SALTYKOW

Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 70 (1935)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1935__70__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LXX

Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue

Par M. SALTYKOW
Professeur à l'Université de Belgrade

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, EDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1935

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

MÉTHODES MODERNES D'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE A UNE FONCTION INCONNUE

Par M. SALTYKOW,
Professeur à l'Université de Belgrade.

INTRODUCTION.

L'idée fondamentale concernant l'intégration d'une équation aux dérivées partielles consiste en la réduction du problème considéré à l'intégration des équations différentielles ordinaires auxiliaires [1]. Les théories classiques donnent plusieurs méthodes, pour trouver les intégrales du système auxiliaire telles, qu'elles permettent de former les intégrales requises des équations aux dérivées partielles correspondantes. Ces derniers procédés s'étendent et s'appliquent de même aux systèmes d'équations étudiées simultanées.

En développant les méthodes en question, Jacobi avait créé un procédé pour la recherche d'une suite des fonctions que l'on dira *Jacobiennes* [2]. Elles sont calculées, l'une après l'autre, à condition de vérifier certaines propriétés d'involution. Si l'on obtenait cependant des intégrales troublant la marche régulière des calculs, on doit alors rejeter ces dernières.

Les méthodes modernes d'intégration ont pour but de perfectionner les anciennes. Ces nouvelles méthodes permettent d'achever l'intégration dans les cas, où les procédés classiques se heurtaient à des difficultés. On démontre donc, à présent, qu'il est aisé, pour achever l'intégration, de profiter des intégrales qui semblaient être inutiles, au point de vue classique.

Le créateur de la méthode classique d'intégration, Jacobi, avait de même donné naissance aux idées nouvelles. Grâce à elles nous sommes, à présent, en état d'utiliser, pour l'intégration des équations aux dérivées partielles en question, chaque intégrale du système auxiliaire correspondant quelle qu'elle soit.

J. Bertrand retrouve, en 1852, sous une forme plus développée, les bases de la solution du problème considéré, avant que fût publié le Mémoire posthume de Jacobi [3].

Ensuite, E. Bour y apporta des contributions importantes [4].

Enfin, le problème posé par Jacobi fut l'objet des études étendues faites par S. Lie. Mais sa solution, étant d'une forme originale, est, en même temps, très compliquée. C'est pour cela qu'elle n'a pas reçu la propagation aussi étendue que le problème de Jacobi le méritait bien.

Des nouvelles recherches s'imposaient donc sur le même sujet. Elles seront développées dans les pages qui vont suivre.

CHAPITRE I.

ÉLÉMENT INTÉGRABLE PARTICULIER ET FORMATION DE L'INTÉGRALE COMPLÈTE D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

1. Considérations bibliographiques. — La création de la méthode jacobienne des éléments intégraux [5] avait conduit cet illustre auteur à l'étude de certains cas particuliers, où les fonctions de sa suite s'obtenaient d'une manière particulière quelconque [6].

Le cas important concerne la formation des fonctions jacobiennes moyennant un ensemble quelconque des intégrales connues des caractéristiques qui ne soient pas en involution.

Pour aborder ce dernier problème, Jacobi se sert de la même idée dont il avait profité, en intégrant un système d'équations linéaires simultanées [7]. Il s'agit, précisément, de trouver une ou plusieurs fonctions des intégrales connues telles qu'elles vérifient les conditions d'involution exigées par le problème posé. Jacobi avait traité de cette manière les problèmes de la Dynamique admettant les trois intégrales des aires [8]; il avait appliqué sa méthode au problème des trois corps et à celui de la rotation d'un corps solide, autour d'un point fixe. Jacobi trouve immédiatement que la fonction requise représente la somme des carrés de premiers membres des intégrales considérées. Cette dernière fonction est donc en involution avec les intégrales en question.

Cela étant, Jacobi en tira un important résultat dans l'*Addition* [9] à son célèbre Mémoire, *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps*. On y trouve indiqué que l'ordre de l'intégration peut être diminué *des six unités* dans tous les problèmes de Mécanique admettant l'intégrale des forces vives et les trois intégrales des aires. Le résultat fut ensuite démontré au n° 65 du Mémoire *Nova Methodus* [10].

J. Bertrand [3] et E. Bour [11] ont réalisé de nouveaux développements importants concernant le problème des trois corps et l'intégration des équations canoniques.

En reprenant l'œuvre de Jacobi, de J. Bertrand et de E. Bour, S. Lie [12] introduit, d'abord, la notion du groupe fonctionnel des intégrales; on y entend l'ensemble des intégrales se reproduisant par l'application du théorème de Poisson. Enfin, S. Lie avait proposé d'appeler *fonctions distinguées* du groupe les fonctions des intégrales de ce dernier qui se trouvent en involution avec toutes les intégrales du groupe considéré. Les travaux de J. Bertrand et E. Bour ont permis à S. Lie d'étendre les résultats de Jacobi, en formant une théorie abstraite des groupes de fonctions. S. Lie avait donné ensuite, grâce à cette dernière théorie, la résolution générale du problème en question posé par Jacobi. Dans ce but S. Lie profite des transformations de contact et du problème de Pfaff, en appliquant les formules trouvées par Jacobi pour résoudre les équations rattachées à ce dernier problème [13].

En 1903, N. Saltykow [14] entreprit ses recherches sur le problème de Jacobi dont il s'agit. Il en découle une nouvelle solution basée sur des principes qui sont intimement liés au sujet même de la théorie discutée. On affranchit, ainsi, cette dernière des théories accessoires qui n'étaient point essentielles pour le problème posé, comme celle de la théorie générale des groupes, des transformations de contact et du problème de Pfaff. Par conséquent la théorie étudiée ne présente, actuellement, pas plus de difficultés que les méthodes classiques de Jacobi ou celle des caractéristiques. Ces dernières sont de plus perfectionnées par la théorie inventée. On pourrait donc comparer l'état créé des choses à celui de l'ancienne époque, où la *Méthode nouvelle* de Jacobi venait de simplifier considérablement le problème général d'intégration des équations considérées, en l'émancipant de la méthode bien compliquée pfaffienne.

En effet, introduisons, d'abord, la notion d'un élément intégrable [15]. On y entend un *ensemble incomplet des intégrales des caractéristiques, qui rendent intégrable la différentielle de la fonction inconnue.*

L'*élément intégral* [5_2] en est un cas particulier, où le nombre des intégrales connues est égal à celui des variables indépendantes.

Cela étant, l'intégration des équations considérées s'effectue, grâce à l'*élément intégrable* par une quadrature ou par l'intégration d'une équation aux différentielles totales; cette dernière correspond au cas, où les équations données contiennent explicitement la fonction inconnue.

Les formules générales de la solution obtenue, impliquent deux cas particuliers limités : celui, de la théorie des caractéristiques et, l'autre, du théorème de Jacobi, ainsi que de toutes les généralisations connues de ce théorème.

Quant au calcul d'un élément intégrable, il représente la généralisation du procédé de Jacobi pour calculer un élément intégral.

Enfin, l'avantage des éléments intégrables consiste dans ce, qu'il est toujours permis de les introduire, au lieu des éléments intégraux, réguliers ou irréguliers. On peut surtout en profiter pour simplifier les calculs nécessaires, afin d'intégrer la différentielle de la fonction inconnue, soit pour effectuer les éliminations exigées par la théorie. Le passage à un élément intégrable se fait en ajoutant à un élément intégral une ou plusieurs nouvelles intégrales connues des caractéristiques.

Mais on est aussi parfois obligé, pour simplifier le calcul, de remplacer inversement les éléments intégrables par des éléments intégraux. Il suffit, dans ce but, de mettre en évidence les *fonctions distinguées* du groupe engendrant l'élément intégrable considéré. Or, on s'en passe de ces dernières fonctions, si l'on applique les éléments intégrables.

Les considérations exposées sont d'un fréquent usage pour les applications. Nous voulons aussi nous en servir dans les exemples qui vont être cités plus bas.

Enfin, de nouvelles recherches furent entreprises par W. Stekloff, M. C. Russyan et M. Th. De Donder. W. Stekloff [16] se base sur un nouveau théorème qu'il dit généralisé de Jacobi. Ce dernier représente la transformation, à la manière de S. Lie, de l'élément intégrable mentionné plus haut.

M. C. Russyan [17] approfondit la méthode de S. Lie.

M. Th. De Donder [18] donne de nouveaux résultats importants concernant les équations aux dérivées partielles impliquant explicitement la fonction inconnue.

2. Énoncé du problème. — Considérons une équation aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue z, qui ne figure pas explicitement dans l'équation donnée,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{1}$$

vérifiant la condition

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \gtrless 0, \tag{2}$$

les variables p_s désignant les dérivées partielles du premier ordre de z prises respectivement par rapport aux variables indépendantes x_s, de sorte que l'on ait

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s \, dx_s. \tag{3}$$

Supposons que l'équation linéaire correspondante

$$(F, f) = 0, \tag{4}$$

les parenthèses désignant celles de Poisson, admette un système incomplet d'intégrales distinctes, non en involution,

$$F, \quad f_1, \quad f_2, \ldots, f_{n+\rho-1} \qquad (\rho < n-1). \tag{5}$$

Nous dirons *que ces dernières intégrales* (5) *forment un élément intégrable particulier de l'équation donnée* (1), *si l'expression* (3) *devient une différentielle exacte, en vertu des intégrales des caractéristiques*

$$F = 0, \qquad f_1 = C_1, \qquad f_2 = C_2, \ldots, f_{n+\rho-1} = C_{n+\rho-1}, \tag{6}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}$ *désignant* $n+\rho-1$ *constantes arbitraires.*

On va démontrer que, dans l'hypothèse citée, *l'intégrale complète de l'équation* (1) *s'obtient par une quadrature.*

3. **Propriété de l'élément intégrable particulier.** — Supposons que le système (6) soit résoluble par rapport aux variables

$$(7) \qquad x_{n-\rho+1}, \quad x_{n-\rho+2}, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

leurs valeurs étant définies par les formules

$$(8) \qquad \begin{cases} x_{n-\rho+j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}), \\ (j = 1, 2, \ldots, \rho), \end{cases}$$

$$(9) \qquad \begin{cases} p_s = \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}), \\ (s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Désignons par

$$(10) \qquad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, C_{n+\rho-1}) + C,$$

l'intégrale de la différentielle exacte que devient l'expression (3), en vertu des formules (8) et (9), C étant une nouvelle constante arbitraire.

Il en résulte les identités suivantes :

$$(11) \qquad \psi_r \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x_r} - \sum_{j=1}^{\rho} \varphi_{n-\rho+j} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-\rho),$$

représentant la première propriété requise.

4. **Formation de l'intégrale complète.** — Les formules (6) et, de l'autre côté, celles (8) et (9) sont algébriquement équivalentes, dans un certain domaine de régularité. Il en résulte l'identité suivante :

$$(12) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho, \psi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0.$$

Il est toujours aisé de supposer, sans diminuer la généralité de nos considérations, que les équations (8) étaient résolubles par rapport à ρ certaines constantes arbitraires que nous allons désigner par

$$(13) \qquad C_n, \quad C_{n+1}, \ldots, C_{n+\rho-1},$$

l'inégalité suivante ayant lieu

$$(14) \qquad D\left(\frac{\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_\rho}{C_n, C_{n+1}, \ldots, C_{n+\rho-1}}\right) \lessgtr 0.$$

Cela étant, écrivons le résultat de la substitution des valeurs (13), définies par les équations (8), dans les formules (9) et (10), de la manière suivante :

$$(15)\qquad p_s = \Psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(16)\qquad z = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) + C.$$

La même substitution, dans l'identité (12), la transforme en identité nouvelle, comme il suit :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, x_{n-\rho+1}, x_{n-\rho+2}, \ldots, x_n, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n) = 0.$$

Il en résulte que la formule (16) va représenter l'intégrale complète de l'équation donnée (1), si les formules (15) et (16) vérifient les conditions suivantes :

$$(17)\qquad \Psi_s = \frac{\partial \Psi}{\partial x_s} \qquad (s = 1, 2. \ldots, n).$$

On démontre aisément qu'il *suffit de satisfaire seulement aux* ρ *dernières égalités* (17).

En effet, nous avons, d'après la formation de l'expression (16), l'identité suivante :

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}) \\ &\quad \equiv \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}). \end{aligned}$$

Il en résulte les identités

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \equiv \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_r}\right) + \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_{n-\rho+j}}\right) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-\rho),$$

les parenthèses désignant le résultat de la substitution des valeurs des variables $x_{n-\rho-j}$ définies par les ρ formules (8).

Grâce à ces dernières identités, les identités (11) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\psi_r - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_r}\right) \equiv \sum_{j=1}^{\rho} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_{n-\rho+j}}\right) - \psi_{n-\rho+j}\right] \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-\rho).$$

Les identités que l'on vient d'obtenir subsisteront encore quand on y attribuera à ρ constantes (13) leurs valeurs tirées des équations (8). Mais alors les fonctions ψ_r et $\psi_{n+\rho+j}$ deviendront respectivement Ψ_r

et $\Psi_{n-\rho-j}$; les expressions entre parenthèses reprenant leurs valeurs primitives, les dernières identités deviennent donc

$$(19)\quad \Psi_r - \frac{\partial\Psi}{\partial x_r} \equiv \sum_{j=1}^{\rho}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_{n-\rho+j}} - \Psi_{n-\rho+j}\right)\left[\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_r}\right] \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-\rho),$$

les crochets désignant le résultat de la substitution effectuée.

Cela étant, les identités obtenues (19) démontrent notre assertion, car il suffit de satisfaire aux ρ dernières égalités (17), à savoir :

$$(20)\qquad \Psi_{n-\rho+j} = \frac{\partial\Psi}{\partial x_{n-\rho+j}} \qquad (j = 1, 1, \ldots, \rho),$$

pour que les autres $n-\rho$ conditions (17) soient de même vérifiées.

5. **Conditions nécessaires et suffisantes.** — Il s'agit donc à présent, pour former l'intégrale complète requise, de satisfaire à ρ égalités (20). Revenons pour cela à l'étude des dérivées de la fonction φ. On a immédiatement, grâce à la formule (18), les identités suivantes :

$$(21)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial C_k} - \sum_{j=1}^{\rho}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_{n-\rho+j}}\right)\frac{\partial\varphi_j}{\partial C_k} \equiv \left(\frac{\partial\Psi}{\partial C_k}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$(22)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial C_{n+\mu-1}} - \sum_{j=1}^{\rho}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_{n-\rho+j}}\right)\frac{\partial\varphi_j}{\partial C_{n+\mu-1}} \equiv 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Supposant que les identités (20) aient lieu, remplaçons dans les dernières identités obtenues les dérivées $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_{n-\rho+j}}\right)$ par les expressions $(\Psi_{n-\rho+j})$ qui signifient les fonctions $\psi_{n-\rho+j}$.

Cela étant, les identités (21) et (22) deviennent, donc

$$(23)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial C_k} - \sum_{j=1}^{\rho}\varphi_{n-\rho+j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial C_k} \equiv \left(\frac{\partial\Psi}{\partial C_k}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$(24)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial C_{n+\mu-1}} - \sum_{j=1}^{\rho}\varphi_{n-\rho+j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial C_{n+\mu-1}} \equiv 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Désignons par U'_i les premiers membres de ces dernières égalités, en faisant correspondre l'indice i de U'_i à celui de la constante C_i, à savoir :

$$U'_i \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial C_i} - \sum_{j=1}^{\rho}\varphi_{n-\rho+j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial C_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots, n+\rho-1).$$

Quant à l'indice supérieur de U'_i, il indique la distinction de ces dernières fonctions de celles de la théorie des caractéristiques, correspondant à l'hypothèse $\rho = n - 1$.

Si la fonction Ψ dépend explicitement de toutes les constantes C_1, $C_2, \ldots, C_{n-1}$, les seconds membres des $n-1$ égalités (21) diffèrent de zéro.

