MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CL. GUICHARD

Théorie des réseaux

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 74 (1935)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1935__74__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXIV

Théorie des Réseaux

Par M. CL. GUICHARD
Correspondant de l'Institut
Professeur de Géométrie supérieure à la Sorbonne

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1935

THÉORIE DES RÉSEAUX

Par M. Cl. GUICHARD.

Correspondant de l'Institut,
Professeur de Géométrie Supérieure à la Sorbonne.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES RÉSEAUX ET CONGRUENCES ET DE LEURS PROPRIÉTÉS PROJECTIVES.

1. Définition des réseaux. — Un point M, d'un espace d'ordre n, décrit un réseau lorsque ses coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, fonctions de deux variables, satisfont à une équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{1}$$

Les droites MR, MS qui ont respectivement pour paramètres directeurs les quantités $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ sont les première et seconde, tangentes au réseau.

2. Paramètres normaux des tangentes. — Tout système de valeurs

$$\xi = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\eta = \frac{1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}$$

peut caractériser les directions des tangentes d'un réseau. Tenant compte de l'équation (1), on en déduit

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = A\xi + B\eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = C\xi + D\eta$$

ou

$$A = P - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

$$D = Q - \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial u}.$$

Ces relations montrent que, si v puis u varient seuls, les tangentes MR, MS décrivent des développables.

Il est toujours possible, et d'une infinité de manières, de déterminer des fonctions h et l par les relations

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v} = P, \qquad \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u} = Q.$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Si l'on prend

$$\lambda = h, \qquad \mu = l,$$

les relations suivantes deviennent

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h\xi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = l\eta.$$

On peut écrire

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi.$$

On obtient également

$$\frac{\partial h}{\partial v} = lm,$$

$$\frac{\partial l}{\partial u} = hn.$$

Les quantités ξ, η ainsi définies sont appelées *paramètres normaux* des tangentes. On voit que les quantités ξ sont déterminées ainsi à un facteur commun près qui est une fonction de u seul, les fonctions η a un facteur commun près fonction de v seul

Les quantités m et n sont appelées les rotations du réseau.

3. **Transformations de Laplace.** — Un point N de la tangente MR a

des coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$, définies par les égalités

$$y_i = x_i + \rho\xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où ρ désigne une fonction arbitraire des deux variables u et v.

Lorsque v varie seul, le point N décrit une courbe. Les paramètres directeurs des tangentes sont égaux à

$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = \xi_i \frac{\partial \rho}{\partial v} + (l + n\rho)\eta_i.$$

A la valeur

$$\rho = -\frac{l}{n}$$

correspond un point R dont les coordonnées s'écrivent

$$y_i = x_i - \frac{l}{n}\xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

lorsque v varie seul, la droite MR est tangente à la courbe lieu de R.

On obtient facilement les relations

$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = \xi_i \frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{l}{n}\right),$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = -\frac{l}{n}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\xi_i\right).$$

Ces relations permettent de montrer que le point R décrit un réseau dont l'équation s'écrit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

en posant

$$h_1 = -\frac{l}{n},$$

$$l_1 = n\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{l}{n}\right).$$

On peut prendre comme paramètres normaux des tangentes

$$(\xi_i') = \frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\xi_i,$$

$$(\eta_i') = \frac{\xi_i}{n}.$$

Les rotations m_1 n_1 sont

$$m_1 = \frac{1}{n},$$
$$n_1 = n\left(mn - \frac{\partial^2 \mathrm{L}\, n}{\partial u\, \partial v}\right).$$

Nous dirons que le réseau R et l'équation de Laplace à laquelle satisfont les coordonnées sont les transformés du réseau M et de l'équation correspondante par la méthode de Laplace en allant de u vers v.

Cette transformation peut en général être poursuivie indéfiniment. Elle peut également être faite en considérant la tangente MS dans le sens de v vers u.

4. **Congruences.** — Les droites d'un espace à n dimensions dépendant de deux paramètres u et v engendrent une congruence, si elles restent tangentes à une courbe lorsque l'on fait varier un seul des paramètres u et v.

Il résulte de l'étude précédente que les tangentes aux courbes d'un réseau engendrent des congruences. On dit que ces congruences sont les congruences focales du réseau.

A une droite d'une congruence correspondent deux courbes tangentes obtenues en faisant varier u ou v. Ces points sont appelés *foyers*. Les surfaces qu'ils décrivent sont les surfaces focales de la congruence.

Considérons une droite D d'une congruence définie par n paramètres directeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$, fonctions de deux variables u, v et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les cordonnées des foyers A et B correspondants. On a

$$y_i = x_i + \lambda X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Exprimons que si u ou v varient seuls les droites D restent tangentes aux courbes lieux des points A et B. On obtient les égalités

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = A X_i,$$
$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = \frac{\partial x_i}{\partial v} + \lambda \frac{\partial X_i}{\partial v} + X_i \frac{\partial \lambda}{\partial v} = K X_i,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = A X_i,$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial v} = B X_i + C \frac{\partial X_i}{\partial v}.$$

On voit alors en égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \, \partial v}$ ainsi définies que les quantités X sont solutions d'une équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial u \, \partial v} = P \frac{\partial X_i}{\partial u} + Q \frac{\partial X_i}{\partial v} + R,$$

les fonctions P, Q, R étant liées aux fonctions A, B, C par les relations

$$A = CQ + \frac{\partial C}{\partial u},$$

$$o = B + CP,$$

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial B}{\partial u} + CR.$$

Supposons données, inversement n quantités X solutions de l'équation de Laplace précédentes. Il est possible de déterminer trois fonctions A, B, C solutions du système indiqué, puis par l'intégration de systèmes complets de calculer les coordonnées x_i de A. On vérifie immédiatement que le point A décrit un réseau et que la première congruence focale de ce réseau est décrite par des droites dont les paramètres directeurs peuvent être pris égaux aux quantités X.

On voit également que le point B décrit un réseau. Les réseaux ainsi obtenus sont les premier et second réseaux focaux de la congruence.

5. **Réseaux parallèles.** — Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$; $2n$ fonctions de deux variables définissant les coordonnées de deux points MM′. On dit que ces deux points décrivent des systèmes parallèles si l'on a les relations

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x'_i}{\partial u} &= \alpha \frac{\partial x_i}{\partial u} \\ \frac{\partial x'_i}{\partial v} &= \beta \frac{\partial x_i}{\partial v} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La condition de compatibilité montre que les quantités x sont solutions de l'équation de Laplace [1]

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = - \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial v}}{\alpha - \beta} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\frac{\partial \beta}{\partial u}}{\alpha - \beta} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Il résulte de là que les réseaux sont les seuls systèmes qui admettent des parallèles.

On peut dire que deux réseaux sont parallèles si leurs tangentes correspondantes sont parallèles.

Inversement, montrons que tout réseau est parallèle à une infinité de réseaux. Considérons un réseau décrit par un point M dont les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{P} \frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{Q} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Il est possible de déterminer deux fonctions α et β telles que l'on ait

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = - \mathrm{P}(\alpha - \beta),$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \mathrm{Q}(\alpha - \beta).$$

Les fonctions α, β connues, la détermination des coordonnées $x'_1, \ldots, x'_n$ est effectué par la résolution de systèmes complets indiqués.

Le problème de la détermination des fonctions α, β est équivalent à la résolution de l'équation de Laplace adjointe à l'équation à laquelle satisfont les coordonnées du réseau M.

Il est souvent commode pour déterminer les réseaux parallèles à un réseau donné M de faire intervenir les paramètres normaux des tangentes à ce réseau.

Les coordonnées $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ du point M' sont alors obtenues par la résolution du système

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= \mathrm{H}\,\xi_i \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= \mathrm{L}\,\eta_i \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et si l'on désigne par m et n les rotations du réseau donné on voit

---

[1] Nous excluons le cas ou α et β étant constantes les deux systèmes de points seraient homothétiques.

que les fonctions H et L satisfont aux conditions

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v} = \mathrm{L}\, m,$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u} = \mathrm{H}\, n.$$

On déduit immédiatement de ce résultat les conséquences suivantes :

Si l'on considère deux réseaux parallèles, les réseaux qui se déduisent par la méthode de Laplace — la transformation étant faite dans des conditions analogues — sont des réseaux parallèles.

Les coordonnées de même rang d'une série de réseaux parallèles satisfont à une équation de Laplace

Cette équation s'écrit

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{\xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{1}{\eta_i}\frac{\partial \eta_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

Lorsque les fonctions H et L qui déterminent un réseau parallèle à un réseau donné tendent vers zéro, les coordonnées du point qui décrit ce réseau tendent vers des constantes. On obtient ainsi un réseau point parallèle à un réseau donné.

Ce réseau peut être caractérisé de la manière suivante :

Soient MR, MS les tangentes à un réseau décrit par un point M. Menons par point fixe O les droites Or, Os parallèles à MR, MS.

A chaque système de valeurs de u et de v ont fait correspondre un couple de droites Or, Os qui caractérise le réseau point.

Ce couple de droites ne peut évidemment être choisi de façon arbitraire. Les quantités ξ, η caractérisant leurs paramètres directeurs on vérifie aisément que, si v varie seul, les tangentes aux courbes décrites pour tous les points de Or se trouvent dans le plan Ors.

Un résultat analogue est obtenu pour les tangentes aux courbes décrites par les points de Os lorsque v varie seul.

6. **Congruences parallèles.** — Deux congruences sont dites parallèles lorsque les droites qui se correspondent sont parallèles [1].

---

[1] Il y a lieu toutefois d'exclure de cette définition le cas où les paramètres directeurs de la droite ne dépendent que d'une seule des variables u où v.

Considérons deux congruences parallèles formées de deux familles de droites D, D'. Ces deux familles peuvent être définies à l'aide des mêmes quantités X. Les quantités x, x' qui caractérisent les coordonnées des réseaux focaux correspondant A, A' sont telles qu'elles vérifie les relations

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \text{A X},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \text{A}' \text{X}.$$

Les tangentes AR, A'R' des deux réseaux sont donc parallèles.

On constate aisément qu'il en est de même des tangentes AS, A'S' et l'on peut énoncer le résultat suivant.

Lorsque deux congruences sont parallèles, leurs réseaux focaux correspondants sont eux-mêmes parallèles.

Si par un point fixe, on mène des droites paralleles aux droites d'une congruence, on obtient un systeme de droites, dépendant de deux paramètres. Ce système peut être considéré comme la position limite d'une congruence. Nous dirons qu'il définit une congruence point parallèle à la congruence donnée.

7. **Réseaux et congruences conjugués.** — Un réseau et une congruence sont dits conjugués si le point qui décrit le réseau est situé sur la droite qui décrit la congruence et si les courbes du réseau correspondent aux développables de la congruence.

Soit M un réseau décrit par un point de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dont les tangentes ont pour parametres $\xi_1, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Considérons une congruence conjuguée à ce réseau décrite par une droite D définie par n paramètres directeurs X. Les coordonnées des premier et second foyers A et B correspondants sont données par les formules

$$\begin{aligned} y_i &= x_i + \rho_1 \text{X}_i \\ z_i &= x_i + \rho_2 \text{X}_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et l'on doit avoir

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = \text{A X}_i,$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial v} = \text{B X}_i.$$

On voit ainsi que l'on peut écrire

$$\frac{\partial X_i}{\partial u} = P X_i + H \xi_i,$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = Q X_i + L \eta_i.$$

Les fonctions P et Q ainsi définies ne peuvent être quelconques. Si l'on égale les deux valeurs de $\frac{\partial^2 X_i}{\partial u \partial v}$ on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial u},$$

et l'on peut poser

$$P = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u},$$

$$Q = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Les relations précédentes s'écrivent alors

$$\frac{\partial X_i}{\partial u} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} X_i + H \xi_i,$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} X_i - L \eta_i$$

et peuvent être interprétées de la manière suivante.

Considérons la congruence point décrite par la droite Δ parallèle à D menée par l'origine des coordonnées. Le point m de cette droite dont les coordonnées sont $\frac{X_i}{\lambda}$ décrit un réseau parallèle au réseau M et l'on peut remarquer que la quantité λ définie à une constante multiplicative près est solution de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les quantités X.

Inversement, partons d'une congruence point Δ dont les paramètres directeurs X_i satisfont à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = p\frac{\partial X}{\partial u} + q\frac{\partial X}{\partial v} + 2X.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point m de Δ de coordonnées $x_i = \frac{X_i}{\lambda}$ décrive un réseau est que la fonction λ soit solution de l'équation de Laplace.

Supposons le réseau m' parallèle au réseau M précédent.

On a

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = H_1 \xi_i,$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial v} = L_1 \eta_i.$$

Reprenant en sens inverse les calculs faits plus haut, on voit que la droite D parallèle à Δ menée par M engendre une conguence conjuguée au réseau M.

On peut donc dire que :

Toute congruence conjuguée à un réseau est parallèle à une congruence point obtenue en prenant les droites joignant un point fixe à un point qui décrit un réseau parallèle au réseau donné.

Par suite :

Si deux réseaux sont parallèles toute congruence conjuguée à l'un est parallèle à une congruence conjuguée à l'autre.

