MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

J. SOULA

L’équation intégrale de première espèce à limites fixes

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 80 (1936)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1936__80__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXX

L'équation intégrale de première espèce à limites fixes et les fonctions permutables à limites fixes

Par M. J. SOULA

Professeur à l'Université de Montpellier

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1936

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

PREMIÈRE PARTIE

L'ÉQUATION INTÉGRALE

DE

PREMIÈRE ESPÈCE A LIMITES FIXES

Par M. J. SOULA,
Professeur à l'Université de Montpellier.

I. — Introduction.

1. Définitions et notations. — Les équations intégrales de première espèce à limites fixes sont celles de la forme

$$f(x) = \int_c^d K(x, s)\, h(s)\, ds, \tag{1}$$

où $h(x)$ est la fonction inconnue. Nous dirons suivant l'usage que la fonction de deux variables $K(x, s)$ est le « noyau » et que $f(x)$ est la fonction donnée.

On sait que l'étude de cette équation est plus difficile que celle de l'équation de première espèce ou équation de Fredholm,

$$f(x) = \int_c^d K(x, s)\, h(s)\, ds + h(x).$$

Les deux problèmes apparaissent *a priori* comme assez différents : dans le cas de l'équation de première espèce, on doit admettre que le champ de la variable x où l'équation est valable coïncide avec l'intervalle d'intégration (c, d). Au contraire, l'équation de première espèce peut être vérifiée dans un champ sans relation avec l'intervalle (c, d). On pourra même supposer que x prend des valeurs complexes et que s reste réel [15].

Les travaux relatifs à l'équation (1) ont suivi les travaux de Fredholm, Hilbert et Schmidt relatifs à l'équation de deuxième espèce. Un Mémoire de Bateman contient un essai de solution générale par les fonctions fondamentales de Schmidt [12]. E. Picard a montré dans un travail fondamental [35] que le théorème de Ficher et F. Riesz et la théorie de Schmidt donnent une réponse très nette aux questions posées par l'équation (1) (Chap. V). Malgré l'importance de ce résultat, il reste à chercher si l'on ne peut pas exprimer la possibilité de résoudre l'équation (1) par de nouveaux procédés qui s'adaptent mieux aux problèmes particuliers qui conduisent à des équations de cette forme.

Il va de soi que si l'équation (1) a une solution $h(s)$, on en obtient la solution générale en ajoutant à $h(s)$ la solution générale de

$$0 = \int_c^d K(x, s)\, h_1(s)\, ds$$

si cette équation est résoluble (*voir* n° 8).

2. Exemples. — De nombreux problèmes d'analyse conduisent à l'équation de première espèce ou à la recherche de conditions pour qu'elle soit résoluble. On peut citer la résolution du problème de Dirichlet par un potentiel de simple couche (n° 28) et les problèmes posés par la résolution des équations aux dérivées partielles du second ordre [15]. On peut signaler d'autres problèmes qui dépendent de la résolution d'une équation (1) sans que le fait ait été aussi remarqué. Soit, par exemple, à donner la condition pour qu'une fonction analytique définie par son développement de Taylor $f(x) = \Sigma a_n x^n$ soit holomorphe dans tout le domaine fermé intérieur à une courbe (C) : on doit chercher les conditions pour que l'équation de Cauchy

$$f(x) = \int_C \frac{h(s)}{s - x}\, ds$$

ait une solution analytique $h(s)$. Il est vrai que la variable et la fonction inconnue sont imaginaires, mais l'on peut transformer le problème en un problème réel.

Autre exemple : soit à donner les conditions pour qu'une fonction soit une primitive; on doit traiter une équation de première espèce à noyau discontinu,

$$f(x) = \int_c^d K(x, s)\, h(s)\, ds$$

avec

$$K(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{si } c \leqq s \leqq x, \\ 0 & \text{si } x < s \leqq d. \end{cases}$$

On peut remarquer encore que développer une fonction $f(x)$ en série de Dirichlet

$$f(x) = \sum_1^\infty a_n\, e^{-\lambda_n x}$$

(λ_n réel croît indéfiniment avec n) revient à écrire une équation de la forme (1). Supposons x réel, les a_n réels et construisons la fonction $\varphi(y)$ qui, pour $\lambda_n \leqq y < \lambda_{n+1}$, a la valeur $\sum_{p=1}^n a_p$. On a

$$(2) \qquad f(x) = \int_0^\infty x\, e^{-xy}\, \varphi(y)\, dy.$$

Posons ensuite $t = e^{-y}$, il vient

$$(2') \qquad f(x) = \int_0^1 x\, t^{x-1}\, h(t)\, dt \qquad \text{avec } h(t) = \varphi\left(\log\frac{1}{t}\right);$$

c'est une équation de Laplace-Abel dont on doit chercher, il est vrai, une solution de nature très spéciale présentant certaines discontinuités.

3. **Conditions que nous imposerons au noyau et à la fonction donnée.** — Nous supposerons toujours que la variable s est réelle; la variable x le sera, sauf avis contraire, et nous chercherons à vérifier l'équation dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$; le noyau $K(x, s)$ et la fonction $f(x)$ seront, bien entendu, réels dans ces conditions.

Admettons que l'équation (1) soit vérifiée par les fonctions qui y figurent et que $f(x)$ et $K(x, s)$ soient sommables en x pour toute valeur de s. Posons

$$F(x) = \int_a^x f(y)\, dy, \qquad K_1(x, s) = \int_a^x K(y, s)\, dy;$$

l'équation (1) entraîne

$$(1') \qquad F(x) = \int_a^b K_1(x, s)\, h(s)\, ds$$

puisque l'on peut changer l'ordre des intégrations.

Réciproquement, si (1') est vérifiée par une fonction $h(s)$, on a aussi

$$F(x) = \int_a^x \int_a^b K(y, s)\, h(s)\, ds\, dy = \int_a^x dy \int_a^b K(y, s)\, h(s)\, ds,$$

le premier et le troisième membre sont les intégrales indéfinies des deux fonctions qui sont respectivement les deux membres de (1). L'équation (1) est donc vérifiée presque partout par $h(s)$ ([10], p. 192).

Cette remarque permet de remplacer l'équation (1) par une équation dont le noyau $K_1(x, s)$ est une fonction continue de x pour chaque valeur de s telle que $c \leqq s \leqq d$. Naturellement, cette fonction est bornée dans le champ $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq s \leqq d$.

Ainsi, dans le cas de l'équation de première espèce, on peut sans inconvénient supposer que le noyau est borné par rapport à l'ensemble des deux variables et qu'il est continu en x. Nous admettrons seulement qu'il est borné et qu'il est sommable par rapport à chacune des variables, l'hypothèse de la continuité en x ne donnant pas de simplification importante.

Les fonctions que nous considérerons seront supposées sommables ainsi que leurs carrés; il sera entendu que deux fonctions de x, $f(x)$ et $g(x)$, telles que $\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx$ soit nul ne seront pas considérées comme distinctes et nous ferons aussi une convention analogue pour les fonctions de la variable s.

L'intervalle d'intégration (c, d) sera toujours supposé fini; x pourra dans des cas spéciaux qui seront précisés devenir imaginaire ou infini.

On pourrait, dans certains cas, ne pas admettre que $h(s)$ est sommable; un exemple simple est celui de l'équation de Laplace-Abel (2) : si $h(t)$ est de la forme $t^{-m} h_1(t)$ [$h_1(t)$ étant borné et intégrable], l'intégrale existe pourvu que l'on suppose $x > m$ et un changement de variable évident nous ramènerait au cas où $h(t)$ est borné.

Nous écarterons des hypothèses de ce genre et nous admettrons même, sauf avis contraire, que le carré de $h(s)$ est sommable.

II. — Les systèmes de fonctions orthogonales. Le noyau de Schmidt.

4. Les systèmes de fonctions orthogonales. — La recherche de la fonction $h(s)$ qui vérifie l'équation (1) est basée sur quelques théories maintenant classiques et dont nous résumons les principaux résultats. Soit un système de fonctions qui sont toutes de carré sommable dans l'intervalle (a, b); leurs produits deux à deux sont aussi sommables. On dit que le système est orthogonal et normal quand $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant deux quelconques de ces fonctions, on a

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0$$

si φ et ψ sont distinctes et quand les intégrales telles que $\int_a^b \varphi^2(x)\,dx$ sont toutes égales à 1. E. Schmidt a démontré que l'ensemble de ces fonctions est dénombrable [40]. Nous les désignerons par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$. Ce système sera dit fermé s'il n'existe aucune fonction $\psi(x)$ telle que

$$\int_a^b \varphi_n(x)\psi(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Tout système non fermé peut être complété par l'adjonction d'un autre système orthogonal et normal $\varphi'_1(x), \ldots, \varphi'_n(x), \ldots$ tel que le système total formé des φ_n et des φ'_n soit fermé [24].

Étant donné un système orthogonal et normal quelconque et une fonction de carré sommable $f(x)$, les quantités

$$f_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx$$

sont dites les coefficients de Fourier de $f(x)$ par rapport au système. D'après l'inégalité de Bessel, la série $\sum_1^\infty f_i^2$ converge et sa somme est au plus égale à $\int_a^b f^2(x)\,dx$ (*voir*, par exemple, [2], Chap. XXII). Si la suite $\varphi_i(x)$ est fermée, on a l'égalité

$$\sum_1^\infty f_i^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx; \tag{3}$$

si la suite des $\varphi_i(x)$ n'est pas fermée, la condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité (3) soit valable est que $f(x)$ soit orthogonale à toute fonction $\psi(x)$ orthogonale à toutes les $\varphi_n(x)$, c'est-à-dire que

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

entraîne l'égalité

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

[Une démonstration est donnée par Lauricella [20]; on obtient aussi le résultat en complétant le système des $\varphi_n(x)$.]

5. **Simplification de la condition précédente.** — Soit une suite φ_1, φ_2, ..., φ_n, ... qui est d'abord supposée fermée et deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ dont les coefficients de Fourier sont f_i et g_i. On a

$$\begin{aligned} 2\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \int_a^b (f+g)^2\,dx - \int_a^b (f-g)^2\,dx - \int_a^b (f^2+g^2)\,dx \\ &= \sum_1^\infty (f_n+g_n)^2 - \sum_1^\infty (f_n-g_n)^2 - \sum_1^\infty (f_n^2+g_n^2) \\ &= 2\sum_1^\infty f_n g_n. \end{aligned}$$

Soit maintenant un système non fermé φ_1, φ_2, ..., φ_n, ... et un autre système φ'_1, φ'_2, ... tel que l'ensemble des deux soit fermé (le deuxième sera dit par la suite *complémentaire* du premier). Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$; aux notations précédentes, adjoignons

$$g'_i = \int_a^b \varphi'_i(x)g(x)\,dx, \qquad f'_i = \int_a^b \varphi'_i(x)f(x)\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

et supposons

$$g_i = 0, \qquad f'_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

D'après ce qui précède, $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ est la somme d'une série où certains termes sont de la forme $f_i g_i$ et d'autres de la forme $f'_i g'_i$;

ils sont nuls les uns et les autres et l'on a

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0.$$

Théorème A. — *Pour qu'une fonction $f(x)$ soit orthogonale à toute fonction $g(x)$ qui est elle-même orthogonale aux fonctions de la suite non fermée $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, il suffit que $f(x)$ soit orthogonale aux fonctions d'un système $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots$ complémentaire de la suite des φ_n.*

6. Théorème de Fischer et F. Riesz. — Un des résultats les plus importants et les plus connus de la théorie est :

Théorème B. — *Soient donnés* a priori *des nombres $f_1, f_2, \ldots, f_n$ tels que $\sum_1^\infty f_n^2$ converge, il existe une fonction de carré sommable $f(x)$ dont les f_n sont les coefficients de Fourier par rapport à la suite orthogonale et normale $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ fermée ou non fermée.* On a de plus

$$\sum_1^\infty f_n^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

La fonction ayant les f_n comme coefficients de Fourier n'est unique, bien entendu, que si la suite $\varphi_n(x)$ est fermée.

Ce théorème se démontre à l'aide du théorème de Fischer et Fr. Riesz sur la convergence en moyenne : Étant donnée une suite de fonctions $F_n(x)$ de carré sommable dans l'intervalle (a, b), si l'on peut rendre $\int_a^b [F_n(x) - F_m(x)]^2\,dx$ arbitrairement petit en prenant $m > n$ et n assez grand, il existe une fonction $F(x)$ de carré sommable telle que $\int_a^b [F_n(x) - F(x)]^2\,dx$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On dit que $F_n(x)$ tend « en moyenne » vers $F(x)$. Dans l'application du théorème B, la somme

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i\,\varphi_i(x)$$

tend en moyenne vers $f(x)$, ce qui n'implique nullement que la série $\sum_1^\infty f_i \varphi_i(x)$ converge.

On consultera sur ces questions un important article de Paul Lévy [30] qui donne des généralisations de la notion de convergence en moyenne et qui indique les relations de cette théorie avec le théorème de Fréchet sur les fonctionnelles linéaires.

7. Le noyau de Schmidt. — A la fonction $K(x, s)$ bornée et sommable en x et s, nous adjoignons la fonction

$$Q(x, y) = \int_c^d K(x, t)\, K(y, t)\, dt$$

qui est symétrique en x et y. C'est un noyau « positif » (*voir* [2], Chap. XXII), car, pour toute fonction $g(x)$, on a

$$\int_a^b \int_a^b Q(x, y)\, g(x)\, g(y)\, dx\, dy = \int_a^d \left[\int_a^b K(x, t)\, g(x)\, dx \right]^2 dt \geqq 0.$$

On sait que les constantes caractéristiques d'un noyau positif sont positives (Mercer [32]). La démonstration de Mercer suppose que $Q(x, y)$ est continu, mais on peut raisonner comme Schmidt dans le cas actuel :

Soit $\varphi(x)$ une fonction fondamentale de $Q(x, y)$ correspondant à la constante caractéristique μ; on peut écrire

$$\varphi(x) = \mu \int_c^b \int_a^d K(x, t)\, K(y, t)\, \varphi(y)\, dt\, dy,$$

$$\int_a^b \varphi^2(x)\, dx = \mu \int_c^d \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, K(y, t)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy\, dt$$
$$= \mu \int_c^d dt \left[\int_a^b K(x, t)\, \varphi(x)\, dx \right]^2,$$

ce qui montre que μ ne peut être négatif.

Nous désignerons les fonctions fondamentales de $Q(x, y)$ par $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ..., et nous supposerons qu'on les a choisies orthogonales et normales. Nous désignerons par λ_1^2, λ_2^2, ..., λ_n^2, ... les constantes caractéristiques correspondantes.