Par conséquent, les formules (23) et (24) démontrent le résultat suivant :

Le déterminant (14) *étant distinct de zéro, les conditions nécessaires pour que l'équation* (16) *définisse l'intégrale complète de l'équation* (1) *s'expriment par les formules*

$$(25)\qquad U'_k \gtrless 0, \qquad U'_{n+\mu-1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1;\ \mu = 1, 2, \ldots, \rho).$$

De même que dans la théorie des caractéristiques, on démontre que les conditions (25) *sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes.*

Supposons, en effet, que les formules (25) aient lieu et prenons en considérations les formules dérivées (21) et (22) qui subsistent indépendamment de toute hypothèse. Les différences respectives des ρ identités (22) et des ρ dernières conditions (25) nous donnent les ρ identités nouvelles

$$\sum_{j=1}^{\rho} \left[\psi_{n-\rho+j} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_{n-\rho+j}} \right) \right] \frac{\partial \varphi_j}{\partial C_{n+\mu-1}} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Il en résulte, grâce à l'inégalité (14), les ρ formules requises (17).

Cela posé, les $n-1$ premières inégalités (25) démontrent, en vertu des identités (21), que l'intégrale (16) contenant explicitement les n constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C$, représente, effectivement, l'intégrale complète requise.

6. **Applications.** — Considérons, par exemple, l'équation d'Imschenetzky [19]

$$(26)\qquad (x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + \alpha (p_1 - p_2) p_3 = a.$$

Les équations différentielles des caractéristiques admettent deux intégrales

$$p_1^2 - p_2^2 = C_1, \qquad (x_1 + x_2)(p_1 + p_2) = C_2,$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires. Comme ces dernières intégrales ne sont pas en involution, l'on devrait rejeter l'une de ces dernières, d'après la théorie d'intégration de Jacobi.

Mais en nous servant des deux intégrales, on obtient aisément une troisième équation intégrale des caractéristiques :

$$x_3^2 = \beta(x_1 + x_2) + C_3^2, \qquad \beta \equiv 2\alpha \frac{C_1}{C_2},$$

C_3 désignant une nouvelle constante arbitraire.

L'équation donnée et les trois équations intégrales trouvées définissent bien un élément intégrable particulier

$$\begin{aligned} (27) \qquad & x_3 = \pm R, \qquad R \equiv \sqrt{\beta(x_1+x_2)+C_3^2} \\ & p_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{C_1}{C_2}(x_1+x_2) + \frac{C_2}{x_1+x_2}\right], \\ & p_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{C_2}{x_1+x_2} - \frac{C_1}{C_2}(x_1+x_2)\right], \\ & p_3 = \frac{2a \pm \left[C_2 + \frac{C_1}{C_2}(x_2^2 - x_1^2)\right]R}{\beta(x_1+x_2)}. \end{aligned}$$

Il en résulte, par une quadrature,

$$(28) \qquad z = \frac{C_1}{2C_2}(x_1^2 - x_2^2) \pm \frac{a}{C_3}\log\frac{(R-C_3)^2}{x_1+x_2} + C,$$

C étant une nouvelle constante arbitraire.

Les trois fonctions U'_i prennent donc la forme

$$U'_1 \equiv \frac{C_2 C_3 \pm 2\alpha}{2 C_1 C_3}, \qquad U'_2 \equiv -\frac{1}{2} \pm \frac{a}{C_2 C_3},$$

$$U'_3 \equiv \frac{C_3}{2\alpha}(x_2 - x_1) + \frac{C_2(C_2 C_3^2 \mp 2aR)}{2\alpha C_1 C_3 (x_1+x_2)} \mp \frac{a}{C_3^2}\log\frac{(R-C_3)^2}{x_1+x_2}.$$

Comme on le voit, les fonctions obtenues ne vérifient pas les conditions (25) que l'on vient d'établir. Or, il suffit d'introduire dans l'expression (28) de z, au lieu de de C, une nouvelle constante arbitraire C′ reliée avec C par la formule suivante :

$$C = C' - \int U'_1 \partial C_1 \equiv C' - \frac{C_2 C_3 \pm 2a}{2C_3}\log C_1.$$

Cela étant, la formule (28) devient

$$(29) \quad z = \frac{C_1}{2C_3}(x_1^2 - x_2^2) \pm \frac{a}{C_3}\log\frac{(R-C_3)^2}{x_1+x_2} - \frac{C_2 C_3 \pm 2a}{2C_3}\log C_1 + C'.$$

Les fonctions U'_i correspondantes que nous désignerons par U''_i prennent les valeurs suivantes :

$$U''_1 = 0, \qquad U''_2 = -\frac{1}{2}(1 + \log C_1) \pm \frac{a}{C_2 C_3},$$
$$U''_3 = U'_3 \pm \frac{a}{C_3^2} \log C_1.$$

Il résulte de là que l'intégrale complète requise de l'équation (26) s'obtient par l'élimination de C_1, dans l'équation (29), au moyen de l'équation (27),

$$z = \frac{1}{4\alpha}(x_1 - x_2)(x_3^2 - C_3^2) \pm \frac{a}{C_3} \log \frac{x_3 \mp C_3}{x_3 \pm C_3} - \frac{C_2}{2} \log \frac{x_3^2 - C_3^2}{x_1 + x_2} + C'_1,$$

où nous avons désigné par C'_1 la constante arbitraire additive

$$C'_1 = C' - \frac{C_2 C_3 \pm 2a}{2 C_3} \log \frac{C_2}{2\alpha},$$

C_2, C_3 et C'_1 étant trois constantes arbitraires.

Si dans la formule (28), au lieu de C, on introduirait une nouvelle constante arbitraire C'', reliée avec C par la formule suivante :

$$C = C'' - \int U'_2 \partial C_2 = C'' + \frac{1}{2} C_2 \pm \frac{a}{C_3} \log C_2,$$

on obtiendrait, d'une manière analogue à la précédente, l'intégrale complète de l'équation (26) sous une forme nouvelle :

$$z = \frac{1}{4\alpha}(x_1 - x_2)(x_3^2 - C_3^2) + \frac{\alpha C_1 (x_1 + x_2)}{x_3^2 - C_3^2} \pm \frac{a}{C_3} \log \frac{x_3 \mp C_3}{x_3 \pm C_3} + C''_1,$$

C_1, C_3 et C''_1 étant trois constantes arbitraires et C''_1 désignant la valeur constante

$$C''_1 = C'' \pm \frac{a}{C_3} \log 2\alpha C_1.$$

On a dû introduire une transformation artificielle pour former l'intégrale complète cherchée de l'équation (26). Il nous reste à démontrer à présent qu'il est toujours possible de satisfaire aux conditions (25) par un choix convenable des constantes arbitraires.

7. Seconde propriété de l'élément intégrable et application de cette dernière. — Pour avoir les propriétés en question, écrivons les équations différentielles ordinaires des caractéristiques, correspondant à l'équation linéaire (4), à savoir :

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = -\frac{dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}.$$

Il en résulte les proportions composées

$$\frac{\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} dx_r}{\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r}} = \frac{dx_{n-\rho+j}}{\frac{\partial F}{\partial p_{n-\rho+j}}} = \frac{\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_r} dx_r}{\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_r}} = \frac{dp_s}{-\frac{\partial F}{\partial x_s}},$$

$$(j = 1, 2, \ldots, \rho;\ s = 1, 2, \ldots, n).$$

Or, les numérateurs des deux premières égalités et des deux dernières étant identiquement égaux, respectivement en vertu des équations (8) et (9) de l'élément intégrable, il s'ensuit les identités requises

$$(30) \qquad \begin{cases} \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} = \frac{\partial F}{\partial p_{n-\rho+j}} & (j = 1, 2, \ldots, \rho); \\ \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_r} = -\frac{\partial F}{\partial x_s} & (s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Cela posé, calculons les dérivées partielles des fonctions U'_i par rapport aux variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-\rho},$$

considérées comme indépendantes, dans les formules (8) et (9),

$$\frac{\partial U'_i}{\partial x_r} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial C_i \partial x_r} - \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial x_r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial C_i} + \psi_{n-\rho+j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial C_i \partial x_r} \right)$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n-\rho).$$

Il est aisé de mettre ces dernières dérivées sous la forme suivante, en vertu des identités (11) :

$$\frac{\partial U'_i}{\partial x_r} = \frac{\partial \psi_r}{\partial C_i} + \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial C_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} - \frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial x_r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial C_i} \right) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-\rho).$$

Multipliant les deux membres des égalités écrites respectivement par les dérivées $\frac{\partial F}{\partial p_r}$, sommons les résultats obtenus par rapport à l'indice r. Il en résulte

$$(31)\quad \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial U'_i}{\partial x_r} = \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r}\left[\frac{\partial \psi_r}{\partial C_i} + \sum_{j=1}^{\rho}\left(\frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial C_i}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} - \frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial x_r}\frac{\partial \varphi_i}{\partial C_i}\right)\right].$$

Mettons les seconds membres de ces dernières identités (31), grâce aux identités antérieurement obtenues (30), sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial U'_i}{\partial x_r} &= \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial \psi_r}{\partial C_i} + \sum_{j=1}^{\rho}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{n-\rho+j}}\frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial C_i} + \frac{\partial F}{\partial x_{n-\rho+j}}\frac{\partial \varphi_j}{\partial C_i}\right)\\ &\equiv \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial F}{\partial x_{n-\rho+j}}\frac{\partial \varphi_j}{\partial C_i} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_s}\frac{\partial \psi_s}{\partial C_i}.\end{aligned}$$

Les seconds membres de ces dernières identités s'annulent, en vertu des identités que l'on obtient en différentiant l'identité (12) par rapport à chacune des constantes C_i.

Il en résulte donc les identités suivantes :

$$\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial U'_i}{\partial x_r} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1).$$

Transformons, à présent, ces dernières égalités, en y substituant les valeurs des dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial p_2}, \quad \frac{\partial F}{\partial p_3}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial p_{n-\rho}}$$

tirées des équations différentielles des caractéristiques. On obtient, grâce à l'hypothèse (2), les équations différentielles

$$\frac{\partial U'_i}{\partial x_1} + \sum_{r=2}^{n-\rho} \frac{\partial U'_i}{\partial x_r}\frac{dx_r}{dx_1} \equiv \frac{dU'_i}{dx_1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1).$$

En intégrant ces dernières équations, on a donc, en vertu du système (6), les relations

$$(32)\qquad U'_i = C'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1),$$

C'_i désignant des constantes arbitraires.

8. **Introduction des valeurs initiales des variables.** — Si les condi-

tions (25) n'existent point, introduisons alors, dans les formules (8), (9) et (10), au lieu des constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}, C$, les valeurs initiales des variables fonctionnelles.

Dans ce but, désignons respectivement par

$$x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_{n-\rho}^0,\ x_{n-\rho+1}^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ z^0,\ p_1^0,\ p_2^0,\ \ldots,\ p_n^0$$

les valeurs initiales de variables correspondantes

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-\rho},\ x_{n-\rho+1},\ \ldots,\ x_n,\ z,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n.$$

Remarquons que, grâce à la condition (2), la constante p_1^0 s'exprime par les autres constantes, moyennant la relation entre les valeurs initiales de toutes les variables, définie par l'équation donnée (1). Supposons donc que les équations (8), (9) et (10) transformées deviennent

$$(33)\quad \begin{cases} x_{n-\rho+j} = \Phi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_2^0, \ldots, p_n^0) \\ \qquad (j = 1, 2, \ldots, \rho), \\ p_s = \Theta_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_2^0, \ldots, p_n^0) \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

$$(34)\quad z = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_2^0, \ldots, p_n^0) + z_0,$$

où l'on ne considère que les valeurs initiales

$$(35)\quad x_{n-\rho+1}^0,\ x_{n-\rho+2}^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ z_0,\ p_2^0,\ \ldots,\ p_n^0$$

comme des constantes arbitraires.

Quant aux formules (32), elles prennent la forme suivante :

$$(36)\quad U_i' = U_i'^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n + \rho - 1),$$

$U_i'^0$ désignant la valeur initiale de la fonction U_i'.

Il va sans dire que la première condition requise (14) est satisfaite par les ρ premières constantes (35), car on a évidemment

$$D\left(\frac{\Phi_1,\quad \Phi_2,\quad \ldots,\ \Phi_\rho}{x_{n-\rho+1}^0,\ x_{n-\rho+2}^0,\ \ldots,\ x_n^0}\right) \lessgtr 0.$$

Pour satisfaire aux conditions (25), introduisons, au lieu de z^0, une nouvelle constante arbitraire b, reliée avec les autres par la relation suivante :

$$(37)\quad z^0 = b + \sum_{r=1}^{n-1} x_{r+1}^0 p_{r+1}^0.$$

En posant

$$\theta \equiv \Phi + \sum_{r=1}^{n-1} x_{r+1}^0 p_{r+1}^0 + b,$$

les fonctions U'_i deviennent, grâce aux formules (33) et (34),

$$U'_\mu \equiv \frac{\partial\theta}{\partial x_{n-\rho+\mu}^0} - \sum_{j=1}^{\rho} \theta_{n-\rho+j} \frac{\partial\Phi_j}{\partial x_{n-\rho+\mu}^0} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \rho),$$

$$U'_{\rho+k} = \frac{\partial\theta}{\partial p_{k+1}^0} - \sum_{j=1}^{\rho} \theta_{n-\rho+j} \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_{k+1}^0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Par conséquent, les valeurs initiales de ces dernières fonctions, dans le domaine de l'intégrabilité considéré, en vertu de la formule (37), deviennent

$$U'^0_\mu \equiv 0, \qquad U'^0_{\rho+k} \equiv x_{k+1}^0$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, \rho;\ k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

9. Théorèmes sur la formation de l'intégrale complète. — Les formules obtenues conduisent aux résultats :

Théorème I. — *Le résultat d'élimination des valeurs $x_{n-\rho+1}^0$, $x_{n-\rho+2}^0, \ldots, x_n^0$ de l'équation* (34), *en vertu de la formule* (37) *et de* ρ *premières équations* (33), *représente l'intégrale complète de l'équation* (1) *sous la forme*

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_{n-\rho}^0, p_2^0, p_3^0, \ldots, p_n^0) + b,$$

$p_2^0, p_3^0, \ldots, p_n^0$, *b désignant n constantes arbitraires, à condition que* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-\rho}^0$ *admettent, dans le domaine considéré, des vateurs quelconques constantes, dont les* $n-\rho-1$ *dernières soient distinctes de zéro.*

Théorème II. — *Supposons que les* ρ *premières équations* (33) *vérifient la condition*

$$D\left(\frac{\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \Phi_\rho}{p_{n-\rho+1}^0, p_{n-\rho+2}^0, \ldots, p_n^0}\right) \lesseqgtr 0.$$

Posons dans l'équation (34), *au lieu de* z^0, *l'expression suivante :*

$$z^0 = b + \sum_{\mu=1}^{n-\rho-1} x_{\mu+1}^0 p_{\mu+1}^0. \tag{38}$$

L'intégrale complète de l'équation (1) *s'obtient en éliminant les valeurs* $p^0_{n-\rho+1}, p^0_{n-\rho+2}, \ldots, p^0_n$ *de la formule* (34), *au moyen des* ρ *premières équations* (33), *sous la forme suivante :*

$$z = \mathrm{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x^0_1, \ldots, x^0_{n-\rho}, x^0_{n-\rho+1}, \ldots, x^0_n, p^0_2, \ldots, p^0_{n-\rho}) + b,$$

$x^0_{n-\rho+1}, \ldots, x^0_n, p^0_2, \ldots, p^0_{n-\rho}, b$ *désignant n constantes arbitraires; quant aux constantes* $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_{n-\rho}$, *elles doivent satisfaire aux mêmes conditions que dans le cas antérieur.*

Théorème III. — *Supposons que les* ρ *premières équations* (33) *vérifient la condition*

$$\mathrm{D}\left(\frac{\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_\rho}{p^0_{k+1}, p^0_{k+2}, \ldots, p^0_{k+\rho}}\right) \lessgtr 0.$$

Substituons dans l'équation (34), *au lieu de* z^0, *l'expression*

$$z^0 = b + \sum_{\mu=1}^{k-1} x^0_{\mu+1} p^0_{\mu+1} + \sum_{\sigma=0}^{n-k-\rho} x^0_{k+\rho+\sigma} p^0_{k+\rho+\sigma}.$$

L'intégrale complète de l'équation (1) *s'obtient, en éliminant les valeurs* $p^0_{k+1}, p^0_{k+2}, \ldots, p^0_{p+\rho}$ *de la formule* (34), *au moyen des* ρ *premières équations* (33), *sous la forme suivante :*

$$z = \mathrm{V}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n, x^0_1, \ldots, x^0_{n-\rho}, x^0_{n-\rho+1}, \ldots, x^0_n; \\ p^0_2, \ldots, p^0_k, p^0_{k+\rho+1}, \ldots, p^0_n \end{pmatrix} + b,$$

