldots,r),$$

la réversibilité des transformations (1) et l'essentialité des paramètres entraînent l'indépendance des X_h et la divergence des A_h.

Le système (10) est (I, 6) équivalent au système

$$(12)\qquad A_h x_i' = \xi_{hi}(x') \qquad (h=1,\ldots,r,\ i=1,\ldots,n),$$

auquel sont associées les transf. ∞les $Y_h = A_h + X_h$. Les conditions de complète intégrabilité, qui doivent être vérifiées *a priori*, en raison de l'existence de la transformation identique donnent, ici

$$(13)\ (X_h\, X_k) = \Sigma c_{hkj} X_j, \qquad (A_h\, A_k) = \Sigma c_{hkj} A_j, \qquad (h, k=1,\ldots,r).$$

Les c_{hkj} sont des constantes numériques assujetties à vérifier (I, 2)

$$(14)\qquad c_{hkj} + c_{khj} = 0, \qquad \sum_m (c_{ihm}c_{mkj} + c_{hkm}c_{mij} + c_{kim}c_{mhj}) = 0.$$

Ces résultats constituent la première partie du premier théorème fondamental de Lie [2, 4, 6].

Si l'on sait que les transformations (1) forment un groupe, on peut déterminer directement ses X_h. Soit, en effet, (a^0) le point de l'espace des paramètres auquel correspond la transformation identique. Si l'on pose $a_k = a_k^0 + t\alpha_k$, (1) donne. pour $x_i' - x_i$, un developpement dans lequel le coefficient de t est, en tenant compte de (10), $\Sigma\beta_h\xi_{hi}(x)$, $\beta_h = \Sigma\alpha_k\alpha^{hk}(a^0)$. Multipliant par p_i, et ajoutant, on obtient $\Sigma\beta_h X_h$, ou les β_h sont, comme les α_k, r parametres indépendantes.

4. Supposons données r transf. ∞les X_h, indépendantes et vérifiant (13). En ajoutant au besoin $q-1$ séries de nouvelles variables, on forme (I, 4) r transf. ∞les $\mathfrak{X}_h$, divergentes, et vérifiant toujours (13). Elles ont $nq - r$ invariants communs, dont la considération permet [2, 4, 6] de déterminer, sur r variables a_k, r transf. ∞les A_h divergentes et vérifiant (13).

5. Le système complètement intégrable (10)-(12) définit alors n fonctions

$$(15) \qquad x'_i = f_i(x, a), \qquad \text{vérifiant } f_i(x, 0) = x_i.$$

Résolvant par rapport au constantes x_i. on obtient

$$x_i = F_i(x', a), = F_i(x, 0).$$

Les fonctions $F_i(x, a)$ sont n invariants communs des $A_h + X_h$. complètement déterminés par la condition de se réduire aux x_i pour $(a) = (0)$.

De même, les nq fonctions $F_i(x^k, a)$ ($i = 1, \ldots, n$; $k = 0, 1, \ldots, q-1$) sont les nq invariants communs aux $A_h + \mathfrak{X}_h$ qui se réduisent aux x^k_i pour $(a) = (0)$.

Ce résultat se rattache à la seconde partie du 1er théorème fondamental de Lie.

6. Si alors les X_h sont divergentes, et si $I_j(x)$ ($j = 1, \ldots, n-r$) en désignent $n-r$ invariants communs distincts, on voit d'abord que toute transformation T_a, donc aussi tout produit $T_a T_b$, laisse invariante chacune des r-variétés représentées par $I_j(x') = I_j(x)$, dont (15) fournit par suite une représentation paramétrique. Il existe donc r quantités c_k satisfaisant aux n équations

$$(16) \qquad f_i(x, c) = f_i[f(x, a), b] \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

On voit ensuite que ces c_k, solution de (16), doivent se réduire aux a_k pour $(b) = 0$, et former la solution, déterminée par cette condition, de $\Sigma \alpha_{hj}(b)(\partial c_k / \partial b_j) = \alpha_{hk}(c)$ ($h, k = 1, \ldots, r$). On en conclut que (16) admet une solution

$$(17) \qquad c_k = g_k(a, b), \qquad a_k = g_k(a, 0) \qquad (k = 1, \ldots, r),$$

et que par suite les T_a forment un groupe dont (17) définit les deux groupes de paramètres [6].

7. Si les X_h ne sont pas divergentes, chaque système $x_i = F_i(x'^k, a)$ définit une transformation T^k_a. Soit $\mathfrak{T}_a$ l'ensemble des T^k_a. On voit, comme au n° 6, que pour (c) défini par (17), on a $\mathfrak{T}_a \mathfrak{T}_b = \mathfrak{T}_c$, donc, pour chaque k, et en particulier pour $k = 0$, $T_a T_b = T_c$ [6].

8. Si $B_h = \Sigma\beta_{hk}(b)\,\partial/\partial b_k$ désignent r transf. ∞les autres que les A_h, mais divergentes et vérifiant aussi (13), on démontre [6] que les a_j sont des fonctions $\varphi_j(b)$ formant une solution du système $B_h a_j = \alpha_{hj}(a)$. Donc les A_h sont les transformées des B_h par un changement de variables.

On a donc le résultat suivant, qui réunit la seconde partie du premier théorème et le second théoreme de Lie : *A tout système de r transf. ∞les X_h, indépendantes et vérifiant* (13), *correspond une infinité de r-groupes de transformations, qui ont tous les mêmes groupes de parametres à un changement de paramètres près.*

Ce résultat constitue le second théorème fondamental de Lie.

9. Dans le cas d'un seul paramètre. le système (10)-(12) se réduit à

$$(18) \qquad dx'_i/da = \xi_i(x')[\alpha(a)]^{-1} \text{ ou } Ax'_i = \xi_i(x'), \qquad A = \alpha(a)\,d/da.$$

Inversement, étant donné $X = \Sigma\xi_i(x)p_i$, on peut prendre A arbitraire. Le système (18) associé à $A + X$ a une solution

$$(19) \qquad x'_i = f_i(x, a) \qquad f_i(x, 0) = x_i$$

Les transformations (19) forment un groupe. Son groupe de paramètre est donné par $c = g(a, b)$, fonction déterminée par $\alpha(b)\,dc/db = \alpha(c)$, $g(a, 0) = a$. Si l'on remplace A par $T = d/dt$, le système associé à $T + X$ est $dx'_i/dt = \xi_i(x')$, dont la solution est (I, 1) $x'_i = e^{tX}x_i$. Le groupe de paramètre est donné par $w = g(u, v)$, fonction déterminée par $dw/dv = 1$, $g(u, 0) = u$, soit $w = u + v$. Le changement de paramètre qui ramene le groupe à cette forme est donné par l'intégration de $da/dt = \alpha(a)$. Le paramètre t est dit *canonique*. Il lui correspond la *forme canonique* des transformations du 1-groupe engendré par la transformation X, que je représenterai par $\{X\}$.

Ces résultats peuvent s'obtenir directement [2, 4].

10. Soit G un groupe dont les transformations (1) vérifient (10)-(12), et (a) le point de l'espace des paramètres correspondant à la transformation identique. On peut déterminer r fonctions $a'_h = \varphi_h(t)$, $\varphi_h(0) = a_h$, de manière que les $T_{a'}$ de G parcourent un 1-groupe dont t soit le paramètre canonique. Exprimant que l'expression de dx'_i/dt

dépend de (x') seul, on voit que (a') constitue la solution, se réduisant à (a) pour $t=0$, de $da'_k/dt = \Sigma\lambda_h \alpha_{hk}(a')$, soit $a'_k = e^{tA} a_k$, $A = \Sigma\lambda_h A_h$. Alors on a $dx'_i/dt = \Sigma\lambda_h \xi_{hi}(x')$, en sorte que les $T_{a'}$ ainsi obtenues parcourent le 1-groupe $\{X\}$, où $X = \Sigma\lambda_h X_h$.

Dans l'expression des a'_k, la variable t ne figure que par les produits $\lambda_h t$. Si l'on pose $\lambda_h t = e_h$, on a donc

$$(20) \qquad a'_k = \psi_k(e, a) \qquad \psi_k(0, a) = a_k \qquad (k = 1, \ldots, r),$$

et les transformations de $\{X\}$ ont la forme

$$(21) \qquad x_i = e^{t\Sigma l_h X_h} x_i = e^{\Sigma e_h X_h} x_i;$$

on voit qu'il y a, au voisinage de la transformation identique, correspondance biunivoque entre les transformations $T_{a'}$, définies par (1), et les S_e, définies par (21). Quand (e) décrit une droite issue de (0), de coefficients directeurs l_h, S_e parcourt le 1-groupe $\{\Sigma l_h X_h\}$. Les e_h sont dits *paramètres canoniques*, et (21) est la *forme canonique* des transformations de G. Ce groupe sera désigné par $\{X_1, \ldots, X_r\}$.

11. L'espace à r dimensions des points (e) de coordonnées e_h sera dit *espace des paramètres canoniques*. L'espace à $r-1$ dimensions des points $[e]$ de coordonnées homogènes e_h sera dit *espace homogène des paramètres canoniques*. Au voisinage de l'origine, il y a correspondance biunivoque entre les transformations de G et les points du premier, entre les 1-groupes de G et les points du second, ou les droites du premier issues de l'origine.

12. On peut donc considérer l'expression e^A, $A = \Sigma a_h X_h$ comme le symbole d'une transformation finie, mise sous forme canonique, du groupe $\{X_1, \ldots, X_r\}$. D'après le second théorème de Lie, si les conditions (13) sont vérifiées, le produit de la transformation e^A par la transformation e^B $(B = \Sigma b_h X_h)$ est une transformation e^C, où $C = \Sigma c_h X_h$, $c_h = g_h(a, b)$.

Il en résulte qu'on peut démontrer le second théorème en établissant directement l'existence des fonctions c_h telles qu'on ait $e^A e^B = e^C$. C'est ce qu'a fait Poincaré [22]. Il part de l'expression $e^A e^{tB}$ considérée comme fonction $f(t)$, vérifiant, aux termes près de l'ordre de dt^2, la relation

$$f(t+dt) = f(t)(1 + B\,dt),$$

d'ailleurs équivalente à $f'(t) = Bf(t)$, qui, avec $f(0) = e^A$, détermine complètement cette fonction. Or il est possible de trouver une transf. ∞le $C = \Sigma c_h X_h$, dépendant de t, telle que la fonction e^C de t vérifie précisément la relation définissant $f(t)$, c'est-à-dire

$$e^{C+dC} = e^C(1 + B\,dt),\quad dC = C'\,dt. \tag{22}$$

Cette possibilité résulte d'un théorème général : soit D une combinaison linéaire quelconque $\Sigma d_h X_h$, et V une transf. ∞le quelconque, non nécessairement combinaison linéaire des X_h, mais vérifiant les r conditions

$$(X_h\, V) = \Sigma f_{hk} X_k, \qquad \text{ou} \qquad X_h V = V X_h + \Sigma f_{hk} X_k.$$

On en conclut

$$DV = VD + \Sigma g_k X_k,\quad g_k = \Sigma f_{hk} d_h,$$

ou, symboliquement,

$$DV = (V + \mathfrak{f})\,D,$$

$\mathfrak{f}D$ désignant la transf. ∞le déduite de D en opérant sur ses coefficients la substitution lineaire de matrice (f_{hk}). On voit, par récurrence, que

$$DV^n = (V + \mathfrak{f})^n D. \tag{23}$$

Effectuons alors, à t^2 près, le calcul de

$$e^{V+tD} = \Sigma \frac{1}{n!}(V + tD)^n.$$

A cette approximation, on a

$$(V + tD)^n = V^n + t\Sigma_0^{n-1} V^{n-k-1}\, DV^k = V^n + t\Sigma_0^{n-1} V^{n-k-1}(V + \mathfrak{f})^k D.$$

Le coefficient de t peut s'écrire

$$\frac{(V+\mathfrak{f})^n - V^n}{(V+\mathfrak{f}) - V} = \Sigma_1^n \frac{n!}{(n-k)!\,k!} V^{n-k}\mathfrak{f}^{k-1}.$$

C'est le produit par $n!$ du coefficient du terme en x^{n-1} dans le produit de deux séries de terme général respectif $\frac{V^a x^a}{a!}$ et $\frac{\mathfrak{f}^{b-1}}{b!}x^{b-1}$, dont les sommes respectives sont e^{Vx} et $\frac{e^{\mathfrak{f}x} - 1}{\mathfrak{f}x}$.

On a donc finalement, à t^2 pres, la formule, constituant le théorème annoncé,

$$e^{V+tD} = e^V\left(1 + t\,\frac{e^{\mathfrak{f}} - 1}{\mathfrak{f}}\,D\right). \tag{24}$$

Remplaçant V par C, t par dt, et D par $C' = \frac{dC}{dt}$, on voit que (22) sera vérifié si l'on définit les coefficients de C par les équations différentielles représentées par

$$\frac{e^{\mathfrak{f}} - 1}{\mathfrak{f}} C' = B, \text{ avec } C = A \text{ pour } t = 0. \tag{25}$$

Les r équations différentielles obtenues en egalant les coefficients de $X_1, \ldots, X_r$ dans les deux membres sont linéaires par rapport aux dérivées c'_h, les coefficients de chaque $\mathfrak{f}' C'$ se déduisant de ceux de C' par la substitution linéaire $\mathfrak{f}^h$, dont les coefficients sont fonctions connues des constantes de structure et des coefficients de C.

On demontre d'ailleurs, dans le cas général d'une transf. ∞le quelconque V, que, si $\mathcal{F}(\mathfrak{f})$ désigne une série entière en $\mathfrak{f}$ dont la somme est une fonction entiere, les coefficients de la transf. ∞le $\mathcal{F}(\mathfrak{f})D$, linéaires par rapport aux coefficients de D, sont des fonctions entières des f_{hk}. Ici les f_{hk} sont $\Sigma c_{hjk} c_j$. Les coefficients des dérivées c' sont donc fonctions entieres des fonctions c [22, p. 239).

Si, apres intégration de (25), on fait $t = 1$, on obtient C tel que $e^A e^B = e^C$. La détermination des coefficients c_h par des fonctions $g_h(a, b)$ fait connaître, sous forme finie, les deux groupes de parametres (II, 2).

En général, si $\mathcal{F}(\mathfrak{f})$ et $\mathcal{G}(\mathfrak{f})$ désignent deux séries dont le produit est 1, les deux relations

$$\mathcal{F}(\mathfrak{f})T = U, \qquad T = \mathcal{G}(\mathfrak{f})U$$

sont équivalentes. Le système (25) peut donc s'écrire

$$C' = \frac{\mathfrak{f}}{e^{\mathfrak{f}} - 1} B. \tag{26}$$

13. Il peut exister des groupes dont les transformations forment plusieurs ensembles distincts à r parametres, tels que deux quelconques de ces ensembles ne puissent, d'après leur définition même, et indépendamment de leur représentation, avoir aucune transformation commune. Ainsi, dans l'espace euclidien à 3 dimensions, le groupe des transformations qui conserve les distances mutuelles de tous les points contient l'ensemble des déplacements et l'ensemble des déplacements suivis d'une symétrie relative à un plan.

Celui de ces ensembles qui contient la transformation identique constitue un r-groupe continu G, engendré par r transf. ∞les X_h, dont toute transformation appartient à un des 1-groupes $\{\Sigma e_h X_h\}$. Chacun des autres se compose des produits des transformations de G par une transformation arbitraire de l'ensemble considéré. Et toute transformation du groupe total transforme G en lui-même.

Un groupe ainsi constitué est dit *complexe*. Le r-groupe continu qu'il contient en est dit le *noyau*. [4, p. 120].

CHAPITRE III.

LE TROISIÈME THÉORÈME FONDAMENTAL. LA STRUCTURE DES GROUPES.

1. Désignons par (C) les conditions (14) du Chapitre II. *Étant donnés r^3 nombre c_{hkj} vérifiant les conditions* (C), *il existe r transf. ∞les X_h indépendantes, vérifiant les conditions* (*dites de structure*)

$$(X_h X_k) = \Sigma c_{hkj} X_j, \tag{1}$$

et par suite un r-groupe admettant ces r^3 nombres pour constantes de structure. C'est le troisième théoreme fondamental de Lie.

