

CL. GUICHARD

## **Théorie générale des réseaux, applications**

*Mémorial des sciences mathématiques*, fascicule 77 (1936)

[http://www.numdam.org/item?id=MSM\\_1936\\_\\_77\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSM_1936__77__1_0)

© Gauthier-Villars, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# MÉMORIAL

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,  
 DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,  
 MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),  
 DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

**Henri VILLAT**

Membre de l'Institut  
 Professeur à la Sorbonne

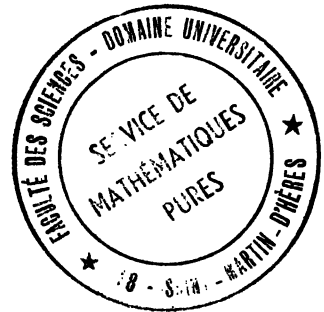
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXVII

**Théorie générale des réseaux, applications**

Par M. CL. GUICHARD

Correspondant de l'Institut  
 Professeur de Géométrie supérieure à la Sorbonne



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
 Quai des Grands-Augustins, 55.

1936



---

# THÉORIE GÉNÉRALE DES RÉSEAUX

## APPLICATIONS

Par **M. Cl. GUICHARD,**

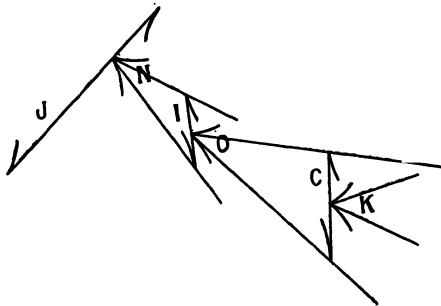
Correspondant de l'Institut  
Professeur de Géométrie supérieure à la Sorbonne.

---

### INTRODUCTION.

1. La classification générale des réseaux peut être résumée par le tableau suivant (*fig. 1*) :

Fig. 1.



Congruences J. Réseaux conjugués N. Congruences harmoniques I.  
Réseaux conjugués O. Congruences harmoniques C. Réseaux conjugués K.

Les opérations géométriques étant effectuées dans l'ordre indiqué ; lorsqu'on opère dans l'ordre inverse, partant d'un espace d'ordre  $n$ , on est amené à envisager des espaces d'ordre supérieur à  $n$ .

Nous étudierons d'abord dans le premier Chapitre la classification des réseaux et congruences pour des espaces d'ordre 2, 3, 4, 5 et 6. Les résultats obtenus s'interprètent immédiatement dans un espace d'ordre 3 et nous indiquerons dans la suite quelques applications

immédiates. Pour tous ces espaces, la classification est basée sur la loi d'orthogonalité des éléments. Le fait essentiel est que certains éléments de la suite indiquée sont des éléments qui se correspondent par orthogonalité dans les espaces d'ordre 2, 3, 4 et 5. Il paraît utile pour ne pas compliquer les notations de se servir d'appellations nouvelles pour les éléments correspondants.

Nous signalerons aussi que, d'une façon systématique, les systèmes intégrables par la méthode de Laplace sont écartés. Enfin pour un espace d'ordre 2 se présentent du point de vue général quelques difficultés qui seront signalées au début de l'étude correspondante.

### ESPACE A DEUX DIMENSIONS.

2. Deux fonctions quelconques  $x_1, x_2$  de deux variables  $u$  et  $v$  définissent les coordonnées variables d'un point  $m$  d'un plan. Il est possible en général de déterminer une équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = P \frac{\partial x}{\partial u} + Q \frac{\partial x}{\partial v}$$

qui admette pour solutions les fonctions  $x_1, x_2$ .

On peut donc dire que deux familles de courbes planes définissent toujours un réseau.

Soit  $x_3$  une solution linéairement distincte des deux solutions précédentes. Le point  $M$  de coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  décrit dans un espace à trois dimensions un réseau. Le point  $m$  peut être considéré comme la projection du point  $M$  de l'espace d'ordre 3 sur l'espace d'ordre 2.

Un réseau plan  $m$  peut donc être défini comme la projection d'un réseau  $M$  d'un espace d'ordre 3. Remarquons en outre que les tangentes au réseau  $m$  peuvent également être obtenues en projetant les tangentes correspondantes du réseau  $M$ .

La transformation de Laplace peut être définie en partant du réseau  $m$ . Les réseaux transformés sont les projections des réseaux qui se déduisent du réseau  $M$  par des opérations analogues.

Désignons par  $\dots, s_1, s, m, r, r_1, \dots$  la suite de réseaux dérivés du réseau  $m$  par la méthode de Laplace (les réseaux successifs se déduisant les uns des autres par une transformation de  $u$  vers  $v$ ); par  $\dots, S_1, S, M, R, R_1, \dots$  la suite analogue déduite du réseau  $M$ .

Nous dirons que la droite  $mr$  projection de la droite  $MR$  décrit une congruence  $d$  projection de la congruence  $D$  décrite par  $MR$ . Les réseaux conjugués à la congruence  $d$  seront par définition les projections des réseaux conjugués à la congruence  $D$ .

Dans ces conditions, on vérifie facilement que les lois de parallélisme indiquées pour un espace d'ordre quelconque s'appliquent à un espace d'ordre 2, que les raisonnements relatifs aux réseaux conjugués ou harmoniques à une congruence, ou aux congruences conjuguées ou harmoniques aux réseaux sont légitimes.

Les propriétés d'orthogonalité peuvent être également appliquées.

Deux réseaux plans  $m, m'$  sont orthogonaux si la première tangente de l'un des réseaux est perpendiculaire à la seconde tangente de l'autre.

On voit facilement que si l'on désigne par  $\dots, s'_1, s', m', r', r'_1, \dots$ , la suite de réseaux transformés du réseau  $m'$  par la méthode de Laplace analogue à celle qui a été indiquée pour le réseau  $m$ , les réseaux  $\dots; s_1, r'_1; s, r'; r, s'; r, s'_1, \dots$  déduits de  $m$  et  $m'$  sont des réseaux orthogonaux. Les congruences  $\dots, s_1 s, r_1 r'; sm, r' m'; mr, m' s'; r r_1, s' s'_1; \dots$  sont, par définition, des congruences orthogonales.

Il en résulte que si l'on considère dans un espace d'ordre 3 une congruence  $G$  orthogonale à un réseau  $M$ :  $a$ , la trace de cette congruence sur un espace d'ordre 2 décrit un réseau orthogonal au réseau  $m$  projection du réseau  $M$ :  $b$ , la congruence  $g$  projection de la congruence  $G$  sur un espace d'ordre 2 est orthogonale à la congruence obtenue en prenant la trace du réseau sur cet espace.

La démonstration géométrique de ces propriétés est immédiate.

**3. Déterminants orthogonaux et réseaux orthogonaux O.** — Un déterminant orthogonal d'ordre 2 s'écrit

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}$$

et l'on peut poser

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos \varphi, & \xi_2 &= \sin \varphi, \\ \eta_1 &= -\sin \varphi, & \eta_2 &= \cos \varphi. \end{aligned}$$

Les rotations  $m$  et  $n$  sont

$$m = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad n = \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Les réseaux orthogonaux correspondants peuvent être obtenus par les méthodes suivantes :

a. Soient  $h$  et  $l$  deux fonctions de  $u$  et de  $v$  telles que l'on ait

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial v} &= -l \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{\partial l}{\partial u} &= h \frac{\partial \varphi}{\partial v}.\end{aligned}$$

Les systèmes compatibles

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_i}{\partial u} &= h \xi_i \\ \frac{\partial X_i}{\partial v} &= l \eta_i\end{aligned}\quad (i = 1, 2)$$

définissent les coordonnées d'un point qui décrit un réseau O.

b. Posons

$$X_i = q \xi_i + r \eta_i \quad (i = 1, 2).$$

Le point de coordonnées  $X_i$  décrit au réseau O correspondant au déterminant orthogonal si les fonctions  $q$  et  $r$  satisfont aux relations

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial u} &= -q \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{\partial q}{\partial v} &= r \frac{\partial \varphi}{\partial v}.\end{aligned}$$

Ces fonctions étant connues, on obtient

$$\begin{aligned}h &= \frac{\partial q}{\partial u} - r \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ l &= \frac{\partial r}{\partial v} + q \frac{\partial \varphi}{\partial v}.\end{aligned}$$

A chaque solution  $q, r$  correspond un réseau O.

4. **Congruences conjuguées aux réseaux O.** — Toute congruence conjuguée à un réseau O est une congruence 3I. Nous dirons que de telles congruences sont des congruences H. La théorie générale permet de définir les congruences 2H, 3H, ..., pH qui sont des congruences 4I, 5I, ..., (p + 2) I.

On voit également que :

Les congruences conjuguées à des réseaux 2O sont des con-

gruences  $H$  ou  $2H$ . (Il existe une seule congruence  $H$  conjuguée à un réseau  $2O$ .)

Les congruences conjuguées à des réseaux  $pO$  sont des congruences  $(p - 2)H$ ,  $(p - 1)H$ ,  $pH$ .

**5. Classification des réseaux et des congruences.** — Il est évident que, dans un espace d'ordre 2, un réseau  $O$  est orthogonal à lui-même. Toute congruence conjuguée à un réseau  $O$  est orthogonale à une congruence harmonique à ce réseau.

Toute congruence orthogonale à une congruence  $H$  est une congruence  $C$  et inversement.

Tout réseau orthogonal à un réseau  $O$  est un réseau  $O$ .

Considérons maintenant un réseau  $2O$  décrit par un point  $M$ . Il existe une congruence  $H$  conjuguée à ce réseau. A cette congruence correspond par orthogonalité une congruence  $C$ . Au réseau  $M$  conjuguée à  $H$  correspond un réseau  $N$  harmonique à  $C$ . Ce réseau  $N$  peut être un réseau  $O$ ,  $2O$  ou  $3O$ .

La première et la troisième hypothèse doivent être écartées. Si le réseau  $N$  était un réseau  $O$ , il en serait de même du réseau  $M$ . D'autre part, si le réseau  $N$  était un réseau  $3O$ , il existerait deux congruences  $C$  harmoniques à ce réseau et il devrait exister deux congruences  $H$  conjuguées au réseau  $M$ .

Tout réseau orthogonal à un réseau  $2O$  est un réseau  $2O$ .

Considérons maintenant une congruence  $2H$  décrite par une droite  $D$ . Parmi les réseaux conjugués à cette congruence existe un réseau  $2O$  décrit par un point  $M$ . La loi d'orthogonalité lui fait correspondre un réseau  $2O$  décrit par un point  $N$ . A la congruence décrite par  $D$  correspond une congruence harmonique au réseau  $N$  décrite par une droite  $A$ . Cette congruence peut être une congruence  $C$  ou  $2C$ .

La première hypothèse est à rejeter. Les congruences  $C$  correspondant par orthogonalité aux congruences  $H$ .

Donc :

Toute congruence orthogonale à une congruence  $2H$  est une congruence  $2C$  et inversement.



En continuant ainsi on montrerait que :

Tout réseau orthogonal à un réseau  $pO$  est un réseau  $pO$ .

Toute congruence orthogonale à une congruence  $pH$  est une congruence  $pC$  et inversement.

La théorie générale définit les réseaux  $K$  conjugués à des congruences  $C$ . Les réseaux orthogonaux seront des réseaux harmoniques à des congruences  $H$ . Ces congruences sont des congruences  $3I$ . Les réseaux harmoniques sont des réseaux  $3N$ ,  $4N$  ou  $5N$ .

Un réseau d'un espace d'ordre 2 (les systèmes intégrables par la méthode de Laplace exceptés) ne peut être qu'un réseau  $5N$ . Les réseaux  $N$  n'existent qu'à partir d'un espace d'ordre 6.

Nous dirons qu'un réseau  $5N$  est un réseau  $L$ .

Dans ces conditions on voit que :

Tout réseau orthogonal à un réseau  $K$  est un réseau  $L$  et inversement.

Nous appellerons réseaux  $2L$ ,  $3L$ , ...,  $pL$  les réseaux  $6N$ ,  $7N$ , ...,  $(p+4)N$ .

Un raisonnement analogue à ceux qui ont été faits précédemment montre que :

Tout réseau orthogonal à un réseau  $pK$  est un réseau  $pL$  et inversement.

La classification peut être résumée par le tableau suivant :

Congruences conjuguées.	Réseaux.	Congruences harmoniques.
H	O	C
H, $2H$	$2O$	C, $2C$
H, $2H$ ; $3H$	$3O$	C, $2C$ , $3C$
$(p-2)H$ , $(p-1)H$ , $pH$	$pO$	$(p-2)C$ , $(p-1)C$ , $pC$
	L	H, $2H$ , $3H$
	$pL$	$pH$ , $(p+1)H$ , $(p+2)H$
	K	
	$pK$	
C, $2C$ , $3C$		
$pC$ , $(p+1)C$ , $(p+2)C$		

Réseaux conjugués.	Congruences.	Réseaux harmoniques.
O, 2O, 3O	H	L
2O, 3O, 4O	2H	L, 2L
3O, 4O, 5O	3H	L, 2L, 3L
$pO, (p+1)O, (p+2)O$	$pH$	$pL, (p+1)L, (p+2)L$
K	C	O, 2O, 3O
K, 2K	2C	2O, 3O, 4O
K, 2K, 3K	3C	3O, 4O, 5O
$pK, (p+1)K, (p+2)K$	$pC$	$pO, (p+1)O, (p+2)O$

ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

6. **Déterminants orthogonaux et réseaux orthogonaux (O).** — Un déterminant orthogonal est défini par les quantités  $x, \xi, \eta$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}$$

Si l'on désigne par  $a, b, m, n$  les rotations de ce déterminant, les formules générales s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= a \xi_i, & \frac{\partial \xi_i}{\partial u} &= -a x_i - m \eta_i, & \frac{\partial \eta_i}{\partial u} &= m \xi_i \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= b \eta_i; & \frac{\partial \xi_i}{\partial v} &= n \eta_i; & \frac{\partial \eta_i}{\partial v} &= -b x_i - n \xi_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3).$$

On a les conditions de compatibilité

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial v} &= bm \\ \frac{\partial b}{\partial u} &= an \end{aligned} \quad \left( \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ab = 0 \right).$$

Le point  $m$  de coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  décrit sur la sphère de rayon 1 un réseau orthogonal. Les quantités  $\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3$  sont les cosinus directeurs des première et seconde tangentes de ce réseau.

La théorie générale permet de former en partant d'un déterminant

orthogonal des réseaux orthogonaux par les deux méthodes suivantes :

a. Soient  $h$  et  $l$  deux fonctions de  $u$  et de  $v$  qui satisfont aux relations

$$\frac{\partial h}{\partial v} = lm,$$

$$\frac{\partial l}{\partial u} = hn.$$

Les fonctions  $x_1, x_2, x_3$  obtenues par l'intégration des systèmes complets

$$\frac{\partial X_i}{\partial u} = h\xi_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = l\eta_i$$

définissent les coordonnées d'un point  $M$  qui décrit un réseau orthogonal.

b. Posons

$$X_i = p x_i + q \xi_i + r \eta_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

et exprimons que lorsque  $u$  et  $v$  varient seuls les tangentes aux courbes décrites par le point  $M$  de coordonnées  $X_1, X_2, X_3$  ont des paramètres directeurs proportionnels aux quantités  $\xi, \eta$ .

On est alors conduit aux relations

$$\frac{\partial p}{\partial u} = aq, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = nr,$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = br; \quad \frac{\partial r}{\partial u} = mq,$$

et l'on obtient

$$h = ap + \frac{\partial q}{\partial u} + mr,$$

$$l = bp + \frac{\partial r}{\partial v} + nq.$$

Les fonctions  $q$  et  $r$  étant connues, la détermination de la fonction  $p$  et par suite du réseau exige l'intégration d'un seul système complet.

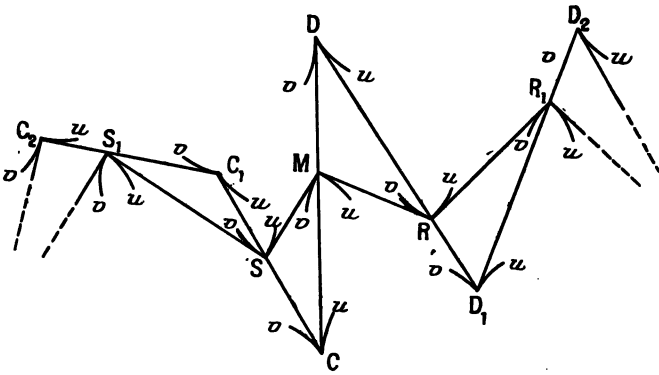
Le réseau orthogonal décrit par le point  $M$  est formé par les lignes de courbure. Le réseau correspondant décrit par le point  $m$  donne la représentation sphérique de ces lignes de courbure du réseau  $M$ .

**7. Congruences orthogonales aux réseaux  $O$ .** — Les normales à la

surface décrite par le point M engendrent, lorsque  $u$  ou  $v$  varient seuls, des développables. Elles définissent une congruence orthogonale au réseau. Nous dirons que les congruences orthogonales à un réseau O sont des congruences O. Les quantités  $x_1, x_2, x_3$  définissent un système de cosinus directeurs des droites qui engendrent des congruences normales au réseau.

Considérons en particulier la congruence décrite par les normales en M au réseau O. Cette congruence est conjuguée à ce réseau (*fig. 2*).

Fig. 2.



Réseau O et congruence O conjugués.

Un calcul facile montre que les rayons de courbure de la surface M sont donnés par les formules

$$R_1 = -\frac{h}{a},$$

$$R_2 = -\frac{l}{b},$$

et que les coordonnées des points C et D qui décrivent les premier et second réseaux focaux de la congruence s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{(C)} \quad & X_i - \frac{h}{a} x_i \\ \text{(D)} \quad & X_i - \frac{l}{b} x_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Désignons par  $\dots, S_2, S_1, S, M, R, R_1, R_2, \dots$  la suite de Laplace déduite du réseau M, le sens de la transformation étant de  $u$  vers  $v$ , par  $\dots, C_2, C_1, C, D, D_1, D_2$  la suite qui se déduit dans les

mêmes conditions des réseaux focaux de la congruence. On voit que les congruences décrites par les droites  $CC_1$ ,  $DD_1$  sont engendrées par les axes des cercles osculateurs aux courbes  $u$  variable  $v$  variable du réseau, que les réseaux  $C_1$ ,  $D_1$  sont décrits par les centres des sphères osculatrices à ces courbes.