$x^0_{n-\rho+1}, \ldots, x^0_n, p^0_2, \ldots, p^0_k, p^0_{k+\rho+1}, p^0_n, b$ *désignant n constantes arbitraires et* $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_{n-\rho}$ *satisfaisant aux mêmes conditions que dans les cas antérieurs.*

Théorème IV. — *Supposons que les* ρ *premières équations* (33) *vérifient la condition*

$$\mathrm{D}\left(\frac{\Phi_1, \quad \ldots, \quad \Phi_l, \quad \Phi_{l+1}, \ldots, \Phi_{l+q}, \quad \Phi_{l+q+1}, \quad \ldots, \quad \Phi_\rho}{x^0_{n-\rho+1}, \ldots, x^0_{n-\rho+l}, p^0_{k+1}, \ldots, p^0_{k+q}, p^0_{n-\rho+l+1}, \ldots, p^0_{n-q}}\right) \gtrless 0.$$

Posons

$$z^0 = b + \sum_{\mu=1}^{k-1} x^0_{\mu+1} p^0_{\mu+1} + \sum_{\sigma=1}^{n-\rho-k+l-q} x^0_{k+q+\sigma} p^0_{k+q+\sigma} + \sum_{u=1}^{q} x^0_{n-q+u} p^0_{n-q+u}.$$

L'intégrale complète de l'équation (1) *s'obtient en éliminant* *les valeurs*

$$x^0_{n-\rho+1},\quad x^0_{n-\rho+2},\quad \ldots,\quad x^0_{n-\rho+l},\quad p^0_{k+1},\quad p^0_{k+2},\quad \ldots,\quad p^0_{k+q},$$
$$p^0_{n-\rho+l+1},\quad p^0_{n-\rho+l+2},\quad \ldots,\quad p^0_{n-q}$$

de la formule (34), *au moyen des* ρ *premières équations* (33), *sous la forme suivante :*

$$z = \mathrm{V}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n, x^0_1, \ldots, x^0_{n-\rho}, x^0_{n-\rho+l+1}, \ldots, x^0_n, \\ p^0_2, \ldots, p^0_k, p^0_{k+q+1}, \ldots, p^0_{n-\rho+l}, p^0_{n-q+1}, \ldots, p^0_n \end{pmatrix} + b,$$

contenant n constantes arbitraires, à savoir

$$x^0_{n-\rho+l+1},\quad \ldots,\quad x^0_n,\quad p^0_2,\quad \ldots,\quad p^0_k,\quad p^0_{n+q+1},\quad \ldots,$$
$$p^0_{n-\rho+l},\quad p^0_{n-q+1},\quad \ldots,\quad p^0_n,\quad b,$$

les constantes x^0_1, x^0_2, $\ldots$, $x^0_{n-\rho}$ *vérifiant les mêmes conditions mentionnées plus haut.*

Théorème V. — *Supposons que les* $n+\rho-1$ *fonctions* U'_i (*du n° 4*) *étant distinctes de zéro,* ρ *d'entre elles ne dépendent que des constantes arbitraires* $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2. \ldots, \mathrm{C}_{n+\rho-1}$; *désignons ces dernières fonctions par*

$$\mathrm{U}'_n,\quad \mathrm{U}'_{n+1},\quad \ldots,\quad \mathrm{U}'_{n+\rho-1},$$

Supposons que les fonctions considérées vérifient les conditions

$$\frac{\partial \mathrm{U}'_{n+i}}{\partial \mathrm{C}_{n+k}} = \frac{\partial \mathrm{U}'_{n+k}}{\partial \mathrm{C}_{n+i}},\qquad \frac{\partial \mathrm{U}'_\nu}{\partial \mathrm{C}_\mu} \gtrless \frac{\partial \mathrm{U}'_\mu}{\partial \mathrm{C}_r},$$

les indices i et k prenant toutes les valeurs distinctes, de 0 à $\rho-1$, *et les indices* ν *et* μ *admettant toutes les valeurs distinctes, de* 1 *à* $n-1$. *Désignons l'intégrale de la différentielle exacte*

$$d\mathrm{U} = \mathrm{U}'_n \partial \mathrm{C}_n + \mathrm{U}'_{n+1} \partial \mathrm{C}_{n+1} + \ldots + \mathrm{U}'_{n+\rho-1} \partial \mathrm{C}_{n+\rho-1}$$

par la formule

$$\mathrm{U} = \mathrm{V}(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{n+\rho-1}) + \alpha,$$

α *étant une constante arbitraire.*

Cela posé, supposons que les ρ *équations* (8) *soient résolubles par rapport à*

$$\mathrm{C}_n,\quad \mathrm{C}_{n+1},\quad \ldots,\quad \mathrm{C}_{n+\rho-1},$$

alors l'intégrale complète de l'équation (1) *s'obtiendra par l'éli-*

mination de ces ρ *dernières valeurs* C, *au moyen de* ρ *équations* (8), *de la formule* (10), *où l'on a introduit, au lieu de* C, *la nouvelle constante arbitraire* b *qui est définie par la formule*

$$C = b - V.$$

Il est aisé de voir que le calcul des deux intégrales complètes exposé au n° 6, représente une application du dernier théorème que l'on vient de citer.

Quant aux démonstrations des théorèmes énoncés, on les trouvera dans le Traité de N. Saltykow *Sur la Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue* [20].

CHAPITRE II.

ÉLÉMENT INTÉGRABLE GÉNÉRAL ET FORMATION DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE DES CARACTÉRISTIQUES D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

10. Énoncé du problème. — Considérons une équation aux dérivées partielles

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{1}$$

vérifiant la condition

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \gtrless 0, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s dx_s. \tag{3}$$

Supposons que l'équation linéaire

$$(F, f) = 0 \tag{4}$$

admette un système incomplet d'intégrales distinctes, outre F, non en involution

$$f_1, \; f_2, \; \ldots, \; f_{n+\rho-1}, \quad \rho < n - 1. \tag{5}$$

Par conséquent, le système des équations différentielles ordinaires des caractéristiques de l'équation donnée (1)

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}} \tag{6}$$

admet $n+\rho$ intégrales distinctes

$$(7) \qquad F = a, \quad f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad \ldots, \quad f_{n+\rho-1} = C_{n+\rho-1},$$

a, C_1, C_2, ..., $C_{n+\rho-1}$ désignant $n+\rho$ constantes arbitraires distinctes.

Nous dirons que *l'ensemble des équations* (7), *la constante a étant distincte de zéro, forme un élément intégrable général de l'équation donnée* (1), *si la formule* (3) *devient une différentielle exacte, en vertu des équations* (7).

On a démontré, au chapitre précédent, qu'en supposant $a = 0$, le système (7), définit dans notre hypothèse l'élément intégrable particulier qui donne, moyennant une quadrature, l'intégrale complète de l'équation (1). Il en résulte donc, d'après le théorème classique de Jacobi, l'intégrale générale du système (6), rien que par des opérations de différentiation.

Le but du présent chapitre est de *former l'intégrale générale du système* (6), *au moyen de l'élément intégrable général* (7), *sans passer par l'intermédiaire de l'intégrale complète mentionnée.*

11. Formation des intégrales requises. — Remarquons d'abord que, grâce à la forme de la première équation (7), le calcul analogue à celui du n° 6 démontre que les équations correspondantes à celles de (32), du Chapitre I, représenteraient évidemment les intégrales requises.

Or, il est aisé d'obtenir le résultat en question encore d'une autre manière.

Supposons, en effet, que le système (7) nous donne

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_{n-\rho+j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, a, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}) \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, \rho), \\ p_s = \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, a, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}) \\ \qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

D'après l'hypothèse introduite, l'intégration de la différentielle exacte que devient l'expression (3), grâce aux équations (8), produit l'intégrale

$$(9) \qquad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, a, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}) + C,$$

C désignant une nouvelle constante arbitraire.

On a de plus, par des considérations analogues aux précédentes, les identités qui représentent les propriétés de l'élément intégrable considéré, à savoir :

$$(10)\qquad \psi_r \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x_r} - \sum_{j=1}^{\rho} \psi_{n-\rho+j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-\rho),$$

$$(11)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_r} = \frac{\partial F}{\partial p_{n-\rho+j}} & (j = 1, 2, \ldots, \rho), \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial\psi_s}{\partial x_r} = -\frac{\partial F}{\partial x_s} & (s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Enfin, la différentiation de l'identité que devient la première équation (7), en vertu des formules (8), nous donne des nouvelles identités :

$$(12)\qquad \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial F}{\partial x_{n-\rho+j}}\frac{\partial\varphi_j}{\partial C_i} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_s}\frac{\partial\psi_s}{\partial C_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1).$$

Substituons-y les valeurs des dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n-\rho+j}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial p_{n-\rho+j}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \rho),$$

tirées des identités (11).

Les identités transformées peuvent être mises sous la forme comme il suit :

$$\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r}\left[\frac{\partial\psi_r}{\partial C_i} + \sum_{j=1}^{\rho}\left(\frac{\partial\psi_{n-\rho+j}}{\partial C_i}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_r} - \frac{\partial\psi_{n-\rho+j}}{\partial x_r}\frac{\partial\varphi_j}{\partial C_i}\right)\right] = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1).$$

En vertu des identités (10), que vérifient les fonctions ψ_r, les dernières identités obtenues prennent la forme plus simple

$$(13)\qquad \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial S_i}{\partial x_r} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1),$$

où l'on a posé, pour abréger l'écriture,

$$S_i \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial C_i} - \sum_{j=1}^{\rho} \psi_{n-\rho+j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial C_i}.$$

Il va de soi-même, qu'en posant dans ces dernières fonctions S_i la constante a égale à zéro, elles deviennent identiques à nos fonctions antérieures U'_i.

Or, pour obtenir les $n-\rho-1$ intégrales qui manquent du système (6), transformons les identités (13), en y substituant les valeurs des dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial p_2}, \quad \frac{\partial F}{\partial p_3}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial p_{n-\rho}}$$

tirées des équations différentielles des caractéristiques à intégrer (6).

On obtient alors les équations différentielles de la forme suivante, grâce à l'inégalité (2) :

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_1} + \sum_{r=2}^{n-\rho} \frac{\partial S_i}{\partial x_r} \frac{dx_r}{dx_1} \equiv \frac{dS_i}{dx_1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1).$$

En intégrant ces dernières équations aux différentielles exactes, on obtient immédiatement les équations intégrales requises

$$S_i = C'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1). \tag{14}$$

C'_i désignant de nouvelles constantes arbitraires.

Avant d'indiquer celles des équations (14) qui soient distinctes entre elles, exposons une seconde méthode de leur formation.

12. Seconde démonstration. — Introduisons la fonction suivante

$$S \equiv \varphi - \sum_{j=1}^{\rho} p_{n-\rho+j}\, \varphi_j, \tag{15}$$

qui a été formée par N. Saltykow, en 1910 [21].

Il est aisé de démontrer [22] que *les intégrales requises de l'équation linéaire* (4), *s'expriment moyennant les dérivées partielles de la fonction* (15)

$$\frac{\partial S}{\partial C_i},$$

où l'on remplacera a, C_1, C_2, ..., $C_{n+\rho-1}$ *par leurs valeurs* (5) *tirées des équations* (7).

Désignons par des parenthèses le résultat de cette dernière élimination effectuée.

Grâce aux propriétés des parenthèses de Poisson, à un élément composé, l'on obtient aisément

$$\left(\mathrm{F}, \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{C}_i}\right)\right) \equiv \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_r} \left(\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \mathrm{C}_i \partial x_r}\right) + \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{n-\rho+j}} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mathrm{C}_i}\right).$$

Il s'ensuit que, moyennant les identités (10) et, vu les désignations introduites, on a les formules

$$\left(\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \mathrm{C}_i \partial x_r}\right) \equiv \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial \mathrm{C}_i}\right) + \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial \mathrm{C}_i}\right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}\right)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1;\ r = 1, 2, \ldots, n-\rho).$$

Par conséquent, les égalités précédentes deviennent

$$\left(\mathrm{F}, \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{C}_i}\right)\right) \equiv \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{n-\rho+j}} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mathrm{C}_i}\right) + \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_r} \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial \mathrm{C}_i}\right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial \mathrm{C}_i}\right) \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_r} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r}\right).$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1).$$

En nous reportant aux identités de la première ligne (11), on en conclut que les valeurs calculées de dernières parenthèses s'annulent, en vertu des identités (12).

On obtient donc le résultat requis

$$\left(\mathrm{F}, \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{C}_i}\right)\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1).$$

13. Intégrales distinctes. — Nous allons, à présent, démontrer que parmi les équations (14), il n'existe que $n-\rho-1$ qui soient distinctes et résolubles par rapport aux variables

$$(16) \qquad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_{n-\rho}$$

définissant les intégrales cherchées des caractéristiques (6).

Il est aisé, en effet, d'admettre que, grâce à l'hypothèse (2), les ρ premières et les $n-1$ dernières équations du système (8) soient résolubles par rapport à

$$\mathrm{C}_1, \quad \mathrm{C}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{C}_{n+\rho-1},$$

le déterminant fonctionnel

$$\Delta \equiv D\left(\frac{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_\rho,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n}{C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_\rho,\ C_{\rho+1},\ \ldots,\ C_{n+\rho-1}}\right)$$

étant distinct de zéro.

Écrivons ce dernier déterminant sous la forme explicite

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial C_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-\rho}}{\partial C_1} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial C_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial C_2} & \frac{\partial\psi_2}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-\rho}}{\partial C_2} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial C_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial C_{n+\rho-1}} & \cdots & \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial C_{n+\rho-1}} & \frac{\partial\psi_2}{\partial C_{n+\rho-1}} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-\rho}}{\partial C_{n+\rho-1}} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial C_{n+\rho-1}} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial C_{n+\rho-1}} \end{vmatrix}$$

Les éléments des $n - \rho - 1$ colonnes de ce dernier derterminant, depuis la $(\rho+1)^{\text{ieme}}$ colonne jusqu'à la $(n-1)^{\text{ièmes}}$, se mettent, grâce aux formules (10), sous la forme suivante :

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\psi_r}{\partial C_i} \equiv \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_r \partial C_i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{\rho}\left(\psi_{n-\rho+j}\,\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_r \partial C_i} + \frac{\partial\psi_{n-\rho+j}}{\partial C_i}\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_r}\right) \\ \qquad (r = 2, 3, \ldots, n-\rho;\ i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1). \end{array}\right.$$

La valeur du déterminant Δ ne sera pas modifier, si l'on ajoute, d'abord, aux éléments considérés des valeurs proportionnelles aux éléments des ρ dernières colonnes du même déterminant, à savoir :

$$\sum_{j=1}^{\rho}\frac{\partial\psi_{n-\rho+j}}{\partial C_i}\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_r}.$$

Diminuons, ensuite, les mêmes éléments des valeurs proportionnelles aux éléments des ρ premières colonnes du déterminant considéré Δ :

$$\sum_{j=1}^{\rho}\frac{\partial\varphi_j}{\partial C_i}\,\frac{\partial\varphi_{n-\rho+j}}{\partial x_r}.$$

Les éléments (17) de Δ seront alors remplacés, grâce aux opérations effectuées, par les expressions suivantes :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_r \partial C_i} - \sum_{j=1}^{\rho}\left(\psi_{n-\rho+j}\,\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_r \partial C_i} + \frac{\partial\psi_{n-\rho+j}}{\partial x_r}\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial C_i}\right) \equiv \frac{\partial S_i}{\partial x_r}$$

$$(r = 2, 3, \ldots, n-\rho;\ i = 1, 2, \ldots, n+\rho-1).$$

Le déterminant Δ devient donc

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial C_1} & \frac{\partial S_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial S_1}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial C_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial C_2} & \frac{\partial S_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial S_2}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial C_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial C_{n+\rho-1}} & \cdots & \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial C_{n+\rho-1}} & \frac{\partial S_{n+\rho-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial S_{n+\rho-1}}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial C_{n+\rho-1}} & \cdots, & \frac{\partial\psi_n}{\partial C_{n+\rho-1}} \end{vmatrix}.$$

Considérons les déterminants mineurs formés avec les éléments de $n-\rho-1$ colonnes, depuis la $(\rho+1)^{\text{ieme}}$ colonne jusqu'à la $(n-1)^{\text{ieme}}$. Comme le déterminant Δ est distinct de zéro, l'un au moins, de ces derniers mineurs diffère de zéro.

