

TH. GOT

**Domaines fondamentaux des groupes fuchsien  
et automorphes**

*Mémoires des sciences mathématiques*, fascicule 68 (1934)

[http://www.numdam.org/item?id=MSM\\_1934\\_\\_68\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSM_1934__68__1_0)

© Gauthier-Villars, 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# MÉMORIAL

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

**L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,**  
 DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,  
 MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),  
 DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

*DIRECTEUR :*

**Henri VILLAT**

Membre de l'Institut,  
 Professeur à la Sorbonne,

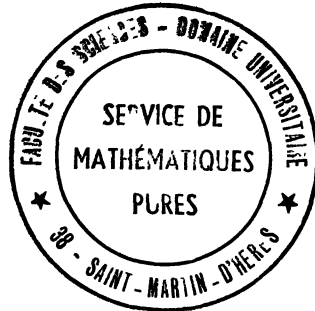
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LXVIII

**Domaines fondamentaux des groupes fuchsien et automorphes**

Par M. TH. GOT

Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
 Quai des Grands-Augustins, 55.

1934

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation  
réservés pour tous pays.**

---

DOMAINES FONDAMENTAUX  
DES  
GROUPES FUCHSIENS ET AUTOMORPHES

Par **M. Th. GOT,**  
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

---

INTRODUCTION.

On étudie dans ce fascicule les *domaines fondamentaux* des groupes proprement discontinus de substitutions linéaires de la variable complexe

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

c'est-à-dire des régions du plan analytique ou d'un demi-plan seulement contenant *un point et un seul équivalent à un point quelconque* du plan (ou du demi-plan) par une substitution du groupe. (J'ai proposé dans un fascicule précédent de remplacer cette dénomination par celle de *domaine réduit* ou *domaine de réduction*.) Ces domaines jouent dans l'étude des propriétés des fonctions *automorphes* et *fuchsiennes* le même rôle que le parallélogramme des périodes pour les fonctions doublement périodiques.

Rappelons qu'une substitution *fuchsienne* est une substitution linéaire à coefficients *réels*; elle s'appelle *automorphe* si les coefficients sont *complexes*.

Les fonctions *fuchsiennes* ou *automorphes* sont les fonctions *analytiques uniformes* invariantes par les substitutions d'un *groupe fuchsien* ou *automorphe*.

L'étude approfondie de ces domaines fondamentaux est liée à celle

des *groupes de mouvements* dans la *géométrie projective de Cayley*, dont voici le principe :

Étant donnée une quadrique Q (appelée *absolu*), on appelle *distance cayleyenne* ou  $\mathcal{L}$  de deux points M et N l'expression

$$(1) \quad \mathcal{L}(M, N) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{MA}{MB} : \frac{NA}{NB} \right|,$$

c'est-à-dire une valeur proportionnelle au logarithme du rapport anharmonique (MNAB). A et B désignant les points d'intersection de la droite MN avec l'absolu.

De même la *mesure de l'angle* de deux plans  $\mu$  et  $\nu$  est donnée par

$$(2) \quad \alpha(\mu, \nu) = \frac{1}{2i} \log \left| \frac{\sin(\mu, \alpha)}{\sin(\mu, \beta)} : \frac{\sin(\nu, \alpha)}{\sin(\nu, \beta)} \right|,$$

$\alpha$  et  $\beta$  désignant les plans tangents menés à l'absolu par la droite d'intersection des deux plans ; c'est donc une valeur proportionnelle au logarithme du rapport anharmonique  $(\mu, \nu, \alpha, \beta)$  des quatre plans. Cette formule est une généralisation de celle de Laguerre pour l'angle euclidien.

Dans cette métrique les *géodésiques* de l'espace sont les *droites*, comme dans la géométrie ordinaire.

Les points de la quadrique jouent le rôle des *points à l'infini*, et sur chaque droite il y a *deux points à l'infini* (au lieu d'un en géométrie euclidienne) (1).

Il en résulte une correspondance complète entre cette géométrie et les géométries non euclidiennes ; par exemple la géométrie de Cayley à l'intérieur d'un ellipsoïde réel ou d'une ellipse réelle correspond à la géométrie de Bolyai et de Lobatchevsky, à trois ou deux dimensions.

*Le rapport anharmonique étant conservé* par les transformations homographiques on voit que les *déplacements* dans l'espace cayleyen correspondent aux transformations linéaires des coordonnées homogènes qui *conservent l'absolu*.

(1) Pour la géométrie cayleyenne plane, l'absolu est une *conique* ;  $\mathcal{L}(MN)$  et  $\alpha(\mu, \nu)$  ont les mêmes définitions, à cela près que  $\mu$  et  $\nu$  désignent les *tangentes* à l'absolu (au lieu des plans tangents).

## CHAPITRE I.

## DOMAINES FONDAMENTAUX DES GROUPES FUCHSIENS.

1. Déplacements cayleyens plans. Correspondance avec le plan analytique (1). — L'équation de l'absolu  $\mathcal{A}$  étant écrite

$$z_1 z_3 - z_2^2 = 0,$$

on a pour cette conique la représentation paramétrique

$$z_1 : z_2 : z_3 :: \zeta^2 : \zeta : 1.$$

Les déplacements et les retournements (ou faux déplacements) cayleyens sont représentés par les formules suivantes, où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont réels et  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  :

$$(H) \quad \begin{cases} z'_1 = \alpha z_1 + \gamma \alpha \beta z_2 + \beta^2 z_3, \\ z'_2 = \alpha \gamma z_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma) z_2 + \beta\delta z_3, \\ z'_3 = \gamma^2 z_1 + 2\gamma\delta z_2 + \delta^2 z_3, \end{cases}$$

auxquelles correspondent pour les points de l'absolu la substitution fuchsienne

$$(F) \quad \zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}.$$

Les H et F pour lesquelles  $\alpha\delta - \beta\gamma$  est positif forment un groupe, et les autres non.

Les H du premier type ont trois points fixes, dont au moins un — O — réel, les deux autres étant les points de contact des tangentes issues de O : elles correspondent aux déplacements proprement dits.

1° Si O est intérieur à  $\mathcal{A}$ , H est une rotation cayleyenne autour de O, d'angle réel : il y correspond la F :

$$\frac{\zeta' - \zeta_1}{\zeta' - \zeta_2} = e^{i\omega} \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2}$$

---

(1) Pour plus de détails voir dans le *Mémorial* : Th. GOR, *Propriétés générales des groupes discontinus*.

où l'on a mis en évidence les points doubles  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  (imaginaires conjugués) de la F et l'angle cayleyen  $\omega$  de la rotation ; elle est dite *elliptique* (Klein).

2° Si O est extérieur, H est une rotation d'angle imaginaire, correspondant à la F :

$$\frac{\zeta' - \zeta_1}{\zeta' - \zeta_2} = K \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2},$$

où  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  sont réels et K réel de module différent de l'unité ; elle est dite *hyperbolique*.

3° Si O est sur l'absolu, H est une rotation d'angle nul autour d'un point à l'infini (comme la translation en géométrie ordinaire) ; la F correspondante est

$$\frac{1}{\zeta' - \zeta_1} = \frac{1}{\zeta - \zeta_1} + h,$$

$\zeta_1$  et  $h$  réel ; elle est dite *parabolique*.

On fait correspondre à l'intérieur de l'absolu (Klein, Poincaré) un *demi-plan analytique*, limité à l'axe réel, chaque point P intérieur à  $\mathcal{A}$  ayant pour image l'un des deux points dont les affixes sont les valeurs imaginaires conjuguées des  $\zeta$  des points de contact des tangentes issues de P. L'axe réel correspond à l'absolu. Les formules de correspondance sont (si  $\zeta = \xi + i\eta$ ) :

$$z_1 : z_2 : z_3 :: \xi^2 + \eta^2 : \xi : 1.$$

A une corde de  $\mathcal{A}$  correspond une demi-circonférence limitée par l'axe réel. L'angle cayleyen de deux droites est égal à l'angle euclidien des circonférences correspondantes. L'élément linéaire est  $\frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}{\eta}$ . Enfin une *symétrie* correspond à une inversion par rapport à une circonférence, combinée avec une symétrie par rapport à l'axe réel ; les substitutions correspondantes :

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 - \alpha},$$

— où  $z_0$  désigne l'imaginaire conjuguée de  $z$  — *ne sont pas des substitutions fuchsienes*.

## 2. Lemmes de Poincaré pour les groupes fuchsienes sans substitu-

**tions infinitésimales.** — Poincaré a démontré que tout groupe *fuchsien* est proprement discontinu, s'il est *sans substitutions infinitésimales*. Cela résulte de ce qu'un tel groupe possède *un domaine fondamental* (1).

On dit qu'il y a des substitutions infinitésimales dans un groupe si les points équivalents à un point donné ont un point limite. Les conditions nécessaires et suffisantes pour cela sont que  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta - \alpha$  soient infiniment petits.

La démonstration de Poincaré se fonde sur les lemmes suivants (pour l'exposé desquels nous emploierons, de préférence à la représentation dans le plan analytique, la représentation correspondante dans la géométrie cayleyenne) :

**LEMME I.** — *Les points fixes de substitutions elliptiques n'ont pas de points limites intérieurs à l'absolu, — ou encore, — une région limitée intérieure à l'absolu ne peut contenir une infinité de tels points fixes* (énoncé équivalent au premier en vertu du lemme de Weierstrass-Bolzano).

En effet, soient  $s$  et  $t$  deux points fixes infiniment voisins de deux substitutions elliptiques  $S$  et  $T$  :  $S^{-1}TST^{-1}$  serait *infinitésimale*, car  $S^{-1}TS$  et  $T$  sont deux rotations elliptiques de même angle et de centres  $t'$  et  $t$  infiniment voisins, puisque de  $t'(S^{-1}TS) = t'$  résulte  $(t'S^{-1})T = t'S^{-1}$ , d'où  $t'S^{-1} = t$ ,  $t' = tS$  et  $t'$  et  $t$  sont infiniment voisins, puisque  $st$  tend vers zéro. On peut dire encore : les angles de rotation elliptiques  $\frac{2\pi}{q}$  (2) ne tendent pas vers zéro, — puisqu'il n'y a pas de substitutions infinitésimales, — les entiers  $q$  sont bornés supérieurement. Mais s'il y avait un point limite de points fixes  $s$ ,  $s'$ ,  $s''$ , etc., il y aurait une infinité de rotations  $E_n$  de même angle  $\frac{2\pi}{p}$ , et  $E_n^{-1}E_{n+1}$  serait infinitésimale, les angles des deux rotations étant opposés et les centres infiniment voisins.

(1) Une seconde démonstration se rattache aux propriétés des *familles normales de fonctions analytiques* de M. Montel. Voir dans le *Mémorial* : Th. GOR, *Propriétés générales des groupes discontinus*, fascicule LX.

(2) L'angle est nécessairement commensurable avec  $2\pi$ , sans quoi il y aurait une substitution infinitésimale (§ 3) et une rotation d'angle  $\frac{2\pi m}{q}$  n'est qu'une puissance de la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{q}$



LEMME II. — *Les points équivalents à un point  $C_0$  quelconque intérieur à l'absolu n'ont pas de point limite intérieur, si le groupe est sans substitution infinitésimale.*

En effet, ces points ne pourraient, s'ils devenaient infiniment voisins, être *équivalents* que s'ils étaient infiniment voisins de points fixes de substitutions elliptiques, et comme les points équivalents à un point fixe sont eux-mêmes points fixes, ces derniers auraient un point limite intérieur, ce qui est impossible d'après le lemme précédent.

*Remarques.* — I. La proposition cesse d'être vraie si la région comprend un arc de la conique absolue. Car tout point fixe hyperbolique situé sur cet arc est point limite de points équivalents par la rotation correspondante.

II. Elle reste vraie si la région considérée a seulement un *sommet* sur la conique, car les arcs des trajectoires <sup>(1)</sup> hyperboliques ou paraboliques contenant des points équivalents tendant vers ce sommet sont tangents à la conique en ce sommet et par suite *extérieurs* à la région.

III. Parmi tous les points fixes elliptiques  $C_i$  équivalents à un point fixe  $C_0$ , il n'y en a qu'un nombre limité dont la distance à un point donné  $P$  soit minimum; car s'il y avait une infinité de points  $C_i$  sur une circonférence (cayleyenne) de centre  $P$ , ils y auraient un point limite, et d'autre part le rayon de cette circonférence ne peut tendre vers zéro,  $P$  serait lui-même point limite.

**3. Domaines fondamentaux des groupes cycliques sans substitutions infinitésimales.** — Les groupes *cycliques* formés par les puissances d'une substitution parabolique ou hyperbolique n'ont évidemment pas de substitution infinitésimale. Pour qu'il en soit de même de celui des puissances d'une substitution elliptique  $E$  d'angle  $\theta$ , il faut et il suffit qu'elle soit *périodique*, c'est-à-dire que  $\theta = \frac{2\pi}{\nu}$  ( $\nu$  entier) [cas auquel se ramène celui de  $\theta_1 = 2\pi \frac{\mu}{\nu}$  ( $\mu$  et  $\nu$  entiers

---

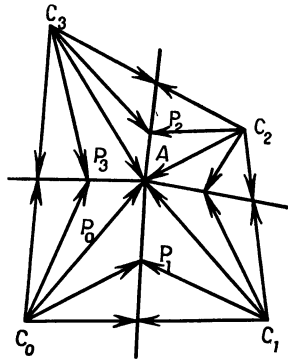
(1) Quand on fait varier d'une façon continue le paramètre dont dépend une substitution dont les points doubles sont donnés, le transformé d'un point donné décrit une courbe qu'on appelle *trajectoire* [Bahncurve].

premiers entre eux) les angles  $m, \theta_1$  reproduisant les angles  $m\theta$  à des multiples près de  $2\pi$ ]. Si  $\theta$  était égal à  $\frac{2\pi}{\alpha}$   $\alpha$  étant irrationnel, on pourrait approcher de  $\frac{1}{\alpha}$  par des fractions  $\frac{m}{k}$  et  $E^k$  serait infinitésimale. Il est dès lors évident que la portion de l'intérieur de l'absolu comprise entre deux demi-droites issues du point fixe et faisant un angle égal à celui de la rotation est un *domaine fondamental* du groupe cyclique. Dans le cas *elliptique*, l'absolu est entièrement recouvert par  $\nu$  domaines adjacents équivalents correspondant aux  $\nu$  puissances distinctes de la substitution; dans les cas *parabolique* et *hyperbolique* il y a une infinité de domaines adjacents équivalents se pressant dans le voisinage du ou des points fixes de la substitution.

**4. Théorème fondamental de Poincaré :** tout groupe fuchsien sans substitutions infinitésimales possède un domaine fondamental. — On va suivre pour la formation du domaine dans le cas général la méthode dite de *rayonnement* (Fricke).

Soit (*fig. 1*)  $C_0$  un point intérieur quelconque (donc autre qu'un

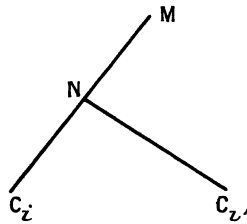
Fig. 1.



point fixe de substitution elliptique). Soient  $C_1, C_2, \dots$  tous ses équivalents. Les  $\mathcal{L}(C_0, C_i)$ , distances cayleyennes, ont un *minimum*  $d$  (§ 2). Décrivons autour de  $C_0$  comme centre une circonférence cayleyenne de rayon  $z_0$  inférieur à  $\frac{d}{2}$  et considérons toutes les équivalentes (de centres  $C_1, C_2, \dots$ , et de même rayon). Tous ces cercles sont *intérieurs* à l'absolu et tous *extérieurs les uns aux*

*autres* car la distance de deux centres est au moins égale à  $d$ . [ Si l'on avait  $\mathcal{L}(C_p C_q)$  inférieur à  $d$ ,  $C_0$  étant équivalent à  $C_p$  par une substitution  $S$ , le transformé de  $C_q$  par  $S$  serait à une distance de  $C_0$  inférieur à  $d$ ]; cette distance est donc supérieure à la somme des rayons; or en géométrie cayleyenne les théorèmes sur les cercles sécants subsistent comme l'inégalité relative aux  $\mathcal{L}^2$  des côtés d'un triangle. Faisons croître avec la même vitesse les rayons jusqu'au moment où ils se rencontrent ou jusqu'au moment où leur extrémité arrive sur la conique (*fig. 1*). Nous délimitons ainsi autour de chaque centre  $C_i$  une région d'un seul tenant sans trous ne contenant aucun

Fig. 2.



centre  $C_i$ . Ces polygones  $P_i$  sont limités par des droites perpendiculaires à des segments  $C_i, C_{i'}$  en leurs milieux, dans le sens cayleyen, et parfois par des arcs de l'absolu. Ils sont tous *égaux* ou *congruents* (au sens cayleyen).  $C_i$  est appelé le *centre* de  $P_i$ . Les  $P_i$  *n'empiètent pas* les uns sur les autres. De plus ils *recouvrent tout l'intérieur de l'absolu*. Car soient  $M$  un point intérieur quelconque et  $C_i$  l'un des centres *les plus voisins*; le rayon  $C_i M$  ne sera pas arrêté avant d'arriver en  $M$ : car pour  $N$  entre  $C_i$  et  $M$  on a (*fig. 2*),  $C_{i'}$  étant un autre centre quelconque,

$$\mathcal{L}(MN) + \mathcal{L}(NC_i) \leq \mathcal{L}(MC_{i'}) < \mathcal{L}(MN) + \mathcal{L}(NC_{i'}),$$

d'où

$$\mathcal{L}(NC_i) < \mathcal{L}(NC_{i'}).$$

Par conséquent ou bien  $M$  sera intérieur à  $P_i$  — si le rayon n'est pas arrêté en ce point, — ou bien il sera sur le périmètre de  $P_i$ , si le rayon est arrêté en ce point, c'est-à-dire s'il existe un centre  $C_{i'}$ , à la même distance de  $M$  que  $C_i$ .