Les réseaux  $\dots$ ,  $C_2$ ,  $C_1$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $\dots$  sont harmoniques aux congruences  $\dots$ ,  $S_2S_1$ ,  $S_1S$ ,  $SM$ ,  $MR$ ,  $RR_1$ ,  $R_1R_2$ ,  $\dots$ . La loi d'orthogonalité montre que les réseaux et congruences suivants sont orthogonaux :

Réseaux.	Congruences.	Réseaux.	Congruences.
.....	.....	.....	.....
$S_1$ .....	$D_1D_2$	$C_2$ .....	$R_1R_2$
$S$ .....	$DD_1$	$C_1$ .....	$RR_1$
$M$ .....	$CD$	$C$ .....	$MR$
$R$ .....	$CC_1$	$D$ .....	$MS$
$R_1$ .....	$C_1C_2$	$D_1$ .....	$SS_1$
.....	.....	$D_2$ .....	$S_1S_2$

Les congruences  $O$  de l'espace d'ordre 3 sont les congruences  $2I$  de la théorie générale. Les congruences  $pO$  sont les congruences  $(p+1)I$ .

Ces notations sont justifiées par le résultat suivant, conséquence des lois d'orthogonalité.

Toute congruence orthogonale à un réseau  $pO$  est une congruence  $pO$  et inversement.

Il suffit pour démontrer cette propriété d'établir que si elle a lieu jusqu'au nombre  $p$  elle est encore vérifiée pour le nombre  $p+1$ .

Soit en effet un réseau  $(p+1)O$  décrit par un point  $M$ . Il existe parmi les congruences conjuguées à ce réseau une congruence  $\Delta$  qui est  $pO$ . Un réseau  $M_1$  orthogonal à  $\Delta$  est par hypothèse  $pO$ . Il existe une congruence  $\Delta_1$  conjuguée au réseau  $M_1$  qui est orthogonale au réseau  $M$ . Cette congruence  $\Delta_1$  sera  $(p-1)O$ ,  $pO$ , ou  $(p+1)O$ . Comme la loi d'orthogonalité est supposée vérifiée jusqu'à l'ordre  $p$ , les deux premières hypothèses doivent être rejetées et la congruence  $\Delta_1$  orthogonale au réseau  $(p+1)O$  est une congruence  $(p+1)O$ .

La correspondance par orthogonalité des éléments est réciproque. Il en résulte que tout réseau orthogonal à une congruence  $pO$  est un

réseau  $pO$ . Le raisonnement précédent conduit en sens inverse permettrait d'établir ce résultat.

**8. Classification des réseaux et des congruences.** — Cette classification résulte immédiatement des propriétés précédentes.

Considérons une congruence  $O$  et un réseau  $O$  orthogonal à la congruence. Toute congruence harmonique au réseau  $O$  est une congruence  $C$ . Elle est orthogonale à un réseau harmonique à la congruence  $O$ . Les congruences  $O$  sont des congruences  $2I$ . Les réseaux harmoniques sont des réseaux  $2N, 3N, 4N$ .

Il ne peut exister de réseaux  $N$  (les systèmes intégrables par la méthode de Laplace étant écartés) que dans un espace d'ordre au moins égal à 6. Dans un espace d'ordre trois il n'y a donc lieu de considérer que des réseaux  $4N$ .

Nous appellerons réseau  $C$  un réseau  $4N$ . Ce réseau est applicable sur un autre réseau de l'espace d'ordre 3.

Il résulte des raisonnements précédents que :

Tout réseau orthogonal à une congruence  $C$  est un réseau  $C$  et inversement.

Nous appellerons réseau  $pC$  un réseau de l'espace d'ordre 3 applicable sur un autre réseau situé dans un espace d'ordre  $p + 2$ .

On établirait facilement par une méthode analogue à celle qui a été employée pour les réseaux et congruences  $pO$  que :

Tout réseau  $pC$  est orthogonal à une congruence  $pO$  et inversement.

Un réseau  $K$  est un réseau conjugué à une congruence  $C$ . Par orthogonalité on fait correspondre à un réseau  $K$  une congruence conjuguée à un réseau  $C$ . Un réseau  $C$  est un réseau  $4N$ . Les congruences conjuguées à ce réseau sont des congruences  $4J, 5J$ , ou  $6J$ . Les congruences  $J$  n'existent qu'à partir d'un espace d'ordre 8, on ne peut donc avoir dans un espace d'ordre 3 que des congruences  $6J$ . Les congruences  $6J$  seront des congruences  $K$ . Les congruences  $pK$  étant des congruences  $(p + 5)J$ .

Dans ces conditions :

Toute congruence orthogonale à un réseau  $K$  est une congruence  $K$  et inversement.

On verrait comme précédemment que :

Toute congruence  $pK$  est orthogonale à un réseau  $pK$  et inversement.

Nous résumerons la classification dans le tableau suivant. Il est inutile de distinguer les réseaux et les congruences. La loi d'orthogonalité et les notations adoptées permettant d'intervertir ces éléments.

Systèmes conjugués.	Systèmes.	Systèmes harmoniques.
O, 2O	O	C
O, 2O, 3O	2O	C, 2C
2O, 3O, 4O	3O	C, 2C, 3C
$(p-1)O, pO, (p+1)O$	$pO$	$(p-2)C, (p-1)C, pC$
K	C	O, 2O, 3O
K, 2K	2C	2O, 3O, 4O
K, 2K, 3K	3C	3O, 4O, 5O
$(p-2)K, (p-1)K, pK$	$pC$	$pO, (p+1)O, (p+2)O$
C, 2C, 3C	K	
$pC, (p+1)C, (p+3)C$	$pK$	

#### ESPACE A QUATRE DIMENSIONS.

9. Un déterminant orthogonal est défini par les quantités  $x, y, \xi, \eta$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}.$$

En désignant par  $a, b, c, f, m, n$  les rotations, les formules générales s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{du} &= a\xi_i, & \frac{dy_i}{du} &= e\xi_i, \\ \frac{dx_i}{dv} &= b\eta_i; & \frac{dy_i}{dv} &= f\eta_i; \\ \frac{d\xi_i}{du} &= -ax_i - ey_i - m\eta_i, & \frac{d\eta_i}{du} &= m\xi_i, \\ \frac{d\xi_i}{dv} &= n\eta_i; & \frac{d\eta_i}{dv} &= -bx_i - fy_i - n\xi_i \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

avec les conditions

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial v} &= bm, & \frac{\partial e}{\partial v} &= fm, \\ \frac{\partial b}{\partial u} &= an; & \frac{\partial f}{\partial u} &= en, \\ \frac{\partial m}{\partial a} + \frac{\partial n}{\partial v} + ab + ef &= 0.\end{aligned}$$

Soient  $X_1, X_2, X_3, X_4$  les coordonnées d'un point  $M$  qui décrit un réseau  $O$  correspondant au déterminant orthogonal précédent. Pour calculer ces quantités, on déterminera deux fonctions  $h$  et  $l$  de  $u$  et de  $v$ , solutions du système complet

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial v} &= lm, \\ \frac{\partial l}{\partial u} &= hn,\end{aligned}$$

puis on intégrera les systèmes

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_i}{\partial u} &= h\xi_i \\ \frac{\partial X_i}{\partial v} &= l\eta_i\end{aligned}\quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Par le point  $M$  de coordonnées  $X_1, X_2, X_3, X_4$  menons les quatre droites  $MR$  de paramètres  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ ,  $MS$  de paramètres  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ ,  $MP$  de paramètres  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ,  $MQ$  de paramètres  $y_1, y_2, y_3, y_4$ . Ces quatre droites décrivent des congruences.  $MR, MS$  définissent les première et seconde congruences focales du réseau.  $MP, MQ$  deux congruences décrites par des droites normales au réseau. Les foyers  $C_1, C_2$  de la congruence décrite par  $MP$  ont leurs coordonnées définies par les quantités (*fig. 3*)

$$\begin{aligned}(C_1) \quad X_i - \frac{h}{a} x_i \\ (C_2) \quad X_i - \frac{l}{b} x_i\end{aligned}\quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Les droites  $MP, MQ$  décrivent des congruences  $2I$  conjuguées au réseau  $M$ . Il en est de même des droites qui ont pour paramètres directeurs

$$x_i \cos \theta + y_i \sin \theta \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

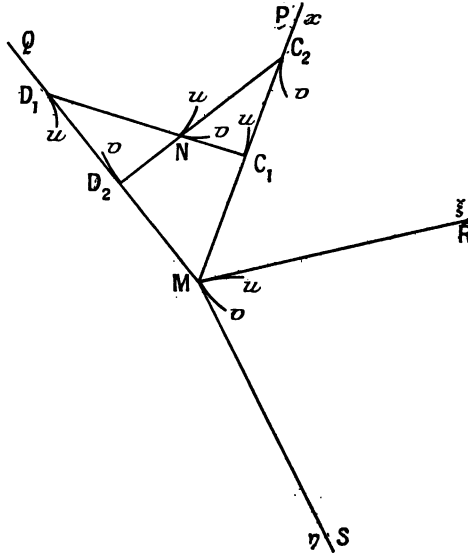


Enfin, les droites qui ont pour paramètres directeurs

$$x_i \pm i y_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

décrivent des congruences I conjuguées au réseau.

Fig. 3.



La théorie générale montre que les congruences I et 2I d'un espace à quatre dimensions sont toutes obtenues par cette méthode.

On voit aussi que les congruences conjuguées à un réseau O sont des congruences I, 2I ou 3I. (Il existe deux seules congruences I.) D'une façon générale les congruences conjuguées aux réseaux  $pO$  sont des congruences  $pI$ ,  $(p+1)I$ ,  $(p+2)I$ .

**10. Classification des réseaux et des congruences.** — L'élément essentiel qui intervient dans cette classification est le suivant :

Dans un espace d'ordre 4, toute congruence I est orthogonale à elle-même.

Les paramètres  $X_1, X_2, X_3, X_4$  d'une telle congruence satisfont à la relation

$$\sum_{i=1}^{i=4} X_i^2 = 0,$$

qui entraîne comme conséquences immédiates

$$\sum_{i=1}^{i=4} X_i \frac{\partial X_i}{\partial u} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=4} X_i \frac{\partial X_i}{\partial v} = 0.$$

La propriété indiquée est donc établie.

Étudions maintenant les réseaux orthogonaux aux réseaux O. Soit un réseau O décrit par un point M; considérons une congruence I conjuguée à ce réseau. Comme cette congruence est orthogonale à elle-même, au réseau O correspond par orthogonalité un réseau harmonique à la congruence. Ce réseau est un réseau N,  ${}_2N$  ou  ${}_3N$ . Seuls, les réseaux  ${}_3N$  existent dans un espace d'ordre 4. Nous appellerons ces réseaux des réseaux L et par suite :

Tout réseau orthogonal à un réseau O est un réseau L et inversement.

Nous rappellerons rapidement la méthode de formation des réseaux L.

Soient  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  les coordonnées d'un point M du plan PQM défini par deux normales à un réseau O décrit par un point M. On aura, en conservant les notations précédentes,

$$Y_i = X_i + r x_i + \rho y_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_i}{\partial u} &= x_i \frac{\partial r}{\partial u} + y_i \frac{\partial \rho}{\partial u} + \xi_i (h + ar + e\rho), \\ \frac{\partial Y_i}{\partial v} &= x_i \frac{\partial r}{\partial v} + y_i \frac{\partial \rho}{\partial v} + \eta_i (l + br + f\rho). \end{aligned}$$

Déterminons  $r$  et  $\rho$  par les relations

$$\begin{aligned} h + ar + e\rho &= 0, \\ l + br + f\rho &= 0, \end{aligned}$$

qui, par différentiation, entraînent

$$\begin{aligned} a \frac{\partial r}{\partial v} + e \frac{\partial \rho}{\partial v} &= 0, \\ b \frac{\partial r}{\partial u} + f \frac{\partial \rho}{\partial u} &= 0. \end{aligned}$$

On aura

$$\frac{\partial Y_i}{\partial u} = x_i \frac{\partial r}{\partial u} + y_i \frac{\partial \rho}{\partial u},$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial v} = x_i \frac{\partial r}{\partial v} + y_i \frac{\partial \rho}{\partial v}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial u \partial v} = x_i \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} + y_i \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v}.$$

Les fonctions  $Y$  satisfont à la même équation de Laplace que les fonctions  $r$  et  $\rho$ . Le point  $N$  décrit un réseau. D'autre part, on voit que

$$\Sigma dY_i^2 = dr^2 + d\rho^2.$$

Le réseau décrit par le point  $N$  est un réseau  $L$ . Il est facile de vérifier que tout réseau  $L$  peut être obtenu par cette méthode.

Le calcul précédent montre que l'on peut prendre comme paramètres des tangentes au réseau décrit par le point  $N$  les quantités

$$\begin{aligned} f x_i - b y_i, \\ e x_i - a y_i. \end{aligned}$$

On voit ainsi que le réseau obtenu est orthogonal au réseau  $O$  décrit par le point  $M$ . On a en effet les relations

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=4} (e x_i - a y_i) \xi_i &= 0, \\ \sum (e x_i - a y_i) \frac{\partial \xi_i}{\partial u} &= 0, \\ \sum (e x_i - a y_i) \frac{\partial \xi_i}{\partial v} &= 0. \end{aligned}$$

Les réseaux  $2L, \dots, pL$  définis dans les conditions habituelles sont des réseaux  $4N, \dots, (p+2)N$ .

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour un espace d'ordre 2 permet de montrer que :

Tout réseau orthogonal à un réseau  $pO$  est un réseau  $pL$  et inversement.

Toute congruence orthogonale à une congruence  $pI$  est une congruence  $pI$ .

Supposons la loi vérifiée jusqu'à l'ordre  $p$ , montrons qu'elle est encore vraie pour l'ordre  $p + 1$ .

Soit un réseau  $(p + 1)O$  décrit par un point  $M$ . Parmi les congruences conjuguées à ce réseau, il y aura une congruence  $(p + 1)I$  à laquelle correspondra par orthogonalité une congruence  $(p + 1)I$ . Au réseau  $M$  conjugué à la première congruence  $(p + 1)I$  correspondra par orthogonalité un réseau harmonique à la seconde. Ce réseau sera  $(p - 1)L$ ,  $pL$ ,  $(p + 1)L$ . En vertu des hypothèses faites, ce réseau ne peut-être que  $(p + 1)L$ .

En reprenant les raisonnements en sens inverse on montrerait que tout réseau orthogonal à un réseau  $(p + 1)L$  est un réseau  $(p + 1)O$ .

Soit de même une congruence  $(p + 2)I$ , parmi les réseaux conjugués il y aura un réseau  $pO$  auquel correspond par orthogonalité un réseau  $pL$ . A la congruence donnée correspond par orthogonalité une congruence harmonique au réseau  $pL$ . Cette congruence sera  $pI$ ,  $(p + 1)I$  ou  $(p + 2)I$ . D'après les hypothèses faites, la congruence ne peut être que  $(p + 2)I$ .

Remarquons que les congruences décrites par les normales  $MP$ ,  $MQ$  au réseau  $O$  décrit par le point  $M$  sont des congruences  $2I$ . Les paramètres directeurs  $x_i y_i$  de ces droites satisfont aux relations

$$\sum_{i=1}^{i=4} x_i y_i = 0, \quad \sum x_i \frac{\partial y_i}{\partial u} = 0, \quad \sum x_i \frac{\partial y_i}{\partial v} = 0,$$

ce qui montre que les deux congruences  $2I$  ainsi définies sont orthogonales.

Les congruences  $C$  harmoniques aux réseaux  $O$  se transformeront par orthogonalité, en congruences conjuguées aux réseaux  $L$ . Les réseaux  $L$  sont des réseaux  $3N$ . Les congruences conjuguées à ces réseaux sont des congruences  $3J$ ,  $4J$  ou  $5J$ . Il n'y a lieu de considérer dans un espace d'ordre 4 que les congruences  $5J$  que nous appellerons congruences  $K$ .

On peut donc énoncer le résultat suivant :

*Toute congruence orthogonale à une congruence  $C$  est une congruence  $K$  et inversement.*

Les congruences  $2K$ ,  $3K$ , ...,  $pK$  sont les congruences  $6J$ ,  $7J$ , ...,  $(p+4)J$  de la théorie générale.

On établit facilement que toute congruence orthogonale à une congruence  $pC$  est une congruence  $pK$  et inversement.