Il est donc aisé de supposer, pour fixer les idées, sans diminuer la généralité de la démonstration, que déterminant mineur, distinct de zéro, soit le suivant :

$$D\left(\frac{S_1, S_2, \ldots, S_{n-\rho-1}}{x_2, x_3, \ldots, x_{n-\rho}}\right).$$

Ce seront alors les $n-\rho-1$ premières équations (14) qui sont résolubles par rapport aux variables (16), définissant les $n-\rho-1$ intégrales requises du système (6).

14. Applications. — Reprenons l'équation d'Imschenetzky (26) du n° 6. Le second membre de l'équation donnée étant une constante, d'ailleurs arbitraire, les fonctions calculées antérieurement U'_1, U'_2, U'_3 sont respectivement identiques aux fonctions S_1, S_2, S'_3.

Comme les deux premières fonctions représentent des valeurs constantes, c'est la troisième fonction U'_3 qui définit l'intégrale requise. Elle se présente sous la forme

$$\frac{2(x_2 p_1 + x_1 p_2) + x_3 p_3}{Q} + \frac{(x_2 p_1 + x_1 p_2)x_3 + \alpha(p_1 - p_2)p_3}{Q^2} \log\frac{(x_3 - Q)^2}{x_1 + x_2} = C'_3,$$

où l'on a posé

$$Q \equiv \sqrt{x_3^2 - 2\alpha(p_1 - p_2)},$$

C'_3 désignant une constante arbitraire.

Comme second exemple citons le problème classique sur le mouvement d'un corps, d'après la loi de Newton.

Mettons l'intégrale des forces vives et celles de conservation des aires sous la forme, comme il suit :

$$F \equiv p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \frac{2\mu}{r} + \alpha^2,$$

$$f_1 \equiv x_1 p_2 - x_2 p_1 = C_1, \qquad f_2 \equiv x_2 p_3 - x_3 p_2 = C_2,$$

$$f_3 \equiv x_3 p_1 - x_1 p_3 = C_3,$$

μ désignant la masse du centre attirant, r la distance du corps à ce centre, α^2, C_1, C_2, C_3 étant 4 constantes arbitraires.

L'élément intégrable est représenté de la manière suivante

$$x_3 = -\frac{C_2 x_1 + C_3 x_2}{C_1},$$

$$p_1 = \frac{C_2(C_2 x_2 - C_3 x_1) - C^2 x_2 \pm C_1 x_1 R}{C_1 r^2},$$

$$p_2 = \frac{C_3(C_2 x_2 - C_3 x_1) + C^2 x_1 \pm C_3 x_2 R}{C_1 r^2},$$

$$p_3 = \frac{C_1(C_2 x_2 - C_3 x_1) \pm (C_2 x_1 + C_3 x_2) R}{C_1 r_2},$$

où l'on a posé

$$C^2 \equiv C_1^2 + C_2^2 + C_3^2, \qquad R \equiv \sqrt{-\alpha^2 r^2 + 2\mu r - C^2},$$

$$r^2 \equiv \frac{c^2(x_1^2 + x_2^2) - (C_2 x_2 - C_3 x_1)}{C_1^2}.$$

Cela étant, on obtient aisément

$$z = C(\operatorname{arc\,tang} u \pm \operatorname{arc\,tang} v) \pm R \pm \frac{\mu}{\alpha} \arcsin w + C',$$

en désignant

$$u \equiv \frac{(C_3^2 + C_1^2) x_2 + C_2 C_3 x_1}{C C_1 x_1}, \qquad v \equiv \frac{C^2 - \mu r}{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2 C^2}\,.r},$$

$$w \equiv \frac{\alpha^2 r - \mu}{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2 C^2}},$$

C' étant une constante arbitraire additive. Il en résulte :

$$S_1 = \frac{C_2}{C}(\operatorname{arc\,tang} u \pm \arcsin v),$$

$$S_2 = \frac{C_3}{C}(\operatorname{arc\,tang} u \pm \arcsin v) + \frac{C_2 C_1}{C_3^2 + C_1^2},$$

$$S_3 \equiv \frac{C_1}{C}(\operatorname{arc\,tang} u \pm \arcsin v) - \frac{C_2 C_3}{C_3^2 + C_1^2}.$$

Par conséquent l'intégrale requise est donnée par la formule

$$\text{arc tang}\, u \pm \text{arc sin}\, v = C'_1$$

C'_1 désignant une constante arbitaire.

CHAPITRE III.

CALCUL D'UN ÉLÉMENT INTÉGRABLE D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

15. **Problème généralisé de Jacobi.** — Considérons une équation aux dérivées partielles

$$\text{(1)} \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

vérifiant la condition

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial F}{\partial p_1} \gtrless 0,$$

et dont l'équation linéaire des caractéristiques

$$\text{(3)} \qquad (F, f) = 0$$

admet un système incomplet d'intégrales distinctes, outre F, *non en involution*,

$$\text{(4)} \qquad f_1, \; f_2, \; \ldots, \; f_r \qquad (r < 2n - 2).$$

Supposons que les parenthèses de Poisson pour chaque couple d'intégrales (4) ne donnent que les intégrales (4) de l'équation (3).

Par conséquent, les dites parenthèses s'expriment de la manière suivante :

$$(f_k, f_h) \equiv \alpha_{kh}(F, f_1, f_2, \ldots, f_r),$$

les α_{kh} désignant les fonctions des intégrales (4), pour toutes les valeurs distinctes des indices k et h, à partir de 1 jusqu'à r.

Les fonctions (4) représentent, d'après S. Lie, un groupe d'intégrales [23] de l'équation (3).

Cela étant, en généralisant l'idée de Jacobi [24] S. Lie se propose *de former, au moyen des intégrales* (4), *d'autres intégrales de l'équation* (3), *qui soient distinctes entre elles et en involution.*

Toute fonction des intégrales considérées (4) étant de même une intégrale de l'équation (3), le problème posé revient à chercher les valeurs des fonctions distinctes

(5) $$\Phi_j(F, f_1, f_2, \ldots, f_r) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

vérifiant les conditions

(6) $$(\Phi_k, \Phi_h) \equiv 0,$$

les indices, k et h, prenant toutes les valeurs distinctes.

16. Système résolvant. — La fonction F étant en involution avec les autres intégrales du groupe (4), les conditions (6) deviennent

(7) $$(\Phi_k, \Phi_h) \equiv \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_s} X^s(\Phi_h) = 0,$$

où l'on a posé

$$X^s(\Phi_h) \equiv \sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_{s\sigma} \frac{\partial \Phi_h}{\partial f_\sigma}.$$

Les fonctions (5) étant distinctes par rapport à toutes les quantités f_s, on a l'inégatité

$$D\left(\frac{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r}{f_1, f_2, \ldots, f_r}\right) \gtrless 0.$$

Par conséquent, les formules (7) démontrent qu'il est nécessaire et suffisant, pour vérifier les conditions (7), de satisfaire aux équations

(8) $$X^s(\Phi_h) \equiv 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, r).$$

On en conclut que les fonctions cherchées (5) représentent les intégrales distinctes des r équations linéaires et homogènes par rapport aux r dérivées $\frac{\partial f}{\partial f_\sigma}$, $\sigma = 1, 2, \ldots, r$, de la forme suivante :

(9) $$X^s(f) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, r),$$

Mais ces dernières équations, si elles étaient toutes distinctes, n'admettraient aucune solution.

Donc, pour avoir un nombre quelconque μ des solutions distinctes, il est nécesaire que parmi ces dernières équations (9) il n'y en ait que $r - \mu$ qui soient distinctes. Par conséquent le déterminant des coefficients $\alpha_{s\sigma}$ du système (9), à savoir :

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}$$

doit être identiquement nul, ainsi que tous ses mineurs depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre $\mu - 1$. Le système (9) prend alors la forme suivante :

$$(11) \qquad X^s(f) = 0 \qquad (s = 1, 2, \dots, r - \mu).$$

Il est aisé de voir que ce dernier système (11) est intégrable, grâce à l'identité de Jacobi, et admet bien μ intégrales distinctes.

De plus, ces dernières intégrales, que nous allons désigner par

$$(12) \qquad \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_\mu,$$

étant en involution, d'après leur définition même, sont encore en involution avec chacune des intégrales du groupe (4).

Ces dernières intégrales (12) ont été appelées par S. Lie *fonctions distinguées* du groupe (4).

17. L'ordre du déterminant caractéristique. — Nous démontrerons, à présent que *la différence entre le nombre des intégrales du groupe* (4) *et celui des fonctions distinguées de ce groupe est un nombre pair.*

Pour le faire voir, remplaçons μ intégrales quelconques du groupe (4) par les μ intégrales (12), de telle manière que le nouveau groupe obtenu soit engendré par les intégrales distinctes

$$(13) \qquad F, f_1, f_2, \dots, f_{r-\mu}, \quad \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_\mu.$$

Il est bien possible de le faire sans diminuer la généralité de nos raisonnements, car il nous est toujours permis de ranger les intégrales connues suivant un ordre déterminé quelconque.

Les équations analogues à celles (11), qui servent dans notre cas pour définir les fonctions distinguées du groupe (13), deviennent

$$(14) \qquad \sum_{\sigma=1}^{r-\mu} \alpha_{s\sigma} \frac{\partial f}{\partial f_\sigma} = 0 \qquad (s = 1, 2, \dots, r - \mu).$$

Or, le groupe (13) ne possèdant point d'autres fonctions distinguées, en dehors de $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu$, le système (14) n'admet donc point de solutions. Par conséquent, les $r-\mu$ équations (14), linéaires et homonèges, par rapport au même nombre $r-\mu$ des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial f_\sigma}$, doivent être toutes distinctes entre elles. Il s'ensuit que le déterminant Δ, formé des coefficients des équations (14), diffère de zéro :

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,r-\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,r-\mu} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \alpha_{r-\mu,1} & \alpha_{r-\mu,2} & \ldots & \alpha_{r-\mu,r-\mu} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Le déterminant Δ, que nous appellerons *caractéristique*, est *gauche symétrique*, car on a, moyennant les propriétés des parenthèses de Poisson,

$$\alpha_{hk} = -\alpha_{kh}; \qquad \alpha_{hh} = 0.$$

Or, on sait qu'un déterminant gauche symétrique d'un ordre impair est toujours nul. Donc, si le déterminant gauche symétrique Δ diffère de zéro, cela prouve que l'ordre de ce déterminant est pair. Désignons-le par 2ρ; d'où l'on a l'égalité suivante :

$$r-\mu = 2\rho. \tag{15}$$

Le nombre des fonctions du groupe (4) étant r et μ, celui des fonctions distinguées du même groupe, la différence de ces deux nombres est donc toujours paire, grâce à l'égalité (15).

18. Intégration immédiate par une quadrature. — Les fonctions distinguées (12) peuvent être obtenues par l'intégration du système (11). Alors le problème de l'intégration de l'équation (1) revient à intégrer le système d'équations linéaires

$$(\mathrm{F}, f) = 0, \qquad (\Phi_i, f) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{16}$$

formant un système normal, puisque les fonctions F et Φ_i sont en involution.

De plus, ce dernier système (16) admet $r+1$ intégrales distinctes. à savoir F et les (4).

Supposons, d'abord, que nous nous trouvons dans le cas le plus favorable, les dernières intégrales formant un système complet des intégrales distinctes du système de sorte que l'on ait

$$r + 1 = 2n - \mu - 1.$$

Il en résulte, grâce à l'égalité (15),

$$(17) \qquad r + 1 = n + \rho,$$

c'est-à-dire *le nombre* (17) *des intégrales connues du système* (16) *surpasse n des* ρ *unités*, 2ρ *représentant l'ordre du déterminant* Δ.

Les conclusions importantes en déroulent :

1° Les fonctions F et les (4) représentant, dans l'hypothèse (17), un système complet des intégrales distinctes du système linéaire (16), les équations

$$(18) \qquad F = 0, \quad f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad \ldots, \quad f_{n+\rho-1} = C_{n+\rho-1}$$

forment l'intégrale générale des caractéristiques du système d'équations aux dérivées partielles correspondantes [25]. Il s'ensuit, par l'extension de la théorie des caractéristiques (*voir* la Note à l'Appendice), que l'expression

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s \, dx_s,$$

devient une différentielle exacte, en vertu des équations (18). Ces dernières engendrent donc un élément intégrable de l'équation (1).

2° On constate, par conséquent, qu'il suffit, pour l'intégration de l'équation (1), d'avoir rien que les intégrales (4). Quant aux fonctions distinguées (12), il est seulement indispensable d'établir leur existence, pour démontrer que les équations (18) définissaient un élément intégrable de l'équation (1). Donc, l'intégration de cette dernière s'effectue par une quadrature d'après la théorie des caractéristiques, ou bien moyennant la théorie du Chapitre I.

Cela étant, formulons le résultat obtenu de la manière suivante :

Supposons que l'équation (3) *admette un groupe des intégrales* (4). *Si l'ordre de leur déterminant caractéristique* Δ *égale le double excès du nombre des intégrales connues sur celui des variables indépendantes, alors l'intégration de l'équation* (1) *s'achève par une quadrature.*

19. Réduction de l'intégration à une quadrature. — Considérons, à présent, le second cas, où les intégrales F et les (4) représentent un système incomplet des intégrales du système (16), c'est-à-dire où l'on a l'inégalité

$$n - \mu - \rho - 1 > 0.$$

Pour pousser plus loin le problème de l'intégration de l'équation donnée (1), cherchons une nouvelle intégrale du système (16) dont on connaît déjà les $r+1$ intégrales.

S. Lie avait démontré qu'il ne fallait pas pour cela, non plus, connaître explicitement les valeurs des fonctions distinguées Φ_i. Il est aisé, en effet, de former un système des μ équations équivalent aux μ dernières équations (16), sans calculer préalablement les fonctions (12).

Mettons pour cela, les μ dernières équations (16), vu les formules (5), sous la forme suivante :

$$(19) \qquad (\Phi_i, f) \equiv \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial f_s} (f_s, f) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

On en tire de plus, grâce aux hypothèses sur les déterminants (10) et Δ, les identités

$$\sum_{s=1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial f_s} \alpha_{s\sigma} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu; \sigma = 1, 2, \ldots, 2\rho).$$

Il en résulte

$$(20) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial f_s} = -\sum_{j=1}^{\mu} \frac{\Delta'_{s_j}}{\Delta'} \frac{\partial \Phi_i}{\partial f_{2\rho+j}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu; \ s = 1, 2, \ldots, 2\rho),$$

Δ'_{s_j} désignant ce que devient le déterminant Δ', si l'on y remplace les éléments de la $s^{\text{ième}}$ colonne respectivement par les éléments

$$\alpha_{2\rho+j,1}, \quad \alpha_{2\rho+j,2}, \quad \ldots, \quad \alpha_{2\rho+j,2\rho}.$$

Quant au déterminant Δ', il est égal à la valeur du déterminant caractéristique Δ et s'obtient de ce dernier, en transposant les lignes et les colonnes, à savoir :

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \equiv \Delta.$$

La substitution des valeurs obtenues (20) dans les équations (19) rend ces dernières

$$(21)\qquad \sum_{j=1}^{\mu} \frac{\partial \Phi_i}{\partial f_{2\rho+j}} \mathrm{V}_j(f) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

où l'on a posé

$$\mathrm{V}_j(f) \equiv (f_{2\rho+j}, f) - \sum_{s=1}^{2\rho} \frac{\Delta'_{s_j}}{\Delta'} (f_s, f) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Il est évident que le déterminant fonctionnel

$$\mathrm{D}\left(\frac{\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_\rho}{f_{2\rho+1}, f_{2\rho+2}, \ldots, f_{2\rho+\mu}}\right)$$

est distinct de zéro, car on avait introduit cette hypothèse en remplaçant l'ancien groupe par le groupe (13). Par conséquent, les équations (21) donnent le nouveau système d'équations équivalentes

$$\mathrm{V}_j(f) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu),$$

qui sont, d'ailleurs, indépendantes des fonctions (12). Le système (16) sera donc remplacé par le système équivalent

$$(22)\qquad (\mathrm{F}, f) = 0, \qquad \mathrm{V}_j(f) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu),$$

formant un système complet, car il admet toutes les anciennes intégrales.