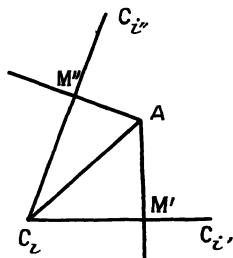
L'un quelconque des polygones ainsi définis, par exemple  $P_0$ , constitue donc un *domaine fondamental*. Fricke appelle un tel

domaine, domaine *normal*; nous nous contenterons de l'appeler domaine *rayonné*.

Le choix du centre  $C_0$  déterminant complètement  $P_0$  il y a  $\infty^2$  de systèmes de domaines rayonnés.

5. **Propriétés des polygones rayonnés.** — *Convexité.* — Les polygones rayonnés sont *convexes*, c'est-à-dire que chacun de leurs angles est inférieur à  $\pi$ . En effet (*fig. 3*) soient  $C_l, C_{l'}$  les symétriques du centre  $C_l$  d'un polygone  $P_l$  par rapport aux deux côtés d'un angle  $A$  de ce polygone,  $M'$  et  $M''$  les projections de  $C_l$  sur ces

Fig. 3.



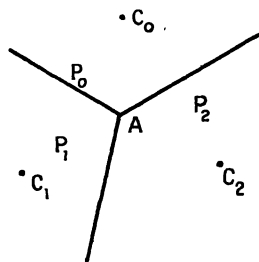
côtés : chacun des angles  $\alpha(C_l AM')$ ,  $\alpha(C_l AM'')$  — cayleyens — est *inférieur à  $\frac{\pi}{2}$* ; car ils font partie des triangles  $C_l AM'$  et  $C_l AM''$  dont les angles (cayleyens) en  $M'$  et  $M''$  sont égaux à  $\frac{\pi}{2}$ , et la somme des angles d'un triangle en géométrie cayleyenne est *inférieure à  $\pi$* .

*Catégories de sommets.* — Il y a d'abord *des points fixes* de substitutions elliptiques ou paraboliques. Les sommets qui ne sont pas des points fixes ont été appelés *adventifs* par Poincaré parce qu'ils dépendent du choix du centre; tandis que les premiers en sont indépendants. *Aucun point fixe O ne peut être intérieur à un domaine rayonné  $P_0$*  : car  $S$  étant la substitution de point fixe  $O$ , le point  $C_1 = C_0 S$  serait extérieur à  $P_0$  et l'on aurait  $\mathcal{L}(OC_0) = \mathcal{L}(OC_1)$ , ce qui est impossible, les rayons égaux se rencontrant sur le périmètre.

A un autre point de vue il y a lieu de distinguer parmi les sommets ceux qui sont sur la conique absolue — s'il y en a — et ceux qui sont intérieurs.

6 (*suite*). **Cycles de sommets adventifs intérieurs.** — Soit (*fig. 4*)  $A$  un sommet *adventif* du polygone  $P_0$  de centre  $C_0$ . Au point  $A$  se rencontrent au moins trois polygones  $P$ , autrement l'angle  $A$  de  $P_0$  étant inférieur à  $\pi$ , l'angle  $A$ , dans le polygone adjacent unique serait supérieur à  $\pi$ , ce qui est impossible. D'ailleurs, en général, ce seront seulement *trois* polygones qui entoureront le point  $A$  : le contraire ne peut avoir lieu que pour des positions particulières de  $C_0$ . Soit  $n$  le nombre — supérieur ou égal à 3 — des polygones autour de  $A$ , soient  $P_0, P_1, P_{n-1}$ , de centres  $C_0, \dots, C_1, \dots, C_{n-1}$ . Soient  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$  les substitutions changeant  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  en  $P_0$  ( $P_i S_i = P_0$ ). Affectons d'autre part le point  $A$  de l'indice du polygone dont nous le considérons comme un sommet ( $A$  est la

Fig. 4.

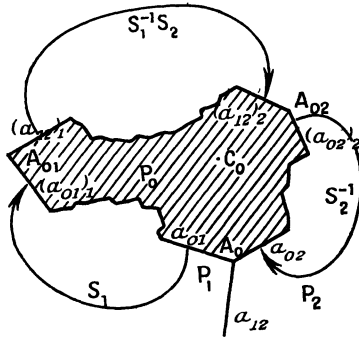


réunion des  $n$  sommets  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ ). Les substitutions  $S$  changent donc  $A$  en sommets  $A_i S_i = A_{0i}$  de  $P_0$ , et établissent aussi une correspondance entre les côtés des polygones  $P_i$  aboutissant en  $A$  et les côtés de  $P_0$  aboutissant aux sommets  $A_{0i}$ . On dit que les  $n$  sommets  $A_0, A_{01}, \dots, A_{0n-1}$  forment *un cycle* de  $n$  sommets. La raison de cette dénomination est la suivante : si l'on parcourt à partir de  $A$  le côté  $a_{01}$ , puis le contour du polygone jusqu'au côté équivalent  $(a_{01})_1$ , on parcourra ce dernier en marchant vers  $A_{01}$ , parce que ce côté est congruent au côté  $a_{01}$  de  $P_1$  limitrophe de  $P_0$ ; il en résulte que l'on parcourra ensuite le second côté de l'angle  $A_{01}$  en marchant dans le même sens et ainsi de suite jusqu'à revenir en  $A$  après parcours de tous les côtés équivalents et passage par tous les sommets du cycle. Les  $2n$  côtés des angles du cycle sont égaux deux à deux (comme correspondants par deux substitutions différentes à un côté commun à deux polygones  $P_i$ ). La somme des angles du cycle est  $2\pi$ . Enfin puisque

$$(C_i A_i) S_i = C_0 A_{0i} = C_i A_i = C_0 A$$

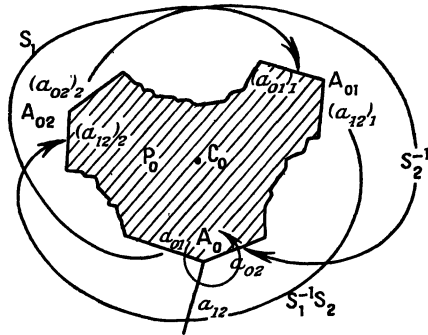
tous ces sommets sont *équidistants* de  $C_0$ . Les figures 5 et 6 représentent les dispositions possibles dans le cas de  $n = 3$ . Le nombre  $n$

Fig. 5.



des polygones entourant un sommet adventif, c'est-à-dire le nombre des sommets d'un cycle est *limité*, car autrement il y aurait sur une

Fig. 6.



circonférence de centre  $O$  une infinité de points équivalents, ayant un point limite intérieure à l'absolu.

7 (suite). **Cycles de sommets elliptiques.** — *Les transformées d'une substitution elliptique  $E$  de centre  $O$  par une substitution quelconque  $F$  du groupe sont des transformations elliptiques dont les points fixes sont les transformés de  $O$  par  $F$ . Car soit  $O_1 = OF$ ,*

d'où  $O = O_1 F^{-1}$ ; on a successivement

$$\begin{aligned} OE &= O_1 F^{-1} E = O = O_1 F^{-1}, \\ O_1(F^{-1}EF) &= O_1. \end{aligned}$$

Ces substitutions semblables sont évidemment toutes *de même angle*. Elles constituent une *classe*. Deux classes différentes ne peuvent avoir aucun point fixe commun. Car soient  $\frac{2\pi}{\mu}$ ,  $\frac{2\pi}{\nu}$  leurs angles,  $D$  le plus grand commun diviseur de  $\mu$  et  $\nu$  :  $\mu = \mu'D$ ,  $\nu = \nu'D$ , on peut trouver deux entiers  $m$  et  $n$  tels que l'on ait  $m\nu' + n\mu' = 1$ , et que, par suite,

$$m \frac{2\pi}{\mu} + n \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{D\mu'\nu'} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Les substitutions  $E_\mu$  et  $E_\nu$  de même point fixe seraient donc des puissances

$$E_\mu = (E_\lambda)^{\nu'}, \quad E_\nu = (E_\lambda)^{\mu'}$$

de  $E_\lambda$  : les deux classes ne seraient pas distinctes.

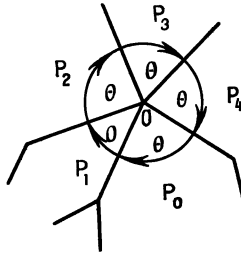
*Sur le contour d'un polygone, il y a en général un représentant et un seul de chaque classe de sommets elliptiques.*

Car d'abord il y a dans un domaine fondamental ou sur son pourtour un équivalent d'un point quelconque. Mais il peut y en avoir plusieurs sur le contour puisque ce domaine est *ouvert*. En général  $C_0$  est *inégalement distant* des points fixes d'une même classe : il y a dans chaque classe un point et un seul dont la distance à  $C_0$  est minimum. Soit  $O$  un tel point, il sera donc *sur le contour* de  $P$  (car il ne peut être à l'intérieur), les autres points fixes de la même classe n'y seront pas, car ils seront plus près d'autres centres équivalents à  $C_0$ . De plus ce point est un *sommet*, sauf si l'angle de rotation est  $\pi$ . En effet, soit  $\frac{2\pi}{\nu}$  l'angle de la rotation  $E$  autour de  $O$ , point fixe sans équivalent dans  $P_0$  ou sur son contour. Tous les polygones ayant  $O$  pour sommet dérivent de  $P_0$  par des opérations du groupe, et comme *aucun sommet de  $P_0$  n'est équivalent à  $O$* , ces opérations seront les puissances de la substitution elliptique  $E$  — les seules qui laissent  $O$  fixe — soit  $E^0, E, E^2, \dots, E^{\nu-1}$ . Donc l'angle  $\theta$  en  $O$  du polygone est égal à  $\frac{2\pi}{\nu}$ ; il y a  $\nu$  polygones juxtaposés (*fig. 7*). Dans chaque polygone les côtés de l'angle sont équivalents. Dans le

cas de  $\nu = 2$ ,  $\theta = \pi$ , rotation de  $180^\circ$ , on a un sommet *non apparent* (fig. 8).

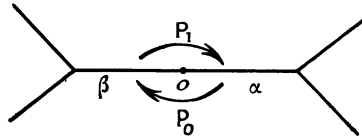
Mais il peut arriver que  $C_0$  soit *équidistant* de plusieurs points fixes elliptiques de même classe  $O, O_1, \dots, O_{n-1}$ . Soient  $F, \dots, F_{n-1}$

Fig. 7.



les substitutions changeant  $O_1, \dots, O_{n-1}$  en  $O$  et  $P_1, \dots, P_{n-1}$  les transformés de  $P_0$  par ces substitutions : ils ont tous avec  $P_0$  le sommet commun  $O$ . D'autre part, la substitution  $E$  de point fixe  $O$  ainsi que les transformées  $F_i^{-1} E_i F_i$  des substitutions  $E_i$  de points

Fig. 8.



fixes,  $O_i$  laissent toutes  $O$  fixe et sont de même angle  $\frac{2\pi}{\nu}$ ; leur application à  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  donne donc  $n(\nu - 1)$  nouveaux polygones déduits des premiers par les rotations de centre  $o$  et d'angles  $\frac{2\pi}{\nu}, \frac{4\pi}{\nu}, \dots, (n-1)\frac{2\pi}{\nu}$ . Tous ces polygones sont distincts, comme les opérations correspondantes et il n'y en a pas d'autres autour de  $O$ , car si deux polygones  $P_0$  et  $P_x$  ont  $O$  comme sommet commun on a  $C_0 O_x = C_x O$ , et de deux choses l'une, ou bien la substitution  $F_x$  telle que  $P_x = P_0 F_x$  laisse  $O$  fixe et alors  $P_x$  résulte de  $P_0$  par une rotation  $k\frac{2\pi}{\nu}$ , ou bien  $F_x$  change un  $O_i$  de  $P_0$  dans le  $O$  de  $P_x$ , donc  $P_x$  est un des  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ . De là résulte donc que  $\alpha_i$  désignant

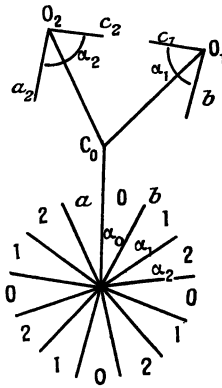


l'angle de  $P_0$  en  $O_1$ , on a

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} = \frac{2\pi}{\nu}.$$

*Disposition autour de O.* — Soit  $P_{0k} = P_0E^k$ . Tous ces polygones  $P_{0k}$  n'ont pas de côtés communs, car ils se déduisent de  $P_0$  par rotations successives de  $\frac{2\pi}{\nu}$  qui est plus grand que  $\alpha_0$ . Donc en tournant autour de  $O$ , on rencontre d'abord un polygone  $P_i$  soit  $P_1$ ;

Fig. 9.



de même tous les polygones  $P_{1k}$  n'ont pas de côtés communs et ainsi de suite. On trouve donc d'abord les  $n$  polygones  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ , puis  $P_0E, P_1E, P_2E$ , etc. dans le même ordre; on a un cycle de  $n$  sommets dans le polygone  $P_0$ . La figure 9 est faite pour  $n=3, \nu=4$ :

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

La succession des côtés du cycle est  $O b b_1 O_1 c_1 c_2 O_2 a_2 a O$ . Bien entendu le sens des angles et pas leur grandeur seulement sont conservés.

*Remarque.* — Les côtés du cycle sont équivalents deux à deux, mais un même côté du polygone ne peut avoir deux équivalents sur le contour. Car des égalités  $a = a_1 F_1 = a_2 F_2$  résulterait que  $P_0 F_1$  et  $P_0 F_2$  seraient tous les deux le polygone unique adjacent à  $P_0$  le long de  $a$ , mais de

$$P_0 F_1 = P_0 F_2,$$

résulterait que  $F_1 = F_2$ .

*En résumé :*

1° Chacun des cycles adventifs contient trois sommets (cas général) ou plus, et la somme des angles est  $2\pi$ ;

2° Chacun des cycles elliptiques contient un nombre quelconque  $n$  de sommets (pouvant se réduire à un), et la somme des angles est  $\frac{2\pi}{v}$ .

8 (*suite*). **Sommets sur la conique.** — Ils peuvent *a priori* être points fixes de substitutions *paraboliques* ou *hyperboliques* ou *adventifs*; on va voir qu'ils ne peuvent être *hyperboliques*, car le domaine fondamental est nécessairement contenu dans ceux des sous-groupes hyperboliques ayant pour centre  $C_0$ .

*Sommets paraboliques.* — Il y a des *classes* de substitutions paraboliques, comme il y en a d'elliptiques. Deux classes différentes ne peuvent avoir de point fixe commun. Soient en effet P et P' deux substitutions paraboliques de même point fixe  $a$ ,

$$(P) \quad \frac{1}{z'-a} = \frac{1}{z-a} + m;$$

$$(P') \quad \frac{1}{z'-a} = \frac{1}{z-a} + m';$$

où  $a, m, m'$  sont réels. Si  $m$  et  $m'$  étaient commensurables entre eux, c'est-à-dire égaux à  $\mu k$  et  $\mu' k$ ,  $\mu$  et  $\mu'$  étant des entiers, P et P' seraient des puissances de la substitution parabolique  $P_k$  :

$$(P_k) \quad \frac{1}{z'-a} = \frac{1}{z-a} + k.$$

$P = (P_k)^\mu$  et  $P' = (P_k)^{\mu'}$ , les deux classes ne seraient pas distinctes. Si au contraire  $m$  et  $m'$  étaient sans commune mesure, on pourrait trouver des entiers  $v$  et  $v'$  tels que  $mv + m'v'$  soit aussi petit qu'on le voudrait;  $P^v P'^{v'}$  serait une substitution *infinitésimale* contrairement à l'hypothèse.

*Sur le périmètre d'un domaine rayonné il y a, en général, un représentant et un seul de chaque classe parabolique.*

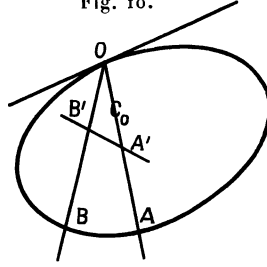
La démonstration repose sur les deux lemmes suivants :

**LEMME I.** — *Si dans le domaine fondamental AOB du sous-groupe d'une substitution parabolique, on découpe un triangle*

$A'OB'$ , ce triangle ne contient qu'un nombre limité de points équivalents à un point quelconque  $C_0$  (fig. 10).

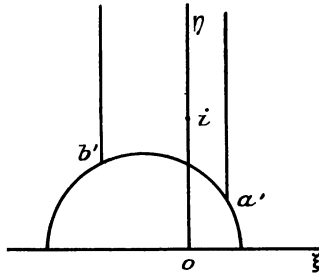
En effet, nous pouvons prendre le sommet  $z_2 = z_3 = 0$  du triangle de référence au point  $O$ , le côté  $z_2 = 0$  suivant  $OC_0$ , et définir les

Fig. 10.



coordonnées de manière que pour  $C_0$  on ait  $z_1 = z_3$ . L'équation de la conique est  $z_1 z_3 - z_2^2 = 0$ , le  $\zeta$  de  $O$  (§ 1 et 2) est  $\infty$  (d'après les proportions  $\frac{z_1}{\zeta} = \frac{z_2}{\zeta} = \frac{z_3}{1}$  où  $z_3 = 0$ ); le  $\zeta$  de  $C_0$  sera  $i$  (d'après les proportions  $\frac{z_1}{\xi + \gamma_1} = \frac{z_2}{\xi} = \frac{z_3}{1}$ ). Le triangle  $OA'B'$  aura pour image

Fig. 11.



une bande formée de deux parallèles  $a'\infty, b'\infty$  à l'axe imaginaire et d'un arc  $a'b'$  de circonférence orthogonale à l'axe réel; le point  $i$  image de  $C_0$  sera intérieur à cette région (fig. 11).

