MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

G. VRANCEANU

Les espaces non holonomes et leurs applications mécaniques

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 76 (1936)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1936__76__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur a la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathematiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXVI

Les espaces non holonomes

Par M. G. VRANCEANU
Professeur a l'Universite de Cernauti

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1936

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée a la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matieres.

Les numéros en caracteres gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient a cette Bibliographie.

LES

ESPACES NON HOLONOMES

ET

LEURS APPLICATIONS MÉCANIQUES

Par M. G. VRANCEANU,
Protesseur à l'Universite de Cernauti.

INTRODUCTION.

On sait que la division des systèmes de la Mécanique, en systèmes holonomes et non holonomes, est imposée par des considérations analytiques. En effet, les systèmes holonomes sont caractérisés par la propriété que l'on peut choisir les parametres dont dépend la position du système, de façon que toutes les liaisons du système soient exprimées par les relations en termes finis dans ces paramètres, tandis que pour les systèmes non holonomes, une partie au moins de ces liaisons est donnée par un système d'équations de Pfaff, non complètement intégrable.

Ce fait entraîne, comme il est bien connu, des différences essentielles entre l'étude analytique des systèmes holonomes et celui des systèmes non holonomes. D'une part parce que, c'est seulement aux systèmes holonomes que l'on peut appliquer les équations de mouvement de Lagrange et de Hamilton (et l'on sait que presque tous les résultats de la Mécanique analytique sont obtenus en partant de ces équations). D'autre part, parce que pour les systèmes holonomes on peut donner une interprétation géométrique très naturelle à l'aide d'un espace de Riemann. dont la métrique est définie par la force vive du système de manière que les trajectoires sans forces d'un système holonome à liaisons indépendantes du temps, sont aussi les géodésiques de l'espace de Riemann correspondant.

Pour les systèmes non holonomes, on a cherché aussi, soit de trouver des équations de mouvement applicables à tous les systèmes mécaniques (et nous avons ainsi, les équation de Maggi, de Volterra, d'Appell. etc. ([7], V. II. pr. I, p. 393, [4]), mais ces équations sont loin d'avoir la malléabilité et les propriétés des équations de Lagrange et de Hamilton, — soit de trouver des propriétés géométriques des mouvements de ces systèmes. Cette dernière voie a conduit à la notion d'espace non holonome, qui est une généralisation de la notion d'espace de Riemann, mais qui a aussi des contacts étroits avec les espaces à connexion affine.

La première idée d'appliquer des considérations géométriques à l'étude d'un système non holonome, est due à A. Voss ([1], 1885) qui s'occupe des trajectoires sans forces du mouvement d'un point de l'espace ordinaire, dont les coordonnés satisfont à une équation de Pfaff, non complètement intégrable. Plus tard ([2], 1888-1889), l'Abbé Issaly étend aux variétés de l'espace ordinaire, définies par une équation de Pfaff non complètement intégrable, variétés qu'il appelle pseudo-surfaces, beaucoup des propriétés des surfaces. Toutefois cette extension est presque toujours formelle et l'on ne voit pas bien son intérêt et, peut-être à cause de ce fait, ces travaux sont restés isolés.

La notion d'espace non holonome a été introduite en 1926 par M. G. Vranceanu ([9], 1926), qui montre que si dans un espace de Riemann, V_n, on se donne un système de $n-m$ équations de Pfaff, non complètement intégrable, on définit ainsi un espace non holonome V_n^m, dans lequel il est possible d'introduire un parallélisme dans le sens de Levi-Civita, de manière que, à chaque système non holonome à liaisons indépendantes du temps. on peut attacher un espace non holonome, dont les géodésiques (courbes auto-parallèles), sont aussi les trajectoires sans forces du système mécanique considéré.

D'une manière indépendante M. Z. Horak ([12²], 1927) fait voir comment on peut généraliser la notion de variété en introduisant les variétés non holonomes comme les espaces des configurations des systèmes mécaniques non holonomes.

En 1928, M. J. A. Schouten [16] a introduit les espaces non holonomes à connexion affine et puis des travaux, dus à MM. E. Cartan, J. L. Synge, P. Franklin et C. L. E. Moore, E. Bortolotti, A. Wundheiler, J. A. Schouten, Z. Horak. G. Vranceanu, etc., sont venus donner à l'étude des espaces non holonomes un grand développement Le but de ce fascicule est précisément d'exposer les résultats, les plus importants, obtenus dans cette direction, de même que certaines applications aux systèmes mécaniques holonomes et non holonomes.

CHAPITRE I.

LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ABSOLU DES CONGRUENCES.

1. Systèmes de n congruences indépendantes. — Considérons, dans l'espace X_n des n variables réelles $x^1, x^2, \ldots, x^n$, un vecteur contrevariant λ ayant les composantes $\lambda^i(x)$ $(i=1, 2, \ldots n)$, où les fonctions λ^i sont, comme d'ailleurs toutes les fonctions qu'on considérera dans la suite, continues et dérivables. Cela dit, les équations différentielles

$$\frac{dx^1}{\lambda^1}=\frac{dx^2}{\lambda^2}=\ldots=\frac{dx^n}{\lambda^n},$$

définissent dans l'espace X_n une congruence de courbes. Par chaque point $P(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, où les quantités λ^i ne sont pas toutes nulles, il passe une courbe de la congruence et une seule, la tangente à la courbe au point P ayant la direction du vecteur λ en ce point.

Considérons maintenant n vecteurs contrevariants $\lambda^i_a (a=1, 2, \ldots, n)$ indépendantes; c'est-à-dire que le déterminant de leurs composantes

$$\Delta = |\lambda^i_a|$$

soit différent de zéro, au moins dans une certaine région de l'espace X_n où sont valables nos considérations. Ces n vecteurs déterminent dans X_n un système de n congruences indépendantes, de façon que, par chaque point P, il passe n courbes du système ayant comme tangentes en P les directions des n vecteurs indépendants (λ_a) passant par ce point.

Le déterminant Δ étant différent de zéro, on peut considérer ses réciproques λ^a_i, qui sont liés aux éléments λ^i_a de Δ, par les formules bien connues de la théorie des déterminants [1] :

$$\lambda^i_a \lambda^a_j = \delta^i_j, \qquad \lambda^a_i \lambda^i_b = \delta^a_b,$$

où les δ sont égaux a zéro ou a l'unité, suivant que les indices sont différents ou non. Ces formules nous montrent que les quantités λ^a_1, λ^a_2, ..., λ^a_n, peuvent être considérées comme les composantes de n vecteurs covariants (λ^a), dans l'espace X_n, et l'on voit que ces n vecteurs covariants, sont déterminés, dès qu'on se donne le systeme de n congruences indépendantes (λ).

Soit maintenant un point $P(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ et un point

$$P'(x^1 + dx^1, \ldots, x^n + dx^n)$$

infiniment voisin de P. Le déplacement infinitésimal PP' est un vecteur contrevariant ayant l'origine dans P et les composantes dx^1, dx^2, ..., dx^n. Ses projections ds^a sur les congruences (λ), passant par P, sont données par les formules

$$ds^a = \lambda^a_i\, dx^i \qquad (dx^i = \lambda^i_a\, ds^a), \tag{1}$$

Il en résulte que le déplacement PP' est déterminé, soit par ses composantes dx^i, dans le systeme des variables (x), soit par ses composantes ds^a, dans le système des congruences (λ).

Les formes de Pfaff ds^1, ds^2, ..., ds^n, peuvent être interprétées, suivant M. E. Cartan, comme les coordonnées du point P', par rapport au repère cartésien déterminé en P, par les tangentes aux congruences (λ) passant par P. D'ailleurs les s^a ne peuvent être prises comme des nouvelles variables dans l'espace X_n, que si les équations à différentielles totales (1), sont complètement intégrables, et pour cela il faut que $\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \lambda^a_j}{\partial x^i}$. Si ces conditions ne sont pas remplies, ce qui est évidemment le cas général, les formules (1) ne définissent pas une vraie transformation de variables, car les différentielles ds^a seules ont un sens et non les s^a. On peut dire avec M. J. A. Schouten, que, dans le cas général, les formules (1) définissent, dans l'espace X_n, une transformation qui fait passer des variables x^1, x^2, ..., x^n aux variables non holonomes s^1, s^2, ..., s^n.

---

[1] On se sert de la convention que deux indices repétes indiquent la somme par rapport à ces indices De même a, b, c, d, e, f, g sont des indices relatifs aux congruences (λ), tandis que i, j, l, s, t, u, v sont des indices relatifs aux variables (x).

2. Espace de Riemann associé aux congruences (λ). — On peut donner une interprétation géométrique à ces variables non holonomes $s^1, s^2, \ldots, s^n$, si l'on associe à notre système de congruences, l'espace de Riemann V_n ayant la métrique

$$(1') \qquad ds^2 = (ds^1)^2 + (ds^2)^2 + \ldots + (ds^n)^2;$$

c'est-à-dire l'espace V_n dans lequel les (λ) sont des congruences orthogonales. Dans ce cas, comme il est bien connu d'après les travaux de Ricci et M. Levi-Civita ([5], 1901), les s^a sont les arcs sur les congruences (λ_a) mesurés évidemment dans l'espace V_n associé, et les formes de Pfaff ds^a sont les différentielles des arcs de ces congruences. Quant aux quantités λ'_a et λ^a_i, elles sont appelées paramètres et moments des congruences (λ).

Il est évident que l'espace de Riemann V_n, varie en général avec le système de congruences choisi dans X_n. En effet, considérons un autre système de congruences indépendantes $(\bar\lambda)$, ayant comme différentielles des arcs les quantités

$$(1'') \qquad d\bar{s}^a = \bar\lambda^a_i \, dx^i,$$

où les $\bar\lambda^a_i$ sont des fonctions des variables (x). Par le fait que les n vecteurs indépendants $(\bar\lambda)$, peuvent toujours s'exprimer linéairement à l'aide des n vecteurs indépendants (λ) et inversement, nous aurons des formules de la forme

$$(2) \qquad ds^a = c^a_b \, d\bar{s}^b,$$

où les quantités c^a_b sont des fonctions convenables des variables (x) à déterminant $|c^a_b|$ différent de zéro. Il en résulte que l'espace $\bar{V}_n$, associé aux $(\bar\lambda)$, coïncide avec V_n associé aux (λ), seulement dans le cas où le déterminant des c^a_b est orthogonal, ou bien si les c^a_b satisfont aux conditions d'orthogonalité

$$(2') \qquad c^a_b c^a_d = \delta^d_b \begin{cases} = 0 & (b \neq d), \\ = 1 & (b = d). \end{cases}$$

3. Transformations de congruences. — Les formules (2) peuvent être interprétées comme définissant une transformation de congruences et précisément la transformation qui fait passer des congruences (λ) aux congruences $(\bar\lambda)$; pendant cette transformation les moments et les paramètres des congruences (λ) et $(\bar{\lambda})$, sont liés par les formules

$$(2'') \qquad \bar{\lambda}_i^a = c_b^a \lambda_i^b, \qquad \bar{\lambda}_a^i = c_a^b \bar{\lambda}_b^i.$$

Les transformations de congruences (2) forment un groupe, dans le sens qu'elles contiennent la transformation identique, que chaque transformation a une inverse et que le produit de deux transformations est aussi une transformation (2), et cela à cause de la linéarité de ces transformations. Ce groupe dépend de n^2 fonctions arbitraires c_b^a des variables (x) et il contient, comme cas particulier, les transformations ponctuelles invertibles

$$(3) \qquad x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

qu'on considère dans le calcul différentiel absolu. Pour cette raison certains auteurs (R. Lagrange [10], p. 17; J. A. Schouten, [16], [21]; Horak [14], etc.), ont convenu de généraliser le calcul différentiel absolu, en associant aux transformations (3) les transformations (2). Toutefois, on peut remarquer, que cette propriété du groupe (2) de contenir comme sous-groupe le groupe ponctuel (3), peut n'être pas vraie pour un sous-groupe du groupe (2). En effet, le sous-groupe orthogonal (2') ne peut contenir aucun sous-groupe du groupe ponctuel, si l'espace V_n associé aux congruences (λ) n'est pas euclidien.

Comme dans la suite nous aurons à nous occuper de certains sous-groupes du groupe linéaire (2), il est convenable de faire une distinction nette, entre les transformations de variables (3) et les transformations de congruences (2). Quant à la définition des vecteurs ou des tenseurs, nous avons à tenir compte des résultats suivants :

Étant donné un tenseur que pour simplifier nous supposons du second ordre, une fois contrevariant et une fois covariant, ayant comme composantes dans le système des variables (x), les quantitées R_j^i, ses composantes par rapport aux congruences (λ) sont données par les formules

$$r_b^a = R_j^i \lambda_i^a \lambda_b^j.$$

Ces composantes, qu'on appelle aussi intrinsèques, sont des invariants par les transformations de variables (3); mais elles se transforment, pendant une transformation de congruences (2), d'après les formules

$$(3') \qquad \bar{r}_o^a c_a^b = r_d^b c^a.$$

Inversement, si nous avons un système de n^2 quantités r_b^a, invariantes par les transformations (3) et se changeant par (2), d'après les (3'), elles définissent un tenseur du second ordre, contrevariant en l'indice a et covariant en l'indice b, dont les composantes sur les variables (x) sont

$$R_j^i = r_b^a \lambda_a^i \lambda_j^b.$$

D'ailleurs, si l'on remarque que les R_j^i sont des invariants aux transformations (2) et se changent par (3), d'après les formules bien connues dans le calcul différentiel absolu des coordonnées, *on voit qu'il existe une dualité complète entre le calcul des coordonnées et celui des congruences;* c'est-à-dire qu'on peut définir les vecteurs, les tenseurs, et nous verrons un peu plus tard, aussi les connexions affines, par leur manière de se transformer, soit pendant une transformation de coordonnées, soit pendant une transformation de congruences, les variables (x) restant les mêmes.

Comme exemple de vecteur contrevariant et covariant dans les congruences (λ), nous avons le déplacement ds^a et le vecteur ayant comme composantes les dérivées intrinsèques d'une fonction quelconque

$$\frac{\partial f}{\partial s^a} = \lambda_a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Il est utile de remarquer que les dérivées secondes intrinsèques ne sont pas en général symétriques : nous avons la formule suivante ([7'], p. 290)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^a \partial s^b} - \frac{\partial^2 f}{\partial s^b \partial s^a} = w_{ab}^d \frac{\partial f}{\partial s^d} \tag{3''}$$

de commutation des dérivées secondes intrinsèques, où w_{ab}^d sont définie par les formules (4'), données dans le paragraphe suivant.

4. — **Formules et identités fondamentales** ([30], p. 180). — Revenons aux formules (1), pour calculer les covariants bilinéaires des formes ds^a. Si l'on considère un autre déplacement δx^i, différent de δx^i, nous avons

$$\delta\, ds^a - d\, \delta s^a = \left(\frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^i}\right) dx^i\, \delta x^j + \lambda_i^a(\delta\, dx^i - d\, \delta x^i);$$

et si dans cette formule on introduit, au lieu de dx^i et δx^i, leurs valeurs en fonction de ds^a et δs^a, on trouve les formules

$$(4)\quad \delta\, ds^a - d\,\delta s^a = w^a_{bc}\, ds^b\, \delta s^c + \lambda^a_i\, \Delta x_i \qquad (\Delta x^i = \delta\, dx^i - d\,\delta x^i),$$

où l'on a posé

$$(4')\qquad w^a_{bc} = \left(\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda^a_j}{\partial x^i}\right)\lambda^i_b \lambda^j_c.$$

Ces quantités w^a_{bc}, qui jouent un grand rôle dans le calcul des congruences, sont évidemment des invariants aux transformations de variables. Elles sont aussi gauches symétriques dans b et c et sont toutes nulles si les s^a peuvent être considérées comme de vraies variables. En particulier, si l'une des formes ds^a, par exemple ds^n, est, une différentielle totale exacte, les w^n_{bc} sont toutes nulles.

Si l'on prend maintenant les covariants bilinéaires des formes (2), nous avons

$$\delta\, d\bar{s}^a - d\,\delta\bar{s}^a = \left(\frac{\partial c^a_b}{\partial s^c} - \frac{\partial c^a_c}{\partial s^b}\right) ds^b\, \delta s^c + c^a_b(\delta\, ds^b - d\,\delta s^b),$$

et si l'on tient compte ici des (4) et de leurs analogues pour les formes (1′), on arrive aux formules *fondamentales pour le calcul des congruences*.

$$(5)\qquad \frac{\partial c^a_b}{\partial s^c} - \frac{\partial c^a_c}{\partial s^b} = \bar{w}^a_{ef} c^e_b c^f_c - w^e_{bc}\, c^a_e.$$

Comme on voit, ces formules expriment des liaisons entre les quantités w des congruences (λ), les quantités $\bar{w}$ des congruences $(\bar{\lambda})$, les coefficients c^a_b et les dérivées partielles du premier ordre de ces coefficients.

Si l'on dérive ces formules (5), par rapport à un arc s^d et puis, en permutant les indices b, c, d, on fait la somme, on trouve sans difficulté, en tenant compte de la formule (3″) de commutation des dérivées secondes c^a_b, que les quantités w^a_{bc} doivent satisfaire *aux identités fondamentales*

$$(5')\qquad \frac{\partial w^a_{bc}}{\partial s^d} + \frac{\partial w^a_{db}}{\partial s^c} + \frac{\partial w^a_{cd}}{\partial s^b} + w^a_{df} w^f_{bc} + w^a_{cf} w^f_{db} + w^a_{bf} w^f_{cd} = 0.$$

D'ailleurs, ces identités peuvent être aussi trouvées, en écrivant que les n équations aux dérivées partielles $X_a f = \lambda^i_a \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ satisfont aux identités de Jacobi. Comme on voit, elles expriment aussi que les équations fondamentales (5), considérées comme des équations aux dérivées partielles dans c^a_b, ont leurs conditions d'intégrabilité identiquement satisfaites.

5. **Les connexions affines.** — Supposons que dans l'espace X_n, nous ayons une connexion affine A_n, dont les coefficients dans le système des variables (x) sont Γ^r_{ij}. On sait que, par une transformation de variables (3), ces coefficients se transforment d'après la loi bien connue des connexions affines ([12], p. 3; [13], p. 35). Si l'on prend comme coefficients de la connexion A_n, dans le système de congruences (λ), les quantités

$$\gamma^{*a}_{bc} = \left(\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j} - \Gamma^r_{ij}\lambda^a_r\right)\lambda^i_b \lambda^j_c,$$

qui sont invariantes aux transformations de coordonnées, le transport parallèle d'un vecteur v^a ou v_a le long du déplacement ds^c, sera défini par les équations

$$(5'') \qquad dv^a = \gamma^{*a}_{bc}\, v^b\, ds^c, \qquad dv_a = -\gamma^{*b}_{ac}\, v_b\, ds^c.$$

Cela dit, on vérifie facilement que, par un changement de congruences, les γ^* doivent se transformer d'après les formules

$$(6) \qquad \frac{\partial c^a_b}{\partial s^c} = \gamma^{*a}_{ef} c^e_b c^f_c - \gamma^{*e}_{bc} c^a_e,$$

qui constituent la loi de transformation des connexions affines dans le calcul différentiel absolu des congruences.

Si l'on introduit les formules (6), dans les formules fondamentales (5), on trouve

$$\tau^a_{ef} c^e_b c^f_c = \tau^e_{bc} c^a_e \qquad (\tau^a_{bc} = \gamma^{*a}_{bc} - \gamma^{*a}_{cb} - w^a_{bc}),$$

les quantités τ^a_{bc} étant les composantes sur les congruences (λ) du tenseur de *torsion* de la connexion affine A_n.

6. **Parallélogramme et pentagone infinitésimaux.** — Considérons un point $P(x^i)$ et un point infiniment voisin $Q(x^i + dx^i)$. On peut dire que le point Q s'obtient en appliquant à P l'opérateur d. Soit $R(x^i + \delta x^i)$ un autre point obtenu en appliquant à P l'opérateur δ. Si l'on

applique maintenant au point Q l'opérateur δ, et au point R l'opérateur d, on trouve deux autres points $S[x^i + dx^i + \delta(x^i + dx^i)]$ et $T[x^i + \delta x^i + d(x^i + \delta x^i)]$.

Cela étant, le vecteur TS a comme composantes dans le système de coordonnées (x), les quantités $\Delta x^i = \delta\, dx^i - d\, \delta x^i$. Si d et δ sont les opérateurs définis par le transport parallèle de la connexion A_n, les composantes du vecteur TS sur les congruences (λ), ont, en vertu des formules (4), pour expressions

$$(6'') \qquad \Delta s^a = \lambda^a_i \Delta x^i = (\gamma^{*a}_{bc} - \gamma^{*a}_{cb} - w^{a}_{bc})\, ds^b\, \delta s^c.$$

Il en résulte que le point T coïncide avec S si le tenseur de torsion τ^a_{bc} est nul; dans ce cas la figure PQSR constitue, ce qu'on appelle le parallélogramme infinitesimal de l'espace à connexion affine sans torsion A_n.

Si le tenseur de torsion n'est pas nul, la figure PQSTR constitue le pentagone infinitésimal de A_n et l'on voit que le cinquième côté TS du pentagone est un infiniment petit du second ordre, par rapport aux deux côtés PQ, PR, sur lesquels le pentagone est construit.

Si l'on considère le transport parallèle d'un vecteur le long du parallélogramme ou du pentagone infinitésimal, les variations des composantes de ce vecteur seront exprimées à l'aide du tenseur de courbure de A_n ([7'], p. 197).