La classification peut être résumée par le tableau suivant :

Congruences conjuguées.	Réseaux.	Congruences harmoniques.
$I, \quad 2I, \quad 3I$ $2I, \quad 3I, \quad 4I$ $3I, \quad 4I, \quad 5I$ $pI, (p+1)I, (p+2)I$	$O$ $2O$ $3O$ $pO$	$C$ $C, \quad 2C$ $C, \quad 2C, \quad 3C$ $(p-2)C, (p-1)C, pC$
$K$ $K, \quad 2K$ $K, \quad 2K, \quad 3K$ $(p-2)K, (p-1)K, pK$	$L$ $2L$ $3L$ $pL$	$I, \quad 2I, \quad 3I$ $2I, \quad 3I, \quad 4I$ $3I, \quad 4I, \quad 5I$ $pI, (p+1)I, (p+2)I$

Réseaux conjugués.	Congruences.	Réseaux harmoniques.
$O$ $O, \quad 2O$ $O, \quad 2O, \quad 3O$ $(p-2)O, (p-1)O, pO$	$I$ $2I$ $3I$ $pI$	$L$ $L, \quad 2L$ $L, \quad 2L, \quad 3L$ $(p-2)L, (p-1)L, pL$
	$pC$	$pO, (p+1)O, (p+2)O$
$pL, (p+1)L, (p+2)L$	$pK$	

### ESPACE A CINQ DIMENSIONS.

11. Un déterminant orthogonal est déterminé par les quantités  $x, y, z, \xi, \eta$  :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \end{vmatrix}.$$

En désignant par  $a, b; e, f; g, k; m, n$  les rotations, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= a\xi_i, & \frac{\partial y_i}{\partial u} &= e\xi_i, & \frac{\partial z_i}{\partial u} &= g\xi_i, \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= b\eta_i; & \frac{\partial y_i}{\partial v} &= f\eta_i; & \frac{\partial z_i}{\partial v} &= k\eta_i \end{aligned}$$

( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ )

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i}{\partial u} &= -ax_i - ey_i - gz_i - m\eta_i, & \frac{\partial \eta_i}{\partial u} &= m\xi_i, \\ \frac{\partial \xi_i}{\partial v} &= n\eta_i; & \frac{\partial \eta_i}{\partial v} &= -bx_i - fy_i - kz_i - n\xi_i; \end{aligned}$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial v} &= bm, & \frac{\partial e}{\partial v} &= fm, & \frac{\partial g}{\partial v} &= km, \\ \frac{\partial b}{\partial u} &= an; & \frac{\partial f}{\partial u} &= en; & \frac{\partial k}{\partial u} &= gn; \\ \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ab + ef + gk &= 0. \end{aligned}$$

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_5$  les coordonnées d'un point  $M$  qui décrit un réseau orthogonal correspondant au déterminant. Pour déterminer ces quantités on résoudra les systèmes

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= lm, & \frac{\partial X_i}{\partial u} &= h\xi_i, \\ \frac{\partial l}{\partial u} &= hn; & \frac{\partial X_i}{\partial v} &= l\eta_i. \end{aligned}$$

Considérons les droites  $MR, MS, MN, MP, MQ$  menées par  $M$  dont les paramètres directeurs sont les quantités  $\xi, \eta, x, y, z$ . Les droites  $MR, MS$  sont les tangentes du réseau  $O$ ; les droites  $MN, MP, MQ$  décrivent des congruences conjuguées au réseau et sont normales au réseau.

Si  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des constantes, les droites  $MG$  de paramètres  $Y_i$

$$Y_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

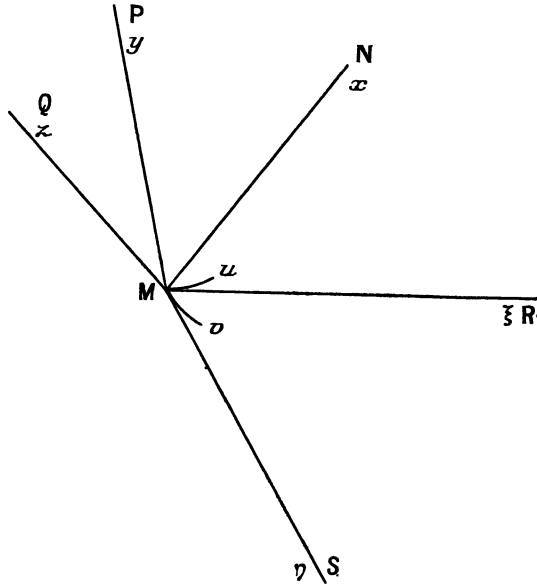
sont normales au plan du réseau et décrivent des congruences. Les foyers  $C_1, C_2$  correspondants ont leurs coordonnées exprimées par

les formules

$$(C_1) \quad X_i - \frac{h}{ax + e\beta + g\gamma} Y_i,$$

$$(C_2) \quad X_i - \frac{l}{bx + f\beta + k\gamma} Y_i.$$

Fig. 4.



La congruence obtenue est :

Une congruence 1 si  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ ;

Une congruence 2I si  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ .

Toutes les congruences 1 et 2I d'un espace d'ordre 5 sont obtenues par cette méthode.

**12. Classification des réseaux et des congruences.** -- Les réseaux nuls n'existent que dans un espace d'ordre 6. Dans un espace d'ordre 5 existent donc des réseaux 2N. De tels réseaux seront appelés des réseaux I et nous appellerons réseaux  $pI$  les réseaux  $(p+1)N$ .

La théorie générale permet de former facilement les réseaux I. Considérons la normale MN au réseau M et la normale isotrope ML dont les paramètres sont  $\gamma_k + iz_k$ . Les coordonnées  $z_1, z_3$  d'un point A

du plan LNM sont de la forme

$$Z_i = X_i + r x_i + \rho (y_i + i z_i).$$

Si l'on détermine  $r$  et  $\rho$  par les équations

$$\begin{aligned} h + ar + (e + ig) \rho &= 0, \\ f + br + (f + ik) \rho &= 0, \end{aligned}$$

on voit que l'on a

$$\begin{aligned} a \frac{\partial r}{\partial v} + (e + ig) \frac{\partial \rho}{\partial v} &= 0, \\ b \frac{\partial r}{\partial u} + (f + ik) \frac{\partial \rho}{\partial u} &= 0, \end{aligned}$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_i}{\partial u} &= x_i \frac{\partial r}{\partial u} + (y_i + i z_i) \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\ \frac{\partial Z_i}{\partial v} &= x_i \frac{\partial r}{\partial v} + (y_i + i z_i) \frac{\partial \rho}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 Z_i}{\partial u \partial v} &= x_i \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} + (y_i + i z_i) \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v}. \end{aligned}$$

Ces relations montrent que le point A décrit un réseau. On voit immédiatement que

$$\sum_{i=1}^{i=b} dZ_i^2 = dr^2.$$

Les fonctions  $Z_i$  et  $r$  satisfont à la même équation de Laplace. Le réseau décrit par le point A est un réseau  $2N$ . La coordonnée complémentaire est égale à  $ir$ .

Les paramètres directeurs  $\lambda$ ,  $\mu$  des tangentes au réseau A peuvent être définis par les égalités

$$\begin{aligned} \lambda_i &= b(y_i + i z_i) - (f + ik) x_i, \\ \mu_i &= a(y_i + i z_i) - (e + ig) x_i, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} &= n \mu_i + \xi_i [b(e + ig) - a(f + ik)], \\ \frac{\partial \mu_i}{\partial v} &= m \lambda_i + \eta_i [a(f + ik) - b(e + ig)]. \end{aligned}$$



Ces formules montrent que

$$\sum_{i=1}^{i=5} (y_i + iz_i) \lambda_i = 0, \quad \sum (y_i + iz_i) \mu_i = 0,$$

$$\sum (y_i + iz_i) \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} = 0, \quad \sum (y_i + iz_i) \frac{\partial \mu_i}{\partial v} = 0.$$

La congruence I décrite par la droite ML est orthogonale au réseau I décrit par le point A.

Montrons que tout réseau I peut être obtenu par la méthode précédente.

Si un point A décrit un réseau I, il existe parmi les congruences harmoniques à ce réseau une congruence I. Les autres congruences sont  $2I$ . Le point d'intersection des droites qui décrivent ces congruences décrit un réseau dérivé de A. Ce réseau qui est conjugué à une congruence I est un réseau O.

Tout réseau I est orthogonal à la congruence I qui lui est harmonique et inversement.

Toute congruence I est orthogonale à un réseau I et inversement.

Comme, dans le cas de l'espace à quatre dimensions, on montrerait que le plan des normales MN, MP au réseau M enveloppe un réseau  $2I$ . On vérifierait que ce réseau est orthogonal à la congruence  $2I$  décrite par la droite MQ.

Tous les réseaux  $2I$  peuvent être obtenus par cette méthode. On est alors conduit au résultat suivant :

Toute congruence  $2I$  est orthogonale à un réseau  $2I$  et inversement.

On montrerait aussi par un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour les espaces d'ordre inférieur que :

Toute congruence  $pI$  est orthogonale à un réseau  $pI$  et inversement.

Tout réseau conjugué à une congruence I est un réseau O. La loi d'orthogonalité fait correspondre à un tel réseau une congruence conjuguée à un réseau I. Un réseau I est un réseau  $2N$ . Les congruences conjuguées sont des congruences  $2J$ ,  $3J$ ,  $4J$ . Les congruences J n'existent qu'à partir de l'espace d'ordre 8. Dans un espace d'ordre 5 ne peuvent exister que des congruences  $4J$ . Nous

appellerons congruence  $O$  de telles congruences et l'on peut dire dans ces conditions que :

Toute congruence  $O$  est orthogonale à un réseau  $O$  et inversement.

Les congruences  $2O, 3O, \dots, pO$  sont les congruences  $5J, 6J, \dots, (p+3)J$  de la théorie générale.

Du résultat précédent on déduit par le raisonnement déjà employé que :

Toute congruence  $pO$  est orthogonale à un réseau  $pO$  et inversement.

Nous allons indiquer comment il est possible de déterminer une congruence  $O$  à partir du réseau  $O$  décrit par le point  $M$ .

Considérons les points  $B$  dont les coordonnées  $Y_1, Y_2, \dots, Y_5$  sont données par les formules

$$Y_i = X_i + \lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

et supposons que les fonctions  $\lambda, \mu, \nu$  satisfassent aux relations

$$h + a\lambda + e\mu + g\nu = 0,$$

$$l + b\lambda + f\mu + k\nu = 0.$$

Si l'on suppose  $u$  et  $v$  donnés, le lieu des points  $B$  est une droite  $\Delta$ . Nous allons montrer que si  $u$  et  $v$  varient, cette droite décrit une congruence  $O$ .

On obtient, en dérivant par rapport aux variables  $u$  et  $v$ ,

$$\frac{\partial Y_i}{\partial u} = x_i \frac{\partial \lambda}{\partial u} + y_i \frac{\partial \mu}{\partial u} + z_i \frac{\partial \nu}{\partial u},$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial v} = x_i \frac{\partial \lambda}{\partial v} + y_i \frac{\partial \mu}{\partial v} + z_i \frac{\partial \nu}{\partial v},$$

et, en remarquant que les relations qui lient  $\lambda, \mu, \nu$  donnent par dérivation,

$$b \frac{\partial \lambda}{\partial u} + f \frac{\partial \mu}{\partial u} + k \frac{\partial \nu}{\partial u} = 0,$$

$$a \frac{\partial \lambda}{\partial v} + f \frac{\partial \mu}{\partial v} + k \frac{\partial \nu}{\partial v} = 0,$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial u \partial v} = x_i \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} + y_i \frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} + z_i \frac{\partial^2 \nu}{\partial u \partial v}.$$

Il en résulte que, si les quantités  $Y$  sont solutions d'une même

équation de Laplace, il en est de même des quantités  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , et inversement.

Les réseaux obtenus ainsi sont applicables. On a en effet

$$\sum_{i=1}^{i=5} dY_i^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2.$$

Déterminons maintenant les paramètres directeurs  $T_1, T_2, \dots, T_5$  de  $\Delta$ . Si l'on désigne par  $\lambda, \mu, \nu; \lambda_1, \mu_1, \nu_1$  les valeurs des fonctions correspondant à deux points  $B, B_1$  de cette droite et si l'on pose

$$\lambda_1 - \lambda = p, \quad \mu_1 - \mu = q, \quad \nu_1 - \nu = r,$$

on obtient

$$T_i = px_i + qy_i + rz_i$$

avec les conditions

$$ap + eq + gr = 0,$$

$$bp + fq + kr = 0,$$

qui par dérivation donnent

$$b \frac{\partial p}{\partial u} + f \frac{\partial q}{\partial u} + k \frac{\partial r}{\partial u} = 0,$$

$$a \frac{\partial p}{\partial v} + e \frac{\partial q}{\partial v} + g \frac{\partial r}{\partial v} = 0.$$

On a ensuite

$$\frac{\partial T_i}{\partial u} = x_i \frac{\partial p}{\partial u} + y_i \frac{\partial q}{\partial u} + z_i \frac{\partial r}{\partial u},$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial v} = x_i \frac{\partial p}{\partial v} + y_i \frac{\partial q}{\partial v} + z_i \frac{\partial r}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial u \partial v} = x_i \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + y_i \frac{\partial^2 q}{\partial u \partial v} + z_i \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}.$$

Ces relations montrent que la droite  $\Delta$  décrit une congruence. On voit d'autre part que

$$\sum_{i=1}^{i=5} T_i^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

$$\sum dT_i^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2.$$

La congruence est une congruence  $4J$ , les paramètres complémentaires  $ip, iq, ir$ .

On vérifie facilement les relations

$$\begin{aligned} \sum T_i \xi_i &= 0, & \sum T_i \eta_i &= 0, \\ \sum T_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u} &= 0, & \sum T_i \frac{\partial \eta_i}{\partial v} &= 0, \end{aligned}$$

qui montrent que la congruence obtenue est orthogonale au réseau O décrit par le point M.

L'étude des réseaux orthogonaux aux congruences C dans un espace d'ordre 5 conduirait à la définition de réseaux nuls au second degré, caractérisés par le fait que les coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des points qui les décrivent sont telles que l'on ait

$$\sum dx^2 = 0, \quad \sum (d^2 x)^2 = 0,$$

ou encore tels que si l'on désigne par  $\xi, \eta$  les paramètres des tangentes, on ait

$$\begin{aligned} \sum \xi^2 &= 0, & \sum \xi \eta &= 0, & \sum \eta^2 &= 0, \\ \sum \left( \frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 &= 0, & \sum \left( \frac{\partial \eta}{\partial v} \right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

De tels réseaux n'existent qu'à partir d'un espace d'ordre 10.

La classification pour les réseaux et congruences indiqués est résumée par le tableau suivant. Comme pour l'espace d'ordre 3 il est inutile de distinguer réseaux et congruences.

Systemes conjugués.	Systemes.	Systemes harmoniques.
O	I	I, 2I
O, 2O	2I	I, 2I, 3I
O, 2O, 3O	3I	2I, 3I, 4I
(p-2)O, (p-1)O, pO	pI	(p-1)I, pI, (p+1)I

La théorie générale donne des résultats relatifs aux congruences harmoniques aux réseaux O, ..., pO et aux réseaux harmoniques aux congruences C, ..., pC.

## ESPACE A SIX DIMENSIONS.

13. Un déterminant orthogonal est défini par les quantités  $x, y, z, t, \xi, \eta$  :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & \xi_6 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 \end{vmatrix}.$$

En désignant par  $a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; a_4, b_4; m, n$  les rotations, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= a_1 \xi_i, & \frac{\partial y_i}{\partial u} &= a_2 \xi_i, & \frac{\partial z_i}{\partial u} &= a_3 \xi_i, & \frac{\partial t_i}{\partial u} &= a_4 \xi_i, \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= b_1 \eta_i, & \frac{\partial y_i}{\partial v} &= b_2 \eta_i, & \frac{\partial z_i}{\partial v} &= b_3 \eta_i, & \frac{\partial t_i}{\partial v} &= b_4 \eta_i \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \dots, 6);$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = -a_1 x_i - a_2 y_i - a_3 z_i - a_4 t_i - m \eta_i,$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial v} = n \eta_i;$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial u} = m \xi_i,$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial v} = -b_1 x_i - b_2 y_i - b_3 z_i - b_4 t_i - n \xi_i,$$

avec les conditions de compatibilité

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial v} &= m b_i \\ \frac{\partial b_i}{\partial u} &= n a_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

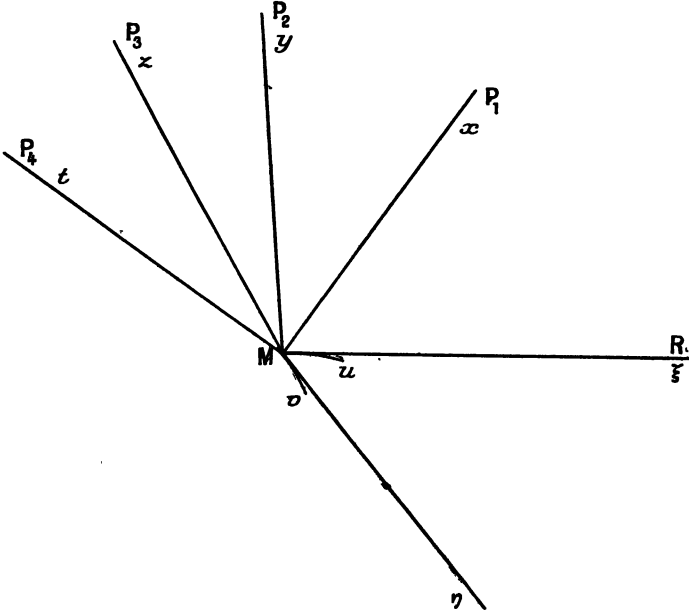
$$\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0.$$

La détermination d'un réseau  $O$ , correspondant au déterminant orthogonal, décrit par un point  $M$  de coordonnées  $X_1, X_2, \dots, X_6$ , exige la résolution des systèmes complets

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= lm, & \frac{\partial X_i}{\partial u} &= h \xi_i, \\ \frac{\partial l}{\partial u} &= hn; & \frac{\partial X_i}{\partial v} &= l \eta_i. \end{aligned}$$

Les droites MR, MS menées par M dont les paramètres sont les quantités  $\xi$ ,  $\eta$  sont les tangentes du réseau. Les droites MP<sub>1</sub>, MP<sub>2</sub>,

Fig. 5.



MP<sub>3</sub>, MP<sub>4</sub>, dont les paramètres sont  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , décrivent des congruences conjuguées au réseau M et sont normales au plan du réseau (fig. 5).

D'une manière plus générale, une droite menée par M dont les paramètres directeurs sont les quantités Y définies par les égalités

$$Y_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i + \delta t_i,$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  étant des constantes, décrit une congruence conjuguée normale au plan du réseau. Le calcul des coordonnées des foyers conduit à des formules analogues à celles qui ont été indiquées par l'espace à cinq dimensions.

La congruence ainsi obtenue est une congruence I lorsque

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 0,$$

congruence 2I lorsque

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \neq 0.$$

Toutes les congruences I,  $2I$  d'un espace d'ordre 6 sont obtenues par cette méthode.