S'il y avait dans  $A'OB'$  une infinité de points équivalents à  $C_0$ , ils auraient un point limite qui, ne pouvant être intérieur à la conique, puisque le groupe n'a pas de substitutions infinitésimales, serait nécessairement le point  $O$ . Leurs images auraient pour limite le point  $\infty$  du triangle  $a'\infty b'$ . Or, la substitution  $T \left( z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right)$  change  $i$  en  $\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + i \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 + \delta^2}$ . Il faudrait donc, en prenant la

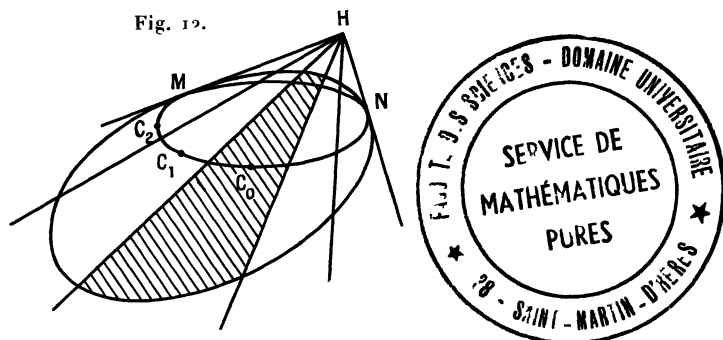
substitution unimodulaire ( $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ) que  $\gamma$  et  $\delta$  tendissent vers zéro. La substitution parabolique S de point fixe O prend, dans le plan analytique, la forme  $z' = z + h$ . Formons  $TST^{-1}$ , c'est

$$z' = \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta - h\gamma\delta)z - h\delta'}{h\gamma'z + \beta\gamma - \alpha\delta + h\gamma\delta'}$$

elle serait *infinitésimale*, ce qui est contraire à l'hypothèse.

**LEMME II.** — *Aucun point fixe de substitution hyperbolique ne peut se trouver sur le contour d'un domaine rayonné.*

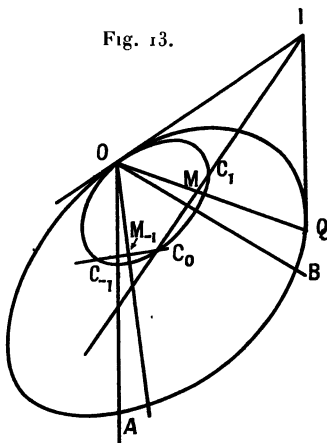
En effet, soient (fig. 12) H le centre d'une rotation hyperbolique



S;  $C_1, C_2$ , etc. les équivalents du centre  $C_0$  par S et ses puissances :  $C_1 = C_0S, C_2 = C_0S^2$ , etc. Ces points sont sur une *trajectoire* de la substitution, circonférence cayleyenne de centre H (c'est-à-dire ellipse bitangente en M et N à la conique, c'est-à-dire aux points de rencontre avec la polaire de H). Pour le sous-groupe des puissances  $S^n$  les séparations des domaines fondamentaux sont les perpendiculaires (concourant en H) aux segments  $C_0C_1, C_1C_2$ , etc. en leurs milieux. Mais le domaine rayonné de centre  $C_0$  n'occupera qu'une partie du domaine du sous-groupe (partie ombrée), à cause des autres substitutions du groupe, donc sur son périmètre il n'y aura *aucun des points fixes* H, M et N de la substitution S.

*Démonstration du théorème.* — D'après la définition d'un domaine fondamental, il y a sur son pourtour *au moins un* représentant O de chaque classe de substitutions paraboliques, soit S la substitution correspondante. Soit AOB un domaine fondamental du

sous-groupe cyclique engendré par  $S$  (*fig. 13*). Dans un triangle  $A'OB'$  découpé dans ce domaine, il y a un nombre limité de points équivalents à  $C_0$ . Donc parmi les coniques surosculatrices en  $O$  à l'absolu (trajectoires de la substitution  $S$ ) il y en aura une à l'intérieur de laquelle il n'y aura pas de centres, mais il y en aura sur la courbe; appelons  $C_0$  l'un d'eux (en changeant au besoin le numérotage) et soit  $C_1 = C_0 S$ .

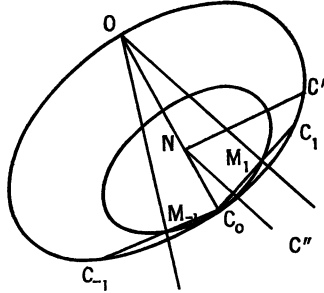


**PREMIER CAS :** *Il n'y a pas d'autre centre entre  $C_0$  et  $C_1$ .* — La perpendiculaire à  $C_0 C_1$  en son milieu  $M_1$  (au sens cayleyen) passe par  $O$ , car en ce sens la conique est une circonférence de centre  $O$ . D'ailleurs, directement, le point  $I$  d'intersection de  $C_0 C_1$  et de la tangente en  $O$  a même polaire  $OQ$  par rapport à toutes les coniques surosculatrices en  $O$ , et par suite  $C_0 C_1$  sont conjugués harmoniques, comme  $U$  et  $V$  (points de rencontre avec l'absolu), par rapport à  $IM_1$ , on a une homologie involutive de pôle  $I$  et d'axe  $OQ$ ,  $C_0$  et  $C_1$  sont symétriques par rapport à  $OQ$  (au sens cayleyen). *Le rayon  $C_0 O$  ne sera pas arrêté avant le point  $O$ .*  $N$  étant entre  $C_0$  et  $O$ ,  $C'$  étant un autre centre, on aura en effet toujours  $\mathcal{L}(NC') > \mathcal{L}(NC_0)$  : car la circonférence (cayleyen) de centre  $N$  et de rayon  $NC_0$  est *tangente intérieurement* à la trajectoire  $C_0 C_1$ , etc. et que tout centre  $C'$  autre que  $C_0$  est par conséquent *extérieur* à cette circonférence (*fig. 14*).

Les deux polygones  $P_0, P_1$  seront donc séparés par la perpendiculaire  $M_1 O$  à  $C_0 C_1$ , de même  $P_0$  et  $P_{-1}$  par la perpendiculaire

$M_{-1}O$  à  $C_{-1}C_0$  en son milieu, etc. (1).  $P_0$  a donc un sommet en  $O$ .

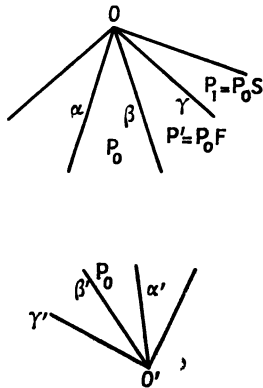
Fig. 14.



Il y a d'ailleurs une infinité de polygones rayonnés adjacents aboutissant en  $O$ .

DEUXIÈME CAS : Il y a un autre centre  $C'$  entre  $C_0$  et  $C_1$ . — Le

Fig. 15.



polygone  $P'$  correspondant provient de  $P_0$  par une opération  $F$  :  $P' = P_0F$  ou  $P_0 = P'F^{-1}$ ,  $C' = C_0F$ . Le point  $O$  appartient à  $P'$ , puisque la perpendiculaire à  $C_0C'$  en son milieu passe par  $O$  et que cette fois encore le rayon  $C_0O$  ne sera pas arrêté avant  $O$ . Donc  $OF^{-1}$  est un sommet  $O'$  de  $P_0$ , et il diffère de  $O$ , car autrement  $F$

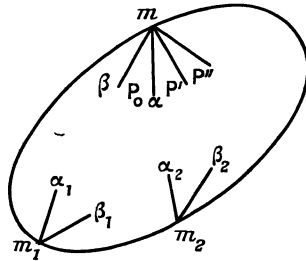
(1) L'angle  $\widehat{M_1OM_{-1}}$  peut donc être pris au lieu de  $AOB$  pour domaine fondamental du groupe cyclique.

serait une  $S^n$  et  $C'$  serait un des  $C_i$ , ne serait donc pas entre  $C_0$  et  $C_1$ . Donc  $P_0$  a un autre sommet  $O'$  sur la conique. La disposition autour de  $O$  est donc la suivante : d'abord  $P_0$  entre les côtés  $\alpha$  et  $\beta$ , puis  $P'$  entre  $\beta$  et  $\gamma$ , puis  $P_1 = P_0S$ , etc. Autour de  $O'$  même disposition (*fig. 15*). On a donc un cycle  $\underbrace{O\alpha\alpha'}_{F^{-1}}\underbrace{O'\beta'\beta O}_F$ .

S'il y avait *plusieurs centres entre  $C_0$  et  $C_1$*  on aurait plusieurs sommets paraboliques de même classe parmi les sommets de  $P_0$ .

9 (*suite*). **Côtés sur la conique absolue.** — PREMIER CAS : *Le groupe est improprement discontinu sur la conique* (comme par exemple le groupe modulaire). — Il ne peut donc y avoir de côtés sur la conique, les côtés ne pouvant empiéter les uns sur les autres. Les polygones peuvent d'ailleurs ne pas atteindre la conique. S'ils l'atteignent, c'est par des sommets et si le nombre de ces pointements dans chaque polygone *est limité*, je dis que ce sont des sommets paraboliques. Car soient (*fig. 16*)  $m, m_1, m_2$ , etc. les sommets

Fig. 16.



de  $P_0$  sur la conique,  $\alpha, \beta$ , les côtés issus de  $m$ ; soit  $P'$  le polygone adjacent à  $P_0$  le long de  $\alpha$  et  $P_0 = P'F_1$ ,  $mF_1$  est donc un sommet de  $P_0$  sur la conique, c'est-à-dire  $m$  ou  $m_1$  ou  $m_2$ , etc.; soient  $P''$  adjacent à  $P'$  (au point  $m$ ) et  $P_0 = P''F_2$ ;  $mF_2$  sera encore  $m$  ou  $m_1$  ou  $m_2$ , etc. et ainsi de suite indéfiniment (parce que les angles en  $m$  sont nuls); il y aura donc *une  $F$  qui reproduira  $m$* , et ce sera donc une substitution *parabolique*.

DEUXIÈME CAS : *Le groupe est proprement discontinu sur la conique.* — Il y a donc sur la conique un segment  $AB$  ne contenant pas de points équivalents, mais perdant la propriété, si l'on dépasse

A ou B [ce côté, joint peut-être à d'autres segments de l'absolu, y forme pour le groupe un domaine fondamental (1)], A est donc équivalent à A ou à B. Ce n'est pas à A, car ce serait alors par une substitution parabolique ou hyperbolique et il y aurait sur l'arc une infinité de points équivalents dans le voisinage de A. A et B sont donc équivalents, et je dis qu'hormis le cas d'un groupe *cyclique elliptique ou parabolique* c'est par une substitution *hyperbolique*. En effet, soit V une substitution elliptique ou parabolique changeant A en B; les  $ABV^p$  recouvriraient toute l'ellipse; s'il y avait une autre substitution W, elle changerait un point  $m$  de AB en un point  $m_1$  d'un arc  $A_p B_p = ABV^p$ , mais  $m_1$  serait équivalent par  $V^p$  au point  $m$  de AB, et non à un autre point de AB qui ne contient pas de points équivalents; on aurait donc  $mV^p = mW$ , ce qui entraîne  $W = V^p$ ; le groupe serait donc *cyclique*.

Ce cas exclu soit H le centre de la rotation hyperbolique S qui change A en B,  $a$  et  $b$  les points fixes de cette substitution sur la conique.  $S^k$  conserve la corde  $ab$ ; le segment d'ellipse qui contient AB est recouvert par une infinité de trapèzes transformés du trapèze ombré par les substitutions  $S^k$ . Soient T une substitution autre que S (s'il y en a dans le groupe) et  $a_1 b_1 = abT$  la corde transformée de  $ab$  par cette opération. Je dis que  $ab$  et  $a_1 b_1$  ne se coupent pas dans l'ellipse, car  $a_1$  et  $b_1$  sont des points fixes de  $T^{-1}ST$ ; aucun de ces points ne peut être sur le segment  $aABb$ , ce qui entraînerait l'existence d'une infinité de points équivalents sur AB ou l'un de ses équivalents. Elles n'ont pas non plus d'extrémité commune, car si  $a_1$  coïncidait avec  $a$ , ce serait un point fixe de l'opération *parabolique*  $T^{-1}STS^{-1}$ , ce qui est contraire à la discontinuité propre sur l'arc  $ab$  (car il y aurait des segments équivalents par les deux substitutions parabolique et hyperbolique).

En exécutant toutes les opérations du groupe, on aura donc une infinité de *segments d'ellipse* tels que  $aABb$ , n'empiétant pas les uns sur les autres et deux points d'un même segment ne pouvant être équivalents que par une puissance de la substitution hyperbolique correspondante.

On va démontrer que dans la division en *domaines fondamentaux*

---

(1) Ces côtés doivent être considérés comme des ensembles *ouverts* à une extrémité.

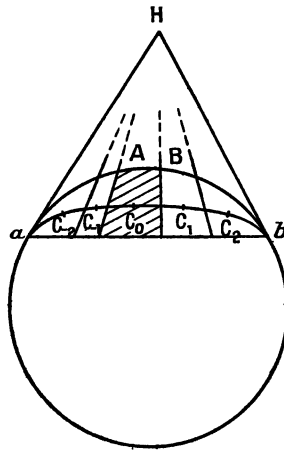


rayonnés, tout point de l'arc qui limite un segment est atteint soit comme sommet, soit comme point d'un côté.

Supposons d'abord (*fig.* 17) qu'il y ait un centre  $C_0$  à l'intérieur du segment, alors, par ce qui précède, tous les autres centres seront intérieurs à ce segment ou à ses équivalents. Ceux du segment sont les  $C_i = C_0 S^i$  distribués sur une circonférence cayleyenne de centre H, c'est-à-dire un arc d'ellipse bitangent en  $a$  et  $b$  à l'absolu. Les domaines sont limités par les perpendiculaires aux segments  $C_i C_{i+1}$  en leurs milieux, passant toutes par H : tout point de l'arc  $aABb$  est donc atteint soit comme sommet, soit comme étant sur un côté.

Supposons en second lieu qu'il n'y ait pas de centres à l'intérieur du segment. Alors en faisant varier d'une façon continue

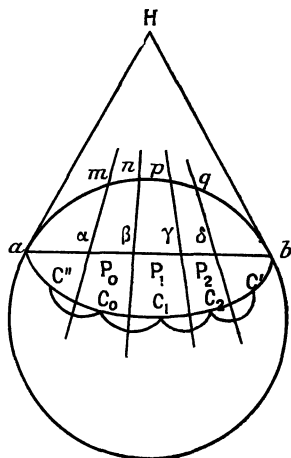
Fig. 17.



l'ellipse bitangente en  $a$  et  $b$  depuis la corde  $ab$  jusqu'à la conique absolue, il en existera une dont l'arc extérieur au segment limitera avec  $ab$  une région ne contenant aucun centre, tandis qu'il y en aura sur cet arc (*fig.* 18). Supposons que dans l'angle de deux droites D et DS menées par H il y ait sur cet arc de circonférence cayleyenne trois centres  $C_0 C_1 C_2$ ; on les reproduira par S et ses puissances; soient  $C' = C_0 S$  et  $C'_1 = C_2 S^{-1}$  les plus voisins de ces nouveaux centres. Pour avoir les domaines de centres  $C_0, C_1, C_2$  traçons les médiatrices de  $C' C_0, C_0 C_1, C_1 C_2, C_2 C'_1$ , qui passent par H et rencontrent en  $m, n, p, q$  l'arc  $aABb$ , et les arcs de circonférences

cayleyennes de centres  $m, n, p, q$  passant respectivement par  $C''C_0$ ,

Fig. 18.

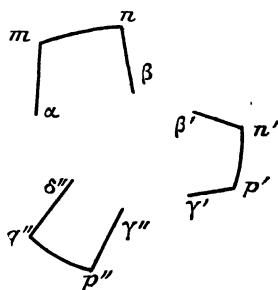


$C_0C_1$ , etc. et extérieurs à la circonférence  $a \dots C''C_0C_1C_2C' \dots b$ , on forme ainsi des *lunules*,  $C''C_0$ , etc.

Dans la partie de l'intérieur de l'absolu extérieure à cette circonférence, il peut y avoir ou non des centres.

1° *Les lunules et leur périmètre extérieur ne contiennent pas*

Fig. 19.



*de centres.* — Par un raisonnement déjà fait, on voit que les médianes ne seront pas arrêtées avant d'avoir atteint  $m, n, p, q$ , etc. Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  les côtés ainsi obtenus. On a  $C''C_0S = C_2C'$ , donc  $\alpha S = \delta$ , et l'on peut donc prendre  $\alpha$  et  $\delta$  pour les droites  $D$  et  $DS$ ;

il n'y a donc pas de points équivalents sur l'arc  $mnpg$ . Dès lors  $np$  est équivalent à un côté de  $P_0$  qui n'est pas  $mn$ , soit  $n'p'$  ce côté; de même  $pq$  est équivalent à un côté de  $P_0$ , soit  $p''q''$ . On a donc la disposition suivante (*fig. 19*). Les côtés rectilignes forment ici des *cycles ouverts* (puisque'il n'y a pas équivalence entre les arcs  $mn$ ,  $n'p'$ ,  $p''q''$ ) :  $n\beta\beta'n'$ ;  $p'\gamma'\gamma''p''$ ;  $q''\delta''\alpha m$ . Les angles (euclidiens)  $n$  et  $n'$  sont *supplémentaires*; de même  $p'$  et  $p''$ ;  $q''$  et  $m$ . Au sens non euclidien ces angles sont *droits*, donc encore *supplémentaires*.

2° *Il y a des centres non dans les lunules, mais sur leur périmètre.* — En ce cas les médiatrices se coupent sur la conique, le polygone correspondant aura un *sommet* ou *pointement* sur la conique.

3° *Il y a des centres dans les lunules.* — Ces points sont alors plus rapprochés des centres  $m$ ,  $n$ , etc. des lunules correspondantes;  $m$ ,  $n$ , etc. ne peuvent plus être sommets, ils se trouvent à l'*intérieur* de côtés sur la conique.

4° Enfin s'il y a une combinaison du deuxième et du troisième cas, il y aura en plus des côtés curvilignes un ou plusieurs *pointements*.

Dans tous les cas si l'on suppose limité le nombre des côtés, les sommets et les côtés se répartissent en un certain nombre de *cycles ouverts*.