7. Le groupe de l'espace de Riemann. — Supposons que l'espace A_n soit un espace de Riemann V_n. Dans ce cas on peut choisir comme congruences (λ) un système de congruences orthogonales dans V_n ([7'], Chap. X), et si l'on veut que les $(\bar{\lambda})$ soient orthogonales dans V_n, il faut que les c^a_b satisfassent aux conditions d'orthogonalité (2'). Les transformations des congruences (2), (2') forment évidemment un groupe, le groupe orthogonal. Les propriétés invariantes par ce groupe sont en même temps les propriétés de l'espace V_n et inversement. Il est intéressant de remarquer que, par rapport au groupe orthogonal, la notion de covariance coïncide avec la notion de contrevariance. Quant à la connexion affine de V_n, ou du groupe orthogonal, elle est définie, par rapport aux (λ), par les coefficients de rotation de Ricci $\gamma^a_{bc}\,(= -\gamma^b_{ac})$, qui sont liés aux w^a_{bc} par les formules

$$(5''') \qquad w^a_{bc} = \gamma^a_{bc} - \gamma^a_{cb}, \qquad \gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}(w^a_{bc} + w^b_{ca} + w^c_{ba}).$$

En effet, si l'on dérive les formules d'orthogonalité (2'), par rapport à un arc s^c et puis l'on tient compte des formules fondamentales (5), on trouve que les coefficients de rotation γ^a_{bc} et $\bar{\gamma}^a_{bc}$, satisfont à la loi des connexions affines (6). Évidemment, si les $(\bar{\lambda})$ ne sont plus des congruences orthogonales dans V_n, la connexion de V_n ne sera plus représentée, par rapport aux $(\bar{\lambda})$, par les coefficients de rotation des $(\bar{\lambda})$.

Il est utile de remarquer que les équations des géodésiques de V_n, qui sont aussi les courbes auto-parallèles de V_n, s'écrivent

$$\frac{du^a}{ds} = \gamma^a_{bc} u^b u^c, \tag{6'''}$$

où s est l'arc de la courbe et les u^a sont les cosinus que la courbe fait avec les congruences (λ).

Naturellement, à ces équations on doit associer les dernières équations (1) divisées par ds; on obtient ainsi un système sous forme normale de $2n$ équations du premier ordre dans les n inconnues x^i et les n inconnues u^a (Carpanèse, [5']).

CHAPITRE II.

LES GROUPES ET LES ESPACES NON HOLONOMES.

8. Le groupe d'un système de Pfaff. — Supposons maintenant que nous ayons, dans l'espace X_n, un système de $n - m$ équations de Pfaff

$$ds^{h'} = \lambda^{h'}_i \, dx^i = 0 \qquad (h' = m+1, \ldots, n) \tag{7}$$ (1).

Si ce système est complètement intégrable, on peut, par un changement convenable des variables (x) et des formes $ds^{h'}$, le réduire à la forme

$$ds^{h'} = dx^{h'} = 0 \qquad [x^{h'} = c^{h'} \text{ (const.)}]. \tag{5^{IV}}$$

(1) Nous faisons, sauf avis contraire, la convention que les indices h, k, l, α, β, γ, δ, μ, varient de 1 à m, tandis que les mêmes indices accentués varient de $m+1$ à n.

de façon que ce système définit dans l'espace X_n une famille de ∞^{n-m} espaces X_m. Par chaque point $P^0(x_0^i)$ de l'espace X_n, il passe un seul espace X_m, et précisément celui pour lequel les constantes d'intégration $c^{m+1}, \ldots, c^n$, ont les valeurs $x_0^{m+1}, \ldots, x_0^n$. Si le système de Pfaff (7) n'est pas complètement intégrable, on ne peut plus le réduire à la forme (5^{IV}); il ne définit donc plus une famille d'espaces X_m. On dit dans ce cas, que le système (7) définit dans X_n *un espace non holonome* X_n^m.

En associant aux formes $ds^{h'}$, d'autres formes $ds^h (h \leq m)$, soumises à la seule condition de former avec les $ds^{h'}$ un système de n formes indépendantes, on voit facilement que les transformations de congruences, les plus générales, qui conservent le système (7), sont données par les formules

$$(7') \qquad \begin{cases} d\bar{s}^h = c_k^h \, ds^k + c_{k'}^h \, ds^{k'}, \\ d\bar{s}^{h'} = c_{k'}^{h'} \, ds^{k'}. \end{cases}$$

Elles s'obtiennent des formules générales (2), en supposant que les coefficients $c_k^{h'}$ soient nuls. Ces transformations (7') forment évidemment elles-mêmes un groupe; c'est le groupe de l'espace non holonome X_n^m. Ce groupe a la propriété de conserver le caractère de vecteur contrevariant R^i satisfaisant aux équations (7) ($\lambda_i^{h'} R^i = 0$). Un tel vecteur, appelé aussi vecteur contrevariant intérieur ou tangent de X_n^m, est caractérisé par ses composantes $r^h = \lambda_i^h R^i$ sur les congruences (λ^h), qu'on appelle aussi congruences *fondamentales* de X_n^m, car ses composantes sur les congruences $(\lambda^{h'})$ (congruences de *non honolomie* de X_n^m), sont nulles. Le groupe (7') conserve aussi le caractère de vecteur covariant extérieur ou normal ($r_h = 0$) et en particulier le système d'équations aux dérivées partielles associé au système de Pfaff (7)

$$X_h = \lambda_h^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0.$$

Par contre le groupe (7') ne conserve pas le caractère de vecteur covariant intérieur ($r_{h'} = 0$) et celui de vecteur contrevariant extérieur ($r^h = 0$), car pour ce dernier, par exemple, nous avons

$$\bar{r}^h = c_{k'}^h r^{k'}, \qquad \bar{r}^{h'} = c_{k'}^{h'} r^{k'}$$

et l'on voit qu'en général $\bar{r}^h$ ne sont plus nulles.

On obtient une importante propriété du groupe non holonome (7'), si dans les formules fondamentales (5), relatives à ce groupe ($c_{k}^{h'} = 0$), on pose $a = h'$, $b = k$, $c = l$, ce qui nous conduit aux formules

$$(7'') \qquad \varpi_{\alpha\beta}^{h'} c_{k}^{\alpha} c_{l}^{\beta} - w_{kl}^{\alpha'} c_{\alpha'}^{h'} = 0,$$

qui expriment que les quantités $w_{kl}^{h'}$ sont les composantes sur les congruences (λ) d'un tenseur du troisième ordre, une fois contrevariant extérieur et deux fois covariant intérieur.

On peut avoir une interprétation de ce tenseur, si l'on considère les covariants bilinéaires des équations (7), pour deux déplacements, satisfaisant à ces équations. On trouve

$$(7''') \qquad \Delta s^{h'} = \delta\, ds^{h'} - d\,\delta s^{h'} = w_{kl}^{h'}\, ds^{k}\, \delta s^{l} + \lambda_{l}^{h}\, \Delta x^{l} \qquad (\text{mod. } ds^{h'}).$$

Ces covariants sont nuls, en même temps que Δx^{l}, seulement si le tenseur $w_{kl}^{h'}$ est nul, mais dans ce cas l'on sait que le système (7) est complètement intégrable et pour cela l'on appelle le tenseur $w_{kl}^{h'}$, *tenseur d'intégrabilité* des équations de non holonomie (7).

On appelle *rang* du covariant $\Delta s^{h'}$ (h' fixe) dans le système (7) le nombre minimum d'équations indépendantes du système $w_{kl}^{h'} ds^{k} = 0$, ce rang étant toujours un nombre pair.

9. Le groupe d'un système de Pfaff et de ses systèmes dérivés. — On sait que la recherche des combinaisons intégrables d'un système d'équations de Pfaff peut se faire à l'aide des systèmes dérivés du système donné ([6], p. 294). On appelle premier système dérivé de (7), le système formé par toutes les combinaisons de ces équations, dont les covariants bilinéaires (7''') sont nuls, si $\Delta x^{l} = 0$. S'il existe $p - m$ de ces combinaisons indépendantes, on peut les prendre comme premières équations (7), et dans ce cas les composantes $w_{kl}^{m'}$ ($m' = m + 1, \ldots, p$) du tenseur d'intégrabilité, sont nulles. Quant aux autres composantes, on sait encore que les équations

$$w_{kl}^{h'} \lambda_{h'} = 0 \qquad (h' > p)$$

ne peuvent pas avoir, dans les inconnues $\lambda_{h'}$, des solutions différentes de zéro; car autrement le système dérivé contiendrait plus que $p - m$ équations. Si l'on veut avoir maintenant le groupe qui conserve le système (7) et son système dérivé $ds^{m'} = 0$, il faut que dans les dernières formules (7'), les coefficients $c_{k'}^{m'}$ ($k' > p$) soient nuls.

D'une manière analogue, on peut considérer le système dérivé du système $ds^{m'} = 0$, ou bien le second système dérivé du système (7). Si ce second système dérivé possède $q - m$ équations, choisi comme premières équations (7), on doit avoir

$$w^{\sigma'}_{kl} = w^{\sigma'}_{kl'} = w^{\sigma'}_{k'l'} = 0 \qquad (\sigma' = m+1, \ldots, q;\ l'.\ k' = p+1, \ldots, n).$$

On sait que, s'il arrive qu'un système dérivé, qu'on peut ainsi former, coïncide avec son propre système dérivé, il est formé alors par les combinaisons intégrables de notre système (7). Par conséquent, si (7) n'a pas de combinaisons intégrables, on doit arriver à un système dérivé identiquement nul. En tous cas, le groupe qui conserve le système (7) et ses systèmes dérivés est un sous-groupe bien déterminé du groupe (7').

En dehors de la notion du système dérivé, nous sera utile la notion de *classe* d'un système de Pfaff, ou bien le nombre minimum de variables qu'on peut laisser, par une transformation de variables, figurer dans le système. Ce nombre est égal au nombre d'équations indépendantes du système de Pfaff

$$(7^{\text{IV}}) \qquad ds^{h'} = 0, \qquad w^{h'}_{kl}\, ds^k = 0.$$

Si la classe est $n - p$, on peut supposer que les formes ds^k pour $k \leq p$ n'interviennent pas dans ce système, ou bien que $w^{h'}_{kl} = 0$ $(k \leq p)$.

10. La connexion affine de deux systèmes de Pfaff complémentaires. — Le groupe non holonome (7') peut être décomposé dans un produit de deux groupes. Le groupe

$$(8) \qquad \begin{cases} d\bar{s}^h = c^h_k\, ds^k, \\ d\bar{s}^{h'} = c^{h'}_{k'}\, ds^{k'}, \end{cases}$$

qui conserve entièrement le caractère de vecteur intérieur (tangent) et extérieur (normal) de l'espace non holonome V^m_n et le groupe

$$(8') \qquad \begin{cases} d\bar{s}^h = ds^h + c^h_{k'}\, ds^{k'}, \\ d\bar{s}^{h'} = ds^h. \end{cases}$$

On voit que le groupe (8) est caractérisé aussi par le fait qu'il conserve le système (7) et le système obtenu en égalant à zéro les ds^h. Par conséquent, si dans les formules fondamentales de ce groupe $(c^h_{k'} = c^{h'}_{h} = 0)$, on pose $a = h$, $h = k'$, $c = l'$, on obtient des formules *analogues* (les indices accentués étant changés en des indices non accentués et inversement) à (7''), de façon que les quantités $w^h_{k'l'}$ définissent elles-mêmes par rapport au groupe (8) un tenseur du troisième ordre; c'est le tenseur d'intégrabilité des congruences fondamentales de V^m_n.

Il s'agit de faire voir que le groupe (8) possède aussi une *connexion affine* (partielle). En effet, si dans les formules fondamentales (5) de ce groupe, on pose $a = h$, $b = k$, $c = l'$, on trouve

$$\frac{\partial c^h_k}{\partial s^{l'}} = \varpi^h_{\alpha\beta}\, c^\alpha_k\, c^{\beta'}_{l'} - w^\alpha_{l'l}\, c^h_\alpha, \tag{9}$$

et si l'on pose $a = h'$, $b = k'$, $c = l$, on trouve des formules *analogues*. Ces formules expriment, en accord avec les (6), que les quantités $w^h_{kl'}$ et $w^{h'}_{k'l}$ sont les composantes sur les congruences (λ) d'une connexion affine, qui permet de transporter un vecteur intérieur v^h ou v_h, le long d'un déplacement extérieur $ds^{l'}$, d'après les formules

$$dv^h = w^h_{kl'}\, v^k\, ds^{l'}, \qquad dv_h = -\, w^k_{hl'}\, v_k\, ds^{l'}, \tag{9'}$$

et un vecteur extérieur $v^{h'}$ ou $v_{h'}$, le long d'un déplacement intérieur ds^l, par des formules *analogues*.

Il est intéressant de voir la signification de cette connexion dans le cas particulier où les deux tenseurs d'intégrabilité $w^{h'}_{kl}$ et $w^h_{k'l'}$ sont nuls; c'est-à-dire si l'espace non holonome X^m_n est composé de $\infty^{n-m} X_m$ et de même si l'espace non holonome *complémentaire* X^{n-m}_n ($ds^h = 0$) est composé de ∞^m espaces X_{n-m}. Dans ce cas on peut s'arranger de façon que $w^h_{kl'}$, $w^{h'}_{k'l}$ soient toutes nulles et le transport parallèle (9') revient à transporter un vecteur situé dans un X_m (X_{n-m}), le long d'un chemin situé dans un X_{n-m} (X_m), en laissant le vecteur invariant.

La connexion affine $w^h_{kl'}$, $w^{h'}_{k'l}$ est une connexion sans torsion. En effet, le parallélogramme construit sur un déplacement intérieur ds^h et un déplacement extérieur $ds^{h'}$, se ferme, car nous avons, en accord avec les premières formules (9') et leurs analogues,

$$\delta\, ds^h = w^h_{kl'}\, ds^k\, \delta s^{l'}, \qquad d\,\delta s^{h'} = w^{h'}_{k'l}\, \delta s^{k'}\, ds^l$$

et puis $d\delta s^h = \delta ds^{h'} = 0$, car $\delta s^h = ds^{h'} = 0$. Or ces valeurs introduites dans les (6'') nous font voir que le vecteur TS est nul. D'ailleurs, notre connexion *est caractérisée* par la condition de fermer le parallélogramme construit sur ds^h et $\delta s^{h'}$.

A côté de la connexion affine (partielle) $w^h_{kl'}$, $w^{h'}_{k'l}$, qui existe quels que soient les systèmes de Pfaff $ds^h = 0$, $ds^{h'} = 0$, le groupe (8) peut posséder une connexion liée *à la non intégrabilité de ces systèmes*. En effet, supposons par exemple, que le système (7) ne soit pas complètement intégrable. Dans ce cas, les formules de commutation (3″) des dérivées secondes des $c^h_{k'}$, par rapport aux arcs s^k et s^l, dont les dérivées premières sont données par les formules *analogues* aux (9), nous conduisent, en tenant compte aussi des identités fondamentales, aux formules

$$(8'') \qquad w^{\alpha'}_{kl}\frac{\partial c^{h'}_{k'}}{\partial s^{\alpha'}} = \overline{w}^{h'}_{\alpha\beta,\alpha}\, c^\alpha_k c^\beta_l c^{\alpha'}_{k'} - w^{\alpha'}_{kl,k'} c^{h'}_{k'},$$

où l'on a posé

$$w^{h'}_{kl,k'} = \frac{\partial w^{h'}_{kl}}{\partial s^{k'}} + w^{h'}_{k\alpha} w^{\alpha}_{lk'} + w^{h}_{\alpha l} w^{\alpha}_{kk'} + w^{\alpha}_{kl} w^{h''}_{k'\alpha'}.$$

Le tenseur $w^{h'}_{kl}$ n'étant pas nul, les équations (8″) ne sont pas toutes nulles et elles permettent de tirer les valeurs d'une partie au moins des dérivées $\dfrac{\partial c^{h'}_{k'}}{\partial s^{\alpha'}}$.

Supposons, en premier lieu, que le premier système dérivé de (7) soit nul. Dans ce cas, parmi les équations (8″) on trouve au moins un système d'équations indépendantes dans les inconnues $\dfrac{\partial c^{h'}_{k'}}{\partial s^{\alpha'}}$. En résolvant un de ces systemes, on peut écrire la solution sous la forme

$$(9'') \qquad \frac{\partial c^{h'}_{k'}}{\partial s^{l'}} = \overline{\delta}^{h'}_{\alpha'\beta'} c^{\alpha'}_{k'} c^{\beta'}_{l'} - \delta^{\alpha'}_{k'l'} c^{h'}_{\alpha'}.$$

Pour se rendre compte de ce fait, introduisons ces valeurs, les δ et $\overline{\delta}$ étant pour le moment quelconques, dans les (8″). On obtient, si l'on tient compte des (7″), les formules tensorielles

$$(8''') \qquad (\overline{w}^{\beta'}_{\alpha\beta}\overline{\delta}^{h'}_{\alpha'\beta'} - \overline{w}^{h'}_{\alpha\beta,\alpha'})\, c^\alpha_k c^\beta_l c^{\alpha'}_{k'} = (w^{\beta'}_{kl}\delta^{\alpha'}_{k\beta'} - w^{\alpha'}_{kl,k})\, c^h_{\alpha'}.$$

Si l'on indique par r, s les valeurs de k, l qui correspondent au système indépendant dans les $\dfrac{\partial c^{h'}_{k'}}{\partial s^{\alpha'}}$ choisi, les δ et les $\overline{\delta}$, sont solutions des systèmes,

$$w^{\alpha'}_{rs}\,\delta^{h'}_{k'\alpha'} = w^{h'}_{kl,k'},$$
$$w^{\alpha'}_{rs}\,\overline{\delta}^{h'}_{k'\alpha'} = \overline{w}^{h'}_{\alpha\beta,k'}\,c^{\alpha}_{r}\,c^{\beta}_{s},$$

et par conséquent elles sont définies en même temps. Si l'on choisit un autre système indépendant, on aura une autre solution (9''), mais la différence des δ correspondantes sera un tenseur. Les équations (9''), comparées aux (6), expriment que les quantités $\delta^{h'}_{k'l'}$ sont les composantes sur les congruences (λ) d'une connexion affine, qui permet de transporter un vecteur extérieur le long d'un chemin extérieur. Évidemment, si le système $ds^h = 0$, a aussi son premier système dérivé nul, on peut lui appliquer les mêmes considérations et obtenir des formules analogues, de façon qu'en ce cas le groupe (8) possèdera une connexion affine complète. En indiquant par $\gamma^\star$ les composantes sur les congruences (λ) de cette connexion et en tenant compte du fait qu'elle doit conserver le caractère de vecteur intérieur et extérieur de X^m_n, nous avons les formules

$$(9''')\qquad \left\{\begin{array}{lll} \gamma^{\star h}_{kl} = \delta^{h}_{kl}, & \gamma^{\star h}_{kl'} = w^{h}_{kl'}, & \gamma^{h}_{k'a} = 0, \\ \gamma^{\star h'}_{k'l'} = \delta^{h}_{k'l'}, & \gamma^{\star h'}_{k'l} = w^{h'}_{k'l}, & \gamma^{\star h'}_{ka} = 0. \end{array}\right.$$

Cette connexion est avec torsion, car parmi les composantes du tenseur de torsion nous avons

$$\tau^{h'}_{kl} = -\,w^{h'}_{kl}, \qquad \tau^{h}_{k'l'} = -\,w^{h}_{k'l'},$$

de façon qu'on est sûr que le parallélogramme construit sur deux déplacements intérieurs (extérieurs) ne se ferme pas. De plus, on voit que les tenseurs d'intégrabilité font partie du tenseur de torsion de la connexion du groupe (8). En ce qui concerne le tenseur (8'''), il fait partie du tenseur de courbure de la connexion, c'est-à-dire du tenseur qui s'obtient en écrivant que les $\dfrac{\partial c^a_b}{\partial s^c}$ données par les (6) satisfont aux formules de commutation des dérivées secondes. Cela nous montre que la connexion affine (9''') contient tous les invariants du système de Pfaff (7) et du système $ds^h = 0$.

Supposons maintenant que le premier système dérivé de (7) soit composé des $p - m$ équations $ds^{m+1} = \ldots = ds^p \equiv 0$. En ce cas les équations (8'') nous permettent de tirer seulement les valeurs des dérivées $\dfrac{\partial c^{h'}_{k'}}{\partial s^{l'}}$ ($l' > p$). Quant à la solution, elle aura la forme (9'') seulement si $c_{l'}^{\alpha'} = 0$ ($\alpha' \leq p$, $l' > p$); c'est-à-dire si les transformations (8) conservent aussi le système dérivé de (7). On arrive sans difficulté au théorème suivant :

Le groupe de transformations de congruences, qui conserve les systèmes $ds^h = 0$ et $ds^{h'} = 0$ et leurs systèmes dérivés, induit dans l'espace X_n une connexion affine complète si ces systèmes n'ont pas des combinaisons intégrables.

Il est évident que ce théorème contient comme cas particulier, le cas considéré plus haut, quand les premiers systèmes dérivés sont nuls. De plus ce théorème peut être appliqué au cas d'un groupe qui conserve trois ou plusieurs systèmes de Pfaff complémentaires et leurs systèmes dérivés; car il suffit que la réunion de ces systèmes nous fournisse n équations indépendantes [**32**, p. 195].

On peut remarquer aussi qu'étant donné le seul système de Pfaff (7) on peut, dans certaines conditions, réduire son groupe (7') par des opérations invariantives sur les covariants du système, à un groupe qui conserve deux ou plusieurs systèmes complémentaires. On dit qu'en ce cas le système (7) est *géométrisable*, la géométrisation étant complète si les systèmes complémentaires n'ont pas des combinaisons intégrables. Par exemple, les systèmes de deux équations à un nombre pair de variables et en particulier les systèmes de deux équations à six variables sont en général complètement géométrisables [Vranceanu, 36].