On voit d'abord que les transf. ∞les $A_h = \Sigma \alpha_{hk}(e)\,\partial/\partial e_k$ du premier groupe de paramètres canoniques d'un groupe G sont completement déterminées par les c_{hkj}. Posons en effet, pour les transformations S_e [II, 19, (21)], $e_h = l_h t$, et soit $y' = F(x'_1, \ldots, x'_n)$ une fonction quelconque. Si t varie seul, S_e parcourt $\{\Sigma l_h X_h\}$ (II, 10), et l'on a

$$\partial y'/\partial t = \Sigma l_h X'_h y'. \tag{2}$$

Si les l_h varient seuls, comme on a (II, 3)

$$\partial x'_i/\partial l_k = t\,\partial x'_i/\partial e_k = \Sigma \xi_{hi}(x') f^{hk}(l, t), \quad f^{hk}(l, t) = t\alpha^{hk}(lt),$$

on en déduit

$$\partial y'/\partial l_k = \Sigma f^{hk} X'_h y'. \tag{3}$$

Égalant les deux expressions $\partial^2 y'/\partial t\,\partial l_k$ et tenant compte de l'indépendance des X_j, on obtient

$$\partial f^{jk}/\partial t = \varepsilon_{jk} + \Sigma C_{hj} f^{hk}. \qquad C_{hj} = \Sigma c_{hmj} l_m. \tag{4}$$

Pour chaque k, (4) définit complètement r fonctions f^{jk} s'annulant avec t, admettant le développement

$$(5) \qquad f^{jk} = \Sigma_1^\infty E_{jkm} t^m, \qquad E_{jk1} = \varepsilon_{jk}, \qquad 2E_{jk2} = C_{kj},$$
$$m E_{jkm} = \Sigma C_{kh} E_{hj,m-1}.$$

On voit que E_{jkm} est homogène de degré $m-1$ par rapport aux l_h. Les développements (5) étant convergents quel que soit t, ceux qu'on en déduit pour $\alpha^{ij} = f^{ij}/t$ se présentent comme des séries entières, partout convergentes, par rapport aux e_h. En conséquence, les α_{hk} se présentent comme quotients de deux séries partout convergentes [3-8-9]. Les zéros du denominateur, qui représente $|\alpha^{hl}|$, sont donnés [11] par $\Sigma c_{kjh} e_j = \pm 2n i \pi \varepsilon_{hk}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

La démonstration de II-12 permet d'obtenir immédiatement les séries représentant les α^{hi}. Si l'on remplace a par e, c par e', on a les transformations du groupe des paramètres canoniques

$$e'_i = g_i(e, b).$$

On sait (II, 10) que, si l'on remplace b par bt, on a

$$\frac{de'_i}{dt} = \Sigma b_h \alpha_{hi}(e'), \qquad b_h = \Sigma \alpha^{hi}(e') \frac{de'_i}{dt}.$$

Or le système différentiel obtenu

$$\frac{d\mathrm{C}}{dt} = \frac{\mathfrak{f}}{e^{\mathfrak{f}} - 1} \mathrm{B}, \qquad \mathrm{B} = \frac{e^{\mathfrak{f}} - 1}{\mathfrak{f}} \frac{d\mathrm{C}}{dt},$$

a précisément cette forme, et met en évidence les α_{hi} ou les α^{hi}. Les zéros des dénominateurs des α_{hi} correspondent aux cas ou la substitution $\mathfrak{f}$, dont les coefficients sont ici $f_{ik} = \Sigma c_{ikj} e_j$, se réduit à la similitude de multiplicateur $2ni\pi$.

2. Or, si les c_{hkl} qui figurent dans (5) vérifient les conditions (C), les A_h que l'on en déduit vérifient les conditions (1) de structure. Ces conditions sont en effet équivalentes aux équations, dites de Maurer [3, 4. 10],

$$(6) \qquad \partial\alpha^{mj}/\partial e_k - \partial\alpha^{mk}/\partial e_j - \Sigma\Sigma c_{ihm} \alpha^{ij} \alpha^{hk} = 0.$$

Si l'on multiplie par t^2, le premier membre de (6) devient

$$V_{mjk} = \partial f^{mj}/\partial l_k - \partial f^{mk}/\partial l_j - \Sigma\Sigma c_{ihm} f^{ij} f^{hk}.$$

On voit que les V_{mjk} s'annulent avec t, et que, par suite de (4) et (C), on a $\partial V_{mjk}/\partial t = \Sigma C_{hm} V_{hjk}$. Donc, quel que soit t, $V_{mjk} = 0$, et (6) est vérifie [3, 4, 8]. Tout système de r^3 constantes c_{hkj} vérifiant (C) est dit constituer une *structure de groupe*.

Le fait que les A_h vérifient les relations de structure résulte aussi immédiatement de II-12. Si en effet nous désignons maintenant par X_h les transf. ∞les $\Sigma\alpha_{hi}(x)p_i$, les transformations $x_i = g_i(x, a)$ qui forment un groupe, peuvent s'écrire $x_i = e^{A}x_i$, $A = \Sigma a_h X_h$. Si donc $B = \Sigma b_h X_h$, on a

$$e^{A}e^{B} = e^{C}, \qquad C = \Sigma c_j X_j, \qquad c_j = g_j(a, b).$$

Si C_m désigne la partie de C qui est homogene de degré m en a et b, cette relation donne

$$2C_2 = A^2 + B^2 + 2AB - (A+B)^2 = (A\ B) = \Sigma\Sigma a_h b_k (X_h\ X_k).$$

Or, il résulte de la formation des fonctions g_j (II, 12) que leurs termes du second degré sont $\frac{1}{2}\Sigma\Sigma c_{hkj} a_h b_k$. On a donc

$$2C_2 = \Sigma\Sigma\Sigma c_{hkj} a_h b_k X_j.$$

La comparaison des deux expressions de C_2 démontre le théorème [*Cf.* 22, p. 235].

3. Pour que, dans un groupe $G = \{X_1, \ldots, X_r\}$, s transf. ∞les independantes $Y_j = \Sigma a_{jh} X_h$ engendrent un groupe H, il faut et suffit que l'on ait, comme consequence de (1), $(Y_i\ Y_k) = \Sigma d_{ikj} Y_j$. La forme canonique des transformations de H,

$$(7) \qquad x_i = e^{\Sigma f_j Y_j} x_i = e^{\Sigma e_h X_h}, \qquad e_h = \Sigma a_{jh} f_j$$

montre que, dans l'espace des paramètres canoniques de G, les points (e) des transformations de H forment un s-plan (variété linéaire à s dimensions). Si les parametres ne sont pas canoniques, a tout s-sous-groupe de G correspond une variété totalement géodésique [12] de l'espace des paramètres.

4. Soit T un changement de variables, que l'on peut considérer comme une transformation ponctuelle, faisant, à tout point (x), correspondre un point (y). A toute transformation S_x, portant (x)

en (x'), correspond. par T, une transformation S_y portant (y), correspondant à (x), en (y'), correspondant à (x'). Cette transformation $S_y = T^{-1} S_x T$ est dite *transformée de* S_x *par* T.

On voit [4] que, si S_x parcourt $\{X\}$, S_y parcourt $\{Y\}$, où $Y = \Sigma(Xy_i)q_i$, les deux transformations correspondant d'ailleurs aux mêmes valeurs du paramètre t. Il existe toujours un changement de variables transformant X en $Y = q_n$, et par suite les transformations de $\{X\}$ en les translations $y'_i = y_i$ $(i \neq n)$, $y'_n = y_n + t$. On en déduit que toute transformation de $\{X_1\}$ est permutable à toute transformation de $\{X_2\}$ toujours et seulement si $(X_1\ X_2) = 0$.

5. On dit que $\{X\}$ appartient à la famille linéaire des r 1-groupes indépendants $\{X_h\}$ lorsque $X = \Sigma e_h X_h$. Soit Y la transformée de X par une transformation quelconque d'un 1-groupe $\{T\}$, pour que $\{Y\}$ appartienne toujours à la famille linéaire des $\{X_h\}$, il faut [4, p. 193] $(T\ X_h) = \Sigma c_{hk} X_k$ (les c_{hk} étant des constantes). Cette condition suffit pour que l'on ait, quel que soit le paramètre t de la transformation de $\{T\}$, $Y = \Sigma e'_h X_h$, les $e'_h = f_h(t)$ définies par

$$(8)\qquad de'_h/dt = \Sigma c_{kh} e'_k = \varepsilon_h(e'),\qquad f_h(0) = e_h\qquad (h = 1, \ldots, r),$$
$$(9)\qquad e'_h = e^{t\mathrm{E}} e_h,\qquad \mathrm{E} = \Sigma \varepsilon_k(e)\partial/\partial e_k.$$

Tout 1-groupe de la famille linéaire des $\{X_h\}$ correspond à un point $[e]$ de coordonnées homogènes e_h. Les formules (9) représentent des transformations, formant le 1-groupe $\{E\}$, de l'espace de ces points.

On peut donc écrire, en employant le symbole exponentiel d'une transformation finie,

$$e^{-t\mathrm{T}} e^{\mathrm{X}} e^{t\mathrm{T}} = e^{\mathrm{Y}},\qquad \mathrm{Y} = e^{t\mathrm{EX}},$$

en représentant (II, 12) par tEX, la transformation obtenue en opérant, sur les coefficients de X, la substitution linéaire

$$|\, e_h \quad t\Sigma c_{hj} e_j \,|$$

[*Cf.* 22, p. 242].

En particulier, pour que la famille linéaire des $\{X_h\}$ soit invariante par rapport aux transformations d'un quelconque de ses 1-groupes, il faut et suffit que $(X_h\ X_k) = \Sigma c_{hkj} X_j$, donc que les X_h engendrent un r-groupe G.

6. En ce cas, pour $X = \Sigma f_h X_h$, on a $(X\ X_k) = \Sigma c_{kj} X_j$, $c_{kj} = \Sigma f_h c_{hkj}$. Les formules (8)-(9) deviennent

$$(10)\qquad de'_j/dt = \varepsilon_j(e') = \Sigma f_h \varepsilon_{hj}(e'), \qquad \varepsilon_{hj}(e') = \Sigma c_{khj} e'_k,$$

$$(11)\qquad e_h = e^{tE} e_h, \qquad E = \Sigma f_h E_h, \qquad E_h = \Sigma \varepsilon_{hj}(e)\partial/\partial e_j.$$

Ainsi, à toute transformation T de G correspond une transformation S, linéaire et homogene, representée par (11). Or il résulte des conditions (C) que $(E_h, E_k) = \Sigma c_{hkj} E_j$. Les transformations S forment un groupe A, dit *groupe-adjoint* de C [4, p. 214]. Comme on a toujours $\Sigma e_h E_h = 0$, les E_h ne sont jamais divergentes.

7. Les points $[e]$, correspondant aux 1-groupes de G, sont transformés entre eux par S. Mais les coordonnées homogenes de $[e]$ ne sont determinées qu'a un facteur près, c'est-a-dire a une transformation pres de $\{E_0\}$, ou $E_0 = \Sigma e_h \partial/\partial e_h$. Les transformations $[S]$ qui montrent comment les transformations T de G permutent entre eux les points $[e]$ ou les 1-groupes de G s'obtiennent donc en considérant les variables comme homogenes dans $\{E_0, A\}$.

8. Soit H, que l'on peut toujours supposer être $\{X_1, \ldots, X_s\}$ un s-sous-groupe de G. Les points $[e]$ des 1-groupes de H forment le $(s-1)$-plan $[P]$ défini par $e_j = 0$ $(j = s+1, \ldots, r)$. Pour que les 1-groupes de H soient permutés entre eux par toute transformation de G, il faut et suffit que l'on ait

$$(12)\qquad (X_i\ X_k) = \Sigma_1^s c_{ikj} X_j \qquad (i = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, s).$$

Le plan $[p]$ est alors invariant par toute transformation de $\{E_0, A\}$, et H, transformé en lui-même par toute transformation de G, est dit *invariant* ou *normal dans* G.

9. En ce cas, on a $c_{hkj} = 0$ $(j > s,\ h$ ou $k \leqq s)$. Il résulte alors des conditions (C) du groupe G que les $(r-s)^3$ nombres c_{hkj} $(h, k, j, = s+1, \ldots, r)$ vérifient des relations de même forme, et determinent par suite la structure d'un $(r-s)$-groupe. Un groupe de cette structure sera dit *groupe quotient de* G *par* H, et représenté par $G|H$ [4]. Si H, normal dans G, est contenu dans un groupe K, lui-même normal dans G, alors $K|H$ est normal dans $G|H$. Quand un tel groupe K n'existe pas, H est dit *normal maximum dans* G.

Un r-groupe G qui ne contient normalement aucun s-groupe $(0 < s < r)$ est dit *simple*. Quand H est normal maximum dans G, $G \mid H$ est simple [3, 4].

10. Soit G_1 un r_1-groupe normal maximum dans le r_0-groupe G_0. La série des r_k-groupes G_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ dans laquelle G_k est normal maximum dans G_{k-1} est une *série normale de composition de* G_0. Chaque diviseur normal maximum de G_0 est point de depart d'une telle série. On démontre [3, 4, 13] que, *dans les diverses séries normales, les groupes-quotients* $G_{k+1} \mid G_k$, *tous simples, présentent les mêmes structures à l'ordre près.*

11. Si $G = \{X_1, \ldots, X_r\}$, et si l'on pose $X_{ab} = (X_a\ X_b) = \Sigma c_{abj} X_j$, comme on a $(X_{ab}\ X_{ij}) = \Sigma c_{abh} c_{ijk} X_{hk}$, et $(X_h\ X_{ab}) = \Sigma c_{abj} X_{hj}$, les X_{ab} engendrent un groupe G', normal dans G, dit *groupe dérivé de* G.

Si $G' = G$, G est dit *parfait*. Si $G' < G$, la suite G, G', G'', ..., dont chaque groupe est dérivé du précédent, s'arrête a un r_k-groupe parfait. Si $r_k = 0$, on peut [3] choisir les X_h de maniere que $X_1, \ldots, X_j$ engendrent toujours un j-groupe normal dans $\{X_1, \ldots, X_j, X_{j+1}\}$. G est alors dit *intégrable*. Il l'est toujours et seulement s'il ne contient aucun 3-groupe simple [14].

Si G n'est pas intégrable, et s'il ne contient normalement aucun groupe intégrable, il est dit *semi-simple*. Il est alors [10], *produit direct* [1] de groupes simples. Si G contient normalement des sous-groupes intégrables, ceux-ci sont tous contenus dans un sous-groupe normal intégrable H, et $G \mid H$ est semi-simple [10].

CHAPITRE IV.

ISOMORPHISME.

1. Les constantes de structure de $G = \{X_1, \ldots, X_r\}$ dépendent du choix des X_h. Si $(X_h\ X_k) = \Sigma c_{hka} X_a$, $X'_h = \Sigma l_{hk} X_k$, $|l_{hk}| \neq 0$, on a $(X'_i\ X'_j) = \Sigma c'_{ijm} X'_m$, avec

$$\Sigma\, l_{ma} c'_{ijm} = \Sigma\Sigma\, l_{ih} l_{jk} c_{hka} \qquad (i, j, a = 1, \ldots, r). \tag{1}$$

Les systèmes de constantes ainsi déduits les uns des autres définissent un même *type de structure*. Pour que deux groupes G et G′ appartiennent au même type de structure, il faut donc et suffit qu'ils aient le même nombre de paramètres essentiels, et que l'on puisse choisir leurs transf. ∞les génératrices de manière qu'ils aient mêmes constantes de structure.

S'il en est ainsi, G et G′ ont le même premier groupe de paramètres canoniques (III, 1). On peut définir, entre les transformations des deux groupes, une correspondance biunivoque, dans laquelle deux transformations correspondantes T_a, T'_a répondent à un même point (a) de l'espace des paramètres canoniques. Alors $T_a T_b$ et $T'_a T'_b$ répondent à un même point (c), et par suite se correspondent. Ainsi *deux groupes appartenant au même type de structure sont* (*holoédriquement*) *isomorphes* [1, 4].

Inversement, on peut toujours, par un choix convenable des paramètres, donner à deux groupes isomorphes le même groupe des paramètres. Ils ont alors (II, 2, 3) même structure.

2. Soit $G = \{X_1, \ldots, X_r\}$, ayant les c_{ikh} pour constantes de structure, et $G' = \{X'_1, \ldots, X'_s\}$ $(s < r)$. Si l'on peut former r combinaisons $Y_h = \Sigma l_{hm} X'_m$, vérifiant $(Y_i\ Y_k) = \Sigma c_{ikh} Y_h$, je dirai que G′ *se rattache au type de structure de* G. Si, à $\Sigma e_h X_h$ de G, on fait correspondre $\Sigma e_h Y_h$ de G′, on démontre [4] que G contient $r-s$ transf. ∞les indépendantes, à chacune desquelles correspond o dans G′, et qui engendrent un $(r-s)$-groupe H normal dans G, G | H ayant la structure de G′. On voit ensuite [4] que l'on peut donner aux groupes de paramètres de G′ et G | H une même forme P′ définie par

$$(2) \qquad c_i = g_i(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s) \qquad (i = 1, \ldots, s),$$

et en même temps, au groupe de paramètres de G, une forme P définie par (2) et

$$(3) \qquad c_k = g_k(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r) \qquad (k = s+1, \ldots, r).$$

Si l'on considère comme correspondantes deux transformations T'_a, T_a ayant les mêmes s premiers paramètres, cette correspondance est conservée par la multiplication. A T correspond l'unique T′, mais à T' correspond tout le complexe HT. G' est alors dit *mériédriquement isomorphe* [4] ou *homomorphe* [1] à G.