Nous aurons souvent à faire intervenir les fonctions $g(x)$ telles que

$$\int_c^d \left[\int_a^b \mathrm{K}(x, s)\, g(x)\, dx\right]^2 ds = 0, \tag{4}$$

ce que nous pourrons écrire, d'après la convention déjà faite,

$$\int_a^b \mathrm{K}(x, s)\, g(x)\, dx = 0. \tag{4'}$$

D'après l'une des transformations indiquées ci-dessus, cette équation équivaut à

$$\mathrm{I} = \int_a^b \int_a^b \mathrm{Q}(x, y)\, g(x)\, g(y)\, dx\, dy = 0.$$

Le théorème de Hilbert et Schmidt permet d'écrire

$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left[\int_a^b \varphi_n(x)\, g(x)\, dx\right]^2.$$

Il est vrai que la démonstration de ce théorème telle qu'elle est présentée d'habitude suppose que le noyau est continu (*voir* Schmidt [5], p. 451); elle s'applique cependant à un noyau borné et sommable.

Finalement, l'équation (4) équivaut au système

$$\int_a^b \varphi_n(x)\, g(x)\, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et. si la suite des $\varphi_n(x)$ est fermée, il n'y a pas de fonction $g(x)$ autre que o vérifiant l'équation (4). On dira alors que le noyau $\mathrm{K}(x, s)$ est aussi fermé.

Dans le cas où la suite des $\varphi_n(x)$ n'est pas fermée, adjoignons-lui la suite complémentaire $\varphi'_n(x)$. Le théorème A donne :

Si une fonction $f(x)$ est orthogonale à toute fonction $g(x)$ qui vérifie (4), *elle est aussi orthogonale à toutes les fonctions complémentaires $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n, \ldots$, de la suite des $\varphi_n(x)$. Réciproquement, si une fonction $f(x)$ est orthogonale aux $\varphi'_n(x)$, elle est orthogonale aux fonctions $g(x)$ qui vérifient* (4).

Les considérations précédentes s'appliqueraient de même aux fonctions $h_1(s)$ telles que

$$\int_c^d K(x, s)\, h_1(s)\, ds = 0,$$

il n'y a qu'à intervertir le rôle des deux variables. Ces fonctions $h_1(s)$ sont donc celles qui sont orthogonales aux fonctions fondamentales $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, ..., $\psi_n(s)$, ..., du second noyau de Schmidt

$$Q_1(s, t) = \int_a^b K(x, s)\, K(x, t)\, dx.$$

Des exemples simples montrent que les systèmes $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... et $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, ... sont sans relations entre eux. Le noyau $K(x, s)$ peut être, par exemple, fermé à droite et non fermé à gauche ou inversement.

Il arrive assez souvent dans les applications que le noyau $K(x, s)$ est symétrique et que les deux intervalles (c, d) et (a, b) sont confondus; les deux noyaux $Q(x, y)$ et $Q_1(s, t)$ sont alors identiques ainsi que les deux suites orthogonales $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(s)$.

III. — Conditions nécessaires immédiates.

8. **Noyaux continus, noyaux holomorphes.** — Il apparaît de bien des façons que l'équation (1) n'a pas toujours des solutions et que, $K(x, s)$ étant donné, $f(x)$ doit posséder certaines propriétés.

Si $K(a, s)$ est nul pour toutes les valeurs de s, si l'équation est vérifiée pour $x = a$, il faudra que $f(a)$ soit nul.

De même, si $a = c$, $b = d$; si $K(x, s) = 0$ pour $a < x < s < b$, l'équation s'écrit

$$f(x) = \int_a^x K(x, s)\, h(s)\, ds,$$

et l'on a encore la condition $f(a) = 0$.

Il existe des conditions d'un autre genre. L'équation

$$f(x) = \int_a^x h(s)\, ds,$$

qui est du type précédent, est bien une équation (1) particulière; il est clair que la solution existe dans le cas où $f(x)$ est une intégrale indéfinie et dans ce cas seulement. En particulier, $f(x)$ doit être continue et à variation bornée [10].

Étudions plus particulièrement le cas où le noyau $K(x, s)$ est une fonction analytique en x pour toute valeur de s. Supposons aussi que la dérivée partielle $\frac{\partial K}{\partial s}$ existe pour $c \leqq s \leqq d$, enfin que $K(x, s)$ et $\frac{\partial K}{\partial s}$ soient holomorphes en x et bornées dans un domaine D, et cela pour $c \leqq s \leqq d$. Si $h(s)$ est une fonction intégrable au sens de Riemann et bornée, $f(x)$ doit être analytique et holomorphe dans le domaine D. La démonstration précise est donnée par M. Montel qui traite aussi le cas où $h(t)$ devient infini pour certaines valeurs de s en restant absolument intégrable. Si maintenant $h(s)$ est simplement sommable, nous poserons

$$\psi(s) = \int_c^s h(t)\,dt.$$

On sait que l'intégration par parties peut s'appliquer dans les conditions actuelles

$$f(x) = -\int_c^d \frac{\partial K}{\partial s} \psi(s)\,ds + K(x, d)\,\psi(d)$$

et le résultat précédent subsiste puisque $\psi(s)$ est continue. L'équation (1) n'a donc de solutions que si $f(x)$ est holomorphe dans le domaine D.

9. **La condition d'orthogonalité L.** — Une catégorie de conditions assez générales et importantes est celle qui fait intervenir les fonctions $g(x)$ vérifiant

$$\int_a^b K(x, s)\,g(x)\,dx = 0$$

ou, plus généralement,

$$\int_c^d \left[\int_a^b K(x, s)\,g(x)\,dx\right]^2 ds = 0. \tag{4}$$

Supposons que l'équation (1) soit vérifiée, posons

$$R(s) = \int_a^b K(x, s)\,g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b g(x) f(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d K(x, s)\,h(s)\,ds\right] g(x)\,dx$$
$$= \int_c^d R(s)\,h(s)\,ds.$$

Donc, d'après l'inégalité de Schwartz,

$$\left[\int_a^b g(x)f(x)\,dx\right]^2 \leqq \int_c^d R^2(s)\,ds \int_c^d h^2(s)\,ds = 0.$$

$f(x)$ est donc orthogonale à toute fonction qui vérifie (4), ou, ce qui revient au même d'après le n° 7, à toute fonction de l'ensemble complémentaire $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n, \ldots$. Nous dirons que *cette condition est la condition nécessaire* **L**. Elle n'existe que quand le noyau n'est par fermé.

10. Les coefficients de Fourier de $f(x)$ par rapport à un système orthogonal quelconque. — Soit un système de fonctions orthogonales et normales quelconques $\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots, \xi_n(x)$, n'ayant pas nécessairement des relations avec le noyau $K(x, s)$. Par exemple, si l'intervalle (a, b) est l'intervalle $(0, 2\pi)$, nous pourrons prendre 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, ...

Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ les coefficients de Fourier de $f(x)$. On a

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\xi_n(x)\,dx = \int_a^b A_n(s)\,h(s)\,ds,$$

en posant

$$A_n(s) = \int_a^b K(x, s)\,\xi_n(x)\,dx.$$

Donc

$$c_n^2 \leqq \int_c^d A_n^2(s)\,ds \int_c^d h^2(s)\,ds.$$

Si je pose

$$\int_c^d A_n^2(s)\,ds = a_n^2,$$

je puis dire que $\frac{c_n^2}{a_n^2}$ est borné. Or, la série $\sum a_n^2$ est convergente, car on a

$$\sum_{n=1}^{m} a_n^2 = \int_c^d \left[\sum_1^n A_n^2(s)\right] ds \leqq \int_c^d \int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds.$$

Les coefficients de Fourier c_n de $f(x)$ par rapport à la suite quelconque $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, sont donc tels que $\frac{c_n^2}{a_n^2}$ soit borné, a_n^2 étant le terme d'une série convergente qui dépend du noyau, mais non de $f(x)$. Cette condition n'est pas illusoire puisqu'il existe une fonction ayant les coefficients de Fourier c_n sous la seule condition que Σc_n^2 converge (théorème B). Les a_n étant connus, on peut former des fonctions $f(x)$ pour lesquelles l'équation (1) n'a pas de solution : il est, en effet, possible de trouver des constantes positives $\mu_1, \mu_2, \ldots,$ telles que $\Sigma \mu_n a_n^2$ converge et que μ_n croisse indéfiniment (*voir* Borel [8], p. 16).

On sait donc toujours former des fonctions $f(x)$ de carré sommable telles que l'équation (1) n'ait pas de solution.

IV. — Problème préliminaire.

11. Énoncé et cas particulier. — Le problème posé par l'équation de première espèce est en relation avec le suivant : *Étant données des constantes* $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *et des fonctions* $A_1(s), A_2(s), \ldots, A_n(s), \ldots$. *trouver une fonction* $h(s)$ *qui vérifie*

$$c_n = \int_c^d A_n(s)\,h(s)\,ds \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

les fonctions données et la fonction inconnue étant toujours supposées de carrés sommables dans l'intervalle (c, d).

Le théorème B résout cette question quand les fonctions $A_n(s)$ forment un système orthogonal et normal dans l'intervalle (c, d). La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution est que la série Σc_n^2 converge, et la solution est la limite en moyenne de la suite $\sum_1^m c_p A_p(s)$. Dans des cas particuliers, cette suite peut avoir une limite au sens ordinaire du mot comme le montre la théorie des séries trigonométriques ou celle des polynomes de Legendre [13]. Si la suite des $A_n(s)$ n'est pas fermée, c'est-à-dire s'il existe des fonctions non nulles vérifiant

$$\int_c^d A_n(s)\,h_1(s)\,ds = 0,$$

on a la solution générale en ajoutant une de ces fonctions $h_1(s)$ quelconque à la solution donnée par le théorème de Fischer et Riesz.

12. Cas général. — Le cas où les fonctions $A_n(s)$ sont quelconques se ramène au cas précédent; on sait, en effet, qu'il est possible d'orthogonaliser ces fonctions ([2], p. 391, par exemple).

Pour y parvenir, il faut d'abord rendre ces fonctions indépendantes linéairement si elles ne le sont pas. On commencera donc par supprimer parmi les équations (5) celles pour lesquelles la fonction $A_n(s)$ est une combinaison linéaire des fonctions précédentes $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. $\left(\text{Il reste toujours entendu que l'on considère comme nulle une fonction } \psi(s) \text{ telle que } \int_c^d \psi^2(s)\,ds = 0.\right)$ Une de ces relations linéaire étant écrite

$$A_n(s) = \mu_1^{(n)} A_1(s) + \mu_2^{(n)} A_n(s) + \ldots + \mu_{n-1}^{(n)} A_{n-1}(s),$$

on obtient immédiatement la condition nécessaire

$$(\mathrm{N}) \qquad c_n = \mu_1^{(n)} c_1 + \mu_2^{(n)} c_2 + \ldots + \mu_{n-1}^{(n)} c_{n-1}$$

et l'ensemble de toutes les équations de cette forme constituera ce que nous appellerons la *condition* **N**.

Après la suppression de celles des équations (5) qui dépendent ainsi des précédentes, il restera un système d'équations que j'écrirai

$$(5') \qquad c'_n = \int_c^d A'_n(s)\,h(s)\,ds \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

après avoir changé les notations et le numérotage des équations. Il est clair que le système (5) est équivalent à l'ensemble formé des équations (5′) et des conditions **N**.

On peut maintenant orthogonaliser les fonctions $A'_n(s)$, c'est-à-dire trouver des constantes $a_i^{(j)}$ telles que les fonctions

$$\begin{aligned}
B_1 &= a_1^{(1)} A'_1, \\
B_2 &= a_1^{(2)} A'_1 + a_2^{(2)} A'_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
B_n &= a_1^{(n)} A'_1 + a_2^{(n)} A'_2 + \ldots + a_n^{(n)} A'_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

soient orthogonales et normales. On sait que les B_n sont indépendantes par là même qu'elles sont orthogonales; il en résulte que les derniers coefficients de chaque ligne, les $a_n^{(n)}$ ne sont jamais nuls : s'il en était autrement, si $a_n^{(n)} = 0$, on pourrait écrire un ensemble de n formes linéaires qui seraient indépendantes quoique ne contenant que $n-1$ variables $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-1}$.

Le système (5') entraîne le suivant :

$$(6) \qquad b_n = \int_c^d B_n(s)\, h(s)\, ds \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où j'ai posé

$$b_n = a_1^{(n)} c'_1 + a_2^{(n)} c'_2 + \ldots + a_n^{(n)} c'_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Réciproquement, si le système (7) est vérifié, en posant

$$X_n = \int_c^d A'_n(s)\, h(s)\, ds,$$

on a

$$a_1^{(n)}(X_1 - c'_1) + a_2^{(n)}(X_2 - c'_2) + \ldots + a_n^{(n)}(X_n - c'_n) = 0.$$

Comme $a_n^{(n)} \neq 0$, on obtient immédiatement $X_n = c'_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, c'est-à-dire le système (5').

Finalement, pour résoudre le système (5), nous sommes conduits au résultat suivant : *Pour que le système ait une solution du carré sommable, il est nécessaire et suffisant que l'on ait les conditions* **N** *et que la série* $\Sigma b_n^2 = \Sigma(a_1^{(n)} c_1 + a_2^{(n)} c_2 + \ldots + a_n^{(n)} c_n)^2$ *soit convergente.* La solution est la limite en moyenne de la suite

$$\Phi_m(s) = b_1 B_1(s) + \ldots + b_m B_m(s).$$

Pour avoir la solution générale, il faut ajouter à cette solution une quelconque des fonctions $h_1(s)$ telles que

$$\int_c^d A_n(s)\, h_1(s)\, ds = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

s'il en existe.

13. Un problème de Frédéric Riesz. — Un problème analogue au précédent consiste à chercher une fonction $\alpha(s)$ à variation bornée définie par

$$(7) \qquad c_n = \int_c^d A_n(s)\, d\alpha(s),$$

les intégrales étant des intégrales de Stieltjes. Il a été étudié par F. Riesz dans l'hypothèse où les $A_n(s)$ sont des fonctions continues [39].

Le résultat fondamental de son étude est une condition nécessaire et suffisante pour que le problème ait une solution : la quantité

$$I = \frac{\left|\sum_1^n \mu_i c_i\right|}{\max\left|\sum_1^n \mu_i A_i(s)\right|}$$

doit être bornée quels que soient les nombres μ_i, l'entier n et la variable s dans l'intervalle (c, d). La méthode de Riesz est basée sur une étude approfondie des expressions de la forme (7) où $A_n(s)$ est continue, et sur ce théorème : *Une opération fonctionnelle* T, *linéaire et continue, portant sur une fonction continue quelconque* φ, *s'exprime toujours par une intégrale de Stieltjes de la forme*

$$T[\varphi(s)] = \int_c^d \varphi(s)\, d\alpha(s),$$

où $\alpha(s)$ *ne dépend que de* T. [L'opération est dite continue si $T[\varphi_n]$ tend vers $T[\varphi]$ quand φ_n tend vers φ, uniformément dans l'intervalle (c, d).]

Cette théorie de Riesz présente les plus grandes analogies avec celle de l'équation (1) portant sur des fonctions de carré sommable : c'est ce qui résultera du Chapitre VI.