11. Espaces non holonomes métriques. — Supposons maintenant que l'espace X_n, dans lequel est plongé le système de Pfaff (7), soit un espace de Riemann V_n. En ce cas on peut considérer les premiers membres $ds^{h'}$ des (7), comme les différentielles des arcs des $n-m$ congruences orthogonales dans V_n et pour cela il suffit de combiner les (7), après les avoir multipliées par des facteurs convenables. De plus, on peut associer à ces $n-m$ formes $ds^{h'}$, d'autres m formes ds^h, de façon que les n congruences correspondantes constituent dans V_n un système de congruences orthogonales, ou bien que la métrique de V_n soit donnée par la formule (1'). Si dans cette métrique (1') de l'espace V_n, on tient compte des équations (7), elle s'écrit

$$ds^2 = (ds^1)^2 + (ds^2)^2 + \ldots + (ds^m)^2. \tag{10}$$

Cette métrique (10), qui est la somme de m carrés, mais qui contient en général toutes les n variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$, constitue *la métrique de l'espace non holonome* V_n^m défini dans V_n par le système de Pfaff (7). L'espace V_n^m possède ainsi les deux invariants : la métrique (10), qui s'exerce à l'intérieur des congruences fondamentales (λ_h) et le système (7). Le groupe de transformations de congruences qui conserve ces deux invariants, ou bien le groupe de l'espace non holonome V_n^m, s'obtient du groupe (7') en lui associant les conditions d'orthogonalité

$$c_k^h c_l^h = \delta_k^l \begin{cases} = 0 & (k \neq l), \\ = 1 & (k = l). \end{cases} \tag{11}$$

Naturellement ce groupe non holonome [(7'), 11], conserve la métrique (10) abstraction faite des termes qui s'annulent avec les $ds^{h'}$.

Il est intéressant de savoir la signification de cet espace V_n^m dans le cas particulier où les équations (7) forment un système complètement intégrable, qu'on peut supposer écrit sous la forme (5''). Dans ce cas, la métrique (10) de V_n^m devient une forme quadratique dans les m différentielles $dx^1, dx^2, \ldots, dx^m$ ayant des coefficients qui dépendent des $x^1, x^2, \ldots. x^m$ et des $n-m$ constantes d'intégration $c^{h'}$. Il en résulte que notre espace V_n^m est composé des ∞^{n-m} espaces de Riemann V_m. Étudier les propriétés invariantes au groupe (7'), (11), revient à étudier les propriétés de ces V_m qui dépendent seulement de leur métrique, c'est-à-dire ce qu'on appelle propriétés intrinsèques de ces V_m. A cause de ce fait, nous continuerons à appeler, dans le cas général non intégrable, *propriétés intrinsèques de* V_n^m, les propriétés invariantes au groupe (7'), (11).

Nous avons vu plus haut que le groupe (7') possède un sous-groupe remarquable, le groupe (8). Les propriétés de V_n^m, invariantes au groupe (8), (11), sont appelées *propriétés semi-intrinsèques de* V_n^m. On verra plus tard que, dans le cas non intégrable, ces propriétés ont une grande importance, tant géométrique, que mécanique.

Le groupe semi-intrinsèque (8), (11) possède lui-même un sous-groupe remarquable, le groupe orthogonal; c'est-à-dire le groupe pour lequel $c_{k'}^{h'}$ satisfont eux-mêmes aux conditions d'orthogonalité

$$c_{k'}^{h'} c_{l'}^{h'} = \delta_{k'}^{l'}. \tag{12}$$

Ce groupe orthogonal conserve non seulement la métrique (10) de V_n^m, mais aussi la métrique (1') de V_n. Les propriétés invariantes à ce groupe sont les *propriétés rigides de* V_n^m, car si V_n^m se réduit à une famille des V_m, les propriétés du groupe orthogonal sont en même temps les propriétés rigides de ces V_m, plongées dans V_n.

On voit ainsi que les propriétés semi-intrinseques de V_n^m sont des propriétés intermédiaires entre les propriétés intrinsèques et les propriétés rigides. On voit tres clairement ce fait dans le cas intégrable; en effet, en ce cas la métrique de V_n s'écrit

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + 2a_{\alpha\varkappa}\, dx^\alpha\, dx^\varkappa + a_{\varkappa\beta'}\, dx^{\varkappa'}\, dx^{\beta'} \tag{13}$$

et les ds^h sont des combinaisons linéaires des $dx^\varkappa$. Il en résulte que par une transformation linéaire de ds^h, du groupe (8), (11), on ne peut pas modifier que les coefficients $a_{\varkappa\beta}$, de façon que le groupe semi-intrinsèque conserve les coefficients $a_{\alpha\beta}$ de la métrique de la famille des $V_m(dx^\varkappa = 0)$, comme le groupe intrinsèque, et aussi les $a_{\alpha\varkappa}$; c'est-a-dire les angles entre les directions appartenant à la famille des V_m et a la famille des V_{n-m} complémentaires $(dx^\alpha = 0)$. Si en particulier les deux familles sont orthogonales $(a_{\alpha\varkappa} = 0)$, elles restent orthogonales pendant les transformations du groupe semi-intrinseque (8), (11).

On peut dire encore que les propriétés intrinseques dépendent des coefficients $a_{\alpha\beta}$, les propriétés semi-intrinseques des $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\alpha'}$ et les propriétés rigides des $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\varkappa}$, $a_{\varkappa\beta}$.

CHAPITRE III.

LES PROPRIÉTÉS GÉOMETRIQUES DES V_n^m.

12. La seconde forme fondamentale. — Dans ce chapitre, nous allons étudier, en premier lieu, les propriétés géométriques semi-intrinsèques de l'espace non holonome V_n^m défini plus haut; c'est-à-dire les propriétés invariantes au groupe non holonome (8), (11). Pour cela, on remarque que les formules fondamentales (5), relatives à ce groupe, se décomposent en six catégories, suivant que les indices a, b, c ont des valeurs entre 1 et m, ou entre $m+1$ et n. Nous avons déjà considéré quatre de ces catégories dans les formules (7''), (9) et leurs analogues relatives au groupe (8), qui sont les mêmes pour le groupe (8), (11), avec la seule différence que les c_k^h satisfont maintenant aux conditions d'orthogonalité (11). Il nous reste à considérer seulement deux catégories, les formules

$$\frac{\partial c_k^h}{\partial s^l} - \frac{\partial c_l^h}{\partial s^k} = \overline{w}_{\alpha\beta}^h c_k^\alpha c_l^\beta - w_{kl}^\alpha c_\alpha^h \tag{14}$$

et leurs analogues. Si l'on associe aux (14) les formules qu'on obtient en dérivant, par rapport à un arc de congruence fondamentale, les formules d'orthogonalité (11), on trouve un système d'équations dans les dérivées $\frac{\partial c_k^h}{\partial s^l}$, qui peut être résolu sous la forme

$$\frac{\partial c_k^h}{\partial s^l} = \overline{\gamma}_{\alpha\beta}^h c_k^\alpha c_l^\beta - \gamma_{kl}^\alpha c_\alpha^h. \tag{15}$$

De même, si on dérive les (11) par rapport à un arc $s^{l'}$ et qu'on élimine les $\frac{\partial c_k^h}{\partial s^{l'}}$, à l'aide des (9), on arrive aux formules

$$(\overline{w}_{\beta\alpha'}^\gamma + \overline{w}_{\alpha\alpha'}^\beta) c_k^\alpha c_l^\beta c_{l'}^{\alpha'} = w_{ll'}^k + w_{kl'}^l, \tag{14'}$$

qui expriment que les quantités $v_{kl,l'} = w_{ll'}^k + w_{kl'}^l = \gamma_{kl}^{l'} + \gamma_{lk}^{l'}$ sont les composantes, sur les congruences (λ), d'un tenseur du troisième ordre deux fois intérieur et une fois extérieur covariant. Nous avons ainsi, dans V_n^m, trois tenseurs semi-intrinsèques du troisième ordre, les deux tenseurs d'intégrabilité $w_{kl}^{h'}$ et $w_{kl'}^h$ et le tenseur $v_{kl,l'}$.

On peut trouver une interprétation géométrique de ce dernier tenseur si l'on considère la variation de la métrique (10) de V_n^m, dans le passage d'un point P à un point R infiniment voisin, obtenu de P par un déplacement normal $\delta x^i = \lambda_{h'}^i \varepsilon^{h'}$, où les $\varepsilon^{h'}$ sont à considérer comme des constantes infinitésimales. En effet, en indiquant par $ds^h = \lambda_i^h\, dx^i$ les composantes d'un déplacement tangent passant par P, le déplacement correspondant, passant par R, aura comme composantes sur les congruences fondamentales

$$d\sigma^h = \lambda_i^h(x + \delta x)\, d(x^i + \delta x^i] = ds^h + w_{k\alpha'}^h\, ds^k\, \varepsilon^{\alpha'}.$$

Il en résulte que la longueur ds du déplacement passant par P est liée à la longueur $d\sigma$ du déplacement passant par R par la formule

$$d\sigma^2 = ds^2 + v_{kl,\alpha'}\, ds^k\, ds^l\, \varepsilon^{\alpha'}, \tag{16}$$

On peut dire que la dernière partie du second membre de cette formule représente la variation de la métrique (10), ou de la première forme fondamentale de V_n^m; c'est-à-dire elle constitue la seconde forme fondamentale de V_n^m. Cette seconde forme se décompose en $n-m$ formes quadratiques

$$\varphi_{\alpha'} = \nu_{kl,\alpha'}\, ds^k\, ds^l$$

correspondantes aux $n-m$ congruences de non holonomie. Si V_n^m est composé de ∞^{n-m} espaces V_m,

$$w_{kl}^{\alpha'} = \gamma_{kl}^{\alpha'} - \gamma_{lk}^{\alpha'} = 0, \qquad V_{kl,\alpha'} = \gamma_{kl}^{\alpha'}$$

et les $\gamma_{kl}^{\alpha'}$ sont en ce cas les composantes de la courbure eulérienne des V_m.

13. La classe de la métrique de V_n^m. — Nous avons remarque plus haut que la métrique (10) de V_n^m peut dépendre de toutes les n variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$, mais, evidemment, ce nombre peut être diminué jusqu'à m. Le nombre minimum des variables qu'on peut laisser figurer dans cette métrique est donné par le nombre d'équations indépendantes du systeme ([30], p. 194)

$$ds^h = 0, \qquad w_{kl}^h\, ds^{k'} = 0, \qquad \nu_{hk\,l'}\, ds^{l'} = 0. \tag{15'}$$

On voit que ce nombre est égal à la classe du systeme $ds^h = 0$, si le tenseur de la seconde forme $\nu_{hk,l}$ est nul.

14. Parallélisme intérieur. — Retournons maintenant aux formules (15). Elles expriment, en accord avec les (6), que les coefficients de rotation de Ricci γ_{kl}^h déterminent, à l'intérieur des congruences fondamentales, une connexion, qui permet de transporter un vecteur intérieur v^h le long d'un chemin intérieur ds^l, par les équations ([9], p. 853)

$$dv^h - \gamma_{kl}^h v^k\, ds^l = 0. \tag{17}$$

En divisant ces équations par la longueur ds du déplacement ds^l et en considérant les $\frac{ds^l}{ds}$ comme les cosinus u^l d'une certaine courbe intérieure (c) $[x^i = \varphi^i(s)]$, on obtient les équations du transport parallele le long de (c). Ce parallélisme peut être défini géométriquement de la même maniere que M. Levi-Civita a défini son parallélisme dans les espaces de Riemann; c'est-à-dire par la condition que l'angle des vecteurs v^h, $v^h + dv^h$, considérés tous les deux comme des vecteurs dans un espace euclidien, dans lequel le V_n^m peut être plongé, soit minimum compatible avec les liaisons ([20], p. 18).

Ce transport parallele, conserve les longueurs et les angles. En effet la variation de la longueur du vecteur est fournie par la formule

$$l\,dl = v^h\,dv^h = \gamma_{kl}^h v^h v^k\,ds^l,$$

et cette variation est nulle a cause de la gauche symetrie des coefficients de rotation. Si l'on considere maintenant l'angle θ des deux vecteurs v^h et u^h, qu'on peut supposer unitaires, nous avons

$$\sin\theta\,d\theta = v^h\,du^h + u^h\,dv^h = 0 \qquad (\text{ou bien } d\theta = 0).$$

Ce transport est différent du transport parallele de Levi-Civita dans le V_n environnant, qui est donné par les formules (5″) où l'on pose γ_{bc}^a au lieu de γ_{bc}^{*a}; car pour que ce transport, appliqué à un vecteur et un chemin intérieurs, nous fournissent un vecteur intérieur, il faut que γ_{kl}^h soient nulles. Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante, pour que le transport intérieur (17) de V_n^m soit en même temps un transport parallele dans V_n, est que les tenseurs $w_{kl}^{h'}$, $v_{kl,l'}$ soient tous les deux nuls.

Si le vecteur v^h ne se transporte pas par parallélisme le long de la courbe intérieure (c) $[x^i = \varphi^i(s)]$, les quantités

$$(16') \qquad \frac{\mathrm{D}v^h}{ds} = \frac{dv^h}{ds} - \gamma_{kl}^h v^k u^l,$$

où u^l sont les cosinus de (c) et où γ_{kl}^h sont calculés le long de (c), représentent les composantes du vecteur *dérivé* du vecteur v^h le long de (c).

15. Pentagone infinitésimal de V_n^m. — On sait que le transport parallèle de V_n jouit de la propriété de fermer le parallélogramme construit sur deux déplacements infinitésimaux PQ et PR. De plus, on sait que (H. Weyl, [6'], p. 88), le transport de Levi-Civita de V_n peut être défini d'une maniere intrinseque (c'est-à-dire sans faire appel à un espace euclidien environnant), comme le transport qui conserve les longueurs et ferme le parallélogramme. Nous allons voir que notre transport intérieur de V_n^m ne ferme pas le parallélogramme. En effet, si dans les formules (6″) on tient compte que $\gamma_{kl}^{*h} = \gamma_{kl}^h$ et que $\gamma_{kl}^{*h'} = 0$, car notre transport doit conserver le caractère de vecteur intérieur, on trouve que le vecteur de fermeture TS est un vecteur extérieur ayant comme composantes

$$(17') \qquad \Delta s^{h'} = - w_{kl}^{h'} \, ds^k \, ds^l.$$

On voit que ces composantes ne sont nulles, quels que soient les déplacements d et δ, que si le V_n^m se compose des V_m ($w_{kl}^{h'} = 0$). Par conséquent notre V_n^m possède comme figure infinitésimale un pentagone construit sur deux déplacements intérieurs ds^h et δs^h, dont le cinquième côté est le vecteur extérieur (17′).

On peut donner aussi à notre transport (17) une définition géométrique intrinsèque; c'est le transport qui conserve la longueur et le caractère de vecteur intérieur et qui annule les composantes intérieures du vecteur TS. En effet, la première condition dit que les γ_{kl}^{*h} doivent être gauches symétriques dans h et k et la dernière condition, qu'ils doivent satisfaire aux conditions

$$\gamma_{kl}^{*h} - \gamma_{lk}^{*h} = w_{kl}^h,$$

et par conséquent que les γ_{kl}^{*h} sont égaux aux coefficients de rotation γ_{kl}^h.

16. Les géodésiques (courbes auto-parallèles). — Les courbes auto-parallèles de la connexion intérieure de V_n^m s'obtiennent évidemment si dans les formules (17) on suppose que le vecteur v^h, qui peut être pris comme unitaire, soit tangent à la courbe de transport et par conséquent que ses composantes soient égales aux cosinus $u^h = \frac{ds^h}{ds}$. Si l'on tient compte aussi des formules (1) pour une courbe intérieure ($ds^{h'} = 0$), on trouve les équations des courbes auto-parallèles sous la forme

$$(18) \qquad \frac{dx^i}{ds} = \lambda_h^i u^h, \qquad \frac{du^h}{ds} = \gamma_{kl}^h u^k u^l.$$

Elles constituent un système différentiel du premier ordre, sous la forme normale, de $n + m$ équations dans les $n + m$ inconnues x et u. On voit que ces courbes ont la propriété que par chaque point P de V_n et tangent à chaque direction intérieure de V_n^m, il passe une de ces courbes et une seule. Comme par chaque point P, il passe ∞^{m-1} de ces courbes, il en résulte qu'en partant d'un point P, on ne peut pas atteindre tous les points de V_n à l'aide de courbes auto-parallèles de V_n^m, sortant de P, car pour cela il fallait ∞^{n-1} courbes sortant de P. Ces courbes satisfont aussi à un problème de minimum. Elles sont les courbes telles que la distance entre deux points, suffisamment rapprochés d'une de ces courbes (G) est la plus courte par rapport à toutes les courbes voisines (g) passant par les deux points et obtenues de (G) par des déplacements *intérieurs* ([20], p. 22). Il arrive, en général, que ces courbes voisines ne sont plus des courbes intérieures de V_n^m et, par conséquent, que ce problème de minimum ne coïncide pas avec le problème de minimum habituel qui serait celui de trouver les courbes intérieures dont la longueur est minimum par rapport à toutes les courbes voisines *intérieures*. Ce dernier problème sera traité plus tard (§ 20).

Pour qu'une des congruences fondamentales, par exemple (λ_m), soit une congruence géodésique, il faut que $u^h = 0$ $(h < m)$, $u^m = 1$, soit une solution des (18); c'est-à-dire il faut que les quantités γ_{hm}^m, qu'on appelle aussi composantes de la *courbure géodésique* de la congruence (λ_m), soient nulles. De même pour que les géodésiques auto-parallèles de V_n^m soient en même temps des géodésiques du V_n environnant, il faut que les dernières équations (6‴) soient satisfaites si l'on pose $u^{h'} = 0$. Cela revient à dire que le tenseur $\nu_{hk,h'}$ est nul. En ce cas, on dit que l'espace non holonome V_n^m est *totalement géodésique* dans l'espace de Riemann V_n.

Si le tenseur $\nu_{hk,l'}$ n'est pas nul, c'est-à-dire si les $n - m$ secondes, formes $\varphi_{\alpha'}$ ne sont pas toutes nulles, les solutions des équations $\varphi_{\alpha'} = 0$, si elles existent, définissent *les courbes asymptotiques* de l'espace V_n^m. Dans le cas où $m = n - 1$ et en particulier dans le cas $m = 2$, $n = 3$, on peut étendre à ces courbes asymptotiques, beaucoup des propriétés et formules que nous avons dans le cas holonome (Hlavaty [24[1]]).

17. Parallélisme extérieur et parallélogramme infinitésimal. — On appelle parallélisme extérieur de V_n^m, le parallélisme fourni par les formules (9′) et leurs analogues, qui permet de transporter un vecteur intérieur (extérieur), le long d'un chemin extérieur (intérieur). Nous avons vu que ce parallélisme est complètement défini par la propriété de fermer le parallélogramme construit sur un déplacement intérieur ds^h et un déplacement extérieur $ds^{l'}$. Il est intéressant de remarquer que ce parallélisme ne conserve pas la longueur du vecteur intérieur v^h, car la variation de cette longueur est donnée par la formule

$$l\,\delta l = \frac{1}{2} v_{hk,l'}\, v^h v^k\, \delta s^{l'},$$

et l'on voit que cette variation ne peut être constamment nulle que dans le cas où V_n^m est totalement géodésique dans V_n.

En résumé, nous avons dans l'espace non holonome V_n^m une connexion affine semi-intrinsèque, ayant comme composantes sur les congruences (λ) les quantités γ_{kl}^h, $w_{kl'}^h$, $w_{k'l}^{h'}$. Cette connexion n'est pas complète car elle ne nous donne pas la possibilité de transporter un vecteur extérieur sur un chemin extérieur. Mais si le système (7) de V_n^m a son premier système dérivé nul, on peut associer à notre connexion la connexion $\delta_{k'l'}^{h'}$ [formules (9″)], et l'on obtient alors *une connexion semi-intrinsèque complète*, ayant comme composantes sur les congruences (λ)

$$(18') \qquad \begin{cases} \overset{*}{\gamma}{}_{kl}^{h} = \gamma_{kl}^h, & \overset{*}{\gamma}{}_{kl'}^{h} = w_{kl'}^h, & \overset{*}{\gamma}{}_{k'a}^{h} = 0, \\ \overset{*}{\gamma}{}_{k'l'}^{h'} = \delta_{k'l'}^{h'}, & \overset{*}{\gamma}{}_{k'l}^{h'} = w_{k'l}^{h'}, & \overset{*}{\gamma}{}_{ka}^{h'} = 0. \end{cases}$$

Si le premier système dérivé n'est pas nul, mais le système (7) n'a pas des combinaisons intégrables, on peut affirmer que le sous-groupe du groupe semi-intrinsèque (8), (11), qui conserve les systèmes dérivés de (7), possède une connexion affine complète.

L'existence de la connexion affine semi-intrinsèque, entraîne naturellement la possibilité de dérivation tensorielle des tenseurs. Il est à remarquer seulement que, tant qu'on se limite à la connexion γ_{kl}^h, $w_{kl'}^h$, $w_{k'l}^{h'}$ qu'on peut appeler *régulière* [car elle existe quel que soit le système (7)], nous n'avons pas la possiblllité d'obtenir d'un tenseur extérieur ou mixte, un autre tenseur. en dérivant par rapport à un arc de congruence de non holonomie ([20], p. 35).

18. Tenseurs de courbure ([18], p. 65; [20], p. 38). — Nous allons trouver maintenant deux tenseurs semi-intrinsèques du quatrième ordre, un tenseur intérieur et un tenseur une fois extérieur covariant. Ces deux tenseurs peuvent être obtenus en calculant les variations des composantes d'un vecteur intérieur dans le transport parallèle le long du pentagone et du parallélogramme infinitésimaux de V_n^m. En effet, si l'on transporte, en premier lieu, le vecteur v^h le long du pentagone PQRSTRP, les variations des composantes v^h, en tenant compte seulement des termes du second ordre, s'obtiennent en faisant la différence des composantes du vecteur v^h, transporté une fois le long du PQS et une fois le long du PRTS, et nous avons

$$\mathrm{D}v^h = \delta\, dv^h - d\,\delta v^h - \Delta v^h,$$

en indiquant par Δ le transport le long de TS. En effectuant les calculs, on arrive aux formules

$$(19) \qquad \mathrm{D}v^h = \lambda^h_{kl}\; v^k\, ds^l\, \delta s^r,$$

où l'on a posé

$$(19') \qquad \lambda^h_{klr} = \frac{\partial \gamma^h_{kl}}{\partial s^r} - \frac{\partial \gamma^h_{kr}}{\partial s^h} + \gamma^h_{k\alpha} w^\alpha_{lr} - \gamma^h_{\alpha r}\, \gamma^\alpha_{kl} + \gamma^h_{\alpha l} \gamma^\alpha_{kr} + w^h_{k\alpha'} w^{\alpha'}_{lr}.$$

Cette formule peut aussi s'écrire

$$(19') \qquad \lambda^h_{klr} = \gamma^h_{klr} + \omega^h_{k\alpha}\, \omega^{\alpha'}_{lr}$$

ou γ^h_{klr} sont les coefficients à quatre indices de Ricci relatifs aux m congruences fondamentales.