3. Si, entre les r transf. ∞les E_h du groupe-adjoint A du groupe G, vérifiant toujours (III. 6) les relations de structure de G, il existe exactement $r-s$ relations $\Sigma l_{jh} E_h = 0$ $(j = 1, \ldots, r-s)$, entraînant $\Sigma l_{jh} c_{hki} = 0$, les $Y_j = \Sigma l_{jh} X_h$ engendrent un $(r-s)$-groupe C normal dans G. Or on voit que $(Y_j, X_k) = 0$, quels que soient j et k. Donc toute transformation de C est permutable à toute transformation G. Les transf. ∞les de C sont dites *transf. ∞les distinguées de* G. C est dit le *central de* G [1, 2, 4], et $A = G \mid C$.

4. Le cas ou un groupe de transformations ponctuelles laisse invariante une variété fournit un autre exemple d'homomorphisme.

Dans l'espace à n dimensions, une m-variété (à m dimensions) V a en général les deux représentations équivalentes.

(4) $$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_m) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

(5) $$F_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n-m).$$

Pour que V soit invariante par les transformations de $\{X\}$, où $X = \Sigma \xi_i(x) p_i$, il faut et suffit [4] qu'il existe, sur les u_k, une transf. ∞le U telle que l'on ait, en vertu de (4), $U x_i = \xi_i(x)$; ou encore que l'on ait, en vertu de (5), $X F_j(x) = 0$.

Pour que V soit invariante par toute transformation de $G = \{X_1, \ldots, X_r\}$, il faut et suffit que les conditions précédentes soient remplies pour chacune des X_h. On voit alors que les U_h vérifient les relations de structure de G, et par suite engendrent un groupe K qui appartient ou se rattache a la structure de G. suivant que les U_h sont indépendantes ou non, et qui représente l'action de G sur les points de V. On voit, comme précédemment, que, si H désigne le diviseur normal de G qui stabilise chacun des points de V (*stabilisateur total de* V), on a $K \equiv G \mid H$. [2, 4].

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DE DÉFINITION. ORDRES DES TRANSF. ∞LES EN UN POINT.

1. Soit p_k $(p_0 = n)$ le nombre des dérivées distinctes d'ordre k de n fonctions $f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r)$ par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$. Soit $P_k = p_0 + p_1 + \ldots + p_k$, ρ_k le rang de la matrice fonctionnelle de ces P_k fonctions par rapport à $a_1, \ldots, a_r$. On sait [4] que, si ces r paramètres sont essentiels, P_k croît avec k, et atteint r pour $k = m$, La dérivation, jusqu'à l'ordre $m + 1$, des n équations

$$(1) \qquad x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

donne P_{m+1} équations. Par élimination de $a_1, \ldots, a_r$, on obtient $P_m - r$ équations de forme quelconque entre les x_i, les x'_i et leurs dérivées jusqu'à l'ordre m [systeme (I)], puis p_{m+1} équations exprimant les p_{m+1} dérivées d'ordre $m + 1$ des x'_i en fonction des précédentes et des x_i [systeme (II)]. Si l'on considère comme fonctions inconnues les x'_i et leurs $P_m - n$ dérivées jusqu'à l'ordre m, (I)-(II) est un systeme mixte complet (I, 7) à P_m fonctions inconnues et $P_m - r$ équations finies.

2. On peut opérer de même en partant des n équations

$$(2) \qquad \xi_i = \Sigma_1^r a_h \xi_{hi}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Les systèmes (I') et (II') alors obtenus sont linéaires et homogènes par rapport aux ξ_i et à leurs dérivées.

3. Si (1) représente les transformations finies d'un groupe $G = \{X_1, \ldots, X_r\}$. $X_h = \Sigma \xi_{hi}(x) p_i$, (I) et (I'), dont (II) et (II') se déduisent par dérivation, sont dits respectivement *systèmes des équations de définition des transformations finies et des transf. ∞les de* G, (I') est dit aussi *système des équations de définition de* G [2, 4, 12].

On voit [4] que si, dans (I), on remplace x'_i par $x_i + t\xi_i$, et si, dans chacune des équations ainsi formées, on annule le coefficient de t, on obtient (I').

4. Il peut arriver qu'un systeme (I) ou (I') détermine des transformations finies ou transf. ∞les formant un groupe; mais qu'ils ne soit pas possible d'obtenir un système (II) ou (II′) résolu par rapport à toutes les dérivées d'un certain ordre. Le groupe ainsi défini est dit *continu infini* [17. 18].

Dans tous les cas, si les transformations du groupe sont représentées par $x'_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$, le système (I) peut être mis sous une forme canonique, dite *forme de Lie* [18], dans laquelle l'équation de rang j a la forme $F_j[y_1, \ldots, y_n] = F_j[x_1, \ldots, x_n]$, $F_j[y_1, \ldots, y_n]$ désignant une fonction numérique de n variables y_k et de leurs dérivees jusqu'à un certain ordre par rapport à n variables x_i. Le second membre désigne par suite ce que devient cette fonction pour $y_k = x_k$ ($k = 1, \ldots, n$). C'est donc une fonction numérique $f_j(x_1, \ldots, x_n)$.

Lorsque les équations de définition sont données sous uné forme quelconque, pourvu que leurs deux membres soient des polynomes en les y_k et leurs dérivées, la réduction du système à la forme de Lie n'exige que des opérations rationnelles [16, p. 421].

On peut aussi mettre le système (I) sous une des forme dites *de Medolaghi*. Dans la première, le second membre de l'équation de rang j est la fonction $f_j(y_1, \ldots, y_n)$ donnée par la forme de Lie; et le premier membre est une fonction K_j des fonctions $f_k(x)$, des y_k et de leurs dérivées. Dans la seconde, le second membre reste $f_j(x)$, comme dans la forme de Lie; le premier membre est une fonction L_j des $f_k(y)$, des y_k et de leurs dérivées.

Le système (I′) peut aussi [16, p. 425] être ramené à une forme canonique, dite *forme d'Engel* [17, § 3]. Dans l'équation de rang j, les ξ_i ont pour coefficients respectifs $\partial f_j(x)/\partial x_i$, et leurs dérivées ont pour coefficients des fonctions des $f_k(x)$.

Si l'on transforme le groupe G par un changement de variables $|x_i\ g_i(x_1, \ldots, x_n)|$, pour avoir, relativement au nouveau groupe les formes de Medolaghi ou d'Engel des équations de définition, il suffit de remplacer partout $f_k(x)$ par des fonctions $l_k(x)$ définies de la manière suivante : $l_k(x)$ est ce que devient le premier membre L_k de l'équation de Medolaghi (seconde forme) quand on y remplace partout y_h par $g_h(x)$ ($h = 1, \ldots, n$) [16, p. 427].

5. Une transf. ∞le quelconque de $G = \{X_1, \ldots, X_r\}$, soit $X = \Sigma\lambda_h X_h$, est d'ordre > 0 au point (x) (I, 1) si l'on a $0 = \Sigma\lambda\xi_{hi}(x)$

$(i = 1, \ldots, n)$. Désignons ces équations par (E_0). Soit (E_k) le système obtenu en dérivant (E_{k-1}) par rapport aux x_i, et r_k le rang de la matrice des coefficients des λ_h dans l'ensemble $(\mathcal{E}_k)$ des systèmes (E_0), (E_1), ..., (E_k). Il existe (I, 4; V, 2) un entier m tel que $r_m = r$, et $r_k < r$ pour $k < m$. Comme les transf. ∞les d'ordre $\geqq k$ sont déterminées par $(\mathcal{E}_{k-1})$, on voit que G contient exactement $r - r_{k-1}$ transf. ∞les indépendantes d'ordre $\geqq k$ dont toute transf. ∞le d'ordre $\geqq h$ sera combinaison linéaire, et qu'il n'y a aucune transf. ∞le d'ordre $> m$. Il y a exactement r_0 transf. ∞les indépendantes d'ordre o et $r_k - r_{k-1}$ d'ordre k $(k = 1, \ldots, m)$, dont aucune combinaison linéaire n'est d'ordre plus grand [2, 4].

6. La seule connaissance du système (I′) des équations de définition permet de trouver ces nombres. Soit en effet, dans (I′), s_k le rang de la matrice des coefficients des dérivées d'ordre k, $k+1$, ..., m. On voit [4] que, dans l'intégration du système mixte, les r constantes arbitraires sont les valeurs initiales de : $p_m - s_m$ dérivées d'ordre m; $p_k - s_k + s_{k+1}$ dérivées d'ordre k $(= m-1, \ldots, 1)$; $n - N + s_1$ $(N = P_m - r)$ fonctions ξ. On voit que ces divers nombres sont précisément ceux des transf. ∞les indépendantes d'ordre m, k $(= m-1, \ldots, 1)$, o.

S'il n'y a qu'une variable, (I′) se réduit à une équation différentielle d'ordre r. G contient donc une transformation et une seule $X_h = x^h p + \ldots$ pour chacun des ordres $h = 0, 1, \ldots, r-1$. Comme $(X_h X_k) = (k-h) x^{h+k-1} p + \ldots$, il faut $h + k \leqq r$, ce qui, pour $h = k - 1 = r - 2$, donne $r \leqq 3$ [4, p. 369].

7. Si k est > 0, l'alternée de deux transf. ∞les d'ordre $\geqq k$ est d'ordre $\geqq k$. Donc G contient un sous-groupe G_k dont toute transf. ∞le est, au point considéré, d'ordre $\geqq k$. En particulier G_1 est formé de toutes les transformations de G qui fixent ce point. Il en est dit le *stabilisateur*.

Pour $m > 1$, G_m est abélien; et pour $h > k \geqq 1$, G_h est normal dans G_k [4].

8. Soit a le rang ordinaire de la matrice des X_h. On peut supposer $X_1, \ldots, X_a$ divergentes, et $X_{a+j} = \Sigma_1^a f_{jh}(x) X_h$. Le stabilisateur de (x^0) est le $(r-a)$-groupe G_1^0 engendré par les $X_j^0 = X_{a+j} - \Sigma f_{jh}(x^0) X_h$.

On voit, en tenant compte de l'indépendance des X_h ($h = 1, \ldots, r$), que les points (x) ayant pour stabilisateur G_1^0 sont définis par

$$(3) \qquad f_{jh}(x) = f_{jh}(x^0) \qquad (j = 1, \ldots, r-a;\ h = 1, \ldots, a).$$

Les points voisins de (x^0), définis par (3), se confondent avec (x^0) ou forment une $(n-s)$ variété contenant (x^0) suivant que la matrice fonctionnelle des f_{jh} est de rang n ou $s < n$. Suivant les cas, le groupe est dit *asystatique* ou *systatique*. La variété totalement stabilisée par G_1^0 est dite *variété systatique* [2, 4].

CHAPITRE VI.

EQUATION CARACTERISTIQUE.

1. Soit $X = \Sigma e_h X_h$ une transf. ∞le de $G = \{X_1, \ldots, X_r\}$. Une autre transf. ∞le $Y = \Sigma \lambda_h X_h$ telle que $(X\ Y) = sY$ est définie par

$$(1) \qquad \Sigma C_{kj} \lambda_k = s\lambda_j, \qquad C_{kj} = \Sigma c_{hkj} e_h \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

Pour que Y existe, il faut et suffit que s soit racine de

$$(2) \qquad 0 = \Delta(s) = |\varepsilon_{kj} s - C_{kj}|.$$

Suivant que X est une transf. ∞le déterminée, les e_h étant donnés, ou que X parcourt les transf. ∞les d'un sous-groupe H de G, les e_h étant liés par $r-s$ relations, ou que X parcourt les transf. ∞les de G, $\Delta(s)$ est dit *déterminant caractéristique relatif à* X, H, *ou de* G. L'équation (2) est dite *équation caractéristique relative à* X, H, *ou de* G.

2. Si l'on pose $\Delta(s) = \Sigma_1^r (-1)^h \psi_h(e) s^{r-h}$, les $\psi_h(e)$ sont invariants du groupe-adjoint A [12, p. 27], dont les transf. ∞les sont précisément $E_k = \Sigma C_{kj}\, \partial/\partial e_j$. Si q [$\leq r-1$ (III, 6)] est le rang de $|C_{kj}| = \Delta(0)$, $\Delta(s)$ a au moins $r-q$ racines nulles, et A exactement $r-q$ invariants distincts. Le nombre k des fonctions $\psi_h(e)$ distinctes, c'est-à-dire le rang de leur matrice fonctionnelle, est dit *le rang de* G. Il est au plus égal [4] au nombre des racines nulles de $\Delta(s)$. Si $\Delta(s) = s^r$, G est dit *de rang* 0; tous ses 2-sous-groupes sont alors abéliens [4].

3. Si G est de rang k, toute transf. ∞le ordinaire X_1 de G appartient à un k-sous-groupe $K = \{X_1, \ldots, X_k\}$ de rang o, maximum de rang o dans G. Soient s_i ($i = 0, 1, 2, \ldots; s_0 = 0$), de multiplicités m_i ($m_0 = k$), les racines du déterminant caractéristique de G relatif à K. Il existe, dans G, r transf. ∞les indépendantes X_{ij} ($j = 1, \ldots, m_i$) vérifiant $(X_1 X_{ij}) = \Sigma_1^{j-1} c_h X_{hj} + s_i X_{ij}$. Les X_{ij} constituent *la forme réduite de* G *relative à* K. Les $m_i X_{ij}$ et leurs combinaisons linéaires sont dites *appartenir à* s_i. Si $\Delta(s_a + s_b) \neq 0$, on a $(X_{aj} X_{bk}) = 0$. Si $s_a + s_b = s_i$, $(X_{aj} X_{bk})$ appartient à s_i. De plus, si $s_a + s_b = 0$, les racines du déterminant caractéristique relatif à $(X_{aj} X_{bk})$ sont s_a et des produits de s_a par des nombres rationnels [**12**].

4. Si G est semi-simple (III. **11**), son rang k est égal au nombre des racines nulles de $\Delta(s)$; et K est abélien. Les racines $\neq 0$ du $\Delta(s)$ relatif à K sont simples et opposées deux à deux. Si $s_b = -s_a$, $(X_a X_b) = Y_a$, qui est dans K, est dite *associée à* s_a; X_a, X_b et Y_a engendrent un 3-groupe simple [**12**, p. 55].

A tout couple s_a, s_b est associé un entier n_{ab}, pouvant être nul, tel que $\Delta(s_a + ps_b) = 0$ pour tout entier p non extérieur à $0 - n_{ab}$. Le remplacement de chaque s_a par $s_a + n_{ai} s_i$ et de chaque Y_a par $Y_a + n_{ia} Y_i$ opère, sur les s_a et Y_a, une *substitution* S_i, dans laquelle l'association est conservée.

Tout systeme de m racines s_a ($a = 1, \ldots, m$) détermine un m-système de m^2 entiers n_{ab} ($a, b = 1, \ldots, m$). Les Y_a sont indépendantes (ce qui suppose $m \leq k$) toujours et seulement si $|n_{ab}| \neq 0$; les s_a sont alors dites *indépendantes*. Une racine quelconque s_i est dite *fournie* par le m-systeme d'entiers quand elle remplace une des s_a dans une des substitutions du groupe $S = \{S_1, \ldots, S_m\}$. Deux m-systèmes d'entiers sont dits *équivalents* quand ils fournissent les mêmes racines [**12**, p. 60].

Un système de m racines s_a, ou le m-système d'entiers n_{ab} correspondant, est dit *simple*, lorsque, pour tout couple s_a, s_b, on peut former une suite de racines, commençant à s_a et finissant à s_b, telle que l'entier de deux racines consécutives soit toujours $\neq 0$.

Il y a toujours un k-système d'entiers, dit *fondamental*, fournissant toutes les racines du $\Delta(s)$ relatif à K.

5. On démontre [12] que G est simple toujours et seulement s'il existe un k-système fondamental simple. Or [12, p. 71], à une équivalence près, si k peut parcourir une infinité de valeurs, il n'existe que quatre k-systèmes simples; de plus, il en existe un pour chacune des valeurs $k = 2, 4, 6, 7, 8$. A chaque k-système simple, il correspond [12] un type de structure et un seul de groupe simple de rang k. Il existe donc neuf types de structure de groupes simples, tous représentables en groupes linéaires homogènes, à savoir :

A. le groupe linéaire homogène spécial $\mathrm{SLH}_{k+1} \equiv$ au groupe projectif P_k, pour $k \geqq 1$;

B. le $k(2^k + 1)$-groupe d'une forme quadratique à $2k + 1$ variables, pour $k \geqq 2$;

C. le $k(2k + 1)$-groupe d'une certaine forme de Pfaff à $2k$ variables, pour $k \geqq 3$;

D. le $k(2k - 1)$-groupe d'une forme quadratique à $2k$ variables, pour $k \geqq 4$;

Et cinq types particuliers, respectivement à 14, 52, 78, 135 et 248 paramètres [12. p. 94].

CHAPITRE VII.

TRANSITIVITE, PRIMITIVITÉ.