*Remarques.* — I. Tous ces sommets sont *adventifs*, car ils dépendent du choix de  $C_0$ . La présence de *sommets adventifs sur l'absolu* caractérise donc les groupes *proprement discontinus sur la frontière*.

II. Rien ne prouve dans les raisonnements précédents que les côtés recouvrent la totalité de l'ellipse (1).

III. Les côtés *rectilignes* d'un polygone rayonné sont *deux à deux* conjugués par les substitutions du groupe : un même côté  $\alpha$  de  $P_0$  ne peut être équivalent à *deux* côtés de  $P_0$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ ; car si l'on

---

(1) Pour la démonstration, voir le fascicule LX du *Mémorial Propriétés générales des groupes discontinus* par M. Th. Got.

avait  $\alpha = \beta F_1$ , et  $\alpha = \gamma F_2$ , le polygone  $P'$  adjacent à  $P_0$  le long de  $\alpha$  serait équivalent à  $P_0$  par  $F_1$  et par  $F_2$ , ce qui entraîne  $F_0 = F_1$  et par suite  $\beta$  et  $\gamma$  confondus.

IV.  $\alpha$  et  $\beta$  étant deux côtés du polygone  $P_0$ , une même opération ne peut les changer en deux côtés différents  $\alpha'$  et  $\beta'$  du polygone. Car si l'on avait  $\alpha' = \alpha F$ ,  $\beta' = \beta F$ , un même polygone  $P_0 F^{-1}$  devrait être adjacent à  $P_0$  à la fois le long de  $\alpha$  et de  $\beta$ , ce qui est impossible, à cause de la convexité.

V. L'opération qui fait passer d'un côté rectiligne à son conjugué est une rotation autour de leur point de concours. Car soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  deux côtés conjugués de  $P_0$ ,  $P$  et  $P'$  les polygones adjacents le long de  $\alpha$  et  $\alpha'$ ,  $C_0$ ,  $C$  et  $C'$  les centres, et soit  $\sigma' = \alpha F$ , on aura  $P' = P_0 F$ ,  $P = P_0 F^{-1}$ , donc  $C' = C_0 F$ ,  $C = C_0 F^{-1}$ . Le centre de la rotation  $F$  est donc le point de concours des perpendiculaires à  $C_0 C$ ,  $C_0 C'$  en leurs milieux, c'est-à-dire des côtés  $\alpha$  et  $\alpha'$ .

VI. Les côtés conjugués sont en outre équidistants du centre du polygone puisque leurs distances à  $C_0$  sont les moitiés de  $\mathcal{L}(C_0 C)$  et de  $\mathcal{L}(C_0 C')$  qui sont égales.

10. **Résumé des propriétés.** — Tout domaine fondamental *rayonné* est convexe et de plus :

1° C'est un polygone simplement connexe ne débordant pas l'absolu;

2° Les côtés sont, ou rectilignes (première sorte), ou arcs de l'absolu (deuxième sorte); ces derniers n'existant pas toujours; les côtés rectilignes sont équivalents deux à deux; ils sont donc en nombre pair;

3° Les sommets intérieurs se répartissent en cycles fermés adventifs ou elliptiques, la somme des angles (cayleyens) des cycles étant respectivement  $2\pi$  ou  $\frac{2\pi}{v}$ ;

4° Les sommets sur l'ellipse forment ou bien des cycles fermés (sommets paraboliques) dont la somme des angles est nulle ou des cycles ouverts de sommets adventifs dont la somme des angles est  $\pi$ .

11. **Réciproque.** — Poincaré a démontré la réciproque : *Si un*

polygone  $P_0$  satisfait aux conditions 1° à 4° précédentes, les substitutions qui conjuguent deux à deux les côtés des cycles fermés engendrent un groupe qui est proprement discontinu dans la conique et  $\gamma$  admet  $P_0$  pour domaine fondamental.

**12. Relations de structure.** — Les substitutions qui conjuguent deux à deux les côtés de la *première sorte* (c'est-à-dire rectilignes), d'un domaine rayonné constituent un ensemble de *substitutions génératrices*; c'est-à-dire que par leurs combinaisons ou itérations elles engendrent tout le groupe. En effet, tous les polygones rayonnés équivalents sont deux à deux adjacents de part et d'autre de côtés de la première sorte et ces polygones adjacents s'échangent par application de la substitution qui change ce côté en son équivalent; or, je dis que c'est une combinaison des génératrices; la démonstration se fait de proche en proche, supposons que la substitution  $S$  qui transforme  $P_0$  en un polygone  $P$  soit ainsi constituée, il va en être de même pour celle qui change  $P_0$  en  $P_1$ , adjacent à  $P$  le long d'un côté  $C$ , soient en effet  $C'$  le côté de  $P$  conjugué à  $C$  et  $T$  la substitution correspondante :  $C = C'T$ ; donc  $P_1 = PT$ . Soient d'autre part,  $C_0$  et  $C'_0$  les équivalents de  $C$  et  $C'$  dans  $P_0$  :  $C = C_0S$ ,  $C' = C'_0S$ ; d'où  $C_0S = C'_0ST$ ,  $C_0 = C'_0STS^{-1}$ ; donc  $STS^{-1}$  est l'une des substitutions génératrices  $G$ , et de  $STS^{-1} = G$ , résulte  $T = S^{-1}GS$ . c. q. f. d.

Soient  $2q$  le nombre de côtés de la première sorte de  $P_0$  et  $S_1, S_2, \dots, S_q$  les substitutions qui conjuguent ces côtés. Tout chemin tracé dans l'intérieur de l'absolu à partir d'un point intérieur à  $P_0$  et y revenant donne lieu par les échanges des polygones traversés successivement par ce contour à une relation finale  $P_0S = P_0$ , où  $S$  est un produit de génératrices qui se réduit à la *substitution identique*

$$S_{a_1}^{a_1} S_{a_2}^{a_2} \dots S_{a_n}^{a_n} = 1,$$

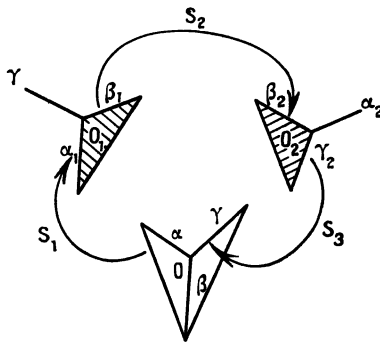
où les  $a_1 \dots a_n$  sont des entiers — en nombre quelconque — de la suite 1, 2, ...,  $q$ . Réciproquement à toute relation de ce genre correspond un contour comme le précédent (et même une infinité continue, l'ordre seul des polygones traversés entrant en jeu). On aura donc toutes les relations possibles entre les génératrices en déterminant tous les contours distincts irréductibles. On voit par le même raisonnement classique que pour les *lacets* dans l'étude des points critiques, que l'on peut se borner aux seuls contours entourant *un seul*

sommet, et l'on a finalement autant de relations distinctes qu'il y a de cycles de sommets de la première sorte *intérieurs* à la conique (il n'y en a pas pour les cycles paraboliques, parce qu'on ne peut tourner autour d'un sommet parabolique).

On a vu que si  $C_0$  n'occupe pas une position particulière les cycles *adventifs* étaient de *trois sommets* seulement, et les cycles *elliptiques* se réduisaient à *un sommet*. Les relations de structure ont alors une forme simple.

Soit  $OO_1O_2$  un cycle *adventif* :  $\alpha\alpha_1, \beta_1\beta_2, \gamma_2\gamma$  les côtés du cycle

Fig. 20.



respectivement conjugués (*fig. 20*), de telle sorte que  $S_1, S_2, S_3$  étant les trois substitutions *génératrices* correspondantes l'on a

$$\alpha_1 = \alpha S_1, \quad \beta_2 = \beta_1 S_2, \quad \gamma = \gamma_2 S_3.$$

En chaque sommet s'assemblent *trois polygones*, savoir :

- en  $O_1$  :  $P_0, P_0 S_1$  et  $P_0 S_2^{-1}$  ou encore  $P_0 S_3 S_1$ , d'où  $S_3 S_1 = S_2^{-1}$  ;
  - en  $O_2$  :  $P_0, P_0 S_2$  et  $P_0 S_3^{-1}$  ou encore  $P_0 S_1 S_2$ , d'où  $S_1 S_2 = S_3^{-1}$  ;
  - en  $O$  :  $P_0, P_0 S_3$  et  $P_0 S_1^{-1}$  ou encore  $P_0 S_2 S_3$ , d'où  $S_2 S_3 = S_1^{-1}$ ,
- puisque ces trois groupes sont permutés par  $S_1, S_2, S_3$ .

Toutes ces relations reviennent à

$$S_1 S_2 S_3 = 1.$$

Pour un cycle elliptique d'un seul sommet on aura simplement

$$S_c^2 = 1$$

si l'angle de la rotation est  $\frac{2\pi}{v}$ .

On peut convenir de considérer les substitutions paraboliques, comme limites de substitutions elliptiques, l'angle devenant nul, c'est-à-dire  $\nu$  infini, et l'on écrira ainsi pour un sommet parabolique formant cycle

$$S_{\rho}^{\infty} = 1.$$

**13. Extension d'un groupe par symétries.** — Si l'on adjoint aux substitutions du groupe  $G$  une substitution du deuxième type :  $z'_0 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  avec  $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ , on obtient par leur combinaison un groupe *étendu*  $G$  dont  $G$  est un sous-groupe invariant d'indice *deux*. Ses opérations conservent, comme celles de  $G$ , chacun des deux demi-plans  $\eta > 0$  et  $\eta < 0$ , et les collinéations correspondantes de l'espace hyperbolique conservent l'intérieur de l'absolu. Par suite la méthode du rayonnement s'applique encore pour déterminer un domaine fondamental du groupe étendu.

Des particularités remarquables se présentent lorsqu'il y a dans le groupe étendu des *symétries*, c'est-à-dire des substitutions du deuxième type où  $\alpha + \delta = 0$  — inversions par rapport à des circonférences orthogonales à l'axe réel avec les symétries par rapport à des parallèles à l'axe imaginaire, cas limite des inversions précédentes — opérations ayant pour image dans le plan hyperbolique des homologies involutives de pôles extérieurs à l'absolu. Une telle opération laisse fixe *individuellement tous les points de la circonférence de symétrie* (ou de *l'axe d'homologie*). Par conséquent un domaine fondamental ne pourra être traversé par *aucun axe de symétrie*, et le périmètre d'un tel domaine devra contenir comme côté une portion d'un représentant de chaque *classe d'axes de symétrie* (il existe de telles classes, comme il en existe de sommets elliptiques), un tel côté est à lui-même son conjugué. Le périmètre peut d'ailleurs contenir des côtés du premier type, c'est-à-dire conjugués deux à deux par des substitutions du premier type, et des côtés dits du second type n'appartenant pas à des axes de symétrie, mais conjugués néanmoins par des opérations du *second type*.

**14. Exemples de groupes fuchsien.** — Considérons les groupes dont les côtés de première sorte d'un domaine fondamental forment *un quadrilatère ABCD* (dans le plan hyperbolique).

I. Les côtés *conjugués* sont *adjacents*.

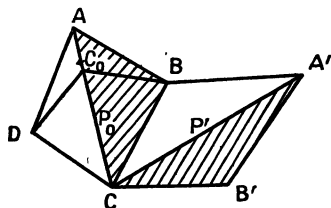
(Nous emploierons la notation  $\equiv$  pour désigner l'équivalence de deux points, etc. Par exemple on a  $AB \equiv AD$ ,  $CB \equiv CD$ . Nous appellerons *congruence l'égalité cayleyenne*.)

PREMIER CAS : *Le quadrilatère est complètement intérieur à l'absolu*. — Nous supposons que c'est un domaine *rayonné*. Quels sont les *cycles*? A forme cycle à lui seul, de même C; B et D forment cycle à eux deux (B.BC.CD.DA.AB.B). Il n'y a donc pas de sommets *adventifs* et  $a, c, v$  étant des entiers on aura donc, en désignant par  $\bar{A}$  etc. les angles cayleyens,

$$\bar{A} = \frac{2\pi}{a}, \quad \bar{C} = \frac{2\pi}{c}, \quad \bar{B} + \bar{D} = \frac{2\pi}{v}.$$

Mais les deux triangles ABC, ADC sont *congruents*, donc symétriques au sens cayleyen par rapport à AC; donc  $\bar{B} = \bar{D} = \frac{\pi}{v}$ . Pour obtenir un groupe de ce genre il suffit donc de partir d'un triangle dont les angles soient  $\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{v}$  et de compléter le polygone en prenant son

Fig. 21.



symétrique par rapport à un côté (*fig. 21*): le centre  $C_0$  du polygone est sur AC.

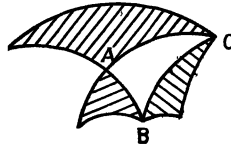
Je dis que pour obtenir la division du plan en domaines fondamentaux, il suffit de reproduire indéfiniment ces triangles *par symétries autour de leurs côtés*. Par exemple, soient  $A'BC$  symétrique de  $ABC$  par rapport à  $BC$ , puis  $B'A'C$  symétrique de  $BA'C$  par rapport à  $CA'$ ;  $A'BC$  se déduit donc de  $ADC$  par une rotation autour de C d'angle égal au double de  $\overline{ACB}$ , c'est-à-dire égal à  $\bar{C}$  de même  $A'CB'$  se déduit de  $ACB$  par une rotation autour de C d'angle égale au double de  $\overline{BCA'}$ , c'est-à-dire encore égal à  $\bar{C}$ : le quadrilatère  $A'BCB'$  est donc le domaine fondamental  $P'$  déduit du domaine  $P_0(ADCB)$



par la substitution elliptique de point fixe C. Dans le plan analytique on a une division en triangles dont les côtés sont des arcs de circonférences orthogonales à l'axe réel et dont les angles (euclidiens) sont  $\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{v}$ ; tous ces arcs étant *symétriques* (c'est à-dire *inverses*) les uns des autres, ce sont les triangles de Schwarz (à part la substitution de l'axe réel à une circonférence). Dans la figure (*fig. 22*) les angles  $\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{c}, \frac{\pi}{v}$  sont  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$  et  $\frac{\pi}{6}$ .

Dans le plan hyperbolique un triangle est déterminé par ses *angles*

Fig. 22.



(à la position près); donc  $a, c, v$  déterminent le groupe, mais, la somme des angles non euclidiens <sup>(1)</sup> devant être inférieure à  $\pi$ , ces entiers doivent satisfaire à l'inégalité

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{v} < 1.$$

*Relations de structure.* — Soient  $S_1$  et  $S_2$  les rotations elliptiques de centres A et C et d'angles  $\frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{c}$  ( $AD \equiv AB.S_1$  et  $CB \equiv CD.S_2$ );  $R_1$  et  $R_2$  celles de centres B et D. Les trois cycles donnent respectivement les relations suivantes :

$$S_1^a = 1, \quad S_2^c = 1, \quad S_1 R_2 S_2 = 1 \quad \text{ou} \quad S_2 R_1 S_1 = 1,$$

d'où

$$R_1 = (S_1 S_2)^{-1} \quad \text{et} \quad R_2 = (S_2 S_1)^{-1}$$

qui sont bien de même classe  $R_2 = S_1^{-1} R_1 S_1$ .

**DEUXIÈME CAS :** *L'un des sommets (A par exemple) est sur la conique.  $S_1$  est parabolique.* — Prenons l'image dans le demi-plan analytique en supposant la correspondance établie de façon que le  $\zeta$  de A soit  $\infty$  : alors AB et AD ont pour images deux parallèles à l'axe

(<sup>1</sup>) Ou des angles euclidiens du triangle à côtés circulaires (Legendre).

imaginaire; si  $h$  est leur distance, la substitution  $S_1$  est  $z' = z + h$ . Les points B et D sont sur une parallèle à l'axe réel, car dans la conique ils sont sur une trajectoire orthogonale des rayons issus de A. On en déduit C, équidistant de B et D et tel que les circonférences BC et DC orthogonales à l'axe réel fassent l'angle  $\frac{2\pi}{c}$ . On pourra en déduire  $S_2$  et les symétries.

Comme cas particulier prenons celui du *groupe modulaire* (ou *arithmétique*), c'est celui où les angles sont  $\bar{A} = 0$ ,  $\bar{C} = \pi$ ,  $\bar{B} = \bar{D} = \frac{\pi}{3}$  et où les *substitutions génératrices* sont  $z' = z + 1$  ( $S_1$ ),  $z' = -\frac{1}{z}$  de point fixe C ( $z = i$ ) et d'angle  $\pi$  ( $S_2$ ).

En prenant  $C_0$  sur l'axe imaginaire on constitue donc un domaine fondamental par les deux parallèles à  $O\eta$ ,  $\xi = -\frac{1}{2}$ ,  $\xi = \frac{1}{2}$ , et par la circonférence de centre O et de rayon  $un$ , qui coupe ces parallèles en B et D. Les rotations elliptiques correspondantes sont

$$z' = -\frac{1}{z+1} (S_1 S_2) \quad \text{et} \quad z' = \frac{z-1}{z} (S_2 S_1).$$

On se trouve dans le cas d'un *groupe de symétries*, car l'axe  $O\eta$  est *axe de symétrie* du domaine fondamental. En adjoignant la substitution correspondante ( $z' = -z_0$ ) au groupe primitif, on obtient un groupe étendu ayant pour domaine fondamental la moitié du précédent. En le reproduisant par symétries successives on obtient la division du plan représentée figure 23. On a inscrit dans les premiers domaines fondamentaux obtenus les substitutions correspondantes.

On démontre par un algorithme analogue à celui des fractions continues que toute substitution

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont *entiers*, est le résultat de la combinaison de  $S_1$  et de  $S_2$  (<sup>1</sup>). Le groupe précédent est donc bien le groupe modulaire.