Considérons inversement une congruence décrite par une droite D qui sera définie par les coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ d'un point de D fonctions de deux variables u et v et les paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la droite. Un point M quelconque de D a des coordonnées de la forme

$$z_i = y_i + \rho x_i.$$

Si l'on exprime que, lorsque u ou v varient seuls les droites D restent tangentes à une courbe. on est conduit à des relations de la forme

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = A\frac{\partial x_i}{\partial u} + Bx_i,$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = C\frac{\partial x_i}{\partial v} + Dx_i.$$

Soit Δ une congruence point parallèle à la congruence donnée D. Les n quantités x sont les coordonnées d'un point m de Δ et l'on peut toujours supposer que ce point décrit un réseau. L'équation de Laplace correspondante étant

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial x}{\partial v}.$$

On voit alors en égalant les valeurs de $\frac{{}^2 y_i}{\partial u\,\partial r}$ que l'on doit avoir

$$\frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial D}{\partial u}.$$

Dans ces conditions un calcul facile montre que si l'on définit la fonction ρ par les égalités compatibles

$$B + \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0,$$

$$D + \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0,$$

on a

$$\frac{\partial z_i}{\partial u} = K \frac{\partial x_i}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial v} = K \frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

Le point M décrit un réseau parallèle au réseau décrit par M.

Il en résulte que :

Tout réseau conjugué à une congruence est parallèle à un réseau conjugué à une congruence point parallèle.

Si deux congruences sont parallèles, tout réseau conjugué à l'une est parallèle à un réseau conjugué à l'autre.

La fonction ρ définie par les égalités précédentes n'est déterminée qu'à une constante additive près.

Si l'on considère un réseau M conjugué à une congruence D il existe une infinité de réseaux parallèles à M conjugués à la même congruence.

On vérifie facilement la propriété suivante due à Ribaucour. Les droites qui joignent deux points M, M', qui décrivent deux réseaux paralleles décrivent une congruence conjuguée à ces réseaux.

Nous signalerons encore que la trace d'une congruence sur un hyperplan quelconque décrit un réseau. Pour une congruence quelconque la propriété se déduit immédiatement de l'étude d'une congruence point parallèle. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont les paramètres d'une congruence, le point de coordonnées $\frac{X_1}{X_n}, \frac{X_2}{X_n}, \ldots, \frac{X_{n-1}}{X_n}$, décrit un réseau.

8. **Réseaux et congruences harmoniques.** — Un réseau et une congruence sont dits harmoniques lorsque les réseaux focaux de la con gruence sont conjuguées aux congruences focales du réseau.

Considérons une congruence décrite par une droite Δ. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les coordonnées des premier et second réseaux focaux C et D. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= A(y_i - x_i) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= B(y_i - x_i) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

les relations montrent que les droites OD, OC sont les première et seconde tangentes d'un réseau point harmonique à la congruence. Donc :

Les droites qui joignent un point fixe aux foyers d'une congruence forment un réseau point harmonique à la congruence.

Inversement donnons-nous un réseau dont les premiere et seconde tangente OR, OS ont pour paramètres normaux les quantités ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n; η_1, η_2, ..., η_n, et proposons-nous de déterminer les congruences harmoniques a ce réseau.

Les coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de tout point D de OR s'expriment par les formules

$$y_i = \frac{\xi_i}{r} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que le point D décrive un réseau est que la fonction r soit solution de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} + mn\xi,$$

à laquelle satisfont les quantités ξ.

Rappelons que les quantités ξ, η vérifient les relations

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi$$

et désignons par q la quantité définie par l'égalité

$$\frac{\partial r}{\partial v} = nq,$$

qui entraîne l'égalité

$$\frac{\partial q}{\partial u} = mr.$$

Un calcul facile montre que la deuxième congruence focale du réseau D est décrite par une droite du plan OR, OS; que le réseau C qui se déduit du réseau D par l'application de la méthode de Laplace en allant de v vers u est décrit par le point de OS dont les coordonnées sont

$$x_i = \frac{\eta_i}{q} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On voit aussi que la fonction q satisfait à la même équation de Laplace que les fonctions η.

Les paramètres directeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la congruence CD sont donnés par les égalités

$$X_i = q\xi_i - r\eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces quantités sont solutions de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \left(mn - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{u}\right)X.$$

La détermination des congruences harmoniques à un réseau peut être effectuée par des méthodes analogues. Nous résumerons rapidement les résultats.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point M qui décrit un réseau et

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial x}{\partial v}$$

l'équation de Laplace à laquelle satisfont ces coordonnées.

A toute solution θ de cette équation correspond une congruence harmonique au réseau. Les premier et second réseaux focaux sont décrits par les points C et D dont les coordonnées s'expriment par les formules

$$\text{(C)} \qquad x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{v}}\frac{\partial x_i}{\partial v},$$

$$\text{(D)} \qquad x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial u}}\frac{\partial x_i}{\partial u}.$$

Les paramètres directeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la droite CD sont donnés par les égalités

$$X_i = \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}$$

et satisfont à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = P_1\frac{\partial X}{\partial u} + Q_1\frac{\partial X}{\partial v} + RX,$$

où l'on a

$$P_1 = P + \frac{\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}}{\frac{\partial \theta}{\partial v}},$$

$$Q_1 = Q + \frac{\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}}{\frac{\partial \theta}{\partial u}},$$

$$R_1 = \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + PQ - P_1 Q_1.$$

L'emploi de coordonnées homogènes permet de simplifier les résultats précédents.

Posons

$$x'_i = \frac{x_i}{\theta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad x'_{n+1} = \frac{1}{\theta}.$$

Les $n+1$ coordonnées ainsi définies sont un système de coordonnées homogènes de M. On a en effet

$$x_i = \frac{x'_i}{x'_{n+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On voit immédiatement qu'avec ces notations on peut prendre pour coordonnées homogènes des réseaux focaux C et D les quantités

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial x'_i}{\partial v},$$

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial x'_i}{\partial u}.$$

Remarque. — Appelons réseaux correspondants, deux réseaux qui appartenant à des espaces d'ordre quelconque, dont le nombre des dimensions n'est pas forcément le même, sont tels que les coordonnées des points qui les décrivent satisfassent à une même équation de Laplace. Les congruences harmoniques à ces réseaux qui s'obtiennent à l'aide d'une même solution θ sont appelées congruences harmoniques correspondantes.

On voit que les paramètres directeurs de deux congruences harmoniques correspondantes peuvent être choisis de manière à satisfaire à la même équation de Laplace.

Les propriétés des réseaux et congruences harmoniques peuvent être rattachées aux propriétés des réseaux et congruences conjugués.

Considérons un réseau décrit par un point M et désignons par MR, MS les première et deuxième congruences focales décrites par ses tangentes. Soit CD une congruence harmonique au réseau, dont le premier réseau focal est décrit par le point C le second par le point D. Le réseau C est conjugué à la congruence MS tandis que le réseau D est conjugué à la congruence MR.

Supposons inversement la congruence CD donnée et prenons une congruence conjuguée au réseau C. La géométrie dans le cas de l'espace a trois dimensions et l'analyse dans le cas d'un espace d'ordre quelconque montrent que le premier réseau focal de cette congruence est harmonique à la congruence CD.

On a ainsi un premier procédé pour déterminer les réseaux harmoniques à une congruence.

Le résultat précédent et les calculs qui ont été faits permettent d'énoncer pour les réseaux et congruences harmoniques des propriétés de parallélisme analogues à celles qui ont été indiquées pour les réseaux et congruences conjugués.

On voit que :

Si deux réseaux sont parallèles toute congruence harmonique à l'un est parallèle à une congruence harmonique à l'autre.

Si deux congruences sont parallèles tout réseau harmonique à l'une est parallèle à un réseau harmonique à l'autre.

En particulier :

Tout réseau harmonique à une congruence est parallèle à un point harmonique à une congruence parallèle à la congruence donnée.

Il en résulte une nouvelle méthode pour déterminer les réseaux harmoniques à une congruence.

Nous signalerons enfin que, si dans le calcul indiqué pour la détermination des congruences harmoniques à un réseau on prend pour solution particulière $\theta = x_n$, la congruence harmonique correspondante est la trace du plan du réseau sur l'hyperplan $x_n = 0$.

On déduit de là que la trace d'un réseau sur un hyperplan décrit une congruence harmonique au réseau.

On voit aussi que si l'on remplace la solution θ par la solution $\theta + h$, h étant une constante, la congruence harmonique est remplacée par une congruence parallèle.

9. Réseaux dérivés. — Considérons un réseau décrit par un point M et désignons par MR, MS les tangentes aux courbes de ce réseau. Soit μ un point du 1-plan MR, MS. Si le point m décrit un réseau, ce réseau est dit dérivé du réseau M.

Inversement, on dit que le réseau décrit par le point M est un réseau dérivant le réseau décrit par le point m.

Considérons un réseau décrit par un point M et supposons déterminées deux congruences harmoniques au réseau décrites par deux droites $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_1$. Montrons que le point m de rencontre de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_1$ décrit un réseau. Ce réseau est dérivé du réseau décrit par M.

Les réseaux focaux C, D; C_1, D_1 des congruences $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_1$ sont conjugués aux congruences focales MS, MR du réseau M et si l'on suppose que u varie seul, la tangente à la courbe lieu de m est obtenue comme intersection des 1-plans tangents aux réseaux D, D_1. Soit $\mathcal{G}'_1$ une congruence parallèle à $\mathcal{G}_1$ harmonique au réseau M et C'_1, D_1 les réseaux focaux correspondants. Le point m', commun aux droites $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, décrit lorsque u varie seul une courbe dont la tangente, intersection des 1-plans tangents aux réseaux D, D′, est parallèle à la tangente correspondante à la courbe lieu de μ. Les réseaux D, D′, étant parallèles. Une démonstration analogue peut être faite lorsque v varie seul.

Il en résulte que les points m, m' qui définissent des systèmes parallèles décrivent des réseaux.

La démonstration analytique des résultats précédents est basée sur la théorie des expressions (m, n) de Darboux.

Les coordonnées d'un point du 1-plan MR, MS peuvent si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées de M être représentées par les quantités $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies par les égalités

$$X_i = x_i + \lambda \frac{\partial x_i}{\partial u} + \mu \frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

Soient θ, θ_1 les solutions de l'équation du réseau qui déterminent les congruences harmoniques $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_1$. Le point m de rencontre des droites $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_1$ est défini par les fonctions λ et μ solution du système

$$\theta + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial u} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

$$\theta_1 + \lambda \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \mu \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = 0.$$

Il en résulte que les quantités X_i sont les coordonnées d'un point m qui décrit un réseau.

Cette démonstration donne immédiatement les resultats suivants : Tous les réseaux dérivés d'un reseau donné peuvent être obtenus par l'intermédiaire de deux congruences harmoniques à ce réseau.

On voit également que le réseau m serait inchangé si l'on substituait à la solution θ, la solution $\theta + k\theta_1$ (k étant une constante). Si l'on fait varier la constante k on obtient donc une série concourante de congruences harmoniques au réseau M.

Il résulte également des résultats précédents que tout réseau conjugué a une congruence harmonique à un réseau donné est un réseau dérivé du réseau donné. Cette méthode permet d'obtenir tous les réseaux dérivés.

La même méthode permet d'obtenir les réseaux dérivant un réseau décrit par un point m.

On voit immédiatement que tout réseau dérivant M est un réseau harmonique à une congruence $\mathcal{G}$ conjuguée au réseau m.

On montrerait également que si l'on se donne deux congruences conjuguées à un même réseau m, le plan déterminé par les droites qui décrivent ces congruences, enveloppe un réseau M dérivant les réseau m.

10. Congruences dérivées. — Une congruence $\mathcal{G}$ est dite dérivée d'une congruence H si elle est conjuguée à l'un quelconque des réseaux harmoniques à H. La congruence H est dite dérivant $\mathcal{G}$.

Désignons par C et D les premier et second réseaux focaux d'une congruence H et supposons donnés deux réseaux harmoniques à H décrits par deux points M, N. Montrons que la droite MN décrit une congruence $\mathcal{G}$ qui sera dérivée de la congruence H.

Il est évident géométriquement que si u ou v varient seuls la droite MN décrit une développable et qu'elle engendre une congruence conjuguée aux réseaux M et N.

Analytiquement désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ deux systèmes de coordonnées homogènes des points M et N choisis de telle manière que les coordonnées homogenes des points C et D soient exprimées par l'une ou l'autre des suites

$$(C)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial v}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial v}, & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial v}, & \dfrac{\partial y_2}{\partial v}, & \ldots, & \dfrac{\partial y_n}{\partial v}, & \dfrac{\partial y_{n+1}}{\partial v}; \end{cases}$$

$$(D)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial y_2}{\partial u}, & \ldots, & \dfrac{\partial y_n}{\partial u}, & \dfrac{\partial y_{n+1}}{\partial u}. \end{cases}$$

On aura alors

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= h\frac{\partial x_i}{\partial u} \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= l\,\frac{\partial x_i}{\partial v} \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Les coordonnées homogènes d'un point quelconque de la droite MN peuvent être représentées par

$$z_i = y_i + \lambda x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

et les points c, d correspondant à $\lambda = -h$, $\lambda = -l$ décrivent le premier, lorsque u varie seul, le deuxième lorsque v varie seul, des courbes tangentes à la droite MN. Cette droite engendre donc une congruence dérivée de la congruence H.

Le calcul précédent montre que si l'on suppose λ constant le point de coordonnées z_i décrit un réseau. Il existe donc une infinité de réseaux conjugués à la congruence $\mathcal{G}$ et harmoniques à la congruence H.

