MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

LUCIEN GODEAUX

Les transformations birationnelles de l'espace

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 67 (1934)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1934__67__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathematiques pures et appliquées ».

FASCICULE LXVII

Les Transformations birationnelles de l'espace

Par M. Lucien GODEAUX
Professeur à l'Université de Liége
Correspondant de l'Académie royale de Belgique.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1934

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LES

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES
DE L'ESPACE

Par M. Lucien GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége,
Correspondant de l'Académie royale de Belgique.

Nous avons exposé, dans le fascicule XXII du *Mémorial des Sciences Mathématiques*, l'état actuel de la théorie des transformations birationnelles du plan; nous poursuivons actuellement le même but en ce qui concerne les transformations birationnelles de l'espace. Le plan de ce nouveau fascicule est, dans ses grandes lignes, le même que celui du premier : propriétés des transformations birationnelles; points singuliers; géométrie algébrique; groupes continus.

Après avoir indiqué les propriétés des systèmes linéaires de surfaces algébriques qui nous sont nécessaires, nous définissons les transformations birationnelles et étudions les éléments fondamentaux; nous exposons notamment les résultats récents de Montesano. Nous passons ensuite à l'étude des points singuliers des surfaces algébriques et à la décomposition des singularités au moyen de transformations birationnelles. Nous définissons dans le Chapitre suivant la géométrie algébrique de l'espace et rendons compte des résultats obtenus dans ce domaine. Nous terminons par l'exposé des travaux fondamentaux d'Enriques et Fano sur les groupes continus finis de transformations birationnelles.

Les transformations birationnelles de l'espace furent étudiées par Cremona, Cayley, Noether, etc. dès que le premier de ces géomètres eut créé les transformations birationnelles du plan. Il s'en faut cependant que leur étude ait atteint le même degré d'avancement que celle de ces dernières. Alors que la théorie des transformations birationnelles du plan peut être considérée comme terminée, en ce sens que chacune de ces transformations est le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques, les résultats généraux manquent dans la theorie correspondante de l'espace. On s'est borné au fond à étudier des correspondances birationnelles particulieres, sans parvenir à dégager, à de rares exceptions près, des propriétés générales communes à toutes ces transformations. Il y a donc là un vaste champ de recherches qui, bien que fort négligé dans ces dernières années, semble cependant mériter l'attention des géomètres. Les questions qui se présentent sont d'ailleurs difficiles et sans doute du même ordre que celles que l'on rencontre dans l'étude des variétés algébriques à trois dimensions, dont la théorie progresse si lentement.

Liége, le 14 mai 1933.

CHAPITRE I.

SYSTÈMES LINÉAIRES DE SURFACES.

1. Systèmes algébriques. — L'équation d'une surface algébrique F, d'ordre m, en coordonnées projectives homogènes, dépend de $N+1=\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)$ coefficients homogènes. Une condition imposée aux surfaces algébriques d'ordre m, qui se traduit par k relations algébriques indépendantes entre ses coefficients, est appelée *condition algébrique* de dimension k.

L'ensemble des surfaces algébriques F d'ordre m, satisfaisant à des conditions algébriques déterminées se traduisant par $N-r$ relations indépendantes entre les coefficients de la surface générale, constitue un *système algébrique* $\{F\}$ de *dimension* r. Par r points de l'espace il passe en général un nombre fini ν de surfaces de ce système ; le nombre ν est appelé *indice* du système.

Si l'on interprète les coefficients de l'équation de F comme coordonnées projectives homogènes des points d'un espace linéaire S_N à N dimensions, aux surfaces du système $\{F\}$ correspondront les points d'une variété algébrique V_r, à r dimensions, de S_N. Le système $\{F\}$ sera dit *réductible* ou *irréductible* suivant que la variété V_r est réductible ou irréductible. Un système algébrique $\{F\}$ peut donc être réductible en parties de dimensions différentes ($\leq r$), l'un au moins des systèmes partiels ayant la dimension r. Si un système $\{F\}$ est irréductible, les $N+1$ coefficients homogènes de l'équation de la surface F génératrice du système sont proportionnels à des fonctions rationnelles, entières et homogènes de $r+2$ paramètres $y_0, y_1, \ldots, y_{r+1}$ liés par une relation

$$f(y_0, y_1, \ldots, y_{r+1}) = 0,$$

où f est un polynome homogène irréductible.