V. — Emploi de systèmes orthogonaux. Théorème de Picard.

14. Résolution par un système orthogonal quelconque. — Il existe plusieurs moyens de ramener le problème posé par l'équation (1) à la résolution d'équations de la forme (5). Un des plus simples est de se donner un système fermé de fonctions orthogonales et normales $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, ..., $\xi_p(x)$, ... et de considérer simultanément les coefficients de Fourier de $f(x)$:

$$c_i = \int_a^b f(x)\,\xi_i(x)\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

et les coefficients de $K(x, s)$ par rapport à x :

$$A_i(s) = \int_a^b K(x, s)\,\xi_i(x)\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Si $h(s)$ est une solution de (1),

$$c_i = \int_a^b A_i(s)\,h(s)\,ds. \tag{5}$$

Réciproquement, soit $h(s)$ une solution du système (5); les deux fonctions $f(x)$ et $\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds$ ont mêmes coefficients de Fourier par rapport à la suite des $\xi_i(x)$, et ces deux fonctions sont égales puisque le système est fermé ou, tout au moins, elles ne diffèrent que sur un ensemble de valeurs de x dont la mesure est nulle.

Comme nous avons indiqué le moyen de résoudre le système (5), nous nous bornerons à chercher la forme que peuvent prendre les conditions de possibilité.

1° Si les $A_i(s)$ ne sont pas des fonctions linéairement distinctes, à toute égalité de la forme

$$\alpha_1 A_1(s) + \alpha_2 A_2(s) + \ldots + \alpha_p A_p(s) = 0 \tag{8}$$

correspond, comme on a vu, une condition

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_p c_p = 0. \tag{9}$$

Or, les équations (8) et (9) équivalent respectivement à

$$\int_a^b K(x, s)\,[\alpha_1 \xi_1(x) + \ldots + \alpha_p \xi_p(x)]\,dx = 0, \tag{8'}$$

$$\int_a^b f(x)\,[\alpha_1 \xi_1(x) + \ldots + \alpha_p \xi_p(x)]\,dx = 0. \tag{9'}$$

On obtient ainsi ce que j'appellerai la *condition* **P** : s'il existe des fonctions qui soient des combinaisons linéaires de fonctions $\xi_n(x)$ en nombre fini de la forme $l(x) = \sum_1^p \alpha_n \xi_n(x)$ et qui vérifient

$$\int_a^b K(x, s)\,l(x)\,dx = 0,$$

elles doivent être orthogonales à $f(x)$.

2° Il existe des constantes $a_n^{(p)}$ qui ne dépendent que de $K(x, s)$ et qui ont été définies au Chapitre IV. Elles ne sont pas toutes nulles. La fonction donnée $f(x)$ doit être telle que la série

$$\Sigma(a_1^{(n)} c_1 + a_2^{(n)} c_2 + \ldots + a_n^{(n)} c_n)^2$$

converge.

On remarquera que la condition **P** est une conséquence de la condition **L** donnée au n° 9. Comme cette dernière est une condition nécessaire, nous pouvons conclure : pour que l'équation (1) ait une solution, *il est nécessaire et suffisant que $f(x)$ vérifie la condition* **L** *et que la série $\Sigma(a_1^{(n)} c_1 + \ldots + a_n^{(n)} c_n)^2$ soit convergente.*

15. Le théorème de Picard. — Est-il possible de choisir le système des $\xi_i(x)$ de façon que les $A_n(s)$ forment une suite orthogonale dans l'intervalle (c, d)?

On aurait, dans cette hypothèse, si $i \neq j$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_c^d A_i(s)\, A_j(s)\, ds \\ &= \int_c^d \int_a^b K(x, s)\, \xi_i(x)\, dx = \int_a^b K(y, s)\, \xi_j(y)\, dy\, ds \\ &= \int_a^b \int_a^b Q(x, y)\, \xi_i(x)\, \xi_j(y)\, dx\, dy, \end{aligned}$$

$Q(x, y)$ étant le noyau de Schmidt défini au n° 7. Si nous voulons que l'expression précédente soit nulle pour $i \neq j$, il *suffira* de prendre pour système des $\xi_i(x)$ la suite des fonctions fondamentales de $Q(x, y)$, ces fonctions étant choisies orthogonales et normales, et de compléter ce système, s'il n'est pas fermé, par la suite complémentaire que nous désignerons encore par $\varphi'_1(x)$, $\varphi'_2(x)$, ... On a, dans ces conditions,

$$\int_a^b Q(x, y)\, \xi_i(x)\, dx = \frac{1}{\lambda_i^2}\, \xi_i(y) \text{ ou } 0$$

suivant les cas et, dans tous les cas,

$$\int_c^d A_i(s)\, A_j(s)\, ds = 0 \qquad \text{si } i \neq j.$$

On remarquera que les $A_i(s)$ provenant des $\varphi'_i(x)$ sont nuls.

Les conditions du n° **14** se transformeront de la manière suivante :

1° Nous avons vu (n° 9) que la condition **L** peut être ainsi formulée : $f(x)$ doit être orthogonale à toutes les fonctions $\varphi'(x)$ de l'ensemble complémentaire.

Nous retrouvons d'ailleurs cette orthogonalité en exprimant les conditions **P** particulièrement simples qui tiennent à ce que les $A_i(s)$ qui proviennent des φ'_i sont nuls.

2° Les fonctions $A_i(s)$ sont maintenant orthogonales, mais elles ne sont pas normalisées :

$$\int_c^d A_i^2(s)\,ds = \int_a^b \int_a^b Q(x, y)\,\xi_i(x)\,\xi_i(y)\,dx\,dy,$$

et cette expression vaut o si ξ_i est une des fonctions φ'_1, et

$$\frac{1}{\lambda_i^2}\int_a^b \xi_i^2(y)\,dy = \frac{1}{\lambda_i^2}$$

si ξ_i est une fonction fondamentale φ_i. Le système des fonctions

$$\psi_i(s) = \lambda_i \int_a^b K(x, s)\,\varphi_i(s)\,ds$$

est donc orthogonal et normal. Les constantes de Fourier de $h(s)$ par rapport à ces systèmes sont les $\lambda_i c_i$, et la deuxième condition est que $\Sigma\lambda_i^2 c_i^2$ converge.

Pour que l'équation (1) *ait une solution, il est nécessaire et suffisant que $f(x)$ vérifie la condition* **L** *et que* $\sum \lambda_i^2 \left[\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx\right]^2$ *converge.* La condition **L** disparaît si $K(x, s)$ est fermé à gauche; pour obtenir toutes les solutions, il faut ajouter à l'une d'elles la solution générale de $\int_c^d K(x, s)\,h_1(s)\,ds = 0$.

D'après les théorèmes de Hilbert et Schmidt, $f(x)$ est la somme d'une série uniformément convergente de la forme $\Sigma c_i\varphi_i(x)$.

16. Condition suffisante simple. — On remarquera que le résultat de ce Chapitre montre que la condition nécessaire simple obtenue au n° **10** n'est pas suffisante. On voit aussi qu'il est facile de donner une condition suffisante ayant une forme analogue à celle du n° 10 dans le cas où les fonctions orthogonales ξ_i sont les fonctions fondamentales φ_i et leurs complémentaires.

On obtient encore des conditions suffisantes simples de façon presque évidente, dans le cas où l'équation (1) admet une solution quand on prend pour fonction donnée $f(x)$ la fonction ξ_n d'un système orthogonal quelconque. On aura des égalités telles que

$$\xi_n(x) = \int_c^d \mathrm{K}(x, s)\, h_n(s)\, ds.$$

Soit μ_n le maximum de $|h_n(s)|$ qui est supposé borné, soit

$$h(s) = \sum \frac{h_n(s)}{\mu_n} \gamma_n,$$

la série $\Sigma |\gamma_n|$ étant convergente. On verra aisément que $\frac{|\xi_n(x)|}{\mu_n}$ est borné, que la série

$$\sum \frac{\xi_n(x)}{\mu_n} \gamma_n = f(x).$$

est uniformément convergente, et que l'équation (1) est résoluble si l'on prend cette fonction comme fonction donnée. Ses coefficients de Fourier sont $\frac{\gamma_n}{\mu_n} = c_n$.

Donc, pour un système de fonctions orthogonales et normales $\xi_n(x)$ de l'espèce considérée, il existe des constantes positives μ_n telles que l'équation (1) a une solution si la fonction donnée $f(x)$ a pour coefficients de Fourier par rapport aux ξ_n des quantités c_n telles que la série $\Sigma |\mu_n c_n|$ converge.

VI. — Maximum d'une expression fonctionnelle.

17. Existence d'un maximum pour l'expression $\mathrm{H}[g]$. — Il n'est pas sans intérêt de montrer que la solution de Picard permet de formuler des conditions nécessaires et suffisantes qui ne font pas intervenir des systèmes orthogonaux de fonctions et d'établir des rapports entre l'équation de première espèce et un problème de calcul des variations important. On rapprochera les remarques qui suivent du théorème de Fr. Riesz donné au n° 13.

Considérons un noyau symétrique, borné sommable et « positif » $Q(x,y)$, une fonction $f(x)$ de carré sommable et l'expression fonctionnelle

$$H[g] = \frac{\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2}{\int_a^b\int_a^b Q(x,y)\,g(x)\,g(y)\,dx\,dy},$$

où $g(x)$ est une fonction quelconque de carré sommable dans l'intervalle (a, b). Je suppose que $H[g]$ ne puisse pas devenir infini pour une fonction $g(x)$ déterminée : comme le dénominateur n'est nul que si $g(x)$ est orthogonal aux fonctions fondamentales de $Q(x,y)$, il faut que $Q(x,y)$ soit fermé ou que $f(x)$ soit orthogonal à toutes les fonctions $\varphi'_1(x)$, $\varphi'_2(x)$, ... du système complémentaire des fonctions fondamentales $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... de $Q(x,y)$ (n° 7). Si, comme nous le supposerons, $Q(x,y)$ est le noyau de Schmidt du noyau $K(x,s)$ de l'équation (1), nous obtenons : pour que $H[g]$ ne devienne pas infini pour une fonction $g(x)$ déterminée, il faut et il suffit que $f(x)$ vérifie la condition **L**. Nous admettrons qu'il en est bien ainsi.

Cherchons si, dans ces conditions, $H[g]$ admet une borne dans le champ des fonctions $g(x)$ de carré sommable. Soient

$$c_i = \int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx, \qquad g_i = \int_a^b g(x)\,\varphi_i(x)\,dx.$$

La formule du n° 5 et le théorème de Hilbert et Schmidt donnent

$$H(g) = \frac{\left[\sum_1^\infty g_n f_n\right]^2}{\sum_1^\infty \frac{g_n^2}{\lambda_n^2}}.$$

J'écris l'identité de Lagrange

$$\sum_1^p a_i^2 \sum_1^p b_i^2 = \left[\sum_1^p a_i b_i\right]^2 + \sum_{i,j}(a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Dans la dernière somme, il faut supposer $1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq j < i$.

Si maintenant les a_i et les b_i ne sont pas en nombre fini, si les séries Σa_i^2 et Σb_i^2 convergent, on sait que $\Sigma a_i b_i$ converge aussi; on en déduit qu'il en est de même de la série double

$$\frac{1}{2}\sum_i \sum_j (a_i b_j - a_j b_i)^2,$$

où i et j prennent toutes valeurs et l'égalité subsiste avec ces séries. J'applique l'équation de Lagrange limitée, en posant $a_i = \lambda_i c_i$, $b_i = \frac{g_i}{\lambda_i}$.

$$\frac{\left[\sum_1^p g_i c_i\right]^2}{\sum_1^p \frac{g_i^2}{\lambda_i^2}} < \sum_1^p \lambda_i^2 c_i^2,$$

l'inégalité pouvant être remplacée par l'égalité dans le cas $a_i = b_i$ et dans ce cas seulement.

Si l'on fait croître p indéfiniment, le premier membre tend vers $H[g]$, et l'on voit que si $\Sigma\lambda_i^2 c_i^2$ converge, $H[g]$ est borné. Si $H[g]$ prend des valeurs arbitrairement grandes, cette série doit diverger.

Plaçons-nous dans le cas où la série converge. Est-il possible d'atteindre la borne qui est $\sum_1 \lambda_i^2 c_i^2$? J'écris l'équation de Lagrange avec une infinité de termes et avec les mêmes valeurs des variables a_i et b_i. J'en ai le droit, puisque $\Sigma a_i^2 = \lambda_i^2 c_i^2$ converge par hypothèse et que $\Sigma b_i^2 = \sum \frac{g_i^2}{\lambda_i^2}$ converge aussi $\left(\Sigma g_i^2 \text{ converge et } \frac{1}{\lambda_i^2} \text{ est borné}\right)$,

$$H[g] = \sum_1^\infty \lambda_i^2 c_i^2 - \frac{\frac{1}{2}}{\sum_1^\infty \frac{g_i^2}{\lambda_i^2}} \sum_i \sum_j \left(g_i c_j \frac{\lambda_j}{\lambda_i} - g_j c_i \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^2.$$

Je cherche à prendre $g_i = \lambda_i^2 c_i$. Je ne le puis que s'il existe une fonction $g(x)$ correspondante, ce qui revient à dire que $\Sigma\lambda_i^4 c_i^2$ converge (théorème B). Pour cette fonction $g(x)$, le maximum est atteint; on peut, dans tous les cas, s'en approcher arbitrairement en prenant $g_i = \lambda_i^2 c_i$ pour $i \leq p$ et $g_i = 0$ pour $i > p$, ce qui est toujours possible.

En résumé : *Pour que* $H[g]$ *ne devienne jamais infini, il faut et il suffit que* $f(x)$ *vérifie la condition* **L** *et que la série* $\Sigma\lambda_i^2 c_i^2$ *converge, c'est-à-dire que l'équation* (1) *soit résoluble.* Le maximum de $H[g]$ est la somme de la série. Ce maximum n'est atteint par une fonction déterminée que si la série $\Sigma\lambda_i^4 c_i^2$ converge aussi ; on verra aisément que cette condition revient à la suivante : l'équation

$$f(x) = \int_a^b Q(x, y)\, g(y)\, dy$$

a une solution, elle aussi.