Les quantités  $x_i \pm iy_i$  définissent les paramètres de congruences I particulières conjuguées au réseau.

A partir de l'espace d'ordre 6 existent des réseaux N. Nous indiquerons tout d'abord comment l'on peut former ces réseaux.

Considérons des deux congruences I conjuguées au réseau M décrites par des droites  $ML_1, ML_2$  dont les paramètres directeurs sont définis par les quantités  $x_i + iy_i, z_i + it_i$ . Les coordonnées  $Z_i$  d'un point A du plan  $L_1 L_2 M$  sont données par les formules

$$Z_i = X_i + r(x_i + iy_i) + \rho(z_i + it_i).$$

Si les fonctions  $r$  et  $\delta$  sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned} h + r(a_1 + ia_2) + \rho(a_3 + ia_4) &= 0, \\ l + r(b_1 + ib_2) + \rho(b_3 + ib_4) &= 0, \end{aligned}$$

on montre par des calculs analogues à ceux qui ont été faits pour un espace d'ordre 4 que le point A décrit un réseau.

Il est facile de vérifier que l'on a

$$\sum_{i=1}^{i=6} (dz_i)^2 = 0.$$

Le réseau décrit par le point A est un réseau N. Le réseau O décrit par le point M est un réseau dérivé du réseau N décrit par A.

On formerait facilement en associant la congruence décrite par la normale MP, à la congruence  $ML_2$  un réseau  $2N$ ; en associant les congruences décrites par les normales  $MP_1, MP_2$  un réseau  $3N$ . Il y a lieu de remarquer que les droites associées qui décrivent les congruences conjuguées au réseau M sont rectangulaires.

Ajoutons enfin que tous les réseaux N,  $2N, 3N$  d'un espace d'ordre 6 peuvent être obtenus par cette méthode.

**14. Classification des réseaux et des congruences.** — Cette classification est une conséquence de la propriété suivante. Dans un espace d'ordre 6 un réseau N est orthogonal à lui-même.

On voit en effet que, si l'on désigne par  $\xi, \eta$  les paramètres nor-

maux des tangentes au réseau, les égalités

$$\sum_{i=1}^{i=6} \xi_i^2 = 0, \quad \sum \xi_i \eta_i = 0, \quad \sum \eta_i^2 = 0$$

entraînent

$$\sum \xi \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \quad \sum \xi^2 = 0, \quad \sum \xi \eta = 0, \quad \sum \xi \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0, \quad \sum \xi \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} = 0,$$

qui établissent la propriété.

On sait que par orthogonalité à une congruence harmonique à un réseau N correspond une congruence conjuguée au réseau. Cette congruence nouvelle ne peut être qu'une congruence 3J. Les congruences J n'existent qu'à partir d'un espace d'ordre 8. Nous dirons que les congruences 3J sont des congruences L. Comme toute congruence harmonique à un réseau N est une congruence I, on conclut que :

Toute congruence orthogonale à une congruence I est une congruence L et inversement.

Les congruences 2L, 3L, ..., pL sont les congruences 4J, ..., (p + 2)J de la théorie générale.

Dans ces conditions, on voit que :

Tout réseau orthogonal à un réseau pN est un réseau pN.

Toute congruence orthogonale à une congruence pI est une congruence pL et inversement.

Nous ne développerons pas davantage la correspondance par orthogonalité et nous résumerons les résultats obtenus par le tableau suivant :

Congruences conjuguées.	Réseaux.	Congruences harmoniques.
L	N	I
L, 2L	2N	I, 2I
I, 2L, 3L	3N	I, 2I, 3I
(p - 2)L, (p + 2)L, pL	pN	(p - 2)I, (p - 1)I, pI



## CONGRUENCES DE CERCLES ET DE SPHERES.

15. Si l'on considère dans l'espace à trois dimensions une sphère S de rayon R dont le centre a pour coordonnées  $x_1, x_2, x_3$ , on peut appeler coordonnées de cette sphère les cinq nombres  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  qui ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= h x_1, & \alpha_2 &= h x_2, & \alpha_3 &= h x_3, \\ \alpha_4 &= i \frac{h}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 + 1), \\ \alpha_5 &= \frac{h}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 - 1),\end{aligned}$$

$h$  désigne un facteur de proportionnalité.

Des égalités précédentes, on déduit

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_5 + i\alpha_4}, & x_2 &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_5 + i\alpha_4}, & x_3 &= -\frac{\alpha_3}{\alpha_5 + i\alpha_4}, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 &= -\frac{\alpha_5 - i\alpha_4}{\alpha_5 + i\alpha_4}.\end{aligned}$$

Ces relations permettent de calculer les coordonnées du centre et le rayon de la sphère S connaissant les quantités  $\alpha$ . On peut remarquer aussi que l'équation de la sphère peut s'écrire

$$\begin{aligned}2\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 X_2 + 2\alpha_3 X_3 + i\alpha_4 (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1) \\ + \alpha_5 (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 1) = 0.\end{aligned}$$

Lorsque  $\alpha_5 + i\alpha_4 = 0$ , la sphère se réduit à un plan.

Ces résultats peuvent être interprétés dans un espace à cinq dimensions de la façon suivante :

Considérons dans cet espace une droite D définie par les paramètres directeurs  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ . A cette droite D correspond une sphère S. Inversement à une sphère S correspond une droite D. Il est clair, qu'à deux droites parallèles correspondent la même sphère, qu'à une sphère correspond une direction de droite.

On démontre facilement que l'angle de deux sphères est égal à l'angle des deux droites qui leur correspondent, que la condition

nécessaire et suffisante pour qu'une sphère se réduise à un point est que l'on ait

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 = 0.$$

Considérons maintenant deux sphères quelconques  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5)$ ,  $T(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_5)$ , les coordonnées d'une sphère passant par l'intersection des deux sphères données sont :

$$\alpha_1 + k\beta_1, \quad \alpha_2 + k\beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_5 + k\beta_5.$$

Les deux sphères  $S$  et  $T$  définissent un cercle  $C$ . A ce cercle on fait correspondre un système de deux droites. Inversement, si le cercle est donné, on peut lui faire correspondre une infinité de droites dont les paramètres sont donnés par les formules précédentes. Nous dirons que cet ensemble définit un « réseau de direction ». A un réseau de direction correspond un cercle et inversement.

Nous appellerons congruence de sphères l'ensemble des sphères correspondant aux droites d'une congruence de l'espace à cinq dimensions. Pour qu'une sphère  $S$  décrive une congruence, il faut et il suffit que ses cinq coordonnées  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$  soient solutions d'une même équation de Laplace. Il en résulte que

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2, \quad 1$$

sont aussi solutions d'une même équation de Laplace.

Le centre  $M$  de la sphère décrit un réseau et l'équation du réseau admet la solution

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2.$$

Considérons maintenant un point  $M$  qui décrit un réseau dans un espace d'ordre 5. Soient  $MR, MS$  les tangentes à ce réseau. Les deux directions  $MR, MS$  définissent un cercle. L'ensemble des cercles qui correspondent à tous les points  $M$  du réseau forme une congruence de cercles.

Nous allons indiquer les propriétés caractéristiques de ces systèmes.

Au point  $M(u, v)$  correspond un cercle  $C$  intersection des sphères qui correspondent aux droites  $MR(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5)$ ,  $MS(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_5)$ ; au point  $M'(u + du, v)$  correspond un cercle  $C'$  intersection des

sphères  $M'R' \left( \xi + \frac{\partial \xi}{\partial u} du, \eta + \frac{\partial \eta}{\partial u} du \right)$ . Comme on a

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = m \xi,$$

les quatre sphères et par suite les deux cercles  $C, C'$  passent par les deux points communs aux trois sphères qui ont pour coordonnées

$$\xi, \eta, \frac{\partial \xi}{\partial u}.$$

On voit que si  $u$  varie seul, chaque cercle  $C$  du système est rencontré en deux points par un cercle infiniment voisin. On arrive à un résultat analogue lorsque  $\nu$  varie seul. Tous les systèmes ayant cette propriété sont obtenus par cette méthode.

Interprétons maintenant les images dans un espace d'ordre 3 d'une congruence d'un espace d'ordre 5 et de ses réseaux focaux.

Soient (A) une congruence dont les premier et second réseaux focaux sont E et F, (B) et (C) les congruences focales de ces réseaux distinctes de (A).

Si l'on représente par  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_3$  les paramètres de A (*fig. 6*), ceux de (B) sont fonctions linéaires de  $\alpha$  et  $\frac{\partial \alpha}{\partial \nu}$ , ceux de C fonctions linéaires de  $\alpha$  et  $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$ .

A la congruence (A) correspond une sphère ( $S_a$ ) dont le centre  $M(x_1, x_2, x_3)$  décrit un réseau. Désignons par MR, MS les tangentes de ce réseau, par R et S les foyers distincts de M des congruences MR, MS.

L'équation de la sphère ( $S_a$ ) peut s'écrire

$$(X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + (X_3 - x_3)^2 - R^2 = 0.$$

Lorsque  $u$  varie seul, cette sphère touche son enveloppe suivant un cercle  $C_1$ , intersection de ( $S_a$ ) et du plan P, qui a pour équation

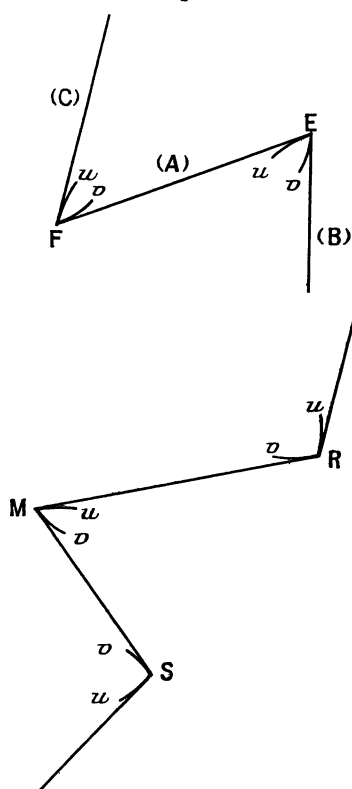
$$(X_1 - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial u} + (X_2 - x_2) \frac{\partial x_2}{\partial u} + (X_3 - x_3) \frac{\partial x_3}{\partial u} - R \frac{\partial R}{\partial u} = 0.$$

Ce cercle peut être défini comme intersection des sphères qui ont pour coordonnées  $\alpha$  et  $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$  ou encore des sphères ( $S_a$ ), ( $S_c$ ) correspondant aux droites (A), (C).

Le cercle  $C_1$  correspond au réseau F. Il décrit donc une congruence, son plan est perpendiculaire à MR.

De même lorsque  $v$  varie seul les sphères  $(S_a)$  touchent leur enve-

Fig. 6.



loppe suivant un cercle  $C_2$ . Ce cercle décrit une congruence correspondant au réseau E. Son plan est perpendiculaire à MS.

Les congruences de cercles  $C_1, C_2$  sont appelées les congruences focales de la congruence de sphères  $(S_a)$ .

Les deux cercles  $C_1, C_2$  ont deux points communs I, I'. Ces points peuvent être définis comme les points communs aux trois sphères qui ont pour coordonnées  $\alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial v}$ . Ils sont donc les points où la sphère  $(S_a)$  touche son enveloppe lorsque  $u$  et  $v$  varient.

Étudions maintenant la droite II'. Lorsque  $u$  ou  $v$  varient seuls cette

droite engendre une développable. Elle décrit donc une congruence. Comme elle est perpendiculaire au plan MRS, cette congruence est orthogonale au réseau M. Ses plans focaux sont les plans des deux cercles  $C_1, C_2$ .

Il est facile de préciser les congruences de sphères  $(S_b), (S_c)$  correspondant aux congruences focales (B) et (C).

D'après ce qui précède la sphère  $(S_b)$  doit contenir le cercle  $C_2$  correspondant au réseau E. C'est donc la sphère de centre S passant par  $C_2$ . La sphère  $(S_c)$  est la sphère de centre R passant par  $C_1$ .

Nous dirons que les sphères  $(S_u), (S_v)$  sont les sphères focales de la congruence décrite par le cercle  $C_2$ .

Considérons maintenant une congruence quelconque de cercles, celle décrite par le cercle  $C_2$  par exemple. L'axe MS de ce cercle décrit une congruence. Les sphères qui ont pour centre les foyers M, S de cette congruence et qui passent par le cercle  $C_2$  décrivent les congruences de sphères focales de la congruence de cercle.

Le plan du cercle enveloppe un réseau. L'une des tangentes de ce réseau est la corde de contact II' de la sphère de centre M passant par le cercle  $C_2$  avec son enveloppe lorsqu'on fait varier simultanément  $u$  et  $v$ . La seconde tangente du réseau est dans les mêmes conditions, la corde de contact de la sphère de centre S passant par  $C_2$  avec son enveloppe.

**16. Congruences de sphères et de cercles orthogonales.** — Une congruence de sphère est dite orthogonale à une congruence de cercles lorsque la congruence de droites et le réseau qui leur correspondent dans un espace d'ordre 5 sont orthogonaux.

Soient alors  $(x_1, x_2, \dots, x_5), (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_5)$  les paramètres de la droite correspondant à la congruence de sphères les paramètres des première et seconde tangentes du réseau.

On sait que l'on a

$$\begin{aligned} \sum \xi x &= 0, & \sum \xi \frac{\partial x}{\partial u} &= 0, & \sum \xi \frac{\partial x}{\partial v} &= 0, & \sum \xi \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= 0, \\ \sum \eta x &= 0, & \sum \eta \frac{\partial x}{\partial u} &= 0, & \sum \eta \frac{\partial x}{\partial v} &= 0, & \sum \eta \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par  $y_1, y_2, \dots, y_5$  les paramètres d'une droite

quelconque OL du plan du réseau, on a

$$y_i = \alpha \xi_i + \beta \eta_i$$

et par suite

$$\sum x y = 0, \quad \sum y \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum y \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

A la congruence de droites correspond une congruence de sphères (M). Soient M le réseau décrit par le centre des sphères; C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> les deux cercles focaux; (R), (S) les secondes sphères focales de C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>. Les coordonnées de la sphère (R) sont fonctions linéaires de  $x$  et  $\frac{\partial x}{\partial v}$ ; celles de la sphère (S) fonctions linéaires de  $x$  et  $\frac{\partial x}{\partial u}$ .

Au réseau correspond une congruence décrite par des cercles (C). A une droité OL du plan du réseau correspond une sphère passant par le cercle C. Cette sphère est orthogonale aux sphères M, R, S. Les pôles du cercle C sont les points I, I' communs à ces trois sphères.

On peut énoncer les résultats suivants :

La congruence de cercles orthogonale à une congruence de sphères données est formée par les cercles qui ont pour pôles les deux points I, I' où chaque sphère de la congruence touche son enveloppe.

*Inversement*, soient C un cercle qui décrit une congruence, I, I' ses pôles, M le point où le plan de C touche son enveloppe, la sphère S, qui a pour centre M et qui passe par I et I', décrit une congruence de sphères orthogonale à la congruence de cercles donnée.

**16'. Congruences de cercles et de sphères conjuguées et harmoniques.** — Une congruence de sphères et une congruence de cercles sont dites harmoniques si la congruence de droites et le réseau qui leur correspondent sont harmoniques.

Soient  $\xi, \eta$  les paramètres des première et seconde tangentes d'un réseau, X les paramètres d'une tangente harmonique. On peut prendre

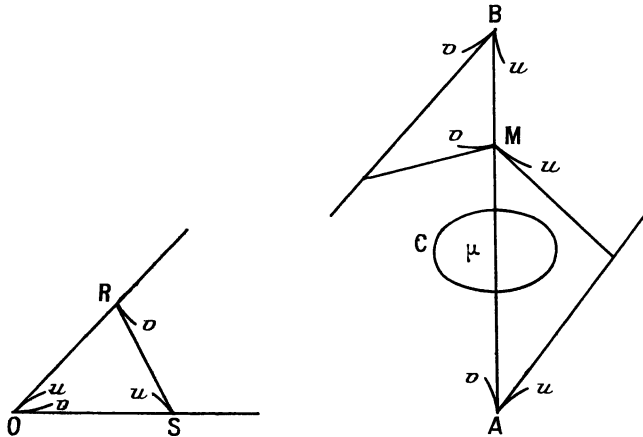
$$\begin{aligned} X &= q \xi - r \eta, \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= q \frac{\partial \xi}{\partial u} - r \frac{\partial \eta}{\partial u}, \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \xi \frac{\partial q}{\partial v} - r \frac{\partial \eta}{\partial v}. \end{aligned}$$

Désignons par (A) et (B) les sphères qui correspondent aux tan-

gentes du réseau. Le cercle  $C$  correspondant au réseau est l'intersection de ces sphères (*fig. 7 et 8*).

Les formules précédentes montrent que la sphère ( $S$ ) correspondant aux quantités  $X$  passe par le cercle  $C$ . Son centre  $M$  décrit un réseau

Fig. 7 et 8.



conjugué à la congruence décrite par la droite  $AB$  qui joint le centre  $A$  et  $B$  des sphères ( $A$ ) et ( $B$ ).

Lorsque  $u$  varie seul, le cercle de contact d'une sphère ( $S$ ) avec son enveloppe est caractérisé par les quantités  $X$ ,  $\frac{X}{u}$ . Ce cercle passe donc par les points communs aux sphères définies par  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial u}$ . Ces points sont les deux points de contact d'une sphère ( $A$ ) avec son enveloppe. De même lorsque  $v$  varie seul le cercle de contact d'une sphère  $S$  avec son enveloppe passe par les deux points de contact d'une sphère ( $B$ ) avec son enveloppe. Les cordes de contact des sphères ( $A$ ) et ( $B$ ) avec leurs enveloppes définissent les tangentes à un réseau décrit par un point  $\mu$  du plan du cercle  $C$ . Il résulte de là que la corde de contact  $\Delta$  d'une sphère  $S$  avec son enveloppe passe par le point  $\mu$ .