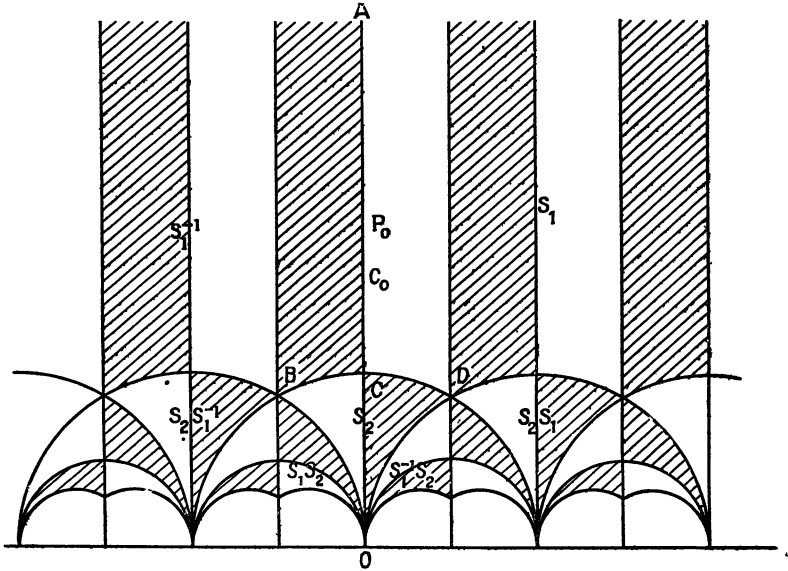
Si l'on avait pris une position quelconque pour le centre  $C_0$  du poly-

---

(<sup>1</sup>) Voir au paragraphe 26 la démonstration pour le cas de coefficients *entiers complexes*.

gone, les deux sommets elliptiques formant cycle seraient remplacés par un seul de la même classe; en revanche, il apparaîtrait un cycle de trois sommets *adventifs*, le *quadrilatère* fondamental deviendrait

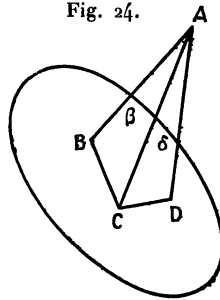
Fig. 23.



un *hexagone* fondamental (avec 5 sommets apparents seulement, le sommet  $C$  étant toujours *sommet non apparent*).

TROISIÈME CAS : L'un des sommets ( $A$  par exemple), est extérieur

Fig. 24.



à l'absolu (fig. 24). — Supposons d'abord le quadrilatère symétrique par rapport à  $AC$  : alors nécessairement  $B\beta \equiv D\delta$ . La théorie

précédente s'applique entièrement, on a un groupe de symétries, on obtient une division du plan en triangles équivalents, symétriques les uns des autres. Dans ce cas le domaine fondamental a un côté sur la conique.

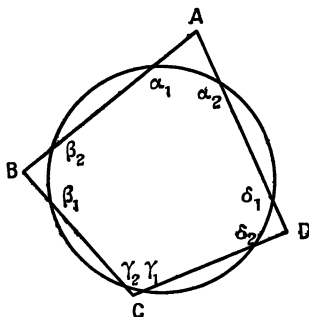
Supposons en second lieu seulement  $CB \equiv CD$ .  $S_1$  la rotation correspondante; il existe une opération  $S_2$  qui change  $B\beta$  en  $D\delta$  (mais pas  $BA$  en  $DA$ ); quant aux points  $B$  et  $D$ , ce sont des sommets elliptiques de même classe; on a

$$\bar{C} = \frac{2\pi}{c}; \quad \bar{B} + \bar{D} = \frac{2\pi}{v}.$$

Le groupe n'est plus un groupe de symétries; les deux génératrices sont  $S_1$  et  $S_2$ .

QUATRIÈME CAS: *Tous les sommets sont extérieurs et tous les côtés sécants (fig. 25).* — Dans ce cas il y a une infinité d'opérations échangeant les côtés de première sorte par exemple  $\alpha_1\beta_2$  et  $\alpha_2\delta_1$ ;

Fig. 25.



$\beta_1\gamma_2$  et  $\gamma_1\delta_2$ ; soient  $S_1$  et  $S_2$  l'une des premières, de centre  $A$  et l'une des secondes, de centre  $C$ . Tous les cycles sont ouverts. Il n'y a plus de sommets elliptiques. Donc les angles sont arbitraires. On a toujours un domaine fondamental quel que soit le quadrilatère choisi, et chacun d'eux l'est pour une infinité de groupes, engendrés par des paires d'opérations telles que  $S_1$  et  $S_2$ .

II. *Ce sont les côtés opposés qui sont conjugués (fig. 26).*

Il n'y a qu'un cycle de tous les sommets; car en appliquant la

règle de Poincaré, on trouve

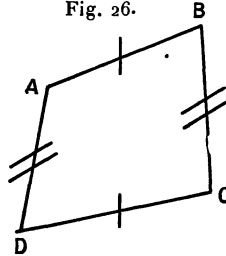
$$\underline{A}. \underline{AB}. \underline{CD}. \underline{D}. \underline{DA}. \underline{BC}. \underline{C}. \underline{CD}. \underline{AB}. \underline{B}. \underline{BC}. \underline{DA}. \underline{A}.$$

Donc

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} = \frac{2\pi}{\nu}.$$

$\nu$  ne peut être égal à *un* que dans le plan euclidien (la somme des

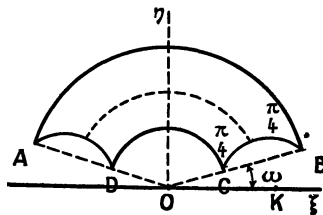
Fig. 26.



angles d'un quadrilatère est *inférieure* à  $2\pi$  dans la métrique de Cayley).

Sans traiter le cas général, bornons-nous à un exemple où  $\nu = 2$  et

Fig. 27.



les quatre angles égaux (donc égaux à  $\frac{\pi}{4}$ ). En outre dans le demi-plan analytique (*fig. 27*) deux des côtés sont sur des circonférences de centre  $O$  et sont divisés symétriquement par  $O\eta$ . Les deux autres côtés seront aussi symétriques par rapport à  $O\eta$ . On voit aisément que  $A$  et  $D$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés avec  $O$  et  $r_1, r_2$  étant les rayons des deux circonférences  $AB$  et  $CD$ , que l'angle  $\omega$  de ces droites avec l'axe réel est donné par  $\text{tang } \omega = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$ . Le quadrilatère a un *deuxième axe de symétrie*, représenté par la circonférence de centre  $O$  et orthogonale aux arcs  $AD$  et  $CB$ . Le polygone fondamental se reproduit en opérant des symétries sur les côtés des qu

drilatères partiels formés par des côtés du premier et des axes de symétrie. On trouve pour les substitutions génératrices

$$(S_1) \quad z' = z \frac{\cos \omega + \sin \omega}{\cos \omega - \sin \omega} \quad \text{ou} \quad z' = \frac{r_1}{r_2} z,$$

homothétie de centre O, et,  $k$  désignant la distance OK de O au centre du cercle BC,

$$(S_2) \quad z' = +k - \frac{2k^2 \sin^2 \omega}{z + k},$$

substitution qui change AD en CB.

Il y a naturellement une relation entre les substitutions  $S_1$  et  $S_2$ , aisée à former en partant du cycle unique formé par les sommets :

$$S_1 S_2 S_1^{-1} S_2^{-1} = I.$$

## CHAPITRE II

### DOMAINES FONDAMENTAUX DES GROUPES AUTOMORPHES.

15. **Déplacements quelconques en géométrie cayleyenne.** — L'équation de l'absolu en coordonnées homogènes étant

$$(1) \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 = 0,$$

nous supposons, pour fixer les idées, qu'elle représente une sphère de centre O (axes rectangulaires); les deux systèmes de génératrices sont donnés par

$$(2) \quad \frac{z_4 + z_3}{z_1 - iz_2} = \frac{z_1 + iz_2}{z_4 - z_3} = \lambda, \quad \frac{z_4 + z_1}{z_1 + iz_2} = \frac{z_1 - iz_2}{z_4 - z_3} = \mu,$$

ou, en posant

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_4 + z_3 = y_1, \quad z_1 + iz_2 = y_2, \quad z_1 - iz_2 = y_3, \quad z_4 - z_3 = y_4, \\ \frac{y_1}{y_3} = \frac{y_2}{y_4} = \lambda, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_3}{y_4} = \mu, \end{array} \right.$$

d'où la représentation paramétrique suivante :

$$(4) \quad y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \lambda \mu : \lambda : \mu : 1,$$

les points réels correspondent aux valeurs imaginaires conjuguées de  $\lambda$  et  $\mu$ .

Une *collinéation* permute les génératrices de chacun des deux systèmes, ou échange entre eux les deux systèmes, et correspond nécessairement à une transformation homographique des paramètres, de l'un ou l'autre des types :

$$(5) \quad \lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \quad \mu' = \frac{\varepsilon\mu + \zeta}{\eta\mu + \theta},$$

ou

$$(6) \quad \lambda' = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta}, \quad \mu' = \frac{\varepsilon\lambda + \zeta}{\eta\lambda + \theta}.$$

On doit toujours avoir

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(\varepsilon\theta - \zeta\eta) \neq 0.$$

On trouve aisément que dans le premier cas les substitutions linéaires conservant l'absolu, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$y'_1 y'_4 - y'_2 y'_3 = K(y_1 y_4 - y_2 y_3)$$

doivent être de la forme

$$(7) \quad \begin{cases} y'_1 = \alpha\varepsilon y_1 + \alpha\zeta y_2 + \beta\varepsilon y_3 + \beta\zeta y_4, \\ y'_2 = \alpha\eta y_1 + \alpha\theta y_2 + \beta\eta y_3 + \beta\theta y_4, \\ y'_3 = \gamma\varepsilon y_1 + \gamma\zeta y_2 + \delta\varepsilon y_3 + \delta\zeta y_4, \\ y'_4 = \gamma\eta y_1 + \gamma\theta y_2 + \delta\eta y_3 + \delta\theta y_4. \end{cases}$$

Le facteur  $K$  est le produit  $(\alpha\delta - \beta\gamma)(\varepsilon\theta - \zeta\eta)$ .

Les formules (7) sont dues à Cayley.

Pour avoir les secondes, il suffit de permuter  $\lambda$  et  $\mu$ , ce qui revient, d'après (4), à la substitution

$$(8) \quad y'_1 = y_1, \quad y'_2 = y_3, \quad y'_3 = y_2, \quad y'_4 = y_4$$

qu'il suffit donc de combiner avec les substitutions (7) pour avoir l'ensemble des *déplacements* proprement dits et des *faux déplacements*, c'est-à-dire des déplacements combinés avec un nombre impair de *symétries* par rapport à un plan : la substitution (8) définit la symétrie par rapport au plan  $z_2 = 0$ .

D'une manière analogue au cas des symétries planes, on voit qu'une *symétrie* par rapport à un plan  $\Pi$ , de pôle  $P$ , dans l'espace hyperbolique à trois dimensions, est une *homologie involutive de pôle  $P$  et de plan  $\Pi$* .

*Déplacements réels.* — Pour avoir des collinéations réelles il faut

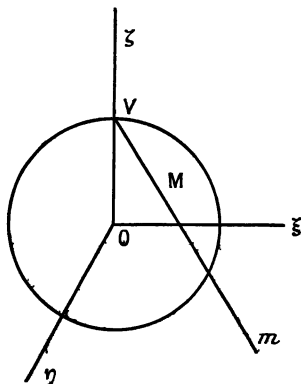
et il suffit que les coefficients  $\varepsilon, \zeta, \eta, \theta$  soient respectivement imaginaires conjugués de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  :

$$(9) \quad \varepsilon = \alpha_0, \quad \zeta = \beta_0, \quad \eta = \gamma_0, \quad \theta = \delta_0.$$

Le groupe de ces collinéations dépend alors des rapports mutuels de quatre paramètres complexes, c'est-à-dire en définitive de six paramètres réels. Les substitutions linéaires  $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  à coefficients complexes s'appellent *automorphes*.

16. Correspondance de la surface et de l'intérieur de l'absolu avec le plan analytique et le demi-espace de Poincaré. — A. Surface de

Fig. 28.



la sphère (fig. 28). — Les axes de coordonnées rectangulaires sont  $O\xi, O\eta, O\zeta$  :

$$\xi = \frac{z_1}{z_4}, \quad \eta = \frac{z_2}{z_4}, \quad \zeta = \frac{z_3}{z_4}.$$

La projection stéréographique d'un point  $M(z_1, z_2, z_3, z_4)$  de la sphère sur le plan  $\xi O\eta$ , à partir du point de vue  $V(\xi = \eta = 0, \zeta = 1)$ , est le point  $m$  de coordonnées

$$\xi = \frac{z_1}{z_4 - z_3}, \quad \eta = \frac{z_2}{z_4 - z_3}, \quad \zeta = 0,$$

et d'après les formules (2), c'est donc le point représentatif dans le

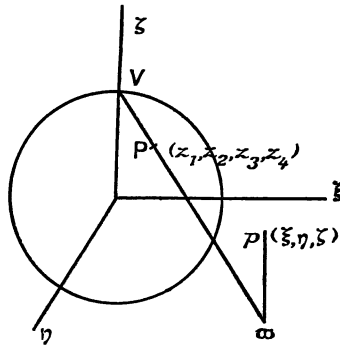


plan analytique  $\xi O \eta$  de la quantité complexe  $\lambda = \frac{z_1 + iz_2}{z_4 - z_3}$ , c'est-à-dire du paramètre de l'une des génératrices rectilignes du point M.

Aux déplacements cayleyens sur la sphère correspondent donc les transformations homographiques de la variable complexe, et cela par la projection stéréographique précédente.

B. *Points intérieurs à la sphère* (fig. 29). — Le cône de sommet P intérieur à la sphère est circonscrit à cette dernière la touche

Fig. 29.



suivant un cercle de rayon purement imaginaire, dont la perspective sur le plan  $\xi O \eta$  est un cercle  $\Gamma$  ayant pour centre la perspective  $\omega$  de H. Poincaré fait correspondre au point P les centres (réels) des sphères de rayon nul passant par  $\Gamma$ ; il suffit de prendre l'un de ces points, par exemple celui  $p$  de côte positive : la côte (réelle)  $\omega p$  est égale au rayon de  $\Gamma$  divisé par  $i$ . Le demi-espace  $\zeta > 0$  est le *demi-espace de Poincaré*.

D'après cela les formules de correspondance entre les coordonnées  $(\xi, \eta, \zeta)$  de  $p$  et celles  $(z_1, z_2, z_3, z_4$  ou  $y_1, y_2, y_3, y_4)$  de P sont

$$(r) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = z z_0 + \zeta^2 = \frac{y_1}{y_4}, \\ \xi + i\eta = z = \frac{y_2}{y_4}, \\ \xi - i\eta = z_0 = \frac{y_3}{y_4}. \end{array} \right.$$

On en déduit aisément à l'aide des formules (7) et (9) du paragraphe 15 les formules de transformation de ces coordonnées par une substitution

linéaire :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho'^2 = \frac{\alpha\alpha_0\rho^2 + \alpha\beta_0z + \beta\alpha_0z_0 + \beta\beta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0z + \delta\gamma_0z_0 + \delta\delta_0}, \\ z' = \frac{\alpha\gamma_0\rho^2 + \alpha\delta_0z + \beta\gamma_0z_0 + \beta\delta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0z + \delta\gamma_0z_0 + \delta\delta_0}, \\ \zeta' = \frac{\zeta}{\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0z + \delta\gamma_0z_0 + \delta\delta_0}. \end{array} \right.$$

A la portion intérieure à la sphère de tout plan d'équation

$$u_1z_1 + u_2z_2 + u_3z_3 + u_4z_4 = 0$$

correspond la sphère du demi-espace :

$$(u_3 + u_4)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2u_1\xi + 2u_2\eta + u_4 - u_3 = 0$$

orthogonale au plan  $\xi O\eta$ .

A une droite de l'espace hyperbolique correspond une circonférence orthogonale au plan  $\xi O\eta$ .

*Correspondance des angles.* — L'angle cayleyen de deux plans est égal à l'angle euclidien des sphères correspondantes.

Les éléments de longueur, de surface et de volume correspondant à la métrique cayleyenne sont dans le demi-espace de Poincaré :

$$\frac{ds}{\zeta}, \quad \frac{d\sigma}{\zeta^2}, \quad \frac{dV}{\zeta^3}$$

( $ds, d\sigma, dV$  ayant la signification euclidienne).

*Classification des déplacements cayleyens.* — Les substitutions automorphes peuvent être, comme les fuchsiennes, de l'une ou l'autre des trois classes :

A points fixes  $\alpha$  et  $\beta$  distincts :

1° *Elliptique*,

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \beta} \quad (\theta \text{ réel non multiple de } 2\pi).$$

2° *Hyperbolique*,

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = K \frac{z - \alpha}{z - \beta} \quad (K \text{ réel et positif});$$

A points fixes confondus :

3° *Parabolique*,

$$\frac{1}{z' - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + h.$$

Mais les coefficients étant ici complexes, *il y a une quatrième classe* : celle des substitutions à points doubles distincts, mais à multiplicateur complexe et de module non égal à 1 ou réel et négatif. On appelle ces substitutions :

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = K \frac{z - \alpha}{z - \beta} \quad (|K| \neq 1)$$

substitutions *loxodromiques*.

Une substitution *elliptique change* une circonférence du plan  $\xi O\eta$  passant par  $\alpha$  et  $\beta$  en une autre passant par ces points et *faisant l'angle  $\theta$  avec la première* : la transformation qui lui correspond par les formules (1) dans le demi-espace laisse donc fixes tous les points de la demi-circonférence orthogonale à  $\xi O\eta$  et de diamètre  $\alpha\beta$ . Dans l'espace hyperbolique, on a donc une *rotation (elliptique) d'angle  $\theta$  (cayleyen) autour de la corde de la sphère qui réunit les points fixes homologues de  $\alpha$  et  $\beta$* .

Une substitution *hyperbolique conserve* chaque circonférence du plan  $\xi O\eta$  passant par  $\alpha$  et  $\beta$ , et échange leurs trajectoires orthogonales. Dans l'espace hyperbolique, les homologues de  $\alpha$  et  $\beta$  sur la sphère restent fixes, ainsi que les plans passant par la corde qui les joint, mais les plans passant par la droite conjuguée (orthogonaux aux premiers au sens cayleyen) sont échangés : on a donc *une rotation (hyperbolique) autour de cet axe* (l'angle est imaginaire).