1. On dit qu'une famille de m-variétés remplit l'espace à n dimensions quand, par tout point, passe, en général, au moins une variété de la famille. Pour cela, il faut et suffit [4] que la variété générale de la famille puisse être représentée par $n - m$ équations

$$\mathrm{F}_j(x_1, \ldots, x_n) = t_j \qquad (j = 1, \ldots, n - m). \tag{1}$$

Pour que *chacune* de ces m-variétés soit invariante par un groupe $\mathrm{G} = \{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r\}$, il faut et suffit que les F_j soient invariants communs des X_h.

2. Si la matrice des X_h est de rang n en un point *ordinaire* (x), on voit, en prenant les paramètres canoniques, qu'il existe au moins

une transformation T de G qui porte (x) en un point arbitrairement donné (x'). Toute transformation de G ayant cette propriété appartient au complexe $G_1 T$, G_1 étant le stabilisateur de (x); et le stabilisateur de (x') est $T^{-1} G_1 T$. Un tel groupe G est dit *transitif*.

Si G est un r-groupe abélien transitif, le $(r-n)$-groupe G_1, fixant tous les points, se réduit donc à la transformation identique; donc $r = n$.

3. Si, en un point ordinaire, la matrice des X_h est de rang $a < n$, les X_h définissent, par leurs $n - a$ invariants communs F_l, une famille de a-varietes [1], dites *variétés d'intransitivité*, dont chacune est invariante par G, alors dit *intransitif*. On voit [4] que l'action K de G (IV, 4) sur les points de chacune de ces variétés est un groupe transitif. Ce groupe K, homomorphe à G, en est dit *constituant transitif* [1].

4. Une variété invariante par G est dite *minimum* quand G en permute transitivement les points. Si G est intransitif, la variété minimum d'un point ordinaire est la variété d'intransitivité de ce point.

Soit en général E_b $(b < a)$ le système d'équations obtenues en égalant à zéro tous les déterminants de degré b de la matrice des X_h, et V_b la variété (si elle existe) formée des points vérifiant E_{b+1}, mais non E_b. On voit que V_b, lieu des points dont le stabilisateur est un $(r-b)$-groupe, est invariante par G. Si K_b est l'action de G sur les points de V_b, les variétés d'intransitivité de K_b donneront les variétés invariantes minimum par G des points de V_b.

On en déduit [4] que, dans l'espace des paramètres canoniques, la *classe* des 1-groupes *conjugués*, dans G, de $\{\Sigma e_h X_h\}$ correspond à la variété minimum invariante du point (e) par $\{E_0, A\}$ (III, 7).

5. Soit $G = \{X_1, \ldots, X_r\}$ un groupe transitif, et $\mathcal{G} = \{\mathfrak{X}_1^b, \ldots, \mathfrak{X}_r^b\}$ le groupe obtenu en répétant les transformations de G sur b séries de n variables. Soit m la dernière valeur de b pour laquelle le rang a_b de la matrice des $\mathfrak{X}_h^b$ est égal au nombre bn des variables. Alors $\mathcal{G}^m$ est le dernier groupe transitif de la série des $\mathcal{G}^b$. Les invariants de $\mathcal{G}^{m+1}$ peuvent être considérés comme des fonctions des coordonnées de $m+1$ points, invariantes par G, qui est alors dit *m fois transitif*.

Si $n < r < 2n$, G est *une fois transitif*; si $n = r$, G est *simplement transitif* ou *régulier*. Le stabilisateur d'un point quelconque se réduisant à la transformation identique, il existe une transformation de G et une seule portant un point donné en un point donné. Les variétés d'intransitivité de tout k-sous-groupe de G ont k dimensions.

Soit j le premier entier pour lequel le rang a_j ($\leqq jn$) de la matrice des $\mathfrak{X}_h^b$ atteint la valeur r (I, 4). Alors $a_{j+1} = a_j$ est $< (j+1)n$, et $\mathcal{G}^{j+1}$ est intransitif; donc G a des invariants de $j+1$ points. Mais on démontre [4, p. 336] que $j+2$ points n'ont pas d'invariant *propre* (indépendant des invariants d'un moindre nombre de points). Pour un groupe régulier, les couples de points ont seuls des invariants propres.

6. Un groupe G est dit *imprimitif* quand il existe une famille de variétés remplissant l'espace. dites *variétés d'imprimitivité*, telle que toute transformation de G transforme une variété quelconque de la famille en une variété de la même famille.

Soit $F_a = l_a$ ($a = 1, \ldots, n-m$) une représentation d'une famille de m-variétés remplissant l'espace. Soient Y_k ($k = 1, \ldots, m$) m transf. ∞les divergentes ayant pour invariants communs les F_a. Soit (x') le transformé de (x) par une transformation T, et F'_a ce que devient F_a quand on y remplace x par x'. Pour que la famille de variétés soit invariante par T, il faut et suffit que chaque F'_a demeure constant quand tous les F_l le sont, donc que F'_a soit fonction des F_j, c'est-à-dire invariant commun des Y_k.

Si T parcourt $\{X\}$, on démontre [4] que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi se met sous les formes équivalentes

$$0 = Y_k X F_a = (Y_k X) F_a, \tag{1}$$
$$X F_a = \mathcal{F}_a(F_1, \ldots, F_{n-m}), \tag{2}$$
$$(Y_k X) = \Sigma f_{kl}(x) Y_l \qquad (k = 1, \ldots, m;\ a = 1, \ldots, n-m). \tag{3}$$

Pour qu'il en soit ainsi quand T parcourt $G = \{X_1, \ldots, X_r\}$, les conditions nécessaires et suffisantes ont les formes équivalentes

$$Y_k X_h F_a = 0, \tag{4}$$
$$X_h F_a = \mathcal{F}_{ha}(F_1, \ldots, F_{n-m}), \tag{5}$$
$$(Y_k X_h) = \Sigma f_{khl}(x) Y_l \tag{6}$$
$$(k = 1, \ldots, m;\ h = 1, \ldots, r;\ a = 1, \ldots, n-m).$$

Un groupe qui ne laisse invariante aucune famille de variétés remplissant l'espace est dit *primitif*.

Si G est imprimitif, il peut avoir un diviseur normal H admettant comme variétés d'intransitivité celles d'imprimitivité de G. Si G a un diviseur normal intransitif H, il admet certainement, comme variétés d'imprimitivité, celles d'intransitivité de H.

L'action de G sur ses m-variétés d'imprimitivité est un groupe K ($\equiv G|H$) de transformations du $(n-m)$-espace des points (l). Si G porte un point (x) de la variété correspondante à (l) en un point (x') de celle correspondant à (l'), K porte le point (l) au point (l'). Ainsi K doit être au moins autant de fois transitif que G.

7. Un groupe G opérant sur n variables est au plus $n+2$ fois transitif. Le théorème est évident pour $n=1$; car alors (V, 5) r est $\leqq 3$. Supposons le théorème vrai pour tout groupe à moins de n variables. Si G est imprimitif, sa transitivé maximum ne peut pas (6) dépasser celle $n-m+2 \leqq n+1$ de K. Si r est $< n(n+2)$, il est clair que G ne peut être $n+2$ fois transitif. Si r est $\geqq n(n+2)$, G, pouvant avoir au plus n^2 transf. ∞les indépendantes d'ordre 1, et en ayant exactement n d'ordre 0, en a au moins n d'ordre > 1. Soit m leur ordre maximum. G_m est abélien et normal dans G_1 (V, 6). Si G_m est intransitif, G_1 est imprimitif, donc (6) au plus $n+1$ fois transitif, et G l'est au plus $n+2$ fois. Si G_m est transitif, et par suite (VIII, 2) un n-groupe, on verra plus loin (VIII, 3), et l'on peut d'ailleurs vérifier directement, qu'il existe un changement de variables ramenant G_m à la forme $\{p_1 \ldots, p_n\}$. Soit alors $X = \Sigma \xi_i p_i$ la transf. ∞le générale de G_1. Pour que G_m soit normal dans G_1 il faut et suffit que l'on ait $(p_i X) = \Sigma a_{ki} p_k$ $(i = 1, \ldots, n)$, donc $\partial \xi_k / \partial x_i = a_{ki}$, $\xi_k = \Sigma a_{ki} x_i + b_k$. Ainsi G_1 a au plus les $n(n+1)$ transf. ∞les independants p_i et $x_i p_k$. Donc G a au plus $n(n+2)$ paramètres [3. p. 301]. On verra d'ailleurs plus loin (X, 7) que l'hypothèse de la transitivité de G_m n'est pas admissible.

8. Il est clair que l'intransitivité peut être considérée comme un cas particulier de l'imprimitivité. On voit aussi que tout groupe systatique (V, 7) admet ses variétés systatiques comme variétés d'imprimitivité. Soient en effet $X_1, \ldots, X_a$ divergentes, et

$X_{a+j} = \Sigma f_{jk}(x) X_k$. La famille des variétés systatiques est définie par $f_{jk} = l_{jk} (j = 1, \ldots, r-a;\ k = 1, \ldots, a)$. Si l'on met [4] $(X_i\ X_{a+j})$, de deux manières différentes, sous forme d'une fonction linéaire des X_k, on voit, en égalant les coefficients de chaque X_k, que $X_i f_{jk}$ s'exprime par un polynome du second degré par rapport aux f_{hb}, polynome dont les coefficients dépendent des constantes de structure. C'est la forme (5) de la condition suffisante (6).

9. Soit G un r-groupe à n variables, intransitif et systatique. Le rang a de la matrice des X_h est donc $< n$ et $< r$; et, parmi les f_{jk}, il n'y en a que $n-m$ distinctes, en fonction desquelles les autres s'expriment, soit f_j $(j = 1, \ldots, n-m)$. Si $u_1, \ldots, u_{n-a}$ sont les invariants de G, parmi lesquels il y en a $n-b$ qui sont fonctions des f_j, les $b-a$ autres invariants et les $n-m$ fonctions f_j forment un système de $n-m+b-a$ fonctions distinctes (I, 7). En conséquence, les variétés communes aux variétés systatiques et aux variétés d'intransitivité ont $m-(b-a)$ dimensions [4, p. 321].

CHAPITRE VIII.

SIMILITUDE.

1. Deux groupes G_x et G_y opérant sur un même nombre de variables sont dits *semblables* quand il existe un changement de variables ou transformation ponctuelle S définie par

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

telle que $S^{-1} T_x S = T_y$ parcourt G_y quand T_x parcourt G_x.

On voit que, quand T_x parcourt $\{X\}$, T_y parcourt $\{Y\}$, Y étant transformée de X par S. Il en résulte que deux groupes semblables ont même type de structure, et sont par suite isomorphes (IV, 1).

Si les Y_h sont transformées respectives des X_h, si, $X_1, \ldots, X_a$ étant divergentes, on a

$$(2) \qquad X_{a+j} = \Sigma f_{jk}(x) X_k \qquad (j = 1, \ldots, r-a),$$

il est clair que $Y_1, \ldots, Y_a$ doivent être divergentes, qu'on doit avoir

$$(3)\qquad Y_{a+j} = \Sigma g_{jk}(y) Y_k \qquad (j = 1, \ldots, r-a),$$

les relations

$$(4)\qquad f_{jk}(x) = g_{jk}(y) \qquad (j = 1, \ldots, r-a,\ k = 1, \ldots, a)$$

résultant de (1).

Si $f_1(x), \ldots, f_{n-m}(x)$ désignent ceux des premiers membres de (4) qui sont distincts, et si $f_{jk} = F_{jk}(f_1, \ldots, f_{n-m})$, les seconds membres correspondants $g_1, \ldots, g_{n-m}$ doivent être distincts, et l'on doit avoir $g_{jk} = F_{jk}(g_1, \ldots, g_{n-m})$. Par suite, toutes les relations (4) sont vérifiées, des que le sont les $n-m$ relations distinctes

$$(5)\qquad f_h(x) = g_h(y) \qquad (h = 1, \ldots, n-m)$$

Ainsi, dans deux groupes semblables, les variétés d'intransivité et les variétés systatiques ont respectivement les même nombres de dimensions.

En résumé les conditions nécessaires à la similitude des deux groupes sont : isomorphisme, ou correspondance $Y_h \sim X_h$ conservant les relations de structure; divergence simultanée de a transf. ∞les de chaque groupe, et relations (2), (3), (4), ces dernieres étant compatibles, et n'imposant aucune condition, soit à (x) seul, soit à (y) seul.

2. Si (x^0) et (y^0) se correspondent par (1), les relations (4) donnent $f^0_{jk} = g^0_{jk}$. Soit $a < r$. Les stabilisateurs respectifs de ces deux points, respectivement engendrés par les $Z_{a+j} = X_{a+j} - \Sigma f^0_{jk} X_k$, et les $U_{a+j} = Y_{a+j} - \Sigma g^0_{jk} Y_k$, se correspondent dans l'isomorphisme $G_x \equiv G_y$. Inversement, s'il existe un isomorphisme dans lequel, au stabilisateur, dans G_x, d'un point quelconque (x^0), correspond, dans G_y, le stabilisateur d'un certain point (y^0), on voit [4] que les autres conditions nécessaires du n° 1 sont vérifiées.

3. Si $a = r$ pour les deux groupes, les conditions nécessaires à la similitude se réduisent à l'isomorphisme. Cette condition est d'ailleurs suffisante. En effet, soient $u_a(x)$ les $n-r$ invariants communs des X_h, $v_b(y)$ ceux des Y_h, $w_j(x, y)$ les r autres des $Z_h = X_h + Y_h$. On voit d'abord [4, p. 258] que $D(u, w)/D(x)$ et

$D(v, w)/D(y)$ sont $\neq 0$. On en conclut que, si l'on forme n relations arbitraires

$$u_a = f_a(v), \qquad w_j = F_j(v), \tag{6}$$
$$[D(f)/D(v) \neq 0; \qquad (a = 1, \ldots, n-r; \qquad j = 1, \ldots, r],$$

d'où l'on peut tirer les relations équivalentes

$$v_b = g_b(u), \qquad w_j = G_j(u), \tag{7}$$

ces relations déterminent un changement de variables réversible tel que (1). Considérant la n-variété, invariante par chaque $\{Z_h\}$. que représente chacun de ces trois systèmes, on voit que Y_h est transformée de X_h par (1).

Ainsi deux r-groupes engendrés chacun par r transf. ∞les divergentes sont toujours semblables quand ils sont isomorphes. En particulier, *deux r-groupes réguliers* (VII, 5) *isomorphes sont toujours semblables* [2, p. 340; 4, p. 259].

4. Si $a < r$, les conditions des n^os^ 1 ou 2 sont encore suffisantes. Supposons d'abord $a = n$ (groupes transitifs). Soient, dans $G_x \equiv G_y$, $G_{xa} \equiv G_{yb}$ les stabilisateurs de deux points (a) et (b). Si T_{ax} porte (a) en (x), et $T_{by} \sim T_{ax}$ (b) en (y), les correspondances biunivoques $(x) \sim G_{xa}T_{ax} \sim G_{yb}T_{by} \sim (y)$ déterminent une correspondance biunivoque $(x) \sim (y)$, et par suite une transformation S où $(a) \sim (b)$. On voit alors que $S^{-1}T_{ax}S$ et T_{by} sont la même transformation. D'où $S^{-1}G_xS = G_y$.

5. Soit maintenant $a < n$ (groupes intransitifs). Supposons d'abord les groupes systatiques, en sorte que (5) contient $n - m$ $(m > 0)$ relations distinctes, d'où résulte (4). Les deux groupes ayant mêmes constantes de structure, il résulte de VII-6 que l'on a en même temps $X_h f_a = F_{ha}(f_1, \ldots, f_{n-m})$, et $Y_h g_a =$ le même polynome $F_{ha}(g_1, \ldots, g_{n-m})$. Par suite, si une fonction $U(f_1, \ldots, f_{n-m})$ est invariant de G_x, la même fonction $U(g_1, \ldots, g_{n-m})$ est invariant de G_y. Si donc G_x a exactement $n - b$ invariants $u_j = U_j(f)$, G_y aura exactement $n - b$ invariants $v_j = U_j(g)$ $(j = 1, \ldots, n - b)$. Si k parcourt $n - b + 1, \ldots, n - a$, les f_j, u_k et les g_j, v_k forment (I, 7) deux systèmes de fonctions distinctes. On peut donc, étant donné (x^0), prendre (y^0) vérifiant

$$v_k(y^0) = u_k(x^0), \qquad g_j(y^0) = f_j(x^0)$$
$$(k = n - b + 1, \ldots, n - a, j = 1, \ldots, n - m),$$

ce qui, d'après les hypothèses, entraîne, pour tous les invariants,

$$(8) \qquad v_h(y^0) = u_h(x^0) \qquad (h = 1, \ldots, n - a).$$

Si donc on fait varier (x^0) de manière que sa variété d'intransitivité remplisse l'espace, il en sera de même de celle du point (y^0). Pour chaque position (x^0)-(y^0), on peut, comme au n° 4, déterminer une correspondance biunivoque $(x) \sim (y)$ des points des deux variétés d'intransitivite. Cette correspondance, étendue a l'espace par deplacement de (x^0), determine une transformation S qui donne encore $S^{-1} G_x S = G_y$ [4, p. 323].