18. Un problème de calcul des variations plus général. — Il serait intéressant d'étudier dans les mêmes conditions l'existence d'un maximum pour l'expression

$$R[g] = \frac{\int_a^b \int_a^b Q_1(x, y)\, g(x)\, g(y)\, dx\, dy}{\int_a^b \int_a^b Q(x, y)\, g(x)\, g(y)\, dx\, dy},$$

où $Q_1(x, y)$ est un autre noyau positif possédant les mêmes propriétés générales que $Q(x, y)$. Désignons par $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ... ses fonctions fondamentales orthogonales et normales et par μ_1^2, μ_2^2, ... ses constantes caractéristiques. Le théorème de Hilbert et Schmidt nous permet d'écrire

$$R[g] = \sum_1^\infty \frac{1}{\mu_n^2} \frac{\left[\int_a^b \Phi_n(x)\, g(x)\, dx\right]^2}{\int_a^b \int_a^b Q(x, y)\, g(x)\, g(y)\, dx\, dy},$$

et nous avons une somme d'expressions analogues à $H[g]$. Pour que $R[g]$ ait une borne, il est nécessaire que chaque terme en ait une, toutes les équations

$$\Phi_n(x) = \int_c^d K(x, s)\, h_n(s)\, ds$$

ont donc une solution, ce qui implique, en particulier, que toute fonction $\Phi_n(x)$ est orthogonale aux fonctions $\varphi_i'(x)$ complémentaires du système des $\varphi_i(x)$. Il est possible ainsi d'obtenir une condition suffisante : si l'on a

$$\int_a^b \Phi_n(x)\,\varphi'_p(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ p = 1, 2, \ldots)$$

et si la série double $\sum\sum \frac{\lambda_n^2}{\mu_p^2}\left[\int_a^b \Phi_n(x)\,\varphi_p(x)\,dx\right]^2$ converge, R[g] est borné.

Il est un cas particulier où le problème se traite complètement : c'est celui où les deux fonctions symétriques $Q(x,y)$ et $Q_1(x,y)$ sont permutables, c'est-à-dire où l'on a

$$\int_a^b Q(x,z)\,Q_1(z,y)\,dz = \int_a^b Q_1(x,z)\,Q(z,y)\,dz.$$

On peut alors s'arranger pour que les fonctions fondamentales de Q et de Q_1 appartiennent à un même système de fonctions orthogonales et normales $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ fermé (*voir* n° 43). On a donc

$$\int_a^b Q(x,z)\,\varphi_i(z)\,dz = \frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(x) \text{ ou zéro},$$

$$\int_a^b Q_1(x,z)\,\varphi_i(z)\,dz = \frac{1}{\mu_i}\varphi_i(x) \text{ ou zéro}.$$

R[g] se présente sous la forme

$$R[g] = \frac{\sum \frac{g_n^2}{\mu_n^2}}{\sum \frac{g_n^2}{\lambda_n^2}},$$

étant entendu que les constantes $\frac{1}{\lambda_n^2}$ et $\frac{1}{\mu_n^2}$ peuvent être nulles. Le maximum de R[g] est la plus grande valeur de $\frac{\lambda_n^2}{\mu_n^2}$, si elle est finie. Elle peut être atteinte par une fonction $g(x)$ déterminée.

19. Comparaison de deux équations de la forme (1). — Soit une équation analogue à (1) :

$$(1') \qquad f_1(x) = \int_a^b K_1(x,s)\,h_1(s)\,ds.$$

Posons

$$Q_1(x,y) = \int_c^d K_1(x,s)\,K_1(s,y)\,ds.$$

Si l'expression $R[g]$ correspondant aux noyaux positifs Q et Q_1 est bornée, les fonctions $f(x)$ pour lesquelles cette équation (1') a une solution sont aussi des fonctions pour lesquelles (1) a une solution d'après le principe du n° **17**.

De toutes façons, l'étude des expressions $R[g]$ est liée au problème qui nous occupe.

VII. — Autres méthodes.

20. Emploi des coefficients d'une série de Taylor. — D'autres procédés pour appliquer la méthode du Chapitre IV à la résolution de l'équation (1) se présentent immédiatement. Prenons d'abord le cas où le noyau est une fonction analytique. Pour toute valeur de s de l'intervalle (c, d), $K(x, s)$ sera une fonction holomorphe dans un domaine déterminé D. Nous supposons que ce domaine contient l'origine à son intérieur et que $K(x, s)$ est réel pour x réel. Adoptons enfin les hypothèses du n° 8 relatives à l'existence de $\frac{\partial K}{\partial s}$; on a vu que $f(x)$ doit être holomorphe dans D. Cela étant, posons

$$K(x, s) = \sum_0^\infty A_n(s) x^n, \qquad f(x) = \sum_0^\infty c_n x^n;$$

on obtient sans difficulté

$$c_n = \int_c^d A_n(s) h(s) \, ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Réciproquement, si ce système d'équations a une solution, elle vérifie l'équation proposée. Il est donc possible de formuler des conditions nécessaires et suffisantes qui ne porteront que sur les coefficients c_n de $f(x)$. Ces conditions pour l'existence d'une solution de carré sommable sont : 1° $f(x)$ est holomorphe pour $x = 0$; 2° éventuellement, il existe des relations linéaires entre les coefficients c_n de la série de Taylor qui représente $f(x)$; ces relations sont de la forme $\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \ldots + \mu_n c_n = 0$, les μ_n ne dépendant que de $K(x, s)$; 3° une série de la forme $\sum_0^\infty (a_0^{(n)} c'_0 + a_1^{(n)} c'_1 + \ldots + a_n^{(n)} c'_n)^2$ doit être convergente, les c'_n étant certains c_n, les constantes $a_p^{(k)}$ ne dépendant que de $K(x, s)$.

Les conditions 2° n'existent que si les $A_n(s)$ ne sont pas linéairement indépendantes; elles sont cette fois-ci distinctes des conditions tions **L** qui n'interviennent pas.

21. Emploi de valeurs particulières de x. — On peut se donner encore les valeurs de $f(x)$ pour certaines valeurs réelles de x. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, ces valeurs de x que nous supposerons réelles et intérieures à un domaine D_1 intérieur à D. Soient enfin e_n les valeurs de $f(x_n)$. On peut écrire les équations

$$(5'') \qquad e_n = \int_c^d K(x_n, s)\, h(s)\, ds \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

qui ont encore la forme (5). Si elles sont vérifiées par une fonction $h(s)$ de carré sommable et si $f(x)$ est holomorphe dans D, la différence $f(x) - \int_c^d K(x, s)\, h(s)\, ds$ est une fonction holomorphe dans D et qui a une infinité de racines dans un domaine intérieur à D; elle est nulle et $h(s)$ est une solution de (1). Les conditions nécessaires et suffisantes sont encore ici que $f(x)$ soit holomorphe dans D et que les quantités $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... vérifient des conditions analogues aux conditions 2° et 3° du n° 20.

Il est intéressant de constater que, dans le cas actuel, la seule condition imposée aux points $x_1, x_2, \ldots$ du domaine D_1 est de n'être pas en nombre fini. Les équations précédentes sont donc vérifiées dès qu'une infinité d'entre elles l'est.

Si l'on suppose que les x_n et $K(x_n, s)$ ne sont pas réels (s étant toujours réel comme il a été convenu), chacune des équations (5″) se décompose en deux de même forme et l'on a encore un système d'équations qui se traite par la méthode du Chapitre IV.

La même méthode peut être employée dans des cas plus généraux. On pourrait simplement supposer que $K(x, s)$ et $f(x)$ sont continus dans un intervalle (a, b), mais il faudrait que les x_n forment une suite dénombrable dense dans l'intervalle.

22. Emploi des coefficients intégraux. — On peut choisir une autre façon de définir la fonction $f(x)$ par une suite dénombrable de nombres, et ce procédé s'appliquera au cas le plus général où la fonction est sommable (*voir* [46]). Posons

$$f_1(x)=\int_a^x f(t)\,dt,$$

$$f_2(x)=\int_a^x f_1(t)\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_n(x)=\int_a^x f_{n-1}(t)\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$d_1=f_1(b),\qquad d_2=f_2(b),\qquad \ldots,\qquad d_n=f_n(b),\qquad \ldots;$$

ces quantités ne sont pas quelconques et l'on a

$$d_n(n-1)!=\int_a^b t^{n-1}f(b-t)\,dt,$$

et la méthode du Chapitre IV permet d'indiquer des conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les quantités $d_n(n-1)!$ si $f(x)$ est de carré sommable (d'ailleurs, si le carré de $f(x)$ n'est pas sommable, le carré de $f_1(x)$ l'est). Comme les fonctions

$$1,\quad t,\quad t^2,\quad \ldots,\quad t^{n-1},\quad \ldots,$$

sont linéairement indépendantes, il faut simplement exprimer qu'une série est convergente. Quand on orthogonalise ces fonctions, on obtient les polynomes de Legendre de sorte que les coefficients qui s'introduisent dans le calcul sont particulièrement simples. Les d_n vérifient aussi des conditions nécessaires très simples qui sont données par la théorie des séries de Taylor (par exemple, les changements de signe sont relativement peu nombreux) [46]. La fonction $f(x)$ est définie quand on se donne ces coefficients ou seulement certains d'entre eux. On considérera aussi les coefficients relatifs à $K(x, s)$:

$$K_1(x,s)=\int_a^x K(x,s)\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$K_n(x,s)=\int_a^x K_{n-1}(x,s)\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on posera

$$D_1(s) = K_1(b, s), \quad \ldots, \quad D_n(s) = K_n(b, s), \quad \ldots.$$

On obtient aisément que l'équation (1) est équivalente au système

$$d_n = \int_c^d D_n(s)\, h(s)\, ds \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

qui est encore de la forme (5) et qui se laisse étudier par la méthode du Chapitre IV. On peut donc exprimer une condition nécessaire et suffisante de possibilité à l'aide des c_n. Si la solution $h(s)$ existe, elle est la limite en moyenne d'une suite de la forme

$$H_n(s) = \beta_1^{(n)} D_1(s) + \beta_2^{(n)} D_2(s) + \ldots + \beta_n^{(n)} D_n(s).$$

VIII. — Méthode de Volterra.

23. Cette méthode, publiée en 1884, diffère profondément des précédentes par la forme du résultat et par les hypothèses admises sur le noyau [48]. Le noyau $K(x, s)$ sera continu et symétrique en x et en s dans le champ $(0 < x \leqq a,\ 0 \leqq s \leqq a)$. On admettra que l'on connaît une solution de l'équation

$$\nu(x) = \int_0^z K(x, s)\, \lambda(z, s)\, ds, \tag{10}$$

et cela pour les valeurs de z de l'intervalle $(0 < z \leqq a)$ et que cette fonction admet des dérivées des premiers ordres. On cherche à résoudre l'équation

$$f(x) = \int_0^z K(x, s)\, h(s)\, ds$$

qui est de la forme (1). On posera

$$\theta(z) = \int_0^z \lambda(z, s)\, \nu(s)\, ds, \qquad \mu(z) = \int_0^z f(s)\, \lambda(z, s)\, ds,$$

$$\mathfrak{I}(z) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{\mu'}{\theta'}\right), \qquad q = \text{valeur de } \frac{\mu'}{z'} \text{ pour } z = a.$$

La solution de Volterra est

$$h(s) = \int_s^a \mathfrak{I}(z')\, \lambda(z', a) + q\, \lambda(z, s);$$

elle suppose, bien entendu, que les dérivées écrites existent et sont intégrables.

Ce résultat a une forme particulièrement intéressante puisqu'il exprime la solution à l'aide d'un nombre fini d'intégrations et de dérivations. Toutefois, il ne s'applique que si l'on peut trouver une solution d'une équation (10) pour une fonction $\nu(x)$ convenablement choisie. Or, il n'est pas certain que des équations (10) puissent être écrites. On aurait en effet

$$\nu(x)=\int_0^z \lambda(z,\ s)\,\mathrm{K}(s,\ x)\,ds \qquad \text{pour } 0<x<z<a,$$

$$\nu(x)=\int_0^{z'} \lambda(z',\ s)\,\mathrm{K}(s,\ x)\,ds \qquad \text{pour } 0<x<z'<z<a;$$

donc

$$0=\int_0^{z'} [\lambda(z,\ s)-\lambda(z',\ s)]\,\mathrm{K}(s,\ x)\,ds+\int_{z'}^{z} \lambda(z,\ s)\,\mathrm{K}(s,\ x)\,ds.$$

Soit

$$h_1(s)=\begin{cases}\lambda(z,\ s)-\lambda(z',s) & \text{si } 0\leqq s\leqq z',\\ \lambda(z,\ s) & \text{si } z'<s<z.\end{cases}$$

On a

$$\int_s^z \mathrm{K}(s,\ x)\,h_1(s)\,ds=0$$

si $x<z'$ et, si $\mathrm{K}(x,\ s)$ est holomorphe, ce résultat subsiste pour $z'<x<z$.

La méthode ne peut donc réussir que si le noyau $\mathrm{K}(x, s)$ n'est pas fermé dans l'intervalle $(0, z)$ et, de plus, $\lambda(z, s)$ doit être continu et dérivable en z. Ces conditions ne paraissent pas faciles à discuter.

IX. — Equations particulières.

24. Équations dont le noyau est de la forme $\sum_{p=1}^{m} a_p(x)\,b_p(s)$. — On aperçoit tout de suite que la fonction donnée doit être de la forme

$$f(x)=\sum_{p=1}^{m} \alpha_p a_p(x)$$

pour qu'il y ait des solutions. Cette condition nécessaire est aussi suffisante. Pour le démontrer, nous ne nous servirons pas des théorèmes généraux mais nous supposerons que les fonctions $b_p(s)$ sont orthogonales et normales, ce qui ne diminue pas la généralité de notre étude. Donnons-nous dans ces conditions $f(x) = \sum_1^m \alpha_p a_p(x)$. Il suffira de prendre $h(s) = \sum_1^m \alpha_p b_p(s)$ pour avoir une première solution; la solution générale s'obtient en ajoutant une fonction quelconque orthogonale à toutes les fonctions $b_p(s)$.

25. Équation de Volterra de première espèce. — L'équation

$$f(x) = \int_a^x F(x, s)\, h(s)\, ds, \tag{11}$$

où l'on suppose $a < x < b$ est un cas particulier de l'équation (1) : il suffit d'admettre

$$K(x, s) = \begin{cases} F(x, s) & \text{si } a < s \leqq x, \\ 0 & \text{si } a < s < b. \end{cases}$$

On trouvera dans les traités généraux la théorie de ces équations dans le cas où $F(x, s)$ est dérivable ([2], [3], [6], [7]). Bornons-nous à rappeler le résultat fondamental : Si $F(x, x)$ est continu et différent de zéro dans l'intervalle (a, b), pour qu'il y ait une solution, il est nécessaire et suffisant que $f(a) = 0$ et que $f(x)$ admette une dérivée continue (étant entendu que $F(x, s)$ admet une dérivéee continue en x). Cette solution est une fonction continue. La démonstration se fait soit en dérivant l'équation (11), soit en intégrant par parties; on obtient ainsi une équation de deuxième espèce.