On montre facilement que la méthode indiquée permet d'obtenir toutes les congruences dérivées données.

Enfin si l'on considère deux réseaux conjugués à une congruence donnée $\mathcal{G}$ les 1-plan tangents à ces réseaux se coupent suivant une droite qui décrit une congruence H dérivant $\mathcal{G}$.

Toutes les congruences dérivant une congruence donnée peuvent être ainsi obtenues.

Pour terminer nous mentionnerons les propriétés de parallélisme relatives aux réseaux et congruences dérivés ou dérivants qui sont une conséquence immédiate de ce qui précède.

Si deux réseaux sont parallèles chaque réseau $\left(\begin{smallmatrix}\text{dérivée de}\\ \text{dérivant}\end{smallmatrix}\right)$ l'un est parallele à un réseau $\left(\begin{smallmatrix}\text{dérivée de}\\ \text{dérivant}\end{smallmatrix}\right)$ l'autre.

Si deux congruences sont paralleles chaque congruence $\left(\begin{smallmatrix}\text{dérivée de}\\ \text{derivant}\end{smallmatrix}\right)$ l'une est parallèle à une congruence $\left(\begin{smallmatrix}\text{dérivee de}\\ \text{derivant}\end{smallmatrix}\right)$ l'autre.

CHAPITRE II.

Loi des éléments orthogonaux.

10. La théorie des éléments orthogonaux est la généralisation relativement aux réseaux de la théorie des courbes orthogonales. Son rôle en géométrie infinitésimale est analogue au rôle que joue en géométrie algébrique le principe de dualité. La correspondance ne fait intervenir que les éléments de direction des réseaux et congruences. Dans un espace d'ordre impair un réseau correspond à une congruence et inversement. Dans un espace d'ordre pair, un réseau correspond à un autre réseau, une congruence à une congruence.

Au point de vue analytique, cette théorie est une application des propriétés des expressions (m, n) de Darboux.

11. **Espaces d'ordre impair.** — Soient dans un espace d'ordre $n = 2p + 1$, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \eta, \ldots, \eta_n$ les paramètres normaux des tangentes à un réseau M. Il est possible de déterminer, a un facteur commun près, n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les $2p$ équations

$$\begin{aligned}
&\Sigma x \quad \xi = 0, && \Sigma x \quad \eta = 0,\\
&\Sigma x \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, && \Sigma x \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\Sigma x \frac{\partial^{p-1} \xi}{\partial u^{p-1}} = 0; && \Sigma x \frac{\partial^{p-1} \eta}{\partial v^{p-1}} = 0.
\end{aligned}$$

Les relations

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = n\,\eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = m\,\xi$$

permettent de substituer au système précédent le système équivalent

$$\Sigma x \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma x \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0,$$
$$\Sigma x \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0, \qquad \Sigma x \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = 0,$$
$$\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots,$$
$$\Sigma x \frac{\partial^p \eta}{\partial u^p} = 0; \qquad \Sigma x \frac{\partial^p \xi}{\partial v^p} = 0.$$

Les quantités x ainsi définies satisfont à une même équation de Laplace et déterminent les paramètres directeurs d'une droite qui décrit une congruence $\mathcal{G}$. Cette congruence est dite orthogonale au réseau.

Des équations précédentes, on déduit par différentiations successives

$$\Sigma \xi\, x = 0, \qquad \Sigma \xi \frac{\partial x}{v} = 0,$$
$$\Sigma \xi \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma \xi \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0,$$
$$\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots,$$
$$\Sigma \xi \frac{\partial^{p-1} x}{\partial u^{p-1}} = 0; \qquad \Sigma \xi \frac{\partial^p x}{\partial v^p} = 0.$$

Considérons le premier réseau focal de la congruence $\mathcal{G}$. Les paramètres directeurs des tangentes à ce réseau peuvent être pris égaux à

$$x_i,$$
$$\lambda x_i + \mu \frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

L'interprétation géométrique des dernières équations est alors immédiate. La congruence décrite par les premières tangentes du réseau M est orthogonale au premier réseau focal de la congruence $\mathcal{G}$.

Il résulte de là que les diverses congruences déduites de $\mathcal{G}$ par la méthode de Laplace sont orthogonales aux réseaux de même rang qui se déduisent de M par les mêmes transformations.

Considérons maintenant un réseau M_1 parallèle au réseau M. Les coordonnées $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ de M_1 peuvent être définies par les relations

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = h \xi_i,$$
$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = l \eta_i,$$

ces quantités définissent également les paramètres directeurs d'une congruence H conjuguée au réseau M.

Les formules précedentes peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
&\Sigma x \frac{\partial y}{\partial u} = 0, &\quad& \Sigma x \frac{\partial y}{\partial v} = 0,\\
&\Sigma x \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0, && \Sigma x \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\Sigma x \frac{\partial^p y}{\partial u^p} = 0, && \Sigma x \frac{\partial^p y}{\partial v^p} = 0.
\end{aligned}$$

Remarquons que les quantités y satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

et que les relations précédentes entraînent l'équation

$$\Sigma x \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = 0$$

et, par suite,

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

Posons

$$\theta = \Sigma xy,$$

on aura

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial u} &= \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} y,\\
\frac{\partial \theta}{\partial v} &= \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} y,\\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} &= \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} y,
\end{aligned}$$

relations qui montrent que la fonction θ satisfait à la même équation de Laplace que les quantités x. Dans ces conditions, le point P de coordonnées $X_1, \ldots, X_n$ définies par

$$X_i = \frac{x_i}{\theta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

décrit un réseau. La congruence $\mathcal{G}$ admet des réseaux conjugués parallèles à P.

En introduisant, au lieu de x les quantités X dans les équations précédentes, on déduit

$$\Sigma X y = 1;$$

$$\Sigma X \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma X \frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

$$\Sigma X \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0, \qquad \Sigma X \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0,$$

$$\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots,$$

$$\Sigma X \frac{\partial^p y}{\partial u^p} = 0, \qquad \Sigma X \frac{\partial^p y}{\partial v^p} = 0;$$

puis

$$\Sigma y \frac{\partial X}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma y \frac{\partial X}{\partial v} = 0,$$

$$\Sigma y \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = 0, \qquad \Sigma y \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = 0,$$

$$\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots,$$

$$\Sigma y \frac{\partial^p X}{\partial u^p} = 0; \qquad \Sigma y \frac{\partial^p X}{\partial v^p} = 0,$$

qui montrent que la congruence H est orthogonale au réseau P.

On peut donc énoncer les résultats suivants :

Si un réseau est orthogonal à une congruence, toute congruence conjuguée au réseau est orthogonale à un réseau conjugué à la la congruence.

Ou encore :

Si une congruence est orthogonale à un réseau, tout réseau conjugué à la congruence est orthogonal à une congruence conjuguée à un réseau.

Soient maintenant $\mathcal{G}$ une congruence; F_1, F_2 ses premier et second réseaux focaux; M un réseau orthogonal a $\mathcal{G}$; MR, MS ses premiere et seconde tangente.

Considérons un réseau μ harmonique à $\mathcal{G}$. La deuxième tangente à ce réseau décrit une congruence μF_1 conjuguée au réseau F_1 orthogonal à la congruence décrite par la première tangente MR du réseau M. Il existe donc un réseau P conjugué à MR, orthogonal à la congruence μF_1 dont la seconde tangente PQ décrit une congruence harmonique à M, orthogonale au réseau μ. Donc :

Si une congruence est orthogonale à un réseau. tout réseau harmonique à la congruence est orthogonal à une congruence harmonique au réseau.

En reprenant les raisonnements en sens inverse, on montre de même que :

Si un réseau est orthogonal à une congruence, toute congruence harmonique au réseau est orthogonale à un réseau harmonique à la congruence.

12. **Espaces d'ordre pair.** — Considérons un espace d'ordre $n = 2p$. Soit $\mathcal{G}$ une congruence de cet espace definie par n paramètres directeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonctions de deux variables satisfaisant à une même équation de Laplace. Il est possible de déterminer n quantités x à un facteur commun pris par les relations

$$\Sigma xy = 0;$$
$$\Sigma x \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma x \frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$
$$\Sigma x \frac{\partial^{p-1} y}{\partial u^{p-1}} = 0; \qquad \Sigma x \frac{\partial^{p-1} y}{\partial v^{p-1}} = 0.$$

Les fonctions x satisfont à une même équation de Laplace et définissent les n paramètres directeurs d'une congruence G qui est dite orthogonale à $\mathcal{G}$.

Des équations précédentes, on déduit les relations

$$\Sigma y \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma y \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$
$$\Sigma y \frac{\partial^{p-1} x}{\partial u^{p-1}} = 0; \qquad \Sigma y \frac{\partial^{p-1} x}{\partial v^{p-1}} = 0,$$

qui montrent que la correspondance entre les congruences $\mathcal{G}$ et G est réciproque.

Soient F_1 le premier réseau focal de G, $\mathcal{F}_2$ le deuxième réseau focal de $\mathcal{G}$; ξ, η, ξ', η' les parametres normaux des première et seconde tangentes à ces réseaux. Les quantités ξ sont proportionnelles aux quantités x, tandis que les quantités η sont proportionnelles aux quantités y. Les équations précédentes sont équivalentes aux équations

$$\Sigma \xi\eta' = 0;$$
$$\Sigma \xi \frac{\partial \eta'}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma \xi \frac{\partial \eta'}{\partial v} = 0, \qquad \Sigma \eta' \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma \eta' \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0,$$
$$\Sigma \xi \frac{\partial^{p-1} \eta'}{\partial u^{p-1}} = 0; \qquad \Sigma \xi \frac{\partial^{p-1} \eta'}{\partial v^{p-1}} = 0; \qquad \Sigma \eta' \frac{\partial^{p-1} \xi}{\partial u^{p-1}} = 0; \qquad \Sigma \eta' \frac{\partial^{p-1} \xi}{\partial v^{p-1}} = 0.$$

Les relations

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta, \qquad \frac{\partial \xi'}{\partial v} = n'\eta',$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi; \qquad \frac{\partial \eta'}{\partial u} = m'\xi_1$$

permettent de transformer le système précédent et d'écrire

$$\Sigma\xi'\eta = 0;$$

$$\Sigma\xi'\frac{\partial \eta}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma\xi'\frac{\partial \eta}{\partial v} = 0, \qquad \Sigma\eta\frac{\partial \xi'}{\partial u} = 0. \qquad \Sigma\eta\frac{\partial \xi'}{\partial v} = 0,$$

$$\Sigma\xi'\frac{\partial^{p-1} \eta}{\partial u^{p-1}} = 0; \qquad \Sigma\xi'\frac{\partial^{p-1} \eta}{\partial v^{p-1}} = 0; \qquad \Sigma\eta\frac{\partial^{p-1} \xi'}{\partial u^{p-1}} = 0; \qquad \Sigma\eta\frac{\partial^{p-1} \xi'}{\partial v^{p-1}} = 0.$$

On voit ainsi que la première tangente au réseau $\mathcal{F}_2$ décrit une congruence orthogonale à la seconde tangente au réseau F_1. Les réseaux F_1. $\mathcal{F}_2$ sont dits orthogonaux, et l'on peut énoncer les résultats suivants :

Si deux congruences sont orthogonales, le premier réseau focal de l'une est orthogonal au second réseau focal de l'autre.

Si deux réseaux sont orthogonaux, les premières tangentes de l'un décrivent des congruences orthogonales aux congruences décrites par les secondes tangentes de l'autre.

Considérons deux réseaux orthogonaux M, M'. Soient ξ, η, ξ', η' les paramètres normaux des tangentes à ces réseaux. Une congruence $\mathcal{G}$ conjuguée au réseau M' peut être définie par les paramètres $y_1, \ldots, y_n$ qui satisfont aux relations

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = h\xi'_1,$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = l\eta'_1.$$

Les conditions d'orthogonalité des réseaux écrits avec quantités y deviennent

$$\Sigma\xi\frac{\partial y}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma\xi\frac{\partial y}{\partial v} = 0, \qquad \Sigma\eta\frac{\partial y}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma\eta\frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

$$\Sigma\xi\frac{\partial^{p-1} y}{\partial u^{p-1}} = 0; \qquad \Sigma\xi\frac{\partial^{p} y}{\partial v^{p}} = 0; \qquad \Sigma\eta\frac{\partial^{p} y}{\partial u^{p}} = 0; \qquad \Sigma\eta\frac{\partial^{p-1} y}{\partial v^{p-1}} = 0.$$

Posons

$$A = \Sigma\xi y, \qquad B = \Sigma\eta y;$$

on voit que

$$\frac{\partial A}{\partial v} = nB,$$

$$\frac{\partial B}{\partial u} = mA.$$

Les n quantités

$$x_i = B\xi_i - A\eta_i$$

correspondent aux paramètres directeurs d'une congruence G harmonique au réseau M.

On a évidemment

$$\Sigma xy = 0;$$

$$\Sigma x \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma x \frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

$$\Sigma x \frac{\partial^{p-1} y}{\partial u^{p-1}} = 0; \qquad \Sigma x \frac{\partial^{p-1} y}{\partial v^{p-1}} = 0.$$

Ces relations montrent que les congruences G et $\mathcal{G}$ sont orthogonales.