Si les deux groupes sont asystatiques, les n relations distinctes (5) définissent un changement de variables; et l'on voit qu'il transforme X_h en Y_h [4, p. 264].

6. A la théorie de la similitude se rattache, d'une certaine maniere, la recherche des transformations permutables a toutes celles d'un groupe $G = \{X_1, \ldots, X_r\}$, $X_h = \Sigma\xi_{hi}(x) p_i$.

L'ensemble de ces transformations forme évidemment un groupe K. Si K est continu, chacune de ces transf. ∞les $Z = \Sigma\zeta_i(x) p_i$ doit (III, 4) vérifier $(Z\ X_h) = 0$, ou

$$(9) \qquad 0 = X_h \zeta_i - Z\xi_{hi} = \Sigma\xi_{hk}(\partial\zeta_i/\partial x_k) - \Sigma(\partial\xi_{hi}/\partial x_j)\zeta_j.$$

C'est le système des équations de définition de K (V, 3).

Il est clair que tous les points de la trajectoire de $\{Z\}$ doivent avoir, dans G, le même stabilisateur. Ainsi Z ne peut exister que si G est systatique (V, 7).

7. Supposons G transitif et systatique. On peut déterminer une transformation S permutable à toute transformation de G par le procédé du n° 4, en prenant pour (b) un point arbitraire de la variété systatique de (a). Si les variétés systatiques ont m dimensions, S dépend, comme (b), de m parametres, et K a au moins m parametres.

Supposons $X_1, \ldots, X_n$ divergentes, $n < r$, et

$$X_{n+j} = \Sigma_1^n f_{jk} X_l \qquad (j = 1, \ldots, r-n), \tag{10}$$

les f_{jk} se réduisant à $n - m$ fonctions distinctes f_a ($a = 1, \ldots, n-m$). L'alternée par Z des deux membres de (19) donne, à cause de la divergence des X_k, $Zf_{jk} = 0$, équations se réduisant à

$$0 = Zf_a = \Sigma_1^n (\partial f_a / \partial x_k) \zeta_l \qquad (a = 1, \ldots, n-m). \tag{11}$$

D'autre part, n^2 des rn équations (9) peuvent prendre la forme $\partial \zeta_l / \partial x_k = g_{lk}(x, \zeta)$, les $n(r-n)$ autres devenant des équations finies, qui doivent comprendre (11). Comme le groupe K doit avoir au moins m parametres, le système mixte équivalent à (9) ne peut avoir d'équations finies distinctes de (11) et est complet (I, 8). Ainsi K est un m-groupe dont toute transf. ∞le est d'ordre 0 (V, 5). Ses variétés d'intransitivité sont les variétés systatiques de G [4, p. 327].

8. Si $n = r$ (G régulier). il suffit, dans ce qui précède, de faire $m = n$. K est alors un autre n-groupe régulier, que je désignerai par G'. Il est clair que G est le groupe des transformations permutables a toutes celles de G'. Les deux groupes G, G' sont dits *groupes réguliers réciproques* [4. p. 270].

On peut toujours prendre leurs transf. ∞les génératrices sous la forme $X_h = p_h + Y_h$, $X'_h = -p_h + Y'_h$, Y_h et Y'_h étant d'ordre > 0. Si les constantes de structure des deux groupes sont alors c_{hkj} et c'_{hkj}, on a

$$(Y_h\ Y_k) + (Y'_h\ Y'_k) + (Y_h\ Y'_k) + (Y_k\ Y'_h) = \Sigma (c_{hkj} - c'_{hkj}) p_j$$

+ termes d'ordre supérieur, On en conclut $c_{hkj} = c'_{hkj}$; G et G' sont donc isomorphes et (3) semblables.

On voit aussi que les m-variétés d'intransivité d'un m-sous-groupe de G' sont variétés d'imprimitivité de G, et inversement.

9. Si, dans un r-groupe transitif G à n variables. on désigne par X_{kh} ($k = 0, 1, \ldots, m$; $h = 1, \ldots, q_k$; $q_0 = n$) $= \Sigma \varphi_{khi} p_i + \ldots$ les transf. ∞les d'ordre k à l'origine, φ_{khi} est un polynome homogène de degré k, et l'on peut supposer $\varphi_{0hi} = \varepsilon_{hi}$. Si l'on pose $\underline{X}_{kh} = \Sigma \varphi_{khi} p_i$, en négligeant les termes d'ordre supérieur, on voit que les $\underline{X}_{kh}$ engendrent un r-groupe $\underline{G}$. Si $\varphi_{11i} = x_i$, on démontre

[2. p. 611] que l'on peut, en remplaçant chaque X_{kh} par $\bar{X}_{kh}$ + une combinaison de transf. ∞les d'ordre plus grand, ramener la structure de G à celle de $\underline{G}$. Dans l'isomorphisme de ces deux groupes transitifs. les stabilisateurs de l'origine se correspondent; ils sont donc semblables.

CHAPITRE IX.

GROUPES PROLONGÉS. INVARIANTS DIFFÉRENTIELS.

1. Soient, sur $n+m$ variables x_i ($i=1, \ldots, n$) et y_j ($j=1, \ldots, m$), une transformation réversible T_0, représentée par

$$x'_i = f_i(x, y), \qquad y'_j = g_j(x, y). \tag{1}$$

Si l'on considere les y_j comme fonctions des x_i, une fonction $F(x, y)$ devient une fonction $\underline{F}(x)$, et l'on a

$$\partial \underline{F}/\partial x_i = \underline{\partial F/\partial x_i} + \Sigma \underline{(\partial F/\partial y_j)}(\partial y_j/\partial x_i). \tag{2}$$

On démontre [4, p. 350] que l'on peut prendre les y_j fonctions des x_i de telle sorte que $D(\underline{f})/D(x)$ soit $\neq 0$, et qu'alors les formules

$$x'_i = \underline{f_i}(x), \qquad y'_j = \underline{g_j}(x) \tag{3}$$

définissent m fonctions y'_j des x'_i. Leurs dérivées $y'_i = \partial y'_j/\partial x_i$ sont données, en fonction des $y_{ja} = \partial y_j/\partial x_a$, par

$$\partial \underline{g_j}/\partial x_a = \underline{g_{ja}} = \Sigma(\partial \underline{f_i}/\partial x_a) y'_{ji} = \Sigma \underline{f_{ia}} y'_{ji}. \tag{4}$$

Si l'on suppose que y_k, y'_k, k pouvant dépasser m, désignent les fonctions y_j, y'_j et leurs dérivées jusqu'à l'ordre N, les formules (4), où l'on remplace l'indice j par k, donnent les dérivées jusqu'à l'ordre $N+1$. En général, toute dérivée d'ordre N de y'_j s'exprime par les dérivées d'ordre $0, 1, \ldots, N$ des y_j.

En adjoignant aux formules (1) les formules ainsi obtenues jusqu'à l'ordre N, on introduit deux séries de nouveaux symboles : les dérivées $\partial^{a_1+\cdots+a_n} y_j/\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n} = D_\alpha(a_1 \ldots a_n) y_j$, en nombre $m[(n+1)\ldots(n+N)-1]$, et les mêmes avec variables accentuées.

Entre tous ces symboles, anciens et nouveaux, les formules anciennes et nouvelles définissent une transformation T, qui est dite déduite de T_0 par prolongement à l'ordre N.

2. On voit directement que, si T_h $(h = 1, 2)$ résulte du prolongement à l'ordre 1 de T_{h0}, $T_1 T_2$ résulte de même de $T_{10} T_{20}$. On voit de proche en proche qu'il en est ainsi dans le prolongement à un ordre quelconque. Si donc T_0 parcourt un groupe G_0, T parcourt un groupe isomorphe G, qui est dit déduit de G_0 par prolongement à l'ordre N.

3. Supposons que T_0 parcourt le 1-groupe $\{Z_0\}$, $Z_0 = X + Y_0$, $X = \Sigma \xi_\iota p_\iota$, $Y_0 = \Sigma \eta_j q_j$, les ξ_ι et η_j pouvant être fonction des $n + m$ variables x_ι et y_j. T parcourra $\{Z_0 + Y\}$, $Y = \Sigma \eta_{m+k} q_{m+k}$. Si y_b parcourt l'ensemble des dérivées distinctes d'ordre N, l'ensemble des $y_{b\iota}$ contient celui des dérivées distinctes d'ordre $N + 1$. Par adjonction de ces nouvelles variables, on obtient une transformation T′, déduite de T_0 par prolongement à l'ordre $N + 1$, qui parcourt $\{Z_0 + Y + Y'\}$, $Y' = \Sigma \eta_{b\iota} q_{b\iota}$. Si l'on applique l'opération $Z_0 + Y + Y'$ à l'équation de Pfaff $dy_b = \Sigma y_{b\iota} dx_\iota$, il vient [16]

$$d\eta_b = \Sigma \eta_{ba}\, dx_a + \Sigma \eta_{b\iota}\, d\xi_\iota, \tag{5}$$

ou

$$\Sigma \eta_{ba}\, dx_a - \Sigma \xi_\iota\, dy_{b\iota} = d(\eta_b - \Sigma \xi_\iota y_{b\iota}). \tag{6}$$

Annulant le coefficient de dx_a, et remarquant que $\partial y_{b\iota}/\partial x_a = \partial y_{ba}/\partial x_\iota$, on obtient

$$\eta_{b\iota} - X\underline{y_{b\iota}} = \partial(\underline{\eta_b} - \underline{X y_b})/\partial x_\iota. \tag{7}$$

Avec les notations introduites au n° 1, cette formule s'écrit [16]

$$\begin{aligned} Y' D_x(a_1 \ldots a_{\iota+1} \ldots a_n) y_b &- X D_\iota(a_1 \ldots a_{\iota+1} \ldots a_n) y_b \\ &= \partial[\underline{Y D_x(a_1 \ldots a_\iota \ldots a_n) y_b - X D_\iota(a \;\ldots a_\iota \ldots a_n) y_b}]/\partial x_\iota. \end{aligned} \tag{8}$$

4. Soient Z_{h0} plusieurs transf. ∞les, Z_h et Z'_h celles qui en résultent par prolongement aux ordres N et $N + 1$. Admettons que $Z = \Sigma a_h Z_h$ et $(Z_h\, Z_k)$ résultent du prolongement à l'ordre N de $Z_0 = \Sigma a_h Z_{h0}$ et de $(Z_{h0}\, Z_{k0})$. En appliquant a l'équation de

Pfaff $Z' = \Sigma a Z'_h$. on voit que Z' résulte du prolongement à l'ordre $N+1$. De même, en appliquant les opérations $Z'_h Z'_k$, puis $Z'_k Z'_h$, et retranchant, on voit que $(Z'_h\, Z'_l)$ résulte du prolongement à l'ordre $N+1$. Si donc les Z_{h_0} engendrent un r-groupe G_0, les Z_h, évidemment indépendantes, engendrent un r-groupe de même structure [3, p. 347].

5. Les invariants du groupe G, invariants communs des Z_h, s'il en existe, sont dits *invariants différentiels d'ordre* N du groupe G_0. Quel que soit le r-groupe G_0, pour N assez grand, le nombre des variables de G dépasse r. Il existe donc toujours des invariants différentiels.

6. Soit désormais $m = n$. Supposons que T_0 transforme entre elles les variables x par $x'_i = f_i(x)$, ou $x_i = F_i(x')$. On peut considerer chaque y'_j comme fonction des y et des x'. Si alors y'_k, dérivée d'ordre N d'un y'_j, est fonction des x' et de variables y_b, représentant les y_j et leurs dérivées jusqu'à l'ordre N, soit $y'_k = g_k(x', y)$, on aura, pour une dérivée d'ordre $N+1$.

$$(9)\qquad \partial y'_k/\partial x'_i = \partial g_k/\partial x_i + \Sigma(\partial g_k/\partial y_b)(\partial y_b/\partial x'_i);$$

et. comme chaque y_b dépend des x'_i par l'intermédiaire des x_a, on a

$$(10)\qquad \partial y_b/\partial x_i = \Sigma(\partial y_b/\partial x_a)(\partial F_a/\partial x_i).$$

Supposons de plus que T_0 transforme aussi entre elles les variables y, on aura. pour l'ordre 1,

$$(11)\qquad \partial y'_j/\partial x'_i = \Sigma\Sigma(\partial F_a/\partial x'_i)(\partial g_j/\partial y_b)(\partial y_b/\partial x_a).$$

On obtiendra les dérivées d'ordre 2 en dérivant chaque terme du second membre par rapport à x'_l, et observant que

$$(12)\qquad \partial(\partial g_j/\partial x_b)/\partial x'_k = \Sigma(\partial^2 g_j/\partial y_b\,\partial y_h)(\partial y_h/\partial x'_k),$$

$\partial y_h/\partial x'_k$ étant donné par (10), et

$$(13)\qquad \partial(\partial y_b/\partial x_a)/\partial x'_k = \Sigma(\partial F_h/\partial x'_k)(\partial^2 y_b/\partial x_a\,\partial x_h),$$

et ainsi de suite. On voit donc, de proche en proche. qu'une dérivée d'ordre N, soit $D_{x'}(a_1, \ldots, a_n)y'_j$, sera un polynome par rapport aux symboles suivants :

les $D_x(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)y_b$, où $1 \leqq \Sigma\alpha_k < N$;
les $D_y(\beta_1, \ldots, \beta_n)g_j$, où $1 \leqq \Sigma\beta_k \leqq N$;
les $D_{x'}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)F_a$, où $\gamma_k \leqq a_k$, $\Sigma\gamma_k \geqq 1$.

Les symboles des deux dernières catégories, qui dépendent de la transformation T_0, jouent le rôle de paramètres [16].

Supposons alors que $D_{x'}(a_1, \ldots a_n)y'_j$ parcourt les M dérivées distinctes d'ordres 1, ..., m des n fonctions y'_j par rapport aux n variables x'_i, le nombre M étant $n[(n+1)\ldots(n+m)-1]$. A toute transformation T_0, représentée par $x_i = F_i(x')$, $y'_j = g_j(y)$, correspond, sur ces M symboles, une transformation T_m dépendant de 2M paramètres, les dérivées des fonctions F_i et g_j d'ordres 1, ..., m.

7. Soient T_0^h $(h = 1, 2, 3)$ trois transformations définies par $x_i = F_i^h(x')$, $y'_j = g_j^h(y)$, et $T_0^3 = T_0^1 T_0^2$. Il est clair que l'on a aussi $T_m^3 = T_m^1 T_m^2$. Comme les trois T_m^h s'expriment par des formules analogues, où les 2M paramètres sont les dérivées des fonctions F_i^h et g_j^h, les transformations T_m forment un 2M-groupe [16].

8. Les transf. ∞les de ce groupe se détermineront comme au n° 2. Supposons que T_0 parcourt le 1-groupe $\{X + Y_0\}$, où $X = \Sigma\xi_i(x)p_i$, $Y_0 = \Sigma\eta_j(y)q_j$. Les coefficients du prolongement au premier ordre $U = \Sigma\eta_{bi}q_{bi}$ s'obtiendront en appliquant l'opération $X + Y_0 + U$ à l'équation de Pfaff $dy_b = \Sigma y_{bi}dx_i$, ce qui donne, comme au n° 2,

$$(14)\quad \eta_{bi} = \partial\underline{\eta_b}/\partial x_i - [\partial(\underline{Xy_b})/\partial x_i - Xy_{bi}] = \Sigma(\partial\eta_b/\partial y_k)y_{ki} - \Sigma(\partial\xi_n/\partial x_i)y_{bi}.$$

Pour l'ordre 2, on aura de même

$$(15)\qquad \eta_{bij} = \partial\underline{\eta_{bi}}/\partial x_j - [\partial(\underline{Xy_{bi}})/\partial x_j - Xy_{bij}]$$

avec

$$\partial\underline{\eta_{bi}}/\partial x_j = \Sigma\Sigma(\partial^2\eta_b/\partial y_k\partial y_h)y_{ki}y_{hj} + \Sigma(\partial\eta_b/\partial y_k)y_{kij}$$
$$- \Sigma(\partial^2\xi_h/\partial x_i\partial x_j)y_{bi} - \Sigma(\partial\xi_h/\partial x_i)y_{bij},$$

$$[\quad] = \Sigma(\partial\xi_h/\partial x_j)y_{bih} + \Sigma\xi_h(\partial y_{bih}/\partial x_j - \partial y_{bij}/\partial x_h) = \Sigma(\partial\xi_h/\partial x_i)y_{bih},$$

et ainsi de suite. Les formules ainsi obtenues jusqu'à l'ordre m

dépendent linéairement de 2 M symboles, analogues à ceux qui jouent le rôle de paramètres dans les transformations finies, à savoir les $D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\xi_i$, et $D_j(\beta_1, \ldots, \beta_n)\eta_j$, où $\Sigma\beta_k$ parcourent 1, ... m. Ainsi la transf. ∞le générale du groupe peut se mettre sous la forme

$$\Sigma[D_i(\alpha \ldots \alpha_n)\xi_i/\alpha_1! \ldots \alpha_n!]\mathfrak{A}_i(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$$
$$+ \Sigma[D_j(\beta_1 \ldots \beta_n)\eta_j/\beta_1! \ldots \beta_n!]\mathfrak{B}_j(\beta_1 \ldots \beta_n).$$

Or, si l'on prend $X = \alpha_i p_i$, $\alpha_i = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, et $Y_0 = 0$, si l'on prolonge à l'ordre m, et si l'on fait $x_1 = \ldots = 0$, on obtient précisément $\mathfrak{A}_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dont le coefficient se réduit à 1, tandis que tous les autres deviennent nuls. De même, si l'on prend $X = 0$, $Y_0 = \beta_j q_j$, $\beta_j = y_1^{\beta_1} \ldots y_n^{\beta_n}$, si l'on prolonge a l'ordre m, et si l'on fait $y_1 = \ldots = 0$, on obtient precisement $\mathfrak{B}_j(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Or on voit directement que les M transf. ∞les $\alpha_i(\alpha)p_i$ ($i = 1, \ldots, n$; $\Sigma\alpha_k = 1, \ldots, m$) engendrent un M-groupe, qu'il en est de même des $\beta_j(\beta)q_j$, et que ces deux groupes ont même structure. On a aussi évidemment $(\alpha_i p_i, \beta_j q_j) = 0$. Toutes ces relations subsistant pour $(x) = (y) = (0)$; on en conclut que le 2 M-groupe obtenu est produit direct de deux M-groupes isomorphes G_i et G_j, respectivement engendrés par les $\mathfrak{A}_i(\alpha)$ et les $\mathfrak{B}_j(\beta)$ [16].