Cela étant, le problème de la recherche d'une nouvelle intégrale du système (16) revient à calculer une intégrale du système équivalent (22).

Désignons cette dernière intégrale requise par f_{r+1}. Supposons que l'on soit dans le cas le moins favorable, les parenthèses de Poisson formées avec l'intégrale obtenue f_{r+1} et les anciennes (4) ne donnant pas de nouvelles intégrales. Néanmoins est-il aisé de démontrer que ce nouveau groupe admet une fonction distinguée de plus, en comparaison avec l'ancien groupe.

Pour le faire voir, intercalons la fonction f_{r+1} entre les fonctions (13), à la suite de l'intégrale $f_{r-\mu}$.

Alors le nouveau déterminant caractéristique, qui va remplacer, dans le cas considéré, le déterminant Δ, sera un déterminant gauche symétrique, dont l'ordre est impair. Par conséquent, le déterminant en question sera forcément nul, et le nouveau groupe engendre donc une fonction distinguée de plus que le groupe primitif (4).

Désignons cette nouvelle fonction distinguée par $\Phi_{\mu+1}$. En joignant au système (16) l'équation

$$(\Phi_{\mu+1}, f) = 0,$$

on obtient un système normal à $\mu + 2$ équations admettant $r + 2$ intégrales connues. Si ces dernières ne forment point un système complet des intégrales du système considéré, appliquons à ce système obtenu les calculs analogues aux précédents. On obtiendra donc, au moins, une nouvelle intégrale de l'équation (3), et ainsi de suite.

Supposons, en restant toujours dans l'hypothèse la moins favorable, que chaque nouvelle intégration effectuée ne donne qu'une intégrale

Le système (16) possédait, au début du calcul, $r + 1$ intégrales connues en admettant encore des intégrales inconnues au nombre de

$$2n - (\mu + 1) - (r + 1) \equiv 2(n - \mu - \rho - 1).$$

Par conséquent, en répétant $n - \mu - \rho - 1$ fois les opérations de l'intégration indiquée, on obtient le même nombre de nouvelles intégrales de l'équation (3). L'ensemble de toutes les intégrales trouvées de cette dernière équation définit un élément intégrable de l'équation (1). L'intégration de cette équation donnée s'achève donc par une quadrature.

Le résultat obtenu peut être formulé de la manière suivante ;

Supposons que l'équation (3) *admette un groupe des intégrales* (4) *à déterminant caractéristique* Δ, *où l'on a*

$$r - \mu = 2\rho, \qquad n - \mu - \rho - 1 > 0.$$

L'intégration de l'équation donnée (1) *s'achève, dans le cas le moins favorable, moyennant* $n - \mu - \rho - 1$ *opérations d'intégrations d'ordres respectifs*

$$2(n - \mu - \rho - 1), \quad 2(n - \mu - \rho - 2), \quad \ldots, \quad 4, \quad 2$$

et par une quadrature.

Signalons à présent le cas, où le groupe (4) n'implique pas une seule fonction distinguée. Il est alors évident que le nombre r doit être pair, car le déterminant gauche symétrique correspondant (10) ne s'annule point. L'intégration de l'équation (1) revient alors à la recherche d'une nouvelle intégrale de l'équation linéaire (3), dont on connaît déjà les $r+1$ intégrales distinctes.

L'ordre des opérations d'intégration, nécessaires pour achever l'intégration de l'équation (1), sera donné, dans le cas le moins favorable, par les nombres que l'on obtient respectivement, en posant $\mu = 0$ dans la suite qui se trouve en bas de la page précédente.

Les intégrations en question pourraient être effectuées de différentes manières. La suivante présenterait quelquefois des avantages. Remarquons, en effet, que les intégrales (4) engendrant un groupe, les équations

$$(f_k, f) = 0, \qquad (k = 1, 2. \ldots, r)$$

sont compatibles. Elles forment donc, à elles-mêmes, ainsi qu'ensemble avec l'équation (3), un système complet dont F est une intégrale connue. Par conséquent, la première intégrale requise s'obtient par l'intégration de ce dernier système.

Il va de soi-même que les considérations exposées sont applicables encore dans le cas général, où le groupe (4) possède les μ fonctions distinguées (12). Alors ces dernières représentent bien les intégrales connues du système dont il s'agit.

La dernière méthode esquissée est intimement liée à la théorie des transformations infinitésimales de S. Lie [26] et des formes adjointes [27]. Or, nous ne voulons pas entrer dans les détails, en renvoyant pour cela aux travaux que l'on vient de citer.

20. Cas d'un groupe semi-gauche. — Les considérations exposées supposent, d'après les conditions formulées au n° 15 de ce chapitre, que les intégrales connues (4) formant un groupe ne soient pas en involution entre elles, outre F. C'est grâce à cette hypothèse que le déterminant (10) et le déterminant caractéristique Δ représentaient des déterminants gauches symétriques. Par conséquent, il serait aisé d'appeler *gauche* le groupe des intégrales (4) jouissant des propriétés indiquées.

Or, il arrive fréquemment dans les applications, qu'une ou plusieurs paires des intégrales données se trouvent en involution. Dans ce cas les éléments conjugués des déterminants considérés, correspondant aux intégrales en involution sont nuls, et les déterminants en question ne sont donc plus gauches symétriques.

Abstraction faite de l'hypothèse, où toutes les intégrales données soient en involution, supposons qu'il n'y ait que quelques paires des intégrales données, vérifiant cette dernière condition; on dira alors que le *groupe considéré des intégrales est semi-gauche*.

On appellera de même *semi-gauche* le *déterminant* qui devient, dans cette dernière hypothèse, le déterminant (10).

Nous avons exposé plus haut la théorie générale des groupes gauches des intégrales, en considérant le cas le moins favorable pour achever l'intégration d'une équation (1). Il est aisé de voir, à présent, que les intégrales en involution, s'introduisent dans le cas d'un groupe semi-gauche, ne troublent point l'idée générale de la théorie étudiée. Ces dernières intégrales ne pourront que modifier l'ordre et le nombre des intégrations indiquées plus haut. Mais en revanche, le groupe semi-gauche des intégrales introduit parfois des circonstances favorables pour diminuer les difficultés du calcul.

Supposons d'abord que l'on ait un groupe des trois intégrales

$$(23) \qquad f_1, \ f_2, \ f_3.$$

Le déterminant (10) prend alors la forme suivante :

$$D \equiv \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{vmatrix} \equiv \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23}.$$

Si le groupe (23) est gauche, ce dernier déterminant étant gauche symétrique d'un ordre impair s'annule identiquement.

Or, si le groupe (23) est semi-gauche, deux des intégrales au plus étant en involution, le déterminant D sera toujours nul, car chacun des deux termes représentant la valeur de D s'annule indépendamment de l'autre.

Par conséquent, dans le cas considéré, le système linéaire correspondant au système (9) se réduit à deux équations. Le groupe (23) admet donc toujours une fonction distinguée.

Considérons ensuite un groupe des quatre intégrales

$$(24) \qquad f_1, \ f_2, \ f_3, \ f_4.$$

Si ce dernier groupe est gauche, le déterminant (10) correspondant devient gauche symétrique d'ordre pair. Si la valeur de ce dernier déterminant est distincte de zéro, le groupe considéré (24) n'admet point des fonctions distinguées. Or, si le déterminant considéré s'annule, on sait que les premiers mineurs de ce déterminant s'annulent de même, et le groupe (24) admettra alors deux fonctions distinguées.

Le groupe des intégrales (24) étant semi-gauche, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

peut bien s'annuler, parfois, ainsi que les mineurs de ce dernier déterminant. Dans ces dernières circonstances, le groupe des intégrales (24) admettra donc les fonctions distinguées.

Tout dépend, dans ce cas, du nombre des équations du système (9) qui soient distinctes. Les intégrales communes de ces dernières équations vont donc représenter les fonctions distinguées du groupe (24).

Les considérations exposées s'étendent d'elles-mêmes à un groupe semi-gauche d'un nombre quelconque des intégrales distinctes. On démontre aisément que les déterminants semi-gauches d'ordre impair sont identiquement nuls, de même que les déterminants gauches symétriques. Quant aux opérations nécessaires pour achever l'intégration de l'équation (1), elles seront définies par la même marche des calculs exposés aux n^{os} 18 et 19.

Remarquons seulement que le nombre et l'ordre des opérations d'intégration en question dépendront, comme toujours, du nombre des fonctions distinguées du groupe des intégrales considérées.

Intégrons, par exemple, l'équation

$$p_1 + (p_2 + x_3)(p_3 + x_4)(p_4 + x_1) + x_2 = a,$$

dont les caractéristiques admettent un groupe semi-gauche de quatre intégrales

$$f_1 \equiv p_2 + x_1 = C_1, \qquad f_2 \equiv p_3 + x_2 = C_2,$$
$$f_3 \equiv p_4 + x_3 = C_3, \qquad f_4 \equiv p_1 + x_4 = C_4,$$

vérifiant les relations

$$(f_1, f_2) \equiv 1, \quad (f_1, f_3) \equiv 0, \quad (f_1, f_4) \equiv -1,$$
$$(f_2, f_3) \equiv 1 \quad (f_2, f_4) \equiv 0, \quad (f_3, f_4) \equiv 1.$$

On voit aisément que le déterminant (10) et tous les premiers mineurs de ce dernier s'annulent identiquement. Il s'ensuit que notre groupe admettant deux fonctions distinguées, engendre un élément intégrable de l'équation donnée. L'intégration de cette dernière s'achève donc par une quadrature.

Or, la forme particulière du groupe donné met en évidence les fonctions distinguées de ce dernier, et l'on a les trois intégrales en involution, à savoir :

$$f_1, \quad f_2 + f_4, \quad f_3.$$

Par conséquent l'élément intégrable est à remplacer par l'élément intégral correspondant. Il en résulte immédiatement, par une quadrature, l'intégrale complète requise

$$\begin{aligned} z = & -(x_1 x_2 + x_3 x_4) + C' x_1 + C_1 x_2 + C_3 x_4 \\ & + (C' - a) \int \frac{d(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)^2 + (C_1 - C_3)(x_3 - x_1) - C_1 C_3 + 1} + C, \end{aligned}$$

C', C_1, C_3 et C désignant les quatre constantes arbitraires.

21. Applications. — Considérons une équation aux dérivées partielles à trois variables indépendantes de la forme générale

$$F(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0. \tag{25}$$

Supposons que l'équation linéaire correspondante

$$(F, f) = 0$$

admette, outre F, encore trois intégrales non en involution

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3,$$

formant un groupe.

Il est aisé de démontrer que les quatre intégrales citées engendrent un élément intégrable de l'équation considérée (25).

Le déterminant (10) devient, en effet, dans notre cas,

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

Ce dernier déterminant s'annule identiquement, car il est gauche symétrique et d'un ordre impair. Quant au mineur Δ de ce dernier déterminant, il devient

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 0 \end{vmatrix} \equiv \alpha_{12}^2 \gtrless 0.$$

On a donc, dans ce cas considéré, les relations

$$n = 3, \qquad \mu = 1, \qquad \rho = 1.$$

Par conséquent les conditions du théorème de n° 18 sont vérifiées; et l'intégration de l'équation (23), dans l'hypothèse considérée, s'effectue par une quadrature.

Prenons, par exemple, l'équation

$$(26) \qquad p_1 + (x_1 + p_2)(x_2 + p_3) + x_3 = 0.$$

Les équations différentielles des caractéristiques pour cette dernière équation, admettent les trois intégrales évidentes :

$$f_1 \equiv p_3 + x_1 = C_1, \qquad f_2 \equiv p_2 + x_3 = C_2, \qquad f_3 \equiv (p_3 + x_2 - 1)\, e^{p_3} = C_3.$$

Ces trois intégrales forment bien un groupe semi-gauche, car on a les relations suivantes :

$$(f_1, f_2) \equiv 1, \qquad (f_1, f_3) \equiv 0, \qquad (f_2, f_3) \equiv -f_3.$$

L'ensemble de l'équation donnée (26), de la première et de la troisième intégrale forme bien un *élément intégral irrégulier*. Or, au lieu d'appliquer la théorie de ces derniers éléments, il est aisé de profiter de celle des éléments intégrables que l'on étudie ici.

Les conditions mentionnées plus haut sont, effectivement, vérifiées dans le cas considéré, le déterminant caractéristique prenant la valeur

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 1.$$

L'équation donnée (26) admet donc l'élément intégrable :

$$(27) \qquad x_2 = x_1 + C'_3 e^{x_1} - C_1 + 1,$$
$$p_1 = C'_3 (x_3 - x_1 - C_2) e^{x_1} - x_1 - C_2, \qquad p_2 = C_2 - x_3, \qquad p_3 = C_1 - x_1,$$

la nouvelle constante arbitraire C'_3 désignant le produit $C_3 e^{-C_1}$.

Il en résulte par quadrature

$$(28) \qquad z = -\left(\frac{1}{2}x_1 + x_3\right)x_1 - C'_3(x_1 - 1)e^{x_1} + C_1 x_3 + C,$$

C étant la constante arbitraire additive. Si on lui attribue l'expression suivante

$$C \equiv -C_1 C_2 + C',$$

C′ étant la nouvelle constante arbitraire, on obtient immédiatement les valeurs suivantes pour les fonctions caractéristiques de l'élément intégrable considéré

$$U'_1 \equiv 0, \qquad U'_2 \equiv -C_1, \qquad U'_3 \equiv (x_3 - x_1 - C_2 + 1)e^{x_1}.$$

En éliminant C_1 des formules (27) et (28), on obtient donc l'intégrale complète de l'équation (26) sous la forme suivante :

$$z = -\left(\frac{x_1}{2} + C_2\right)x_1 + C'_3(x_3 - x_1 - C_2 + 1)e^{x_1} + x_2(C_2 - x_3) + C'',$$

où l'on a posé $C'' \equiv C' - C_2$, C_2, C'_3 et C'' désignant trois constantes arbitraires.

Observons encore que, l'équation donnée (26) étant résolue par rapport à l'une des dérivées, dans ce cas, les fonctions U'_i et S_i coïncident respectivement. Par conséquent, la troisième fonction U'_3 sert à définir la quatrième intégrale des caracteristiques pour l'équation donnée (26).

On n'a pas fait, jusqu'à présent, beaucoup d'applications du problème de Jacobi que nous étudions, vu la solution très compliquée que lui avait donnée S. Lie.

Il faut bien citer les recherches de S. Lie [28] et de A. Mayer [29] sur les problèmes de la mécanique céleste et de la dynamique analytique. Ils ont cherché à généraliser les résultats, dont est parti Jacobi, en inaugurant son problème [30].

Enfin, M. E. Laura [31] avait profité de la théorie des groupes des intégrales pour étudier le mouvement des tourbillons rectilignes parallèles dans un liquide incompressible indéfini.

Ensuite, M. E. Goursat avait profité de la théorie des groupes dans ses recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre [32].

M. Erik Englund, reprenant les anciennes recherches de J. Bertrand [3], avait étudié les invariants différentiels du problème des trois corps [33].

Dernièrement M. D. Michnevitch vient d'appliquer la théorie des groupes, pour résoudre le problème qu'il pose sur la structure des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue [34].

CHAPITRE IV.

ÉLÉMENTS INTÉGRABLES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

22. Définitions des éléments intégrables. — Considérons un système de m équations, aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue, en involution

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

le déterminant fonctionnel

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{p_1, p_2, \ldots, p_m}\right) \tag{2}$$

ne s'annulant pas.