Inversement, supposons donnée la congruence G et les quantités A et B. Les n valeurs de y seront déterminées par les équations

$$A = \Sigma \xi y, \qquad B = \Sigma \eta y,$$

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} y, \qquad \frac{\partial B}{\partial v} = \Sigma \frac{\partial \eta}{\partial v} y,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^{p-1} A}{\partial u^{p-1}} = \Sigma \frac{\partial^{p-1} \xi}{\partial u^{p-1}} y; \qquad \frac{\partial^{p-1} B}{\partial v^{p-1}} = \Sigma \frac{\partial^{p-1} \eta}{\partial v^{p-1}} y.$$

On vérifie facilement que ces quantités sont telles que

$$\frac{\partial y}{\partial u} = h\xi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = l\eta.$$

Donc :

Si deux réseaux sont orthogonaux, toute congruence conjuguée à l'un est orthogonale à une congruence harmonique à l'autre, et inversement.

Un raisonnement géométrique analogue à celui qui a été fait plus haut permettait d'établir que :

Si deux congruences sont orthogonales, tout réseau conjugué à l'une est orthogonal à un réseau harmonique à l'autre et inversement.

13. **Passage des espaces d'ordre pair aux espaces d'ordre impair.** — Prenons dans un espace d'ordre $n = 2p + 1$ une congruence $\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n)$ orthogonale à un réseau M dont les paramètres directeurs des tangentes sont $\xi_1, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Soit θ une solution de l'équation de Laplace à laquelle satisfait les quantités x. Le point de coordonnées

$$X_i = \frac{x_i}{\theta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

décrit un réseau μ parallèle à un réseau conjugué à G.

Les conditions d'orthogonalité de M et de $\mathcal{G}$ peuvent s'écrire

$$\Sigma\xi \frac{\partial X}{\partial v} = 0, \qquad \Sigma\eta \frac{\partial X}{\partial u} = 0,$$

$$\Sigma\xi \frac{\partial^p X}{\partial v^p} = 0; \qquad \Sigma\eta \frac{\partial^p X}{\partial u^p} = 0.$$

Supposons, en particulier, $\theta = x_n$. Le réseau μ est parallèle au réseau décrit par la trace de $\mathcal{G}$ sur le plan $x_n = 0$. D'autre part, les seules quantités $X_1, \ldots, X_{n-1}$; $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$; $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ interviennent dans les relations précédentes. On en déduit que :

Si, dans un espace d'ordre $2p + 1$, une congruence $\mathcal{G}$ est orthogonale à un réseau M la trace de la congruence $\mathcal{G}$ sur un espace d'ordre $2p$, la projection du réseau M sur le même espace forment deux réseaux orthogonaux.

On démontrerait de même que la projection de $\mathcal{G}$ sur un espace d'ordre $2p$ et la trace du réseau M sur le même espace forment deux congruences orthogonales.

On établit aussi que :

Si, dans un espace d'ordre $2p$ deux congruences sont orthogonales, la projection de l'une sur un espace d'ordre $2p - 1$ et la trace de l'autre sur le même espace forment une congruence et un réseau orthogonaux.

Si, dans un espace d'ordre $2p$, deux réseaux sont orthogonaux, la trace de l'un sur un espace d'ordre $2p - 1$, la projection de l'autre sur le même espace forment une congruence et un réseau orthogonaux.

CHAPITRE III.

RÉSEAUX ORTHOGONAUX O.

14. Déterminants orthogonaux. — Considérons un déterminant orthogonal

$$\Delta = \| x_i^1 \quad x_i^2 \quad \dots \quad x_i^n \|$$

dont les éléments, fonctions de deux variables u et v vérifient identiquement les relations

$$\sum_{k=1}^{k=n} (x_i^k)^2 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{k=n} (x_i^k)(x_{i'}^k) = 0.$$

On en déduit les relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i^k)^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} (x_i^k)(x_i^{k'}) = 0.$$

Les dérivées des éléments d'une même colonne peuvent être exprimées en fonctions linéaires et homogènes des éléments de cette colonne, les coefficients ne dépendant pas de la colone, par les relations

$$\frac{\partial x_i^k}{\partial u} = \sum_{l=1}^{l=n} p_i^l x_l^k,$$

$$\frac{\partial x_i^k}{\partial v} = \sum_{l=1}^{l=n} q_i^l x_l^k$$

$$(i = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, n).$$

On déduit de là

$$p_i^i = \sum_{k=1}^{k=n} x_i^k \frac{\partial x_i^k}{\partial u}, \qquad q_i^i = \sum_{k=1}^{k=n} x_i^k \frac{\partial x_i^k}{\partial v},$$

$$p_i^l = \sum_{k=1}^{k=n} x_l^k \frac{\partial x_i^k}{\partial u}, \qquad q_i^l = \sum_{k=1}^{k=n} x_l^k \frac{\partial x_i^k}{\partial v}.$$

Par suite on a

$$p_i^i = 0, \qquad q_i^i = 0,$$

$$p_i^l = -p_l^i; \qquad q_i^l = -q_l^i.$$

Les quantités p et q ainsi définies sont appelées rotations du déterminant. Il y a $n(n-1)$ rotations non nulles.

Il faut observer toutefois que les quantités ainsi obtenues ne sont pas distinctes. L'expression $\frac{\partial^2 x_i^k}{\partial u\,\partial v}$ peut être obtenue de deux manières différentes et s'exprime dans l'un ou l'autre cas en fonction linéaire et homogène de $x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k$. Puisqu'il ne peut exister entre les éléments des colonnes du déterminant une même relation linéaire et homogène les deux expressions obtenues doivent être identiques. Le calcul montre que les $n(n-1)$ rotations satisfont à $\frac{n(n-1)}{2}$ relations différentielles. Nous supposerons toujours ces relations vérifiées.

Si l'on suppose connues les rotations, on peut se proposer de calculer les éléments du déterminant orthogonal. Ceux qui sont relatifs à une même colonne vérifient les équations

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = \sum_{l=1}^{l=n} p_i^l x_l,$$
$$\frac{\partial x_i}{\partial v} = \sum_{l=1}^{l=n} q_i^l x_l$$

qui forment un système complet.

Comme dans le cas de l'espace à trois dimensions, on vérifie que toute solution des systèmes est telle que

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i^k)^2 = \text{const.}$$

que deux solutions x X vérifient également la relation

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i^k)(\mathrm{X}_i^k) = \text{const.}$$

Par suite, la solution la plus générale du problème se déduit d'une solution particulière en effectuant sur les éléments du déterminant donné une substitution orthogonale à coefficients constants.

Appelons opération différentielle d'ordre $n-2$ la résolution complète du système proposé ou, ce qui revient au même, la détermination des éléments du déterminant connaissant les rotations. Si l'on connaît les éléments d'une colonne le problème peut être ramené à un problème analogue dans un espace d'ordre $n-1$. Il en résulte que l'on peut achever la solution par quadratures lorsque l'on connaît $(n-2)$ solutions distinctes.

15. **Réseaux orthogonaux (réseaux O).** — On dit qu'un réseau est orthogonal si les tangentes aux courbes du réseau sont rectangulaires. Si les quantités x sont les coordonnées du réseau on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} = 0.$$

Soit

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

l'équation de Laplace à laquelle satisfont les coordonnées du réseau, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h\,\xi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = l\eta.$$

La relation indiquée est équivalente à la relation

$$\Sigma\,\xi\eta = 0.$$

On sait que l'équation de Laplace admet la solution

$$2\theta = \Sigma\,x^2.$$

Les égalités

$$\frac{\partial\xi}{\partial v} = n\eta,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial u} = m\xi$$

montrent que

$$\frac{\partial}{\partial v}\Sigma\,\xi^2 = n\Sigma\,\xi\eta = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\Sigma\,\eta^2 = m\Sigma\,\xi\eta = 0.$$

Par suite on a

$$\Sigma\xi^2 = U, \qquad \Sigma\eta^2 = V,$$

U étant fonction de u seul, V fonction de v seul. Si U et V sont des quantités différentes de zéro, on pourra par des changements de variables les réduire à l'unité. Le réseau O est un réseau ordinaire. On peut écrire

$$\Sigma \xi^2 = 1, \qquad \Sigma \eta^2 = 1. \qquad \Sigma \xi\eta = 0;$$

on aura alors

$$\Sigma\, dx^2 = h^2\, du^2 + l^2\, dv^2.$$

Considérons maintenant la matrice.

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \eta_n \end{Vmatrix}.$$

Elle peut être considérée comme définissant les deux dernières lignes d'un déterminant orthogonal

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-2}^1 & x_{n-2}^2 & x_{n-2}^3 & \dots & x_{n-2}^n \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \eta_n \end{vmatrix}.$$

Les relations

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi$$

montrent que les rotations $p_n^1, p_n^2, \dots, p_n^{n-2}, p_n^n$ de ce déterminant sont nulles et que l'on a

$$p_n^{n-1} = m.$$

De même les rotations $q_{n-1}^1, q_{n-1}^2, \dots, q_{n-1}^{n-1}$ sont nulles et l'on a

$$q_{n-1}^n = n$$

par suite des égalités

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta.$$

Des propriétés générales des déterminants orthogonaux on déduit que

$$\begin{gathered} p_1^n = p_2^n = \dots = p_{n-2}^n = p_n^n = 0, \qquad p_n^{n-1} = m, \\ q_1^{n-1} = q_2^{n-1} = \dots\dots\dots\dots = q_{n-1}^{n-1} = 0, \qquad q_n^{n-1} = m. \end{gathered}$$

Nous considérerons une forme particulière de déterminants caractérisée par les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_i^k}{\partial u} &= a_i\, \xi_k \\ \frac{\partial x_i^k}{\partial v} &= b_i\, \eta_k \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-2;\ k = 1, 2, \dots, n),$$

ce qui revient à dire que toutes les rotations p_l^i, q_l^i sont nulles, sauf p_i^{n-1} et q_i^n qui ont les valeurs $a_i b_i$.

Il ne reste plus que $2(n-1)$ rotations qui donnent les formules suivantes

$$\frac{\partial x_i^k}{\partial u} = a_i \xi_k, \qquad \frac{\partial \xi_k}{\partial u} = -\Sigma a_i x_i^k - m\eta_k, \qquad \frac{\partial \eta_k}{\partial u} = m\xi_k,$$
$$\frac{\partial x_i^k}{\partial v} = b_i \eta_k; \qquad \frac{\partial \xi_k}{\partial v} = n\eta_k; \qquad \frac{\partial \eta_k}{\partial v} = -\Sigma b_i x_i^k - n\xi_k.$$

Si l'on exprime que le système obtenu est un système complet, on est conduit aux $2n-3$ relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial a_i}{\partial v} &= m b_i,\\ \frac{\partial b_i}{\partial u} &= n a_i,\end{aligned}\right. \qquad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + \Sigma a_i b_i = 0.$$

Inversement, si ces dernières relations sont satisfaites par $2(n-1)$ rotations données, les éléments du déterminant peuvent être calculés à une substitution orthogonale à coefficients constants près effectuée sur les éléments des lignes.

Les éléments des $(n-2)$ premières lignes de Δ définissent les coordonnées de $(n-2)$ points situés sur l'hypersphère

$$(x_i^1)^2 + (x_i^2)^2 + \ldots + (x_i^n)^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Ces points décrivent des réseaux O dont les tangentes ont pour paramètres ξ, η.

Si l'on effectue sur les $(n-2)$ premiers éléments des différentes colonnes une substitution orthogonale à coefficients constants, on déduit du déterminant Δ un autre déterminant Δ' qui est dit équivalent à Δ.

Les rotations de ces deux déterminants sont différentes, les quantités m et n seules étant inchangées. On vérifie que si a_i, b_i ou, a'_i, b'_i sont les rotations correspondantes de $\Delta\Delta'$, les quantités

$$\Sigma(a_i)^2, \quad \Sigma(b_i)^2, \quad \Sigma a_i b_i$$

sont les mêmes pour Δ, Δ'. On dit que ces quantités sont les invariants du déterminant orthogonal.

Nous allons montrer que tous ces déterminants équivalents sont définis lorsque l'on connaît les deux dernières lignes.

Supposons données $2n$ fonctions $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ satisfaisant aux relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i)^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} (\eta_i)^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \eta_i = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial v} = n\eta_i,$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial u} = m\,\xi_i.$$

Il est possible par des opérations algébriques d'adjoindre aux quantités précédentes $n(n-2)$ fonctions y telles que le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \ldots & y_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n-2}^1 & y_{n-2}^2 & \ldots & y_{n-2}^n \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_n \end{vmatrix}$$

soit orthogonal.

D'apres la théorie générale, on peut écrire

$$\frac{\partial y_i^k}{\partial u} = \Sigma P_i^l y_l^k + A_i\,\xi_k,$$

$$\frac{\partial y_i^k}{\partial v} = \Sigma Q_i^l y_l^k + B_i \eta_k;$$

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial u} = -\Sigma A_i y_i^k - m\eta_k, \qquad \frac{\partial \eta_k}{\partial u} = m\xi_k,$$

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial v} = n\eta_k; \qquad \frac{\partial \eta_k}{\partial v} = -\Sigma B_i y_{ik} - n\xi_k.$$

Les relations obtenues en écrivant les conditions d'intégrabilité des premières équations montrent que les quantités $P_{il}\,Q_{il}$ peuvent être considérées comme des rotations d'un déterminant orthogonal δ d'ordre $n-2$.