9. Les transformations finies de G_i s'obtiendront en supposant que T_0 laisse inaltérées les y_j, en sorte que la formule (11), pour l'ordre 1, devient

$$(16) \qquad \partial y_j/\partial x'_i = \Sigma(\partial F_a/\partial x'_i)(\partial y_j/\partial x_a) = \Sigma F_{ai} y_{ja},$$

et la formule relative à l'ordre 2 est

$$(17) \qquad \partial^2 y_j/\partial x'_i \partial x'_h = \Sigma F_{aih} y_{ja} + \Sigma\Sigma F_{ai} F_{bh} y_{jab},$$

et ainsi de suite. On voit que, pour chaque y_j, on obtient un M-groupe lineaire à M/n variables.

Les transformations finies de G_j s'obtiendront en supposant que T_0 laisse inaltérées les x_i. Pour l'ordre 1, on a

$$(18) \qquad \partial y'_j/\partial x_i = \Sigma(\partial y_a/\partial x_i)(\partial g_j/\partial y_a) = \Sigma y_{ai} g_{ja},$$

et, pour l'ordre 2,

$$(19) \qquad \partial^2 y_j/\partial x_i \partial x_h = \Sigma y_{aih} g_{ja} + \Sigma\Sigma y_{ai} y_{bh} g_{jab},$$

et ainsi de suite. En comparant les formules, on voit que celles d'un des groupes se déduisent de celles de l'autre en échangeant simplement variables et parametres [16].

10. Le groupe G_y est transitif sur les M/n dérivées d'un y. Supposons en effet qu'il ait un invariant, fonction de ces dérivées, que je représenterai par $I[y]$. Comme $f_1(x)$ et x'_1 sont les deux expressions d'une même fonction par les variables x et par les variables x', on aura $I[f_1(x)] = I[x'_1]$. La fonction $f_1(x)$, complètement arbitraire, vérifie donc une équation aux dérivées partielles à coefficients et second membre numériques complètement déterminés, ce qui est impossible.

Ainsi le groupe G_x sur les M dérivées des n fonctions y_j est régulier (VIII, 3). Il en est de même pour G_y. On le voit en considérant les deux systèmes d'expressions de n mêmes fonctions données par x_i et $g_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Un invariant donnerait $I[x_1, \ldots, x_n] = I[g_1(x), \ldots, g_n(x)]$, équation aux dérivées partielles numérique vérifiée par n fonctions completement arbitraires.

Ces deux groupes réguliers isomorphes sont donc semblables (VIII, 3). Ce sont deux groupes réguliers réciproques (VII, 8).

11. Considérons en particulier n fonctions x_i d'une variable t, en sorte que le point (x) décrit une courbe C. Soit T_0 une transformation sur les variables x_i, laissant t inaltérée, et représentée par $x'_i = f_i(x)$. Si l'on pose $dx_i/dt = y_i$, $dx'_i/dt = y'_i$, $\partial f_i/\partial x_k = f_{ik}$, le prolongement d'une transformation finie est donné, d'apres (16), par $y'_i = \Sigma f_{ik} y_k$, et celui d'une transf. ∞le $X = \Sigma \xi_i(x) p_i$ est, d'après (14), $Y = \Sigma \eta_i(x, y) q_i$, $\eta_i = \Sigma(\partial \xi_i/\partial x_k) y_k$. Si, dans un r-groupe G, les X_b $(b = 1, \ldots, r - r_0)$ sont les transf. ∞les d'ordre > 0 en un point (m) et par suite engendrent le stabilisateur H de ce point, si les X_a $(a = 1, \ldots, r_1 - r_0)$ sont exactement d'ordre 1 en (m) (V, 4), les Y_b $(b > r_1 - r_0)$ se réduisent à 0 au point (m) et les Y_a à $\Sigma \eta_{ai}(m, y) q_i$. Ces Y_a engendrent un $(r_1 - r_0)$-groupe K, homomorphe au $(r - r_0)$-groupe H, et dont les variables y_i sont les coefficients directeurs des éléments linéaires issus de (m). L'action de K sur les points $[y]$ représente celle de H sur ces eléments linéaires.

On voit que les $\eta_{ai}(m, y)$ s'obtiennent en remplaçant $x_k - m_k$ par y_k dans la partie linéaire du développement des $\xi_{ai}(x) - \xi_{ai}(m)$

au voisinage de (m). Le groupe K sera dit *le groupe linéaire réduit du groupe* G *relatif au point* (m).

12. Soit un changement de variables réversible

$$(20)\quad y_i - b_i = \Sigma a_{ik}(x_k - a_k) + \ldots, \qquad x_i - a_i = \Sigma b_{ik}(y_k - b_k) + \ldots,$$

transformant (a) en (b), et un groupe G_x en un groupe G_y. On voit que les groupes linéaires réduits respectifs de G_x et G_y relativement aux points (a) et (b) sont transformés l'un dans l'autre par la partie linéaire de (20) [2, p. 602].

Si le groupe G_y est le même que le groupe G_x, c'est-à-dire si la transformation T, représentée par (20), est permutable au groupe G, les groupes linéaires réduits de G relatifs aux points a et b sont transformés l'un de l'autre par une transformation linéaire (la partie linéaire de T). Ce cas se présente toujours si T est une transformation de G. Si donc G est transitif, tous ses groupes linéaires réduits, conjugués dans le groupe linéaire homogène général, appartiennent au même type.

CHAPITRE X.

LE GROUPE PROJECTIF. LES GROUPES LINÉAIRES

1. Le P_n (*groupe projectif à n dimensions*) est le groupe des transformations

$$(1)\qquad x'_i = (\Sigma a_{ik} x_k + b_i)/(\Sigma c_k x_k + f) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Si l'on pose (II, 3) $a_{ii} = 1 + t\alpha_{ii}$, $a_{ik} = t\alpha_{ik}$, $b_i = t\beta_i$, $c_k = t\gamma_k$, $f = 1 + \varphi$, on voit les $n(n+2)$ transf. ∞les indépendantes $T_i = p_i$, $T_{ki} = x_k p_i$, $V_k = x_k \Sigma x_i p_i$. On voit [2, p. 554] les relations de structure

$$(2)\left\{\begin{array}{lll} (T_i\, T_k) = 0, & (T_i\, T_{kh}) = \varepsilon_{ik} T_h, & (T_i\, V_k) = T_{ki} + \varepsilon_{ik} \Sigma T_{ll}, \\ (T_{ik}\, T_{lh}) = \varepsilon_{kl} T_{ih} - \varepsilon_{ih} T_{lk}, & (T_{ik}\, V_h) = \varepsilon_{kh} V_i, & (V_h\, V_k) = 0, \end{array}\right.$$

Le groupe admet [2, p. 555] l'automorphisme $V_i \sim T_i$, $-T_{ki} \sim T_{ik}$, $T_i \sim V_i$.

2. Le L_n (*groupe linéaire général à n dimensions*) est le groupe engendré par les T_i et T_{ki}, des transformations

(3) $$x'_i = \Sigma a_{ik} x_k + b_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Le LH_n (*groupe linéaire homogène*) est, dans le L_n, le stabilisateur de l'origine, engendré par les T_{ki}, donné par $b_i = 0$.

Le L_n et le LH_n ont chacun un diviseur unimodulaire caractérisé par $|a_{ik}| = 1$, d'où $\Sigma\alpha_{ii} = 0$. On obtient ainsi le SL_n (*groupe linéaire spécial*) $[n(n+1)-1]$-groupe engendré par les T_i, T_{ik} $(i \neq k)$ et les $U_j = x_j p_j - x_n p_n$; puis le SLH_n (*groupe linéaire homogène spécial*), $(n^2 - 1)$-groupe engendré par les T_{ik} $(i \neq k)$ et les U_j.

3. On voit directement que LH_n a l'unique transf. ∞le distinguée $U = \Sigma x_i p_i$, $\{U\}$ est le groupe des homothéties de centre (o) $x'_i = a x_i$. Les n variables x_i peuvent définir, soit comme coordonnées ordinaires, un point (x) de l'E_n (espace à n dimensions), soit, comme coordonnées homogenes, un point $[x]$ de l'E_{n-1}, dont les coordonnées ordinaires sont, par exemple, $y_k = x_k/x_n$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. En considerant l'action de LH_n et de SLH_n sur les droites issues de (o) dans l'E_n, ou sur les points (y) de l'E_{n-1}, on voit que $P_{n-1} \equiv LH_n | \{U\} \equiv SLH_n$ [2, p. 558].

A la transf. ∞le générale $X = \Sigma a_{ik} T^n_{ik}$ de LH_n correspond, dans P_{n-1}, $Y = \Sigma b_i T^{n-1}_i + \Sigma b_{jh} T^{n-1}_{jh} + \Sigma c_j V^{n-1}_j$, ou $b_j = a_{nj}$, $b_{jh} = a_{jh} - \varepsilon_{jh} a_{nn}$, $c_j = -a_{jn}$. On voit qu'à ΣT^n_{ii} de LH_n correspond o de P_{n-1}. Inversement, a Y de P_{n-1} correspond, dans LH_n, X, où les a_{ik} $(i \neq k)$ sont completement déterminés, mais les a_{ii} seulement par $a_{jj} - a_{nn} = b_{jj}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$. Si X doit être dans SLH_n, c'est-à-dire $a_{jj} + a_{nn} = 0$, il est alors complètement determiné par Y.

4. Étant données, dans L_n, m transf. ∞les indépendantes d'ordre 0, $S_h = \Sigma b_{hi} T_i$, on voit directement que toute transformation $x'_i = \Sigma a_{ik} x_k$, si l'on assujettit ses coefficients à vérifier

$$\Sigma b_{hi} a_{ki} = \varepsilon_{hk} \qquad (h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n),$$

transforme chaque S_h en T_h. Si donc H est un diviseur normal de P_n ou de L_n, et $S = \Sigma\alpha_i T_i + \Sigma\beta_{ik} T_{ik} + \Sigma\gamma_i V_i$ une de ses transf. ∞les, H doit contenir les alternées $(T_a\, S)$ et $(T_b\, (T_a\, S))$, dont une au moins est d'ordre o; par suite H contient toutes les T_i.

Si H est normal dans P_n, il contient toutes les alternées $(T_i\, V_k) = T_{ki}$ $(i \neq k)$, et $(T_i\, V_i) = T_{ii} + \Sigma T_{ij}$, puis toutes les $(T_i\, V_i) - [1/(n+1)]\Sigma(T_j\, V_j) = T_{ii}$, puis toutes les alternées $(T_{ii}\, V_i) = V_i$. Donc $H = P_n$: P_n *est toujours simple* [2, p. 559]. Il en est de même de $SLH_n \equiv P_{n-1}$.

Il en résulte que tout diviseur normal $K \neq SLH_n$ de LH_n est premier avec SLH_n, sans quoi leur p. g. c. d. serait normal dans SLH_n. Donc K ne peut être qu'un 1-groupe engendré par une transf. ∞le distinguée; donc $K = \{U\}$, et LH_n *a les deux seuls diviseurs normaux* SLH_n *et* $\{U\}$ *dont il est produit direct* [2, p. 561].

Si H est normal dans L_n, ses transf. ∞les d'ordre 1 engendrent un groupe K, qui, devant être normal dans LH_n, est SLH_n ou $\{U\}$. Les seuls diviseurs normaux de L_n sont donc $\{T_1, \ldots, T_n\} = \mathfrak{T}$ (groupe des translations), $\{\mathfrak{T}, U\}$ (groupe des homothéties), et $\{\mathfrak{T}, SLH_n\}$ (groupe linéaire spécial) [2, p. 562].

Tout k-sous-groupe de LH_n non contenu dans SLH_n, et ne contenant pas U, peut être engendré par $Y_1 = X_1 + aU$, $X_2, \ldots, X_k$, a étant $\neq 0$, $X_1, \ldots, X_l$ étant indépendantes et appartenant à SLH_n. On doit avoir $(Y_1\, X_j) = c_{1j1} Y_1 + \Sigma_2^l c_{1jh} X_h$. Comme $(Y_1\, X_j) = (X_1\, Y_j)$ doit être dans SLH_n, il faut $c_{1j1} = 0$. De même

$$(X_i\, X_j) = \Sigma_2^l c_{ijh} X_h \qquad (i, j = 2, \ldots, k)$$

Ainsi $X_1, \ldots, X_k$ engendrent un k-groupe contenu dans SLH_n et contenant normalement un $(k-1)$-groupe. C'est impossible pour $k = n^2 - 1$. Ainsi SLH_n est le seul (n^2-1)-groupe contenu dans LH_n et ne contenant pas U.

5. Pour qu'un point $[x]$ soit fixé par $\{X\}$, ou $X = \Sigma \xi_i p_i$, $\xi_i = \Sigma a_{ik} x_k$, il faut et suffit que la trajectoire du point (x) soit la droite $(0) - (x)$, c'est-a-dire que l'on ait :

$$(4) \qquad 0 = \xi_i - \rho x_i = \Sigma(a_{ik} - \rho\varepsilon_{ik}) x_l, \quad \text{d'ou} \quad 0 = \Delta(\rho) = |a_{ik} - \rho\varepsilon_{ik}|.$$

On voit donc que $\{X\}$ stabilise au moins un point $[x]$, et que, dans tous les cas, l'ensemble des points stabilisés se compose d'un nombre fini de variétés planes (pouvant se réduire à des points) correspondant aux racines distinctes de $\Delta(\rho)$. Il en est de même, relativement aux points (y), pour tout 1-groupe de P_{n-1}.

On peut toujours choisir le système de référence de manière que l'un des points fixés par $\{Y\}$ soit $(y)=(0)$, en sorte que $[x]=[0,\ldots,0,x_n]$. Alors, d'après la forme générale de $Y(2)$ correspondant ici à $X=\Sigma a_{ik}T''_{ki}$, on a $b_j=a_{jn}=0$ $(j=1,\ldots,n-1)$. Alors, dans l'E_{n-1} des points (y), l'action de $\{Y\}$ sur les droites issues de (0) est celle de son groupe linéaire réduit (IX. 4) $\{Y_1\}$, $Y_1=\Sigma b_{jh}T''^{\,1}_{jh}$, $b_{jh}=a_{hj}-\varepsilon_{hj}a_{nn}$. Ce 1-groupe du LH_{n-1} fixe au moins un point $[y]$ de l'E_{n-1}, c'est-à-dire au moins une droite issue de O, ou un point (z) $(z_h=y_h/y_{n-1})$ de l'E_{n-2}. On prendra de nouveau ce point pour origine, et ainsi de suite. On voit ainsi que, dans l'E_{n-1} des points $[x]$, tout 1-groupe de LH_n, ou dans l'E_{n-1} des points (y), tout 1-groupe de P_{n-1} fixe au moins un point, au moins une droite passant par ce point, au moins un 2-plan contenant cette droite, et ainsi de suite, jusqu'à un $(n-1)$-plan [2, p. 585].

6. Les variétés de l'E_{n-1} des points $[x]$ ou (y) dont un diviseur de LH_n ou de P_{n-1} stabilise tous les points sont dites *totalement stabilisées* par ce groupe. Leur nombre est évidemment fini. On en conclut que, si H est normal dans un r-sous-groupe G de P_{n-1}, G stabilise (non totalement) chacune des variétés totalement stabilisées par H. Si, en particulier $G=\{H, X\}$, on voit que $\{X\}$, et par suite G, stabilise au moins un point de chacune de ces variétés [2, p. 587].