2. Systèmes linéaires. — Un système algébrique $\{F\}$ d'indice $\nu = 1$ est appelé *système linéaire* et est représenté par $|F|$. Les systèmes linéaires de dimensions $r = 1, 2$ sont respectivement appelés faisceaux et réseaux.

Étant donné un système linéaire $|F|$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Il ne se compose pas de parties de dimensions différentes et est par suite irréductible ;

2° La surface générale du système ne contient pas de partie multiple; il est toujours possible de trouver, et d'une infinité de manières, $r+1$ surfaces $F_0, F_1, \ldots, F_r$, d'équations

$$F_0(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad F_1 = 0, \; \ldots, \; F_r = 0,$$

telles que toute surface du système soit représentée par l'équation

$$\lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_r F_r = 0,$$

cette relation n'étant vérifiée identiquement pour aucun système de valeurs non toutes nulles des λ. Les surfaces $F_0, F_1, \ldots, F_r$ sont linéairement indépendantes.

Si on laissait tomber la seconde condition, la surface générale du système pourrait s'écrire sous la forme

$$(\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r)^h = 0.$$

3. Base d'un système linéaire. — Un point commun à toutes les surfaces d'un système linéaire $|F|$ est appelé point-base de ce système. Les points-base du système $|F|$ peuvent être en nombre fini ou infini.

S'il existe ∞^2 points-base, ils forment une surface algébrique qui fait partie de toutes les surfaces du systeme $|F|$. Écartons ce cas; les points-base de $|F|$ se distribuent en points d'une ou plusieurs courbes appelées courbes-base et en points-base isolés. L'ensemble des courbes-base et des points-base isolés constitue la base du système.

Soit $|F|$ un systeme linéaire de surfaces d'ordre m de base g. S'il n'existe aucune surface d'ordre m se comportant comme les surfaces F en tout point de la base g et n'appartenant pas à $|F|$, ce sytème est dit *complet* par rapport à la base g.

4. **Points multiples des surfaces d'un systeme linéaire.** — La surface genérale d'un systeme linéaire

$$\lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_r F_r = 0$$

ne peut avoir de points multiples variables en dehors de la base. D'une manière précise, Bertini [15, I] a démontré que *si la surface générale d'un système linéaire possède un point multiple variable d'ordre s, le lieu de ce point est une courbe-base multiple d'ordre $s-1$ pour les surfaces du système.*

5. **Systèmes linéaires composés.** — Soit $|F|$ un systeme linéaire de surfaces d'ordre m, dépourvu de composante fixe, c'est-à-dire dépourvu d'une surface fixe commune à toutes les surfaces du système. Quatre cas peuvent se présenter :

1° Les surfaces F passant par un point arbitraire ont en commun ∞^2 points formant, nécessairement, une surface algébrique Φ. La surface Φ varie dans un faisceau et chaque surface F se compose d'un certain nombre de surfaces Φ. Si le faisceau $|\Phi|$ est représenté par l'équation

$$\mu_0 \varphi_0 + \mu_1 \varphi_1 = 0,$$

le système $|F|$ est représente par une équation de la forme

$$\lambda_0 f_0(\varphi_0, \varphi_1) + \lambda_1 f_1(\varphi_0, \varphi_1) + \ldots + \lambda_r f_r(\varphi_0, \varphi_1) = 0.$$

les f étant les formes binaires. Le systeme $|F|$ est composé au moyen du faisceau $|\Phi|$.

2° Les surfaces F passant par un point arbitraire ont en commun ∞^1 points (en dehors de la base) formant nécessairement une courbe algébrique C. Il existe ∞^2 courbes C formant une congruence linéaire (d'indice un) et toute surface F contient ∞^1 courbes C. Si les courbes C sont représentées par

$$\frac{\varphi_0}{\mu_0} = \frac{\varphi_1}{\mu_1} = \frac{\varphi_2}{\mu_2},$$

l'equation de $|F|$ peut se mettre sous la forme

$$\lambda_0 f_0(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) + \lambda_1 f_1(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) + \ldots + \lambda_r f_r(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

les f étant des formes ternaires. Le système $|F|$ est composé au moyen de la congruence des courbes C.