Supposons maintenant que l'on ait calculé les éléments de δ

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-2}^1 & \alpha_{n-2}^2 & \ldots & \alpha_{n-2}^{n-2} \end{vmatrix}$$

et que l'on effectue sur les éléments des diverses colonnes de Δ_1 une substitution orthogonale à coefficients variables définie par les éléments de δ. On déduit ainsi de Δ_1, un nouveau déterminant orthogonal. On vérifie aisément que les éléments des $n-2$ premières lignes définissent les quantités x indiquées précédemment.

Il est clair que l'on peut déduire de Δ_1 une suite de déterminants orthogonaux en effectuant sur les éléments de δ une substitution orthogonale à coefficients constants. Le problème de la détermination du déterminant Δ connaissant les éléments de ses deux dernières lignes est équivalent à la recherche d'un déterminant orthogonal d'ordre $n-2$ dont on connaît les rotations.

16. Propriétés des éléments d'une colonne d'un déterminant orthogonal. — Considérons les éléments

$$x_1, \quad x_2, \quad x_{n-2}, \quad \xi, \quad \eta$$

d'une colonne quelconque d'un déterminant orthogonal Δ.

On a

$$\frac{\partial x_k}{\partial u} = a_k \xi,$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial v} = b_k \eta.$$

On en déduit que les $n-2$ quantités x sont solutions de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

On a d'autre part la relation

$$\sum_{i=1}^{i=n-2} x_i^2 + \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Inversement, soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$, $n-2$ solutions d'une équation de Laplace,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

telle que, l'on ait

$$\sum_{i=1}^{i=n-2} x_i^2 + h^2 + l^2 = 1.$$

Montrons que les n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$; $\xi = h$, $\eta = l$ sont les éléments d'une colonne d'un déterminant orthogonal.

Les rotations seront définies par les égalités

$$a_k = \frac{1}{\xi}\frac{\partial x_k}{\partial u}, \qquad m = \frac{1}{\xi}\frac{\partial \eta}{\partial u},$$
$$b_k = \frac{1}{\eta}\frac{\partial x_k}{\partial v}; \qquad n = \frac{1}{\eta}\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Les relations

$$\frac{\partial a_k}{\partial v} = m\,b_k,$$
$$\frac{\partial b_k}{\partial u} = n\,a_n$$

expriment que les quantités x sont solutions de l'équation de Laplace.

On déduit ensuite

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\Sigma a_k x_k - m\eta,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial v} = -\Sigma b_k x_k - n\,\xi.$$

Comme on a

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = m\,\xi.$$

En égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\ v}$ ou de $\frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}$, on trouve

$$\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + \Sigma a_k b_k = 0,$$

et l'on voit que les quantités a_k, b_k sont les rotations d'un déterminant orthogonal.

Remarques. — I. L'équation de Laplace à laquelle satisfont les quantités x n'est pas modifiée lorsque l'on substitue aux quantité h et l les quantités hU, lV, U étant fonction de u seul, V de v seul.

On peut donc supposer que les quantités x, h, l sont liées par la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n\ 2}^2 + h^2 U^2 + l^2 V^2 = 1.$$

On prendra alors

$$\xi = h\mathrm{U},$$
$$\eta = l\mathrm{V}.$$

II. Les propriétés indiquées subsistent également lorsque l'on considère des combinaisons linéaires à coefficients constants des éléments des différentes lignes de Δ.

Les quantités

$$\begin{aligned} Y_k &= \alpha_1 x_1^k + \alpha_2 x_2^k + \ldots + \alpha_n x_n^k, \\ \xi &= \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n, \\ \eta &= \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \ldots + \alpha_n \eta_n \end{aligned}$$

vérifient l'égalité

$$\sum_{i=1}^{i=n-2} Y_k^2 + \xi^2 + \eta^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i^2 = \text{const.}$$

Les $n - 2$ quantités y étant solution de l'équation.

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v}.$$

Il en résulte immédiatement que si l'on considère $n - 2$ solutions d'une équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v}$$

telles que l'on ait

$$\Sigma Y_i^2 + h^2 U^2 + l^2 V^2 = \text{const.},$$

on peut en déduire en général les éléments d'une colonne d'un déterminant orthogonal Δ.

Lorsque la somme indiquée est nulle les quantités Y peuvent définir une combinaison isotrope des éléments de deux colonnes d'un tel déterminant telle que

$$x_1' + i x_1^2, \quad x_2' + i x_2^2, \quad \ldots, \quad x_{n-2}' + i x_{n-2}^2.$$

17. **Détermination des réseaux orthogonaux.** — Lorsque l'on connaît les paramètres normaux ξ, η des tangentes, la détermination des réseaux O est liée à la résolution des systèmes suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= h \xi_i, & \frac{\partial h}{\partial v} &= lm, \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= l \eta_i : & \frac{\partial l}{\partial u} &= hn. \end{aligned}$$

Les rotations m et n étant connues, on calculera d'abord h et l puis les coordonnées x seront définies par des quadratures.

Supposons donnés maintenant les éléments d'un déterminant Δ dont les deux dernières lignes sont les paramètres ξ, η des tangentes à un réseau O. On peut si l'on désigne par X_1, X_n les coordonnées du point qui décrit le réseau poser

$$X_k = p_1 x_1^k + p_2 x_2^k + \ldots + p_{n-2} x_{n-2}^k + q\xi_k + r\eta_k.$$

Les n quantités $p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}, q, r$ étant caractérisées par les égalités

$$\frac{\partial X_k}{\partial u} = h\xi_k,$$
$$\frac{\partial X_k}{\partial v} = l\eta_k$$

doivent vérifier les relations

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p_i}{\partial u} &= a_i q\\ \frac{\partial p_i}{\partial v} &= b_i r\end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2); \qquad \begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial u} &= qm,\\ \frac{\partial q}{\partial v} &= rn.\end{aligned}$$

On a, en outre

$$h = \Sigma a_i p_i + \frac{\partial q}{\partial u} + rm,$$
$$l = \Sigma b_i p_i + \frac{\partial r}{\partial v} + qn.$$

Lorsque les quantités q et r sont déterminées les quantités p sont obtenues par quadratures. On peut obtenir ainsi tous les réseaux O correspondant à un déterminant orthogonal donné.

Remarque. — On sait que l'équation du réseau admet la solution θ, définie par

$$2\theta = \Sigma X^2 = \Sigma p^2 + q^2 + r^2.$$

On voit immédiatement que

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = hq,$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = lr.$$

Lorsque θ est constant on a évidemment

$$X_k = \Sigma \alpha_i x_i^k,$$

les quantités α_i étant constantes. Ces réseaux sont tracés sur une sphère ou sur un cône suivant que l'on a $\sum \alpha_i^2 \neq 0$ ou $= 0$. Ils sont obtenus par des combinaisons linéaires ou isotropes des lignes d'un déterminant orthogonal Δ.

18. **Congruences normales à un réseau O.** — Soit M un point de coordonnées $X_1, \ldots, X_n$ qui décrit un réseau O correspondant à un déterminant orthogonal Δ dont les éléments d'une colonne sont

$$\| x_1^i \quad x_2^i \quad \ldots \quad x_{n-2}^i \quad \xi_i \quad \eta_i \|.$$

Une droite Γ passant par M perpendiculaire aux deux tangentes du réseau aura ses paramètres directeurs $y, \ldots, y_n$ définis par les relations

$$y_i = \alpha_1 x_1^i + \alpha_2 x_2^i + \ldots + \alpha_{n-2} x_{n-2}^i.$$

Précisons, à quelles conditions doivent satisfaire les quantités α pour que cette droite L décrive une congruence.

Les quantités X satisfont aux relations

$$\frac{\partial X}{\partial u} = h\xi,$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = l\eta,$$

et un point P de la droite L a pour coordonnées

$$Y = X + \rho y.$$

Exprimons que si u ou v varient seuls ce point décrit une courbe tangente à L. On devra vérifier que

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = k\, y,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial v} = k_1 y.$$

Le calcul montre que dans ces conditions on doit avoir

$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial u} = \ldots = \frac{1}{\alpha_{n-2}}\frac{\partial \alpha_{n-2}}{\partial u},$$
$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial v} = \ldots = \frac{1}{\alpha_{n-2}}\frac{\partial \alpha_{n-2}}{\partial v}$$

Le rapport de deux quantités α est donc indépendant de u et de v et comme les quantités y peuvent être définies à un facteur constant près il est possible de réduire toutes les quantités α à des constantes.

La réciproque est évidente. On peut donc définir à l'aide de $n-3$ constantes arbitraires les congruences normales à un réseau O donné.

La normale est ordinaire si l'on a $\sum\alpha^2 \neq 0$. On pourra toujours supposer $\sum\alpha^2 = 1$. Elle est isotrope si l'on a $\sum\alpha^2 = 0$.

Remarque. — D'après ce qui précède, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite D, normale à un réseau O, décrive une congruence conjuguée à ce réseau, est que ses cosinus directeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liés par la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

satisfassent à une même équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{P}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Cette condition est équivalente à la suivante.

Il faut et il suffit que l'équation de Laplace à laquelle satisfont ses paramètres directeurs $x_1, \ldots, x_n$ admette la solution $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

19. Réseaux et congruences se rattachant aux réseaux et congruences O. — Nous dirons qu'une figure (congruence ou réseau) d'un espace d'ordre n possède la propriété geométrique pH si elle peut être considérée comme la projection sur cet espace d'une figure de même nature située dans un espace d'ordre $n+p-1$ possédant la propriété géométrique H.

Un réseau M décrit par le point de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sera un réseau pO s'il existe $p-1$ solutions $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-1}$ de son équation de Laplace telles que le point de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n+p-1}$ décrive dans l'espace d'ordre $n+p-1$ correspondant un réseau O. Les $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+p-1}$ sont les coordonnées complémentaires du réseau.

L'équation de Laplace admet la solution

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=n+p-1} (x_i)^2.$$

On a

$$\sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 \neq 0,$$

$$\sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2 \neq 0,$$

ou en faisant intervenir les paramètres directeurs des tangentes

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{i=n+p-1} (\xi_i)^2 \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\eta_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{i=n+p-1} (\eta_i)^2 \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \eta_i + \sum_{i=n+1}^{i=n+p-1} \xi_i \eta_i = 0.$$

Ces dernières relations font intervenir seulement les éléments de direction du réseau. Les quantités $\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+p-1}$; $\eta_{n+1}, \ldots, \eta_{n+p-1}$ sont les paramètres complémentaires du réseau point pO.

20. **Congruences** I, pI. — Une congruence est I lorsque les paramètres directeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la droite qui la décrit satisfont aux conditions

$$\Sigma X^2 = 0,$$

$$\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 \neq 0, \quad \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 \neq 0.$$

En tenant compte de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les quantités X on montre que l'on a aussi

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = 0.$$

Les conditions indiquées subsistent lorsque l'on multiplie les quantités X par un même facteur.

Lorsque l'on peut déterminer $p-1$ fonctions X_{n+1}, X_{n+p-1} solutions de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les paramètres $X_1, \ldots, X_n$ d'une congruence telles que

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{i=n+p-1} (X_i)^2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n+p-1} \left(\frac{\partial X_i}{\partial u}\right)^2 \neq 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=n+p-1} \left(\frac{\partial X_i}{\partial v}\right)^2 \neq 0,$$

on dit que la congruence définie par les n quantités $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est une congruence p I.

Les quantités $X_{n+1}, \ldots, X_{n+p-1}$ sont les paramètres complémentaires de la congruence p I.

Une normale isotrope à un réseau O décrit une congruence I.

Une normale ordinaire décrit une congruence 2 I. Nous avons vu que l'équation de Laplace à laquelle satisfont les n paramètres directeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ admet la solution

$$Y_{n+1} = \sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}.$$

On peut donc dire qu'une normale ordinaire décrit une congruence 2 I. Il suffit de prendre pour paramètre complémentaire

$$X_{n+1} = i Y_{n+1}.$$

CHAPITRE IV.

Classification des congruences et des réseaux.

21. L'objet de cette étude est d'indiquer les caractères des congruences et des réseaux qui se déduisent des réseaux orthogonaux par les opérations géométriques indiquées au premier chapitre.

22. Congruences conjuguées à un réseau O. — Nous avons déjà déterminé toutes les congruences engendrées par les normales à un réseau O et montré qu'il existait parmi les congruences conjuguées des congruences I et 2 I.

Considérons maintenant une congruence conjuguée quelconque et la congruence point qui lui est parallèle. Un point convenablement choisi sur les droites de cette congruence décrit un réseau O parallèle au réseau donné. Nous prendrons comme paramètres directeurs les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de ce nouveau réseau.

L'équation de Laplace à laquelle satisfont les quantités x admet les $n+2$ solutions

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \qquad \theta = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \quad 1.$$

Posons

$$x_{n+1} + i x_{n+2} = \theta,$$
$$x_{n+1} - i x_{n+2} = 1.$$

On a immédiatement

$$\sum_{i=1}^{i=n+2} (x)^2 = 0,$$

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \neq 0, \qquad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \neq 0.$$

qui montrent que la congruence définie par les n quantités x est une congruence 3I lorsque θ n'est pas constant.

Les congruences conjuguées a un réseau O sont des congruences I, 2I, 3I.