Observons seulement ici que cette solution est unique dans le champ des fonctions sommables, ce qui revient à dire que le noyau $K(x, s)$ est fermé. S'il en était autrement, on aurait pour une fonction $h_1(s)$ non nulle presque partout

$$0 = \int_a^x F(x, s)\, h_1(s)\, ds.$$

Soit $\psi(s) = \int_a^s h_1(t)\, dt$, une intégration par parties donne

$$\psi(x) = \int_a^x \frac{\partial F}{\partial x} \frac{1}{F(x, x)} \psi(s)\, ds;$$

la fonction $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{1}{F(x, x)}$ est bornée et continue dans notre hypothèse et $\psi(x)$ serait une fonction fondamentale d'un noyau de Volterra. Or, on démontre que ces noyaux n'ont pas de solutions fondamentales ([2], p. 326). Les cas où $F(x, x)$ peut devenir nul se trouvent traités dans les ouvrages cités; des hypothèses plus générales sur le noyau $F(x, s)$ ont été envisagées par W. H. Young [54].

26. Comparaison des méthodes que l'on peut employer pour l'équation de Volterra. — Un exemple simple de P. Lévy montre que cette comparaison peut conduire à des résultats intéressants ([4], p. 134). L'équation de Volterra la plus simple est

$$f(x) = \int_a^x h(t)\, dt.$$

Cherchons les fonctions de Schmidt $\varphi_n(x)$ correspondant au noyau $K(x, s)$ de cette équation.

Soit $\varphi(x)$ l'une d'elles, posons $\psi = \lambda \int_1^s \varphi(x)\, dx$. On a

$$\psi(s) = \lambda \int_0^1 K(x, s)\, \varphi(x)\, dx = \lambda \int_s^1 \varphi(x)\, dx, \tag{12}$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s)\, \psi(s)\, ds = \lambda \int_0^x \psi(s)\, ds. \tag{13}$$

Comme ψ est continue, l'équation (12) montre qu'elle est la dérivée de $\frac{\varphi(s)}{\lambda}$ et, de même, l'équation (13) montre que $\varphi(s)$ est la dérivée de $-\frac{\psi(x)}{\lambda}$. On a donc $\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0$. On peut donc poser

$$\varphi = \sin(\lambda x + \beta).$$

L'équation (12) donne

$$\psi(s) = -\cos(\lambda + \beta) + \cos(\lambda s + \beta)$$

et l'équation (13)

$$\varphi(x) = -\lambda x \cos(\lambda + \beta) + \sin(\lambda x + \beta) - \sin\beta\,;$$

si donc $\lambda \neq 0$, on a

$$\beta = n'\pi. \qquad \beta + \lambda = n\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (n \text{ et } n' \text{ entiers}).$$

En ne prenant que des fonctions linéairement distinctes, on peut donc dire que les fonctions

$$\varphi_n = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

et que les constantes caractéristiques correspondantes sont

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2}.$$

On sait d'ailleurs que ce système est fermé, le noyau de Volterra étant fermé.

Le théorème de M. Picard donne donc la condition suivante pour que l'équation ait une solution; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la série $\Sigma(2n+1)^2\left[\int_s^1 f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\,dx\right]^2$ converge.

$f(x)$ est développable en série de fonctions $\varphi_n(x)$. On peut donc dire que pour que $f(x)$ soit l'intégrale indéfinie d'une fonction de carré sommable dans l'intervalle $(0, 1)$, il faut et il suffit que l'on puisse l'écrire $f(x) = \text{const.} + \sum_1^\infty \alpha_n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$, la série $\Sigma n^2\alpha_n^2$ étant convergente.

Il serait évidemment possible de donner d'autres exemples du même genre.

27. Cas où le noyau est une fonction de Green d'une expression différentielle. — Soit l'expression

$$L(u) = p\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dp}{dx}\frac{du}{dx} + qu,$$

où p et q sont des fonctions de x dont la première admet une dérivée continue et est positive et dont la deuxième est continue, le tout pour l'intervalle $a \leqq x \leqq b$. Il existe des noyaux $K(x, s)$ symétriques, définis pour $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq s \leqq b$ et tels que la solution de l'équation (1) est donnée par

$$h(s) = L[f(x)],$$

en supposant bien entendu que la fonction donnée $f(x)$ admet des dérivées continues des deux premiers ordres. Ces équations intégrales, étudiées par Hilbert dans un Mémoire célèbre, ont donné lieu à de nombreux travaux ([19]).

Ces noyaux $K(x, s)$ sont les « fonctions de Green » relatives à des conditions aux limites spéciales. Par exemple, on peut prendre pour $K(x, s)$ une fonction des deux variables ayant des dérivées continues, sauf pour $x = s$ et vérifiant quel que soit s l'équation $L[K(x, s)] = 0$. On imposera à $K(x, s)$ la condition d'être continu pour $x = s$, mais la dérivée par rapport à x doit présenter un saut égal à -1 pour $x = s$. Enfin, pour $x = a$ et pour $x = b$, $K(x, s)$ remplit certaines conditions aux limites. La plus simple est $K(x, s) = 0$; d'autres font intervenir les valeurs de la dérivée. Le Mémoire de Hilbert ([19]) donne ainsi la solution d'un grand nombre d'équations (1) par des expressions différentielles du deuxième ordre. Voici un exemple :

Soit

$$K(x, s) = -\frac{1}{2}[\,|x - s| + xs - 1], \qquad a = -1, \qquad b = 1;$$

la solution de l'équation est alors

$$h(s) = \frac{d^2 f}{dx^2};$$

les conditions aux limites sont $K(x, s) = 0$ quel que soit s pour $x = -1$ et pour $x = +1$.

Nous n'insistons pas davantage sur ces questions importantes mais bien connues et sur l'extension au cas de plusieurs variables. Remarquons seulement que ces équations intégrales de Hilbert présentent avec celles de Volterra l'analogie d'avoir un noyau discontinu pour $x = s$ et de permettre une expression de la solution à l'aide des dérivées de $f(x)$, cette solution n'étant valable, bien entendu, que si $f(x)$ répond à certaines conditions de dérivation.

28. Expression d'une fonction harmonique par un potentiel de simple couche. — Donnons-nous dans le plan un contour C fermé, simple et formé d'arcs analytiques. Soit s l'arc de cette courbe variant de 0 à a; soit enfin $f(s)$ une fonction de cet arc. Nous désignerons par r la distance du point x au point s. La détermination d'une fonction harmonique à l'intérieur de C, prenant sur C la valeur $f(x)$ et représentable par une simple couche logarithmique, revient à la résolution de l'équation

$$f(x)=\int_0^a h(s)\log\frac{1}{r}\,ds$$

pour $0 \leqq x \leqq a$.

Le noyau devient infini pour $x=s$, mais dans les conditions actuelles, le noyau de Schmidt est borné et toutes les théories de Fredholm et Schmidt s'appliquent directement. Le noyàu $K(x, s)$ est symétrique et l'on sait que ses fonctions fondamentales sont aussi celles $Q(x, y)$ qui n'est autre que le premier itéré de $K(x, s)$ (*voir*, par exemple, [2]).

Ces noyaux peuvent être fermés ou non fermés; le deuxième cas se présentant comme plus général. Il n'y a jamais qu'une fonction $h_1(s)$ telle que

$$\int_0^a Q(x, s)\,h_1(s)\,ds = 0 \qquad \text{(Picard [35])}.$$

Une condition nécessaire mais non suffisante pour l'existence d'une telle fonction $h_1(s)$ est que la ligne C soit coupée par tout cercle de rayon 1 ayant son centre à l'intérieur de C (Lauricella [21]). Les lignes C pour lesquelles le noyau n'est pas fermé ont été appelées « spéciales » par Lauricella, qui a montré l'existence d'une infinité de telles lignes. Parmi les cercles, seul celui de rayon 1 est une ligne spéciale. (Picard [35]). Une ligne spéciale ne peut être contenue dans la région intérieure à une autre ligne spéciale (Lauricella). Les conditions **L** du n° 9 ne comprennent qu'une équation

$$\int_0^a h_1(s) f(s)\,ds = 0$$

si la ligne est spéciale et elles disparaissent si le contour n'est pas ligne spéciale.

29. Cas du cercle. — Dans le cas où C est un cercle, les résultats sont très simples. R étant le rayon, les fonctions fondamentales de $Q(x, y)$ sont

$$1,\quad \cos\theta,\quad \sin\theta,\quad \ldots,\quad \cos n\theta,\quad \sin n\theta,\quad \ldots \quad \left(\theta=\frac{s}{R}\right);$$

les constantes caractéristiques correspondantes ont pour expression

$$\frac{1}{2\pi R}\log\frac{1}{R},\quad \frac{1}{\pi R},\quad \frac{1}{\pi R},\quad \ldots,\quad \frac{n}{\pi R},\quad \frac{n}{\pi R},\quad \ldots$$

(*voir* Picard [35] ou [2], Chap. XXVII). Supposons $R \neq 1$, la condition de Picard pour l'existence d'une solution de carré sommable se déduit du développement de $f(x)$ en série de Fourier ordinaire. Cette série étant $\sum\left[a_n \cos n\frac{x}{R} + b_n \sin n\frac{x}{R}\right]$, la condition est que la série $\Sigma n^2(a_n^2 + b_n^2)$ soit convergente.

30. Équation de Bateman. — Revenant à des cas où l'on peut écrire une solution formelle de l'équation, nous signalerons l'équation de Bateman [12]

$$f(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{h(s)\,ds}{(1 - 2sx + x^2)^{\frac{n}{2}}},$$

où n est un nombre entier. On aperçoit aisément une condition nécessaire : $f(x)$ doit être analytique et holomorphe pour $|x| < 1$. Réciproquement, si $f'(x)$ est analytique et borné à l'intérieur de ce cercle, on a la solution par l'expression

$$h(s) = \frac{1}{4\pi}(1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{2\pi} [n f(y) + 2y f'(y)] \sin^{n-1}\alpha\, d\alpha,$$

où y représente $y = t + i\sqrt{1 - t^2}\cos\alpha$.

Il resterait à discuter les conditions d'application de cette formule dans le cas où $f(x)$ et sa dérivée ne sont pas bornés au voisinage du cercle $|x| = 1$.

Par une transformation facile, Bateman montre de même que

$$\varphi(t) = \frac{(1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} g(y) \sin^{n-1}\alpha\, d\alpha$$

résout l'équation

$$g(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{n(1 - x^2)}{(1 - 2tx + x^2)^{\frac{n+2}{2}}} \varphi(t)\, dt.$$

31. Autres exemples. — Ceux des exemples précédents où l'on peut écrire la solution de l'équation (1) à l'aide d'un nombre fini de symboles ont ceci de commun que le noyau est donné et que la fonction donnée répond seulement à des conditions très générales, comme d'avoir des dérivées. Pierre Humbert a donné des exemples de résolution formelle d'une autre espèce [17] : la fonction donnée $f(x)$ est bien loin d'être arbitraire et c'est le noyau qui est défini d'une manière très générale. Il est assujetti à vérifier une équation aux dérivées partielles de la forme

$$A(x)\frac{\partial K}{\partial x} + B(s)\frac{\partial K}{\partial s} + [a(s) + b(s)]K = 0,$$

ainsi que des conditions aux limites $K(x, a) = K(x, b) = 0$.

On prend comme fonction donnée

$$f(x) = e^{-\int \frac{a(x)+\lambda}{A(x)} dx} \qquad (\lambda \text{ const.}),$$

et la solution est alors

$$h(s) = \frac{1}{B(s)} e^{\int \frac{b(s)-\lambda}{A(x)} ds}$$

Humbert donne des exemples où les conditions imposées à $K(x, s)$ sont compatibles.

X. — Équation de Laplace et Abel.

32. Propriétés générales. — L'équation

$$(2) \qquad f(z) = \int_0^1 t^{z-1} h(t)\, dt$$

a été particulièrement étudiée. On peut en trouver des solutions formelles applicables à des cas très généraux; on peut également essayer de discuter la nature analytique de la fonction donnée $f(z)$ en relation avec les propriétés de la fonction réelle $h(t)$. Les difficultés du problème de la résolution de l'équation de première espèce sont donc bien mises en évidence dans ce cas particulier.

Le noyau est fermé (Lerch [29]) ; la démonstration de Picard ([11], 6e leçon) s'applique dans le champ des fonctions dont on sait seulement qu'elles sont sommables. Le noyau étant analytique, il en résultera que $f(z)$ doit être une fonction analytique (*voir* n° 8).

33. Résolution formelle. — Une méthode de résolution est contenue dans le célèbre Mémoire de Riemann sur les nombres premiers [37]. Soient

$$t = e^{-y}, \qquad \varphi(y) = h(e^{-y});$$

on a

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zy}\,\varphi(y)\,dy$$

et la solution est

$$\varphi(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xy} f(x)\,dx.$$

Bien entendu, il faut supposer que l'intégrale existe et ne dépend pas de la quantité positive a; la démonstration est basée sur les formules de Fourier.

Il est possible de trouver un résultat analogue par une méthode qui permet une discussion plus aisée de l'existence des intégrales qui représentent la solution [45]. En se servant uniquement du calcul des résidus on peut avoir une expression de $h(t)$ sous forme d'une intégrale d'une variable imaginaire identique, au fond à celle de Riemann et, de la démonstration, résulte le théorème suivant :

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe quand la partie imaginaire de z est positive $[\mathrm{R}(z) > 0]$, *sauf éventuellement pour z infini, si $z^{\lambda+1} f(z)$ est borné pour* $\mathrm{R}(z) > 0$, *λ étant un nombre positif, l'équation* (2) *a une solution qui est une fonction continue $h(t)$ bornée dans l'intervalle* $(0, 1)$ *et qui admet une condition de Lipchitz dans tout intervalle* $(q, 1)$ *quand* $0 < q < 1$. L'exposant de cette condition de Lipchitz est le plus petit des nombres λ et 1. On a de plus $h(1) = 0$ et le cas envisagé est, par suite, bien loin d'être le cas le plus général où le problème a une solution.

Une autre solution formelle résulte des considérations développées par Picard ([11], 6e leçon) : elle consiste à faire intervenir la fonction analytique

$$\Phi(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{z-t}\,dt.$$

On peut démontrer que cette fonction est bien analytique dès que $h(t)$ est sommable. Elle est holomorphe dans le plan de la variable z pourvu de la coupure représentée par le segment L de l'axe réel qui va du point o au point 1. Enfin elle admet le développement $\sum \frac{f(n)}{z^n}$ au voisinage de l'infini [46]. On a d'autre part

$$h(t) = \lim_{q=0} \frac{1}{2i\pi}[\Phi(t-iq) - \Phi(t+iq)],$$

sauf, peut-être, aux points de segment L qui appartiennent à un ensemble de mesure nulle [46].

Comme la fonction $\Phi(z)$ est déterminée par son développement au voisinage de l'infini quand on donne $f(z)$, l'expression précédente fait connaître $h(t)$ dans tous les cas où l'équation (2) admet une solution sommable. Bien entendu, cette solution est toute théorique : nous ne savons pas par elle si l'équation (2) a une solution et si la formule est valable; le problème est, d'autre part, ramené à un problème de prolongement analytique de série de Taylor.