Une substitution *parabolique* laisse fixe un seul point ( $\alpha$ ) du plan  $\xi O\eta$  et correspond dans l'espace hyperbolique à une rotation autour d'une droite *tangente* à la sphère (d'angle nul).

Enfin une substitution *loxodromique* équivaut à la combinaison d'une *rotation elliptique* avec une *rotation hyperbolique autour de l'axe conjugué de celui de la première*.

**17. Groupes cycliques proprement discontinus : domaines fondamentaux correspondants.** — On voit, comme pour les substitutions fuchsiennes (§ 3), que pour que le groupe cyclique des puissances d'une substitution *elliptique automorphe* soit *proprement discontinu* dans le plan analytique il faut et il suffit que le *multiplicateur* ( $e^{i\theta}$ ) soit une racine  $n^{\text{leme}}$  de l'unité, c'est-à-dire que  $\theta$  soit *une partie aliquote de  $2\pi$* . Un domaine fondamental s'obtient en prenant un arc de cercle limité aux points doubles et son transformé par la

substitution. Il y correspond sur la sphère absolue *un fuseau* compris entre deux arcs de cercle limités aux points fixes. Le groupe des substitutions correspondantes sur les  $y$  a pour domaine fondamental *l'onglet* ayant pour base le fuseau précédent, et limité à deux plans passant par *l'axe de rotation*; et le groupe correspondant des transformations du demi-espace de Poincaré a pour domaine fondamental l'espace compris entre le plan analytique et les portions de sphères orthogonales, images des faces planes de l'onglet.

Le groupe cyclique des puissances d'une substitution *automorphe hyperbolique* est toujours *proprement discontinu*, ainsi que les groupes correspondants pour l'espace hyperbolique ou le demi-espace de Poincaré. On obtient un domaine fondamental dans le plan analytique, entre une *ligne de niveau* et sa transformée (les lignes de niveau sont ici les circonférences du faisceau défini par les points doubles considérés comme *cercles points*). *Sur la sphère*, il y correspond la couronne comprise entre deux demi-plans passant par l'axe de la rotation (extérieur à la sphère). Le volume ainsi délimité est domaine fondamental pour le groupe de l'espace hyperbolique, et il y correspond dans le demi-espace l'intervalle entre le plan analytique et deux portions d'hémisphères orthogonaux au plan analytique, images des demi-plans précédents.

Le groupe cyclique des puissances d'une substitution *parabolique* automorphe est toujours *proprement discontinu*, ainsi que les groupes correspondants pour l'espace hyperbolique ou le demi-espace de Poincaré. C'est un cas limite des précédents, et l'on en déduit facilement les domaines fondamentaux correspondants.

Enfin le groupe cyclique des puissances d'une substitution *loxodromique*, toujours *proprement discontinu*, admet comme domaine fondamental dans le plan analytique l'intervalle entre une *ligne de niveau* et sa transformée; une ligne de niveau est une spirale s'enroulant autour de chacun des deux points fixes. On peut éviter ces points asymptotes en prenant pour domaine fondamental celui qu'on a indiqué plus haut pour une substitution hyperbolique : la substitution loxodromique

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = K e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \beta} \quad (\theta \text{ réel, } K \text{ réel } \neq 1)$$

pouvant être considérée comme le produit d'une substitution hyperbolique et d'une elliptique.

**18. Cas général : formation d'un domaine rayonné dans l'intérieur de la quadrique absolue.** — Pour l'étude des domaines fondamentaux dans le cas général, nous partirons des groupes de déplacements de l'espace hyperbolique (ou du demi-espace de Poincaré) et nous passerons ensuite à leurs *traces* sur la quadrique absolue ou le plan analytique.

Soit donc H un groupe *discontinu* de déplacements dans l'espace hyperbolique, correspondant à un groupe automorphe discontinu G. Supposons H *proprement* discontinu dans cet espace  $\mathcal{E}_h$ . Tous les points, en nombre fini ou en infinité dénombrable, équivalents à un point quelconque  $C_0$  de  $\mathcal{E}_h$ , sont *isolés*. Les sphères cayleyennes équivalentes  $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots$  de centres  $C_0, C_1, \dots$  sont *extérieures*, si leur rayon est suffisamment petit; en faisant croître les rayons de ces sphères jusqu'au moment où ils se rencontrent on obtient autour des centres  $C_0, C_1, \dots$  une série de régions II d'un seul tenant (que nous appellerons polyèdres) constituant des *domaines fondamentaux* du groupe H et remplissant toute la quadrique. Plus exactement tout point intérieur à la quadrique a un équivalent et un seul dans chaque polyèdre II ou sur sa frontière. Ces domaines sont donc des ensembles *ouverts*, une partie de leur frontière en faisant partie et pas le reste. Tous ces polyèdres équivalents sont *congruents* ou *égaux* entre eux, c'est-à-dire superposables par un déplacement cayleyen. Ils sont *convexes* et partout simplement connexes.

*Faces.* — Les faces d'un domaine rayonné sont :

1° Soit planes : portions de plans perpendiculaires aux segments  $C_i C_k$  en leur milieu; faces de *première sorte*;

2° Soit courbes : portions de la surface de l'absolu; faces de *deuxième sorte*; ces dernières n'existent pas toujours.

Si le groupe H est encore proprement discontinu sur la surface même de la quadrique, les faces planes peuvent être prolongées en dehors (les rayons des sphères deviennent imaginaires).

**DOMAINES RAYONNÉS DES GROUPES CYCLIQUES :** 1° *Substitution S elliptique.* — C'est une rotation d'angle égal à  $\frac{2\pi}{\nu}$  autour d'une corde AB de la quadrique. Les points équivalents à un point  $C_0, C_1, \dots, C_{\nu-1}$  divisent en  $\nu$  parties<sup>1</sup> égales une circonférence cayleyenne ayant son centre sur AB; un domaine rayonné est un onglet

d'arête AB limité à deux demi-plans perpendiculaires en leurs milieux à deux cordes consécutives  $C_{i-1}C_i$ ,  $C_iC_{i+1}$  de la circonférence et à la portion de la surface de la quadrique limitée par ces demi-plans (rien n'empêche d'ailleurs de les prolonger au delà). Il y a donc  $\nu$  domaines rayonnés congrus;

2° *Substitution S hyperbolique.* — C'est une rotation — *d'angle purement imaginaire* — autour d'un axe CD extérieur à la quadrique. Les points équivalents sont encore sur des circonférences cayleyennes centrées sur CD (coniques bitangentes à la quadrique aux points A et B de contact des plans tangents menés par CD); un domaine rayonné est formé par un onglet d'arête CD. Il y a cette fois une infinité de domaines équivalents, les faces ont pour limites les plans tangents en A et B;

3° *Substitution S parabolique.* — C'est une rotation — *d'angle nul* — autour d'une tangente At à la quadrique (translation cayleyenne). Les domaines rayonnés sont encore des onglets d'arête At en nombre infini;

4° *Substitution S loxodromique.* — C'est une combinaison d'une rotation elliptique et d'une rotation hyperbolique d'axes conjugués AB et CD; les *trajectoires* sont des courbes en spirale ayant A et B pour points limites. On a encore pour domaines rayonnés une infinité d'onglets, mais d'arêtes différentes.

**19. Arêtes et sommets des domaines rayonnés dans le cas général** (1). — Les *arêtes* du polyèdre intérieures à la quadrique sont, soit *adventives*, c'est-à-dire dépendant du choix de  $C_0$ , soit *elliptiques* (axes de rotations elliptiques).

Si elles sont *adventives*, on voit, par la considération des polyèdres  $\Pi$  entourant une de ces arêtes de  $\Pi_0$  et des substitutions T qui les changent en  $\Pi_0$ , qu'elles se répartissent en *cycles d'arêtes*, comprenant au moins trois arêtes, parce que, les polyèdres étant convexes, leurs dièdres sont tous inférieurs à deux droits. Les *faces* des dièdres d'un cycle se correspondent deux à deux et d'une manière

---

(1) En se restreignant néanmoins au cas d'un nombre *limité de faces*, c'est à-dire d'un nombre *limité de substitutions génératrices*.

unique par des substitutions du groupe  $G$  (faciles à déduire des  $T$  précédentes).

Un polyèdre rayonné ne peut être *traversé* par aucun *axe de rotation elliptique* <sup>(1)</sup>. Mais toute *classe* de substitutions elliptiques  $a$ , au moins, un axe contenant une arête de  $\Pi_0$ . En général, les sommets du réseau de polyèdres divisent les axes elliptiques en segments non équivalents; tous ces segments ont pour équivalents dans  $P_0$  des arêtes non équivalentes, axes elliptiques de même classe. Si  $C_0$  est quelconque, chacune de ces arêtes forme cycle à elle seule et le dièdre correspondant est égal à  $\frac{2\pi}{v}$ ; pour certaines positions de  $C_0$ , des arêtes elliptiques pourront former cycle, c'est alors la somme des dièdres du cycle qui est égale à  $\frac{2\pi}{v}$ .

*Sommets.* — Les angles polyèdres du domaine rayonné sont tous convexes. Il y en a trois catégories :

1° Les sommets *adventifs*, dépendant de  $C_0$  et où par suite n'aboutissent que des arêtes adventives;

2° Les sommets *essentiels* <sup>(2)</sup>, ce sont ceux où se croisent au moins deux axes elliptiques;

3° Les sommets *mixtes* <sup>(3)</sup>, dont la position dépend partiellement de  $C_0$ ; une des arêtes qui en partent est *axe elliptique*, mais toutes les autres sont *adventives*.

Un sommet *essentiel* est nécessairement le point fixe d'un sous-groupe de rotation du type de ceux des polyèdres réguliers. Les sommets essentiels intérieurs à la quadrique se répartissent donc en *diédriques*, *tétraédriques*, *octaédriques* ou *icosaédriques*, et autour de chacun d'eux se groupent respectivement  $2n$ ,  $12$ ,  $24$  ou  $60$  polyèdres rayonnés remplissant tout l'espace environnant, tous ces angles polyèdres ayant d'ailleurs *six faces* et *six arêtes dont trois elliptiques* et *trois adventives*. En répartissant en *classes* les sommets équivalents, il y aura dans chaque polyèdre rayonné *un*

<sup>(1)</sup> Mais un tel axe, si l'angle de rotation est  $\pi$ , peut traverser une face : c'est alors une arête *non apparente*.

<sup>(2)</sup> Appelés aussi *réguliers*.

<sup>(3)</sup> Appelés aussi *semi réguliers*.

représentant de chaque classe (et un seul, sauf pour des positions particulières de  $C_0$ ).

*Domaines du demi-espace.* — Tous ces résultats ont leurs équivalents dans le demi-espace de Poincaré, à cela près que les parties extérieures à la quadrique  $Q$  n'ont pas d'images réelles. Les polyèdres fondamentaux limités à  $Q$  ont pour images des volumes limités par des sphères orthogonales au plan analytique et aussi — dans le cas des groupes *kleinéens* (ou polygonaux) — par des portions de ce plan limitées par des arcs de cercle. Les arêtes intérieures ont pour images des demi-circonférences orthogonales au plan analytique.

20. *Étude des domaines rayonnés sur la quadrique absolue et à l'extérieur.* — Si le groupe contient des substitutions *paraboliques*, elles se répartissent en *classes*, comme les substitutions elliptiques, et l'on voit, par un calcul analogue à celui des groupes fuchsiens, que le polyèdre rayonné atteint sur la quadrique absolue *au moins un point fixe parabolique de chaque classe*. Deux cas peuvent d'ailleurs se présenter :

1° Il n'y a qu'une *rotation parabolique ayant ce point double*, et dont l'arête est tangente à  $Q$  : elle engendre un sous-groupe cyclique, mais il peut arriver, sans que  $C_0$  occupe une position particulière, que le polyèdre rayonné admette plusieurs arêtes *paraboliques de la même classe, mais non équivalentes*; les faces des dièdres se correspondent deux à deux, le polyèdre s'étend dans ce cas au delà de la quadrique;

2° Il y a *plusieurs rotations paraboliques de même point double*; elles engendrent un groupe de rotations paraboliques; si  $C_0$  est quelconque, le polyèdre rayonné atteint la quadrique en un point double et un seul de chacun des groupes de ce genre, l'angle polyèdre correspondant a les propriétés des polygones rayonnés des divers groupes discontinus de déplacements du plan euclidien. Ces sommets sont donc des *sommets essentiels paraboliques*. Toutes ces propriétés découlent d'ailleurs d'un passage à la limite à partir des substitutions elliptiques.

*Points fixes des substitutions hyperboliques ou loxodromiques.*  
— En construisant le polyèdre rayonné pour le groupe cyclique des



substitutions hyperboliques ou loxodromiques, on trouve, comme dans le cas des groupes fuchsien, qu'*aucun point fixe hyperbolique ou loxodromique* ne peut se trouver à l'intérieur ni sur la surface d'un polyèdre rayonné (la surface comprenant les faces prolongées au besoin).

**21. Classification des groupes automorphes.** — Elle est analogue à celle des groupes fuchsien.

*Première classe.* — Une première classe de groupes comprend ceux qui sont proprement discontinus seulement à l'intérieur de la quadrique, mais *ne le sont pas sur la surface*. Les groupes automorphes correspondants sont *improprement discontinus* dans tout le plan analytique et ne conduisent par suite à *aucune fonction analytique uniforme*. Les polyèdres rayonnés ne peuvent atteindre l'absolu que par des sommets *essentiels paraboliques*, en infinité dénombrable dans l'hypothèse faite plus haut sur le nombre des substitutions génératrices. Les groupes correspondants s'appellent, d'après Klein, *polyédriques*.

*Deuxième classe.* — C'est celle des groupes qui sont encore proprement discontinus en certains points extérieurs à la quadrique; par suite les polyèdres rayonnés *débordent* cette dernière. Les arêtes et sommets extérieurs se répartissent encore en *elliptiques, paraboliques, hyperboliques* et *adventifs*. Ce sont les groupes *kleiniens* <sup>(1)</sup> de Poincaré, appelés par [Klein, groupes *polygonaux*, parce qu'ils ont un domaine fondamental *sur* la quadrique, et par suite aussi *dans le plan analytique*. Ce sont les seuls qui donnent naissance à des *fonctions automorphes uniformes*.

**22. Étude des régions de discontinuité des groupes polygonaux sur la quadrique.** — On démontre que s'il existe sur la quadrique une région si petite qu'elle soit où le groupe est *improprement discontinu*, il en est de même sur *toute* la quadrique Q <sup>(2)</sup>. Par suite,

---

(1) Les groupes *fuchsien* du chapitre précédent ne sont qu'un cas particulier des groupes *kleiniens*, celui où le groupe laisse fixe un *cercle d'équation réelle* (ou une droite) du plan analytique, et correspond par suite à un groupe de déplacements hyperboliques laissant fixe un *plan* (groupe de rotation).

(2) Voir dans le fascicule LX du *Mémorial* la démonstration analogue pour les groupes à *cercle principal*.

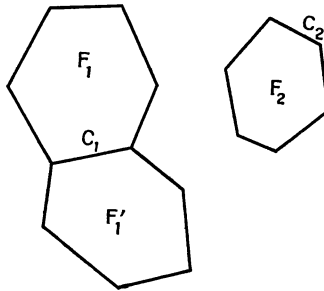
les points fixes de substitutions d'un groupe *polygonal* ne sont partout denses dans aucune région de  $Q$ . Les points de la quadrique où le groupe cesse d'être proprement discontinu forment donc, en général, un ensemble parfait  $\Phi$  discontinu — ou continu unidimensionnel — qui *n'est dense nulle part*, et vers lequel tendent les sommets et arêtes du réseau de polyèdres équivalents.

Désignons par  $F_1, F_2, \dots, F_n$  les faces, en nombre fini par hypothèse, du polyèdre rayonné  $\Pi$  d'un groupe kleinéen situé sur la quadrique. Les *côtés* de ces faces sont des arcs de cercle (ou parfois des circonférences entières si la face de première sorte de  $\Pi$  qui donne naissance à ce *côté* a toutes ses arêtes extérieures à  $Q$ ). Ces faces sont d'un seul tenant, mais pas forcément simplement connexes. Elles n'ont pas d'angles rentrants. Parmi leurs sommets il n'y a aucun point fixe hyperbolique ou loxodromique.

Ces faces et toutes les faces équivalentes recouvrent entièrement la surface de la quadrique, à l'exception de l'ensemble  $\Phi$ , dans lequel figurent, s'il y en a, tous les points fixes paraboliques.

Les faces  $F_1, F_2, \dots, F_n$  appartenant à un même polyèdre rayonné forment un domaine fondamental sur  $Q$ . Les *côtés* de ce

Fig. 30.



domaine se correspondent par des substitutions du groupe, correspondance pouvant ne pas avoir lieu entre côtés d'une même face, mais bien entre côtés de faces différentes; mais dans ce dernier cas on pourra par des modifications permises du domaine fondamental supprimer les côtés de ce genre (soient par exemple  $C_1$  et  $C_2$  côtés de  $F_1$  et  $F_2$  équivalents, on a  $C_1 = C_2 S$ ; soit  $F_1' = F_2 S$ , ce polygone  $F_1'$  sera adjacent à  $F_1$  le long de  $C_1$ ; on peut remplacer  $F_2$  par  $F_1'$  qui lui est équivalent et  $C_1$  peut être supprimé). En définitive

on obtiendra un domaine fondamental  $\Delta$  formé de polygones en nombre au plus égal à  $n$  et dont les côtés seront *conjugués dans chacun d'eux*.