Formons le système linéaire en involution

$$(F_k, f) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

et les équations aux dérivées partielles des caractéristiques de notre système (1) :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \frac{\partial x_{m+j}}{\partial x_r} = \frac{\partial F_k}{\partial p_{m+j}}, \qquad \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \frac{\partial p_s}{\partial x_r} = -\frac{\partial F_k}{\partial x_s}; \\ (j = 1, 2, \ldots, n-m;\ s = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m). \end{array}\right. \tag{4}$$

Supposons que le système linéaire (3) admette un système incomplet d'intégrales distinctes

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_m, \quad f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_{n+\rho-m} \qquad (\rho < n-m). \tag{5}$$

Nous dirons que *ces dernières intégrales* (5) *forment un élément intégrable particulier du système* (1), *si l'expression*

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s \tag{6}$$

devient une différentielle exacte, en vertu des intégrales des caractéristiques

$$(7)\qquad \begin{cases} F_1 = 0, & F_2 = 0, & \ldots, & F_m = 0, \\ f_1 = C_1, & f_2 = C_2, & \ldots, & F_{n+\rho-m} = C_{n+\rho-m}, \end{cases}$$

$C_1, C_2, \ldots C_{n+\rho-m}$ *désignant* $n+\rho-m$ *constantes arbitraires.*

On va démontrer que *l'intégrale complète du système* (1) *dans l'hypothèse citée s'obtient par une quadrature.*

Mais, *si l'expression* (6) *devient une différentielle exacte, moyennant les intégrales des caractéristiques*

$$(8)\qquad \begin{cases} F_1 = a_1, & F_2 = a_2, & \ldots, & F_m = a_m, \\ f_1 = C_1, & f_2 = C_2, & \ldots, & f_{n+\rho-m} = C_{n+\rho-m}, \end{cases}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_m, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m}$ *étant* $n+\rho$ *constantes arbitraires, ce dernier système* (8) *est dit élément intégrable général du système normal* (1); *et l'on démontrera que l'intégrale générale des caractéristiques s'obtient, moyennant l'élément* (8), *par une quadrature, sans passer par l'intermédiaire de l'intégrale complète du système* (1).

23. Propriétés des éléments intégrables. — En considérant, d'abord, l'élément intégrable (7), supposons que, grâce à l'hypothèse faite sur le déterminant (2), les équations (7) donnent

$$(9)\qquad \begin{cases} x_{n-\rho+j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m}) & (j = 1, 2, \ldots, \rho). \\ p_s = \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m}) & (s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Soit

$$(10)\qquad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m}) + C$$

l'intégrale de la différentielle exacte que devient l'expression (6), au moyen des formules (9), C désignant une constante arbitraire additive.

La première propriété de l'élément considéré (7) s'exprime par les identités suivantes :

$$(11)\qquad \psi_r \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} - \sum_{j=1}^{\rho} \psi_{n-\rho+j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-\rho).$$

Les formules (9), (10) et (11) s'étendent, d'une manière analogue, sur les éléments intégrables généraux. Mais, alors, les formules correspondantes se distinguent de ces dernières par l'intervention des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ qui doivent figurer dans les nouvelles formules en question.

24. Formation de l'intégrale complète, moyennant un élément intégrable particulier. — Remarquons, en premier lieu, que les formules (9) vérifient identiquemeut les équations à intégrer (1).

Cela étant, étudions, s'il est possible d'éliminer des n dernières equations (9) et de la formule (10), moyennant les ρ premières équations (9), ρ constantes quelconques parmi les C_σ, de telle manière que les expressions obtenues pour les p_s soient les dérivées partielles du premier ordre de la valeur obtenue pour z.

Supposons, pour fixer les idées, que le déterminant fonctionnel

$$(12) \qquad D\left(\frac{\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_\rho}{C_{n-m+1}, C_{n-m+2}, \ldots, C_{n-m+\rho}}\right)$$

soit distinct de zéro.

Écrivons le résultat de la substitution des valeurs

$$C_{n-m+1}, \quad C_{n-m+2}, \quad \ldots, \quad C_{n-m+\rho},$$

tirées des ρ premières équations (9), dans les autres équations (9) et dans la formule (10), sous la forme

$$(13) \qquad \begin{cases} p_s = \Psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}) & (s = 1, 2, \ldots, n), \\ z = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}) + C. \end{cases}$$

La dernière équation (13) va représenter l'intégrale complète requise du système (1), si les formules (13) vérifient les conditions.

$$(14) \qquad \Psi_s = \frac{\partial \Psi}{\partial x_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

On démontre aisément, de la même manière, que dans le cas d'une équation (*voir* p. 7), qu'il suffit de satisfaire seulement aux ρ dernières égalités (14), les $n-\rho$ premières étant leur conséquence immédiate.

25. Conditions nécessaires et suffisantes. — On a l'identité suivante découlant de la formule (10) et de la dernière équation (13) :

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m+\rho}) \\ \equiv \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}).$$

Il s'ensuit les identités nouvelles

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial C_k} - \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_{n-\rho+j}} \right) \frac{\partial \varphi_j}{\partial C_k} \equiv \left(\frac{\partial \Psi}{\partial C_k} \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-m), \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial C_{n-m+\mu}} - \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_{n-\rho+j}} \right) \frac{\partial \varphi_j}{\partial C_{n-m+\mu}} \equiv 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \rho). \end{aligned} \right.$$

Les égalités obtenues (15) ne se distinguent de (21) et (22) (*voir* p. 8) que par le nombre de formules de la première ligne.

Cela résulte de ce que les nombres de constantes arbitraires sont distincts dans les deux cas étudiés. Or, il est évident que les considérations, analogues à celles exposées au premier Chapitre (*voir* p. 9), démontrent de même, dans le cas actuel du système normal (1), le théorème suivant :

Le déterminant (12) *étant distinct de zéro, les conditions nécessaires et suffisantes pour que la dernière formule* (13) *définisse l'intégrale complète du système* (1) *s'expriment de la manière suivante :*

$$(16) \quad U'_k \gtrless 0, \qquad U'_{n-m+\mu} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-m, \ \mu = 1, 2, \ldots, \rho),$$

où l'on a posé

$$U'_i \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial C_i} - \sum_{j=1}^{\rho} \psi_{n-\rho+j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial C_i},$$

26. Seconde propriété de l'élément intégrable particulier. — Les dernières *fonctions caractéristiques de l'élément intégrable particulier*, que l'on vient d'introduire, jouissent d'une remarquable propriété qui va être exposée.

Le calcul analogue à celui du n° 6 (Chapitre I) donne, grâce aux identités (11), les m égalités suivantes :

$$(17) \quad \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \frac{\partial U'_i}{\partial x_r} = \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \left[\frac{\partial \psi_r}{\partial C_i} + \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial C_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} - \frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial x_r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial C_i} \right) \right]$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m).$$

Or, les équations différentielles des caractéristiques (4), en généralisant les considérations du n° 7 (au Chapitre I), donnent, grâce à l'élément intégrable (9), les identités

$$\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} = \frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho+j}}, \quad \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_r} = -\frac{\partial F_k}{\partial x_s}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, \rho;\ s = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m).$$

Grâce à ces dernières identités, transformons les seconds membres des identités (17), en les mettant sous la forme suivante :

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \frac{\partial U'_i}{\partial x_p} &= \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial C_i} + \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho+j}} \frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial C_i} + \frac{\partial F_k}{\partial x_{n-\rho+j}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial C_i} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial F_k}{\partial x_{n-\rho+j}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial C_i} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial C_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned} \right.$$

Les m premières équations du système (7) étant identiquement satisfaites par les valeurs (9) des variables $x_{n-\rho+j}$ et p_s, les dérivées partielles des identités, qui en découlent, prises par rapport à chacune des valeurs C_i, sont de même identiquement nulles. Par conséquent, les seconds membres des égalités (18) s'annulent, et il en résulte les identités suivantes, valables pour toutes les valeurs de l'indice i :

$$\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \frac{\partial U'_i}{\partial x_r} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, n - m + \rho).$$

Transformons ces dernières égalités, en y substituant les valeurs des dérivées

$$\frac{\partial F_k}{\partial p_{m+1}}, \quad \frac{\partial F_k}{\partial p_{m+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

que l'on tire des équations différentielles des caractéristiques (4). Il en résulte les équations différentielles

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \left(\frac{\partial U'_i}{\partial p_r} + \sum_{j=1}^{n-m-\rho} \frac{\partial U'_i}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial x_{m+j}}{\partial x_r} \right) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, n - m + \rho),$$

qu'il est aisé de mettre sous la forme suivante :

$$\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \frac{dU'_i}{dx_r} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, n-m+\rho),$$

en désignant par le symbole $\frac{d}{dx_r}$ la dérivée totale. Cela étant, le déterminant fonctionnel (2) ne s'annulant pas, le système des m dernières équations, pour une valeur quelconque de l'indice i, donne

$$\frac{dU'_i}{dx_r} = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-m+\rho).$$

On a, par conséquent,

(19) $$U'_i = C'_i; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m+\rho),$$

C'_i désignant des constantes arbitraires s'introduisant, grâce à l'intégration effectuée.

27. Introduction des valeurs initiales des variables. — Si les conditions (16) ne sont pas vérifiées, on doit introduire alors dans les formules (9) et (10), au lieu des constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_{n-m+\rho}$, les valeurs initiales de variables fonctionnelles.

Les équations (9) et (10) deviennent, après la transformation en question effectuée, les valeurs initiales $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0$ étant éliminées à l'aide des équations données (1),

(20) $$\left\{\begin{aligned} x_{n-\rho+j} &= \Phi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_{m+1}^0, \ldots, p_n^0) \\ &\qquad (j = 1, 2, \ldots, \rho). \\ p_s &= \Theta_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_{m+1}^0, \ldots, p_n^0) \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right.$$

(21) $$z = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_{m+1}^0, \ldots, p_n^0) + z^0,$$

où l'on considère les valeurs initiales

(22) $$x_{n-\rho+1}^0,\ x_{n-\rho+2}^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ z^0,\ p_{m+1}^0,\ \ldots,\ p_n^0$$

comme des constantes arbitraires; quant à $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-\rho}^0$, elles admettent des valeurs constantes quelconques bien déterminées, toutes les valeurs initiales des variables appartenant, bien entendu, au domaine de l'intégrabilité du système (1).

Ce qui concerne les formules (19), elles deviennent.

$$U'_i = U'^0_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - m + \rho),$$

U'^0_i désignant la valeur initiale de la fonction U'_i.

Il est évident que les ρ premières équations (20) sont résolubles par rapport aux ρ premières constantes (22). Pour satisfsire aux conditions (16), introduisons, au lieu de z^0, une nouvelle constante arbitraire b, reliée avec les autres par la formule suivante :

$$(23) \qquad z^0 = b + \sum_{r=1}^{n-m} x^0_{m+r} p^0_{m+r}.$$

En posant

$$(24) \qquad \Theta \equiv \Phi + \sum_{r=1}^{n-m} x^0_{m+r} p^0_{m+r} + b,$$

les fonctions caractéristiques de l'élément intégrable correspondant deviennent, grâce aux formules (20), (21), (23) et (24),

$$U'_\mu \equiv \frac{\partial \Theta}{\partial x^0_{n-\rho+\mu}} - \sum_{j=1}^{\rho} \Theta_{n-\rho+j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x^0_{n-\rho+\mu}} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \rho),$$

$$U'_{\rho+k} \equiv \frac{\partial \Theta}{\partial p^0_{m+k}} - \sum_{j=1}^{\rho} \Theta_{n-\rho+j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p^0_{m+k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - m).$$

Par conséquent, les valeurs initiales de ces dernières fonctions, dans le domaine de l'intégrabilité considéré, en vertu de la formule (24), deviennent

$$U'^0_\mu \equiv 0, \qquad U'^0_{\rho+k} \equiv x^0_{m+k} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \rho;\ k = 1, 2, \ldots, n - m).$$

Donc, en éliminant des formules (21) et (23), les valeurs $x^0_{n-\rho+1}, x^0_{n-\rho+2}, \ldots, x^0_n$, *définies par les* ρ *premières équations* (20), *on représente l'intégrale complète du système* (1) *de la manière suivante :*

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, x^0_1, \ldots, x^0_{n-\rho}, p^0_{m+1}, \ldots, p^0_n) + b,$$

$p^0_{m+1}, p^0_{m+2}, \ldots, p^0_n$, b *désignant* $n - m + 1$ *constantes arbitraires, à condition que* $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m, x^0_{m+1}, \ldots, x^0_{n-\rho}$ *admettent, dans le domaine considéré, des valeurs quelconques constantes, dont les* $n - \rho - m$ *dernières soient distinctes de zéro.*

Nous ne voulons pas insister davantage sur d'autres cas possibles de formation d'une intégrale complète du système (1). Il est aisé de les obtenir en généralisant les considérations exposées au n° 8 du Chapitre I concernant une équation aux dérivées partielles.

28. Formation de l'intégrale générale des caractéristiques d'un système normal, moyennant un élément intégral général. — Revenons à l'élément intégrable général (8) du système (1) et mettons cet élément sous la forme suivante :

$$(25)\quad \begin{cases} x_{n-\rho+j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, a_1, a_2, \ldots, a_m, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m}) \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, \rho), \\ p_s = \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, a_1, a_2, \ldots, a_m, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m}) \\ \qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Supposons que l'intégrale de l'expression (6), en vertu des équations (25), soit

$$(26)\qquad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, a_1, a_2, \ldots, a_m, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m}) + C,$$

C désignant la constante arbitraire additive.

Les deux propriétés fondamentales de l'élément intégrable général d'une équation s'étendent d'elles-mêmes, d'une manière évidente, sur celui (25) du système (1).

Il en résulte que les fonctions U'_i, introduites au n° 25, deviennent dans le cas que l'on considère

$$S_i \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial C_i} - \sum_{j=1}^{\rho} \psi_{n-\rho+j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial C_i},$$

les fonctions φ, $\psi_{n-\rho+j}$ et φ_j étant définies par les formules (26) et (25).

Quant aux formules (19), elles sont remplacées, dans notre cas, par les équations

$$(27)\qquad S_i = C'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - m + \rho),$$

C'_i désignant des constantes arbitraires.

Les formules obtenues (27) définissent les équations intégrales des caractéristiques du système (1). C'est dans cette propriété que consiste la distinction essentielle entre les formules (27) et celles (19) provenant de l'élément intégrable particulier. En effet, les égalités que l'on obtient, dans l'hypothèse d'un élément intégrable particulier, s'annulent identiquement, en général, moyennant les équations données (1).

Tandis qu'en partant de l'élément intégrable général, on remplace ces dernières équations par les m premières formules (8) impliquant les constantes arbitraires a_k. C'est pour cela que les égalités dont on manie, sont toujours des identités, et la dernière intégration effectuée conduit aux équations intégrales requises (27).

Ces dernières intégrales pourraient être obtenues encore par deux autres méthodes en généralisant les calculs des n[os] **11** et **12** qui paraissent être plus immédiats.

29. Intégrales distinctes. — Il est aisé de démontrer que, parmi les équations intégrales (27), $n-m-\rho$ équations sont distinctes et résolubles par rapport aux variables

$$x_{m+1},\quad x_{m+2},\quad \ldots,\quad x_{n-\rho}. \tag{28}$$

En effet, on peut toujours supposer, sans diminuer la généralité de nos considérations, vu l'hypothèse faite sur le déterminant (2), que les ρ premières et les $n-m$ dernières équations (25) soient résolubles par rapport à

$$C_1,\quad C_2,\quad \ldots,\quad C_{n+\rho-m}.$$

On a donc l'inégatité

$$\Delta \equiv D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho, \psi_{m+1}, \ldots, \psi_n}{C_1, C_2, \ldots, C_\rho, C_{\rho+1}, \ldots, C_{n+\rho-m}}\right) \gtrless 0.$$

Formons à présent le déterminant

$$\left|\begin{array}{ccccccccc}
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial C_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_\rho}{\partial C_1} & \dfrac{\partial S_1}{\partial x_{m+1}} & \ldots & \dfrac{\partial S_1}{\partial x_{n-\rho}} & \dfrac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial C_1} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial C_1} \\
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial C_2} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_\rho}{\partial C_2} & \dfrac{\partial S_2}{\partial x_{m+1}} & \ldots & \dfrac{\partial S_2}{\partial x_{n-\rho}} & \dfrac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial C_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial C_2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial C_{n+\rho-m}} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_\rho}{\partial C_{n+\rho-m}} & \dfrac{\partial S_{n+\rho-m}}{\partial x_{m+1}} & \ldots & \dfrac{\partial S_{n+\rho-m}}{\partial x_{n-\rho}} & \dfrac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial C_{n+\rho-m}} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial C_{n+\rho-m}}
\end{array}\right| \tag{29}$$

Moyennant la première propriété de l'élément intégrable général, on transforme le déterminant (29) de telle manière que les éléments des $n-\rho-m$ colonnes, à partir de la $(\rho+1)^{\text{ième}}$ colonne jusqu'à le $(n-m)^{\text{ième}}$, soient identiques aux éléments respectifs du déterminant Δ. Par conséquent, le déterminant (29) étant identique à Δ, est distinct de zéro. Cela étant, l'un au moins des déterminants mineurs du déterminant (29), formés avec les éléments des $n-\rho-m$ colonnes mentionnées, est distinct de zéro.