Les quantités λ^h_{llr} sont évidemment les composantes d'un tenseur intérieur du quatrieme ordre; c'est le tenseur de courbure intérieure de V^m_n. Si V^m_n se compose des V_m, les λ^h_{klr} sont égaux aux coefficients a quatre indices de Ricci, relatifs aux congruences fondamentales, et par conséquent notre tenseur coïncide avec le tenseur de courbure de Riemann des V_m.

Les quantités λ^n_{klr} sont gauches symétriques dans les indices l et r. En ce qui concerne les indices h et k elles satisfont aux formules

$$\lambda^h_{klr} + \lambda^k_{nlr} = v_{hk\,\alpha'} w^{\alpha'}_{lr}.$$

Comme la variation $\mathrm{D}l$ de la longueur l du vecteur v^h le long du pentagone est fournie par la formule $l\,\mathrm{D}l = v^h\,\mathrm{D}v^h$, il en résulte que la longueur du vecteur v^h est conservée le long du pentagone si le tenseur de courbure λ^h_{klr} est aussi gauche symétrique dans les deux premiers indices h et k, ce qui arrive en particulier si V^m_n se compose des V_m, ou si V^m_n est totalement géodésique dans V_n.

Si l'on indique avec θ l'angle d'un vecteur unitaire u^h et du vecteur v^h, de longueur l et avec $\theta + \mathrm{D}\theta$ l'angle des vecteurs u^h

et $v^h + \mathrm{D}v^h$, la variation $\mathrm{D}\theta$, tant qu'on tient compte seulement des termes du premier ordre, est donnée par la formule

$$(20) \qquad -\sin\theta\,\mathrm{D}\theta = \lambda^h_{kl'}\,u^h v^k\,ds^l\,\delta s' - \cos\theta\,\frac{\mathrm{D}l}{l}.$$

Cette formule est analogue à celle de Pérès ([7¹], p. 219) pour les V_n, mais on voit que pour les V^m_n elle n'est pas plus, en général, symétrique dans les vecteurs (u) et (v) ([33]. § 6).

Si l'on transporte maintenant le vecteur v^h le long du parallélogramme infinitésimal de V^m_n, on trouve

$$(21) \qquad \mathrm{D}'v^h = \lambda^h_{kl'}\,v^k\,ds^l\,\delta s'',$$

où les quantités

$$(20') \qquad \lambda^h_{kl'} = \frac{\partial\gamma^h_{kl}}{\partial s'} - \frac{\partial w^h_{kl'}}{\partial s^l} + \gamma^a_{k\alpha}\,w^\alpha_{ll'} + \gamma^h_{\alpha l'}\,w^\alpha_{kl'} - w^h_{\alpha l'}\,\gamma^\alpha_{kl} + w^h_{k\alpha'}\,w^{\alpha'}_{ll'}$$

sont les composantes du tenseur de courbure extérieure de V^m_n, qui est, comme on voit, un tenseur du quatrieme ordre, une fois extérieur covariant. On peut considérer les tenseurs λ^h_{kll} et $\lambda^h_{kl'}$ comme un seul tenseur λ^h_{kla}, l'indice a variant de 1 à n. Ce tenseur s'obtient si l'on cherche les variations du vecteur v^h le long du circuit infinitésimal construit sur un deplacement intérieur ds^h et un déplacement quelconque $\partial s''$.

19. Groupes non holonomes géométrisables. — Les résultats de ce chapitre montrent que l'espace V^m_n possède des propriétés géométriques semi-intrinsèques remarquables. Si l'espace V^m_n se compose de ∞^{n-m} $V_m(w^{h'}_{kl} = 0)$, une partie de ces propriétés et précisément, le parallélisme intérieur, les géodésiques auto-parallèles. le tenseur de courbure intérieure sont aussi des propriétés intrinsèques des V^m_n, ou bien des $\infty^{n-m} V_m$, qui le compose. Nous allons maintenant montrer d'une part, que si V^m_n est un espace non holonome proprement dit $(w^h_{kl} \neq 0)$ aucune de ces propriétés géométriques, n'est une proprieté intrinsèque de V^m_n, et d'autre part qu'il existe. en général, d'autres sous-groupes du groupe intrinsèque. plus grands que le groupe semi-intrinsèque, qui conservent quelques-unes de ces propriétés (Cartan [17]; Vranceanu [30]). Pour cela, on part de la remarque que si V^m_n se compose des V_m, les propriétés intrinsèques de ces V_m sont aussi des propriétés intrinsèques de V^m_n. Or, comme propriétés intrinsèques des V_m nous avons, en dehors de la métrique (10), le parallélisme de Levi-Civita de ces V_m, défini par la connexion intérieure γ^h_{kl} de V^m_n, et la courbure de Riemann de ces V_m, qui coïncide, comme nous avons déjà remarqué, avec le tenseur de courbure intérieure de V^m_n [23].

Par conséquent il est naturel de se demander si, dans le cas non intégrable, la connexion intérieure et la courbure intérieure sont encore des invariants du groupe intrinseque; mais, puisque ce groupe est le produit du groupe semi-intrinsèque et du groupe (8'), il suffit de voir s'ils sont des invariants de ce dernier groupe. Des équations fondamentales (5), relatives au groupe (8'), on tire

$$(20') \qquad \bar{w}^h_{kl} = w^h_{kl} + w^\alpha_{kl} c^h_\alpha$$

Comme les γ^h_{kl} sont définis en fonction des w^h_{kl} par les formules (5'''), il en résulte que la connexion intérieure ne sera un invariant intrinsèque, que si V^m_n se compose des $V_m(w^\alpha_{kl} = 0)$. On voit aussi que γ^h_{kl} sont des invariants seulement pour les transformations (8'), dont les coefficients c^h_α satisfont aux équations

$$(21') \qquad w^\alpha_{kl} c^h_\alpha = 0.$$

Or, *si le premier système dérivé du système* (7) *est nul*, ces équations ne peuvent avoir que la solution $c^h_{\alpha'} = 0$, de façon que, dans ce cas, *le plus grand sous-groupe du groupe intrinsèque, qui conserve la connexion intérieure, est le groupe semi-intrinsèque.*

Si le système dérivé de (7) se compose des $p - m$ équations $ds^{m+1} = \ldots = ds^p = 0$, la solution générale des (21') est

$$c^h_{k'} = 0 \quad (k' > p) \qquad \text{et} \qquad c^h_{m'} \quad (m' \leqq p)$$

quelconques, de façon que le plus grand sous-groupe de (8'), qui conserve la connexion intérieure, est donné par les formules

$$(21'') \qquad \begin{cases} d\bar{s}^h = ds^h + c^h_{m'}\, ds^{m'} & (m' = m+1, \ldots, p), \\ d\bar{s}^{h'} = ds^{h'} \end{cases}$$

Évidemment, le plus grand groupe, qui conserve la connexion intérieure, est le produit de ce groupe (21''), par le groupe semi-intrinsèque et si l'on veut, comme il est préférable, conserver à $ds^{m'}$ leur caractère de formes du système dérivé, on obtient le groupe

$$(22)\qquad \begin{cases} d\bar{s}^h = c_k^h\, ds^k + c_{m'}^h\, ds^{m'}, \\ d\bar{s}^{m'} = c_{n'}^{m'}\, ds^{n'} \qquad (m',\, n' = m+1, \ldots, p), \\ d\bar{s}^k = c_{\alpha'}^{k'}\, ds^{\alpha'} \qquad (k' = p+1, \ldots, n). \end{cases}$$

On peut dire que ce groupe *est le plus grand sous-groupe géométrisable du groupe intrinsèque.*

D'une manière analogue, on trouve que les transformations (8'), qui conservent la courbure intérieure, sont analogues aux (21''), avec la différence que $ds^{m'}$ doivent appartenir *au second système dérivé de* (7). Il en résulte que le groupe (22) conserve aussi la courbure intérieure de V_n^m seulement si le premier système dérivé est complètement intégrable. Dans le cas général, le plus grand groupe qui conserve en même temps la connexion et la courbure intérieure, est un sous-groupe du groupe (22), qu'on peut écrire facilement.

On peut aussi se poser le problème de trouver le groupe qui conserve les géodésiques auto-paralleles de V_n^m. Ce problème a un grand intérêt mécanique, car, comme il sera démontré plus tard, ces courbes sont aussi les trajectoires sans forces d'un système mécanique non holonome. Nous connaissons depuis longtemps ([3], 1895), le résultat important, dû à M. J. Hadamard, que les équations de mouvement d'un système non holonome ne restent pas les mêmes si l'on modifie la force vive du système d'une manière quelconque à l'aide des équations de non holonomie (cas intrinsèque), mais elles restent les mêmes si l'on modifie la force vive par une forme quadratique dans ces équations (cas semi-intrinsèque [33], Introduction).

Pour trouver le groupe des géodésiques auto-parallèles on remarque que leurs coefficients $\gamma_{kl}^h + \gamma_{lk}^h = \varpi_{lh}^k + \varpi_{kh}^l$ sont invariants seulement aux transformations (8') dont les $c_{\alpha'}^h$ satisfont aux équations

$$(22')\qquad \varpi_{lh}^{\alpha'} c_{\alpha'}^k + \varpi_{kh}^{\alpha'} c_{\alpha'}^l = 0.$$

Ces transformations forment un groupe. En effet, si nous avons deux solutions des (22'), le produit des transformations (8') correspondantes a comme coefficients la somme de solutions, qui est aussi une solution des équations (22'), à cause du fait que ces équations sont linéaires et homogènes.

Le groupe qui conserve les géodésiques auto-parallèles est en général plus grand que le groupe (22) qui conserve la connexion intérieure, comme on peut le voir sur l'exemple suivant d'un espace V_6^3, défini par les formes et les équations

$$\begin{gathered} ds^h = dx^h \qquad (h = 1, 2, 3), \\ ds^4 = dx^4 - x^2\,dx^3 = 0, \\ ds^5 = dx^5 - x^3\,dx^1 = 0, \\ ds^6 = dx^6 - x^1\,dx^2 = 0. \end{gathered}$$

En effet, en ce cas, les composantes du tenseur d'intégrabilité $w^{\alpha'}_{kl}$ sont toutes nulles, sauf les w^4_{23}, w^5_{31}, w^6_{12}, qui sont égales à l'unité. Il en résulte que le groupe (21″) se réduit à l'identité, car le premier système dérivé des équations de non holonomie est nul, tandis que le sous-groupe de (8′) qui conserve les géodésiques auto-parallèles est donné par les formules

$$(22'')\qquad \begin{cases} d\bar{s}^h = ds^h + \rho\, ds^{h+3} & (h = 1, 2, 3), \\ d\bar{s}^{h'} = ds^{h'} & (h' = 4, 5, 6), \end{cases}$$

où ρ est une fonction quelconque des variables $x^1, x^2, \ldots, x^6$.

Ces considérations nous montrent que le groupe qu'on peut attacher d'une manière naturelle à un système mécanique non holonome, comme le groupe qui conserve les équations de mouvement sans forces du système, peut être géométrisé s'il coïncide avec le groupe qui conserve la connexion intérieure.

20. Les géodésiques de longueur minima. — Si le groupe intrinsèque de V_n^m ne possède, dans le cas non intégrable, aucun invariant géométrique, en dehors de la métrique de V_n^m et du tenseur $w^{h'}_{kl}$, il possède toutefois un invariant analytique important, *les géodésiques de longueur minima;* c'est-à-dire les courbes intérieures de V_n^m, dont la longueur

$$(23)\qquad l = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + \ldots + (u^m)^2}\, ds,$$

entre deux de leurs points A et B suffisamment rapprochés, est la plus petite par rapport à toutes les courbes voisines *intérieures* passant par les points A et B (Voss [1]. p. 280; Franklin et Moore, [29]. p. 189).

Évidemment, les courbes de longueur minima de V_n^m sont en même temps des courbes extrémales de l'intégrale (23); c'est-à-dire des courbes intérieures telles que la variation δl de l'intégrale (23), dans le passage d'une de ces courbes à une courbe intérieure infiniment voisine, est nulle. Ce fait nous permet de trouver leurs équations par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, qui consiste à chercher les courbes extrémales de l'intégrale qu'on obtient de (23) en ajoutant à ds le terme $v_{\alpha'} ds^{\alpha'}$, les $v_{\alpha'}$ étant des multiplicateurs qu'on doit considérer comme fonctions de l'arc s. En faisant les calculs, on arrive à donner aux équations géodésiques, de longueur minima, la forme [30, p. 191]

$$(24) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx^i}{ds} = \lambda^i_{\ h} u^h, \\ \dfrac{du^h}{ds} - \gamma^h_{kl} u^k u^l = w^{h'}_{kh} u^k v_{h'}, \\ \dfrac{dv_{h'}}{ds} + w^{\alpha'}_{h'k} v_{\alpha'} u^k = \dfrac{1}{2} v_{kl,h'} u^k u^l \end{cases}$$

d'un système différentiel normal du premier ordre de $2n$ équations dans les $2n$ inconnues x^i, u^h, $v_{h'}$.

Il est facile de voir que ce système est un invariant du groupe semi-intrinsèque, si l'on considère les multiplicateurs $v_{\alpha'}$ comme les composantes sur les congruences (λ) d'un vecteur extérieur *covariant*. En ce cas en effet les premiers membres des dernières équations sont les composantes du vecteur dérivé de v_h le long de la courbe de la plus courte distance, cette dérivation étant faite à l'aide de la connexion $\omega^{h'}_{k\,l}$. Par conséquent pour conclure que le système (24) est un invariant du groupe intrinsèque de V^m_n, il suffit de faire voir qu'il est un invariant du groupe (8'), ce qui est effectivement le cas si l'on prend comme nouveaux multiplicateurs les quantités

$$\bar{v}^{\alpha'} = v_{\alpha'} - c^h_{\alpha'} u^h.$$

Les géodésiques de longueur minima sont, dans le cas non intégrable, différentes des géodésiques auto-parallèles, et en même temps plus nombreuses. Il en passe par chaque point P, et tangentes a chaque direction intérieure $n - p$ de ces géodésiques, si $p - m$ est le nombre des équations du système dérivé du système (7); c'est ce qu'on peut voir sur les seconds membres des secondes équations (24). On peut aussi montrer, que le système (24) ne peut se décomposer en deux parties, dont la première suffirait pour déterminer les inconnues x^i, u^h, $v_{h'}(h' = m+1, \ldots, q)$, que si les équations $ds^{\alpha'}(\alpha' > q)$ sont des combinaisons intégrables du système (7).

Les équations (24) nous montrent aussi que, dans le cas non intégrable, les géodésiques auto-parallèles, sont en même temps, des géodésiques de longueur minima, si V_n^m est totalement géodésique dans $V_n(v_{hk,l'} = 0)$. Cela signifie que. dans ce cas, on peut supposer dans les équations (24) les multiplicateurs $v_{\alpha'}$ nuls.

21. Les connexions rigides de V_n^m. — Nous allons maintenant étudier les propriétés géométriques rigides de V_n^m, ou bien les propriétés invariantes au groupe orthogonal (8), (11), (12). Il est à remarquer que ce groupe coincide avec le groupe rigide de l'espace non holonome V_n^{n-m} complémentaire à V_n^m, qu'on obtient en égalant à zéro les ds^h, de façon que les propriétés rigides de V_n^m et de V_n^{n-m} coïncident. Toutefois, il existe évidemment des propriétés qui se rattachent plus à V_n^m qu'à V_n^{n-m}, comme par exemple les géodésiques de V_n^m, le parallélisme intérieur, etc. D'ailleurs, on peut se rendre compte facilement que, si aux propriétés semi-intrinsèques de V_n^m, on ajoute les propriétés semi-intrinsèques de V_n^{n-m}, on obtient toutes les propriétés rigides de V_n^m ou de V_n^{n-m}. En effet, si l'on tient compte du fait que les $c_{k'}^{h'}$ satisfont aux conditions d'orthogonalité (12), les formules *analogues* aux (14), peuvent. comme les (14) elles-mêmes, être résolues par rapport aux dérivées $\frac{\partial c_k^{h'}}{\partial s^{l'}}$

$$\frac{\partial c_{k'}^{h'}}{\partial s^{l'}} = \bar{\gamma}_{\alpha'\beta'}^{h} c_{k'}^{\alpha'} c_{l'}^{\beta'} - \gamma_{k'l'}^{\alpha'} c_{\alpha'}^{h'}. \tag{25}$$

Ces formules expriment précisément que les coefficients de rotation $\gamma_{k'l'}^{h'}$ sont les composantes d'une connexion affine permettant de transporter un vecteur extérieur à V_n^m le long d'un chemin aussi extérieur. Cette connexion n'est autre chose que la connexion intérieure de l'espace V_n^{n-m} complémentaire à V_n^m. Par conséquent si l'on associe à la connexion semi-intrinsèque de V_n^m, cette connexion $\gamma_{k'l'}^{h'}$, on obtient comme connexion rigide de V_n^m, la connexion complète définie par les formules (Schouten et Kampen [24], p. 771; Vranceanu [30], p. 199)

$$\overset{*}{\gamma}{}_{kl}^{h} = \gamma_{kl}^{h}, \qquad \overset{*}{\gamma}{}_{kl'}^{h} = w_{kl'}^{h}, \qquad \overset{*}{\gamma}{}_{k'l}^{h'} = w_{k'l}^{h'}, \qquad \overset{*}{\gamma}{}_{k'l'}^{h'} = \gamma_{k'l'}^{h'}, \qquad \overset{*}{\gamma}{}_{k'a}^{h} = \overset{*}{\gamma}{}_{ka}^{h'} = 0. \tag{26}$$

Cette connexion a évidemment la propriété de conserver le caractère de vecteur intérieur et extérieur $(\overset{*}{\gamma}{}^{h}_{k'a} = \overset{*}{\gamma}{}^{h'}_{ka} = 0)$. Elle est caractérisée par la propriété de conserver la longueur dans les transports d'un vecteur intérieur (extérieur) le long d'un chemin intérieur (extérieur) et de fermer, *le plus possible*, le parallélogramme. En effet, cette connexion est composée des connexions intérieures de V_n^m et V_n^{n-m} et de la connexion extérieure de V_n^m, qui est en même temps connexion extérieur de V_n^{n-m} et toutes ces connexions ont cette propriété. Il est évident aussi que comme tenseurs du troisième ordre rigides, nous avons les deux tenseurs d'intégrabilité w^{h}_{kl}, $w^{h}_{k'l'}$, le tenseur de la seconde forme $v_{kh,l'}$ de V_n^m et le tenseur $v_{h'k',l}$ de la seconde forme de V_n^{n-m}.

Au lieu de considérer le groupe rigide, comme un sous-groupe du groupe semi-intrinsèque de V_n^m, on peut le considérer comme un sous-groupe du groupe orthogonal de V_n. Dans ce cas, pour obtenir les formules fondamentales de notre groupe rigide, il faut supposer dans les formules fondamentales (6) relatives au groupe orthogonal $(\gamma^* = \gamma)$ de V_n, $c^h_{k'} = c^{h'}_k = 0$. On trouve, en dehors des formules (15) et leurs analogues (25), les formules suivantes :

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial c^h_k}{\partial s^{l'}} &= \overline{\gamma}{}^{h}_{\alpha\beta'} c^{\alpha}_{k} c^{\beta'}_{l'} - \gamma^{\alpha}_{kl'} c^{h}_{\alpha}, \\ 0 &= \overline{\gamma}{}^{h}_{\alpha'\beta'} c^{\alpha'}_{k'} c^{\beta'}_{l'} - \gamma^{\alpha}_{k'l'} c^{h}_{\alpha} \end{aligned}\right.$$

et des formules analogues. Les premières de ces formules et leurs analogues associés aux (15) et aux (25) montrent que l'espace non holonome V_n^m possède aussi la connexion rigide complète considérée par M. Schouten ([16], p. 294; [24], p. 770; [30], p. 198)

$$(28)\qquad \overset{*}{\gamma}{}^{h}_{ka} = \gamma^{h}_{ka}, \qquad \overset{*}{\gamma}{}^{h'}_{k'a} = \gamma^{h'}_{k'a}, \qquad \overset{*}{\gamma}{}^{h}_{k'a} = \overset{*}{\gamma}{}^{h'}_{ka} = 0.$$

Comme on voit, cette connexion diffère de la connexion rigide (26) par les quantités $\gamma^{h'}_{kl}$, $\gamma^{h}_{k'l'}$, qui sont, en vertu des dernières (27), les composantes de deux tenseurs rigides du troisième ordre. D'ailleurs on peut remarquer que les quatre tenseurs rigides du troisième ordre considérés plus haut s'expriment à l'aide de ces deux tenseurs.

La connexion (28) conserve, elle-même, le caractère de vecteur intérieur et extérieur. Elle est caractérisée par la propriété de conserver les longueurs comme la connexion de Levi-Civita de l'espace V_n environnant; mais elle ne ferme le parallélogramme que si les tenseurs $\gamma^{h'}_{kl}$, $\gamma^{h}_{k'l'}$ sont tous les deux nuls. Cela signifie que V_n^m et V_n^{n-m}

doivent être holonomes et totalement géodésiques. D'ailleurs le transport parallèle de la connexion (28) peut s'obtenir de celui de V_n par la construction suivante (Enéa Bortolotti [27], p. 7) :

On obtient le vecteur parallèle d'un vecteur intérieur (extérieur) en prenant la projection sur les congruences fondamentales (et non holonomie) du vecteur parallèle dans V_n.