On peut donc énoncer les résultats suivants :

Soient  $C$  un cercle qui décrit une congruence,  $D$  l'axe de ce cercle,  $M$  un point qui décrit un réseau conjugué à la congruence décrite par la droite  $D$ . La sphère ( $S$ ) qui a pour centre  $M$  et qui

par C décrit une congruence de sphères (S) harmonique à la congruence de cercles C.

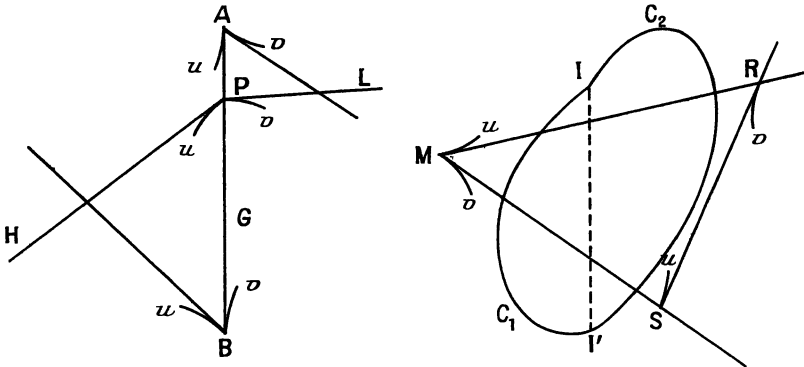
Soient S une sphère qui décrit une congruence,  $\Delta$  sa corde de contact avec son enveloppe,  $\mu$  un point qui décrit un réseau conjugué à la congruence ( $\Delta$ ), (P) le plan de ce réseau. Le cercle (C) intersection de la sphère S et du plan P décrit une congruence de cercles (C) harmonique à la congruence de sphères (S).

Ces constructions géométriques permettent d'obtenir toutes les congruences de sphères harmoniques à une congruence de cercles, ou toutes les congruences de cercles harmoniques à une congruence de sphères.

Une congruence de sphères et une congruence de cercles sont dites conjuguées lorsque la congruence de droites et le réseau qui leur correspondent sont conjugués.

Soit alors (G) une congruence de droites dont les réseaux focaux

Fig. 9 et 10.



sont (A) et (B). Considérons un réseau conjugué à G décrit par un point P. Désignons par (H) et (L) les congruences focales de ce réseau (fig. 9 et 10).

A la congruence G correspond une congruence de sphères (S) dont le centre décrit un réseau M; aux réseaux focaux A, B deux congruences de cercles focaux ( $C_1$ ), ( $C_2$ ) des sphères (S). Ces cercles passent par les points I, I' où la sphère (S) touche son enveloppe.



A la tangente L correspond une sphère focale du cercle correspondant au réseau P. La congruence focale (L) étant harmonique au réseau (A), cette sphère passe par le cercle  $C_1$ . Son centre décrit un réseau conjugué à la congruence décrite par la seconde tangente MS au réseau M. De même, à la congruence décrite par H correspond une congruence de sphères dont les centres décrivent un réseau conjugué à la congruence décrite par la première tangente MR.

L'axe des cercles (C) qui correspondent au réseau conjugué décrit une congruence harmonique au réseau M. Les plans de ces cercles passent par les points de contact I, I' d'une sphère S avec son enveloppe. La droite I, I' décrit une congruence harmonique au réseau enveloppé par le plan de ces cercles.

On peut donc énoncer les résultats suivants :

Soient M le réseau décrit par le centre des sphères correspondant à une congruence, RS une congruence harmonique au réseau M, les cercles ayant pour axes R, S et qui passent par les points I, I' d'une sphère de la congruence avec son enveloppe décrivent une congruence de cercles conjuguée à la congruence de sphères.

Soient (C) un cercle qui décrit une congruence,  $\mu$  le réseau enveloppé par le plan de ce cercle, (G) une congruence harmonique au réseau  $\mu$ , I, I' les points où la droite G rencontre le cercle (C), le plan P mené par l'axe du cercle perpendiculairement à G enveloppe un réseau (M). La sphère qui a pour centre M et qui passe par I, I' décrit une congruence de sphères conjuguée à la congruence de cercles.

Toutes les congruences de cercles conjuguées à une congruence de sphères ou toutes les congruences de sphères conjuguées à une congruence de cercles peuvent être obtenues par ces constructions géométriques.

**17. Classification des congruences de cercles et de sphères.** — Les congruences de cercles et de sphères seront désignées par la même notation que les réseaux ou congruences de droites qui leur correspondent dans un espace d'ordre 5.

Si une congruence de cercles et une congruence de sphères sont orthogonales, ces congruences seront représentées par la même notation.

Soient  $M(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées du centre d'une sphère S,

R son rayon. Les cinq coordonnées de la sphère peuvent s'écrire

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_3, \\ X_4 = \frac{i}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 + 1), \quad X_5 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 - 1).$$

**18. Congruences de cercles et de sphères I, 2I, . . . , pI.** — Pour qu'une congruence de sphères soit une congruence I, il faut et il suffit que les paramètres  $X_1, X_2, \dots, X_5$ , qui correspondent aux sphères de cette congruence vérifient la relation

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0.$$

Les rayons R de ces sphères sont nuls. Leur centre M de coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  décrit un réseau et l'équation de ce réseau admet la solution

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Les congruences de sphères I sont donc décrites par des sphères de rayon nul dont le centre M décrit un réseau O.

Inversement les sphères de rayon nul dont le centre M décrit un réseau O définissent une congruence des sphères.

Les cercles focaux des sphères considérées sont des cercles de rayon nul ayant pour centre le point M. Leurs plans sont les plans principaux de la surface lieu de M.

La corde de contact d'une sphère avec son enveloppe est la normale au point M à la surface décrite par M.

Nous avons vu que parmi les réseaux orthogonaux à une congruence I décrite par une droite D dans un espace d'ordre 5 existe un réseau I harmonique à la congruence. De cette propriété se déduisent immédiatement les éléments caractéristiques des congruences de cercles I.

Les congruences de cercles I sont décrites par des cercles de rayon nul dont le centre M décrit un réseau. Le plan des cercles est le plan tangent au réseau. Le réseau décrit par le centre M est le réseau O formé par les lignes de courbure de la surface lieu de M.

Pour qu'une congruence de sphères soit une congruence 2I, il faut et il suffit que l'équation de Laplace, à laquelle satisfont les paramètres  $X_1, X_2, \dots, X_5$ , admette une solution Y telle que l'on ait

$$\Sigma X^2 + Y^2 = 0.$$

On en déduit

$$Y = rR.$$

L'équation du réseau décrit par le centre  $M$  des sphères admet donc les solutions

$$x_1, x_2, x_3, R, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2.$$

Nous désignerons par  $I$  et  $I'$  les points de contact d'une sphère et de son enveloppe.

Considérons maintenant les congruences de cercles  $\mathfrak{2}I$  qui correspondent par orthogonalité aux congruences de sphères  $\mathfrak{2}I$  et étudions les relations entre une congruence  $(S)$  de sphères  $\mathfrak{2}I$  et la congruence orthogonale  $(C)$  de cercles  $\mathfrak{2}I$ .

Des propriétés générales indiquées résulte le fait que les cercles de la congruence de cercles admettent pour pôles  $I$  et  $I'$ .

On sait qu'il existe dans un espace d'ordre 5 deux congruences  $I$  harmoniques à un réseau  $\mathfrak{2}I$ . A ces congruences  $I$  correspondent deux congruences de sphères harmoniques à la congruence de cercles. Si l'on considère un cercle  $(C)$  admettant pour pôles  $I, I'$  la sphère  $(S)$  correspondante passe par  $(C)$ , son rayon est nul, son centre décrit un réseau. Il doit coïncider avec l'un des points  $I$  ou  $I'$ .

D'où cette propriété caractéristique :

*Les points de contact des sphères  $(S)$  d'une congruence de sphères  $\mathfrak{2}I$  avec leur enveloppe décrivent des réseaux formés de lignes de courbure.*

Lorsque le rayon des sphères  $(S)$  qui décrivent la congruence de sphères  $\mathfrak{2}I$  est constant le centre  $M$  des sphères décrit un réseau  $O$ .

L'équation de Laplace à laquelle satisfont les coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  de  $M$  admet la solution  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ . Les cercles focaux d'une sphère  $(S)$  sont situés dans les plans principaux de la surface lieu de  $M$ . La congruence de cercles orthogonale  $\mathfrak{2}I$  est formée de l'ensemble des cercles de rayon constant, ayant pour centre  $M$ , dont le plan est le plan tangent à la surface lieu de  $M$ .

Dans le cas général  $R$  est variable. Une congruence de sphères  $\mathfrak{2}I$  est constituée par l'ensemble des sphères  $S$  dont le centre  $M$  décrit un réseau et qui touchent leur enveloppe en deux points  $I, I'$  qui décrivent des surfaces rapportées à leurs lignes de courbure. Les droites  $MI, MI'$  sont les normales aux surfaces lieux de  $I$  et de  $I'$ .

Le plan des cercles (C) qui enveloppe une congruence  $\mathcal{C}$  enveloppe le réseau décrit par M qui est un réseau  $\mathcal{C}$ O. Les deux pôles d'un cercle (C) sont les points I, I' de contact de la sphère de centre M correspondant à la congruence de sphères  $\mathcal{C}$ I orthogonale avec son enveloppe.

Il est facile d'étudier les congruences de sphères  $p$ I. Nous nous bornons à indiquer les résultats suivants qui sont immédiats.

Le centre d'une sphère (S) qui décrit une congruence  $p$ I décrit un réseau  $(p - 2)$ O,  $(p - 1)$ O ou  $p$ O.

Si le centre d'une sphère (S) appartenant à une congruence décrit un réseau  $p$ O la congruence de sphères est  $p$ I,  $(p + 1)$ I ou  $(p + 2)$ I.

**19. Congruences de sphères O,  $p$ O.** — Les congruences O correspondent aux congruences de droites O d'un espace d'ordre 5. Rappelons d'abord que, si les coordonnées  $X_1, X_2, \dots, X_5$  d'une sphère correspondent à une congruence O, il est possible de trouver trois solutions  $y_1, y_2, y_3$  de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les quantités X telles que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{i=5} X_i^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \\ \sum dX_i^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2.$$

On voit en reprenant les expressions de  $X_1, X_2, \dots, X_5$  que l'on a

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = R^2, \\ dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2.$$

Il en résulte que le réseau M décrit par les centres de sphères S de la congruence est applicable sur le réseau N décrit par le point de coordonnées  $y_1, y_2, y_3$ .

Proposons-nous, inversement, de définir une congruence O de sphères à partir de deux réseaux applicables décrits par les points M de coordonnées  $x_1, x_2, x_3$ ; N de coordonnées  $y_1, y_2, y_3$ .

Considérons les sphères ( $\Sigma$ ) de centre N de rayon R. La condition nécessaire et suffisante pour que ces sphères décrivent une congruence est que l'équation du réseau admette la solution

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = R^2.$$

Cette équation admet toujours la solution

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - y_1^2 - y_2^2 + y_3^2.$$

Il en résulte que si les sphères ( $\Sigma$ ) décrivent une congruence l'équation de Laplace admettra la solution

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2.$$

Comme les coordonnées des points M et N satisfont à la même équation, on voit que les sphères (S) ayant pour centre M et pour rayon R décrivent également des congruences.

On vérifie facilement que si l'on applique le réseau N sur le réseau M la sphère ( $\Sigma$ ) correspondant à un point N vient coïncider avec la sphère (S) correspondant au point M. Les cercles focaux de  $\Sigma$  viennent coïncider avec les cercles focaux de (S) et, par suite, les points où ( $\Sigma$ ) touche son enveloppe viennent coïncider avec ceux où (S) touche son enveloppe.

Les coordonnées X de (S), Y de ( $\Sigma$ ), sont :

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1, & X_2 &= x_2, & X_3 &= x_3, \\ X_4 &= \frac{i}{2}(\Sigma x^2 - R^2 + 1), & X_5 &= \frac{i}{2}(\Sigma x^2 - R^2 - 1); \\ Y_1 &= y_1, & Y_2 &= y_2, & Y_3 &= y_3, \\ Y_4 &= \frac{i}{2}(\Sigma y^2 - R^2 + 1), & Y_5 &= \frac{i}{2}(\Sigma y^2 - R^2 - 1). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \Sigma X^2 &= \Sigma Y^2, \\ \Sigma dX^2 &= \Sigma dY^2. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, trois cas peuvent se présenter :

1° Il existe entre les quantités Y une relation linéaire et isotrope à coefficients constants. La sphère ( $\Sigma$ ) passe alors par un point fixe. On peut alors dans les seconds membres des égalités précédentes supprimer deux quantités Y. La congruence de sphères (S) est une congruence (O).

2° Il existe entre les quantités Y une relation linéaire non isotrope. La sphère ( $\Sigma$ ) est orthogonale à une sphère fixe. On peut supprimer l'une des quantités Y. La congruence de sphères (S) est une congruence 2O.

3° Il n'existe pas de relation linéaire entre les quantités  $Y$ , la congruence de sphères  $S$  est une congruence  $3O$ .

Il est facile de caractériser les congruences de cercles  $O$ . Si la congruence de sphères ( $S$ ) est une congruence  $O$ , la congruence de sphères ( $\Sigma$ ) est formée de sphères passant par un point fixe  $B$ .

Une sphère ( $\Sigma$ ) touche son enveloppe au point  $B$  et au point  $B'$  symétrique de  $B$  par rapport au plan tangent au réseau décrit par son centre  $N$ . Si l'on applique le réseau  $N$  sur le réseau  $M$ , les points  $B, B'$  viennent coïncider avec les points  $A, A'$  de contact de la sphère ( $S$ ) correspondante avec son enveloppe. Le cercle ( $O$ ) qui correspond à la sphère ( $S$ ) est le cercle situé dans le plan tangent au réseau  $M$  dont les pôles sont  $A, A'$ . Ce cercle est obtenu en appliquant sur le plan tangent au réseau  $M$  le cercle d'intersection de la sphère de rayon nul ayant pour centre le point fixe  $B$  avec le plan du réseau  $N$ .

Ce résultat a déjà été trouvé à propos des réseaux applicables par une méthode géométrique équivalente à la méthode précédente.

Nous voyons que les plans des cercles d'une congruence  $O$  enveloppent un réseau  $C$  que les centres des sphères d'une congruence  $O$  décrivent un réseau  $C$ .

Ces résultats peuvent être généralisés. On montre que les centres des sphères d'une congruence  $pO$  décrivent un réseau  $(p-2)C$ ,  $(p-1)C$ , ou  $pC$ ; que si le réseau décrit par les centres des sphères d'une congruence est un réseau  $pC$ , la congruence de sphères est une congruence  $pO$ ,  $(p+1)O$ ,  $(p+2)O$ .

**20. Congruences de sphères  $C$ .** — Lorsque les coordonnées d'une sphère satisfont à une équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

On sait que la congruence correspondante est  $C$  si par un choix convenable des variables  $u$  et  $v$  on a la relation

$$\Sigma X^2 = h^2 + l^2.$$

On en déduit

$$R^2 = h^2 + l^2.$$

L'équation du réseau décrit par le centre  $M$  des sphères admet donc la solution

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = h^2 + l^2.$$

On montre que dans ces conditions on a

$$\sum \xi r_i = \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u}.$$

Le réseau décrit par le centre M des sphères de la congruence est un réseau K.

Inversement, si un point M décrit un réseau K les sphères de centre M dont le rayon R est défini par la formule

$$R^2 = h^2 + l^2$$

décrivent une congruence de sphères C.

Si

$$R^2 = h^2 + l^2 + \text{const.},$$

la congruence de sphères est une congruence 2 C.

Si R est quelconque la congruence de sphères est 3 C.

D'une manière générale :

Le centre des sphères d'une congruence pC décrit un réseau  $(p-2)K$ ,  $(p-1)K$  ou pK.

Si le centre d'une sphère décrit un réseau pK la congruence de sphères correspondante est pC,  $(p+1)C$ ,  $(p+2)C$ .

Signalons en terminant que l'inversion effectuée sur un cercle ou une sphère revient à une substitution orthogonale dans l'espace à cinq dimensions. Cette substitution n'altère pas les propriétés dont nous nous occupons. La classification établie dans la théorie précédente et les propriétés qui en découlent sont invariantes pour le groupe des inversions.

## APPLICATIONS.

RÉSEAUX ISOTHERMIQUES. SURFACES MINIMA. RÉSEAUX DE WEINGARTEN.  
RÉSEAUX APPLICABLES. SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE.

**21. Réseaux isothermiques.** — On dit qu'un réseau O est isothermique si l'équation de Laplace à laquelle satisfont ces coordonnées  $x$  a ses invariants égaux.

Cette équation ayant été mise sous la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v},$$

on doit avoir

$$\frac{\partial^2 L|h|}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 L|l|}{\partial u \partial v}$$

ou

$$\frac{h}{l} = \frac{U}{V},$$

U et V désignant des fonctions arbitraires de  $u$  et de  $v$  seuls.

Un changement de variables convenable permet de ramener cette relation à la forme

$$h = l.$$

Il résulte de là que

$$\Sigma dx^2 = ds^2 = h^2 du^2 + l^2 dv^2.$$

**22. Réseaux plans.** — Dans le cas d'un réseau plan nous avons vu que les paramètres normaux des tangentes au réseau et les rotations pouvaient être représentés par

$$\begin{aligned} \xi_1 = \cos \varphi, & \quad \eta_1 = -\sin \varphi, & \quad m = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \xi_2 = \sin \varphi; & \quad \eta_2 = \cos \varphi; & \quad n = \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned}$$

Les fonctions  $h$  et  $l$  déterminées comme solutions du système

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= lm, \\ \frac{\partial l}{\partial u} &= hn. \end{aligned}$$

La relation  $h = l$  entraîne la condition

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0.$$

On obtient donc

$$\varphi = F(u + iv) + F_1(u - iv),$$

F, F<sub>1</sub> désignant deux fonctions arbitraires.

La détermination du réseau montre que l'on peut, en changeant les notations, prendre

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= G(u + iv), \\ x_1 - ix_2 &= G_1(u - iv), \end{aligned}$$

où l'on désigne par G, G<sub>1</sub> deux nouvelles fonctions arbitraires.