Sans diminuer la généralité de la démonstration, supposons, par exemple, pour fixer les idées, que le déterminant

$$D\left(\frac{S_1, S_2, \ldots, S_{n-\rho-m}}{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{n-\rho}}\right)$$

soit distinct de zéro.

Il s'ensuit, alors, que les $n-\rho-m$ premières équations (27) définissent les intégrales requises.

30. Problème généralisé de Jacobi pour un système normal d'équations aux dérivées partielles. — Généralisons la théorie exposée au Chapitre III sur le système de m équations (1) du présent chapitre.

Supposons que le système linéaire (3) admette un système incomplet d'intégrales distinctes

$$F_1, F_2, \ldots, F_m, f_1, f_2, \ldots, f_r \qquad (r < 2n-2m). \tag{30}$$

Supposons, de plus, que ces dernières intégrales forment un groupe, c'est-à-dire que les parenthèses de Poisson

$$(f_k, f_h) \equiv \alpha_{kh},$$

représentent des fonctions des intégrales (30), pour toutes les valeurs distinctes des indices k et h, à partir de 1 jusqu'à r.

Cherchons donc, d'après Jacobi, les intégrales du système (3) de la forme

$$\Phi_l(F_1, F_2, \ldots, F_m, f_1, f_2, \ldots, f_r). \tag{31}$$

qui soient en involution entre elles.

31. Système résolvant et déterminant caractéristique. — Les m premières fonctions (30) étant en involution entre elles et avec les autres intégrales du groupe (30), les fonctions cherchées (31) représentent donc les intégrales distinctes du système linéaire

$$X_s(f) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r). \tag{32}$$

Ce dernier système obtenu quant à la forme générale est identique au système (9) (Chapitre III), correspondant à une équation aux dérivées partielles. Or, ce qui distingue le cas considéré actuellement du cas précédent d'une équation consiste dans ce que les expressions α_{kh} dépendent à présent des m fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Mais ces dernières fonctions ne figurent que dans les coefficients des équations (32) à titre des paramètres.

Pour l'existence d'un nombre quelconque des fonctions distinguées (31), il est bien nécessaire que le déterminant des coefficients du système (32) s'annule. Si l'on suppose qu'il y ait μ fonctions distinguées, le système (32) se réduit à $r-\mu$ premières équations, formant le système dit *résolvant* du groupe (30).

Enfin, est-il toujours possible d'admettre, d'une manière analogue, au cas d'une équation donnée, de même dans le cas considéré, que toutes les parenthèses α_{kh} ne s'annulant pas, le premier mineur du déterminant du système (32) distinct de zéro soit *symétrique gauche*. Il s'ensuit que le nombre $r-\mu$, étant pair, est égal à 2ρ.

Nous appellerons ce dernier déterminant *caractéristique*, son ordre étant, donc, 2ρ.

Par conséquent, la différence dans l'hypothèse considérée des deux nombres, celui des fonctions du groupe (30) et des fonctions distinguées de ce dernier est paire, étant égale à 2ρ.

32. Intégration immédiate par une quadrature. — En supposant connues toutes les μ fonctions distinguées (31), on réduit le problème de l'intégration du système (1) à celui du système linéaire normal

$$(33)\quad (F_k, f)=0 \qquad (\Phi_i, f)=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, m;\ i=1, 2, \ldots, \mu).$$

Ce dernier système (33) admet $r+m$ intégrales distinctes (30).

Si l'on suppose que les intégrales connues forment un système complet des intégrales du système (33), l'intégration des équations (1) va s'achever par une quadrature.

En effet, l'on a, dans cette hypothèse,

$$m+r\equiv 2n-\mu-m,$$

ou bien

$$m+r\equiv n+\rho,$$

Cela étant, les considérations analogues à celles du n° 18 conduisent au théorème suivant :

Supposons que le système linéaire (3) *admette un groupe des intégrales* (30). *Si l'ordre de leur déterminant caractéristique égale le double excès du nombre des intégrales connues sur celui des variables indépendantes, alors l'intégration du système* (1) *s'achève par une quadrature.*

33. **Réduction de l'intégration à une quadrature.** — Considérons, à présent, le cas où les intégrales (30) représentent un système incomplet des intégrales du système (33), de sorte que l'on ait l'inégalité

$$n - \mu - \rho - m > 0.$$

On obtiendra alors aisément, de la manière analogue à celle exposée plus haut (*voir* n° 19, Chapitre III), $n - \mu - \rho - m$ nouvelles intégrales distinctes du système linéaire équivalent à celui (33), à savoir :

$$f_{r+1}, \quad f_{r+2}, \quad \ldots, \quad f_{n+\rho-m}.$$

Ces dernières intégrales s'obtiennent, dans le cas le moins favorable, moyennant $n - \mu - \rho - m$ opérations d'intégrations successives des certains systèmes correspondants d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre.

On parvient, en définitive, à un élément intégrable particulier du système donné (1).

L'intégration de ce dernier s'achève donc par une quadrature.

On résume le résultat acquis de la manière suivante :

Le système linéaire (3) *admettant un groupe des intégrales* (30), *à déterminant caractéristique de l'ordre* $r - \mu = 2\rho$, *supposons que l'on ait*

$$n - \mu - \rho - m > 0.$$

L'intégration du système donné (1) *s'achève, dans le cas le moins favorable, moyennant* $n - \mu - \rho - m$ *opérations d'intégrations d'ordres respectifs*

$$2(n - \mu - \rho - m), \quad 2(n - \mu - \rho - m - 2), \quad \ldots, \quad 4, \quad 2$$

et par une quadrature.

34. Méthode de perfectionnement dans la théorie des éléments intégrables. — On a supposé plus haut que chaque élément intégrable soit précisément résoluble par rapport à toutes les variables canoniques de la seconde classe. Pour s'affranchir de cette dernière restriction, introduisons l'hypothèse que les équations (7) soient résolubles par rapport à $n+\rho$ variables suivantes [35] :

$$x_{l-\rho+1},\quad x_{l-\rho+2},\quad \ldots,\quad x_n,\quad p_1,\quad p_2,\quad \ldots.\quad p_l,$$

où l'indice l désigne un nombre quelconque compris dans l'intervalle

$$\rho \leqq l < n.$$

Cela posé, le système (7) nous donne les formules suivantes :

$$(34)\quad \begin{cases} x_{l-\rho+j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{l-\rho}, p_{l+1}, p_{l+2}, \ldots, p_n, C_1, \ldots, C_{n+\rho-m}) \\ \qquad (j = 1, 2, \ldots, \rho+n-l), \\ p_s = \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{l-\rho}, p_{l+1}, p_{l+1}, \ldots, p_n, C_1, \ldots, C_{n+\rho-m}) \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, l). \end{cases}$$

Répartissons, à présent, les variables en *classes canoniques* correspondant à chacune des deux lignes suivantes :

$$(35)\quad \begin{cases} x_1, & x_2, & \ldots, & x_l, & -p_{l+1}, & -p_{l+2}, & \ldots, & -p_n, \\ p_1, & p_2, & \ldots. & p_l, & x_{l+1}, & x_{l+2}, & \ldots, & x_n. \end{cases}$$

Comme on le sait, le système (1), dans cette nouvelle hypothèse, reste encore en involution; les équations (3) et (33) forment toujours des systèmes normaux, admettant les mêmes intégrales que dans l'hypothèse primitive.

Par conséquent, l'expression

$$(36)\qquad dz' = \sum_{s=1}^{l} p_s\, dx_s - \sum_{j=1}^{n-l} x_{l+j}\, dp_{l+j},$$

devient une différentielle exacte, en vertu des équations (34).

Il en résulte, d'après la théorie développée, que l'intégrale complète du système donné (1), pour la répartition des variables (35), s'obtient par la quadrature de la dernière différentielle exacte (36).

Pour en tirer l'intégrale complète du système (1) correspondant à la répartition primitive des variables canoniques, on n'a qu'à appliquer la théorie des éléments intégraux [36].

CHAPITRE V.

ÉLÉMENT INTÉGRABLE PARTICULIER ET FORMATION DE L'INTÉGRALE COMPLÈTE DES ÉQUATIONS CONTENANT EXPLICITEMENT LA FONCTION INCONNUE.

35. Élément intégrable particulier et la propriété de ce dernier. — Considérons un système, en involution, des m équations distinctes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue, contenant explicitement cette dernière :

$$(1) \qquad F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

le déterminant fonctionnel

$$(2) \qquad D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{p_1, p_2, \ldots, p_m}\right)$$

ne s'annulant pas.

Supposons que le système linéaire

$$(3) \qquad [F_k, f] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

les crochets désignant ceux de Weiler, admette un système incomplet d'intégrales distinctes

$$(4) \qquad F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_m, \quad f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_{n+\rho-m+1},$$

qui n'engendrent point n intégrales en involution.

Nous dirons que *ces dernières intégrales forment un élément intégrable particulier du système* (1), *si la relation*

$$(5) \qquad dz = \sum_{s=1}^{n} p_s \, dx_s$$

est identiquement satisfaite, *en vertu des équations* (1) *et des suivantes :*

$$(6) \qquad f_1 = C_1 \qquad f_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad f_{n+\rho-m+1} = C_{n+\rho-m+1},$$

$C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m+1}$ *désignant des constantes arbitraires.*

Il est alors aisé de démontrer que l'intégrale complète du système (1) s'obtient rien que par des éliminations algébriques.

Supposons, en effet, que l'ensemble des équations (1) et (6) nous donne

$$(7)\quad \begin{cases} x_{n-\rho+j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m+1}) & (j = 1, 2, \ldots, \rho), \\ z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m+1}), \\ p_s = \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m+1}) & (s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

La première propriété de l'élément considéré s'exprime, en vertu de l'hypothèse faite sur l'égalité (5), par les identités suivantes :

$$(8)\quad \left\{ \psi_r \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x_r} - \sum_{j=1}^{\rho} \psi_{n-\rho+j} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_r} \right. \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-\rho).$$

36. Formation de l'intégrale complète; conditions nécessaires et suffisantes. — En reprenant les considérations qui étaient développées en détail aux Chapitres I et IV du présent travail, on retrouve aisément le résultat suivant :

Le déterminant fonctionnel

$$(9)\quad D\left(\frac{\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_\rho}{C_{n-m+2}, C_{n-m+3}, \ldots, C_{n-m+\rho+1}}\right)$$

ne s'annulant pas, les formules

$$(10)\quad U'_k \gtrless 0, \qquad U'_{n-m+\mu+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-m+1;\ \mu = 1, 2, \ldots, \rho).$$

où l'on a posé

$$(11)\quad \begin{cases} U'_i \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{\rho} \psi_{n-\rho+j} \frac{\partial\varphi_j}{\partial C_i} \\ (i = 1, 2, \ldots, n-m, n-m+1, n-m+2, \ldots, n-m+\rho+1), \end{cases}$$

représentent les conditions nécessaires et suffisantes pour que le résultat de l'élimination des valeurs $C_{n-m+2}, C_{n-m+3}, \ldots, C_{n-m+\rho+1}$ *du système des* $\rho+1$ *premières équations* (7) *soit l'intégrale complète du système* (1).

La démonstration de ce dernier théorème s'effectue, grâce aux identités (8), par les considérations citées antérieurement aux nos 24-25 du Chapitre IV.

37. Seconde propriété de l'élément intégrable particulier. — Écrivons d'abord les équations aux dérivées partielles des caractéristiques relatives au système (1), à savoir

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_i}\frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_i} = \frac{\partial F_k}{\partial p_{m+r}} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-m), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_i}\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_s} p_s, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_i}\frac{\partial p_s}{\partial x_i} = -\frac{dF_k}{dx_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \end{array}\right.$$

Substituons-y les valeurs (7) représentant, grâce aux $n-m-\rho$ premières équations (12), les solutions de toutes les autres équations du système (12). On aura, grâce aux $n-m-\rho$ premières égalités de la première ligne (12), les identités suivantes :

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_r}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} = \frac{\partial F_s}{\partial p_{n-\rho+j}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \rho), \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_r}\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_s}\psi_s, \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_r}\frac{\partial \psi_s}{\partial x_r} = -\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_s} + \frac{\partial F_k}{\partial z}\psi_s\right) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \end{array}\right.$$

Cela posé, les formules (17) du Chapitre IV deviennent

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_r}\frac{\partial U'_i}{\partial x_r} = \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial F_k}{\partial x_{n-\rho+j}}\frac{\partial \varphi_j}{\partial C_i} + \frac{\partial F_k}{\partial z}\sum_{j=1}^{\rho}\psi_{n-\rho+j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial C_i} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial p_s}\frac{\partial \psi_s}{\partial C_i} \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \end{array}\right.$$

Or, les équations (1) étant identiquement vérifiées par les valeurs (7), les m dernières égalités (14) vont devenir

$$(15)\qquad \sum_{r=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_r}\frac{\partial U'_i}{\partial x_r} = -\frac{\partial F_k}{\partial z} U'_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

pour toutes les valeurs de l'indice i, à partir de 1 jusqu'à $n-m+\rho+1$.

On démontre, d'une manière analogue à celle de la théorie des caractéristiques, qu'*il existe parmi les fonctions* (11), *au moins une*, *distincte de zéro*.

Supposons donc que la fonction U'_{n-m+1} soit distincte de zéro. Les formules (15) vont donner, en vertu du système (12) et grâce à l'hypothese faite sur le déterminant (2), les relations suivantes :

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{U'_i}{U_{n-m+1}} = \dfrac{U'^0_i}{U'^0_{n-m+1}} \\ (i = 1, 2, \ldots, n-m; \; n-m+2, \ldots, n-m+\rho+1), \end{array} \right.$$

U'^0_i, U'^0_{n-m+1} désignant respectivement les valeurs initiales des fonctions U'_i, $U'_{n\ m+1}$.

38. **Calcul de l'intégrale complète.** — Les formules obtenues (16) démontrent que l'on réussirait à satisfaire aux conditions (10), en vérifiant les conditions analogues pour les valeurs initiales des fonctions (11).

Par conséquent, introduisons, dans les formules (7), au lieu des constantes arbitraires, les valeurs initiales des variables paramétriques. Le calcul d'une intégrale complète du système (1) s'effectue alors d'une manière analogue à celle suivie dans la théorie des caracteristiques [37].

39. **Groupe fonctionnel des intégrales.** — Supposons, à présent, que les équations (3) admettent un système incomplet d'intégrales

$$(17) \qquad F_1, \; F_2, \; \ldots, \; F_m, \; f_1, \; f_2, \; \ldots, \; f_r \qquad (r < 2n - 2m)$$

distinctes dont les r dernières ne sont pas en involution.

Le théorème bien connu de Poisson peut être généralisé [38], dans le cas considéré, sous la forme suivante :

Le rapport des deux crochets de Weiler, formés par les intégrales distinctes (17), *qui ne soient pas en involution, donne une intégrale du système* (3).

On dit, par conséquent, que les intégrales (17) forment un groupe si les conditions suivantes sont vérifiées pour toutes les intégrales en question :

$$[f_k, f_h] = \frac{1}{w} \pi_{kh}(F_1, F_2, \ldots, F_m, f_1, f_2, \ldots, f_r),$$

$$[w, f_s] - w\frac{\partial f_s}{\partial z} = \pi_s(F_1, F_2, \ldots, F_m, f_1, f_2, \ldots, f_r),$$

où l'on a posé $w \equiv \frac{1}{a}$, a désignant les crochets de Weiler formés par deux intégrales quelconques, parmi les (17), distinctes de zéro, et π_{kh}, π_s étant des fonctions des intégrales (17).

Cela posé, la notion des fonctions distinguées est étendue sur le groupe (17).

Il est aisé ensuite de généraliser les considérations du Chapitre III pour calculer les éléments intégrables du système (1). On trouvera toutes les indications nécessaires pour cela au Chapitre IX du Traité de N. Saltykow [39].

CHAPITRE VI.

ÉLÉMENT INTÉGRABLE GÉNÉRAL ET FORMATION DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE DES CARACTÉRISTIQUES POUR UN SYSTÈME CONTENANT EXPLICITEMENT LA FONCTION INCONNUE.