Au point de vue rigide, les deux connexions (26) et (28) ont la même valeur, toutes les deux conservant le caractère du vecteur intérieur et extérieur; mais si l'on considère aussi les propriétés semi intrinsèques, on voit que la connexion (26) est liée d'une manière plus intime aux propriétés de V_n^m

Nous avons aussi une autre connexion rigide qui conserve seulement le caractère de vecteur intérieur due à M. Synge ([15], p. 745; [27], p. 2; [30], p. 202), et qui est la première connexion rigide considérée dans l'étude des espaces non holonomes. Les composantes de cette connexion sur les congruences (λ) sont données par les formules

$$\text{(29)} \qquad \overset{*}{\gamma}{}^{h}_{ka} = \gamma^{h}_{ka}, \qquad \overset{*}{\gamma}{}^{h'}_{k'a} = \gamma^{h'}_{k'a}, \qquad \overset{*}{\gamma}{}^{h}_{k'a} = 2\gamma^{h}_{k'a}, \qquad \overset{*}{\gamma}{}^{h'}_{ka} = 0.$$

On voit que cette connexion ne conserve le caractère de vecteur extérieur que si $\gamma^h_{k'a} = 0$, ou bien si V_n^m et V_n^{n-m} sont holonomes et totalement géodésiques.

22. Les tenseurs rigides de courbure. — Les circuits infinitésimaux de la connexion (26) sont évidemment les deux pentagones de V_n^m et et de V_n^{n-m} et le parallélogramme de V_n^m qui est aussi commun à V_n^{n-m}. Si l'on transporte un vecteur intérieur et un vecteur extérieur le long de ces trois circuits, on obtient six tenseurs de courbure. Quatre de ces tenseurs nous sont déjà connus; ce sont les deux tenseurs de courbure λ^h_{klr}, $\lambda^h_{klr'}$ de V_n^m et les deux tenseurs de courbure $\lambda^{h'}_{k'l'r'}$, $\lambda^{h'}_{k'l'r}$ de V_n^{n-m}. Pour obtenir les deux autres tenseurs de courbure, il faut transporter un vecteur extérieur le long du pentagone de V_n^m et un vecteur intérieur le long du pentagone de V_n^{n-m}. En faisant les calculs on s'aperçoit facilement qu'on n'arive pas à des tenseurs nouveaux mais aux tenseurs dérivés $w^{h'}_{kl,r}$, $w^{h}_{k'l',r'}$ des tenseurs d'intégralité ([30], p. 200).

Naturellement. les tenseurs de courbure de la connexion (28) et (29) s'exprimeront en fonction des tenseurs de courbure de la connexion (26) et des tenseurs $\gamma^{h'}_{kl}$, $\gamma^{h}_{k'l'}$, qui représentent la différence de deux de ces connexions. En particulier, si l'on transporte (Horak, [19] un vecteur intérieur le long du pentagone V_n^m à l'aide de la connexion (28), on obtient le tenseur de courbure $R_{klr}^{\ \ h}$, trouvé par M. J. A. Schouten,

$$R_{klr}^{\ \ h} = \lambda_{klr}^{h} + \gamma_{hk}^{\alpha'} w_{lr}^{\alpha}.$$

On voit que le tenseur $R_{klr}^{\ \ h}$, comme le tenseur λ_{klr}^{h}, se réduit au tenseur de Riemann, des V_m, si le système (7) est complètement intégrable. Dans le cas non intégrable, le tenseur $R_{klr}^{\ \ h}$ est seulement un tenseur rigide et non pas un tenseur semi-intrinsèque comme le tenseur λ_{klr}^{h} de courbure intérieure de V_n^m.

En terminant ce chapitre, nous voulons remarquer en premier lieu, qu'on peut aussi considérer des espaces non holonomes V_m^p plongés dans un espace non holonome V_n^m; c'est-à-dire des espaces définis dans V_n^m par un système de Pfaff, $ds^\alpha = 0$, $\alpha = p + 1, \ldots, m)$. On obtient évidemment les groupes de ces espaces, si dans les groupes de V_n^m on sépare les transformations des congruences fondamentale de V_n^m en deux parties, suivant que les indices h, k ont des valeurs entre 1 et p, ou entre $p+1$ et m.

En second lieu, nous voulons remarquer, qu'on obtient un sous-groupe intéressant du groupe semi-intrinseque de V_n^m, en supposant que les $c_{k'}^{h}$ sont constantes. En effet, ce groupe non holonome possède une connexion affine *complète*, qui a seulement les composantes suivantes différentes de zéro

$$\gamma_{kl}^{*h} = \gamma_{kl}^{h}, \qquad \gamma_{kl'}^{*h} = w_{kl'}^{h}.$$

Cette connexion conserve le caractère de vecteur intérieur et extérieur; mais elle est rigidement liée aux congruences de non holonomie. Quant aux tenseurs du troisieme ordre, de cette connexion, ils sont fournis par le tenseur de la seconde forme $v_{kl,h'}$ et les quatre tenseurs de torsion $w_{kl}^{h'}$, $w_{kl'}^{h}$, $w_{k'l'}^{h'}$, $w_{k'l'}^{h}$.

CHAPITRE IV.

LES ESPACES NON HOLONOMES A CONNEXION AFFINE.

23. Propriétés géométriques. — Nous avons considéré jusqu'ici les propriétés des espaces non holonomes V_n^m, comme des invariants de certains groupes de transformations de congruences; mais, évidemment, *on peut aussi exprimer ces propriétés dans un système quelconque de congruences ou de coordonnées* ([14], [15], [16], [21], 24]). En particulier, on peut se passer facilement de la condition que les congruences fondamentales soient orthogonales par rapport à la métrique (10) de V_n^m, car il suffit d'introduire cette métrique, non pas comme un invariant du groupe, mais explicitement sous la forme

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, ds^\alpha\, ds^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m). \tag{28'}$$

Dans ce cas, les propriétés intrinseques de V_n^m seront des invariants du groupe (7′) et de la métrique (28′) et les propriétés semi-intrinseques des invariants du groupe (8) et de la métrique (28′). Il en résulte que la connexion semi-intrinsèque extérieure w_{kl}^h, $w_{k'l}^{k'}$ est conservée, tandis que les composantes γ_{kl}^{*h} de la connexion intérieure de V_n^m ne seront plus représentées par les coefficients de rotation γ_{ll}^h que si la métrique (28′) se réduit à la somme des carrés des ds^α. Quant aux propriétés rigides, elles sont des invariants du groupe (8), de la métrique (28′) et d'une métrique analogue à l'intérieur des congruences de non holonomie.

Ces considérations sont utiles si l'on veut étudier les espaces non holonomes a connexion affine par la même méthode des groupes de transformations de congruences. En effet, supposons que, dans un espace à connexion affine A_n, nous ayons le systeme de Pfaff (7). Si l'on associe aux formes $ds^{h'}$, m formes complémentaires ds^h et qu'on indique avec γ_{bc}^{*a} les composantes de la connexion de A_n sur les n congruences (λ), on pourra appeler connexion induite par A_n, à l'intérieur des congruences (λ^h), la connexion ayant les composantes γ_{kl}^{*h}. On s'aperçoit facilement que dans ce cas aussi, cette connexion induite n'est un invariant du groupe intrinseque (7′) que si le système (7′) est complètement intégrable et qu'elle est un invariant du groupe (8) parce que nous avons les formules

$$\frac{\partial c_k^h}{\partial s^l} = \gamma_{\alpha\beta}^{*h} c_k^\alpha c_l^\beta - \gamma_{kl}^{*\alpha} c_\alpha^h. \tag{29'}$$

Par conséquent, les propriétés semi-intrinseques de l'espace non holonome A_n^m, défini dans A_n par le système (7) et les congruences (λ^h), sont des invariants du groupe (8), auquel on associe la connexion induite γ^{*h}_{kl}. La connexion semi-intrinsèque régulière de l'espace non holonome A^m_n a comme composantes sur les congruences (λ) les quantités γ^{*h}_{kl}, $w^h_{kl'}$, $w^h_{k'l}$. Quant à la connexion irrégulière $\delta^{h'}_{k'l'}$, s'il en existe, elle dépend, comme on sait, seulement du système (7).

Si la connexion A_n n'est pas symétrique, les composantes intérieures $\tau^h_{kl} = \gamma^{*h}_{kl} - \gamma^{*h}_{lk} - w^h_{kl}$ de la torsion peuvent n'être pas nulles et dans ce cas elles déterminent un tenseur intérieur du troisième ordre par rapport au groupe (8).

Pour trouver le tenseur de courbure semi-intrinsèque λ^{*h}_{kla} de A^m_n, on peut, comme dans le cas d'un V^m_n, chercher les variations des composantes d'un vecteur intérieur dans le transport parallèle le long du pentagone infinitésimal construit sur un déplacement intérieur ds^h et un déplacement quelconque δs^a. Il est à remarquer seulement que le cinquième côté du pentagone a, dans ce cas, aussi des composantes intérieures $\Delta s^h = \tau^h_{kl}\, ds^k\, \delta s^l$, si τ^h_{kl} n'est pas nul. Il en résulte que, pour obtenir les composantes λ^{*h}_{klr} du tenseur de courbure de A^m_n, il faut poser dans les formules (19'), γ^{*h}_{kl} au lieu de γ^h_{kl}, et ajouter le terme $-\gamma^{*h}_{k\alpha}\tau^{\alpha}_{lr}$.

Pour obtenir les propriétés rigides de A^m_n, il faut associer la connexion $\gamma^{*h'}_{k'l'}$, induite par l'espace environnant A_n, à l'intérieur des congruences de non holonomie. La connexion qui a comme composantes non nulles γ^{*h}_{kl}, $w^h_{kl'}$, $w^{k'l}_{h'}$, $\gamma^{*h'}_{k'l'}$, constitue ainsi une première connexion rigide complète de l'espace A^m_n, qui est l'équivalente de la connexion (26) pour un V^m_n. Pour obtenir l'équivalente de la connexion rigide (28), on doit tenir compte, dans les formules (6), que $c^h_{k'} = c^{h'}_k = 0$, et l'on trouve la connexion ayant comme composantes non nulles les quantités γ^{*h}_{ka}, $\gamma^{*h'}_{k'a}$ (Schouten et Kampen [24], p. 770, 775).

24. Équations aux variations des courbes auto-parallèles. — Les courbes auto-parallèles de la connexion intérieure de l'espace non holonome affine A^m_n, sont évidemment données par les équations

$$(28'')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx^i}{ds} &= \lambda^i_h u^h, \\ \frac{du^h}{ds} &= \gamma^{*h}_{kl} u^k u^l, \end{aligned}\right.$$

le paramètre s déterminé le long d'une de ces courbes par ces équations s'appelle l'arc affine de la courbe. Pour trouver les équations aux variations de ces courbes (Vranceanu [20], p. 41 ; Wundheiler [28]) considérons dans l'espace X_n des variables x^i, une courbe quelconque (c)

$$x^i = \varphi^i(\sigma)$$

σ étant un paramètre, dont les valeurs déterminent les différents points de la courbe. et soient

$$x^i = \varphi^i(\sigma) + \lambda^i_a \varepsilon^a$$

les équations d'une courbe (c) voisine à (C). Dans ces équations, les paramètres λ^i_a entrent avec leurs valeurs en fonction de σ le long de (C) et ε^a sont à considérer comme des quantités du premier ordre. D'ailleurs, elles représentent les composantes sur les congruences (λ) du vecteur qui lie les points correspondants à la même valeur du paramètre σ sur les deux courbes (C) et (c). En indiquant par s un paramètre quelconque, dont dépendent les points de la courbe (c), nous avons, en négligeant les termes supérieurs au premier dans les ε^a, les formules

$$u^a = (\lambda^a_i)_c \frac{dx^i}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}\left(c^a + \frac{d\varepsilon^a}{d\sigma} + w^a_{bd} c^b \varepsilon^d\right),$$

où w^a_{bd} entrent avec leur valeurs le long de (C) et c^a sont les cosinus de la courbe (c).

Supposons maintenant que la courbe (C) est une courbe intérieure de l'espace non holonome X^m_n $(c^{h'} = 0)$. Pour que la courbe (c) soit elle-même une courbe intérieure de X^m_n, on doit avoir les équations

$$(29'') \qquad u^{h'} = \frac{d\varepsilon^{h'}}{d\sigma} + w^{h'}_{kl'} c^k \varepsilon^{l'} + w^{h'}_{kl} c^k \varepsilon^l = 0.$$

On voit que si l'on suppose les ε^l connus, ces équations constituent un système différentiel du premier ordre dans les $\varepsilon^{h'}$. Il est à remarquer aussi que si les quantités $w^{h'}_{kl} c^k$ sont nulles, en particulier si l'espace X^m_n se compose de $\infty^{n-m} X_m (w^{h'}_{lk} = 0)$ les équations (29″) ne dépendent pas des ε^l, de façon qu'elles possèdent dans ce cas la solution $\varepsilon^{h'} = 0$, ou bien on peut obtenir les courbes voisines à (C), par des déplacements, intérieures à X^m_n. Si l'on introduit le vecteur dérivé du vecteur $\varepsilon^{h'}$ le long de (C)

$$\frac{D\varepsilon^{h'}}{d\sigma}=\frac{d\varepsilon^{h'}}{d\sigma}-w^{h'}_{kl'}\varepsilon^{k'}c^{l},$$

on peut donner aux équations (29″) la forme invariante semi-intrinsèque

$$(29''') \qquad \frac{D\varepsilon^{h'}}{d\sigma}+w^{h'}_{kl}c^{k}\varepsilon^{l}=0.$$

Si nous sommes dans l'espace à connexion affine A^m_n, nous avons aussi les formules

$$w^{h}_{kl}=\gamma^{*h}_{kl}-\gamma^{*h}_{lk}-\tau^{h}_{kl}$$

et si l'on nous intéresse seulement des courbes auto-parallèles, on peut changer la connexion, sans changer ces courbes, de façon que les composantes τ^h_{kl} de la torsion soient nulles. Cela fait, en introduisant le vecteur dérivé du vecteur intérieur ε^h, le long de (C),

$$\frac{D\varepsilon^{h}}{d\sigma}=\frac{d\varepsilon^{h}}{d\sigma}-\gamma^{*h}_{kl}\varepsilon^{k}c^{l},$$

on peut écrire les composantes du vecteur tangent à (c) sous la forme

$$u^{h}=\frac{d\sigma}{ds}\left(c^{h}+\frac{D\varepsilon^{h}}{d\sigma}+\gamma^{*h}_{kl}c^{k}\varepsilon^{l}+w^{h}_{kl'}c^{k}\varepsilon^{l'}\right).$$

Supposons maintenant que la courbe (C) soit une courbe auto-parallèle de l'espace non holonome A^m_n et que σ soit son arc affine. Si l'on veut que (c) soit elle-même une courbe auto-parallèle de A^m_n avec l'arc affine s, il faut que les u^h satisfassent aux formules (28″). En admettant, comme il est très naturel d'ailleurs, que

$$\frac{d\sigma}{ds}=1-\mu,$$

μ étant une quantité du premier ordre et en introduisant les valeurs des u^h dans les (28″) et en négligeant les termes supérieurs au premier ordre, on trouve sans difficulté les formules

$$(30) \qquad \frac{D^2\varepsilon^{h}}{d\sigma^2}-\frac{d\mu}{d\sigma}c^{h}=\lambda^{*h}_{kla}c^{k}c^{l}\varepsilon^{a},$$

où $\frac{D^2\varepsilon^h}{d\sigma_2}$ sont les composantes du second vecteur dérivé de ε^h le long de (C) et les λ^{*h}_{kla} sont les composantes du tenseur de courbure de A^m_n. Ces équations, qui ont évidemment un caractère invariant semi-intrinsèque, associées aux ($29'''$), constituent un système de n équations différentielles dans les $n+1$ inconnues ε^a, μ, du second ordre dans les ε^h et du premier ordre dans les $\varepsilon^{h'}$, μ.

Il suffit d'associer à ce systeme, la loi de correspondance entre les courbes (C) et (c), pour pouvoir déterminer les inconnues ε^a, μ. Si notre espace non holonome est un V^m_n, on peut choisir le vecteur déplacement ε^a, orthogonal à la courbe (C) ($\varepsilon^h c^h = 0$), et comme la somme des carrés des u^h doit être, comme cosinus, égale à l'unité, nous avons la valeur de μ

$$\mu = c^h \frac{D\varepsilon^h}{d\sigma} + \frac{1}{2} \nu_{hk\,l'} c^h c^k \varepsilon^{l'}.$$

D'ailleurs, si l'on prend les congruences fondamentales de façon que la congruence (λ') soit tangente à la courbe (C), tous les cosinus c^h sont nuls, sauf c qui est l'unité. Il en résulte que les dernières $m-1$ équations (30) ne contiennent plus μ et reçoivent la forme

$$(30') \qquad \frac{D^2\varepsilon^h}{d\sigma^2} = \lambda^{*h}_{1la}\varepsilon^a \qquad (h = 2, 3, \ldots, m).$$

Si le déplacement ε^a est orthogonal à la courbe (C) ($\varepsilon^1 = 0$), ces équations associées aux ($29'''$), constituent un système différentiel de $n-1$ équations dans les $n-1$ inconnues $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. On peut encore simplifier les équations (30′) en prenant comme congruences (λ^2), ..., (λ^m), des congruences qui se transportent par parallélisme le long de (C), car en ce cas les composantes $\frac{D^2\varepsilon^h}{d\sigma^2}$ ($h \geqq 2$) du second vecteur dérivé coincident avec les dérivées secondes $\frac{d^2\varepsilon^h}{d\sigma^2}$. De même, on peut simplifier les équations ($29'''$), en prenant comme congruences de non holonomie des congruences qui se transportent par parallélisme semi-intrinsèque, le long de (C), puisque dans ce cas aussi les composantes $\frac{D\varepsilon^{h'}}{d\sigma}$ sont égales à $\frac{d\varepsilon^{h'}}{d\sigma}$.

25. L'équivalence de deux espaces non holonomes. — Considérons deux espaces X_n et X'_n, l'un rapporté aux congruences (λ), fonctions des variables $x^1, \ldots, x^n$, l'autre rapporté aux congruences (λ') fonctions des variables $x'^1, x'^2, \ldots, x'^n$. Si l'on fait dans l'espace X'_n, la transformation de variables (3), les formes ds'^a des congruences (λ'), deviennent des formes linéaires dans les variables (x) et sous cette forme elles peuvent s'exprimer linéairement à l'aide des formes ds^a des congruences (λ) de X_n

$$ds'^a = c^a_b\, ds^b, \tag{31}$$

es c^a_b étant des fonctions convenables des variables (x) à déterminant différent de zéro. Si l'on considère la transformation (3) comme inconnue, les équations (31) constituent un système à différentielles totales, dans les inconnues x'^i, comme fonctions de x^i, qui peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = c^a_b \lambda'^i_a \lambda^b_j. \tag{32}$$

Quant aux conditions d'intégrabilité de ce système. exprimant que les dérivées secondes des x'^i, sont symétriques, elles peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial c^a_b}{\partial s^c} - \frac{\partial c^a_c}{\partial s^b} = w'^a_{ef}\, c^e_b c^f_c - w^e_{bc}\, c^a_e. \tag{33}$$

On voit que ces conditions diffèrent des formules fondamentales (5), seulement par le fait qu'ici les w'^a_{ef} sont à considérer comme fonctions des variables (x').

Les équations (32), (33), constituent pour les n inconnues x'^i et les n^2 inconnues auxiliaires c^a_b, considérées comme fonctions des n variables x^i, un systeme aux dérivées partielles du premier ordre. Ce système, tant qu'on n'impose aux inconnues c^a_b aucune condition, possède évidemment comme solutions toutes les transformations (3), car cela signific que les espaces X_n et X'_n sont équivalents, le groupe d'équivalence étant le groupe ponctuel (3).

Supposons maintenant que les c^a_b satisfassent aux équations $c^{h'}_k = 0$, qui expriment que le système de Pfaff $ds^{h'} = 0$, doit être transformé dans le système $ds'^{h'} = 0$. Les équations $c^{h'}_k = 0$, associées aux (32) et (33), nous fournissent les équations d'équivalence intrinsèque des espaces non holonomes X^m_n et X'^m_n définis dans X_n et X'_n par les systèmes de Pfaff $ds^{h'} = 0$ et $ds'^{h'} = 0$. Parmi les équations (33), nous avons dans ce cas aussi les relations en termes finis

$$w'^{h'}_{\alpha\beta}\, c^\alpha_k c^\beta_l - w^\alpha_{kl}\, c^h_\alpha = 0, \tag{33'}$$

qui expriment que les tenseurs d'intégrabilité de nos deux systèmes de Pfaff sont équivalents. Si l'on met en évidence les systèmes dérivés de ces systèmes, on trouve qu'une condition nécessaire pour que les équations d'équivalence de X_n^m et $X_n'^m$ aient des solutions est que les c_b^a doivent appartenir au groupe qui conserve le système (7) et ses systèmes dérivés ([3], § 7). Si l'on impose aussi aux c_b^a les conditions $c_{k'}^h = 0$, on obtient les équations d'équivalence des espaces non holonomes X_n^m et $X_n'^m$ considérés au point de vue semi-intrinsèque ou rigide, les deux points de vue coïncidant pour les X_n^m. Évidemment, en ce cas les c_b^a doivent aussi appartenir au groupe qui conserve les systèmes dérivés du système $ds^h = 0$.

Il en résulte que si les systèmes $ds^h = 0$, $ds^{h'} = 0$ n'ont pas des combinaisons intégrables, notre problème d'équivalence se réduit, en accord avec le théorème du paragraphe 10, *au problème d'équivalence de deux espaces à connexion affine complète*. On sait qu'un tel problème se réduit à l'étude d'*un système à différentielles totales mixte* et par conséquent il peut être considéré complètement résolu ([12], p. 14). En particulier on sait que les transformations d'équivalence, s'il en existe, ne peuvent dépendre que de constantes arbitraires.