34. Résolution par la méthode du n° 21. — Elle s'applique de manière simple si l'on prend $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., $x_n = n$, ... bien que le point limite des x_n soit alors à l'infini. Les équations à résoudre sont

$$f(n) = \int_0^1 t^{n-1} h(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et les considérations du paragraphe IV donnent immédiatement la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution de carré sommable. Les coefficients qu'il faut écrire ici sont liés simplement à ceux des polynomes de Legendre.

35. Conditions pour l'existence d'une solution basée sur les propriétés de la fonction analytique $f(z)$. — La comparaison des méthodes donne les résultats suivants [45] :

Pour que l'équation (2) ait une solution qui soit une fonction sommable quelconque, il est nécessaire que $f(z)$ soit holomorphe pour $R(z) > 1$, qu'elle soit bornée dans ce demi-plan, que $f(z)$ tende vers une limite si z tend vers 1 par valeurs réelles supérieures à 1. Enfin. $f(z)$ doit tendre vers zéro si z croît indéfiniment par valeurs réelles positives. Ce sont là des conditions nécessaires mais non suffisantes. Pour que l'équation (2) ait une solution $h(t)$ qui soit à variation bornée, il est nécessaire que $f(z)$ soit holomorphe pour $R(z) > 0$ et que

$z f(z)$ soit borné dans ce demi-plan. Ces conditions ne sont probablement pas suffisantes pour l'existence d'une solution à variation bornée, mais elles sont suffisantes pour l'existence d'une solution qui soit sommable.

On a vu que l'existence d'une solution continue est assurée si $f(z)$ est holomorphe et bornée pour $R(z) \geqq \lambda$, λ étant positif.

36. **Formule de multiplication.** — Si l'équation (2) a pour solutions $h(t)$ et $h_1(t)$ quand on prend respectivement pour fonctions données $f(z)$ et $f_1(z)$, si $h(t)$ et $h_1(t)$ sont sommables et bornées, l'équation a encore une solution et l'on prend pour fonction donnée le produit $f(z) f_1(z)$ et cette solution est

$$h_2(t) = \int_t^1 h\left(\frac{t}{u}\right) h_1(u) \frac{du}{u}.$$

On remarquera encore que $h_2(1) = 0$, de sorte que $h_2(t)$ n'est pas une fonction quelconque quand la fonction donnée a la forme admise. D'ailleurs, $h_2(t)$ peut ne pas être bornée pour $t = 0$, même si h et h_1 sont continues.

Cette propriété se trouve sous une forme différente dans la théorie des séries divergentes sommables de Borel; elle joue aussi un rôle dans le calcul formel symbolique d'Heaviside au sujet duquel on pourra consulter un article de P. Lévy et un ouvrage récent de Pierre Humbert [31], [18]. Dans ces travaux, c'est la fonction $\varphi(y) = h(e^{-y})$ qui intervient et ils comportent une étude détaillée de la correspondance entre $\varphi(y)$ et la fonction donnée $f(z)$.

XI. — Conclusion.

37. Les méthodes générales que nous avons indiquées sont toutes basées sur le théorème de Fischer et F. Riesz; elles aboutissent à des résultats analogues. On exprime les conditions de possibilité à l'aide de certains coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ dont la donnée suffit à faire connaître la fonction $f(x)$. Ce sont tantôt des coefficients de Fourier relatifs à une suite de fonctions orthogonales et normales, tantôt des coefficients de Taylor, tantôt les valeurs $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ que prend $f(x)$ pour une suite de valeurs de x, $x_1, x_2, \ldots$.

x_n, ... La condition consiste dans la convergence d'une série de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} c_i\right]^2$$

et l'inconvénient est dans la complication des termes de la série. Seule la solution de Picard est simple ; elle permet de bien saisir l'ensemble du problème. Malheureusement, les coefficients c_n qu'elle fait intervenir ne sont pas faciles à calculer et leur définition est assez complexe : la détermination des fonctions fondamentales du noyau $Q(x, y)$ étant souvent inaccessible. Les solutions des n^{os} 21 et 22 ont l'avantage de ne pas préciser un intervalle $(a. b)$ dans lequel l'équation doit être vérifiée et les c_n sont de véritables données du problème. Mais ces méthodes supposent les données analytiques et le champ de leurs applications en est très limité : on sait, en effet, que tous les problèmes généraux sur les équations intégrales font intervenir des fonctions discontinues. La méthode du n° 23 est très générale, mais les coefficients c_n qu'elle emploie vérifient eux-mêmes des conditions compliquées.

La solution de Volterra résumée au paragraphe 8 présente ce grand intérêt de faire varier la limite d de l'intervalle d'intégration (c, d) et de donner une solution formelle qui dépend des données et des dérivées de $f(x)$. Mais, pour diverses raisons, le champ d'application de cette méthode paraît assez restreint.

Les exemples donnés aux paragraphes IX et X montrent que des solutions formelles sont parfois possibles, mais ces solutions sont de caractères très différents suivant les cas, de sorte que l'on ne peut en tirer l'espoir de trouver des généralisations étendues.

L'exemple de l'équation de Laplace et Abel est intéressant à un autre point de vue : on peut prévoir l'existence d'une solution $h(s)$ (ou du moins l'existence de solutions d'une certaine catégorie) quand on donne certaines propriétés analytiques de la fonction donnée $f(x)$. Ce genre de considérations peut peut-être s'étendre à d'autres équations.

DEUXIÈME PARTIE

LES

FONCTIONS PERMUTABLES

A LIMITES FIXES

XII. — INTRODUCTION.

38. **La permutabilité de première espèce.** — Une généralisation particulièrement importante des travaux de Volterra a été la théorie des fonctions permutables de première espèce, dont la définition a été donnée par Volterra [49] et qui ont été étudiées par Volterra, Pérès, Évans, Vessiot (*voir* les Ouvrages généraux de Volterra [6], [7]).

Deux fonctions de deux variables $K(x, y)$ et $K_1(x, y)$ sont permutables de première espèce si

$$\int_x^y K(x, s)\, K_1(s, y)\, ds = \int_x^y K_1(x, s)\, K(s, y)\, ds.$$

Étant donné un système de fonctions permutables deux à deux, toutes les fonctions obtenues par compositions successives de quelques-unes d'entre elles sont encore des fonctions permutables deux à deux; il est possible de créer une algèbre et une analyse des fonctions permutables.

Nous rappellerons encore l'importante proposition de Vessiot : deux fonctions permutables à une troisième sont permutables entre elles [47].

39. La permutabilité à limites fixes ou de deuxième espèce. — Soient deux fonctions (appelées encore noyaux) définies dans le champ ($a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$); Volterra dit que ces fonctions $K(x, y)$ et $K_1(x, y)$ sont permutables de deuxième espèce si

$$\int_a^b K(x, s)\, K(s, y)\, ds = \int_a^b K_1(x, s)\, K(s, y)\, ds \tag{14}$$

et la fonction $K_2(x, y)$ représentée par ces intégrales égales est le résultat de leur composition.

L'étude de cette permutabilité à limites fixes se présente comme beaucoup plus difficile que celle de la permutabilité de première espèce. Ce fait apparaîtra comme assez naturel si l'on remarque que l'équation intégrale de Fredholm a une solution plus compliquée que l'équation intégrale à limites variables du type Volterra. Les problèmes relatifs à la permutabilité de première espèce ont cependant été posés et résolus dans une certaine mesure dans des cas particuliers, notamment par Volterra et Lauricella. Les méthodes qu'il convient d'employer sont souvent des généralisations de celles qui résolvent l'équation intégrale (1) et qui font l'objet de la première partie de ce fascicule, de sorte que nous aurons à étendre au cas de deux variables des propriétés étudiées ci-dessus.

L'importance de ces études de calcul fonctionnel est mise en évidence par les remarques suivantes :

Soit une fonction $h(x)$ définie dans l'intervalle (a, b), soit une transformation fonctionnelle qui lui fasse correspondre une fonction $f(x)$ définie dans le même intervalle. Si la transformation est linéaire, si elle ne possède pas de « point exceptionnel », le cas le plus simple est celui où $f(x)$ est donnée par

$$f(x) = \lambda h(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds,$$

$K(x, s)$ étant une fonction de deux variables définie dans le carré ($a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$) et λ étant une constante (*voir* Volterra [7]). Les groupes formés par ces transformations ont donné lieu aux travaux de Del Sarte [9].

Si l'on veut constituer une algèbre de ces opérations, la première question à résoudre est la recherche de deux transformations successives qui, appliquées à une même fonction, donnent un résultat indépendant de l'ordre avec lequel on procède. On est donc tout d'abord conduit à chercher des noyaux K et K_1 qui vérifient l'équation (14). Pour décomposer une transformation en deux autres dont elle soit le produit, on sera parfois conduit à calculer la fonction $K(x, y)$ connaissant la fonction $K_1(x, y)$ et le résultat de leur composition $K_2(x, y)$. En un mot, on est conduit à se poser, pour la permutabilité à limites fixes, les problémes traités par Volterra pour la permutabilité de première espèce.

XIII. — Premières propriétés.

40. Deux fonctions permutables à une troisième ne sont pas permutables entre elles. — On le voit aisément en prenant deux fonctions de la forme $f(x)\varphi(y)$. On peut aussi remarquer, comme le fait Volterra [7], que les fonctions permutables avec une constante sont les fonctions données par une expression de la forme

$$F(x, y) - \int_a^b F(x, y)\, dx - \int_a^b F(x, y)\, dy,$$

où $F(x, y)$ est une fonction quelconque.

41. Fonctions de la forme $f_1(x)\varphi_1(y) + \ldots + f_n(x)\varphi_n(y)$. — On peut observer d'abord que si la fonction $K(x, y)$ est permutable avec $f(x)\varphi(y)$, elle admet $f(x)$ et $\varphi(y)$ comme fonctions fondamentales à droite et à gauche respectivement, et cela pour la même constante caractéristique. Ici encore, les fonctions de la forme $\Sigma f_i(x)\varphi_j(y)$ seront particulièrement faciles à étudier.

Volterra a cherché à quelles conditions deux fonctions de la forme précédente

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_i(x)\varphi_j(y), \tag{15}$$

$$K_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} f_i(x)\varphi_j(y) \tag{15'}$$

sont permutables [7], [52].

Posons

$$\lambda_{i,j} = \int_a^b f_i(x)\varphi_j(x)\, dx;$$

désignons par A le tableau formé par les $a_{i,j}$, par B le tableau formé par les $b_{i,j}$ et par Δ celui des $\lambda_{i,j}$. La condition cherchée s'exprime par une relation entre les substitutions linéaires qui correspondent aux tableaux, relation qui s'écrit symboliquement

$$(\Delta \mathrm{A})(\Delta \mathrm{B}) = (\Delta \mathrm{B})(\Delta \mathrm{A}).$$

La recherche des fonctions permutables à une fonction donnée de la forme (15′) revient donc à celle des substitutions permutables à une substitution donnée.

A l'aide de la méthode de Lauricella dont il sera question plus loin, Volterra donne ensuite toutes les fonctions permutables à une fonction de la forme (15). L'application de la théorie des substitutions à la recherche des fonctions permutables à une fonction donnée de forme quelconque ne résulte d'ailleurs pas de ces considérations, au moins de manière immédiate.

42. **Algèbre des fonctions permutables.** — Soient K_1, K_2, K_3, ... des fonctions permutables deux à deux. Nous désignerons par

$$\overset{**}{\mathrm{K}}_1\overset{**}{\mathrm{K}}_2\overset{**}{\mathrm{K}}_3$$

la fonction obtenue en composant K_1 avec K_2, puis le résultat de cette composition avec K_3 : c'est la notation de Volterra. On démontre aisément que les opérations de composition sont associatives; comme nous admettons qu'elles sont commutatives, ces symboles possèdent les propriétés d'un produit.

Si $\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_2 = \ldots = \mathrm{K}_n$ le résultat de leur composition se note par $\overset{**}{\mathrm{K}}{}_1^n$. Si a et b sont des constantes et $\mathrm{K}_1(x, y)$, $\mathrm{K}_2(x, y)$ deux fonctions permutables, $a\mathrm{K}_1$ et $b\mathrm{K}_2$ sont encore permutables. Les fonctions que l'on obtient par l'addition ou la soustraction de fonctions permutables sont permutables entre elles et avec les fonctions primitives. De tout cela résulte que, pour composer entre eux des polynomes dont les termes sont des produits symboliques de fonctions deux à deux permutables, il suffit d'appliquer les règles de l'algèbre ordinaire.

Signalons encore la notation suivante : a et b étant deux constantes, on posera

$$\left(a + \overset{**}{\mathrm{K}}_1\right)\overset{**}{\mathrm{K}}_2 = a\mathrm{K}_2 + b\overset{**}{\mathrm{K}}_1\overset{**}{\mathrm{K}}_2.$$

A tout polynome sans terme constant

$$a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$

on fera correspondre le polynome symbolique

$$a_1 \mathrm{K} + a_2 \overset{**}{\mathrm{K}}{}^2 + \ldots + a_n \overset{**}{\mathrm{K}}{}^n.$$

A tout polynome à plusieurs variables, on fera de même correspondre un polynome symbolique où les variables sont remplacées par des fonctions deux à deux permutables et les produits par des opérations de composition.

Prenons maintenant une fonction méromorphe représentée par le développement

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots;$$

à $f(z)$ on fera correspondre

$$\mathrm{P}(z \mid x, y) = c_1 \mathrm{K} + c_2 z \overset{**}{\mathrm{K}}{}^2 + \ldots + c_n z^n \overset{**}{\mathrm{K}}{}^n + \ldots.$$

Cette fonction est méromorphe en z pour x et y donnés : cela résulte d'une part du théorème fondamental de Fredholm d'après lequel la fonction

$$\mathrm{K} + z \overset{**}{\mathrm{K}}{}^2 + \ldots + z^n \overset{**}{\mathrm{K}}{}^n + \ldots$$

est méromorphe en z, d'autre part du théorème de Hadamard sur la multiplication des singularités [16]. Volterra a étendu cette proposition par une méthode basée sur un passage à la limite. On peut prendre p fonctions deux à deux permutables $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_p$, une fonction méromorphe de p variables $f(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ sans terme constant. On obtient une fonction méromorphe en $z_1, z_2, \ldots, z_p$ dont le développement est un ensemble de termes de la forme

$$\mathrm{A}_{r_1 r_2 \ldots r_p} z_1^{r_1} z_2^{r_2} \ldots z_p^{r_p} \overset{**}{\mathrm{K}}{}_1^{r_1} \ldots \overset{**}{\mathrm{K}}{}_p^{r_p} \qquad \text{([7], Chap. XIII).}$$

Cette algèbre et cette analyse des fonctions permutables à limites fixes se développe donc tout comme celle des fonctions permutables de première espèce; ce symbolisme peut être utilement employé pour simplifier l'exposé des théories classiques relatives à l'équation de Fredholm.