23. **Congruences conjuguées à un réseau** pO. — Un réseau pO étant défini comme la projection d'un réseau O d'un espace d'ordre $n+p-1$ sur un espace d'ordre n, il résulte immédiatement des résultats précédents que les congruences qui lui sont conjuguées sont pI, $(p+1)$I, $(p+2)$I.

24. **Réseaux conjugues aux congruences** I. — Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les parametres directeurs d'une congruence I, θ une solution de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les quantités X. Le point M dont les coordonnées sont

$$x_i = \frac{X_i}{\theta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

décrit un réseau conjugué à la congruence point parallèle à la congruence donnée. On a

$$\Sigma x^2 = 0,$$

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \neq 0, \qquad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \neq 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

A tout réseau conjugué à la congruence I donnée correspond un réseau parallèle conjugué à la congruence point.

Il en résulte que :

Tout réseau conjugué à une congruence I est un réseau O.

25. **Réseaux conjugués aux congruences** 2I, ..., pI. — Les réseaux conjugués à ces congruences peuvent être déterminés par la méthode précédente.

Considérons d'abord une congruence 2I et soit X_{n+1} la coordonnée complémentaire de cette congruence. On pourra prendre pour solution particulière

$$\theta = X_{n+1}.$$

Le point de coordonnées

$$x_i = \frac{X_i}{\theta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

décrit un réseau O.

Une congruence 2I admet donc une infinité de réseaux conjugués parallèles qui sont O.

Lorsque θ est quelconque les réseaux conjugués correspondants sont 2O. La quantité

$$x_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{\theta}$$

est la coordonnée complémentaire du réseau.

Considérons maintenant une congruence pI. Soient $X_1, \ldots, X_n$ ses paramètres directeurs et $X_{n+1}, \ldots, X_{n+p-1}$ les paramètres complémentaires.

Posons

$$x_i = \frac{X_i}{\theta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+p-1).$$

Lorsque θ est quelconque le point de coordonnées $x_i = \frac{X_i}{\theta}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ décrit un réseau pO, les coordonnées complémentaires étant les quantités $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-1}$.

Supposons que l'on prenne $\theta = x_{n+p-1}$, le raisonnement précédent montre que le point de coordonnées x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ décrit un réseau $(p-1)$ O. Les coordonnées complémentaires étant $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-2}$.

De même si l'on choisit $\theta = x_{n+p-2} + i x_{n+p-1}$ le point de coordonnées x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ décrit un réseau $(p-2)$O. Les coordonnées complémentaires étant $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-3}$.

On voit d'ailleurs d'une façon plus générale que si l'on prend

$$\theta = a_1 x_{n+1} + \ldots + a_{p-1} x_{n+p-1}$$

les quantités a étant constantes, on peut réduire les coordonnées complémentaires à $p-2$ ou à $p-3$ suivant que l'on a

$$\Sigma a^2 \neq 0$$

ou

$$\Sigma a^2 = 0.$$

Les réseaux correspondants sont $(p-1)$ O ou $(p-2)$ O.

Les réseaux conjugués à une congruence pI sont donc des réseaux $(p-2)$O, $(p-1)$O ou pO.

26. Congruences C (harmoniques aux réseaux O) et pC. — On dit qu'une congruence est C lorsque ses n paramètres directeurs X_1, X_2, ..., X_n qui satisfont à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + RX$$

vérifient la relation

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 = h^2 U + l^2 V,$$

U et V étant des fonctions de u et de v seuls, différentes de zéro.

Cette propriété subsiste lorsque l'on multiplie les quantités X par un même facteur λ et ne fait intervenir que les éléments de direction des droites de la congruence.

La projection d'une congruence C d'un espace d'ordre $n+p-1$ sur un espace d'ordre n définit une congruence pC.

27. Congruences harmoniques aux réseaux O, pO. — Les congruences C peuvent être rattachées géométriquement aux réseaux O de la façon suivante.

Désignons par ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n; η_1, η_2, ..., η_n les paramètres normaux des tangentes à un réseau O. Toute congruence harmonique à ce réseau a des paramètres directeurs X_1, X_2, ..., X_n donnés par les formules

$$X_i = q\,\xi_i - r\,\eta_i$$

et les quantités X satisfont à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \left(mn - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\,\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial u}\right)X.$$

On a

$$\Sigma(X_i)^2 = q^2 + r^2.$$

Par suite :

Toute congruence harmonique à un réseau O est une congruence C.

Étudions de même les congruences harmoniques aux réseaux pO. Si x_1, x_2, ..., x_n sont les coordonnées d'un point M qui décrit un réseau, θ une solution de l'équation du réseau, les paramètres directeurs Z_1, Z_2, ..., Z_n de toute congruence harmonique sont donnés par la formule

$$Z_i = \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

Lorsque le réseau M est 2O on a une coordonnée complémentaire x_{n+1}. Les congruences harmoniques correspondant à une solution quelconque θ de l'équation sont des congruences 2C. Le paramètre complémentaire Z_{n+1} est donné par

$$Z_{n+1} = \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial v}.$$

On peut prendre $\theta = x_{n+1} + h$. La quantité z_{n+1} étant nulle, les congruences harmoniques correspondantes sont des congruences C. Les congruences harmoniques à un réseau 2O sont des congruences 2C ou des congruences C.

Dans le cas des réseaux pO, on a $p-1$ coordonnées complémentaires $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-1}$. Lorsque l'on prend une solution quelconque θ de l'équation du réseau, la congruence harmonique correspondante est pC.

Si l'on choisit $\theta = x_{n+1}$ ou plus généralement

$$\theta = a_1 x_{n+1} + \ldots + a_{p-1} x_{n+p-1},$$

les quantités a étant des constantes telles que $\Sigma a^2 \neq 0$, l'une des coordonnées complémentaires de la congruence peut être supprimée et la congruence est $(p-1)$C.

D'une façon plus particulière encore, on peut prendre

$$\theta = x_{n+p-2} + i x_{n+p-1}$$

ou encore, en conservant les notations précédentes, une fonction linéaire à coefficients constants des $p-1$ coordonnées complémentaires telle que $\Sigma a^2 = 0$. On voit alors que deux coordonnées complémentaires de la congruence peuvent être supprimées et que la congruence est $(p-2)$C.

Les congruences harmoniques aux réseaux pO sont des congruences $(p-2)$C, $(p-1)$C ou pC.

28. Réseaux harmoniques aux congruences C, pC. — Les propriétés étudiées ne faisant intervenir que la direction des éléments, nous raisonnerons sur le réseau point parallèle au réseau M harmonique à une congruence C. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \ldots, \eta_n$ les paramètres des tangentes à ce réseau. On a

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi_i}{\partial v} &= n\eta_i\\ \frac{\partial \eta_i}{\partial u} &= m\,\xi_i\end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les paramètres directeurs $X_1, \ldots, X_n$ de la congruence peuvent être pris égaux à

$$X_i = q\,\xi_i - r\eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

tandis que les coordonnées des foyers A et B sont données par

$$\text{A,}\; x_i = \frac{\xi_i}{r}, \qquad \text{B,}\; x_i = \frac{\eta_i}{q} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On doit avoir

$$\frac{\partial r}{\partial v} = nq,$$

$$\frac{\partial q}{\partial u} = mr.$$

L'équation de Laplace à laquelle satisfont les quantités X est

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + RX.$$

La congruence donnée étant une congruence C, on a

$$\Sigma X^2 = q^2 U + r^2 V.$$

Si l'on remplace les quantités X par leur valeur, on obtient

$$q^2(\Sigma\xi^2 - U) - 2qr\Sigma\xi\eta + r^2(\Sigma\eta^2 - V) = 0.$$

Il est toujours possible de définir deux quantités q_1, r_1 par les relations

$$\Sigma\,\xi^2 - U = rr_1,$$

$$\Sigma\eta^2 - V = qq_1.$$

On a alors

$$2\Sigma\xi\eta = qr_1 + rq_1.$$

Par différentiation on déduit des égalités précédentes :

$$2n\Sigma\xi\eta = nqr_1 + r\frac{\partial r_1}{\partial v},$$

$$2n\Sigma\xi\eta = mrq_1 + q\frac{\partial q_1}{\partial u}.$$

On a donc

$$\frac{\partial r_1}{\partial v} = n q_1,$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial u} = m r_1.$$

Les fonctions q_1, r_1 qui ont été définies satisfont aux mêmes relations que les fonctions q, r.

Nous distinguerons les différents cas suivants :

1° On a

$$\Sigma\, \xi^2 = \mathrm{U},$$
$$\Sigma\, \eta^2 = \mathrm{V}.$$

Le réseau harmonique à la congruence considérée est un réseau O.

2° $q_1 = -\omega^2 q$ et, par suite, $r_1 = -\omega^2 r$ (ω étant une constante). On peut écrire :

$$\Sigma\, \xi^2 + \omega^2 r^2 = \mathrm{U},$$
$$\Sigma\, \eta^2 + \omega^2 q^2 = \mathrm{V}.$$

Le réseau harmonique correspondant est un réseau 2 O, les parametres complémentaires des tangentes étant

$$\xi_{n+1} = \omega r,$$
$$\eta_{n+1} = \omega q.$$

3° q_1, r_1 sont quelconques. On peut définir les quantités ξ_{n+1}, ξ_{n+2}; η_{n+1}, η_{n+2} par les relations

$$\xi_{n+1} + i\xi_{n+2} = r, \qquad \eta_{n+1} + i\eta_{n+2} = q,$$
$$\xi_{n+1} - i\xi_{n+2} = -r_1, \qquad \eta_{n+1} - i\eta_{n+2} = -q_1.$$

Ces quantités nouvelles vérifient les relations

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi,$$

et les égalités indiquées plus haut peuvent s'écrire

$$\sum_{i=1}^{i=n+2} (\xi_i)^2 = \mathrm{U},$$

$$\sum_{i=1}^{i=n+2} (\eta_i)^2 = \mathrm{V}.$$

On voit que le réseau harmonique est un réseau 3O. Les paramètres complémentaires des tangentes à ce réseau étant les quantités ξ_{n+1}, ξ_{n+2}; η_{n+1}, η_{n+2}.

En résumé :

Les réseaux harmoniques à une congruence C sont des réseaux O, 2O ou 3O.

En remarquant qu'une congruence pC est la projection sur un espace à n dimensions d'une congruence C située d'un espace à $n+p-1$ dimensions, on conclut immédiatement :

Les réseaux harmoniques à une congruence pC sont des réseaux pO, $(p+1)$O ou $(p+2)$O.

29. Relations entre les congruences C et les déterminants orthogonaux. — Considérons un déterminant orthogonal Δ d'ordre $n+2$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n+1} & x_1^{n+2} \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n+1} & x_2^{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^{n+1} & x_n^{n+2} \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_{n+1} & \xi_{n+2} \\ \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_{n+1} & \eta_{n+2} \end{vmatrix}$$

et les points S et R d'un espace d'ordre n dont les coordonnées sont :

$$(\mathrm{S}) \qquad \frac{\xi_1}{\xi_{n+1}+i\xi_{n+2}}, \quad \frac{\xi_2}{\xi_{n+1}+i\xi_{n+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}+i\xi_{n+2}},$$

$$(\mathrm{R}) \qquad \frac{\eta_1}{\eta_{n+1}+i\eta_{n+2}}, \quad \frac{\eta_2}{\eta_{n+1}+i\eta_{n+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\eta_n}{\eta_{n+1}+i\eta_{n+2}}.$$

Ces points décrivent les réseaux focaux d'une congruence C obtenue en prenant la trace du réseau O point déduit du déterminant Δ sur l'hyperplan d'équation

$$X_{n+1}+iX_{n+2}=0,$$

puis en projetant la droite obtenue dans un espace d'ordre n.

Les calculs qui ont été faits au paragraphe précédent montrent que toute congruence C d'un espace d'ordre n peut être obtenue par cette méthode.

On voit que les paramètres directeurs de cette congruence sont les quantités $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies par les égalités

$$X_i=(\eta_{n+1}+i\eta_{n+2})\xi_i-(\xi_{n+1}+i\xi_{n+2})\eta_i.$$

Remarquons en outre que l'équation de Laplace à laquelle satisfont ces n quantités s'écrit

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \left(mn - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial u}\right)X,$$

en posant

$$q = \eta_{n+1} + i\eta_{n+2},$$
$$r = \xi_{n+1} + i\,\xi_{n+2}.$$

Considérons d'autre part la congruence $\mathcal{G}_1$ décrite par une droite dont les paramètres directeurs $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont obtenus en prenant une combinaison isotrope des deux dernières colonnes de Δ et définis par les égalités

$$Y_i = x_i^{n+1} + i x_i^{n+2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous avons vu que ces quantités Y sont solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v},$$

où l'on a

$$h = \xi_{n+1} + i\,\xi_{n+2},$$
$$l = \eta_{n+1} + i\eta_{n+2}.$$

La relation

$$\sum_{i=1}^{i=n} (Y_i)^2 + h^2 + l^2 = 0$$

montre que la congruence $\mathcal{G}_1$ est une congruence C.

Il est donc possible, par deux méthodes différentes, de déduire d'un déterminant orthogonal des congruences C. Les congruences C ainsi obtenues sont dites associées. Si l'on étudie les invariants des équations de Laplace correspondantes, on voit que le premier invariant de l'une des équations est égal au deuxième invariant de l'autre. On a, par exemple,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\right) - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial u} - \left(mn - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\right) = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}.$$

Nous dirons que les équations de Laplace sont à invariants opposés.