Si nos systèmes complémentaires ont des combinaisons intégrables, on ne peut plus affirmer que l'intégration des équations d'équivalence semi-intrinsèque ou rigide de X_n^m et $X_n'^m$ se réduit à un système à différentielles totales, de façon que, dans ce cas. et à plus forte raison dans le cas intrinsèque, les transformations d'équivalence peuvent aussi dépendre de fonctions arbitraires.

On peut maintenant passer au problème d'équivalence de deux espaces non holonomes à connexion affine A_n^m et $A_n'^m$. Si l'on se pose au point de vue rigide, les équations d'équivalence se composent évidemment des équations (32); et puis. au lieu des équations (33) nous avons : les équations (29′) (où les $\bar{\overset{*}{\gamma}}{}_{\alpha\beta}^{h}$ sont remplacés par $\gamma'{}_{\alpha\beta}^{*h}$) et leurs analogues les équations (9) et leurs analogues, où au lieu de $\bar{w}$ on pose w', et comme relations en termes finis, les (32′) et leurs analogues, et enfin les relations en termes finis fournis par le tenseur de torsion τ_{kl}^h et son analogue. Nous avons ainsi un système à différentielles totales mixte, pour déterminer les n inconnues x'^i, les m^2 inconnues c_k^h et les $(n-m)^2$ inconnues $c_{k'}^{h'}$, comme fonctions des n variables x^i. Si l'on considère les conditions d'intégrabilité des équations en c, on trouve les relations en termes finis fournis par les tenseurs de courbure λ^{*h}_{kla}, $\lambda^{*k'}_{k'l'a}$. Naturellement, en dérivant ces relations en termes finis, on trouve des relations où figurent les tenseurs dérivés de nos tenseurs. Par conséquent, on peut affirmer que les seules relations en termes finis, qui doivent être satisfaites pour l'équivalence. sont celles fournies par les quatre tenseurs du troisième ordre $w^{h'}_{kl}$, $w^{h}_{k'l'}$, τ^{h}_{kl}, $\tau^{h'}_{k'l'}$, par les tenseurs de courbure et par les tenseurs dérivés de ces six tenseurs. On peut aussi dire que ces six tenseurs et leurs tenseurs dérivés constitue *un système complet d'invariants pour l'espace non holonome A^m_n rigide.*

Si l'on se pose au point de vue semi-intrinsèque on doit renoncer en premier lieu aux équations analogues au (30'), de façon que le système d'équivalence ne soit plus a différentielles totales. Toutefois on sait qu'il se réduit à un tel système si le systeme (7) n'a pas des combinaisons intégrables. En tous cas, les tenseurs semi-intrinseques $w^{h'}_{kl}$, $w^{h}_{k'l'}$, τ^{h}_{kl}, λ^{*h}_{kla} et les tenseurs dérives, à l'aide de la connexion semi-intrinsèque réguliere de A^m_n, ne constituent pas un systeme complet d'invariants de A^m_n semi-intrinseque.

Ces résultats sur les A^m_n sont évidemment aussi valables pour les V^m_n avec la seule différence qu'en ce cas, on doit associer aussi les relations fournies par le tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$ dans le cas semi-intrinsèque et aussi par le tenseur métrique $a_{\alpha\beta'}$ dans le cas rigide. Dans le cas de V^m_n on peut aussi se placer au point de vue intrinseque et les relations en termes finis sont alors $c^{h'}_{k} = 0$, les (32') et celles données par le tenseur $a_{\alpha\beta}$. Mais, dans le cas des V^m_n, on peut aussi simplifier le probleme en se servant de congruences orthogonales. En ce cas, les équations d'équivalence intrinseque de V^m_n sont les (32), (33), $c^{h'}_{k} = 0$ et les (11); pour obtenir celles d'équivalence semi-intrinseque on doit associer les $c^{h}_{k} = 0$ ([33], Chap. II), et enfin pour l'équivalence rigide on doit associer les (12).

26. L'applicabilité des espaces non holonomes. — On arrive aux équations d'applicabilité d'un espace non holonome sur lui-même. en supposant que les congruences (λ') soient les mêmes fonctions des (x') que les congruences (λ) le sont des (x). En ce cas, les équations d'équivalence, considérées plus haut, ont toujours la solution identique

$$(33') \qquad x'^i = x^i, \qquad c^a_b = \delta^b_a \begin{cases} = 0 & (a \neq b), \\ = 1 & (a = b), \end{cases}$$

et la question revient à voir si ces équations ont aussi d'autres solutions que la (33′).

Pour trouver les équations de définition des transformations infinitésimales du groupe d'applicabilité de l'espace, voisin de la transformation identique, il faut poser dans les équations d'équivalence

$$x'^{\iota} = x^{\iota} + \xi^{\iota}\,\delta t, \qquad c^a_b = \delta^a_b + \varepsilon^a_b\,\delta t, \tag{33″}$$

où ξ_ι, ε^a_b sont des nouvelles inconnues et δt est a considérer comme une quantité constante du premier ordre. On trouvera ainsi des équations et relations en termes finis, linéaires dans les inconnues ξ^ι et ε^a_b.

Si nous sommes dans le cas d'un V^m_n et qu'on choisit des congruences orthogonales, les équations (11), les équations suivantes

$$c^{h'}_k = c^h_{k'} = 0,$$

et les équations (12), qui représentent les équations de définition du groupe non holonome rigide de V^m_n, nous fournissent tres simplement les équations de définition des transformations infinitésimales

$$\varepsilon^h_k + \varepsilon^k_h = 0, \qquad \varepsilon^h_k = 0 \qquad \varepsilon^h_k = 0 \qquad \varepsilon^h_k + \varepsilon^k_h = 0. \tag{34}$$

Évidemment, pour avoir les équations de définition des transformations infinitésimales du V^m_n semi-intrinseques, on doit se limiter aux trois premiers groupes d'equations (34) et pour avoir celles du V^m_n intrinseque, on doit se limiter seulement aux deux premiers groupes.

Comme les inconnues ε^a_b sont des inconnues auxiliaires de notre probleme, les inconnues principales étant les ξ^ι, ou bien les projections $\varepsilon^a = \lambda^a_\iota \xi^\iota$ du vecteur (ξ) sur les congruences (λ), on peut les éliminer des (34), car nous avons les formules

$$\varepsilon^a_b = \frac{\partial \varepsilon^a}{\partial s^b} + w^a_{bc}\,\varepsilon^c. \tag{34′}$$

En tenant compte de ces formules, on vérifie facilement que les (34), de même que les équations relatives au V^m_n semi-intrinsèque ou intrinsèque, ont un caractère invariant par rapport au groupe correspondant de V^m_n.

Supposons maintenant que notre V^m_n possede le groupe d'applicabilité à un paramètre G_1. On peut toujours supposer ce groupe engendré par la transformation infinitésimale

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}. \tag{34'}$$

En ce cas, les équations (34) deviennent des équations linéaires et homogènes dans les dérivées $\frac{\partial \lambda_i^q}{\partial x^1}$, de façon que les (34) sont identiquement satisfaites si les congruences (λ) ne dépendent pas explicitement de x^1. Inversement, on peut démontrer, que si V_n^m rigide, semi-intrinsèque ou intrinsèque, possède le groupe (34′) on peut, par une transformation convenable de congruences appartenant au groupe rigide, semi-intrinsèque ou intrinsèque, rapporter le V_n^m à un système de congruences qui ne contient pas la variable x_1 explicitement (Vranceanu [33], § 10).

Si les congruences (λ) de l'espace V_n^m ont comme quantités ω_{bc}^a des constantes, les équations d'applicabilité ont la solution $c_b^a = \delta_b^a$, quels que soient les x'^i, qui satisfont alors au système des différentielles totales (32) ($c_b^a = \delta_a^b$) complètement intégrable. Il en résulte que V_n^m possède, en ce cas, un groupe simplement transitif d'applicabilité. D'ailleurs, ce groupe est la réciproque du groupe continu simplement transitif déterminé en ce cas par les congruences (λ). On peut démontrer aussi que, *si le groupe d'applicabilité de* V_n^m *possède un sous-groupe simplement transitif, il peut être rapporté à un système de congruences ayant les coefficients de rotation constants.*

27. Les hypersurfaces non holonomes. — L'espace non holonome A_n^{n-1} défini par une seule équation de Pfaff non complètement intégrale peut s'appeler une hypersurface non holonome. Si la connexion de A_n conserve les volumes et si l'équation $ds = 0$ à son covariant de rang $n - 1$ ce que peut arriver seulement si n est un nombre impair. on peut toujours réduire le groupe intrinsèque de A_n^{n-1} au groupe semi-intrinsèque, ce qui revient à dire qu'on peut d'une manière invariantive fixer une normale affine à A_n^{n-1} (Schouten [16], p. 299).

Si nous avons une hypersurface non holonome V_n^{n-2}, on peut toujours et en général de plusieurs manières différente, réduire le groupe intrinsèque à un groupe rigide, ce qui revient à dire qu'on peut toujours fixer la normale et la métrique sur cette normale. Considérons maintenant l'espace non holonome V_3^2 défini dans un espace de Riemann à trois dimensions, par une équation de Pfaff non complètement intégrable ($\omega^3_{12} \neq 0$), espace qu'on peut appeler aussi *surface non holonome*. Le groupe d'applicabilité d'un tel espace peut contenir au maximum quatre parametres ([33], § 14).

Si l'espace V^2_3 admet un G_4, ce G_4 doit contenir un G_3 simplement transitif, car, d'une part, on peut démontrer qu'un V^2_3 proprement dit ($\omega^3_{12} \neq 0$) ne peut pas avoir un G_3 intransitif et, d'autre part, on sait qu'un G_4 possede toujours un G_3. Il en résulte que les V^2_3 possédant un G_4 peuvent être rapportés à un système de congruences à coefficients de rotation constants. Cela fait, les équations (32') qui, a cause d'orthogonalité des $c^h_k (h, k = 1, 2)$. deviennent $\overline{\omega}^3_{12} = c^3_3 \omega^3_{12}$, nous disent que $c^3_3 = 1$, ou bien que les groupes d'applicabilité rigide et semi-intrinseque de nos V^2_3 coincident. On démontre aussi que les $V^2_3 (\omega^3_{12} \neq 0)$, possédant un G_4 sont totalement géodésiques et le tenseur de courbure extérieure, de même que le tenseur dérivé du tenseur de courbure intérieure sont nuls. Quant au tenseur de courbure intérieure lui-même, il a la seule composante $\lambda_{12,12} = K$, qui peut être une constante positive. négative ou nulle. Si nous écrivons l'équation de non holonomie de V^2_3 sous la forme

$$dx^3 + u\, dx^1 = 0,$$

où u est une fonction de la seule variable x^2, ce qui est toujours possible ([6], p. 39), on peut donner à la métrique de V^2_3 la forme

$$ds^2 = \left(\frac{du}{dx^2}\right)^2 (dx^1)^2 + (dx^2)^2,$$

la fonction u ayant les valeurs x^2, $\frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k}\, x^2$, $-\frac{1}{\sqrt{-k}} e^{\sqrt{-k}\, x^2}$, suivant que notre surface non holonome a la courbure nulle, positive ou negative. On voit que, dans l'espace des variables x^1, x^2, la métrique de V^2_3 est la metrique d'une surface a courbure constante.

28. Les plans non holonomes. — On sait que les courbes de l'espace ordinaire, ayant comme tangentes les droites d'un complexe linéaire, satisfont a une équation de Pfaff non complètement intégrable, laquelle, si l'on prend comme axe du complexe l'axe de z s'écrit

$$x\, dy - y\, dx - k\, dz = 0,$$

ou x, y, z sont des coordonnées cartésiennes orthogonales et la constante k est le paramètre du complexe. Cette équation, appelée aussi l'*équation du complexe*, définit dans l'espace euclidien un des plus simples espaces non holonomes V_3^2. En effet, si l'on prend des coordonnées cylindriques on peut prendre, comme formes de V_3^2, les suivantes

$$(34'') \left\{ \begin{aligned} & ds^1 = d\rho, \qquad ds^2 = \rho_1(k\rho\, d\theta + \rho\, dz), \qquad ds^3 = \rho_1(-\rho^2\, d\theta + k\, dz) \\ & \qquad\qquad \left(\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + k^2}}\right). \end{aligned} \right.$$

Les quantités ω_{bc}^a relatives à ces formes se calculent aisément et ont les valeurs

$$\omega_{12}^1 = \omega_{13}^1 = \omega_{23}^1 = \omega_{13}^2 = \omega_{23}^2 = \omega_{23}^3 = 0,$$
$$\omega_{12}^2 = -\frac{k^2\rho_1^2}{\rho}, \qquad \omega_{12}^3 = 2k\rho_1^2, \qquad \omega_{13}^3 = -\rho\rho_1^2.$$

Il en résulte en premier lieu que V_3^2 est totalement géodésique, car la seconde forme fondamentale est identiquement nulle

$$(\gamma_{11}^3 = \gamma_{22}^3 = \gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^3 = 0),$$

ce qui était évident *a priori*, parce que V_3^2 contient en chaque point les droites du complexe. Cette propriété est caractéristique, de façon que, par analogie avec les plans à deux dimensions qui constituent les surfaces totalement géodésiques de l'espace ordinaire, on peut appeler les V_3^2 définis par des complexes linéaires, plans non holonomes (G. Moisil [25], p. 17).

Comme les formes (34″) ne contiennent pas explicitement les variables θ et z, il en résulte que le V_3^2 admet comme groupe d'applicabilité le groupe abélien

$$(34''') \qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial \theta}, \qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial z},$$

qui se compose d'une rotation autour de l'axe du complexe, et d'une translation autour du même axe. Ce groupe constitue le groupe total d'applicabilité semi-intrinsèque ou rigide de V_3^2. En effet, d'une part un V_3^2 proprement dit ($\omega_{12}^3 \neq 0$) ne peut pas avoir un groupe intransitif à trois paramètres. D'autre part, notre V_3^2 ne peut pas avoir un groupe simplement transitif, car la courbure intérieure, qui a dans ce cas la seule composante

$$\lambda_{12,12} = \frac{3}{2} k^2 \rho_1^2,$$

doit, par les conditions d'applicabilité, rester invariante, ce qui arrive seulement si ρ est invariant.

En se servant des propriétés géométriques bien connues des complexes linéaires, on peut donner au parallélisme de notre V_3^2 des interprétations géométriques intéressantes (D. Hulubei [26]).

CHAPITRE V.

LES SYSTÈMES MECANIQUES NON HOLONOMES.

29. Systèmes à liaisons indépendantes du temps. — Considérons un système mécanique holonome S_n, à liaisons indépendantes du temps et soit

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} x'^i x'^j \qquad \left(x'^i = \frac{dx^i}{dt}\right)$$

la force vive du système, t étant le temps et a_{ij} des fonctions des paramètres lagrangiens $x^1, x^2, \ldots, x^n$ dont dépend la position du système S_n. On peut, comme il est bien connu (Ricci et Levi-Civita [5]), associer au systeme holonome S_n. l'espace de Riemann V_n, défini dans l'espace des variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$, par la métrique

$$ds^2 = 2\,T\,dt^2 = a_{ij}\,dx^i\,dx^j.$$

Si l'on introduit dans V_n un système de congruences orthogonales (λ), nous aurons les formules

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{l} \delta x^i = \lambda^i_a\,\delta s^a, \qquad \delta s^a = \lambda^a_i\,\delta x^i, \\ \dfrac{dx^i}{dt} = \lambda^i_a u^a, \qquad u^a = \dfrac{ds^a}{dt} = \lambda^a_i \dfrac{dx^i}{dt}, \\ T = \dfrac{1}{2}[(u^1)^2 + (u^2)^2 + \ldots + (u^n)^2], \end{array}\right.$$

en indiquant par δx^i les déplacements virtuels de S_n. Quant aux u^a, on les appelle *caractéristiques cinétiques de mouvement* (Volterra [3¹]).

Cela dit, si dans l'équation symbolique de la dynamique, pour le système S_n,

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} - P_i\right)\delta x^i = 0,$$

où P_i est la composante dans la direction x^i de la résultante des forces directement appliquées, on tient compte des formules (35) et des formules suivantes

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u^a}\lambda_i^a\right) = \frac{du^a}{dt}\lambda_i^a + u^b\frac{\partial \lambda_i^b}{\partial x^j}\lambda_c^j u^c,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial u^a}\frac{\partial u^a}{\partial x^i} = u^b\frac{\partial \lambda_j^b}{\partial x^i}\lambda_c^j u^c,$$

elle peut s'écrire

$$\left(\frac{du^a}{dt} - w_{ca}^b u^b u^c - P_a\right)\delta s^a = 0, \tag{36}$$

où P_a signifie la composante des forces dans la direction de la congruence (λ_a). Quant aux w_{ca}^b elles sont définies par les formules (4′).

Comme cette équation symbolique doit avoir lieu quels que soient les accroissements δs^a, il en résulte, en tenant compte aussi des formules $w_{ca}^b + w_{ba}^c = \gamma_{bc}^a + \gamma_{cb}^a$, qu'on peut écrire les équations de mouvement de S_n sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \lambda_a^i u^a, \\ \frac{du^a}{dt} &= \gamma_{bc}^a u^b u^c + P_a. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

On voit que le système (37) constitue un système différentiel du premier ordre, sous la forme normale, pour les n inconnues x^i et les n inconnues u^a, à déterminer en fonction de t.

Considérons maintenant le système mécanique non holonome S_n^m, qui s'obtient de S_n en imposant. aux variables (x), $n - m$ liaisons de la forme (7). On peut toujours considérer les premiers membres $ds^{h'}$ de ces liaisons. comme les différentielles des arcs de $n - m$ congruences orthogonales dans l'espace de Riemann V_n associé à S_n et pour cela il faut seulement combiner les (7), après les avoir multipliées par des facteurs convenables. On peut aussi associer a $ds^{h'}$ d'autres m formes ds^h de façon que les congruences (λ_h) et $(\lambda_{h'})$ soient des congruences orthogonales dans V_n. Par conséquent, à chaque système non holonome S_n^m on peut associer l'espace non holonome V_n^m, défini dans V_n par le système (7) d'équations de non holonomie de S_n^m, de façon que l'équation symbolique du système S_n^m s'écrit

$$\left(\frac{du^h}{dt} - \gamma_{kl}^h u^k u^l - P_h\right)\delta s^h = 0 \qquad (h \leqq m). \tag{37′}$$

puisque les accroissements $\delta s^{h'}$ et les caractéristiques $u^{h'}$ sont nulles en vertu des liaisons (7).

Comme cette équation symbolique de S_n^m doit avoir lieu quels que soient les δs^h, il en résulte que les équations de mouvement de S_n^m peuvent s'écrire sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \lambda_h^i u^h, \\ \frac{du^h}{dt} &= \gamma_{kl}^h u^k u^l + P_h. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Elles constituent un système différentiel du premier ordre, sous forme normale, pour les n inconnues x^i et les m caractéristiques cinétiques u^h (Vranceanu [11]; Horak [14]).

Si les forces dérivent d'un potentiel $U\left(P_i = \frac{\partial U}{\partial x^i}, \; P_a = \frac{\partial U}{\partial s^a}\right)$, le système S_n admet l'intégrale des forces vives. Pour trouver cette intégrale en partant des équations (37), il faut multiplier les dernières équations avec u^a et sommer, en tenant compte du fait que les coefficients de rotation de Ricci γ_{bc}^a sont gauches symétriques dans les indices a et b. On trouve l'intégrale

$$T = \frac{1}{2}[(u^1)^2 + (u^2)^2 + \ldots + (u^n)^2] = U + \text{const}.$$

Si l'on passe au système non holonome S_n^m. l'intégrale des forces vives reçoit évidemment la forme

$$\frac{1}{2}[(u^1)^2 + (u^2)^2 + \ldots + (u^m)^2] = U + \text{const}.$$

Supposons maintenant que le système S_n est sans forces ($P_i = 0$). En ce cas l'intégrale des forces vives nous dit que T est constant et l'on peut choisir convenablement l'unité de temps de façon à avoir $ds = dt$. Cela fait, on peut vérifier que les trajectoires sans forces de S_n sont en même temps les géodésiques ($6'''$) de l'espace V_n associé.

D'une manière analogue, on voit facilement que *les trajectoires sans forces du système non holonome* S_n^m *sont aussi les géodésiques auto-parallèles* (18) *de l'espace non holonome* V_n^m *associé au système* S_n^m.

30. Systèmes à caractéristiques indépendantes. — L'intégration des équations de mouvement de S_n (37) ou (38) de S_n^m (sans forces), se décompose en deux parties, si les coefficients des dernières de ces équations $\gamma_{bc}^a + \gamma_{cb}^a$ ou $\gamma_{kl}^h + \gamma_{lk}^h$, qui sont en général des fonctions des $x^1, x^2, \ldots, x^n$, ne dépendent pas de ces variables. Ces systèmes ont été étudiés par M. V. Volterra ([3'], 1898) et ont été appelés *à caractéristiques indépendantes*, puisque pour obtenir les valeurs en fonction du temps des caractéristiques cinétiques de S_n ou S_n^m, il suffit d'intégrer seulement les dernières équations (37) ou (38).

Ultérieurement, en tenant compte des valeurs en fonction de temps, trouvées pour ces caractéristiques, l'intégration des premières équations (37) ou (38) nous fournit les valeurs des paramètres x^i en fonction du temps.

Nous n'avons pas encore une caractérisation géométrique des systèmes à caractéristiques indépendantes, mais nous connaissons une classe importante de ces systèmes. Ce sont les systèmes mécaniques tels qu'on peut choisir un système de congruences (λ) ayant les coefficients de rotation constants.

Ces systèmes mécaniques sont caractérisés par la propriété que l'espace V_n ou V_n^m associé possède un groupe simplement transitif d'applicabilité (§ 26).