Soient  $P_1, P_2, \dots, P_m$  ( $m \leq n$ ) les polygones composant ce domaine fondamental  $\Delta$ . En appliquant indéfiniment toutes les transformations qui conjuguent les côtés de  $P$ , on obtiendra une série de polygones *adjacents*  $P_1, P'_1, \dots$  formant une *région de discontinuité*  $R_1$  *d'un seul tenant*. On obtient de même en partant de  $P_2, \dots, P_m$  des régions  $R_2, \dots, R_m$ . Ces régions  $R_1, R_2, \dots, R_m$  n'ont *pas de points communs*, car autrement il y aurait dans  $\Delta$  deux points équivalents, ce qui est impossible. A chacune d'elle,  $R_i$  répond dans le groupe  $G$  un sous-groupe  $G_i$  formé des substitutions qui la laissent invariante. Les substitutions des groupes associés aux  $G_i$  dans la décomposition de  $G$  les transforment en régions  $R_1, R'_1, R'_2, \dots, R_m, R'_m, R''_m, \dots$ , parmi lesquelles il y en a seulement  $m$  non équivalentes. Les points limites de ces régions appartiennent tous à l'ensemble frontière  $\Phi$ .

**THÉORÈME.** — *L'ensemble  $\Phi$  ou bien ne divise pas la quadrique, ou bien la divise en deux régions distinctes, ou bien en une infinité.*

**LEMME I.** — *Les ensembles limites  $\Phi$  et  $\Phi_1$ , attachés à un groupe  $G$  et à un sous-groupe  $G_1$  de  $G$  d'indice fini  $n$ , sont identiques.*

Car les projections centrales  $\varphi$  et  $\varphi_1$  de  $\Phi$  et  $\Phi_1$  sur le plan analytique sont les ensembles des points de ce plan où les substitutions linéaires des groupes automorphes correspondants ne forment pas une famille normale. Donc tout point de  $\varphi_1$  appartient à  $\varphi$ . Réciproquement  $[z, f_k(z)]$  désignant une substitution de  $G_1$ , celles de  $G$  seront de la forme

$$[z, g_i[f_k(z)],$$

les  $g_i$  étant des fonctions linéaires en *nombre fini*  $n$ , et, les  $f_k(z)$  formant une famille normale, il en est de même des fonctions  $g_i[f_k(z)]$ .

**LEMME II.** — *Si l'ensemble  $\Phi$  divise la sphère en régions dont certaines, telles que  $D$ , sont invariantes par  $G$ , il est la frontière commune à toutes les régions. Car tout point de  $\Phi$  est limite de*

points équivalents à un point quelconque de  $Q$  et par suite de points de  $D$ .

LEMME III. — *Tout domaine  $D$  contigu à l'ensemble  $\Phi$  et invariant, par  $G$ , contient des lignes simples <sup>(1)</sup> réunissant les points doubles de substitutions hyperboliques ou loxodromiques de  $G$  situés sur sa frontière.*

Car  $S$  étant une telle substitution de points doubles  $A$  et  $B$  et  $m$  un point intérieur à  $D$ , ses transformés  $mS^p$  et  $mS^{-p}$  tendent vers  $A$  et  $B$  pour  $p$  infini. D'où l'on déduit aisément la ligne simple de l'énoncé.

*Démonstration du théorème.* — Supposons que le nombre des régions distinctes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , ... de la quadrique séparées par des points de  $\Phi$  soit fini et au moins égal à 3. Il existe un sous-groupe  $g$  d'indice fini de  $G$  qui laisse invariante chacune d'elles, et auquel correspond le même ensemble  $\Phi$  de points limites. Dès lors, on peut joindre les points fixes  $A$  et  $B$  d'une substitution loxodromique de  $g$ , situés sur  $\Phi$  par une ligne  $b$  contenue dans  $\mathcal{B}$  et par une ligne  $c$  contenue dans  $\mathcal{C}$  (sauf les extrémités), puis un point de  $b$  à un point de  $c$  par une ligne  $l$  intérieure à la portion  $p$  de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  enfermée dans le contour  $b + c$ ;  $l$  traverse la frontière de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire  $\Phi$ , mais  $\Phi$  est frontière de  $\mathcal{A}$ , il y aurait donc des points de  $\mathcal{A}$  intérieurs à  $p$ .  $\mathcal{A}$  ne serait pas d'un seul tenant, puisque, pour joindre ces points à un point de  $\mathcal{A}$  extérieur à  $p$  (il y en a notamment au voisinage de  $A$  et  $B$ ), il faudrait traverser la ligne  $b + c$ , dont aucun point n'appartient à  $\mathcal{A}$  : ceci étant contraire à l'hypothèse, le théorème est démontré.

EXEMPLES : 1° *Une seule région de discontinuité.* — Les groupes fuchsiens de la deuxième classe (§ 10), c'est-à-dire impropres discontinus sur la conique absolue ou, dans le plan analytique, sur l'axe réel ou un cercle réel :  $\Phi$  comprend un ensemble parfait de points partout discontinu. Les groupes kleinéens paraboliques (voir plus loin § 28) correspondant aux fonctions doublement périodiques :  $\Phi$  se compose d'un seul point (sommet parabolique essentiel, le point à l'infini dans le plan analytique).

---

(1) Au sens de Jordan.

2° *Deux régions de discontinuité.* — Les groupes fuchsien de la première classe (§ 10), c'est-à-dire proprement discontinus sur la conique ou, dans le plan analytique, sur l'axe réel ou un cercle réel; les deux régions, par exemple, les deux demi-plans analytiques peuvent ou bien constituer deux régions distinctes (cas de  $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ ), ou être équivalents par des substitutions de la deuxième sorte ( $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$ ), par exemple  $z' = -z$ . En dehors de ces cas la courbe  $\Phi$  n'est pas analytique, car elle s'enroule autour de chacun des points fixes *loxodromiques* en nombre infini.

3° *Régions en nombre infini.* — Chacune de ces régions  $\mathcal{R}, \mathcal{R}', \dots$  reste inaltérée par un sous groupe  $g$  ou  $g', \dots$  d'indice infini de  $G$ , leurs frontières  $\varphi, \varphi', \dots$  contenues dans  $\Phi$  sont les ensembles limites relatifs à ces sous-groupes. Si  $g$  par exemple est un groupe fuchsien de la première classe,  $\varphi$  est une circonférence qui limite  $\mathcal{R}$ . Dans le cas contraire,  $\varphi$  contient une infinité dense de points fixes loxodromiques de  $g$  et ne peut donc avoir de tangente en aucun point.

Si une région  $\mathcal{R}$  de discontinuité n'est pas simplement connexe, son ordre de connexion est *infini*, l'ensemble limite  $\varphi$  ne pouvant être d'un seul tenant et comprenant par suite une infinité de continus distincts se déduisant les uns des autres par des substitutions loxodromiques du sous-groupe  $g$  (1).

**23. Extension des groupes polyédriques ou polygonaux par des substitutions du second type.** — Comme dans le cas du plan on peut, dans certains cas, étendre un groupe polyédrique ou polygonal en lui adjoignant une substitution  $z' = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}$  du second type. Il y correspond une division régulière de l'espace hyperbolique en polyèdres. Chacun d'eux contient au moins une face de chaque *classe de symétries* (s'il y en a), ces faces sont à elles-mêmes leurs conjuguées; les autres sont conjuguées deux à deux par des substitutions de l'un ou l'autre type.

**24. Relations de structure.** — Elles s'obtiennent par la considé-

---

(1) Pour les réciproques de ces théorèmes nous renvoyons aux Mémoires de Poincaré, au Traité de Fricke et Klein et à celui de Fatou.

ration des polyèdres groupés autour d'une arête elliptique ou adventive de chaque cycle, de même que, pour les groupes fuchsiens, par celle des polygones entourant un sommet elliptique ou adventif de chaque cycle. Si  $T_1, T_2, \dots, T_k$  sont les opérations qui conjuguent les  $2k$  faces de la *première sorte* (faces planes), il y a pour chacun des  $m$  cycles adventifs ou elliptiques une relation

$$T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_r} = 1,$$

les indices  $a_i$  étant pris dans la suite  $1, 2, \dots, k$ . En particulier pour une arête de rotation elliptique d'angle  $\frac{2\pi}{\nu}$ , la relation prend la forme

$$(T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_r})^\nu = 1.$$

Dans le cas des groupes kleinéens, ces relations peuvent s'obtenir en partant des polygones  $P$  sur la quadrique, au lieu des polyèdres, et l'on trouve alors que les  $m$  relations fondamentales sont de deux espèces :

1° Des relations *primaires*, obtenues par rotation autour des sommets des polygones;

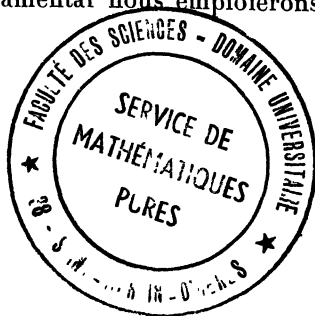
2° Des relations *secondaires*, provenant d'arêtes dont les faces correspondantes donnent des côtés *non consécutifs* dans  $P$  : il existe alors une couronne de polygones correspondant aux polyèdres assemblés autour de l'arête et séparés (sur la sphère) par des cercles passant par les points de rencontre de l'arête et de la sphère, points qu'on peut considérer comme des sommets idéaux.

**25. Exemples de groupes polyédriques et kleinéens. — I. GROUPE DE PICARD.** — C'est celui des substitutions

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

à coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  entiers complexes (ou entiers de Gauss), c'est-à-dire de la forme  $\alpha = a + a'i, \dots; a, a', \dots$  entiers ordinaires. Ce groupe est *improprement discontinu dans le plan analytique*, on l'a déjà vu, mais il est *sans substitution infinitésimale* et comme tel *proprement discontinu dans l'espace hyperbolique*; c'est un groupe *polyédrique*.

Pour en construire un domaine fondamental nous emploierons la



*méthode du rayonnement en particulierisant le centre dans un but de simplification.* Il faut d'abord savoir placer tous les points équivalents à un point quelconque. C'est facile en remarquant que le groupe peut être engendré par les quatre substitutions

$$(1) \quad P_1: z' = z + 1; \quad P_2: z' = z + i; \quad E_1: z' = -z; \quad E_2: z' = -\frac{1}{z},$$

les deux premières, paraboliques et permutable; les deux dernières, elliptiques de période deux. En effet, comme il existe une *division* dans le corps des entiers de Gauss, l'algorithme du plus grand commun diviseur est applicable, et la fraction  $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  peut être développée en fraction continue limitée sous la forme

$$z' = a_1 + ib_1 - \frac{1}{a_2 + ib_2 - \frac{1}{a_3 + ib_3 - \dots - \frac{1}{a_n + ib_n \pm z}}},$$

les  $a_k$  et  $b_k$  étant des entiers ordinaires et ce développement prouve que toute substitution du groupe est le produit d'un nombre limité de substitutions (1). Ces *opérations génératrices* correspondent aux déplacements suivants dans le demi-espace de Poincaré (sur lequel il est ici plus facile de raisonner que sur l'espace hyperbolique) :

$$(P_1) \quad z' = z + 1; \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1;$$

d'où, par les formules de Poincaré,

$$\zeta' = \zeta.$$

On a donc une *translation + 1 parallèle à l'axe des x* (en posant  $z = x + iy$  au lieu de  $\xi + i\eta$ )

$$(P_2) \quad z' = z + i, \quad \alpha = 1, \quad \beta = i, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1;$$

d'où encore

$$\zeta' = \zeta.$$

*Translation + 1 parallèle à l'axe imaginaire Oy*

$$(E_1) \quad z' = -z$$

qu'il faut écrire

$$z' = \frac{iz}{-z}$$

pour avoir

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

alors

$$\alpha = i, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = -i$$

et encore

$$\zeta' = \zeta.$$

C'est une symétrie par rapport à l'axe des  $\zeta$ , qui est l'image, dans le demi-espace, de l'axe de la rotation elliptique de période 2 d'axe  $Oz_3$ .

$$(E_2) \quad z' = -\frac{1}{z}; \quad \alpha = 0, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 0,$$

d'où

$$\zeta' = \frac{\zeta}{p}.$$

C'est <sup>(1)</sup> une *symétrie*, c'est-à-dire une *inversion par rapport à la sphère de centre O et de rayon 1, suivie d'une symétrie par rapport au plan  $x = 0$* . L'axe de cette rotation elliptique de période 2 a pour image dans le demi-espace la demi-circonférence orthogonale au plan  $xOy$  passant par les points doubles  $+i$  et  $-i$  de la substitution (*fig. 31*).

Au lieu de choisir pour le centre du polyèdre rayonné un point quelconque, prenons le point  $C_0$  sur l'axe des  $\zeta$  à la distance *un* de l'origine, c'est-à-dire à l'intersection des deux axes des rotations elliptiques génératrices. Il y aura dès lors des points équivalents dans le voisinage de  $C_0$  et la méthode du rayonnement conduira à un polyèdre forme par l'assemblage de *plusieurs domaines fondamentaux équivalents* autour de  $C_0$  : il suffira d'en prendre un.

*Points équivalents à  $C_0$ .* — Tous les points équivalents à  $C_0$  par les substitutions  $P_1^m P_2^m$  sont les sommets d'un quadrillage de maille égale à un dans le plan  $\zeta = 1$  (*fig. 31*). Dès lors en menant les plans médiateurs des segments  $C_0 C_1, C_0 C_2, C_0 C_3, C_0 C_4, C_1, C_2, C_3, C_4$  étant les sommets de ce quadrillage les plus voisins <sup>(2)</sup> de  $C_0$ , on obtient un prisme à base carrée de côté égal à 1, d'axe  $Oz$  et dont les faces sont parallèles aux plans de coordonnées : le polyèdre rayonné

(1) Dans le plan analytique.

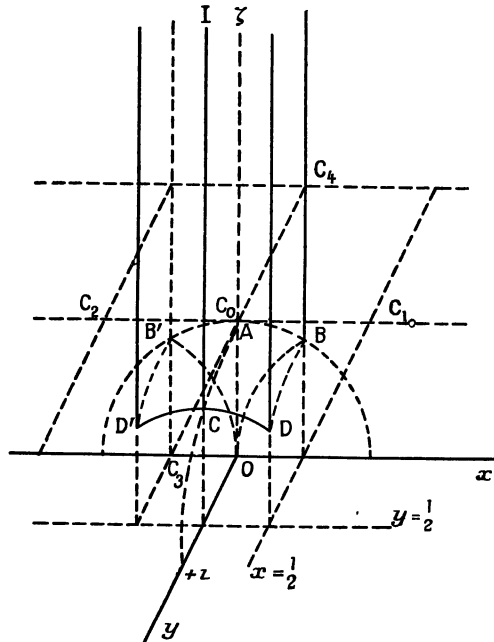
(2) Tous ces points ayant même côte  $\zeta$ , les  $\mathcal{L}$  (cayleyennes) sont proportionnelles aux distances euclidiennes.



sera intérieur à ce prisme, il n'est d'ailleurs traversé par aucun des autres plans médiateurs des segments  $C_0 C_k$  ( $k \neq 1, 2, 3, 4$ ).

Il n'y a pas à s'occuper de  $E_1$  qui laisse fixe  $C_0$  et remplace les sommets du quadrillage par leurs symétriques par rapport à  $O\zeta$ , mais ce fait entraînant l'équivalence des points symétriques par rapport

Fig. 31.



à  $O\zeta$ , le polyèdre rayonné devra être partagé en deux par un plan quelconque mené par  $O\zeta$ , par exemple le plan  $xO\zeta$ .

$E_2$  laisse fixe  $C_0$  et toute la circonférence  $+iC_0 - i$ ; la sphère de symétrie  $x^2 + y^2 + \zeta^2 = 1$  traverse le prisme, il y aura des points équivalents de part et d'autre, de sorte qu'il faudra conserver seulement la partie du domaine rayonné obtenue située soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de la sphère. Soit  $\mathcal{R}$  la région définie par

$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y < \frac{1}{2}, \quad \zeta > 0, \quad x^2 + y^2 + \zeta^2 \geq 1.$$

Je dis que c'est un domaine fondamental II. En effet les centres

équivalents à  $C_0$  par d'autres substitutions ne donneront pas de faces traversant  $\Pi$ , car les points de  $\Pi$  ne peuvent évidemment être équivalents par les substitutions du groupe engendré par  $P_1$ ,  $P_2$  et  $E_2$ .

Ce domaine apparaît comme un *pentaèdre* limité par les quatre plans

$$x = \pm \frac{1}{2}, \quad y = 0, \quad y = \frac{1}{2}$$

et la région  $\zeta > 0$  de la sphère

$$x^2 + y^2 + \zeta^2 = 1$$

pentaèdre ayant un sommet à  $\infty$  sur  $O\zeta$ . Mais c'est, en réalité, un *octaèdre*; car les deux faces planes  $y = 0$ ,  $y = \frac{1}{2}$  et la face sphérique contiennent chacune *une arête elliptique non apparente*: dans la face  $y = 0$ , c'est l'axe  $O\zeta$  de la rotation  $E_1$ ; dans la face  $y = \frac{1}{2}$ , c'est la parallèle à cet axe:  $x = 0$ ,  $y = \frac{1}{2}$ , qui est l'axe de la rotation elliptique  $E_1 P_1$ , c'est-à-dire  $z' = -z + i$  ou  $z' - \frac{i}{2} = -\left(z - \frac{i}{2}\right)$ ; enfin dans la face sphérique c'est un arc de la circonférence de diamètre  $+i$ ,  $-i$ , axe de la rotation elliptique  $E_2$ . On obtient ainsi l'octaèdre  $IABDC'B'$ , ayant un sommet  $I$  à l'infini et les trois arêtes non apparentes  $IA$ ,  $IC$ ,  $AC$  (1).

*Correspondance des faces.* —  $IAB$  et  $IAB'$  sont conjuguées par  $E_1$ ,  $ICD$  et  $ICD'$  par  $E_1 P_2$ ,  $ABDC$  et  $AB'D'C$  par  $E_2$ ,  $IBD$  et  $IB'D'$  par  $P_1$ .

*Nature des arêtes.* — Elles sont toutes *elliptiques*.