Il résulte de là que si l'on a deux équations de Laplace à invariants opposés, l'une d'elles étant l'équation d'une congruence C d'un espace d'ordre n, il en est de même de l'autre.

La détermination des paramètres de la deuxième congruence, connaissant ceux de la première, sera faite par l'intermédiaire du déterminant orthogonal Δ.

30. **Réseaux O harmoniques aux congruences C.** — Considérons une congruence C de foyers A et B située dans un espace d'ordre n. Un réseau point harmonique à C est, en général un réseau 3O et peut être considéré comme la projection sur l'espace d'ordre n d'un réseau O situé dans un espace d'ordre $n+2$.

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n+2}$ les paramètres directeurs des tangentes au réseau O. Les coordonnées des points A et B peuvent être représentées par

$$\text{(A)} \qquad y_i = \frac{\xi_i}{\xi_{n+1} + i\,\xi_{n+2}}$$

$$\text{(B)} \qquad z_i = \frac{\eta_i}{\eta_{n+1} + i\,\eta_{n+2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut dire que les points A et B sont obtenus en prenant les traces A_1, B_1 des tangentes au réseau point O sur l'hyperplan

$$x_{n+1} + i x_{n+2} = 1$$

et en projetant ces points sur l'espace d'ordre n.

Considérons le déterminant orthogonal correspondant au réseau O

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n+1} & x_1^{n+2} \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n+1} & x_2^{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^{n+1} & x_n^{n+2} \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_{n+1} & \xi_{n+2} \\ \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_{n+1} & \eta_{n+2} \end{vmatrix}.$$

Les congruences $\mathcal{G}_1$ conjuguées au réseau point O peuvent être définies à l'aide du déterminant Δ. Désignons par $X_1, X_2, \ldots, X_{n+2}$ les paramètres de l'une d'elles, par M_1 sa trace sur l'hyperplan

$$x_{n+1} + i x_{n+2} = 1$$

dont les coordonnées sont

$$Z_1 = \frac{X_1}{X_{n+1} + i X_{n+2}}, \qquad Z_2 = \frac{X_2}{X_{n+1} + i X_{n+2}}, \qquad \ldots, \qquad Z_n = \frac{X_n}{X_{n+1} + i X_{n+2}},$$

$$Z_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{X_{n+1} + i X_{n+2}}, \qquad Z_{n+2} = \frac{X_{n+2}}{X_{n+1} + i X_{n+2}}.$$

Le point M_1 décrit un réseau harmonique à la congruence A_1B_1, les n quantités $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ définissent les coordonnées d'un point M qui décrit un réseau harmonique à AB.

Nous pouvons remarquer qu'inversement il est possible de déduire d'un réseau M harmonique à AB un réseau M_1 harmonique à A_1B_1 obtenu en prenant la trace sur l'hyperplan

$$x_{n+1} + i x_{n+2} = 1$$

d'une congruence conjuguée au réseau O.

Les relations géométriques entre les réseaux M et M_1 sont des conséquences de la remarque suivante :

On a

$$Z_{n+1} + iZ_{n+2} = 1$$

et, par suite,

$$(dZ_{n+1})^2 + (dZ_{n+2})^2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (dZ_i)^2 = \sum_{i=1}^{i=n+2} (dZ_i)^2.$$

Trois cas peuvent être envisagés :

1° La congruence $\mathcal{G}_1$ est une congruence 3I. Le réseau M_1 est 3O ainsi que le réseau M.

3° La congruence $\mathcal{G}_1$ est 2I. Les réseaux M et M_1 sont 2O.

3° La congruence $\mathcal{G}_1$ est I. Les réseaux M et M_1 sont O.

Transformation de Ribaucour. — Cette transformation résulte des propriétés des réseaux O harmoniques à une même congruence C. Tous ces réseaux peuvent être obtenus par la construction précédente et se déduisent des normales isotropes au réseau point O.

Les distances M_1A_1, M_1B_1 du point M_1 aux foyers A_1, B_1 de la congruence harmonique A_1B_1 sont constantes. On vérifie immédiatement que

$$MA_1^2 = OA_1^2, \qquad MB_1^2 = OB_1^2.$$

Calculons maintenant les distances de M aux foyers A et B de la congruence harmonique AB.

On a

$$MA^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (Z_i - y_i)^2.$$

Désignons par y_{n+1}, y_{n+2} les deux dernières coordonnées de A_1 qui sont

$$y_{n+1} = \frac{\xi_{n+1}}{\xi_{n+1} + i\xi_{n+2}}, \qquad y_{n+2} = \frac{\xi_{n+2}}{\xi_{n+1} + i\xi_{n+2}}$$

et vérifient la relation

$$y_{n+1} + iy_{n+2} = 1.$$

On voit que l'on a

$$Z_{n+1} - y_{n+1} + i(Z_{n+2} - y_{n+2}) = 0$$

et, par suite,

$$(Z_{n+1} - y_{n+1})^2 + (Z_{n+2} - y_{n+2})^2 = 0.$$

On peut donc écrire

$$MA^2 = \sum_{i=1}^{i=n+2} (Z_i - y_i)^2 = MA_1^2 = OA_1^2 = \text{const.}$$

Un calcul analogue montre que MB^2 est aussi constant.

Donc :

Tous les points M qui décrivent des réseaux O harmoniques à une congruence C de foyers A et B sont tels que les longueurs MA, MB soient constantes.

Remarque. — Dans un espace d'ordre 2, il existe deux réseaux O harmoniques à une congruence C. Les points M_1, M_2 qui décrivent ces reseaux sont symétriques par rapport a la droite qui décrit la congruence.

Dans un espace d'ordre 3 (espace ordinaire), les points qui décrivent des réseaux O harmoniques à une congruence C se trouvent pour des valeurs données des paramètres u et v sur un cercle ayant pour axe la droite qui décrit la congruence. La tangente au cercle est la normale au réseau. On a ainsi la propriété classique due à Ribaucour.

31. **Réseaux K (conjugués aux congruences C) et pK.** — On appelle réseau K tout réseau conjugue à une congruence C. Pour établir la relation entre les éléments de direction de tels réseaux il suffit de raisonner sur une congruence point.

Soient x_1, x_2, ..., x_n les paramètres d'une telle congruence choisis de telle manière que le point de coordonnées x_1, x_2, ..., x_n décrive un réseau dont l'équation de Laplace s'écrit :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Il est toujours possible de choisir les quantités h et l de manière que l'on ait

$$2\theta = \Sigma x^2 + h^2 + l^2 = 0.$$

L'équation de Laplace admet la solution θ.

Inversement, cherchons à quelles conditions doivent satisfaire les quantités x, h, l pour que l'équation de Laplace admette cette solution.

Un calcul facile donne :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}$$
$$= \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + h\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + l\frac{\partial^2 l}{\partial u \partial v} - \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v} l \frac{\partial l}{\partial u} - \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u} h \frac{\partial h}{\partial v}.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h\xi, \qquad \frac{\partial h}{\partial v} = lm,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = l\eta; \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = hn.$$

En tenant compte de ces relations, la condition précédente après suppression du facteur hl s'écrit

$$\sum \xi\eta + \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial v} = 0.$$

Montrons maintenant que cette relation caractérise les réseaux K. Il suffit d'établir que si les parametres des tangentes d'un réseau M et les rotations satisfont à la relation précédente, il existe une congruence C conjuguée au réseau.

Nous remarquons que les quantités

$$\begin{array}{lllll} A_1 = \xi_1, & A_2 = \xi_2, & \ldots, & A_n = \xi_n, & M = n, \\ B_1 = \eta_1, & B_2 = \eta_2, & \ldots, & B_n = \eta_n, & N = m, \end{array}$$

peuvent être considérées comme les rotations d'un déterminant orthogonal Δ d'ordre $n+2$,

$$\Delta = \| X_1^1 \quad X_1^2 \quad \ldots \quad X_1^n \quad \xi'_1 \quad \eta'_1 \|$$

et nous pouvons former une combinaison isotrope des n premiers éléments de deux colonnes telle que

$$Y_i = X_1^{n+1} + i X_1^{n+2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On a :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Y_i}{\partial u} &= A_i(\xi'_{n+1} + i\,\xi'_{n+2}) \\ \frac{\partial Y_i}{\partial v} &= B_i(\eta'_{n+1} + i\,\eta'_{n+2}) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On voit ainsi que le point de coordonnées Y décrit un réseau dont les tangentes ont pour paramètres les quantités A, B. Ce réseau est parallèle au réseau M donné. Ces quantités définissent les paramètres d'une congruence conjuguée au réseau M. On sait que cette congruence est C. La propriété est donc établie.

On voit de plus que toute combinaison isotrope des colonnes de Δ fournit une congruence C conjuguée au réseau M. Il existe donc une infinité de congruences C conjuguées a un réseau K.

Les n premiers éléments d'une colonne de Δ donnent aussi les paramètres d'une congruence conjuguée au réseau M. On a en effet les relations

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X'_i}{\partial u} &= A_i\,\xi'_1 \\ \frac{\partial X'_i}{\partial v} &= B_i\,\eta'_1 \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La relation

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X'_i)^2 + (\xi'_1)^2 + (\eta'_1)^2 = 1$$

montre que la congruence ainsi définie est une congruence 2C. La coordonnée complémentaire étant i, les quantités h et l correspondantes sont ξ_1, η'_1.

Toute combinaison linéaire à coefficients constants des n premiers éléments des différentes colonnes

$$Y_i = a_1 X_i^1 + a_2 X_i^2 + \ldots + a_{n+2} X_i^{n+2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

donnerait en supposant

$$\Sigma a^2 \neq 0$$

les paramètres d'une congruence 2C conjuguée au réseau.

Dans le cas général les paramètres d'une congruence conjuguée au réseau M peuvent être definis comme les coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ d'un point P qui décrit un réseau parallele.

Soit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

l'équation de Laplace correspondante.

Cette équation admet la solution

$$2\theta = \Sigma y^2 + h^2 + l^2.$$

Les cas où l'on a $\theta = 0$ où $\theta = \text{const.}$ ont eté envisagés et correspondent aux congruences C, 2C.

Si θ est quelconque on posera

$$y_{n+1} + iy_{n+2} = 2\theta,$$
$$y_{n+1} - iy_{n+2} = -1.$$

On définit ainsi deux nouvelles solutions y_{n+1}, iy_{n+2} de l'équation de Laplace et l'on a

$$\sum_{i=1}^{i=n+2} (y_i)^2 + h^2 + l^2 = 0.$$

La congruence conjuguée est une congruence 3C. les coordonnées complémentaires étant iy_{n+1}, iy_{n+2}.

Les congruences conjuguées aux réseaux K sont des congruences C, 2C ou 3C.

La théorie générale permet de définir un réseau pK comme la projection d'un réseau K d'un espace d'ordre $n + p - 1$ sur un espace d'ordre n.

Les résultats précédents montrent que les congruences conjuguées aux réseaux pK sont des congruences pC, $(p+1)$C ou $(p+2)$C.

32. **Réseaux** N (**nuls**) **et** pN. — Un réseau nul ou réseau N est un réseau dont les courbes sont des lignes de longueur nulle, mais qui ne présente aucune singularité d'ordre plus élevé.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont les coordonnées d'un point M qui décrit un réseau nul, on aura :

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=0,\qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=0,$$
$$\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2\neq 0,\qquad \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)^2\neq 0.$$

Si l'on introduit les paramètres normaux ξ, η des tangentes au réseau, les égalités précédentes sont équivalentes aux égalités

$$\Sigma\xi^2=0,\qquad \Sigma\eta^2=0,$$
$$\sum\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2\neq 0,\qquad \sum\left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2\neq 0.$$

Par différentiation, on en déduit

$$n\Sigma\xi\eta=0,\qquad m\Sigma\xi\eta=0.$$

Si l'on n'a pas $n=m=0$, la relation

$$\Sigma\xi\eta=0 \quad (^1)$$

est vérifiée.

Un réseau N est en général un réseau rectangulaire singulier.

A la théorie des réseaux nuls se rattache immédiatement la théorie des réseaux applicables.

Un réseau $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est applicable sur un réseau $P(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ si l'on a

$$\Sigma\, dx^2=\Sigma\, dy^2,$$
$$\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2\neq\sum\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)^2,\qquad \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)^2\neq\sum\left(\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right)^2.$$

On sait que, dans ces conditions, les équations de Laplace des deux réseaux sont les mêmes.

Il en résulte que le point de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n, iy_1, \ldots, iy_p$ décrit un réseau N.

On définit également un réseau pN comme la projection sur un espace d'ordre n d'un réseau N situé dans un espace d'ordre $n+p-1$.