Nous avons aussi une autre classe de systèmes mécaniques, qui peut être considérée comme une généralisation de la classe des systèmes à caractéristiques indépendantes. Cette classe a un intérêt mécanique remarquable parce que beaucoup de systèmes mécaniques non holonomes usuels, entrent dans cette classe

Supposons que les forces de S_n^m dérivent d'un potentiel fonction de x^1 et que dans l'espace V_n^m associé à S_n^m, on puisse choisir un système de congruences (λ), tel que les paramètres et les moments des congruences fondamentales soient fonctions de la seule coordonnée de position x^1 et que, de plus, la direction de x^1 puisse être choisie comme la direction d'une congruence fondamentale, par exemple (λ_1). Cela dit, les premières équations (38) s'écrivent

$$(37'') \qquad \begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = au^1, \\ \dfrac{dx^i}{dt} = \lambda_h^i u^h \qquad (i = 2, \ldots, u), \end{cases}$$

a et λ_h^i étant des fonctions de x^1.

Dans ces formules λ_1^l peuvent être considérés nuls, car autrement par une transformation $x'^l = x^l + f^l(x^1)$, on peut les réduire à zéro. En ce cas, les $w_{kl}^h (h > 2)$ sont nuls si k. l sont tous les deux différents de l'unité et de même $w_{1h}^1 = 0$, de façon que les dernières $m - 1$ equations (38) assument la forme

$$\frac{du^h}{dt} = (\gamma_{k1}^h + \gamma_{1k}^h) u^k u^1 \qquad (h, k = 2, 3, \ldots, m). \tag{38'}$$

Si pendant un intervalle de temps x^1 n'est pas constant ($u^1 \neq 0$), on peut diviser ces équations par $\frac{dx^1}{dt}$ et l'on obtient le système

$$\frac{du^h}{dx^1} = \frac{1}{a} (\gamma_{k1}^h + \gamma_{1k}^h) u^k \qquad (h, k = 2, 3, \ldots, m). \tag{39}$$

On voit que par l'intégration de ce système différentiel linéaire et homogène, on peut avoir les valeurs des $m - 1$ caractéristiques cinétiques $u^h (h \geqq 2)$ en fonction de la variable x^1. Puis de l'intégrale des forces vives, qui peut s'écrire

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + (u^2)^2 + \ldots + (u^m)^2 = 2\,U(x^1) + \text{const.},$$

on tire, par une seule quadrature, la valeur de x^1 en fonction du temps. Enfin, en introduisant dans les dernières équations (37″) les valeurs en fonction de t de x^1 et des u^h, on trouve les valeurs des variables $x^2, \ldots, x^n$ par $n - 1$ quadratures.

Il en résulte que l'intégration des équations de mouvement de notre systeme S_n^m se réduit a l'intégration du système linéaire (39) et a n quadratures.

Nous avons laissé de côté le cas ou x^1 est constant, qui correspond à la solution stationnaire de S_n^m

$$x^1 = c^1 \qquad u^h = c^h \qquad (h \geqq 2),$$

dont on peut étudier la stabilité complète (non seulement en première approximation) à l'aide de l'intégrale des forces vives (Vranceanu [8¹]).

31. Intégrales premières linéaires. — On peut se demander maintenant. dans quelles conditions les équations de mouvement (38) de S_n^m

admettent l'intégrale première

$$f(x^1, x^2, \ldots, x^n; u^1, u^2, \ldots, u^m) = \text{const.}$$

Comme la dérivée par rapport au temps de cette intégrale, doit-être nulle, en vertu des (38), on trouve que la fonction f doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$(39') \qquad \frac{\partial f}{\partial s^h} u^h + \frac{\partial f}{\partial u^h} \gamma^h_{kl} u^k u^l + \frac{\partial f}{\partial u^h} \mathrm{P}_h = 0.$$

Si la fonction f est un polynome de degré p dans les caractéristiques cinétiques u^h, l'équation (39′) se décompose, en égalant à zéro les ensembles des termes du degré $p+1$, des termes du degré p, etc., dans $p+2$ équations. En particulier, l'ensemble des termes du degré $p+1$ dans les u^h, égalé à zéro, nous donne l'équation

$$\frac{\partial f^p}{\partial s^h} u^h + \frac{\partial f^p}{\partial u^h} \gamma^h_{kl} u^k u^l = 0,$$

où l'on indique par f^p l'ensemble des termes du degré p de l'intégrale première $f = \text{const.}$ Cette dernière équation nous montre que $f^p = \text{const.}$ doit être intégrale première des équations des mouvements sans forces de S^m_n, ou bien des géodésiques auto-parallèles de l'espace non holonome V^m_n associé à S^m_n. On voit ainsi l'intérêt que présente la recherche des intégrales premières polynomes homogènes dans les caractéristiques u^h des équations de mouvement sans forces de S^m_n. Nous considérons ici seulement le cas où l'intégrale est linéaire. Une telle intégrale, par une transformation convenable des congruences fondamentales, peut s'écrire

$$(39'') \qquad a u^m = \text{const.},$$

a étant une fonction des variables $x^1, \ldots, x^n$. Pour que (39″) soit une intégrale première des équations (38), il faut en premier lieu que l'équation $u^m = 0$, obtenue de (39″), en donnant à la constante la valeur nulle, soit une équation invariante des (38), et pour cela il faut avoir les conditions

$$\gamma^m_{kl} + \gamma^m_{lk} = 0 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Elles expriment que l'espace non holonome V^{m-1}_n $(u^m = 0)$, plongé dans V^m_n, est totalement géodésique dans V^m_n.

Si cette condition d'invariance est satisfaite et si la quantité u est constante, pour que $u^m = \text{const.}$ soit une intégrale première des géodésiques de V_n^m, il faut que les coefficients de rotations γ_{hm}^m soient nuls ou, c'est ce qui est le même, il faut que la congruence (λ_m) soit une congruence géodésique dans V_n^m. Si a n'est pas constante, nous avons les conditions

$$\frac{\partial \log a}{\partial s^h} = -\gamma_{hm}^m,$$

et c'est alors la congruence $\bar{\lambda}_m$ $(d\bar{s}^m = a\, ds^m)$, qui est une congruence géodésique $(\bar{\gamma}_{hm}^m = 0)$. On peut remarquer que cette congruence $\bar{\lambda}_m$ définit un des espaces V_n^1, complémentaire à l'espace V_n^{m-1} $(u^m = 0)$, défini semi-intrinsèquement dans V_n^m.

Supposons maintenant que nous ayons un certain nombre $m-p$ d'intégrales premieres linéaires et homogènes de la forme

$$(40) \qquad a_h^\alpha u^h = c^\alpha \qquad (\alpha = p+1, \ldots, m),$$

il est évident que l'on peut s'arranger de façon à faire intervenir dans ces équations seulement les cosinus $u^{p+1}, \ldots, u^m$. Il en résulte alors que les équations $u^{p+1} = \ldots = u^m = 0$ sont des équations invariantes et par conséquent que l'espace non holonome V_n^p défini dans V_n^m par ces équations est totalement géodésique dans Vn; c'est-à-dire que nous avons

$$\gamma_{kl}^\alpha + \gamma_{lk}^\alpha = 0 \qquad (\alpha = p+1, \ldots, m, k, l \leqq p).$$

Évidemment, ces conditions d'invariance ne sont pas suffisantes pour l'existence des intégrales premières (40). En particulier, si l'on veut que les $u^\alpha = c^\alpha (\alpha = p+1, \ldots, m)$ soient des intégrales premières, il faut avoir les conditions

$$\gamma_{h\beta}^\alpha + \gamma_{\beta h}^\alpha = 0 \qquad (\beta > p).$$

32. Les équations des trajectoires de S_n^m. — On sait que, d'après un résultat de Painlevé ([7], vol. II[1], p. 414), la totalité des trajectoires d'un système mécanique holonome à liaisons indépendantes du temps, dépend de $2n-1$ constantes arbitraires au lieu de $2n$, et, si le système est sans forces, seulement de $2n-2$ constantes arbitraires. Nous allons voir que ce résultat peut être étendu aussi aux systèmes non holonomes. En effet, supposons que, pendant le mouvement du système, une des variables, par exemple x^1, ne soit pas constante ($dx^1 \neq 0$) et qu'une des caractéristiques, que l'on peut, en changeant convenablement les indices, supposer être u^1, est différente de zéro. En ce cas, si l'on prend comme nouvelle variable indépendante x^1 au lieu de t, et l'on pose

$$u^h = \frac{ds^h}{dt} = \frac{ds^h}{ds^1}\frac{ds^1}{dt} = v^h u^1 \qquad (h = 2, \ldots, m),$$

on peut considérer $u^1, v^2, \ldots, v^m$ comme des nouvelles caractéristiques et les premières équations (38) s'écrivent

$$(40') \qquad \begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = (\lambda_1^1 + \lambda_h^1 v^h) u^1, \\[2mm] \dfrac{dx^\iota}{dx^1} = \dfrac{\lambda_1^\iota + \lambda_h^\iota v^h}{\lambda_1^1 + \lambda_h^1 v^h} \qquad (\iota = 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Si l'on tient compte maintenant du fait que nous avons

$$\frac{du^h}{dt} = \frac{dv^h}{dt} u^1 + v^h \frac{du^1}{dt} = \frac{dv^h}{dx^1}(u^1)^2(\lambda_1^1 + \lambda_h^1 v^h) + v^h \frac{du^1}{dt},$$

les dernières équations (38) reçoivent la forme

$$(40'') \begin{cases} \dfrac{du^1}{dx^1} = \dfrac{(\gamma_{k1}^1 v^k + \gamma_{kl}^1 v^k v^l)(u^1)^2 + P_1}{(\lambda_1^1 + \lambda_h^1 v^h) u^1}, \\[2mm] \dfrac{dv^h}{dx^1} = \dfrac{[\gamma_{11}^h + (\gamma_{1k}^h + \gamma_{k1}^h) v^k + \gamma_{kl}^h v^k v^l](u^1)^2 + P_h - v^h(\gamma_{k1}^1 v^k + \gamma_{kl}^1 v^k v^l)(u^1)^2 - v^h P_1}{(\lambda_1^1 + \lambda_h^1 v^h)(u^1)^2}. \end{cases}$$

En tenant compte du fait que le temps n'intervient pas explicitement dans nos équations, on voit que les équations (40′), sauf la premiere, et les équations (40″) constituent un systeme différentiel sous la forme normale de $n + m - 1$ équations du premier ordre pour les $n + m - 1$ inconnues $x^2, \ldots, x^n, u^1, v^2, \ldots, v^m$, et la variable indépendante x^1. Il en résulte que ce système nous fournit les valeurs des variables $x^2, \ldots, x^n$ en fonction de la variable x^1 et de $n + m - 1$ constantes arbitraires. Il constitue le systeme différentiel des trajectoires de S_n^m.

Si le système mécanique est sans forces, la caractéristique u^1 ne figure pas plus dans les dernieres $m - 1$ équations (40″), de façon que l'on peut considérer, dans ce cas, comme équations des trajectoires de S_n^m, le système de $n + m - 2$ équations du premier ordre, formé par les $n - 1$ dernières équations (40′) et les m 1 dernières équations ($40''$). Il en résulte que, si le systcme est sans forces, les trajectoires dépendent seulement de $n+m-2$ constantes arbitraires.

On peut remarquer que la methode suivie pour arriver aux équations des trajectoires peut être simplifiée si le systeme est holonome. En effet, dans ce cas, on peut considerer la congruence (λ^1) dans la direction de la variable $x^1 (dx^1 = \lambda_1^1 ds^1)$, ce qui porte comme conséquence le fait que les caractéristiques v^h n'interviennent pas plus aux dénominateurs des équations ($40'$), ($40''$). Dans le cas non holonome, cette simplification n'est possible que si le systeme $ds^h = 0$ admet une combinaison intégrable qu'on peut alors prendre comme dx^1. Si cela arrive et si le systeme est sans forces, les seconds membres des dernieres $m-1$ équations ($40''$) sont des polynomes du troisième ordre dans les caractéristiques $v^2, \ldots, v^m$. Pour qu'ils soient des polynomes du second ordre seulement, il faut que $\gamma_{kl}^1 + \gamma_{lk}^1 = 0$, ou bien que la combinaison intégrable ($u^1 = 0$) soit une équation invariante des équations de mouvement de S_n^m.

33. Stabilité trigonométrique de l'équilibre. — Supposons que notre système mécanique possède un point d'équilibre choisi comme origine de coordonnées x^i. En ce cas, les équations de mouvement (38) du système doivent posséder la solution $x^i = u^h = 0$, de façon qu'en développant en séries. les seconds membres des équations (38) autour du point $x^i = u^h = 0$ les termes constants de ces séries sont nuls. Pour simplifier les termes du premier ordre dans les premières équations (38), on peut supposer que les premières m coordonnées x^i sont choisies tangentes à l'origine aux m congruences fondamentales de façon que, abstraction faite des termes supérieurs du premier ordre, les équations (38) s'écrivent

$$(41) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx^\alpha}{dt} = u^\alpha, \\ \dfrac{dx^{\alpha'}}{dt} = 0, \\ \dfrac{du^\alpha}{dt} = a_\beta^\alpha x^\beta + a_{\alpha'}^\alpha x^{\alpha'} \end{cases}$$

On peut supposer encore, dans ces équations, que les coefficients $a_\beta^\alpha = 0\ (\beta > \alpha)$ sont nuls, car autrement on peut les réduire à zéro par une transformation orthogonale à coefficients constants des congruences fondamentales et des coordonnées x^α. Cela dit, on voit que l'équation caractéristique de notre point d'équilibre possede toujours $n-m$ racines nulles et les $2m$ racines $\pm\sqrt{a_\alpha^\alpha}$. On voit que le point d'équilibre est stable dans la première approximation, si les racines non nulles sont toutes imaginaires pures; c'est-à-dire, dans notre cas, si toutes les quantités a_α^α sont négatives ou nulles. Si cela arrive, les équations (41) s'integrent à l'aide des polynomes linéaires du sinus et cosinus de $\sqrt{a_\alpha^\alpha}\,t$, ou, si l'on veut, à l'aide de séries trigonométriques. Poincaré a montré que si le systeme mécanique est holonome et conservatif et le point d'équilibre est stable en premiere approximation ($a_\alpha^\alpha = -r_\alpha^2$), on peut satisfaire, au moins formellement, aux équations (37) par des séries trigonométriques si aucune des racines de $\pm\sqrt{-1}\,r_\alpha$ de l'équation caractéristique n'est pas nulle et si les r_α ne satisfont pas a aucune relation de commensurabilité $p_1 r_1 + \ldots + p_m r_m = 0$, les p étant des nombres entiers.

Cette propriété a été prise par M. G. Birkhoff ([12'], p. 106, 113) comme définition de la stabilité trigonométrique de l'équilibre en montrant que, dans un certain sens, *cette propriété est caractéristique des systémes holonomes conservatifs* (*hamiltoniens*).

Il s'agit de faire voir que cette propriété est commune à tous les systèmes mécaniques à liaisons indépendantes du temps (Vranceanu [13]). En effet, si l'on suppose qu'aucune des r_α n'est pas nulle et qu'elles sont différentes entre elles, on peut, par une transformation de la forme

$$\begin{aligned} \overline{x}^\alpha &= x^\alpha + c_\beta^\alpha x^\beta + c_{\beta'}^\alpha x^{\beta'} \\ \overline{u}^\alpha &= u^\alpha + c_\beta^\alpha u^\beta \end{aligned} \qquad (\beta < \alpha),$$

annuler tous les coefficients a_β^α ($\beta \neq \alpha$), $a_{\beta'}^\alpha$, et il est à remarquer que ces transformations conservent la propriété, fondamentale pour nous, que les seconds membres des n premières équations (38) sont des fonctions impaires des caractéristiques u^α et les seconds membres des m dernières équations (38) sont des fonctions paires des mêmes variables u^α.

Cela dit, considérons, au lieu des variables x^α, u^α, les variables imaginaires conjuguées $\overline{x}^\alpha$, $\overline{u}^\alpha$:

$$(41') \qquad \left\{ \begin{aligned} x^\alpha &= \overline{x}^\alpha + \overline{u}^\alpha, \\ u^\alpha &= \sqrt{-1}\,r_\alpha(\overline{x}^\alpha - \overline{u}^\alpha) \qquad (a \text{ fixe}). \end{aligned} \right.$$

Les dérivées $\frac{dx^i}{dt}$ exprimées à l'aide des variables $\overline{x}^\alpha$, $\overline{u}^\alpha$, $x^{\alpha'}$ auront seulement des coefficients imaginaires purs, parce qu'elles sont fonctions impaires des u^α, et ce sont seulement les dernières (41′) qui introduisent des imaginaires. Il en résulte que les dérivées $\frac{dx^{\alpha'}}{dt}$ ne peuvent pas avoir des termes de la forme

$$(41'') \qquad \mathrm{A}(\overline{x}^1\overline{u}^1)^{\alpha_1}\dots(\overline{x}^m\overline{u}^m)^{\alpha_m}(x^{m+1})^{\alpha_{m+1}}\dots(x^n)^{\alpha_n}.$$

En effet, d'une part A doit être imaginaire pur, et d'autre part, si l'on change $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, il ne doit pas changer, car $\frac{dx^{\alpha'}}{dt}$ est réelle, c'est-à-dire $\mathrm{A} = 0$.

Comme les dérivées $\frac{du^\alpha}{dt}$ sont des fonctions paires des u^α, elles auront dans les variables $\overline{x}^\alpha$, $\overline{u}^\alpha$, $x^{\alpha'}$ toutes des coefficients réels. Par conséquent, les variables $\overline{x}^\alpha$, $\overline{u}^\alpha$, $x^{\alpha'}$ satisferont au système différentiel

$$(42) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\overline{x}^\alpha}{dt} &= \sqrt{-1}\,r_\alpha\overline{x}^\alpha+\dots,\\ \frac{d\overline{u}^\alpha}{dt} &= -\sqrt{-1}\,r_\alpha\overline{u}^\alpha+\dots,\\ \frac{dx^\alpha}{dt} &= 0+\dots,\end{aligned}\right.$$

les termes non écrits étant au moins du second ordre par rapport à ces variables $\overline{x}^\alpha$, $\overline{u}^\alpha$, $x^{\alpha'}$, à coefficients imaginaires purs. Il est tout à fait évident que ce système se change en un systeme de même force par la transformation

$$(42') \qquad \overline{x}^\alpha = y^\alpha + \mathrm{F}^\alpha, \qquad \overline{u}^\alpha = v^\alpha + \mathrm{G}^\alpha, \qquad x^{\alpha'} = y^{\alpha'} + \mathrm{H}^{\alpha'},$$

les F^α, G^α, $\mathrm{H}^{\alpha'}$ étant des polynomes à coefficients réels des variables y^α, v^α, $y^{\alpha'}$, au moins du second ordre par rapport à ces variables, F^α et G^α étant conjuguées, c'est-à-dire se changeant entre elles si on change les y^α avec v^α.

Si F^α, G^α, $\mathrm{H}^{\alpha'}$ sont des polynomes homogènes du second ordre ∂ les termes d'ordre 2, qu'ils introduisent dans les premières équations (42), sont donnés par les formules

$$\sqrt{-1}\left(r_\alpha\mathrm{F}^\alpha - \frac{\partial\mathrm{F}^\alpha}{\partial y^\beta}r^\beta y^\beta + \frac{\partial\mathrm{F}^\alpha}{\partial v^\beta}r^\beta y^\beta\right) \qquad (\alpha \text{ fixe}).$$

Or on voit sans difficulté que, si les r_α ne sont pas commensurables entre elles, les seuls termes dans ces expressions, qui sont nuls quel que soit F^α, sont de la forme $Ay^\alpha\varphi$, φ étant une fonction du couple $y^\alpha v^\alpha$ et des y^α.

Pour les deuxiemes équations (42), y^α se change en v^α, et pour les troisiemes ce sont les termes (41″), qui ne peuvent pas être introduits par les transformations (42′).

Il en résulte, en tenant compte du fait que les $\frac{dx^\alpha}{dt}$ n'ont pas des termes de la forme (41″), qu'en faisant des transformations (42′), ou F^α, G^α, H^α sont des polynomes homogenes du second ordre, puis du troisième ordre, etc, on peut se servir des coefficients de ces transformations pour donner à nos équations la forme

$$(43)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy^\alpha}{dt} = M_\alpha y^\alpha, \\ \dfrac{dv^\alpha}{dt} = N_\alpha v^\alpha, \\ \dfrac{dy^{\alpha'}}{dt} = 0, \end{cases}$$

M_α et N_α étant fonctions des couples $y^\alpha v^\alpha$ et des $x^{\alpha'}$.

Évidemment, on ne sait rien sur la convergence des séries obtenues en faisant le produit de toutes les transformations (42′) ainsi considérées. Comme les fonctions M_α et N_α sont en même temps conjuguées et a coefficients imaginaires purs, on doit avoir $M_\alpha = - N_\alpha$, de façon que les équations (43) ont les intégrales premieres $y^\alpha v^\alpha = y^{\alpha'} =$ const. Par conséquent, les M_α et $N_\alpha = \quad M_\alpha$ deviennent elles-mêmes des constantes et les équations s'intègrent par des expressions trigonométriques de la forme

$$(44)\qquad y^\alpha = y_0^\alpha\, e^{M_\alpha^{(0)}(t-t_0)} \qquad v^\alpha = v_0^\alpha\, e^{-M_\alpha(0)(t-t_0)}, \qquad y^\alpha = y_0^{\alpha'}.$$

Nous n'avons qu'à introduire ces valeurs dans les séries qui expriment les x^α, u^α, x^α en fonctions des y^α, v^α, y^α pour avoir les valeurs des x^α, u^α, x^α développées formellement en séries trigonométriques.