$IA$  est l'axe de  $E_1$ ;  $IC$  de  $E_1 P_2$ ;  $AC$  de  $E_2$ ;  $IB$  de  $P_1^{-1} E_1$ ;  $IB'$  de  $P_1 E_1$ : ces deux dernières appartiennent à la même classe, car

$$P_1 E_1 = E_1 (P_1^{-1} E_1) E_1^{-1},$$

comme on le vérifie facilement en tenant compte de ce que  $P_1 E_2$  étant de période *deux*, on a:  $P_1 E_1 = E_1^{-1} P_1^{-1} = E_1 P_1^{-1}$ ;  $ID$  est l'axe de  $P_1^{-1} E_1 P_2$  et  $ID'$  de  $P_1 E_1 P_2$ , également de même classe.  $AC$  est l'axe de  $E_2$ ,  $BD$  celui de  $E_2 P_1$  et  $B'D'$  celui de  $E_2 P_1^{-1}$  de même classe; enfin  $AB$  et  $AB'$  axe de  $E_1 E_2$  et  $CD$  et  $CD'$  axe de  $E_1 P_2 E_2$ .

(1)  $A$  est le même point que  $C_0$ .

*Cycles.* — Il y a huit *cycles* dont trois à une arête et cinq à deux arêtes. La somme des dièdres dans chaque cycle est  $\pi$  sauf pour les deux relatifs à BD, B'D' et CD, CD' où elle est égale à  $\frac{2\pi}{3}$  parce que les substitutions sont de période *trois*.

*Sommets.* — Tous les sommets sont donc *essentiels* et appartiennent au type du *dièdre*. On trouve aisément leurs coordonnées, savoir :

$$\begin{aligned} & \text{I}(0, 0, \infty); \quad \text{A}(0, 0, 1), \quad \text{B}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \text{B}'\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ & \text{C}\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \text{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \text{D}'\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

*Relations entre les substitutions. Structure.* — Les cycles d'arêtes successifs fournissent les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Arête IA} : \text{E}_1^2 = 1; \quad \text{AC} : \text{E}_2^2 = 1; \quad \text{IC} : (\text{E}_1 \text{P}_2)^2 = 1; \\ \text{IB et IB}' : \text{P}_1^{-1} \text{E}_1 \text{E}_1^{-1} \text{P}_1 = 1; \quad \text{ID et ID}' : \text{P}_1^{-1} \text{E}_1 \text{P}_2 \text{E}_1 \text{P}_2 \text{P}_1 = 1; \\ \text{BD et B'D}' : (\text{E}_2 \text{P}_1)^3 = 1 \quad \text{et} \quad (\text{E}_2 \text{P}_1^{-1})^3 = 1, \\ \text{AB et AB}' : (\text{E}_1 \text{E}_2)^2 = 1, \quad \text{CD et CD}' : (\text{E}_1 \text{P}_1 \text{E}_2)^3 = 1. \end{aligned}$$

Mais elles ne sont pas distinctes et peuvent se réduire à

$$\text{E}_1^2 = 1, \quad \text{E}_2^2 = 1, \quad \text{E}_1 = \text{E}_2 \text{P}_2 \text{P}_2^{-1} \text{E}_2 \text{P}_2,$$

de sorte qu'il suffit des trois substitutions suivantes pour engendrer le groupe

$$\text{P}_1 : z' = z + 1; \quad \text{P}_2 : z' = z + i; \quad \text{E}_2 : z' = -\frac{1}{z}.$$

*Extension par symétrie.* — L'octaèdre fondamental peut être considéré comme un double tétraèdre symétrique par rapport au plan  $yOz$ ; chacun d'eux est un tétraèdre fondamental du groupe étendu par la symétrie  $z'_0 = -z$ . Ce procédé permet d'obtenir les divers domaines successifs par symétries, planes ou sphériques, par rapport aux faces successives.

En reproduisant le polyèdre  $\Pi$  par les opérations du groupe on obtient en particulier une infinité d'octaèdres <sup>(1)</sup> dont les sommets équivalents à I sont partout denses dans  $xOy$  : *l'ensemble limite comprend tout le plan analytique.*

(1) La figure représente en OABDCD'B' l'un de ces octaèdres.

II. *Groupe kleinéen des fonctions elliptiques.* — C'est le groupe des substitutions

$$z' = z + m\omega + m'\omega',$$

$m$  et  $m'$  entiers,  $\frac{\omega'}{\omega}$  non réel.

Il est proprement discontinu dans tout le plan analytique (point à l'infini exclu). Un parallélogramme de périodes forme un domaine fondamental.

Le groupe est engendré par les deux substitutions *paraboliques*

$$P : z' = z + \omega, \quad P' : z' = z + \omega'.$$

Dans la quadrique le domaine fondamental se compose d'une série d'angles tétraédriques ayant pour sommet commun le point V (image du point à l'infini du plan analytique) et dont les faces passent respectivement par les deux tangentes à la sphère en ce point parallèles aux côtés du parallélogramme des périodes.

*Structure.* — P et P' sont permutables. Le groupe est donc abélien, la relation entre les substitutions génératrices est

$$PP' = P'P.$$

Pour des exemples plus compliqués de groupes kleinéens nous renvoyons aux Mémoires de Poincaré et à l'Ouvrage de Fatou.

### CHAPITRE III.

#### LE GENRE DES DOMAINES. DOMAINES CANONIQUES. CLASSIFICATION DES GROUPES FUCHSIENS ET KLEINÉENS.

**26. Le genre des domaines fondamentaux.** — Le principal objet des groupes proprement discontinus de substitutions linéaires est la formation des *fonctions automorphes*. Ces fonctions, découvertes par Poincaré, sont des fonctions analytiques méromorphes dans la région de discontinuité propre, invariantes par les substitutions du groupe et ne prenant chaque valeur donnée qu'en un nombre  $m$  fini de points non équivalents. Une telle fonction fait correspondre au domaine fondamental une *surface de Riemann* à  $m$  feuillets. On va

la former dans les cas des groupes *fuchsien*s des deux classes et dans celui des groupes *kleinien*s et en définir le *genre*.

Rappelons d'abord que le *genre*  $p$  d'une surface fermée (1) est lié à l'ordre de connexion  $N$  (ordre toujours *impair*) par la formule

$$(1) \quad p = \frac{N-1}{2}$$

et s'exprime en fonction des nombres  $f$ ,  $a$  et  $s$  de *faces*, d'*arêtes* et de *sommets* par la formule suivante, généralisant une formule d'Euler pour les polyèdres :

$$(2) \quad p = \frac{a+2-f-s}{2},$$

I. *Groupes fuchsien*s de la première classe (c'est-à-dire improprement discontinus sur l'axe réel). — Un domaine rayonné  $P_0$  n'a que des côtés de la première sorte (rectilignes dans la conique) : les points de ses côtés sont conjugués deux à deux ; tous les sommets d'un même cycle sont équivalents. En découpant le polygone, on peut en le déformant d'une façon continue réunir les points équivalents du périmètre et l'on obtient ainsi la surface fermée  $F$ , donnant naissance à la surface de Riemann. C'est le genre de cette surface qu'on appelle *genre du groupe*.

On a ici  $f=1$  ;  $a=q$  en désignant par  $2q$  le nombre toujours pair des côtés du polygone, car les côtés sont réunis deux à deux.

$s$  est égal au nombre  $n$  des cycles, tous les sommets d'un même cycle se trouvant réunis en un même point, donc

$$p = \frac{q+1-n}{2}.$$

*Exemple.* — Groupe arithmétique

$$2q = 4, \quad n = 3, \quad p = 0.$$

II. *Groupes fuchsien*s de la seconde classe (c'est-à-dire ayant des côtés sur l'axe réel). — En même temps que la division en polygones fondamentaux du demi-plan  $y > 0$ , considérons la division *symétrique* par rapport à  $Ox$  ; l'ensemble de  $P_0$  et de son symétrique

---

(1) Voir APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques d'une variable* (Gauthier-Villars, 1930).

$P'_0$  constitue un polygone *d'un seul tenant*, en général à *connexion multiple*, formant un domaine fondamental pour le groupe  $G$  considéré *dans tout le plan*. Par le même procédé que tout à l'heure, on constitue une surface fermée. Pour calculer le genre, soient  $2q$  le nombre de côtés de la première sorte de  $P_0$ ,  $n$  celui des cycles fermés (il y en aura autant pour  $P'_0$ ),  $h$ , celui des cycles ouverts correspondant aux côtés sur  $Ox$ ; ils sont communs à  $P_0$  et  $P'_0$ , chaque point fixe parabolique compte pour *deux* dans le total, car il est formé par la réunion de deux points fixes elliptiques. Alors pour la surface fermée  $F$ , on aura :  $f = 2$ , car il y a deux polygones :

$$\begin{aligned}
 a &= 2q + h, & s &= 2n + h & (n \text{ de cycles}), \\
 \text{d'où} & & p &= q - n.
 \end{aligned}$$

Les genres ainsi définis sont *invariants dans les modifications permises*, car cela revient à remplacer un système de coupures rendant la surface  $F$  simplement connexe en un autre s'en déduisant par déformation continue.

**III. Groupes kleinéens.** — Le domaine fondamental est, en général, formé par plusieurs polygones distincts, chacun d'eux donnant lieu à une surface fermée; les genres sont indépendants les uns des autres, et d'ailleurs invariants, si l'on effectue sur chacun des polygones une modification permise; si le sous-groupe  $g$  attaché à un polygone  $P_0$  est entièrement défini par ce polygone, ce genre sera un attribut de ce groupe. Il en est ainsi notamment si le domaine fondamental de  $G$  comprend un seul polygone et si  $g$  coïncide avec  $G$ .

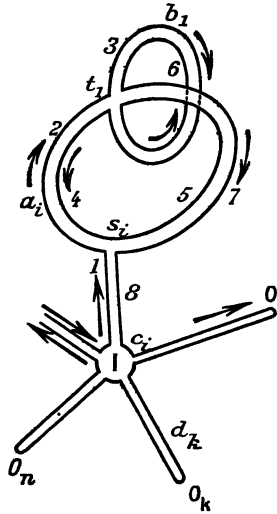
*Exemple.* — Dans le cas du groupe des fonctions elliptiques les quatre sommets du parallélogramme des périodes forment cycle, on a donc

$$q = 2, \quad n = 1, \quad \text{d'où} \quad p = 1.$$

**27. Système canonique de coupures. Polygones canoniques.** — Les *arêtes* de la surface  $F$ , c'est-à-dire les lignes obtenues par la réunion des côtés homologues de  $P_0$  forment un système de *coupures* ne morcelant pas la surface, mais la transformant en une surface à connexion simple ou multiple comme le polygone  $P_0$  d'où elle est issue. Les modifications permises de  $P_0$  changent le système de coupures, sans modifier le genre  $p$ . Comme  $N = 2p + 1$ ,  $2p$  coupures sont

nécessaires pour rendre la surface simplement connexe. Il y a intérêt à employer dans l'étude des surfaces de Riemann, un système de  $p$

Fig. 32.

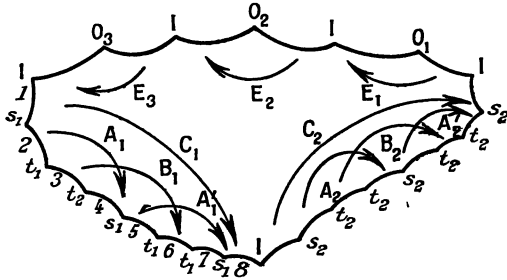


rétrosections formées de deux coupures comme celles de la figure 32 (où l'on a, pour plus de clarté, supposés légèrement écartés les bords du trait de ciseau). On suppose que les lignes correspondantes de la région  $\mathcal{R}$  ne passent par aucun point fixe de substitution. Soit, d'autre part, I un autre point, quelconque également. Soient  $O_1, O_2, \dots, O_n$  les points correspondant aux  $n$  sommets elliptiques ou paraboliques du polygone (dont chacun est supposé former cycle à lui seul). En joignant I par un système de coupures à  $O_1, O_2, \dots, O_n$  ainsi qu'à l'un des bords de chaque rétrosection, on obtient un système de coupures appelé *système canonique*, il y a en tout  $n + 3p$  coupures :  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ),  $d_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Le polygone qui en dérive, et qui est encore sans sommets hyperboliques ou loxodromiques, s'appelle *polygone* ou *domaine canonique*.

*Structure des polygones canoniques.* — A un système de coupures  $c_i, a_i, b_i$  répond une suite de huit côtés du polygone, deux à deux équivalents : leurs extrémités sont des points correspondant à I, à  $s_i$  et  $t_i$  (points de rencontre de  $c_i$  et  $a_i$  et de  $a_i$  et  $b_i$ ) et ces derniers sommets forment, par suite, deux cycles de trois et quatre

sommets respectivement (parce qu'il y a trois sommets réunis en  $s_i$  et quatre en  $t_i$ ); au point I répondent autant de sommets qu'il y a de coupures  $c_i$  et  $d_k$ , c'est-à-dire  $p + n$ , ils forment un seul cycle. A une coupure  $d_k$  correspondent deux côtés consécutifs partant de l'image du sommet elliptique ou parabolique correspondant. Il y a donc en tout  $2n + 8p$  côtés. En prenant pour fixer les idées  $p$  égal à 2 et  $n$  à 3, le

Fig. 33.



polygone  $P_0$  aura la configuration de la figure 33 (avec les notations correspondant à la figure).

**28. Substitutions génératrices.** — Les substitutions *génératrices*, sont d'une part les  $n$  substitutions elliptiques ou paraboliques  $E_1, \dots, E_n$  de points fixes  $O_1, O_2, \dots, O_n$  (correspondance des bords des coupures  $d_k$ ); ensuite les substitutions par lesquelles les huit bords de chaque triplet de coupures  $a_i, b_i, c_i$  se correspondent; soient  $A_i, A'_i, B_i, C_i$ , de sorte que dans ce cycle on a

$$(4) = (2) A_i, \quad (7) = (5) A'_i, \quad (6) = (3) B_i, \quad (8) = (1) C_i.$$

Il y a donc  $n + 4p$  substitutions génératrices.

Mais on peut toujours les réduire à  $n + 2p$ , savoir  $E_1, \dots, E_n; A_1, \dots, A_p; B_1, \dots, B_p$ , liées par  $n + 1$  relations. En effet, les  $A'_i$  et les  $C_i$  s'expriment à l'aide des  $A_i$  et  $B_i$ , comme on le voit par la considération des cycles de sommets  $s_i$  et  $t_i$  : le premier donne

$$A_i A'_i C_i^{-1} = 1, \quad \text{d'où} \quad C_i = A_i A'_i;$$

le second,

$$B_i A_i^{-1} B_i^{-1} A_i^{-1} = 1, \quad \text{d'où} \quad A'_i = B_i^{-1} A_i^{-1} B_i,$$

et, par suite,

$$C_i = A_i B_i^{-1} A_i^{-1} B_i.$$



De plus, chaque rotation elliptique  $E_h$  vérifie, si elle est d'ordre  $l_h$ , la relation

$$E_h^{l_h} = 1$$

(on convient d'écrire une telle relation même pour les rotations paraboliques en faisant  $l_h = \infty$ ).

Enfin le point I donne lieu à un cycle de  $n + p$  sommets fournissant la  $(n + 1)^{\text{ième}}$  relation

$$E_1 E_2 \dots E_n C_1 C_2 \dots C_p = 1.$$

Mais il peut se produire d'autres simplifications, si les deux bords d'une coupure ont pour images deux côtés *coïncidents* de  $P_0$  ou encore si deux sommets correspondant au point I viennent se confondre; dans ce cas  $P_0$  ne sera pas simplement connexe.

On peut encore simplifier en faisant coïncider tous les points  $s_i$ ,  $t_i$  avec le point I, ce qui réduit le nombre des côtés à  $2n + 4p$ .

**29. Signature d'un groupe fuchsien de la première classe.** —  $p$  étant le genre,  $n$  le nombre de cycles elliptiques ou paraboliques,  $l_1, l_2, \dots, l_n$  les exposants des substitutions, Fricke appelle *signature du groupe* le symbole  $(p, n; l_1, l_2, \dots, l_n)$ . On démontre qu'il existe toujours des groupes fuchiens de signature donnée, sauf dans les cas ci-après :

$$\begin{aligned} p = 0, & \quad n = 1 \text{ ou } 2, \\ p \neq 0, & \quad n = 3, \quad \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \geq 1, \\ p = 0, & \quad n = 4, \quad l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 2, \\ p = 1, & \quad n = 0. \end{aligned}$$

---

#### BIBLIOGRAPHIE.

---

- FATOU. — Fonctions fuchiennes (tome II de la *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, par Appell et Goursat. Paris, Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>, 1931).  
 FRICKE et KLEIN. — *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modul functionen* (Leipzig, 1890-1892).

- FRICKE et KLEIN. — *Vorlesungen über die Theorie der Automorphen Functionen* (Erste Band : Die gruppentheoretischen Grundlagen (Leipzig, 1897).
- HADAMARD. — *Leçons de Géométrie élémentaire* (Paris, Armand Colin, 1901).
- HURWITZ. — Ueber die Entwicklung complexer Grössen in Kettenbrüche (*Acta mathematica*, t. 11, 1888).
- F. KLEIN. — *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünftes Grades* (Leipzig, Teubner, 1884).
- E. PICARD. — Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés d'un même côté d'un plan (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 12, 1883-1884).
- E. PICARD. — Mémoire sur les formes quadratiques binaires indéfinies à indéterminées conjuguées (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. 1, 1884).
- H. POINCARÉ. — Théorie des groupes fuchsien (*Acta mathematica*, t. 1, 1882).
- H. POINCARÉ. — Mémoire sur les groupes kleinéens (*Acta mathematica*, t. 3, 1883).



---

## TABLE DES MATIÈRES.

---

	Pages
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I. — <i>Domaines fondamentaux des groupes fuchsien</i> s.....	3
CHAPITRE II. — <i>Domaines fondamentaux des groupes automorphes</i> .....	35
CHAPITRE III. — <i>Le genre des domaines. Domaines canoniques. Classification des groupes fuchsien</i> s et kleinéens.. . . . .	57
BIBLIOGRAPHIE.. . . . .	62