En appliquant ce résultat au groupe adjoint (III. 6) d'un r-groupe G, on démontre que tout 1-groupe $\{X\}$ de G est toujours contenu dans un 2-sous-groupe $\{X, Y\}$ de G [2, p. 591], et que tout 2-sous-groupe de G, auquel on peut toujours supposer la structure $(X\,Y)=cX$, est toujours contenu dans un 3-sous-groupe de G.

7. Il résulte de IX-12 que, si un groupe G est transitif, ses groupes linéaires réduits, tous conjugués dans LH_n, appartiennent au même type. Deux groupes transitifs sont dits *de même classe* quand ils ont même type de groupe linéaire réduit.

Si les groupes linéaires réduits sont du type LH_n ou SLH_n, G aura en O, supposé point ordinaire, toujours n transf. ∞les d'ordre 0, pour lesquelles on peut toujours prendre $T_i=p_i+\ldots$, puis, comme transf. ∞les d'ordre 1 : toujours les $T_{ik} = t_{ik} + \ldots$, $t_{ik} = x_i p_k$ $(i \neq k)$; et : dans le premier cas, les $T_{ii} = t_{ii} + \ldots$; dans le second cas, les $U_j = u_j + \ldots$, $u_j = t_{jj} - t_{nn}$. On démontre [2, p. 623] que G ne peut avoir aucune transf. ∞le d'ordre > 2. que, s'il en a d'ordre 2, il a exactement les n indépendantes $V_i = v_i + \ldots$, $v_i = x_i u$, $u = \Sigma x_k p_k$, et contient alors $U = u + \ldots$.

Trois cas sont alors à distinguer :

1° Le groupe linéaire réduit est du type LH_n, mais G n'a aucune transf. ∞le d'ordre 2; il résulte alors de VIII-9 que G est semblable à L_n;

2° Le groupe linéaire réduit est du type LH_n, et G a des transf. ∞les d'ordre 2; pour la même raison, il est semblable à P_n;

3° Le groupe linéaire reduit est du type SLH_n; alors G est engendré par les T_i, les T_{ik} $(i \neq k)$ et les U_j. On démontre alors que l'on peut en remplaçant chaque T_i par $T_i +$ une combinaison convenable, des T_{ik}, ramener la structure de G à celle de SL_n [2, p. 630]. Donc (VIII, 4), G est semblable à SL_n.

8. De ces résultats peut se déduire que *tout groupe à n variables dont la transitivité atteint son maximum* $n + 2$ (VIII, 7) *est semblable au* P_n [3, p. 308]. Il résulte d'abord de 6 que l'hypothèse envisagée au VII-7, ou le groupe G_m engendré par les transf. ∞les d'ordre maximum de G serait transitif, et par suite G_1 semblable à L_n, ne peut pas se présenter. Alors en effet le type linéaire de groupe réduit de G_1, et par suite de G, serait LH_n; et G serait (6) semblable à P_n. Mais G_1 ne peut être semblable en même temps à L_n qui est primitif, et au stabilisateur d'un point dans P_n, qui est imprimitif. L'étude du cas où G_m est intransitif, et par suite G_1 imprimitif, conduit au résultat énoncé.

9. En dehors de L_n et ses diviseurs SL_n, LH_n, SLH_n, le P_n a un certain nombre de diviseurs remarquables, dont chacun est caractérisé par un invariant, différentiel ou non, ayant une signification géométrique.

La transf. ∞le générale de P_n, ou transf. ∞le projective générale, est

$$X = \Sigma \alpha_i T_i + \Sigma \beta_{ki} T_{ki} + \Sigma \gamma_h V_h.$$

Son prolongement à l'ordre 1 donne

$$Y = \Sigma\beta_{ki}y_k q_i + \Sigma\gamma_h(y_k\Sigma x_i - x_h\Sigma y_i q_i)$$

10. Soit une forme quadratique à coefficients constants, que l'on peut toujours, par une transformation projective réelle ou imaginaire. ramener à la forme Σdx_i^2. Le groupe total ou propre de cette forme est tel que son prolongement à l'ordre 1 est groupe total ou propre de la forme $F = \Sigma y_i^2$, c'est-à-dire que YF doit être divisible par F. ou nul. Ces conditions donnent la transf. ∞le générale du groupe demandé

$$X = \Sigma\beta_{ik}(x_i p_k - x_k p_i) + \beta\Sigma x_i p_i + \Sigma\alpha_i p_i$$

Le groupe total est le $[n(n+1)/2+1]$-groupe S_n des transformations par similitude d'un n-espace euclidien. Pour $\beta = 0$, on a le $[n(n+1)/2]$-groupe D_{n0} des déplacements de cet espace.

11. Une $(n-1)$-quadrique non dégénérée et ne contenant aucune droite réelle, a une équation que l'on peut toujours, par une transformation projective réelle, ramener à la forme $\Sigma x_i^2 + h = 0$ $(h = \pm 1)$. Il faut que XF soit divisible par F, ce qui donne pour la transf. ∞le générale de son groupe total.

$$X = \Sigma\beta_{ik}(x_i p_k - x_k p_i) + \Sigma\alpha_k(p_k + hV_k).$$

Ces deux groupes $(h = \pm 1)$ sont les $[n(n+1)/2]$-groupes D_{nh} de déplacements des n-espaces à métrique cayleyenne. Le groupe projectif d'une $(n-1)$-quadrique sera en général designé par Q_n.

12. Un complexe linéaire non dégénéré (c'est-a-dire tel qu'il n'existe aucune droite rencontrant toutes les droites du complexe) ne peut exister que dans un $(2n+1)$-espace. Ses droites sont courbes intégrales d'une équation de Pfaff. que l'on peut toujours, par une transformation projective, ramener à la forme

$$dz + \Sigma\Sigma(y_i dx_k - x_i dy_k) = 0,$$

les coordonnées d'un point étant $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z$. Les transf. ∞les du groupe conservant ce complexe, groupe total de cette forme de Pfaff, sont celles de P_{2n+1} qui prolongées à l'ordre 1, en désignant les nouvelles variables par u_i, v_k, w conservent l'équation $w + \Sigma(y_i u_k - x_i v_k) = 0$. On trouve ainsi que la transf. ∞le générale du groupe cherché C_{2n+1} est :

$$X = \Sigma \alpha_i(p_i - y_i r) + \Sigma \beta_i(q_i + x_i r) + \gamma r + \Sigma \gamma_{ik}(x_i p_k - y_k q_i) + \Sigma \varepsilon_{ik}(x_i q_k + x_k q_i) + \Sigma \eta_{ik}(y_i p_k + y_k p_i) + \Sigma \lambda_i(z p_i - y_i U) + \Sigma \mu_i(z q_i + x_i U) + \nu(z r + U) + \rho z U.$$

13. Tous ces groupes sont primitifs. De plus, il n'existe aucune transformation non projective transformant SL_n, S_n, D_{nh}, C_{2n+1} en un groupe projectif [3, p. 283].

14. D'autres diviseurs remarquables du P_n ou du LH_{n+1} sont ceux qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane du $(n-1)$-espace des points $[x]$ ou (y) (groupes linéaires s. m. p. i.).

Les diviseurs s. m. p. i. du SLH_{n+1}, donc ceux du P_n, sont simples ou semi-simples; et tout diviseur s. m. p. i. du LH_n n'appartenant pas au SLH_n est produit direct d'un diviseur s. m. p. i. du SLH_n par le 1-groupe $\{\Sigma x_i p_i\}$ [19].

Tout groupe linéaire s. m. p. i. simple s'obtient de la maniere suivante [20]. Pour toute structure simple de rang (VI, 2) k, il existe un systeme de k groupes linéaires s. m. p. i. dits *fondamentaux de cette structure;* soient L^j $(j = 1, \ldots, k)$, engendres par les X^j_h $(h = 1, \ldots, k)$ ces divers groupes, et $\mathcal{L}$ le groupe engendré par les $\mathfrak{X}_h = \Sigma X^j_h$. Parmi les variables, en nombre n_j, sur lesquelles opère L^j, les propriétés de l'équation caractéristique permettent de choisir une variable *dominante* x^j_1. Considérons alors le monome $(x^1_1)^{p_1} \ldots (x^j_1)^{p_k}$, les exposants etant des nombres arbitraires non négatifs. La transformation générale de $\mathcal{L}$ transforme ce monome en un polynome homogène de degré Σp_j par rapport aux Σn_j variables des L^j. Ces polynomes, dont les coefficients dépendent des r parametres de $\mathcal{L}$, s'expriment linéairement en fonction de m d'entre eux P_a $(a = 1, \ldots, m)$, lesquels sont linéairement indépendants, m étant au plus égal au nombre maximum des termes d'un tel polynome. L'action de $\mathcal{L}$ sur ces polynomes P_a est un groupe linéaire s. m. p. i. de la structure simple considérée, et tout groupe linéaire s. m. p. i. de cette structure s'obtient de cette maniere.

Si G_1 et G_2 sont deux groupes linéaires simples s. m. p. i. opérant respectivement sur les variables x_i et y_k $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$, leur produit direct est un groupe linéaire opérant sur les mn produits $x_i y_k$; il est semi-simple s. m. p. i.

Si $G_a (a = 1, \ldots, q)$ sont q groupes linéaires simples s. m. p. i. opérant respectivement sur les variables $x^a_{i_a}$, leur produit direct, opérant sur les produits $P x^a_{i_a}$ est semi-simple s. m. p. i. Tout groupe linéaire semi-simple s. m. p. i. s'obtient de cette manière.

15. Il y a (VI, 5) quatre types généraux de structures simples de rang k.

Pour le type A, le groupe fondamental L^j est l'action de P_k sur les $(j - 1)$-variétés linéaires du k-espace.

Pour le type B, L^2 est Q_{2k}; L^1 opere sur $2k$ variables. il représente l'action de L^2 sur des $(k - 1)$-variétés linéaires. contenues dans la $(2k - 1)$-quadrique invariante par L^2. L^j $(j = 3, \ldots, k)$ est l'action de L^2 sur les $(j - 2)$-variétés linéaires du $2k$-espace.

Pour le type C. L^1 est le C_{2k-1}, L^j est l'action de L^1 sur les $(j - 1)$-variétés du $(2k - 1)$-espace.

Pour le type D, L^1 est Q_{2k-1}; L^1 et L^2 operent chacun sur $2k - 1$ variables; L^j $(j = 4, \ldots, k)$ est l'action de L^3 sur les $(j - 3)$-variétés linéaires du $(2k - 1)$-espace [20].

CHAPITRE XI.

GROUPES DE LA DROITE, DU PLAN ET DE L'ESPACE.

1. Le nombre de parametres d'un groupe à une variable est $\leqq 3$ (V, 7). Tout 1-groupe est toujours (III. 4) semblable à $\{p\}$: groupe des $x' = x + a$. Prenant ensuite X_h, d'ordre h, sous la forme $X_h = (x^h + \ldots)p$, on voit que les structures des 2-groupes et 3-groupes peuvent se ramener respectivement aux formes $(X_0\, X_1) = X_0$; et $(X_0\, X_1) = X_0$, $(X_0\, X_2) = 2X_1$, $(X_1\, X_2) = X_2$. Ces groupes transitifs sont isomorphes, avec correspondance du stabilisateur de l'origine, donc semblables à $L_1 = \{p, xp\}$ et $P_1 = \{p. xp, x^2 p\}$ [4, p. 374].

2. Si $P_1 = \{X_1, X_2, X_3\}$. $X_h = x^{h-1}p$, il résulte de la structure de P_1 que les transf. ooles de son groupe adjoint (III, 6) sont, si $f_i = \partial / \partial e_i$,

$$E_1 = - e_2 f_1 - 2 e_3 f_2, \qquad E_2 = e_1 f_1 - e_3 f_3, \qquad E_3 = 2 e_1 f_2 + e_2 f_3.$$

Le groupe adjoint homogène s'obtient par adjonction de $E_0 = \Sigma e_i f_i$.

Sa matrice est en général de rang 3 ; son rang s'abaisse à 2 si $[e]$ appartient à la conique $e_2^2 - 4e_1e_3 = 0$, et ne s'abaisse à 1 pour aucun point $[e]$. D'où (VII. 4) deux variétés invariantes minimum : tout le plan et la conique, et deux classes de 1-groupes conjugués, respectivement représentées par $\{xp\}$ répondant à $[0, 1, 0]$ et $\{p\}$ répondant à $[1. 0, 0]$.

Cette distinction répond au nombre des points x que fixent les 1-groupes. Les points fixés par $\{X\}$, $X = (e_1 + e_2x + e_3x^2)p$ sont les zéros du coefficient de p. Ils sont distincts ou confondus suivant que $[e]$ est un point ordinaire du plan, ou un point de la conique.

On voit ensuite que si deux transf. ∞les répondent à $[e^1]$ et $[e^2]$, leur alternée répond au pôle de la droite de ces deux points relativement à la conique. Elles engendrent donc un 2-groupe toujours et seulement si cette droite contient son pôle, c'est-à-dire est tangente à la conique. Comme le groupe adjoint permute transitivement les points — et par suite les tangentes — de cette conique, il n'y a qu'une classe de 2-groupes conjugués, représentée par exemple par $\{X_1, X_2\}$, correspondant à la tangente $e_3 = 0$. On voit que chacun de ces 2-groupes fixe un point x et un seul.

3. Un principe de classification des groupes G du plan est fourni par la considération de leur groupe linéaire réduit K (X, 4) et de son action L sur les éléments linéaires issus d'un point, qui dépendent d'un seul paramètre.

Si L ne se réduit pas à la transformation identique. il est semblable (1), soit à P_1, qui est transitif, soit à L_1, qui fixe un seul point, soit à un 1-groupe de P_1, qui en fixe deux, distincts ou confondus. On voit [4, p. 384] que G est primitif ou imprimitif suivant que L a trois ou moins de trois parametres. Si L est un 2-groupe, G n'a qu'une famille de courbes d'imprimitivité; si L est un 1-groupe. G en a deux. distinctes ou confondues ; si L se réduit à la transformation identique. G en a une infinité, qui dépendent d'un paramètre, si G est transitif. d'une fonction arbitraire, s'il est intransitif [3, p. 60].

Analytiquement, si G est un r-groupe engendre par les $X_h = \xi_h p + \eta_h q$, la recherche des équations différentielles de ses courbes d'imprimitivité revient [3, p. 61] à la détermination, dans le 4-espace des points (x, y, x', y'), des 3-variétés, a équation de la forme

$$a(x. y)\cdot x' + b(x, y)y' = 0,$$

invariantes par le $(r+1)$-groupe $H' = \{G', U'\}$, où U' désigne $x'p' + y'q'$ et G' le groupe G prolongé, engendré (IX, 2) par les $X'_h = X_h + \xi'_h p' + \eta'_h q' = X_h + (D\xi_h)p' + (D\eta_h)q'$. Le polynome $ax' + by'$ sera, ou bien un invariant de H', ou bien (VII, 4) un diviseur commun des déterminants de même degré de la matrice de H', déterminants qui sont, en x' et y', des polynomes homogènes de degré $\leqq 2$.

On voit [3, p. 60] que : pour H' transitif, G admet 0, 1, 2 familles d'imprimitivité suivant que le p. g. c. d. des déterminants de degré 4 est de degré 0, 1, 2; pour H' intransitif, si G est transitif, l'unique invariant de H' détermine une infinité, dépendant d'un paramètre, de familles d'imprimitivité de G; si G est intransitif, le p. g. c. d. des déterminants de degré 3 donne, pour G, une ou deux familles d'imprimitivité. Le cas d'une famille d'imprimitivité dépendant d'une fonction arbitraire se présente quand G est un 1-groupe.

4. Ici K est LH_2 ou un de ses diviseurs. Pour que L soit un 3-groupe, il faut et suffit que K soit ou LH_2, ou un 3-sous-groupe de LH_2 ne contenant pas $u' = x'p' + y'q'$, c'est-à-dire (X, 4) SLH_2. Si $K = LH_2$, G est (X, 6) semblable à P_2 ou L_2. Si $K = SLH_2$, G est semblable à SL_2. Ce sont les trois seuls types de groupes primitifs du plan.