On a alors

$$dx_1^2 + dx_2^2 = G'G'_1(du^2 + dv^2).$$



On voit que tous les réseaux isothermiques peuvent être obtenus par cette méthode. Si les fonctions  $G, G_1$  sont les mêmes,  $x_1, x_2$  sont réels.

**23. Réseaux sphériques.** — Leur détermination peut être rattachée à la détermination des réseaux isothermiques plans par la remarque suivante.

On sait qu'une projection stéréographique fait correspondre à un réseau isothermique de la sphère un réseau isothermique plan et inversement.

Il en résulte que l'on peut déterminer tous les réseaux sphériques isothermiques.

Une étude directe conduit d'ailleurs au même résultat.

Considérons le déterminant orthogonal correspondant à un tel réseau. Les rotations  $a$  et  $b$  de ce réseau peuvent être prises égales et l'on peut poser

$$a = b = e^{\varphi}.$$

Les relations

$$\frac{\partial a}{\partial v} = bm,$$

$$\frac{\partial b}{\partial u} = an$$

montrent que l'on a

$$m = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

$$n = \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

La condition

$$\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ab = 0$$

s'écrit

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + e^{2\varphi} = 0,$$

qui se ramène à la forme de Liouville que l'on sait intégrer. On en déduit ensuite les éléments du déterminant.

À la théorie précédente, on peut rattacher facilement l'étude des surfaces minima.

Supposons donné le déterminant orthogonal correspondant à la représentation sphérique d'une telle surface.

En désignant par  $R_1, R_2$  les rayons de courbure principaux, on peut

poser

$$R_1 = -\frac{h}{a} = \lambda, \quad R_2 = -\frac{l}{b} = -\lambda.$$

L'égalité

$$h' = -a R_1$$

donne par dérivation

$$\frac{\partial h}{\partial v} = -a \frac{\partial R_1}{\partial v} - R_1 \frac{\partial a}{\partial v} = lm = -R_2 bm = -R_2 \frac{\partial a}{\partial v}.$$

ou

$$\frac{\partial R_1}{\partial v} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial v} (R_2 - R_1).$$

On obtient de même

$$\frac{\partial R_2}{\partial u} = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial u} (R_1 - R_2).$$

En tenant compte des égalités indiquées, on a

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = -\frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial v},$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial u}.$$

On peut donc prendre

$$a = \frac{U}{\sqrt{\lambda}},$$

$$b = \frac{V}{\sqrt{\lambda}},$$

$U, V$  étant deux fonctions arbitraires de  $u$  et de  $v$  qui peuvent être ramenées à l'unité par un changement de variables convenable.

Le  $ds^2$  de la représentation sphérique d'une surface minima peut donc être mis sous la forme

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda} (du^2 + dv^2).$$

Le réseau  $O$  correspondant est un réseau sphérique isothermique.

Montrons qu'inversement à tout réseau isothermique tracé sur la sphère on peut faire correspondre une surface minima.

On a

$$ds^2 = a^2 du^2 + b^2 dv^2$$

et, par un changement de variables convenables, on peut poser

$$a = b = e^{\phi}.$$

On obtient alors

$$m = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad n = \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Il est possible de prendre pour  $h$  et  $l$  les fonctions

$$h = e^{-\varphi}, \quad l = -e^{-\varphi}$$

et de déduire un réseau orthogonal décrit par un point M.

Les rayons de courbure principaux correspondant à ce réseau sont donnés par les formules

$$R_1 = -\frac{h}{a} = -e^{2\varphi}, \quad R_2 = -\frac{l}{b} = e^{2\varphi}.$$

**24. Réseaux de Weingarten (W).** — Les réseaux de Weingarten ou réseaux W sont des réseaux orthogonaux caractérisés par le fait que le rayon de courbure principaux sont tels que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial u} & \frac{\partial R_1}{\partial v} \\ \frac{\partial R_2}{\partial u} & \frac{\partial R_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

On peut encore les définir en posant

$$R_1 = f_1(\theta), \quad R_2 = f_2(\theta),$$

$f_1, f_2$  sont deux fonctions arbitraires,  $\theta$  une fonction arbitraire également des variables  $u$  et  $v$ .

Les relations

$$\frac{\partial R_1}{\partial v} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial v} (R_2 - R_1),$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial u} = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial u} (R_1 - R_2)$$

deviennent

$$\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{f_1' \frac{\partial \theta}{\partial v}}{f_2 - f_1},$$

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial u} = \frac{f_2' \frac{\partial \theta}{\partial u}}{f_1 - f_2}$$

et montrent que, si l'on choisit convenablement les variables  $u$  et  $v$ , on peut prendre pour rotation  $a$  et  $b$  du déterminant orthogonal

correspondant

$$a = g_1(\theta), \quad b = g_2(\theta).$$

La réciproque est immédiate. Si les rotations  $a$  et  $b$  d'un déterminant orthogonal sont de la forme précédente, il est possible de déduire un réseau orthogonal dont les courbures  $R_1, R_2$  sont données par

$$R_1 = f_1(\theta), \quad R_2 = f_2(\theta).$$

La propriété indiquée est donc caractéristique de la représentation sphérique des réseaux  $W$ .

**25. Réseaux du parabolôide de révolution et déformation de cette surface.** — Considérons le parabolôide de révolution d'équation

$$x_1^2 + x_2^2 = 2p x_3.$$

Si le point  $M$  de cette surface dont les coordonnées sont  $x_1, x_2, x_3$  décrit un réseau, le point  $m$  de coordonnées  $x_1, x_2, 0$  décrit dans le plan  $Ox_1x_2$  un réseau orthogonal.

Tout réseau tracé sur un parabolôide de révolution est projeté sur un plan perpendiculaire à l'axe suivant un réseau orthogonal.

Inversement, montrons que tout réseau  $\mu$  d'un espace d'ordre 3 qui se projette sur le plan  $x_1Ox_2$  suivant un réseau  $O$  est parallèle à un réseau tracé sur le parabolôide.

Il est possible, en effet, de prendre pour paramètres normaux et pour rotations du réseau les quantités

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos \varphi, & \xi_2 &= \sin \varphi, & \xi_3 &= \dots, & m &= -\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \eta_1 &= -\sin \varphi, & \eta_2 &= \cos \varphi, & \eta_3 &= \dots, & n &= \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned}$$

Les paramètres directeurs de la normale au réseau  $\mu$  sont :

$$X_1 = \eta_3 \sin \varphi - \xi_3 \cos \varphi, \quad X_2 = -\xi_3 \sin \varphi - \eta_3 \cos \varphi, \quad X_3 = 1.$$

Dans ces conditions, le point  $m$  dont les coordonnées  $x_1, x_2$  sont données par

$$x_1 = -p X_1, \quad x_2 = -p X_2$$

décrit un réseau, et l'on vérifie immédiatement que le réseau décrit par le point  $M$  du parabolôide de coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  dont il est la projection décrit un réseau parallèle au réseau  $\mu$  donné.

Supposons donnés un réseau décrit par un point M du paraboloidé décrit par un point de coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  et un second réseau décrit par un point P de coordonnées  $y_1, y_2, y_3$  applicable sur le premier. On a

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2$$

ou

$$dx_1^2 + dx_2^2 = -dx_3^2 + dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2.$$

Le point  $m$  de coordonnées  $x_1, x_2$  décrit un réseau O plan, applicable sur un réseau décrit par le point de coordonnées  $ix_3, y_1, y_2, y_3$  d'un espace d'ordre 4. Ces réseaux ont été appelés réseau L. Le réseau  $m$  est donc un réseau O, L.

Inversement, supposons donné un réseau plan O, L. Soient  $X_1, X_2$  les coordonnées du point qui décrit ce réseau;  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  les coordonnées du point de l'espace d'ordre 4 qui décrit un réseau applicable sur le réseau donné.

Le point  $M_1$  de coordonnées  $X_1, X_2, X_3 = iy_1$  décrit dans l'espace d'ordre 3 un réseau projeté sur le plan  $x_1 O x_2$  suivant un réseau O. Ce réseau  $M_1$  est donc parallèle à un réseau M tracé sur le paraboloidé. Nous avons montré que la détermination des coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  de M résultait de l'intégration des systèmes complets

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= H \frac{\partial X_i}{\partial u} \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= L \frac{\partial X_i}{\partial v} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Les fonctions H, L sont calculées par la méthode indiquée.

On voit alors que, si l'on détermine les fonctions  $y_1, y_2, y_3$  qui satisfont aux relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= H \frac{\partial Y_i}{\partial v}, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= H \frac{\partial Y_i}{\partial v}, \end{aligned}$$

ces quantités définissent les coordonnées d'un point P qui décrit un réseau applicable sur le paraboloidé.

En résumé, on peut par des quadratures déterminer un réseau applicable sur un autre réseau tracé sur un paraboloidé lorsque l'on connaît un réseau plan O, L.

Nous indiquerons maintenant les propriétés caractéristiques de ces réseaux.

La théorie générale permet, en partant d'un réseau L, de former les congruences harmoniques au réseau. Parmi ces congruences existent des congruences H qui, étant harmoniques à un réseau O, sont en même temps des congruences C. On déduit donc d'un réseau O, L des congruences C, H.

Inversement, une congruence C, H étant donnée, on sait qu'il existe parmi les réseaux harmoniques à une congruence C deux réseaux O. Comme ces réseaux sont harmoniques à une congruence H, ces réseaux sont des réseaux L. Les problèmes de la détermination des réseaux plans O, L et des congruences planes C, H sont équivalents.

On sait également qu'un réseau plan O étant orthogonal à lui-même à une congruence harmonique au réseau correspond, par orthogonalité, une congruence conjuguée au réseau. Il existe donc parmi les congruences conjuguées à un réseau O, L des congruences C, H. (Les congruences C correspondent par orthogonalité aux congruences H.) Un réseau O, L étant conjugué à une congruence C est un réseau K. Reprenant le raisonnement en sens inverse, on voit qu'un réseau O, K est forcément un réseau O, L.

Si l'on désigne par  $\xi, \eta$  les paramètres normaux des tangentes à un réseau, par  $m$  et  $n$  les rotations, la relation

$$\sum \xi \eta + \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial v} = 0$$

caractérise les réseaux K.

Avec les notations employées pour les réseaux O plan, cette relation devient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0.$$

Les réseaux plans considérés sont donc caractérisés par la fonction

$$\varphi = F(u + v) + F_1(u - v)$$

ou plus généralement par la relation

$$\varphi = F(U + V) + F_1(U - V),$$



dans laquelle on désigne par  $F, F_1$  deux fonctions arbitraires, par  $U, V$  deux autres fonctions arbitraires de  $u$  ou de  $v$  seulement.

Les raisonnements précédents montrent qu'étant donné un réseau plan  $O, L$ , il est possible d'en déduire par des opérations géométriques des réseaux analogues. On peut donc, étant un réseau applicable sur le paraboloidé, déduire d'autres réseaux.

Les réseaux précédents peuvent aussi être formés à partir de l'espace d'ordre 4 de la manière suivante :

Soient  $X_1, X_2$  les coordonnées d'un point  $A$  qui décrit un réseau  $O, L$ ;  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  les coordonnées du point  $B$  d'un espace d'ordre 4 qui décrit un réseau applicable sur le réseau donné. La relation

$$dX_1^2 + dX_2^2 = dY_1^2 + dY_2^2 + dY_3^2 + dY_4^2$$

montre que le réseau  $B$  est aussi un réseau  $O, L$ .

Supposons donné un déterminant orthogonal

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix};$$

soient  $a, b, e, f, m, n$  les rotations de ce déterminant.

Il est possible, comme on l'a indiqué, de déduire de ce déterminant un réseau  $L$ . Les paramètres des tangentes au réseau sont :

$$\begin{aligned} fx_i - by_i, \\ ex_i - ay_i. \end{aligned}$$

Si le réseau obtenu est un réseau  $O$ , on a

$$\sum_{i=1}^{i=4} (fx_i - by_i)(ex_i - ay_i) = 0$$

ou

$$ef + ab = 0.$$

Posons

$$\theta = a^2 + e^2,$$

on obtient

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = 2m(ab + ef).$$

Donc,  $\theta$  est une fonction de  $u$  seul, qui, par un choix convenable de la variable  $u$ , peut être réduite à l'unité. Nous prendrons

$$a^2 + e^2 = 1.$$

On voit de même que l'on peut prendre

$$b^2 + f^2 = 1$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} a &= \cos \psi, & e &= \sin \psi, \\ b &= -\sin \psi, & f &= \cos \psi. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} m &= \frac{\partial \psi}{\partial v}, \\ n &= -\frac{\partial \psi}{\partial u}. \end{aligned}$$

La relation

$$\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ab + ef = 0$$

devient

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = 0.$$

On peut prendre

$$\psi = F(u + v) + F_1(u - v).$$

Le réseau plan décrit par le point de coordonnées  $X_1, X_2$  admet les mêmes rotations que le réseau précédent. Soient

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos \varphi, & \xi_2 &= \sin \varphi, \\ \eta_1 &= -\sin \varphi, & \eta_2 &= \cos \varphi \end{aligned}$$

les paramètres normaux de ses tangentes.

On doit avoir

$$\begin{aligned} m &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v} = F'(u + v) - F'_1(u - v), \\ n &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u} = -F'(u + v) - F'_1(u - v). \end{aligned}$$

On peut prendre

$$\varphi = -F(u + v) + F_1(u - v).$$

On en déduit alors comme précédemment un réseau applicable sur le paraboloidé.

Nous terminerons cette étude par les propriétés des congruences planes qui sont des congruences C, H.



Considérons un déterminant O d'un espace d'ordre 3

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}.$$

La congruence plane définie par les quantités  $x_1, x_2$  est une congruence H.  $a, b, m, n$  désignant les rotations du déterminant, les quantités  $x$  sont solutions de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v};$$

on a

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

qui montrent que les paramètres complémentaires de la congruence H(3I) considérée sont  $x_3$  et  $i$ .

On voit immédiatement que toute congruence plane H est obtenue par cette méthode.

Exprimons maintenant que la congruence donnée est une congruence C. Par un choix convenable des variables, on doit avoir

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2.$$

On en déduit

$$x_3^2 + a^2 + b^2 = 1,$$

relation qui montre que l'on peut prendre  $x_3, a, b$  comme élément d'une colonne d'un nouveau déterminant orthogonal

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 = x_3 \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 = a \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \eta'_3 = b \end{vmatrix}.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_3}{\partial u} &= a \xi_3, & \frac{\partial \xi_3}{\partial v} &= n \eta_3, & \frac{\partial a}{\partial v} &= bm, \\ \frac{\partial x_3}{\partial v} &= b \eta_3; & \frac{\partial \eta_3}{\partial u} &= m \xi_3; & \frac{\partial b}{\partial u} &= an, \end{aligned}$$

relations qui montrent que les rotations  $a', b', m', n'$  de ce nouveau déterminant sont

$$\begin{aligned} a' &= \xi_3, & m' &= m, \\ b' &= \eta_3, & n' &= n. \end{aligned}$$

Les relations

$$a = \xi'_3, \quad b = \eta'_3$$

montrent qu'il y a réciprocité entre les deux déterminants considérés.

**26. Réseaux applicables C de l'espace d'ordre 3.** — Lorsque deux surfaces (S), (S') sont applicables, on sait qu'il existe en général sur ces deux surfaces deux réseaux conjugués qui se correspondent dans la déformation.

Nous supposons les deux surfaces rapportées à ces réseaux et aux paramètres correspondants. Nous désignerons par  $x_1, x_2, x_3$  les coordonnées d'un point M de (S); par  $x'_1, x'_2, x'_3$  les coordonnées du point M de (S') obtenus pour les mêmes valeurs des variables  $u, v$ .

On a

$$\Sigma dx_i^2 \equiv \Sigma dx_i'^2.$$

Dans ces conditions, les six fonctions  $x, x'$  sont solutions d'une même équation de Laplace, et, si l'on conserve les notations générales, les quantités  $h, l$ , définies par

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= h\xi, & \frac{\partial x'}{\partial u} &= h\xi', \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= l\eta, & \frac{\partial x'}{\partial v} &= l\eta', \end{aligned}$$

peuvent être choisies égales pour les deux réseaux.

L'égalité précédente montre que l'on a

$$\begin{aligned} \Sigma \xi^2 &= \Sigma \xi'^2, \\ \Sigma \xi\eta &= \Sigma \xi'\eta', \\ \Sigma \eta^2 &= \Sigma \eta'^2. \end{aligned}$$

On voit aussi que les rotations  $m$  et  $n$  des deux réseaux correspondants sont les mêmes, que les six quantités  $\xi$  satisfont à une même équation de Laplace, qu'il en est de même pour les six quantités  $\eta$ .

Soient M, M' deux points correspondants des surfaces (S), (S'); MR, MS; M'R', M'S' les première et seconde tangentes correspondantes des deux réseaux. Un point P du plan MRS a des coordonnées  $y_1, y_2, y_3$  données par les formules

$$y_i = x_i + \lambda\xi_i + \mu\eta_i.$$

Nous dirons que le point P' du plan M'R'S', dont les coordonnées sont

$$y'_i = x'_i + \lambda\xi'_i + \mu\eta'_i,$$

est le point correspondant à P dans la déformation.

L'interprétation géométrique est immédiate. Si l'on fait coïncider les angles MRS, M'R'S', les points P, P' coïncident également.

Supposons d'abord que  $\lambda$  et  $\mu$  soient des fonctions de  $u$  et de  $v$ . A chacun des plans MRS, M'R'S' correspondent alors des points P, P'. Le lieu de P est une surface (T), celui de P' une surface (T'). On vérifie immédiatement la relation

$$\sum \frac{dy}{du} \frac{dy'}{dv} = \sum \frac{dy'}{du} \frac{dy}{dv}.$$

Imaginons maintenant que  $\lambda$  et  $\mu$  soient des fonctions de  $u$ , de  $v$  et d'une troisième variable  $t$ . Lorsque  $u$  et  $v$  sont donnés, le lieu de P dans le plan MRS est une courbe (C), le lieu de P' dans le plan M'R'S' est une courbe C'.