33. **Relations entre les réseaux N et les réseaux O.** — Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un point M qui décrit un réseau O

---

(1) Le cas particulier se présente pour les surfaces minima de l'espace ordinaire.

dont les paramètres des tangentes sont les $2n$ quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. On a

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_i}{\partial u} &= h\,\xi_i\\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= l\eta_i\end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Considérons maintenant deux normales rectangulaires MA, MB au réseau M et supposons les paramètres $X_1, X_2, \ldots, X_n$; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ de ces droites choisis de telle manière que l'on ait

$$\frac{\partial X_i}{\partial u} = A\,\xi_i, \qquad \frac{\partial Y_i}{\partial u} = E\,\xi_i,$$
$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = B\,\eta_i; \qquad \frac{\partial Y_i}{\partial v} = F\,\eta_i.$$

La condition d'orthogonalité donnant la relation supplémentaire

$$\Sigma XY = 0.$$

Un point P du 1-plan MAB a des coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ données par les formules

$$y_i = x_i + rX_i + \rho Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Proposons-nous de déterminer les fonctions r et ρ de telle manière que le point P décrive un réseau dérivant du réseau M. Un calcul montre que l'on doit avoir

$$h + Ar + E\rho = 0,$$
$$l + Br + F\rho = 0.$$

Les expressions $\frac{\partial y_i}{\partial u}, \frac{\partial y_i}{\partial v}, \frac{\partial^2 y_i}{\partial u\,\partial v}$ sont données par les égalités,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y_i}{\partial u} &= X_i\frac{\partial r}{\partial u} + Y_i\frac{\partial \rho}{\partial u}\\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= X_i\frac{\partial r}{\partial v} + Y_i\frac{\partial \rho}{\partial v}\\ \frac{\partial^2 y_i}{\partial u\,\partial v} &= X_i\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} + Y_i\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v}\end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les $n+2$ fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n, r, \rho$ satisfaisant à la même équation de Laplace qui est celle à laquelle satisfont les quantités r et ρ.

On obtient aisément

$$\Sigma(dy_i)^2 = \Sigma(X_i)^2\, dr^2 + \Sigma(Y_i)^2\, d\rho^2.$$

On voit donc que :

Si l'on a choisi deux normales ordinaires on peut prendre $\Sigma(X_i)^2 = 1$, $\Sigma(Y_i)^2 = 1$, le réseau P obtenu est un réseau 3N. Les coordonnées complémentaires sont ir, $i\rho$.

Si la normale MA est ordinaire, la normale MB isotrope, $\Sigma(X_i)^2 = 1$, $\Sigma(Y_i)^2 = 0$, le réseau P est 2N, la coordonnée complémentaire ir.

Si les deux normales sont isotropes, le réseau P est un réseau N.

34. **Congruences harmoniques aux réseaux** N, pN. — Les propriétés ne faisant intervenir que les directions des éléments nous raisonnerons sur des réseaux points.

Considérons un réseau point N et désignons par ξ, η. les paramètres normaux des tangentes, par X ceux d'une congruence harmonique au réseau. On a

$$X = q\xi - r\eta$$

et par suite

$$\Sigma X^2 = q^2\Sigma\xi^2 - 2qr\,\Sigma\xi\eta + r^2\Sigma\eta^2 = 0.$$

On vérifie facilement que

$$\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = q^2\sum\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 \neq 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = r^2\sum\left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2 \neq 0.$$

Donc :

Toute congruence harmonique à un réseau N est I.

Remarque. — Considérons deux congruences harmoniques à un réseau N. Leurs paramètres sont les quantités X, X_1 définies par les formules

$$X = q\xi - r\eta,$$
$$X_1 = q_1\xi - r_1\eta.$$

On voit que l'on a

$$\Sigma XX_1 = 0.$$

Tout réseau nul est donc un réseau dérivant un réseau O obtenu par l'intermédiaire de deux normales isotropes rectangulaires.

On voit aussi que l'on ne peut former de réseaux nuls qu'à partir d'un espace d'ordre 6.

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour les réseaux pO montre que :

Les congruences harmoniques à un réseau $2N$ sont des congruences I ou $2I$.

Les congruences harmoniques a un réseau pN sont des congruences $(p-2)I$, $(p-1)I$ ou pI.

35. **Réseaux harmoniques aux congruences I, pI.** — Nous raisonnerons encore sur un réseau point dont les paramètres des tangentes seront les quantités ξ, η. Les parametres d'une congruence harmoniques définis par les égalités

$$X = q\xi - r\eta.$$

Considérons d'abord une congruence I. On a

$$\Sigma X^2 = q^2\Sigma\xi^2 - 2qr\Sigma\xi\eta + r^2\Sigma\eta^2 = 0.$$

On peut poser

$$\Sigma\,\xi^2 = rr_1,$$
$$\Sigma\eta^2 = qq_1.$$

On obtient alors

$$2\Sigma\xi\eta = qr_1 + rq_1.$$

Raisonnant comme pour les réseaux harmoniques aux congruences C, on voit que les fonctions q_1, r_1 ainsi définies satisfont aux mêmes relations que les fonctions q, r.

Nous envisageons alors différents cas :

1° Supposons $q_1 = r_1 = 0$. On a

$$\Sigma\xi^2 = \Sigma\,\eta^2 = \Sigma\xi\eta = 0.$$

Le réseau harmonique obtenu est un réseau N.

2° Supposons $q_1 = \omega^2 q$, $r_1 = \omega^2 r$. On peut prendre

$$\xi_{n+1} = i\omega r, \qquad \eta_{n+1} = i\omega\, q.$$

Le réseau harmonique est un réseau $2N$, les paramètres complémentaires des tangentes ξ_{n+1}, η_{n+1}.

3° q_1, r_1 sont quelconques. On posera alors

$$r\ = \xi_{n+1} + i\xi_{n+2}, \qquad q\ = \eta_{n+1} + i\eta_{n+2},$$
$$-r_1 = \xi_{n+1} - i\xi_{n+2}; \qquad -q_1 = \eta_{n+1} - i\eta_{n+2}.$$

Le réseau harmonique est un réseau $3N$. Les paramètres complémentaires des tangentes sont ξ_{n+1}, ξ_{n+2}; η_{n+1}, η_{n+2}.

On verrait également en raisonnant comme on l'a fait pour les congruences pC que :

Les réseaux harmoniques aux congruences pI sont des réseaux pN, $(p+1)$N, $(p+2)$N.

36. **Congruences J et pJ.** — Lorsque les parametres directeurs X_1, X_2, ..., X_n d'une congruence satisfont aux conditions

$$\Sigma X^2 = 0,$$
$$\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = 0,$$
$$\sum\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\right)^2 \neq 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\right)^2 \neq 0,$$

on dit que la congruence correspondante est une congruence J.

On vérifie aisément que ces conditions restent satisfaites si l'on multiplie tous les parametres X par un même facteur.

On voit aussi que la condition

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = 0$$

est vérifiée en faisant intervenir l'équation de Laplace à laquelle satisfont les parametres de la congruence.

On appelle congruence pJ la projection d'une congruence J d'un espace d'ordre $n+p-1$ sur un espace d'ordre n.

37. **Réseaux conjugués aux congruences J et pJ.** — Considérons une congruence point parallele a une congruence J donnée. On peut choisir les quantités X de telle maniere que le point dont ces quantités sont les coordonnées décrive un réseau conjugué a la congruence.

Les relations précédentes montrent que tout réseau conjugué à une congruence J est un réseau N.

En raisonnant comme pour les réseaux conjugues aux congruences I, on montre que :

Les réseaux conjugues à une congruence 2J sont des reseaux N ou 2N.

Les réseaux conjugués a une congruence pJ sont des réseaux $(p-2)$N, $(p-1)$N ou pN.

38. **Congruences conjuguées aux réseaux N, pN.** — Il suffit d'étudier les congruences points conjuguées à ces réseaux.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point M qui décrit un réseau N et soit

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{P}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial v}$$

l'équation de Laplace correspondante.

Les relations

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 0, \qquad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

montrent que l'expression

$$\theta = \Sigma x^2$$

est solution de l'équation.

Si l'on a $\Sigma x^2 = 0$, la congruence correspondante est une congruence J.

Si $\theta = \Sigma x^2 = \text{const.} = \omega^2$, on obtient une congruence 2J; le paramètre complémentaire est égal à $i\omega$.

Enfin si θ est quelconque, on pose

$$x_{n+1} + i x_{n+2} = \theta,$$
$$x_{n+1} - i x_{n+2} = -1;$$

on obtient une congruence 3J dont les paramètres complémentaires sont x_{n+1}, x_{n+2}.

On démontre aussi, que les congruences conjuguées aux réseaux pN sont des congruences pJ, $(p+1)$J, ou $(p+2)$J.

39. **Congruences applicables.** — On dit qu'une congruence d'un espace d'ordre n de paramètres directeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est applicable sur une congruence d'un espace d'ordre p de paramètres directeurs $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ si l'on a

$$\Sigma X^2 = \Sigma Y^2,$$
$$\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2, \qquad \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2,$$
$$\sum \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\right)^2 \neq \sum \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial u^2}\right)^2; \qquad \sum \left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\right)^2 \neq \sum \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2}\right)^2.$$

Il en résulte que dans un espace d'ordre $n+p$ la congruence qui admet pour paramètres directeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n, iY_1, iY_2, \ldots, iY_p$ est une congruence J.

On vérifie facilement que si deux congruences sont applicables deux réseaux conjugués correspondants sont également applicables.

40. Relations entre les congruences J et les réseaux O. — Comme les réseaux N les congruences J peuvent se déduire des réseaux O.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point M qui décrit un réseau O, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ les paramètres normaux des tangentes a ce réseau.

Considérons trois normales MA, MB, MC deux à deux rectangulaires au réseau M dont les paramètres directeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$; $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, vérifient les relations

$$\Sigma XY = 0, \qquad \Sigma YZ = 0, \qquad \Sigma ZX = 0.$$

Aux deux normales MA, MB correspond un réseau dérivant M décrit par un point α; aux deux normales MB, MC correspond un réseau dérivant decrit par un point β. La droite $\alpha\beta$ décrit une congruence conjuguée à ces deux réseaux. Nous avons établi que les réseaux considérés étaient du type N. La congruence que l'on en déduit est par suite du type J.

Supposons que les quantités x, X, Y, Z satisfassent aux relations

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h\,\xi, \qquad \frac{\partial X}{\partial u} = A\,\xi, \qquad \frac{\partial Y}{\partial u} = C\,\xi, \qquad \frac{\partial Z}{\partial u} = E\,\xi,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = l\eta; \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = B\eta; \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = D\eta; \qquad \frac{\partial Z}{\partial v} = F\eta,$$

et désignons par

$$y_i = x_i + \lambda X_i + \mu Y_i + \nu Z_i$$

les coordonnées d'un point P du 2-plan MA, MB, MC.

Choisissons λ, μ, ν de telle manière que l'on ait

$$h + A\lambda + C\mu + E\nu = 0,$$
$$l + B\lambda + D\mu + F\nu = 0.$$

Si l'on suppose u et v fixe le point P considéré décrit une droite D et l'on voit qu'on a

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y_i}{\partial u} &= X_i\frac{\partial\lambda}{\partial u} + Y_i\frac{\partial\mu}{\partial u} + Z_i\frac{\partial\nu}{\partial u}\\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= X_i\frac{\partial\lambda}{\partial v} + Y_i\frac{\partial\mu}{\partial v} + Z_i\frac{\partial\nu}{\partial v}\end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Des premières égalités on déduit par dérivation,

$$B\frac{\partial\lambda}{\partial u}+D\frac{\partial\mu}{\partial u}+F\frac{\partial\nu}{\partial u}=0,$$

$$A\frac{\partial\mu}{\partial v}+C\frac{\partial\mu}{\partial v}+E\frac{\partial\nu}{\partial v}=0,$$

et par suite

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial u\,\partial v}=X_i\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}+Y_i\frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v}+Z_i\frac{\partial^2\nu}{\partial u\,\partial v}.$$

On a aussi

$$\sum_{i=1}^{i=n}(dy_i)^2=\Sigma(X_i)^2\,d\lambda^2+\Sigma(Y_i)^2\,d\mu^2+\Sigma(Z_i)^2\,d\nu^2.$$

Il résulte de l'étude qui a éte faite pour les réseaux N que les traces des droites D sur les 1-plans MA, MB; MB, MC décrivent des réseaux α et β. Lorsque u et v varient, la droite D décrit une congruence. Proposons-nous d'étudier les réseaux conjugués.

Lorsque le point P décrit un réseau conjugué à la congruence décrite par la droite D les n coordonnées Y_i satisfont à une équation de Laplace. On voit immédiatement que les quantités λ, μ, ν sont solutions de cette équation. Inversement, si les quantités λ, μ, ν satisfont à une equation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=P\frac{\partial\theta}{\partial u}+Q\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

le point P de coordonnées y_i décrit un réseau.

On voit donc que les réseaux conjugués à la congruence D sont en général des réseaux 4N, 3N, 2N, ou N suivant que l'on considère 0, 1, 2 ou 3 normales isotropes au réseau O initial.

Si l'on se borne au cas de trois normales isotropes et rectangulaires, on voit que tout réseau conjugué à la congruence décrite par la droite D est un réseau N. La congruence est nécessairement une congruence J.

Il y a lieu de remarquer que toute congruence J peut être obtenue par la méthode indiquée, et qu'en raison de la détermination de ces congruences à partir des réseaux O il n'est possible de les obtenir que pour des espaces d'ordre $n\geqq 8$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

C. Guichard. — Sur les systemes orthogonaux et les systèmes cycliques (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 1897-1903)

G. Darboux. — *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, II.

A. Ribaucour. — Sur la déformation des surfaces (*Comptes rendus*, t. 70, 1870, p. 330).

— Sur les systemes cycliques (*Comptes rendus*, t. 76. 1873, p. 478).

— Sur les faisceaux de cercles (*Comptes rendus*, t. 76, 1870, p. 830).

TABLE DES MATIÈRES.

97525-35 Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.