34. Systèmes à liaisons dépendant du temps. — Considérons un système holonome S_n à liaisons dépendant du temps et soit

$$(45)\qquad T = T_2 + T_1 + T_0,$$

la force vive du système, où T_2 est une forme quadratique définie et positive dans les dérivées $\frac{dx^i}{dt}$, T_1 une forme linéaire et T_0 indépendante de ces dérivées

$$T_2 = \frac{1}{2} a_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}, \qquad T_1 = \alpha_i \frac{dx^i}{dt}, \qquad T_0 = \frac{1}{2} \alpha_0.$$

les coefficients a_{ij}, α_i, α_0 étant en général des fonctions des variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$ et de t. La forme T_2 étant définie et positive on peut associer au système S_n, la famille d'espaces de Riemann V_n, ayant comme métrique

$$(46) \qquad ds^2 = 2 T_2 \, dt^2 = a_{ij} \, dx^i \, dx^j.$$

Par le fait qu'on obtient les différents espaces V_n de cette famille, en faisant prendre au temps t des valeurs constantes, on peut l'appeler famille des V_n virtuelles associée a S_n. Évidemment, on peut réduire la métrique (46), à l'aide de n formes $ds^a = \lambda_i^a \, dx^i$, à une somme de n carrés et l'on peut définir un système non holonome S_n^m, dans S_n, par des équations de non holonomie de la forme

$$(47) \qquad ds^{h'} = \varepsilon^{h'} \, dt \qquad (h' = m+1 \; .. \; n).$$

Si l'on prend comme caractéristiques de mouvement de S_n^m, les quantités $u^h = \frac{ds^h}{dt}$, on peut arriver aux équations de mouvement S_n^m, par une methode analogue à celle suivie dans le cas des liaisons indépendantes du temps. Il est clair que ces équations seront des invariants aux transformations de variables (3).

Nous avons aussi des equations de mouvement de S_n^m qui sont invariantes aux transformations (3), qui contiennent le temps comme parametre (Wundheiler [31]). En effet, considérons la famille des V_n virtuelles, plongée dans l'espace de Riemann V_{n+1}, dont la métrique est fournie par la force vive entiere de S_n

$$d\sigma^2 = 2 T \, dt^2 = a_{ij} \, dx^i \, dx^j + 2 \alpha_i \, dx^i \, dt + \alpha_0 \, dt^2.$$

Cette métrique peut se réduire à la forme

$$(48) \qquad d\sigma^2 = (d\sigma^1)^2 + (d\sigma^2)^2 + \ldots + (d\sigma^n)^2 + \lambda^2 \, dt^2.$$

si l'on pose

$$d\sigma^a = ds^a + \alpha^a \, dt \qquad (\alpha^a = \lambda_i^a \alpha^i = \lambda_a^i \alpha_i),$$
$$\lambda^2 = \alpha^0 - \alpha^2,$$

où α est la longueur du vecteur α_i dans la métrique (46). On voit que la métrique (48) de l'espace V_{n+1}, est elle-même définie et positive si la quantité $\lambda^2 = \alpha_0 - \alpha^2$ est positive. Si λ^2 n'est pas positive, on peut lui ajouter une constante convenable, car cela revient à ajouter une constante à la force vive du système, ce qui, évidemment, ne change pas les équations du mouvement du système. D'ailleurs, les équations de Lagrange nous montrent, que les équations de mouvement de S_n, ne changent pas si à la force vive on ajoute la dérivée $\frac{d\varphi}{dt}$, d'une fonction quelconque des variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$ et de t.

Il en résulte, qu'on peut toujours associer au système S_n un espace de Riemann V_{n+1}, à métrique (48) définie et positive, déterminée abstraction faite d'un terme de la forme $d\varphi\, dt$ et dans lequel la famille des V_n virtuelles est définie par l'équation de Pfaff complètement intégrable $d\sigma^{n+1} = \lambda\, dt = 0$. On voit que cette famille constitue dans V_{n+1} un espace non holonome V^n_{n+1}, ayant comme arcs sur les congruences fondamentales $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$ et comme congruence de non holonomie σ^{n+1} (Vranceanu [34]). Évidemment, les caractéristiques cinétiques $v^a = \frac{d\sigma^a}{dt}$ sont des invariants aux transformations de variables (3), qui contiennent aussi le temps comme paramètre. Pour arriver aux équations de mouvement du système mécanique S_n, dans ces caractéristiques, on doit poser dans l'équation symbolique (36) de l'espace de Riemann V_{n+1}, associé au système S_n, $\sigma^{n+1} = 0$ et $v^{n+1} = \lambda$. Comme nous avons aussi

$$\lambda\, \omega^{n+1}_{n+1\,a} = \frac{\partial\lambda}{\partial a}, \qquad \omega^{n+1}_{ca} = 0,$$

on obtient ainsi les équations

$$(49)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \overset{i}{\lambda}_a v^a - \alpha^i, \\ \frac{dv^a}{dt} &= \omega^b_{ca} v^b v^c + \omega^b_{n+1\,a} v^h \lambda + \lambda \frac{\partial\lambda}{\partial\sigma^a} + P_a, \end{aligned} \right.$$

où les quantités ω sont relatives aux $n+1$ formes $d\sigma^1, \ldots, d\sigma^n$, $d\sigma^{n+1} = \lambda\, dt$, des $n+1$ variables $x^1, \ldots, x^n, t$. Pour mettre en évidence le caractère invariantif de ces équations, au groupe rigide de l'espace non holonome virtuel V^n_{n+1}, associé à S_n, on peut remarquer qu'au lieu de ω^b_{ca}, on peut mettre γ^a_{bc}, et que la différentielle covariante du vecteur intérieur v^a de V^n_{n+1}, formée à l'aide de la connexion rigide (28), s'écrit

$$Dv^a = dv^a - \gamma^a_{bc} v^b \sigma^c - \gamma^a_{b\,n+1} v^b \lambda\, dt,$$

de façon qu'on peut donner aux dernières équations (49) la forme

$$\frac{Dv^a}{dt} + \gamma^{n+1}_{ba} v^b \lambda = \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma^a} + P_a. \tag{49'}$$

Comme $2\gamma^{n+1}_{ba} = 2\gamma^{n+1}_{ab}$ sont les composantes du tenseur de la seconde forme fondamentale de V^n_{n+1}, il en résulte l'invariance demandée. On peut ainsi prendre comme équations de mouvement de S_n, les premières équations (49) et les équations (49') {Wundheiler [**31**], p. 128, formules (53)}.

Si l'on considère maintenant le système mécanique non holonome S^m_n, ses équations de non holonomie peuvent s'écrire

$$v^{h'} = \frac{d\sigma^{h'}}{dt} = \alpha^{h'} + e^{h'}.$$

En introduisant ces valeurs des $v^{h'}$ dans les premières $n+m$ équations (49) et en tenant compte que dans l'espace non holonome V^m_{n+1} défini dans l'espace virtuel V^n_{n+1} par les équations $d\sigma^{h'} = 0$, la différentielle du vecteur intérieur v^h, peut s'écrire

$$\overline{D}v^h = dv^h - \gamma^h_{kl} v^l\, d\sigma^l - \gamma^h_{l'l} v^k\, d\sigma^{l'} \qquad (l' = m+1, \ldots, n+1,\ d\sigma^{n+1} = \lambda\, dt),$$

on peut donner aux équations de mouvement de S^m_n la forme

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx^i}{dt} = \lambda^i_h v^h + q^i \qquad (q^i = \lambda^i_{l'} v^{h'} - \alpha^i), \\ &\frac{\overline{D}v^h}{dt} + \gamma^{\alpha'}_{ih} v^k v^{\alpha'} = w^{\alpha'}_{\beta' h} v^{\alpha'} v^{\beta'} + P_h \\ &(\alpha', \beta' = m+1, \ldots, n, n+1,\ v^{n+1} = \lambda). \end{aligned}\right. \tag{50}$$

Ces équations ont évidemment un caractère invariantif par rapport aux transformations du groupe rigide de l'espace V^m_{n+1} ($d\sigma^{h'} = 0$), plongé dans V^n_{n+1} ($\lambda\, dt = 0$).

Nous savons que parmi les systèmes holonomes à liaisons dépendant du temps, il en existe une classe importante constituée par les systèmes, dont la force vive ne dépend pas explicitement du temps Évidemment, cette propriété dépend du système des variables x^i,

$x^2, \ldots, x^n$ choisies pour représenter la position du système mécanique. La condition nécessaire et suffisante pour que par une transformation de ces variables, contenant le temps comme paramètre, on puisse arriver a une force vive indépendante du temps est que l'espace de Riemann V_{n+1}, associé à S_n, possède un groupe a un paramètre de transformations en lui-même déterminé par une transformation infinitésimale de la forme

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial t} + \beta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{50''}$$

β_i étant des fonctions des $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

En effet, on sait que par une transformation de variables x^1, $x^2, \ldots, x^n$ contenant le temps, on peut réduire les β_i à zéro et alors la métrique de V_{n+1} ne contient pas le temps explicitement et par conséquent il en est de même de la force vive de S_n. Naturellement, on peut dans ce calcul se servir du fait que la force vive de S_n peut être modifiée en ajoutant la dérivée par rapport au temps d'une certaine fonction φ des $x^1, \ldots, x^n, t$. De même on peut se servir du fait que le temps lui-même peut être changé par la formule $d\bar{t} = \psi(t)\, dt$; mais dans ce cas on doit prendre comme nouvelle force vive l'expression

$$2T = \psi a_{ij} x'^i x'^j + 2\alpha_i x'^i + \frac{1}{\psi}\alpha_0.$$

Ces résulats peuvent être résumés par le théorème : *le système mécanique* S_n, *possède un système de coordonnées et un temps* t, *dans lesquelles la force vive ne dépendent pas explicitement de ce temps*, *si la métrique*

$$ds^2 = 2\psi\left(T + \frac{d\varphi}{dt}\right) dt^2$$

admet la transformation infinitésimale

$$Xf = \frac{1}{\psi} \frac{\partial f}{\partial t} + \beta^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

en disposant convenablement de la fonction φ des $x^1, x^2 \ldots, x^n, t$ et de la fonction ψ de t.

Ces considérations peuvent être étendues aux systèmes non holonomes, dans le sens que la force vive du système et les équations de non holonomie peuvent être réduites a ne pas contenir le temps explicitement, si l'espace non holonome V^m_{n+1}, associé, considéré au point de vue rigide, possède la transformation infinitésimale (50′).

Si la force vive du système S_n, ne contient pas le temps explicitement et si T_1 est la dérivée par rapport au temps d'une certaine fonction de $x^1, \ldots, x^n$, alors le système peut être considéré comme à liaisons indépendantes du temps, ayant comme force vive T_2 et comme potentiel des forces T_0.

33. **Intégrale des forces vives généralisée.** — On sait que si la force vive du système holonome S_n, ne contient pas le temps et les forces dérivent d'un potentiel U, qui ne contient pas aussi le temps, il en existe l'intégrale des forces vives généralisée

$$T_2 - T_0 - U = \text{const.} \tag{52}$$

On appelle termes girostatiques des équations de mouvement de S_n, les termes provenant de la partie linéaire T_1 de la force vive, parce que ces termes ne portent aucune contribution à l'intégrale des forces vives. Pour mettre en évidence, dans les équations de mouvement ces termes girostatiques, il est convenable de considérer comme caractéristiques cinétiques les u^a, au lieu des v^a et en ce cas les équations de mouvement s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \lambda^i_a u^a, \\ \frac{du^a}{dt} &= \omega^b_{ca} u^b u^c + g_{ab} v^b + \frac{\partial T_0}{\partial s^a} + P_a, \end{aligned}\right. \tag{53}$$

en indiquant par g_{ab}, les quantités

$$g_{ab} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x^j} - \frac{\partial x_j}{\partial x^i}\right)\lambda^i_a \lambda^j_b.$$

Ces quantités sont précisément les termes girostatiques, car si l'on multiplie les dernieres équations (53) par u^a et l'on somme pour arriver à l'intégrale (52), la partie qui contient ces termes s'annulent.

L'intégrale des forces vives (52) continue d'exister aussi pour le systeme non holonome S^m_n, dont les équations de non holonomie (47) ne contiennent pas le temps explicitement et $e^{h'}$ sont nuls. Si $e^{h'}$ ne sont pas nuls, cette intégrale peut exister seulement si un certain nombre de conditions sont satisfaites.

Dans le cas général d'un système dont la force vive dépend du temps, on peut se demander s'il en existe une intégrale première, qui diffère de l'intégrale (52) au plus par un polynome du premier degré par rapport aux caractéristiques. En effet, si l'on multiplie les équations (49') par v^a et l'on somme, on trouve, en supposant que les forces dérivent d'un potentiel

$$(54) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}v^2 + \gamma_{ba}^{n+1} v^b v^a \lambda = \dfrac{1}{2}\dfrac{d(\lambda^2+2U)}{dt} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial(\lambda^2+2U)}{\partial\sigma^{n+1}}\lambda \\ [v^2 = (v^1)^2 + \ldots + (v^n)^2]. \end{cases}$$

Or, s'il existe un polynome du premier degré V satisfaisant à la condition

$$\frac{d}{dt}V = \gamma_{ba}^{n+1} v^b v^a \lambda + \frac{1}{2}\frac{\partial(\lambda^2+2U)}{\partial t},$$

le système S_n possède l'intégrale première

$$(55) \quad \frac{1}{2}v^2 + V - \frac{1}{2}\lambda^2 - U = T_2 - T_0 + T_1 + V + \alpha^2 - U = \text{const.}$$

En particulier une telle intégrale existe si l'espace virtuel V_{n+1}^n est totalement géodésique ($\gamma_{ba}^{n+1} = 0$) et si $\dfrac{\partial(\lambda^2+2U)}{\partial t} = 0$. En ce cas $V = 0$ et l'intégrale (55) diffèrent de l'intégrale (52) par un polynome du premier degré par rapport aux caractéristiques $T_1 + \alpha^2$. Ces considérations peuvent aussi s'étendre aux systèmes non holonomes ([31], p. 132-134).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. A. Voss. — Uber der Differentialgleichungen der Mecanik (*Mathematische Annalen*, t. 25, 1885, p. 258).
2. L'Abbé Issaly. — Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 17, 1888-1889, p. 85).
3. J. Hadamard. — Sur les mouvements de roulement (*Mém. de la Soc. des Sciences de Bordeaux*, 4e série, t. 5, 1895).

3[1] V. Volterra. — Sopra une classe di equazioni dinamiche; Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche (*Atti della R. Ac. Scienze di Torino*, t. 32, 1898, p. 451, 542).

4. P. APPELL. — Les mouvements de roulement en Dynamique (*Scientia*) (Gauthier-Villars, 1899. Dans ce livre est aussi reproduit le Mémoire 3).

5. G. RICCI et T. LEVI-CIVITA. — Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications (*Math. Ann.*, t. 54, 1901, p. 125).

5[1] S. CARPANESE. — Parallelismo e curvatura in una varieta qualunque (*Annali di Matematica*, t. 38, 1919, p. 147).

6. E. GOURSAT. — Leçons sur le problème de Pfaff (Paris, Hermann, 1922).

6[1] H. WEYL. — Raum, *Zeit*, *Materie*, (Berlin, Springer, 1922).

7. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI. — Lezioni di Meccanica Razionale (Bologna, Zanichelli, 1922).

7[1] T. LEVI-CIVITA. — Lezioni di calcolo differenziale assoluto, raccolte da E. Persico (Roma, Stock, 1925).

8. E. CARTAN. — La Géométrie des espaces de Riemann (*Mémorial des Sciences Mathématiques*, 1926).

8[1] G. VRANCEANU. — Sopra una classe di sistemi anolonomi (*Rend. della R. Acc. dei Lincei*, 6e série, t. 4, 1er sem., 1926, p. 548).

9. G. VRANCEANU. — Sur les espaces non holonomes; Sur le calcul différentiel absolu pour les variétés non holonomes (*Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 852, 1083).

10. R. LAGARNAGE. — Calcul différentiel absolu (*Mém. des Soc. Math.*).

11. G. VRANCEANU. — Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo (*Rend. Ac. Lincei*, 6e série, t. 4, 1926, p. 508).

12. L.-P. EISENHART. — Non riemanian Geometry, New-York (*American Math. Society*, 1927).

12[1] G. D. BIRKHOFF. — Dynamical Systems, New-York (*American Math. Soc.*, 1927).

12[2] Z. HORAK. — Sur une généralisation de la notion de variété (*Publ. Fac. Sc. univ. Masaryk*, Brno, no 86, 1927, p. 1-20).

13. O. VEBLEN. — Invariants of quadratic differential forms (London, 1927).

13[1] G. VRANCEANU. — Sur la stabilité trigonométrique de l'équilibre dans la Dynamique (*Rend. Lincei*, 6e série, t. 6, 2e sem., 1927, p. 474).

14. Z. HORAK. — Sur les systèmes non holonomes (*Bul. Académie des Sciences de Bohême*, 1927) (présenté le 13 janvier 1928).

15. J.-L. SYNGE. — Geodesics in non holonomic geometry (*Math. Ann.*, t. 99, 1928, p. 738).

16. J. A. SCHOUTEN. — On non holonomic connexions, Koniklijke Akademie van Wetenscappen te Amsterdam (*Proceedings*, t. 31, 1928, p. 291).

17. E. CARTAN. — Sur la représentation géométrique des systèmes matériels non holonomes (*Atti del Congresso di Bologna*, t. 4, 1928, p. 253).

18. G. VRANCEANU. — Parallélisme et courbure dans une variété non holonome (Idem t. 5, p. 61).

19. Z. HORAK. — Sur la courbure des variétés non holonomes (*C. R.*, t. 187, 1928, p. 1273).

20. G. Vranceanu. — Studio geometrico dei sistemi anolonomi (*Annali di Mathematica*, 4e série, t. 6, 1928-1929, p. 9).

21. J. A. Schouten. — Uber nicht holonome Ubertragungen in einer Ln. (*Math. Ann.*, t. 30, 1929, p. 149).

22. G. Vranceanu. — Sur les trois points de vue dans l'étude des espaces non holonomes (*C. R.*, t. 188, 1929, p. 973).

23. G. Vranceanu. — Famille de variétés riemanniennes (*Bul. de la Soc. des Sciences de Cluj* (*Roumanie*), t. 5, IV, 1929, p. 434).

24. J. A. Schouten und E. R. van Kampen. — Zur Einbettungs und Krummüngs-theorie nicht holonomer Gebilde (*Math. Ann.*, t. 103, 1930, p. 752).

24[1] V. Hlavaty. — Sur les courbes des variétés non holonomes, (*Rend. dei Lincei*, vol. XII, 1930, p. 647).

25. Gr. C. Moisil. — Sur les propriétés affines et conformes des variétés non holonomes (*Bull. Fac. Sc., Cernauti*, t. 4, 1930, p. 15).

26. D. Hulubei. — Parallélisme dans un complexe linéaire (*Ibid.*, p. 136).

27. Enea Bortolotti. — Transporti rigidi e geometria delle varieta anolonome (*Bol. dell' Unione Mat. Italiana*, Anno X, 1931, p. 1).

28. A. Wundheiler. — Uber die Variationsgleichungen für affine geodetische Linien und nicht holonome, nicht conservative dynamische Systeme (*Prac. Matematiczno-Fizicznych*, t. 38 (Varszawa), 1931, p. 129).

29. P. Franklin and C. L. E. Moore. — Geodesics of Pfafians (*Journal of Math and Phys.*, t. 10, 1931, p. 157).

30. G. Vranceanu. — Sur quelques points de la théorie des espaces non holonomes (*Bull. Fac. Sc., Cernauti*, t. 5, 1932, p. 177).

31. A. Wundheiler. — Rheonome Geometrie, Absolute Mechanik (*Prac. Math. Fizy*, t. 40, 1932, p. 97).

32. G. Vranceanu. — Connexions affines liées aux systèmes de Pfaff (*Bull. Fac. Sc., Cernauti*, t. 6, 1932, p. 188).

33. G. Vranceanu. — Étude des espaces non holonomes (*Journal de Math.*, 1933, p. 113).

34. G. Vranceanu. — Sopra l'interpretazione geometrica dei sistemi meccanici (*Rend. Lincei*, 6e série, t. 17, 1er sem., 1933, p. 135).

35. Z. Horak. — Sur la dynamique absolue des systèmes rhéonomes (*Prac. Matematyczno-Fizycznych*, 1933, p. 25).

36. G. Vranceanu. — La décomposition minimale d'un système de Pfaff et complément. (*Bull. de la Fac. de Sc. de Cernauti*, 1934, vol. VII, p. 97 et 267).

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I.

LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ABSOLU DES CONGRUENCES.

1. Systèmes de n congruences indépendantes 3
2. Espace de Riemann associé aux congruences (λ) 5
3. Transformations de congruences 5
4. Formules et identités fondamentales 7
5. Les connexions affines 9
6. Parallélogramme et pentagone infinitésimaux 9
7. Le groupe de l'espace de Riemann 10

CHAPITRE II.

LES GROUPES ET LES ESPACES NON HOLONOMES.

8. Le groupe d'un système de Pfaff 11
9. Le groupe d'un système de Pfaff et de ses systèmes dérivés 13
10. La connexion affine de deux systèmes de Pfaff complémentaires 14
11. Espaces non holonomes métriques 18

CHAPITRE III.

LES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES V_n^m.

12. La seconde forme fondamentale 20
13. La classe de la métrique de V_n^m 22
14. Parallélisme intérieur 22
15. Pentagone infinitésimal de V_n^m 23
16. Les géodésiques (courbes auto-parallèles) 24
17 Parallélisme extérieur et parallélogramme infinitésimal 25
18. Tenseurs de courbure 26
19. Groupes non holonomes géométrisables 28
20. Les géodésiques de longueur minima 31
21. Les connexions rigides de V_n^m 33
22. Les tenseurs rigides de courbure 35

CHAPITRE IV.

Les espaces non holonomes a connexion affine.

Pages
23. Propriétés géométriques 36
24. Équations aux variations des courbes auto-parallèles 38
25. L'équivalence de deux espaces non holonomes 41
26. L'applicabilité des espaces non holonomes 44
27. Les hypersurfaces non holonomes 46
28. Les plans non holonomes 47

CHAPITRE V.

Les systèmes mécaniques non holonomes.

29. Systèmes à liaisons indépendantes du temps 49
30. Systèmes à caractéristiques indépendantes 51
31. Intégrales premières linéaires 53
32. Les équations des trajectoires de S_n^m 55
33. Stabilité trigonométrique de l'équilibre 57
34. Systèmes à liaisons dépendant du temps 60
35. Intégrales des forces vives généralisées 65
Index bibliographique 66
Table des matières 69