On vérifie également que l'on a

$$\begin{aligned} \sum \frac{dy}{du} \frac{dy'}{dt} &= \sum \frac{dy'}{du} \frac{dy}{dt}, \\ \sum \frac{dy}{dv} \frac{dy'}{dt} &= \sum \frac{dy'}{dv} \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

Il résulte de là que si les courbes (C), lieux de P lorsqu'on suppose  $u$  et  $v$  constants,  $t$  variable, sont normales aux surfaces (T) lieux de P lorsqu'on suppose  $t$  constant,  $u$  et  $v$  variables, les courbes correspondantes (C') sont normales aux surfaces correspondantes (T').

On voit aussi que si l'on connaît une famille de surfaces (T) admettant pour trajectoires orthogonales une famille de courbes planes (C), on peut, par la méthode précédente, décrire une famille correspondante de surfaces (T') admettant pour trajectoires orthogonales une famille de courbes planes (C').

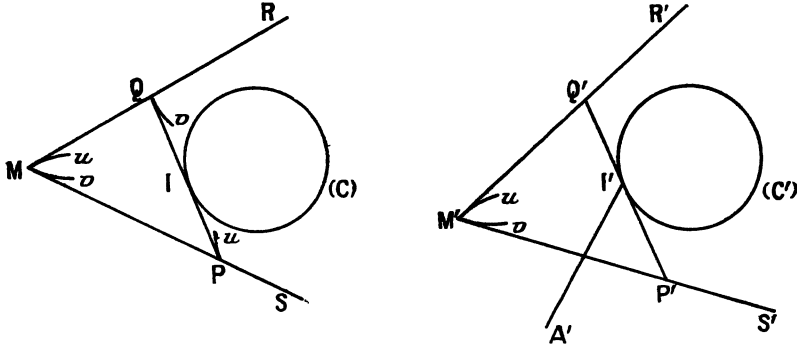
Considérons deux congruences harmoniques aux réseaux M, M'. Soient P, Q; P', Q' leurs premiers et seconds réseaux focaux. Nous dirons que les congruences sont correspondantes si les points P, P'; Q, Q' sont des points correspondants des tangentes MS, M'S'; MR, M'R'. On a évidemment (*fig.* 11 et 12).

$$\begin{aligned} MP &= M'P', \\ MQ &= M'Q'. \end{aligned}$$

Le point d'intersection  $\alpha$  de deux droites PQ, P'Q', qui décrivent

des congruences harmoniques au réseau  $M$ , décrit un réseau dérivé du réseau  $M$ . Il en résulte immédiatement que si un point  $\alpha$  décrit

Fig. 11 et 12.



un réseau dérivé du réseau  $M$ , le point correspondant  $\alpha'$  décrit un réseau dérivé du réseau  $M'$  et inversement.

Les paramètres des congruences harmoniques correspondantes relatives aux réseaux  $M, M'$  peuvent être définis par les quantités

$$\begin{aligned} X_i &= r\xi_i - q\eta_i \\ X'_i &= r'\xi'_i - q'\eta'_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Les fonctions  $r$  et  $q$  satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial u} &= mq, \\ \frac{\partial q}{\partial v} &= n\eta, \end{aligned}$$

$r$  et  $q$  sont solutions des équations de Laplace auxquelles satisfont les quantités  $\xi, \eta$ . On voit que l'on a

$$\Sigma X_i^2 = \Sigma X_i'^2.$$

Dans le cas général,  $r$  et  $q$  sont quelconques. La congruence PQ harmonique au réseau  $M$  est une congruence 3O.

Si l'on suppose

$$\begin{aligned} q &= \xi_3, \\ r &= \eta_3 \end{aligned}$$

ou plus généralement

$$\begin{aligned} q &= a_1 \xi'_1 + a_2 \xi'_2 + a_3 \xi'_3, \\ r &= b_1 \eta'_1 + b_2 \eta'_2 + b_3 \eta'_3, \end{aligned}$$

les quantités  $a, b$  étant constantes, il est possible de supprimer l'une des quantités  $X'_i$ .

La congruence PQ harmonique au réseau M est une congruence  $2O$  et l'on voit que ces congruences peuvent être obtenues de la manière suivante :

La congruence  $P'Q'$  est obtenue en prenant la trace du plan tangent au réseau  $M'$  sur un plan fixe. La congruence PQ correspondante est une congruence  $2O$ .

Enfin si l'on a

$$\begin{aligned} q &= \xi'_2 + i \xi'_3, \\ r &= \eta'_2 + i \eta'_3, \end{aligned}$$

ou plus généralement si les quantités  $q$  et  $r$  sont des combinaisons linéaires et isotropes à coefficients constants, des quantités  $\xi', \eta'$  il est possible de supprimer deux quantités  $X'$ . Les congruences P, Q correspondantes sont des congruences O.

On voit donc que les congruences de normales P, Q harmoniques au réseau C décrit par le point M sont les congruences correspondant aux congruences obtenues en prenant la trace du réseau  $M'$  sur un plan isotrope fixe.

Nous considérerons maintenant l'ensemble des plans tangents à un cône isotrope de sommet fixe  $A'$ . A chacun de ces plans correspond une congruence  $P'Q'$  harmonique au réseau  $M'$ , une congruence correspondante PQ harmonique au réseau M qui est une congruence O.

Soient  $A'I'$  la génératrice de contact d'un plan tangent avec le cône,  $I'$  la trace de cette génératrice sur le plan tangent  $M'R'S'$  au réseau  $M'$ .

Le point  $I'$  décrit un réseau dérivé du réseau  $M'$  conjugué à la congruence  $P'Q'$ . Le point I correspondant décrit un réseau dérivé du réseau M conjugué à la congruence PQ.

Le réseau décrit par le point  $I'$  est un réseau O.  $P'Q'$  est une normale à ce réseau. Le réseau décrit par le point I est un réseau O conjugué à la congruence O décrite par la droite PQ.

On retrouve ainsi les propriétés classiques suivantes :

Désignons par  $M'R'S'$  un plan tangent au réseau décrit par le point  $M'$ . Les points  $I'$  correspondant à ce plan sont situés sur un cercle ( $C'$ ) obtenu en prenant la trace du cône isotrope de sommet  $A'$ . Les points  $I$  correspondants sont donc sur un cercle ( $C$ ) situé dans le plan  $MRS$  tangent au réseau  $M$ .

Si l'on considère une génératrice fixe  $A'I'$  du cône, la trace du plan tangent le long de cette génératrice sur le plan  $M'R'S'$  est une droite  $P'Q'$  tangente au cercle ( $C'$ ) au point  $I'$ . La droite  $PQ$  correspondante du plan  $MRS$  est tangente au cercle ( $C$ ) en un point  $I$ . La congruence correspondante est décrite par les normales au réseau  $O$  décrit par  $I$ .

Enfin, si l'on se donne quatre génératrices du cône isotrope de sommet  $A'$ , le rapport anharmonique des quatre points  $I'_1, I'_2, I'_3, I'_4$  des cercles ( $C'$ ) correspondant aux divers plans tangents au réseau  $M'$  est constant. Il en est donc de même du rapport anharmonique des quatre points  $I_1, I_2, I_3, I_4$  correspondant aux divers plans tangents au réseau  $M$ .

**27. Surfaces à courbure totale constante.** — Nous étudierons d'abord le déterminant orthogonal correspondant à ces surfaces, en remarquant que l'on peut toujours, en faisant une homothétie convenable, supposer que la relation qui lie les rayons de courbure  $R_1, R_2$  s'écrit

$$R_1 R_2 = -1.$$

Avec les notations habituelles,

$$R_1 = -\frac{h}{a}, \quad R_2 = -\frac{l}{b}.$$

On a donc

$$hl + ab = 0.$$

Il est toujours possible de prendre

$$\begin{aligned} a &= r \sin \varphi, & b &= \rho \cos \varphi, \\ h &= r \cos \varphi; & l &= -\rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial v} &= bm, & \frac{\partial h}{\partial v} &= lm, \\ \frac{\partial b}{\partial u} &= an; & \frac{\partial l}{\partial u} &= hn \end{aligned}$$

montrent que

$$\frac{dr}{dv} = 0, \quad \frac{d\rho}{du} = 0.$$

On a

$$r = U, \quad \rho = V$$

et, par un choix convenable des variables  $u$  et  $v$ , les fonctions  $U$  et  $V$  peuvent être réduites à l'unité.

Par suite

$$\begin{aligned} a &= \sin \varphi, & h &= \cos \varphi, & m &= \frac{d\varphi}{dv}, \\ b &= \cos \varphi; & l &= -\sin \varphi; & n &= -\frac{d\varphi}{du}, \end{aligned}$$

la relation

$$ab + \frac{dm}{dv} + \frac{dn}{du} = 0$$

donne

$$\frac{d^2\varphi}{dv^2} - \frac{d^2\varphi}{du^2} + \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

qui se ramène facilement à l'équation habituelle

$$\frac{d^2\varphi}{du dv} = \sin 2\varphi,$$

qui caractérise les surfaces à courbure totale constante.

Supposons connue une solution  $\varphi$  et les quantités  $\xi, \eta$  correspondant aux paramètres des tangentes aux lignes de courbure de la surface. Les coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  du point  $m$  qui décrit la représentation sphérique sont obtenues par l'intégration des systèmes

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{du} &= \xi_i \sin \varphi \\ \frac{dx_i}{dv} &= \eta_i \cos \varphi \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3)$$

et les coordonnées  $X_1, X_2, X_3$  du point  $M$  qui décrit la surface à courbure totale constante par l'intégration

$$\begin{aligned} \frac{dX_i}{du} &= \xi_i \cos \varphi \\ \frac{dX_i}{dv} &= -\eta_i \sin \varphi \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3).$$

On voit donc que l'on a

$$ds^2 = \cos^2 \varphi du^2 + \sin^2 \varphi dv^2.$$

Les quantités

$$A = i \cos \varphi, \quad M = \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$B = -i \sin \varphi, \quad N = -\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

qui vérifient la relation

$$\frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial u} + \Lambda B = 0,$$

peuvent être interprétées comme les rotations d'un déterminant orthogonal.

A ce déterminant correspond un réseau orthogonal tracé sur la sphère de rayon 1 dont le  $ds^2$  est

$$ds'^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2.$$

Il en résulte immédiatement que le réseau formé par les lignes de courbure d'une surface à courbure totale constante négative égale à  $-1$  est applicable sur un réseau tracé sur la sphère de rayon  $i$ . Soit  $m'$  le point qui décrit ce réseau.

De plus, le point  $m_1$  dont les coordonnées sont  $ix_1, ix_2, ix_3$  décrit sur la sphère de rayon  $i$  un deuxième réseau orthogonal. Le plan tangent en  $m_1$  à la sphère est parallèle au plan tangent en  $M$  à la surface à courbure totale constante.

En résumé, si l'on considère le réseau  $M$  formé par les lignes de courbure d'une surface dont la courbure totale constante négative est égale à  $-1$ , il est possible de lui faire correspondre sur une sphère de rayon  $i$  deux autres réseaux orthogonaux.

Le premier décrit par un point  $m_1$ , la correspondance entre  $m_1$  et  $M$  définie par le parallélisme des plans tangents.

Le second décrit par un point  $m'$ , le réseau décrit par le point  $M$  est applicable sur le réseau décrit par le point  $m'$ .

Il est facile d'établir que toute surface applicable sur une sphère est une surface à courbure totale constante.

Nous supposons que par une homothétie convenable le rayon de la sphère ait été ramené à l'unité, et nous remarquons que les réseaux



conjugués qui se correspondent dans la déformation sont des réseaux orthogonaux.

Soient  $M$  le réseau formé par les lignes de courbure de la surface considérée,  $a, b, m, n$  les rotations du déterminant orthogonal correspondant; on a

$$ab + \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} = 0.$$

Désignons par  $m'$  le point de la sphère qui décrit le réseau applicable sur le réseau  $M$ . A ce réseau correspond un second déterminant orthogonal caractérisé par les rotations

$$\begin{aligned} A &= h, & M &= m, \\ B &= l, & N &= n, \end{aligned}$$

et l'on a la relation

$$hl + \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} = 0,$$

qui montre que

$$hl = ab$$

et que les rayons de courbure  $R_1, R_2$  correspondant au réseau  $M$  sont liés par la relation

$$R_1 R_2 = 1.$$

Plus généralement, considérons deux surfaces applicables  $S, S'$  telles que les réseaux qui se correspondent dans la déformation soient des réseaux orthogonaux. Désignons par  $M, M'$  les points qui décrivent ces réseaux.

Il existe sur la sphère de rayon 1 un réseau  $m'$  parallèle au réseau  $M'$ . Ce réseau correspond à la représentation sphérique de la surface  $S'$ . On pourra donc déterminer un réseau  $m$  parallèle au réseau  $M$  applicable sur le réseau  $m'$ .

Il en résulte que la représentation sphérique des surfaces  $S, S'$  est la même que celle des surfaces à courbure totale constante.

Les réseaux orthogonaux correspondant aux surfaces à courbure totale constante sont des réseaux  $O, C$ . Les congruences de normales correspondantes sont donc des congruences  $O, C$ . Leurs propriétés générales permettent de retrouver le résultat précédent.

Désignons par  $x_1, x_2, x_3$  les cosinus directeurs d'une droite qui décrit une telle congruence. Ces quantités forment les éléments de la

première ligne d'un déterminant orthogonal et sont avec les notations habituelles solutions de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

La congruence considérée étant une congruence C, on doit avoir

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 = a^2 U^2 + b^2 V^2,$$

U et V désignent des fonctions de  $u$  et de  $v$  seules qui, par un choix convenable des variables, peuvent être ramenées à l'unité.

On peut donc supposer

$$a^2 + b^2 = 1$$

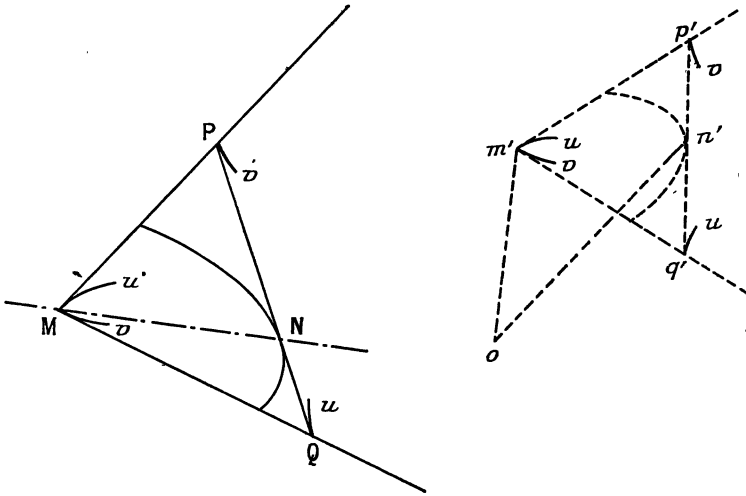
et prendre

$$a = \sin \varphi, \quad b = \cos \varphi,$$

relations qui établissent la propriété indiquée.

Nous avons indiqué, d'une façon générale, les méthodes permettant de déterminer les congruences de normales harmoniques aux

Fig. 13 et 14.



réseaux O, C. Ces méthodes vont nous permettre d'étudier les transformations classiques des surfaces à courbure totale constante (fig. 13 et 14).

Considérons le réseau orthogonal M formé par les lignes de cour-

bure d'une surface dont la courbure totale constante négative est égale à  $-a^2$ . Ce réseau est applicable sur un réseau  $m'$  tracé sur une sphère de centre O et de rayon  $ai$ .

Un plan isotrope fixe mené par O définit une congruence  $p'q'$  harmonique au réseau  $m'$ . La congruence PQ correspondante relative au réseau M est une congruence O.

Pour un point  $m'$  donné, l'ensemble des droites  $p'q'$  obtenues à l'aide des différents plans isotropes est constitué par l'ensemble des tangentes à un cercle situé dans le plan tangent au réseau de centre  $m'$  et de rayon  $a$ . Soit  $n'$  le point de contact d'une tangente  $p'q'$  avec ce cercle.

L'ensemble des droites PQ est formé par les tangentes à un cercle de centre M de rayon  $a$  situé dans le plan tangent au réseau M. Soit N le point de contact d'une droite PQ avec ce cercle.

Lorsqu'on fait varier le point M, la droite PQ décrit une congruence de normales, le point N décrit un réseau O conjugué à cette congruence. La relation

$$\overline{NP} \cdot \overline{NQ} = -a^2$$

montre que ce réseau O est formé par les lignes de courbure d'une surface à courbure totale constante négative  $-a^2$ .

La droite MN engendre une congruence de normales, M et N sont les points focaux. (Les paramètres  $u$  et  $v$  ne correspondent pas aux développables.) On voit que si l'on considère une surface orthogonale à cette congruence les rayons de courbure  $R_1, R_2$  sont liés par la relation

$$R_1 - R_2 = a.$$

On sait que si la propriété précédente est vérifiée pour une surface, les surfaces focales correspondantes sont des surfaces à courbure totale constante.

Signalons enfin que le cas envisagé est manifestement le seul où les cercles qui servent à définir les congruences de normales harmoniques au réseau M ont un rayon constant.

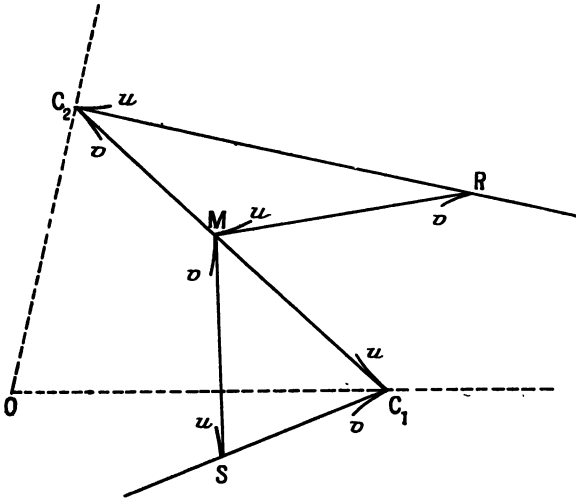
### ÉTUDE DES RÉSEAUX DÉCRITS PAR LES CENTRES DE COURBURE D'UNE SURFACE.