40. Définition de l'élément intégrable général. — Considérons le système en involution étudié au chapitre précédent :

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

le déterminant fonctionnel

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{p_1, p_2, \ldots, p_m}\right) \tag{2}$$

étant distinct de zéro.

Supposons que le système linéaire

$$[F_k, f] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

admette un système incomplet d'intégrales distinctes

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_m, \quad f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_{n+\rho-m+1}, \tag{4}$$

n'engendrant point n intégrales en involution.

Ces dernières intégrales forment un *élément intégrable général*, si l'ensemble des équations

$$\left\{\begin{array}{llll} F_1 = a_1, & F_2 = a_2, & \ldots, & F_m = a_m, \\ f_1 = C_1, & f_2 = C_2, & \ldots, & f_{n+\rho-m+1} = C_{n+\rho-m+1} \end{array}\right. \tag{5}$$

vérifie identiquement l'égalité

$$(5)\qquad dz = \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_m$, $C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m+1}$ désignant des constantes arbitraires.

Supposons d'abord que les équations (5) donnent, par résolution, les valeurs suivantes des variables :

$$(7)\qquad \begin{cases} z = \varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, a_1, a_2, \ldots, a_m, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m+1}), \\ x_{n-\rho+j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, a_1, a_1, \ldots, a_m, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m+1}), \\ p_s = \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, a_1, a_1, \ldots, a_m, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m+1}) \\ (j = 1, 2, \ldots, \rho;\ s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

On a donc les identités suivantes :

$$(8)\qquad \psi_r \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x_r} - \sum_{j=1}^{\rho} \psi_{n-\rho+j} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-\rho).$$

11. Propriétés des fonctions S. — Le déterminant (2) étant distinct de zéro, en introduisant les désignations analogues à celles du n° 10,

$$(9)\qquad S_i \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial C_i} - \sum_{j=1}^{\rho} \psi_{n-\rho+j} \frac{\partial\varphi_j}{\partial C_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+\rho-m+1),$$

on obtient (voir le n° 13) que le déterminant

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial C_1} & \frac{\partial S_1}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial S_1}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial C_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial C_2} & \frac{\partial S_2}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial S_2}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial C_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial C_{n+\rho-m+1}} & \cdots & \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial C_{n+\rho-m+1}} & \frac{\partial S_{n+\rho-m+1}}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial S_{n+\rho-m+1}}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial\psi_{n-\rho+1}}{\partial C_{n+\rho-m+1}} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial C_{n+\rho-m+1}} \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas.

Ajoutons, enfin, aux éléments de la première colonne les valeurs proportionnelles aux éléments des ρ colonnes successives, à savoir :

$$\sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial\varphi_j}{\partial C_i} \psi_{n-\rho+j}.$$

Les éléments de la première colonne du déterminant (10) deviennent alors respectivement nos fonctions (9).

Or, le déterminant (10) étant toujours distinct de zéro, il existe au moins un mineur du déterminant, considéré de même distinct de zéro, qui soit formé par les éléments de la première colonne et des $n-m-\rho$ colonnes, à partir de la $(\rho+2)^{\text{ieme}}$ colonne jusqu'à la $n-m+2^{\text{ieme}}$ colonne.

Supposons donc, pour fixer les idées, que l'on ait

$$(11)\qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} S_1 & \dfrac{\partial S_1}{\partial x_{m+1}} & \dots & \dfrac{\partial S_1}{\partial x_{n-\rho}} \\ S_2 & \dfrac{\partial S_2}{\partial x_{m+1}} & \dots & \dfrac{\partial S_2}{\partial x_{n-\rho}} \\ .. & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ .. & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ S_{n-\rho-m+1} & \dfrac{\partial S_{n-\rho-m+1}}{\partial x_{m+1}} & \dots & \dfrac{\partial S_{n+\rho+m+1}}{\partial x_{n-\rho}} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

1° L'inégalité (11) démontre que toutes *les fonctions*

$$(12)\qquad S_1,\ S_2,\ \dots,\ S_{n-\rho-m+1}$$

sont distinctes de zéro, car, dans le cas contraire, l'inégalité considérée (11) ne subsisterait plus.

2° *Il n'existe*, au plus, *qu'une fonction parmi les* (12), *qui pourrait avoir une valeur constante.* En effet, dans le cas contraire, le déterminant Δ serait identiquement nul.

3° *Si l'une des fonctions* (12) *admet une valeur constante, les autres fonctions* (12) *sont alors distinctes par rapport aux variables*

$$(13)\qquad x_{m+1},\ x_{m+2},\ \dots,\ x_{n-\rho}.$$

4° *Si aucune des fonctions* (12) *n'admet une valeur constante, les rapports des* $n-\rho-m$ *fonctions quelconques* (12) *à la* $(n-\rho-m+1)^{\text{ieme}}$ *fonction représentent* $n-\rho-m$ *fonctions distinctes par rapport aux variables* (13).

Considérons, par exemple, les rapports

$$(14)\qquad \frac{S_1}{S_{n-\rho-m+1}},\ \frac{S_2}{S_{n-\rho-m+1}},\ \dots,\ \frac{S_{n-\rho-m}}{S_{n-\rho-m+1}}.$$

Le déterminant fonctionnel de ces dernières fonctions (14), par rapport aux variables (13), est égal à

$$\frac{\Delta}{S_{n-\rho-m+1}};$$

il est donc distinct de zéro.

42. L'intégrale générale des caractéristiques. — On démontre aisément que les rapports (14) définissent les $n-\rho-m$ intégrales requises du système (3), et cela de différentes manières.

Tout d'abord, on y parvient en utilisant les considérations du n° 36 appliquées aux fonctions U'_i qui seront remplacées, dans notre cas. respectivement par les S_i.

Ensuite, on obtient deux autres démonstrations du théorème en question par extension, au cas qui nous occupe, des démonstrations exposées aux n^{os} 11 et 12 [40].

APPENDICE.

NOTE SUR LA THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES.

Considérons un système normal de m équations

$$(1) \qquad F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

les p_s désignant les dérivées partielles du premier ordre de z prises respectivement par rapport aux variables indépendantes x_s

En supposant le déterminant fonctionnel

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{p_1, p_1, \ldots, p_m}\right)$$

distinct de zéro, formons le système linéaire

$$(2) \qquad [F_k, f] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

les crochets désignant ceux de Weiler.

La théorie des caractéristiques prend, comme point de départ, le système complet des intégrales distinctes du système linéaire (2), dont les m premières intégrales sont représentées par les m fonctions F_k en involution [41].

Or, il est indispensable parfois, dans les applications des éléments intégrables, de substituer, aux intégrales représentées par les premiers membres des équations données, d'autres intégrales non en involution. Néanmoins, dans cette dernière hypothèse, toutes les conclusions de la théorie des caractéristiques subsistent toujours.

Supposons, en effet, que le système complet des intégrales distinctes des équations (2) soit représenté par les fonctions non en involution

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_m,\ f_{m+1},\ \ldots,\ f_{2n-m+1}. \tag{3}$$

Les valeurs des variables paramétriques de la théorie des caractéristiques

$$x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots,\ x_n,\ z,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n \tag{4}$$

seront donc définies par les équations

$$f_1 = C_1,\qquad f_2 = C_1,\qquad \ldots,\qquad f_{2n-m+1} = C_{2n-m+1}. \tag{5}$$

Les propriétés des intégrales du système (2) invoquent l'existence des égalités

$$F_k \equiv \varphi_k(f_1, f_1, \ldots, f_{2n-m+1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Par conséquent, les valeurs des variables (4) mentionnées vérifient identiquement les relations

$$\left\{\begin{aligned} &F_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)\\ &\quad\equiv \varphi_k(C_1, C_2, \ldots, C_{2n-m+1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Les seconds membres de ces dernières identités (6) représentant des valeurs constantes, il en résulte les relations différentielles

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\partial F_k}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial x_{m+j}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x_i} = 0\\ &\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

On établit, dans la théorie des éléments intégrables, l'existence des fonctions distinguées qui figurent aux premiers membres des équations (1). Il s'ensuit l'existence des équations (7) que nous venons d'obtenir et sur lesquelles est fondée la théorie des caractéristiques. Toutes les conclusions de cette dernière deviennent donc légitimes de même pour le système complet des intégrales (3).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. SALTYKOW (N.). — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue (*Mémorial des Sc. math.*, fasc. 50, Paris, 1931).
2. SALTYKOW (N.). — *Voir* [1], page 21, n° 12. Chapitre III.
3. BERTRAND (I.). — Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique (*Journ. de Math. pures et appliquées*, t. XVII, 1852, p. 393).
4. BOUR (E,). Intégration des équations différentielles de la Mécanique analytique (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XIV; *Journ. de Math. pures et appliquées*, t. XX, 1855, p. 185).

   BOUR (E.). Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXXIX, 1862).
5. SALTYKOW (N.). — Sur l'évolution de la théorie des équations partielles du premier ordre d'une fonction inconnue (*Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 8e série, *Classe Phys.-Math.*, t. XXV, n° 10, 1911, p. 16).

   SALTYKOW (N.). — *Voir* [1], page 23, n° 13, Chapitre III, Chapitre V, p. 48, nos 24 28.
6. JACOBI. — Nova Methodus... (*Gesam. Werke*, Bd V, n° 19, p. 28).

   IMSCHENETSKY (V. G.). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Paris, 1869, n° 49, p. 68).

   SALTYKOW (N.). — *Voir* [1], Chapitre III, n° 14, 15, p. 27 29,
7. JACOBI. — *Voir* [6_1], n° 20, p. 28, 29.
8. JACOBI. — Nova Methodus... (*Gesam. Werke*, Bd V, n° 51, p. 112-114; n° 64, p. 153-154; n° 66, p. 158-159.
9. JACOBI. — Zusatz zu der Vorhergehenden Abhandlung (*Gesam. Werke*, Bd IV, p. 315).
10. JACOBI. — [6_1].
11. BOUR (E.). — *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXXVI; *voir* [4_2].
12. LIE (S.). — *Mathematische Annalen*, Bd VIII, § 17, p. 215. — Integrations methoden, die sich auf die früheren Entwicklungen stützen (p. 273).

    LIE (S.). — Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (*Mathematische Annalen*, Bd XI, p. 464).
13. JACOBI. — Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen... (*Gesam. Werke*, Bd IV, n° 11, p. 120). — *Voir* aussi CLEBSCH, J. CRELLE, Bd 59, p. 190; Bd 60, p. 193.
14. SALTYKOW (N.). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue (Chapitre VII; Kharkow, 1899; en russe).

    SALTYKOW (N.). — Sur le problème de S. Lie (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 24 août 1903).

SALTYKOW (N.). — Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue (Chapitre VIII; Kharkow, 1905; en russe).

SALTYKOW (N.). — *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 30 août et 13 septembre 1909; 6 et 13 juin 1910; 7 octobre 1912; 12 novembre 1926.

SALTYKOW (N.). — Sur l'évolution de la théorie des équations partielles du premier ordre d'une fonction inconnue (*Mémoires de l'Acad. imp. des Sciences de Saint Pétersbourg*, 8e série, t. XXV, nº 10, 1911, Chap. II et IV; en russe).

SALTYKOW (N.). — La théorie des caractéristiques et les applications de cette dernière (*Bull. de l'Acad. imp. des Sciences de Saint-Pétersbourg* 1911, Chap. III; en russe).

SALTYKOW (N.). — *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, t. I, Cambridge, 1913, p. 59).

SALTYKOW (N.). — Sur le développement de la théorie des équations partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue (*Bull. de la Classe des Sciences de l'Acad. R. de Belgique*, 1922, p. 592).

SALTYKOW (N.). — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue (Conférerences faites, sous les auspices de la Fondation Universitaire, dans les quatre Universités Belges (1923 1924), Paris, Gauthier Villars; Bruxelles, Maurice Lamertin, 1925),

SALTYKOW (N.). — Application des éléments intégrables à l'intégration des équations différentielles (*Bull. de la Classe des Sciences de l'Acad. R. de Belgique*, 1926).

15. SALTYKOW (N.). — *Voir* [14₉], Chap. V, VI, VII et IX.

16. STEKLOFF (W.). — Sur une généralisation du théorème de Jacobi (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 18 janvier 1909).

STEKLOFF (W.). — Application du théorème généralisé de Jacobi au problème de Jacobi Lie (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 22 février 1909).

17. RUSSYAN (C.). — Le théorème de M. W. Stekloff (théorème généralisé de Jacobi) et les formules généralisées de la transformation de contact. (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 10 janvier 1910).

18. DE DONDER (Th.). — Sur le théorème de Poisson et sur les invariants différentiels de Lie (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1er août 1910).

19. IMSCHENETZKY (V. G.). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Paris, 1869, nº 61, p. 79).

20. SALTYKOW (N.). — *Voir* [14₁], Chapitre VI.

21. SALTYKOW (N.). — Sur la généralisation du théorème de S. Lie (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1910).

22. SALTYKOW (N.). — *Voir* [14₄].

23. LIE (S.). — *Mathematische Annalen*, Bd IX.

24. JACOBI. — *Voir* [8].

25. SALTYKOW (N.). — Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées

partielles du premier ordre (*Journ. Math. pures et appl.*, 5e série, t. V, 1899, p. 435).

Saltykow (N.). — Sur les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction (*Bull. Soc. math. France*, t. XXIV, 1901, p. 86).

Saltykow (N.). — La théorie des caractéristiques et ses applications (*Bull. de l'Acad. imp. des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 1911, p. 563; en russe).

Saltykow (N.). — *Voir* [14_9].

26. Lie (S.). — *Mathematische Annalen*, Bd XI.

27. Saltykow (N.). — *Voir* [1], n° 8.

Saltykow (N.). — Étude sur les transformations infinitésimales (*Journ. de Math. pures et appliquées*, Paris. 1903).

Saltykow (N.). — Sur les transformations infinitésimales et les fonctions adjointes (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 16 décembre 1907).

28. Lie (S.). — *Mathematische Annalen*, Bd VIII, § 18, p. 278; Bd I, p. 454.

29. Mayer (A.). — *Mathematische Annalen*, Bd XVII, p. 332.

30. Jacobi. — *Voir* [8].

31. Laura (E.). — Sul Moto parallelo ad un piano di Un Fluido in cui VI sono n Vortici elementari (*Atti della R. Academia delle Scienze di Torino*, vol. XXXVII, 1902).

Laura (E.) .— Salle Equezioni differenziali canoniche del moto di un sisteme di Vortici elementari rettilinei e paralleli in un fluido incompressibile indefinito (*Atti delle R. Academia delle Scienze di Torino*, vol. XL, 1905).

32. Goursat (E.). — Sur les équations du second ordre à *n* variables analogues à l'équation de Monge-Ampère (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXVII, p. 1).

33. Englund (Erik). — Sur les méthodes d'intégration de Lie et les problèmes de la mécanique céleste (*Thèse de doctorat*, Uppsala 1916).

34. Michnevitch (D.) — Structure des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue (*C. R. Acad, Sc.*, Paris, 23 octobre 1933).

35. Saltykow (N.). — *Voir* [1], p. 47.

36. Saltykow (N.). — *Voir* [14_9], Chap. IV, p. 53.

37. Saltykow (N.). — *Voir* [14_9], Chap. IX, nos 80 82.

38. Saltykow (N.). — *Voir* [14_9], Chapitre IX, n° 83, p. 129.

39. Saltykow (N.). — *Voir* [14_9], Chap. IX, p. 125.

40. Saltykow (N.). — *Voir* [14_5), [14_6].

Saltykow (N.). — *Voir* [14_9], Chap. X, nos 94 96.

41. Saltykow (N.). — *Voir* [25_3], Chap. I, p. 563.

Saltykow (N.). — *Voir* [14_9], Chap. VIII, p. 115.

Saltykow (N.). — Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre par les éléments intégrables (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. I, Belgrade, 1932).

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

ÉLÉMENTS INTÉGRABLES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

CHAPITRE V.

ÉLÉMENT INTÉGRABLE PARTICULIER ET FORMATION DE L'INTÉGRALE COMPLÈTE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES CONTENANT EXPLICITEMENT LA FONCTION INCONNUE.

CHAPITRE VI.

ÉLÉMENT INTÉGRABLE GÉNÉRAL ET FORMATION DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE DES CARACTÉRISTIQUES POUR UN SYSTÈME CONTENANT EXPLICITEMENT LA FONCTION INCONNUE.

APPENDICE.