5. Avant d'appliquer la classification du n° 3, il est avantageux de ramener G à un petit nombre de formes simples. On peut toujours choisir les variables de manière qu'une des familles de courbes d'imprimitivité de G soit représentée par $x = l$. Il en résulte (X, 6) que X_h a la forme $f_h(x)p + g_h(x, y)q$. Les $\underline{X}_h = f_h(x)p$ engendrent l'action J de G sur ses droites d'imprimitivité. J, qui opère sur une seule variable, ou bien se réduit à la transformation identique, ou bien peut, par un changement de cette variable, prendre l'une des formes $\{p\}$, $\{p, xp\}$, $\{p, xp, x^2p\}$ (1). Si G_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ désigne la forme réduite de G correspondant au cas où J est un i-groupe, on voit que G_0 est engendré par les $X_h = g_h q$ $(h = 1, \ldots, r)$ puis G_i $(i = 1, 2, 3)$ par les $X_j = x^{j-1}p + g_j q$ $(j = 1, \ldots, i)$ et les $X_h = g_h q$ $(h = i+1, \ldots, r)$. Les X_h engendrent toujours le diviseur de G, du type G_0, qui fixe toutes les droites d'imprimitivité. Et les

relations de structure montrent que G_i contient toujours un $(r-1)$-groupe de type G_{i-1}, obtenu en supprimant X_i.

6. On peut ainsi, de proche en proche, en utilisant les conditions imposées par les relations de structure, ramener les $g_h(x, y)$ à un petit nombre de formes-types simples [4, p. 411-425; 3, p. 39-52]. On reconnaîtra ensuite si les groupes obtenus sont distincts ou non, en déterminant, par le procédé du n° 3, leurs diverses familles d'imprimitivité [3, p. 58].

7. Les points $[x, y, z]$ fixés par le 1-groupe du LH_1 engendré par $(ax+by+cz)p+(a'x+b'y+c'z)q+(a''x+b''y+c''z)r$ sont (X, 4) les points vérifiant

$$(a-\rho)x+by+cz=a'x+(b'-\rho)y+c'z=a''x+b''y+(c''-\rho)z=0.$$

Les droites $ux+vy+wz=0$ fixées par ce 1-groupe sont celles dont les coefficients vérifient

$$(a-\rho)u+a'v+a''w=bu+(b'-\rho)v+b''w=cu+c'v+(c''-\rho)w=0.$$

Dans les deux cas, on a, pour déterminer ρ, une même équation $\Delta(\rho)=0$. Si les trois racines du déterminant sont distinctes, le 1-groupe fixe les trois sommets et côtés d'un triangle. S'il y a une racine double ou triple, le rang du déterminant, pour cette racine, peut-être 2 ou 1; d'ou 4 cas. Pour racine double et rang 2, le 1-groupe fixe un point A comptant pour deux, un point B, la droite AB comptant pour deux, et une droite passant par A. Pour racine double et rang 1, le 1-groupe fixe tous les points d'une droite (D) et toutes les droites passant par un point A hors de (D). Pour racine triple et rang 2, le 1-groupe fixe un point comptant pour trois, et une droite passant par ce point, comptant aussi pour trois. Pour racine triple et rang 1, le 1- groupe fixe tous les points d'une droite (D) et toutes les droites passant par un point A de (D).

Il y a donc, dans LH_1, et par suite dans P_2, 5 types distincts de 1-groupes. Pour les quatre derniers, on voit que la transf. ∞le est complètement déterminée par les éléments fixés, et qu'on peut toujours, par une transformation projective, donner à ces éléments une position arbitraire. Tous les 1-groupes de même type sont donc conjugués dans P_2. On peut prendre pour représentants $p+yq, yq, p+xq, q$.

Pour le premier type, on peut toujours ramener la transf. ∞le à la forme $xp + hyq$. Et l'on voit que $\{xp + kyq\}$ ne peut être conjugué de $\{xp + hyq\}$ que si k a l'une des six valeurs h, $1/h$, $1-h$, $1/(1-h)$, $(h-1)/h$, $h/(h-1)$ [3, p. 84].

8. Les trajectoires de ces 1-groupes sont : $y = ax^h$, $y = ae^x$, $x = a$, $y - x^2/2 = a$, $x = a$. Toute autre courbe invariante doit être totalement stabilisée. Cela ne peut arriver que pour yq et q, qui, chacune, stabilisent totalement une droite. D'ailleurs, les paraboles $y = x^2/2 + a$ rentrent, a une translation pres, dans la forme $y = ax^h$. Ainsi toute courbe invariante par un 1-groupe projectif est, ou une droite, ou une transformée projective de $y = x^h$, $h(h-1) \neq 0$, ou de $y = e^x$ [3, p. 87]. Les seules courbes invariantes par un k-sous-groupe $(k > 1)$ de P_2 sont les droites, dont chacune est invariante par un 6-gronpe conjugué de LH_2. et les coniques, dont chacune est invariante par un 3-groupe. Corrélativement, les seules familles simplement ∞es de droites invariantes par un k-sous-groupe $(k > 1)$ de P_2 ont pour enveloppe un point, et admettent un 6-groupe, ou une conique, et admettent un 3-groupe.

9. Il résulte de X-13, et l'on voit d'ailleurs directement [3, p. 94] que les seuls diviseurs s. m. p. i. de P_2 sont ses 3-sous-groupes, tous conjugués, isomorphes à P_1, dont chacun laisse invariante une conique. On en conclut que P_2 ne contient aucun 7-groupe, puis que les seuls diviseurs primitifs de P_2 sont conjugués de LH_2 ou de SLH_2. Les diviseurs de P_2 corrélatifs des deux diviseurs primitifs, sont conjugués du 6-groupe stabilisateur d'un point ou de son 5-sous-groupe normal. Tout autre diviseur de P_2 fixe une droite et un point de cette droite. Il est donc conjugué d'un diviseur du 5-groupe $\{p, q. xp, xq, yp\}$, qui fixe la droite de l'∞ et le point à l'∞ de Oy. On trouvera [3, p. 106] le tableau de ces diviseurs.

10. Parmi les groupes de l'espace ordinaire, on connaît [3] tous les groupes projectifs, et tous les groupes primitifs. De ces derniers, il n'y a que huit types, dont sept sont dans P_3 (X, 12). Le huitième est le 10-groupe des transformations conformes [3, p. 139].

CHAPITRE XII.

FONDEMENTS DE LA GÉOMETRIE.

1. Nous supposerons, avec Riemann, que la metrique d'un n-espace est définie par une forme quadratique différentielle définie positive $ds^2 = \Sigma g_{ik}(x)\,dx^i dx^k$, $g_{ik} = g_{ki}$, $g = |g_{ik}| > 0$, ainsi que tous ses mineurs symétriques. Cette forme définit le carré de la *distance* de deux points ∞t voisins.

Les transformations *isométriques* ou *déplacements* sont celles qui laissent invariante cette forme quadratique. c'est-à-dire fournissent l'identité $ds^2 = ds'^2$, ds' s'obtenant par simple substitution des nouvelles variables x' aux anciennes. Pour cela, il faut et suffit que l'expression $G = \Sigma g_{ik}(x) y^i y^l$ soit un invariant de ces transformations prolongées (IX, 1) à l'ordre 1. En particulier, au 1-groupe $\{X\}$, ou $X = \Sigma\xi^i(x)\,p_i$ correspond (IX, 4) le 1-groupe prolongé $\{X+Y\}$, où $Y = \Sigma\eta^i(x, y)\,q_i$, $\eta^i(x, y) = \Sigma(\partial\xi^i/\partial x^k)\,y^l$. Pour que $\{X\}$ soit isométrique, il faut donc et suffit que l'on ait $(X+Y)G = 0$. Or on a

$$(1)\qquad YG = \sum_i\sum_k\sum_h g_{ik}y^k y^h(\partial\xi^i/\partial x^h) + \sum_i\sum_k\sum_h g_{ik}y^i y^h(\partial\xi^k/\partial x^h)$$

et $XG = \sum_i\sum_k y^i y^k X g_{ik}$. Si l'on échange, dans le premier terme de YG, les indices i et h, et, dans le second, les indices k et h, il vient, en annulant le coefficient de $y^i y^k$,

$$(2)\qquad Xg_{ik} + \Sigma[g_{hk}(\partial\xi^h/\partial x^i) + g_{hi}(\partial\xi^h/\partial x^k)] = 0.$$

Ce sont les équations de Killing [15]. Pour qu'un r-groupe G soit isométrique, il faut et suffit que (2) soit vérifié pour r transf. ∞les indépendantes de G. On peut d'ailleurs utiliser ces équations. soit pour determiner le ds^2 invariant par un groupe donné, soit pour déterminer le groupe isométrique d'un ds^2 donné.

2. Le premier problème revient, étant donné un groupe G, à reconnaître si le groupe prolongé G^1 admet un invariant quadratique $\Sigma g_{ik}(x) y^i y^k$. S'il en est ainsi, le stabilisateur prolongé G_0^1 de O

admet l'invariant quadratique $\Sigma a_{ik} y^i y^k$, $a_{ik} = g_{ik}(\mathrm{o})$, Si donc les X_a sont les transf. ∞les d'ordre 1 de G, il faut

(3) $$\Sigma[a_{jk}(\partial\xi_a^j/\partial x^i)_0 + a_{ji}(\partial\xi_a^j/\partial x^k)_0] = 0.$$

Supposons qu'il existe des a_{ik} vérifiant (3), et que G est transitif. Il existe alors dans G une transformation T portant (o) en (m). T est représentée par

(4) $$x'^i = f_i(x, m), \qquad m^i = f_i(\mathrm{o}, m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La transformation prolongée T¹ s'obtient (IX, 4) par adjonction de

(5) $$y'^i = \Sigma f_{ik}(x, m) y^k, \qquad f_{ik} = \partial f_i/\partial x^k.$$

La forme quadratique $\Sigma a_{ik} y^i y^k$ est transformée par T¹ en $\Sigma g_{hl}(m) y'^h y'^l$, et l'on a

(6) $$a_{ik} = \Sigma g_{hl}(m) f_{hi}(\mathrm{o}, m) f_{lk}(\mathrm{o}, m)$$

ou

(7) $$g_{hl}(m) = \Sigma a_{ik} f^{hi}(\mathrm{o}, m) f^{lk}(\mathrm{o}, m).$$

La forme quadratique différentielle ainsi déterminée,

$$ds^2 = \Sigma g_{ik}(x)\, dx^i\, dx^k,$$

est invariante par G. Soit en effet T, T_0. T'_0 trois transformations de G portant respectivement (x) en (x'), (o) en (x), (o) en (x'). La transformation $S_0 = T'_0{}^{-1} T T_0$ appartient au stabilisateur de (o), donc laisse invariant $ds_0^2 = \Sigma a_{ik} dx_0^i dx_0^k$. D'autre part T_0 et T'_0 transforment respectivement ds_0^2 en ds^2 et ds'^2 (variables accentuées). Donc $T = T'_0 S_0 T_0^{-1}$ transforme ds^2 en ds'^2.

En conséquence, si G est transitif, à toute forme quadratique ds_0^2, à coefficients constants a_{ik}, invariante par le stabilisateur de (o), correspond une forme quadratique différentielle ds^2, à coefficients $g_{ik}(x)$ $[g_{ik}(\mathrm{o}) = a_{ik}]$, invariante par G. Ainsi, pourvu qu'il existe des a_{ik} vérifiant (3), les équations (2) relatives aux r transf. ∞les de G admettent des solutions $g_{ik}(x)$ complètement déterminées par $g_{ik}(\mathrm{o}) = a_{ik}$. [4, p. 522].

Si G est simplement transitif, les équations (3) disparaissent, car le stabilisateur se réduit à la transformation identique. G sera donc isométrique relativement à une infinité de ds^2 à $n = r$ dimensions, définis par (7), où les a_{ik} peuvent être pris arbitrairement. Comme tout groupe est isomorphe a son groupe de paramètres (II, 2), lequel est simplement transitif (VII. 5), tout r-groupe est isomorphe à un groupe isométrique d'un r-espace pourvu d'une infinité de métriques convenablement choisies [4, p. 519].

3. Pour le second problème, on voit d'abord, en introduisant les $\xi_i = \Sigma g_{ij}\xi^j$, que les équations (2) de Killing, en nombre

$$N = n(n+1)/2,$$

sont résolubles par rapport à N des n^2 dérivées d'ordre 1, et qu'elles permettent d'exprimer toutes les dérivées d'ordre 2 en fonction de celles d'ordre 1 et des fonctions. En conséquence (V. 5) le groupe isométrique G n'a aucune transf. ∞le d'ordre > 1, et a, au plus, $n + n^2 - N = N$ parametres. Ce nombre ne peut d'ailleurs être atteint que si les conditions d'intégrabilité de (1) sont identiquement satisfaites. Alors G aura exactement n transf. ∞les indépenpendantes d'ordre 0, et $n(n-1)/2$ d'ordre 1.

4. On peut, par l'étude directe des conditions d'intégrabilité, et par des calculs assez pénibles [15], montrer qu'alors le ds^2 est à courbure riemannienne constante dans toutes les orientations. On peut aussi remarquer que le groupe linéaire réduit (IX, 4) de G relatif a l'origine doit laisser invariante la forme quadratique $\Sigma g^0_{ik} y^i y^j$, que l'on peut, par un changement de variables linéaire, homogène et à coefficient constants, effectué sur les x_i, ramener à la forme $\Sigma (y^i)^2$. On peut alors montrer, soit directement [3. p. 325-333], soit en cherchant d'abord le groupe G' des transformations conformes (groupe total du ds^2), que G est nécessairement semblable à l'un des trois groupes D_{nh} ($h = 0, 1, -1$) (X. 9-10), qui sont respectivement groupes d'un ds^2 à courbure riemannienne nulle, positive, négative, constante dans toutes les orientations [21].

5. Ainsi, pour que la géométrie d'un n-espace soit nécessairement euclidienne ou cayleyenne, il suffit de supposer que son ds^2 est une forme quadratique des dx_i, et que son groupe isométrique a $n(n+1)/2$ paramètres [21].

D'autres hypothèses peuvent être faites pour arriver au même résultat. Par exemple [3. p. 479, 481] que le groupe isométrique possède la *libre mobilité infinitésimale*, en tout point ordinaire, c'est-à-dire que, si l'on considère une suite de q variétés linéaires élémentaires ($q = 1, \ldots, n-1$), dont la première contient le point, et dont chacune contient la précédente, un déplacement continu est possible si l'on fixe les p-premières ($p < n-1$), mais impossible si on les fixe toutes. On peut aussi [3. p. 521] faire des hypothèses équivalentes sur les points à distance finie du point stabilisé.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. De Séguier. — *Éléments de la Théorie des Groupes abstraits.*
2. Sophus Lie. — *Transformationsgruppen*, t. I.
3. Sophus Lie. — *Tranformationsgruppen*, t. III.
4. Bianchi. — *Lezioni sulla Teoria dei Gruppi finiti de Transformazione.*
5. Vessiot. — *Sur une théorie nouvelle des problèmes d'intégration* (*Bull. Soc. Math.*, t. III, 1924, p. 336).
6. Potron. — *Sur les théorèmes fondamentaux de la Théorie des Groupes continus finis de transformations* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. LI).
7. Potron. — *Sur un théorème fondamental de la Théorie...* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 192, 1931, p. 1302).
8. Schur. — *Die Darstellbarkeit der inf. trff. transitiver Gruppen durch Quotienten bestandig convergenten Potenzreihen* (*Leipz. Ber.*, 1890, p. 1).
9. Schur. — *Neue Begrundung...* (*Math. Ann.*, t. 35, p. 161).
10. Cartan. — *Sur la structure des Groupes continus finis* (*Thèse*, 1894).
11. Engel. — *Kleinere Beitrage zur Gruppentheorie* (*Leipz. Ber.*, 1892, p. 292).
12. Cartan. — *La Géométrie des Groupes de Transformations* (*Journ. de Math.*, 9e série, t. VI, 1927, p. 1).
13. Engel. — *Ueber die Normalreihen von Untergruppen* (*Leipz. Ber.*, 1893, p, 468).
14. Engel. — *Kleinere Beitrage zur Gruppentheorie* (*Leipz. Ber.*, 1887, p. 89; 1893, p. 360).
15. Killing. — *Grundlagen der Geometrie* (*Crelle*, t. 129, p. 121).
16. Vessiot. — *Sur la Théorie des Groupes continus* (*Ann. École Norm.*, t. 20, 1903, p. 411).
17. Engel. — *Ueber die Definitionsgleichungen* (*Math. Ann.*, t. 27).
18. S. Lie. — *Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen Gruppen* (*Leipz. Ber.*, 1891, p. 380).
19. Cartan. — *Des Groupes de transformations infinis, continus, simples* (*Ann. École Norm.*, 3e série, t. XXVI, 1909, p. 9).
20. Cartan. — *Les Groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (*Bull. Soc. Math.*, t. XLI, 1913, p. 53).
21. Potron. — *Sur les espaces de Riemann admettant un groupe isométrique à $n(n+1)/2$ paramètres* (*Journ. de Math.*, 9e série, t. XIII, 1933, p. 197).
22. Poincaré. — *Sur les groupes continus* (*Cambridge Philosophical Transactions*, t. 18, 1900, p. 221-255).

TABLE DES MATIÈRES.

IX. — *Groupes prolongés. Invariants différentiels.*

X. — *Groupe projectif. Groupes linéaires.*

XI. — *Groupes de la droite, du plan, de l'espace.*

XII. — *Fondements de la géométrie.*

99980 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.