28. Considérons dans un espace d'ordre 3 un réseau orthogonal décrit par un point M de coordonnées  $X_1, X_2, X_3$ , correspondant à

un déterminant orthogonal (*fig.* 15)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}.$$

Fig. 15.



Les quantités  $\lambda$  satisfont aux égalités

$$\frac{\partial X_i}{\partial u} = h \xi_i,$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = l \eta_i.$$

Conservant les notations précédemment employées on voit que le point  $C_1$ , dont les coordonnées  $Y_1, Y_2, Y_3$  sont données par les formules

$$Y_i = X_i + R_1 x_i,$$

où l'on désigne par  $R_1$  le premier rayon de courbure principal du réseau  $M$  défini par l'égalité

$$h + a R_1 = 0,$$

est le premier réseau focal de la congruence décrite par les normales du réseau  $M$ .

On calcule aisément les quantités

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y_1}{\partial u} &= r_1 \frac{\partial R_1}{\partial u}, \\ \frac{\partial Y_1}{\partial v} &= r_1 \frac{\partial R_1}{\partial v} + (l + b R_1) r_{1v}, \\ \frac{\partial^2 Y_1}{\partial u \partial v} &= r_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial u \partial v} + b r_{1v} \frac{\partial R_1}{\partial u}.\end{aligned}$$

Ces relations montrent que les coordonnées  $Y_1, Y_2, Y_3$  sont solutions d'une équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} = P \frac{\partial Y}{\partial u} + Q \frac{\partial Y}{\partial v}.$$

Les fonctions P et Q sont définies par les relations

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_1}{\partial u \partial v} &= P \frac{\partial R_1}{\partial u} + Q \frac{\partial R_1}{\partial v}, \\ b \frac{\partial R_1}{\partial u} &= Q (l + b R_1).\end{aligned}$$

Il résulte de là que l'équation du réseau admet la solution  $R_1$ . On peut remarquer en outre que l'égalité

$$\sum \frac{\partial Y_i}{\partial u} \frac{\partial Y_i}{\partial v} - \frac{\partial R_1}{\partial u} \frac{\partial R_1}{\partial v} = 0$$

met en évidence une solution  $\theta$  de cette équation définie par

$$0 = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - R_1^2.$$

Posons  $Y_i = i R_1$ . Dans ces conditions on peut dire que l'équation du réseau focal  $C_1$  admet les solutions

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2.$$

On voit immédiatement que l'on a

$$\left(\frac{\partial Y_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_3}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_4}{\partial u}\right)^2 = 0.$$

Réciproquement, supposons que l'équation d'un réseau admette les solutions précédentes, liées par la relation indiquée et montrons que, dans ces conditions, le réseau est le premier réseau focal d'une congruence de normales.

Le résultat est immédiat. Le point de coordonnées  $Y_1, Y_2, Y_3$  décrit un réseau. La première congruence focale de ce réseau est une congruence  $2I$  ou  $O$ .

On peut donc dire que, si l'on connaît une surface rapportée à ses lignes de courbure, il est possible d'en déduire quatre congruences de normales.

Les résultats précédents s'appliquent sans modification au second réseau focal. Si l'on désigne par  $Z_1, Z_2, Z_3$  les coordonnées du point  $C_2$  qui le décrit par  $R_2$  le second rayon de courbure principal, l'équation de ce réseau admet les solutions

$$Z_1, Z_2, Z_3, R_2, Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - R_2^2.$$

Remarquons que le réseau  $C_2$  se déduit du réseau  $C_1$  par la transformation de Laplace, et il est évident que les solutions  $Z_1, Z_2, Z_3$  se déduisent des solutions  $Y_1, Y_2, Y_3$  par cette transformation. Des calculs faciles montrent que les solutions  $R_2, Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - R_2^2$  se déduisent des solutions  $R_1, X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - R_1^2$  par la même transformation.

On peut donc indiquer par le tableau suivant l'ensemble des solutions correspondantes pour les deux réseaux :

$$\begin{array}{ll} (C_1) & Y_1, Y_2, Y_3, R_1, Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - R_1^2, \quad t; \\ (C_2) & Z_1, Z_2, Z_3, R_2, Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - R_2^2, \quad t. \end{array}$$

On voit que si l'on désigne par  $Y$  l'une des solutions de l'équation de  $C_1$ , par  $Z$  la solution correspondante de l'équation de  $C_2$ , on a entre les quantités  $Y$  et  $Z$  les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial u} &= \frac{\frac{\partial R_1}{\partial u}}{R_2 - R_1} (Z - Y), \\ \frac{\partial Z}{\partial v} &= \frac{\frac{\partial R_1}{\partial v}}{R_2 - R_1} (Z - Y). \end{aligned}$$

En se plaçant à ce point de vue, on peut interpréter les quantités indiquées comme les paramètres des tangentes à un réseau d'un espace d'ordre 6. Ces paramètres ne sont pas les paramètres normaux des tangentes. La détermination des paramètres normaux revient au

calcul de deux fonctions  $\lambda, \mu$  des variables  $u$  et  $v$  telles que l'on ait

$$\frac{\partial}{\partial v} (\lambda Z) = n \mu Y,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} (\mu Y) = m \lambda Z.$$

On obtient ainsi

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\frac{\partial R_2}{\partial v}}{R_1 - R_2},$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\frac{\partial R_1}{\partial u}}{R_2 - R_1}.$$

Les paramètres normaux des tangentes s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\xi) \quad & \lambda Z_1, \quad \lambda Z_2, \quad \lambda Z_3, \quad \lambda R_2, \quad \lambda (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - R_2^2), \quad \lambda, \\ (\eta) \quad & \mu Y_1, \quad \mu Y_2, \quad \mu Y_3, \quad \mu R_1, \quad \mu (Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - R_1^2), \quad \mu. \end{aligned}$$

Les rotations du réseau sont :

$$m = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial u},$$

$$n = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

**29. Interprétations des résultats précédents.** — Considérons, dans un espace d'ordre 6, le réseau point défini par les paramètres directeurs de ses tangentes :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda Z_1, & \xi_2 &= \lambda Z_2, & \xi_3 &= \lambda Z_3, & \xi_4 &= i \lambda R_2, \\ \eta_1 &= \mu Y_1, & \eta_2 &= \mu Y_2, & \eta_3 &= \mu Y_3, & \eta_4 &= i \mu R_1; \\ \xi_5 + i \xi_6 &= i \lambda (Z_2^2 + Z_1^2 + Z_3^2 - R_2^2), & \xi_5 - i \xi_6 &= i \lambda, \\ \eta_5 + i \eta_6 &= i \mu (Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - R_1^2), & \eta_5 - i \eta_6 &= i \mu. \end{aligned}$$

On a évidemment

$$\sum_{i=1}^{i=6} \xi_i^2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=6} \eta_i^2 = 0$$

et, par suite,

$$\sum_{i=1}^{i=6} \xi_i \eta_i = 0.$$

Les nouvelles quantités  $\xi$  introduites ainsi jouent comme les nouvelles quantités  $\eta$  un rôle symétrique.

Permutons, par exemple, les quantités

$$\begin{array}{cc} \xi_3, & \xi_1, \\ \eta_3, & \eta_4; \end{array}$$

on échange ainsi les rôles des fonctions

$$\begin{array}{cc} Z_3, & R_2, \\ Y_3, & R_1, \end{array}$$

On peut donc dire que le problème de la détermination des surfaces, tel qu'il existe entre les rayons de courbure principaux une relation

$$f(R_1, R_2) = 0,$$

est équivalent au problème de la détermination des surfaces telles que les coordonnées de leur centre de courbure satisfassent à la relation

$$f(iY_3, iZ_3) = 0.$$

Par exemple, le problème de la détermination des surfaces minima est équivalent au problème de la recherche des surfaces telles que le lieu des milieux des segments  $C_1, C_2$  définis par leur centre de courbure décrive un réseau plan.

Les sphères, qui ont  $C_1, C_2$  pour centres et qui sont tangentes à la surface décrite par le point  $M$ , décrivent des congruences de sphères. Ces congruences correspondent aux congruences de droites décrites par les tangentes à un réseau dans un espace d'ordre 5. Les congruences de droites sont des congruences 2I.

Il résulte immédiatement de là qu'une inversion effectuée dans l'espace à trois dimensions transforme le système de sphères précédent en un système analogue et conserve par suite les lignes de courbure.

Enfin, l'étude précédente rattache la théorie des sphères précédentes à l'étude des réseaux nuls ou à l'étude de la déformation des surfaces.

Il est évident en effet que les paramètres

$$\begin{array}{ccc} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \end{array}$$



peuvent être considérés comme les paramètres normaux des tangentes à un réseau  $C$  d'un espace d'ordre 3.

Inversement, si l'on connaît un réseau  $C$  décrit par un point  $A$ , on peut, d'après la théorie générale, déterminer une congruence harmonique au réseau point qui lui est parallèle et qui est une congruence  $O$ .

Les foyers  $C_1, C_2$  de cette congruence définissent les réseaux focaux d'une congruence de normales à une surface.

Ces remarques permettent de rattacher les problèmes concernant la déformation des surfaces en d'autres problèmes faisant intervenir soit les réseaux décrits par les centres de courbure principaux, soit les rayons de courbure d'autres surfaces.

Rappelons d'abord une propriété des réseaux tracés sur une surface  $S$ .

Si l'on désigne par  $\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3$  les paramètres normaux des tangentes à un réseau décrit par un point  $M$  de la surface, on peut dire qu'aux tangentes  $MR, MS$  de ce réseau correspondent quatre fonctions :

$$\frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3},$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_3}, \frac{\eta_2}{\eta_3}.$$

Les fonctions  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  se déduisent des fonctions  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  par une transformation de Laplace. Les fonctions  $\frac{\eta_1}{\eta_3}, \frac{\eta_2}{\eta_3}$ ,  $\rho$  se déduisent des fonctions  $\frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3}$ ,  $\rho$  par une transformation analogue.

L'ensemble de ces fonctions dépend des deux paramètres  $u, v$  qui fixent la position de  $M$  sur la surface.

La définition du réseau fait intervenir un troisième paramètre qui détermine en chaque point  $M$  la direction de l'une des tangentes du réseau,  $MR$  par exemple.

Il résulte de là que, par élimination, on obtient, étant donnée une surface  $S$ , une relation

$$f\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3}; \frac{\eta_1}{\eta_3}, \frac{\eta_2}{\eta_3}\right) = 0$$

ou encore une relation homogène de la forme

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3) = 0,$$

qui lie les paramètres  $\xi, \eta$  des tangentes aux courbes d'un réseau conjugué tracé sur la surface.

Supposons que la surface  $S$  soit une sphère. La relation précédente s'écrit dans ce cas particulier :

$$\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 = 0.$$

Avec les notations employées cette relation devient :

$$Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2 + Y_3 Z_3 = 0.$$

On conclut de là que le problème de la déformation de la sphère peut être ramené au problème de la détermination de surfaces dont les centres de courbure  $C_1, C_2$  correspondant à un point donné  $M$  sont tels que, si l'on désigne par  $O$  un point fixe, l'angle  $C_1 O C_2$  soit un angle droit.

Si l'on étudie de la même manière la déformation d'une quadrique à centre dont l'équation est

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 1,$$

la relation entre les paramètres  $\xi, \eta$  des tangentes à un réseau conjugué tracé sur la quadrique s'écrit

$$a_1 \xi_1 \eta_1 + a_2 \xi_2 \eta_2 + a_3 \xi_3 \eta_3 = 0,$$

qui devient

$$a_1 Y_1 Z_1 + a_2 Y_2 Z_2 + a_3 Y_3 Z_3 = 0,$$

relation qui ramène le problème de la déformation à l'étude des congruences de normales dont les foyers  $C_1, C_2$  sont conjugués par rapport au cône dont l'équation est

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0.$$

Enfin, s'il s'agit d'un parabolôide de révolution d'axe  $OX_3$ , la relation entre les tangentes conjuguées est

$$\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 = 0$$

qui se transforme en

$$Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2 = 0.$$

Le problème de la déformation est ramené à celui de l'étude des congruences de normales qui sont telles que les plans passant par une droite fixe  $Ox_3$  et les foyers  $C_1, C_2$  soient rectangulaires.

Dans l'étude précédente nous avons fait jouer aux quantités  $\xi_1, \xi_2,$

$\xi_3$ ;  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  un rôle particulier. Il est clair que le raisonnement peut être repris en permutant les quantités

$$\begin{array}{cccccc} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3; & \xi_4, & \xi_5, & \xi_6; \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3; & \eta_4, & \eta_5, & \eta_6. \end{array}$$

Donnons tout d'abord une interprétation géométrique de ces quantités nouvelles.

Considérons une surface  $\Sigma$  lieu d'un point M de coordonnées  $X_1, X_2, X_3$ , et désignons par  $\rho$  la distance de l'origine des coordonnées au point M;  $p$  la distance de l'origine des coordonnées au plan tangent en M;  $R_1, R_2$  les rayons de courbure principaux de  $\Sigma$ .

En conservant les notations précédentes, les coordonnées  $Y_1, Y_2, Y_3$  du premier centre de courbure  $C_1$  sont :

$$Y_i = X_i + R_1 x_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

et l'on obtient

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + R_1^2 + 2R_1(x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3),$$

ce qui donne

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - R_1^2 = \rho^2 + 2pR_1.$$

On voit de même qu'en désignant par  $Z_1, Z_2, Z_3$  les coordonnées du second centre de courbure, on a

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - R_2^2 = \rho^2 + 2pR_2.$$

La relation homogène

$$F(\xi_4, \xi_5, \xi_6; \eta_4, \eta_5, \eta_6) = 0,$$

qui lie les paramètres des tangentes conjuguées à un réseau tracé sur une surface, se transforme alors en une autre relation homogène

$$\varphi(\rho, p, R_1, R_2) = 0$$

et le problème de la déformation se trouve ainsi lié à un problème de détermination de réseaux orthogonaux caractérisés par la relation précédente qui fait intervenir les rayons de courbure.

Dans le cas de la déformation de la sphère la relation

$$\xi_4 \eta_4 + \xi_5 \eta_5 + \xi_6 \eta_6 = 0$$

conduit à

$$\rho^2 + p(R_1 + R_2) + R_1 R_2 = 0.$$

Cette interprétation est équivalente à l'interprétation précédemment donnée. On vérifie d'ailleurs immédiatement que le segment  $C_1 C_2$  défini par les centres de courbure principaux  $C_1, C_2$  d'une surface  $S$  correspondante en un point  $M$  donnée est vu de l'origine  $O$  sous un angle droit.

Pour le parabolôide de révolution, on a

$$\xi_5 \eta_5 + \xi_6 \eta_6 = 0$$

et l'on obtient

$$\rho^2 + p(R_1 + R_2) = 0.$$

La détermination des surfaces applicables sur le parabolôide permet de trouver d'autres surfaces possédant la propriété indiquée et inversement.

Pour la surface de la vis à filet carré, l'axe  $Ox_3$  étant l'axe de la vis, la relation entre les quantités  $\xi_1, \xi_3, \xi_6; \eta_1, \eta_3, \eta_6$  peut s'écrire ;

$$\frac{\xi_4^2}{\xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_6^2} = \frac{\eta_4^2}{\eta_4^2 + \eta_5^2 + \eta_6^2}.$$

On obtient alors

$$\rho^2(R_1 + R_2) + 2p R_1 R_2 = 0.$$

Il est possible enfin d'interpréter les quantités  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_6$  liées par les relations

$$\sum_{i=1}^{i=6} \xi_i^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=6} \xi_i \eta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=6} \eta_i^2 = 0,$$

comme les coordonnées symétriques de deux droites  $D, \Delta$  qui se coupent en un point  $M$ .

Le lieu de  $M$  est une surface  $\Sigma$ . Les droites  $D, \Delta$  sont les tangentes aux lignes asymptotiques de cette surface.

On retrouve ainsi la transformation classique qui permet de déduire d'une surface  $S$  rapportée à ses lignes de courbure une surface  $\Sigma$  rapportée à ses lignes asymptotiques et inversement.



## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

---

- C. GUICHARD. — Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1897-1903).
- DARBOUX. — Leçons sur la théorie générale des surfaces.
- APPELL. — Sur les surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux (*American Journal of Mathematics*, 1888).
- BACKLUND. Om ylar med konstant negativ Krökning (*Lunds Universitets Arskrift*, 1883).
- BONNET. — Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (*Journal de l'École Polytechnique*, 1867).
- CARRUS DARBOUX. — Sur les familles de surfaces admettant pour trajectoire orthogonale une famille de courbes planes (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1898).
- GOURSAT. — Sur les surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance de l'origine au plan tangent (*American Journal of Mathematics*, 1888).
- LIE. — Ueber Flächen deren Krümmungsradien durch ein Relation verknüpft sind (*Archiv für Mathematik*, 1879).
- RIBAUCCOUR. — Sur la déformation des surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 70, 1870).  
— Théorie générale des surfaces courbes (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1891).
- A. THYBAUT. — Sur la déformation du paraboloidé et quelques surfaces qui s'y rattachent (*Thèse*, 1894).
- WEINGARTEN. — Eines neue Classe auf einander abwechselbarer Flächen (*Göttingue* 1867).
-

---

## TABLE DES MATIÈRES.

---

	Pages.
I. INTRODUCTION.....	1
II. Espace à deux dimensions.....	2
III. Espace à trois dimensions.....	7
IV. Espace à quatre dimensions.....	12
V. Espace à cinq dimensions.....	18
VI. Espace à six dimensions.....	26
VII. Congruences de cercles et de sphères.....	30
VIII. Applications.....	44
Réseaux isothermiques.....	44
Réseaux du parabolôide de révolution et déformation de cette surface...	49
Réseaux applicables.....	55
Surfaces à courbure totale constante.....	59
Réseaux décrits par les centres de courbure d'une surface.....	64
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.....	74