43. Fonctions fondamentales et fonctions principales de deux noyaux permutables. — Pour comparer les fonctions fondamentales et principales de deux noyaux permutables K et N, il faut faire intervenir les fonctions φ et ψ qui vérifient :

$$\int_a^b N(x, s)\,\varphi(s)\,ds = 0, \tag{16}$$

$$\int_a^b \overset{**}{N^p}(x, s)\,\psi(s)\,ds = 0 \qquad (p \text{ entier}). \tag{16'}$$

Une fonction principale de K est une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions fondamentales ou principales de N et de fonctions vérifiant (16) ou (16') [43]. Ces dernières sont en quelque sorte les fonctions principales de N pour une constante caractéristique infinie. L'équation (16') n'a d'ailleurs jamais de solution autres que celles de (16) si N est symétrique et N n'a pas non plus dans ce cas de fonction principale non fondamentale au sens ordinaire. Si N et K sont symétriques, une fonction fondamentale de l'un est somme d'un nombre fini de fonctions fondamentales de l'autre et de solutions de l'équation telle que (16).

Lauricella a démontré plus précisément que si deux fonctions symétriques K et N sont permutables, il existe quatre autres fonctions K', K'', N', N'' telles que $K = K' + K''$, $N = N' + N''$ et qui possèdent les propriétés suivantes : K' et N' ont pour fonctions fondamentales les seules fonctions d'un même système de fonctions orthogonales et normales, K' est orthogonal à K'' (1) et à N'', N' est orthogonal à N'' et à K''; K'' est orthogonal à N''. Il existe un système de fonctions orthogonales et normales qui comprend les fonctions fondamentales de K et celles de N.

XIV. — Recherche de toutes les fonctions permutables a une fonction donnée.

44. Fonctions de deux variables orthogonales et normales dans une aire plane. — La méthode de Lauricella comporte une extension aux fonctions de deux variables des considérations du paragraphe **2**.

(1) C'est-à dire que $\int_a^b K'(x, s)\,K'(s, y)\,ds = \int_a^b K''(x, s)\,K'(s, y)\,ds = 0$. Le mot orthogonal est pris ici au sens de M. Goursat; il aura un autre sens au paragraphe **44**.

Soit un champ σ qui sera pour nous le carré ($a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$) et des fonctions $U_i(x, y)$ sommables en x, en y et par rapport à l'ensemble des variables ainsi que leurs produits deux à deux et telles que

$$\int\int_{\sigma} U_i(x, y) U_j(x, y)\, dx\, dy = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On dira que ces fonctions sont orthogonales et normales.

S'il n'existe aucune fonction $K(x, y)$ autre que celles qui sont nulles partout ailleurs que dans un champ de mesure superficielle nulle qui vérifie

$$\int\int_{\sigma} U_i(x, y) K(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

on dira que la suite des $U_i(x, y)$ est fermée. Une suite non fermée peut toujours être considérée comme faisant partie d'une suite dénombrable fermée. On peut étendre à ces suites les inégalités de Bessel, la notion de coefficient de Fourier, etc. (*voir* LAURICELLA [23]). Signalons aussi la démonstration de ce fait qu'une fonction donnée de deux variables et de carré sommable $K(x, y)$ est développable en série de la forme $\sum \frac{\varphi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i}$ qui ne converge pas nécessairement au sens ordinaire mais qui converge uniformément en général au sens de Weyl, les $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(y)$ étant les fonctions fondamentales des deux noyaux de Schmidt de la fonction $K(x, y)$.

45. Méthode de Lauricella. — La détermination des fonctions permutables à une fonction donnée sera obtenue [25] par l'intervention des fonctions de Schmidt (*voir* n° 7). Il ne sera question que de fonctions d'une ou deux variables sommables ainsi que leurs carrés dans l'intervalle (a, b) et dans le champ carré σ. Soit une fonction $K(x, y)$ définie dans ce champ et dont les noyaux de Schmidt

$$Q(x, y) = \int_a^b K(x, s) K(y, s)\, ds,$$

$$Q_1(x, y) = \int_a^b K(s, x) K(s, y)\, ds$$

sont supposés bornés. Soient $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, et $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_n(x)$, ..., respectivement les fonctions fondamentales de l'un et de l'autre. On sait (par exemple [5], [2]) qu'elles se correspondent deux à deux et sont liées par

$$\varphi_n(y) = \lambda_n \int_a^b K(y, s)\,\psi_n(s)\,ds,$$

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(s, x)\,\varphi_n(s)\,ds.$$

Nous supposerons que les fonctions de chaque suite sont orthogonales et normales, nous leur adjoindrons deux autres suites orthogonales et normales : la suite $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n, \ldots$ complémentaire de la suite des φ_n, la suite $\psi'_1, \psi'_2, \ldots, \psi'_n, \ldots$ complémentaire de la suite des ψ_n (*voir* § II). Cela étant, soit une fonction $K'(x, y)$ permutable à $K(x, y)$; Lauricella démontre les égalités suivantes :

$$(17)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\int_\sigma K'(x, y)\left[\frac{\varphi_i(x)\,\varphi_j(y)}{\lambda_j} - \frac{\psi_i(x)\,\psi_j(y)}{\lambda_i}\right] dx\,dy = 0, \\ \displaystyle\int\int_\sigma K'(x, y)\,\psi_i(x)\,\psi'_j(y) = 0, \\ \displaystyle\int\int_\sigma K'(x, y)\,\varphi'_i(x)\,\varphi_j(y) = 0, \end{cases}$$

qui s'obtiennent facilement par des changements dans l'ordre des intégrations.

Réciproquement, supposons qu'une fonction $K'(x, y)$ vérifie ces égalités (17); posons

$$f_1(x, y) = \int_a^b K(x, s)\,K'(s, y)\,ds,$$

$$f_2(x, y) = \int_a^b K'(x, s)\,K(s, y)\,ds.$$

On démontrera encore aisément

$$\int\int_\sigma [f_1(x, y) - f_2(x, y)]\,\varphi_i(x)\,\psi_j(y)\,dx\,dy = 0,$$

$$\int\int_\sigma [f_1(x, y) - f_2(x, y)]\,\varphi_i(x)\,\psi'_j(y)\,dx\,dy = 0,$$

$$\int\int_\sigma [f_1(x, y) - f_2(x, y)]\,\varphi'_i(x)\,\psi_j(y)\,dx\,dy = 0\cdot$$

$$(i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots)$$

et il est presque évident que

$$\int\int_{\sigma} [f_1(x, y) - f_2(x, y)]\, \varphi'_i(x)\, \psi'_j(y)\, dx\, dy = 0.$$

L'ensemble des fonctions φ_n et φ'_n forme une suite fermée; il en est de même des ψ_n et ψ'_n; on déduit de là sans difficulté que la suite des fonctions de deux variables qui comprend

$$\psi_i(x)\,\psi_j(y), \quad \varphi'_i(x)\,\psi_j(y), \quad \varphi_i(x)\,\psi'_j(y), \quad \varphi'_i(x)\,\psi'_j(y)$$

pour $i = 1, 2, \ldots$, et $j = 1, 2, \ldots$, forme un système fermé dans le champ σ. Il en résulte $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ et les deux fonctions $K(x, y)$ et $K'(x, y)$ sont permutables. La condition nécessaire et suffisante pour que $K(x, y)$ et $K'(x, y)$ soient permutables est qu'elles satisfassent aux égalités (17).

46. Détermination des fonctions de deux variables orthogonales aux fonctions d'une suite donnée. — La suite dénombrable donnée sera ici formée des fonctions de deux variables

$$\frac{\varphi_i(x)\,\varphi_j(x)}{\lambda_j} - \frac{\psi_i(x)\,\psi_j(y)}{\lambda_i}, \quad \varphi'_i(x)\,\psi_j(y), \quad \psi_i(x)\,\psi'_j(y) \tag{18}$$
$$(i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots).$$

On commencera par former une suite orthogonale et normale dans le champ σ dont chaque élément est une combinaison linéaire des fonctions de la suite (18) en nombre fini qui, à leur tour, s'exprimeront linéairement à l'aide des nouvelles fonctions. Cette orthogonalisation, analogue à celle des fonctions d'une variable, donne une suite que nous désignerons par

$$\mu_1(x, y), \quad \mu_2(x, y), \quad \ldots, \quad \mu_n(x, y), \quad \ldots.$$

On est finalement ramené à chercher les fonctions $K'(x, y)$ qui vérifient

$$\int\int_{\sigma} K'(x, y)\, \mu_i(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Lauricella indique un procédé pour écrire la solution générale de (19) : il part d'une fonction quelconque de deux variables $\Pi(x, y)$ et il forme les coefficients de Fourier

$$a_i = \int\int_{\sigma} \mu_i(x, y)\, \Pi(x, y)\, dx\, dy.$$

La série $\Sigma a_i \mu_i(x, y)$ ne converge pas au sens ordinaire du mot, mais elle converge « uniformément en général » au sens de Weyl; la limite qu'elle définit est cette fonction donnée par le théorème de Ficher et Riesz dont les coefficients de Fourier sont encore les a_i, fonction que nous désignons par $\Pi'(x, y)$. On montre aisément que la solution générale des équations (17) est $\Pi(x, y) - \Pi'(x, y)$ que l'on peut, par convention spéciale, écrire

$$\Pi(x, y) - \sum_i \mu_i(x, y) \int\int_\sigma \Pi(x, y)\, \mu_i(x, y)\, dx\, dy.$$

47. Fonctions symétriques permutables. — Admettons que la fonction $K(x, y)$ soit symétrique, désignons par $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ ses fonctions fondamentales orthogonales et normales, complétons cette suite par les fonctions $\varphi'_1(x), \ldots, \varphi'_n(x), \ldots$ qui la rendent fermée. Le système $\mu_i(x, y)$ que l'on peut choisir sera formé des fonctions suivantes :

$$\varphi_i(x)\,\varphi_j(y) \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots \text{ et } i \neq j;$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_i(x)\,\varphi'_j(y) \\ \varphi'_i(x)\,\varphi_j(y) \end{array}\right\} \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots.$$

On peut, en particulier, chercher les fonctions $K'(x, y)$ symétriques et permutables à $K(x, y)$. Les formules obtenues permettent à Lauricella de démontrer le théorème déjà signalé au n° 43.

XV. — Équations intégrales.

48. Étude des équations de la forme

$$(20) \quad \left(a_0 + \overset{**}{F_0}\right)\overset{**}{K^m} + \left(a_1 + \overset{**}{F_1}\right)\overset{**}{K^{m-1}} + \ldots + \left(a_{m-1} + \overset{**}{F}_{m-1}\right)\overset{**}{K} + F_m = 0,$$

où K est l'inconnue. — Les constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ et les fonctions $F_0, F, \ldots, F_{m-1}, F_m$ sont données. Nous admettrons que ces fonctions sont permutables deux à deux et nous ne chercherons qu'une fonction K permutable avec elles.

L'étude générale de ces équations est très compliquée; des cas très différents sont possibles et le degré de généralité de la solution est très variable. Nous nous attacherons surtout à montrer sur des exemples les diverses possibilités.

49. Cas où $F_m = 0$, $a_{m-1} \neq 0$. — $K(x, y)$ étant une solution déterminée, posons

$$N(x, y) = (a_0 + \overset{**}{F_0})\overset{**}{K}{}^{m-1} + (a_1 + \overset{**}{F_1})\overset{**}{K}{}^{m-2} + \ldots + (a_{m-2} + F_{m-2})\overset{**}{K} + F_{m-1};$$

on peut écrire

$$K(x, y) = -\frac{1}{a_{m-1}} \int_a^b N(x, s) K(s, y)\, ds.$$

Si l'on regarde y comme une constante, cette équation n'est qu'une équation de Fredholm de deuxième espèce, mais homogène, dont le noyau est $N(x, y)$. La fonction $K(x, y)$ de la variable x est une solution qui correspond à la constante caractéristique $-\frac{1}{a_{m-1}}$. A chaque valeur de y correspond une solution fondamentale différente, en apparence au moins, et ces solutions fondamentales ne peuvent être linéairement distinctes d'après la théorie de Fredholm. On a donc une égalité de la forme

$$(21) \qquad K(x, y) = a_1(x) b_1(y) + a_2(x) b_2(y) + \ldots + a_n(x) b_n(y).$$

Ce résultat s'appliquerait même si les fonctions F_i données et la fonction inconnue n'étaient pas permutables.

Comme le noyau $N(x, y)$ dépend de l'inconnue K, le raisonnement précédent ne donne pas la solution et ne prouve même pas son existence. Il est certain que la solution n'existe pas toujours : il peut arriver que le noyau N ne dépende pas de K; l'équation

$$K = \lambda \overset{**}{K} \overset{**}{F}$$

rentre en effet dans le type que nous étudions actuellement et il est clair que la solution n'existe que si λ est constante caractéristique de la fonction connue $F(x, y)$.

Le problème n'a pas été étudié en général, contentons-nous de montrer l'existence de solutions dans des cas étendus.

Supposons que les F_i admettent une fonction fondamentale commune à gauche et une fonction fondamentale commune à droite et que l'on ait

$$\int_a^b F_i(x, s) \varphi(s)\, ds = \frac{\varphi(x)}{\mu_i}, \qquad \int_a^b F_i(s, y) \varphi(s)\, ds = \frac{\psi(y)}{\mu_i},$$

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x)\, dx = 1,$$

ce qui exige (par exemple [2], Chap. XXXI) que μ_i soit un pôle simple de la résolvante de $F_i(x, y)$. Il existe alors une solution de l'équation (20) de la forme $\frac{\varphi(x)\psi(\lambda)}{\lambda}$, λ étant une constante qui vérifie une équation algébrique facile à former [44].

On peut encore supposer que les μ_i sont infinis, de sorte que

$$\int_a^b F_i(x, s)\,\varphi(s)\,ds = \int_a^b \psi(s)\,F_i(s, y)\,ds = 0 \tag{22}$$

et l'on obtient encore une solution de la forme $\frac{\varphi(x)\psi(y)}{\lambda}$ [44].

Remarquons encore que, si K et K′ sont des solutions de (20) qui vérifient $\overset{**}{K}\overset{**}{K'} = \overset{**}{K'}\overset{**}{K} = 0$, $K + K'$ est une autre solution. Les solutions que nous venons d'obtenir à l'aide de solutions fondamentales et des fonctions qui vérifient (22) sont justement orthogonales au sens de Goursat, c'est-à-dire qu'elles vérifient deux à deux les équations précédentes; en les ajoutant en nombre fini on obtient encore des solutions.

Si les fonctions F_i sont symétriques et deux à deux permutables, les théorèmes du n° 43 permettent de trouver des couples de fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(y)$ pour lesquelles $\varphi_n(x) = \psi_n(x)$ et qui vérifient

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_p(x)\,dx = 0 \quad \text{si } n \neq p.$$

On pourra donc trouver une infinité de solutions.

Ce résultat s'étendrait à d'autres cas très généraux.

50. Cas où F_m et a_{m-1} ne sont nuls ni l'un ni l'autre. — Admettons l'existence de deux solutions $K(x, y)$ et $K'(x, y)$. Posons

$$K' = K + \Phi(x, y);$$

Φ vérifie une équation de la forme

$$(a_0 + \overset{**}{H}_0)\overset{**}{\Phi}{}^m + (a_1 + \overset{**}{H}_1)\overset{**}{\Phi}{}^{m-1} + \ldots + (a_{m-1} + \overset{**}{H}_m)\overset{**}{\Phi}{}^m = 0,$$

où les H_i sont permutables si, comme on le supposera, K et K′ sont permutables entre eux. Mais, même si l'on ne suppose rien sur la permutabilité de K et de K′ avec les fonctions données et sur leur permutabilité réciproque, le résultat du numéro précédent montre que la différence Φ est de la forme

$$a_1(x)\,b_1(y) + a_2(x)\,b_2(y) + \ldots + a_n(x)\,b_n(y).$$

La solution n'est pas unique en général : l'équation en Φ a souvent des racines.

Il reste à trouver une solution particulière. Le principe indiqué par Volterra (*voir* n° **42**) donne la solution de ce problème. On le remplace par un problème d'algèbre où des multiplications ordinaires prennent la place des opérations de composition et, de la solution du problème d'algèbre, on déduit celle de l'équation intégrale en faisant le changement inverse du précédent. Il est vrai que la méthode de Volterra a été énoncée par son auteur en supposant que les fonctions obtenues comme solutions d'équations algébriques ou différentielles sont méromorphes par rapport au paramètre ; dans le cas actuel ces fonctions ont en général des points critiques. Mais la méthode peut être généralisée. C'est ce que je vais montrer en ne traitant qu'un cas simple et en m'inspirant d'une suggestion de Lebesgue [**28**], [**44**].

J'admets que chaque F_i, coefficient de (20), est la somme d'une série

$$F_i(x, y) = e_{i,1}\,z\,G(x, y) + e_{i,2}\,z^2\overset{**}{G}(x, y) + \ldots + e_{i,n}\,z^n\overset{**}{G}(x, y) + \ldots;$$

je suppose le noyau G borné pour simplifier et j'admets qu'il existe une série à rayon de convergence fini

$$A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n + \ldots$$

telle que

$$A_n \geqq 0, \qquad |e_{i,n}| < A_n \qquad (i = 0, s, \ldots, m;\ n = s, 2, \ldots);$$

la série $F_i(x, y)$ est alors entière en z.

La méthode de Volterra fait intervenir les fonctions

$$f_i(z) = e_{i,1}\,z + e_{i,1}\,z^2 + \ldots + e_{i,n}\,z^n + \ldots$$

et l'équation algébrique

$$[a_0 + f_0(z)]\,u^m + [a_1 + f_1(z)]\,u^{m-1} + \ldots + [a_{m-1} + f_{m-1}(z)]\,u + f_m.$$

La solution en u qui est nulle pour $z = 0$ est développable au voisinage de $z = 0$ si $a_{m-1} \neq 0$:

$$u = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots.$$

La fonction

$$K(z \mid x, y) = c_1 z G(x, y) + c_2 z^2 \overset{**}{G^2}(x, y) + \ldots + c_n z^n \overset{**}{G^n}(x, y) + \ldots$$

vérifie l'équation (17) si z est voisin de zéro. Le prolongement analytique en z de cette fonction vérifie aussi l'équation (20). Or, le théorème de Hadamard sur la multiplication des singularités et le théorème de Fredholm montrent que les points singuliers de $K(z \mid x, y)$ sont indépendants de x et de y. Ils ne peuvent être que de la forme $\alpha\beta$, α étant un point singulier de $u(z)$ et β une constante caractéristique du noyau $G(x, y)$ [44].

Ainsi, le problème a une solution, dans le cas étudié tout au moins. On peut prévoir l'existence d'une infinité d'autres solutions s'obtenant par l'addition d'un nombre fini de termes de la forme $\frac{\varphi(x)\psi(y)}{\lambda}$. Si G a une infinité de pôles simples, ces termes existent certainement [44].

En résumé, dans ce cas particulier tout au moins, on est conduit à la conclusion suivante : le problème a des solutions, deux solutions différentes diffèrent d'une expression de la forme $\sum_1^{n+} a_i(x)\, b_i(y)$.

51. **Cas où a_{m-1} est nul.** — Ce cas, bien différent des précédents, a été assez souvent étudié.

Volterra a résolu l'équation (20) quand toutes les constantes a_i sont nulles et quand toutes les fonctions données sont de la forme $\sum_1^n a_i(x) b_i(y)$ [7]. Il emploie sa méthode basée sur les tableaux et les substitutions correspondantes; il donne aussi la solution générale qui comprend des fonctions n'ayant pas la forme des fonctions données.

Lauricella a fait l'étude des équations binomes

$$\overset{**}{K^n} = F$$

dans le cas où F est symétrique [23], $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots$ désignant les constantes caractéristiques de F. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions symétriques est que la série

$\Sigma\lambda_p^{-\frac{2}{p}}$ converge. Si n est impair, il y a une solution; si n est pair, il y en a une infinité.

Lauricella a encore fait une étude très détaillée des deux équations

$$\overset{**}{K}{}^2 - \overset{**}{P}\overset{**}{K} + Q = 0,$$
$$\overset{**}{K}{}^3 + \overset{**}{P}\overset{**}{K} + Q = 0$$

dans son Mémoire posthume [26]. Citons le théorème relatif à l'équation du second degré : *Supposons* P *et* Q *symétriques, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait des solutions symétriques est que les fonctions* P *et* Q *soient permutables, que la série* $\sum \frac{1}{\Delta_n}$ *converge, les* Δ_n *étant les constantes caractéristiques du « discriminant »* $\overset{**}{P}{}^2 - 4Q$. Les solutions dont le nombre n'est pas fini se groupent par deux : deux solutions d'un même couple ont pour somme P.

La plus simple des équations de ce type est d'ailleurs

$$\overset{**}{K}\overset{**}{N} = F. \tag{23}$$

Supposons N, F et l'inconnue symétriques, permutables et bornés. Décomposons K et N comme il a été dit au n° 43 et gardons les notations indiquées. Il vient

$$\overset{**}{K'}\overset{**}{N'} = F,$$

K′ et N′ ayant exactement les mêmes fonctions fondamentales, soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$; désignons par λ_n, μ_n, V_n respectivement les constantes caractéristiques de K′, N′ et F. L'application du théorème de Hilbert et Schmidt donne

$$F = \sum_1^\infty \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n \mu_n},$$

la série étant uniformément convergente en x et y séparément, et, comme il est facile de le voir, par rapport à l'ensemble des variables. Les constantes caractéristiques de F sont donc les nombres $\lambda_n \mu_n = \nu_n$; il en résulte que la série $\sum \left(\frac{\mu_n}{\nu_n}\right)^2$ converge. Cette condition est suffisante (*voir* [42]). Pour que les noyaux symétriques et bornés N et F donnent lieu à une solution de même espèce pour l'équation (23), il est nécessaire et suffisant que N et F aient les mêmes solutions fondamentales et que leurs constantes caractéristiques soient telles que la série $\sum \left(\frac{\mu_n}{\nu_n}\right)^2$ converge. Si N est fermé la solution est unique ([1]).

Dans le cas où $a_{m-1} = 0$, une condition doit être vérifiée pour qu'il y ait des solutions; elle consiste dans la convergence d'une série, tout au moins quand on ne s'occupe que des fonctions symétriques. La solution peut être ou ne pas être unique. S'il y a plusieurs solutions, la différence de deux d'entre elles n'est plus de la forme $\sum_1^n a_i(x)\, b_i(y)$.

52. Équations intégro-différentielles. — Le principe de Volterra fournit la solution de certaines équations intégro-différentielles où la dérivation porte sur une variable z autre que x ou y. Bornons-nous à citer l'exemple de l'équation

$$\frac{\partial W}{\partial z}(z \mid x, y) = F(x, y) + \int_0^1 F(x\xi)\, W(z \mid \xi y)\, d\xi.$$

La solution est

$$W = zF + z^2 \frac{\overset{**}{F^2}}{2!} + z^3 \frac{\overset{**}{F^3}}{3!} + \dots.$$

Le problème est celui qui correspond à l'équation

$$\frac{du}{dz} = 1 \overset{*}{+} u$$

et il a suffi de remplacer dans la solution

$$u = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2\,!} + \frac{z^3}{3\,!} + \dots$$

les multiplications par des opérations de composition. On trouvera d'autres exemples dans les travaux de Volterra [7], [52].

([1]) L'équation (23) est d'ailleurs une équation intégrale de première espèce étudiée dans la Première Partie de ce fascicule; il y figure un paramètre. Il est naturel que le résultat s'exprime par la convergence d'une série.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Exposés généraux sur la théorie des équations intégrales.

1. Fréchet et Heywood. — L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique (Paris, 1912; Hermann).
2. Goursat. — Cours d'Analyse mathématique, t. III (Paris, 1915; Gauthier-Villars).
3. Lalesco. — Introduction à la théorie des équations intégrales (Paris, 1912; Hermann).
4. Lévy (Paul). — Leçons d'Analyse fonctionnelle (Paris, 1922; Gauthier-Villars).
5. Schmidt. — Zur theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen (*Mathematische Annalen*, Band 63, 1907).
6. Volterra. — Leçons sur les équations intégrales publiées par Tomassetti et Zarlatti (Paris, 1913; Gauthier-Villars).
7. Volterra. — Leçons sur les fonctions de lignes publiées par Pérès (Paris, 1913; Gauthier-Villars).

Ouvrages généraux cités.

8. Borel. — Leçons sur les séries à termes positifs, rédigées par d'Adhémar (Paris, 1902; Gauthier-Villars).
9. Delsarte. — Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 57, 1932).
10. Lebesgue. — Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives (Paris, 1928, 2e édition; Gauthier-Villars).
11. Picard. — Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles (Paris, 1927; Gauthier-Villars).

Mémoires.

12. Bateman. — Inversion of a definite integral (*Mathematische Annalen*, Band 63, 1907).
13. Burckhardt, *Sitzungberichte Munckner Akad. Math. Phys. Klasse*, 1909, nº 10.
14. Fischer. — Sur la convergence en moyenne (*Comptes rendus*, t. 144, 1907).
15. Hadamard. — Le principe de Huygens (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 52, 1924).
16. Hadamard. — Théorème sur les séries entières (*Acta mathematica*, t. 22, 1898).

17. Humbert (Pierre). — On some results concerning integral equations (*Proceedings of the Edinburgh mathematical Society*, session 1913-1914, vol. 32).

18. Humbert (Pierre). — Le calcul symbolique (Collection des *Actualités scientifiques*, Paris, 1934; Hermann).

19. Hilbert. — Grünzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Zweite Mittelteilung) (*Nachrichten von der Gesellschaft zu Göttingen*, 1904).

20. Lauricella. — Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, vol. 29, 1910, 1er semestre).

21. Lauricella. — Sopra alcuni potenziale logaritmici di strato lineare (*Atti della R. Accademia dei Lincei*, vol. 19, 6 mars 1911).

22. Lauricella. — Sull' equazione integrale de la specie relativa al probleme di Dirichlet sul piano (*Atti della R. Accademia dei Lincei*, vol. 19, 1er mai 1910).

23. Lauricella. — Sopra i nuclei reiterati (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. 20, 18 juin 1911).

24. Lauricella. — Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. 21, 1er juin 1913).

25. Lauricella. — Sopra le funzioni permutabili di 2a speci (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. 22, 16 mars 1913).

26. Lauricella. — Sopra l'algebra delle funzioni permutabili (*Annali di Matematica*, vol. 21, 1913).

27. Lalesco. — Sur l'équation de Volterra (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1908).

28. Lebesgue. — Sur un théorème de M. Volterra (*Société mathématique de France*, t. 40, 1912).

29. Lerch. — Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel (*Acta mathematica*, t. 27, 1903).

30. Lévy (Paul). — Sur le théorème de MM. Fischer et Fr. Riesz et sur la convergence en moyenne (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 49, novembre 1925).

31. Lévy (Paul). — Le calcul symbolique d'Heaviside (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 50, juin 1926).

32. Mercer. — Functions of positive and negative type (*Philosophical Transactions of the Royal Society*, t. 209, 1900, série A).

33. Pérès. — Sulle equazioni integrali (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. 22, 19 janvier 1913).

34. Pérès. — Sur les transformations qui conservent la composition (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 47, 1906).

35. Picard. — Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, vol. 29, 1910, 1er semestre).

36. Picard. — Sur un problème classique de la théorie de la chaleur et sur deux équations fonctionnelles qui s'y rattachent (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 49, décembre 1925).

37. RIEMANN. — Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée (*Œuvres*, traduction Laugel).

38. RIESZ (Frédéric). — Sur les systèmes orthogonaux de fonctions (*Comptes rendus*, t. 144, 18 mars 1907).

39. RIESZ (Frédéric). — Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. 28, 1911).

40. SCHMIDT. — Sur la puissance des systèmes orthogonaux de fonctions continues (*Comptes rendus*, t. 143, 1906).

41. SINIGALLIA. — Sulle funzioni permutabili di seconde speci (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. 20, avril 1911).

42. SOULA. — Sur la permutabilité de deuxième espèce (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. 21, octobre 1912).

43. SOULA. — Sur les fonctions permutables de deuxième espèce (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. 22, février 1913).

44. SOULA. — Sur certaines équations intégrales (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. 23, février 1914).

45. SOULA. — Sur l'équation intégrale de Laplace et Abel (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 57, 1933).

46. SOULA. — Sur une suite de nombres qui correspond à une fonction sommable (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 12, 1933).

47. VESSIOT. — Sur les fonctions permutables et les groupes continus de transformations fonctionnelles linéaires (*Comptes rendus*, 1912).

48. VOLTERRA. — Sopra un probleme di elettrostatica (*Transunti Lincei*, 1884).

49. VOLTERRA. — Questioni generali sulle equazioni integrali e integro-differentieli (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. 19, février 1910).

50. VOLTERRA. — Sopra le funzioni permutabili (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, t. 19, avril 1910).

51. VOLTERRA. — Contribuzioni allo studio dei funzioni permutabili (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. 20, mars 1911).

52. VOLTERRA. — Sopra le funzioni permutabili di 2 a specie e le equazioni integrali (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. 20, avril 1911).

53. VOLTERRA — Function of composition (*The Rice Institute Pamphlet*, vol. 7, octobre 1920).

54. YOUNG (W.-H.). — On bounded, not necessary continus solutions of integral equations (*Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 41, 1910).

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

L'ÉQUATION INTÉGRALE DE PREMIÈRE ESPÈCE A LIMITES FIXES.

DEUXIÈME PARTIE.

LES FONCTIONS PERMUTABLES A LIMITES FIXES.