3° Les surfaces F passant par un point arbitraire passent en conséquence par un certain nombre fini de points, en dehors des points-base. Ce cas ne peut se présenter que si $r \geq 3$. Il existe ∞^3 groupes de points tels qu'un point de l'espace n'appartient en général qu'à un seul de ces groupes. Ces groupes forment ce que l'on appelle une involution ; chaque surface F contient ∞^2 groupes de l'involution et le système $|F|$ est composé au moyen de l'involution.

4° Les surfaces F passant par un point arbitraire de l'espace n'ont en commun aucun autre point en dehors de la base. C'est le cas général et il ne peut se présenter que si $r > 3$. Le système $|F|$ est dit simple.

Bertini [15, I] a démontré que *si la surface générale d'un système linéaire est réductible, le système admet une composante fixe ou est composé au moyen d'un faisceau* (les deux cas pouvant d'ailleurs se présenter simultanément).

Un système linéaire dont la surface générale est irréductible est dit irréductible. Cette dénomination peut prêter à confusion, mais on conviendra de ne considérer que des systèmes linéaires ne comprenant pas, comme partie, un système linéaire de dimension moindre (*cf.* n° 2).

6. **Caracteres d'un système linéaire.** — A côté de la dimension d'un système linéaire $|F|$, s'introduisent d'autres caractères :

1° Le degré ; nombre de points communs à trois surfaces du système n'appartenant pas a un même faisceau, en dehors de la base.

Les systèmes composés au moyen d'un faisceau ou d'une congruence sont de degré zéro. Bertini [17, I] a démontré que cette propriété est caractéristique.

2° Le genre curviligne : genre de la courbe intersection de deux surfaces du système, en dehors de la base.

3° Les genres superficiels : genres arithmétique, géométrique, linéaire et plurigenres de la surface générale du système.

7. Systèmes lineaires réguliers et surabondants. — Considérons un systeme linéaire $|F|$ de surfaces d'ordre m, complet, ayant une base déterminée g. Castelnuovo [31] a démontre qu'il existe un entier positif l tel que, pour $m > l$, la dimension r de $|F|$ est donnée par la formule

$$(1) \qquad r = \binom{m+3}{3} - 1 - km + k',$$

k et k' étant des constantes qui ne dépendent que de la base g et des singularités des surfaces F aux points de g, mais nullement de l'ordre $m > l$ de ces surfaces (k ne depend que des courbes-base, k' dépend des courbes-base et des points-base isolés). Si l'on applique la formule précédente pour une valeur quelconque de m, on trouve un nombre ρ qui peut être inférieur a la dimension effective du systeme $|F|$. On est donc conduit a considérer la *dimension effective* r d'un systeme $|F|$ et sa *dimension virtuelle* ρ ($\leq r$). La quantité $r - \rho$ est appelée *surabondance* du systeme ; celui-ci est dit *régulier* si sa surabondance est nulle, *surabondant* dans le cas opposé.

Le théoreme de Castelnuovo affirme simplement que pour m suffisamment grand, le système $|F|$ est régulier. L'étude des systemes surabondants de surfaces n'a pas encore été faite ; il conviendrait notamment de rechercher la valeur limite l. Au sujet de ces questions, on pourra consulter, outre le Mémoire de Castelnuovo, le Traité de Picard et Simart (VII), un travail de Légaut [118] et une note récente de B. Segre [173].

8. Courbes et surfaces fondamentales d'un système linéaire. — On appelle *courbe fondamentale* d'un systeme linéaire $|F|$ toute courbe qui n'est pas rencontrée, en dehors de la base, par la surface générale du systeme. Il en résulte que les ∞^{r-1} surfaces F passant par un point d'une courbe fondamentale choisi en dehors des points-base, contiennent cette courbe.

Les courbes fondamentales d'un système $|F|$ peuvent être isolées ou engendrer des surfaces.

On appelle *surface fondamentale* d'un système linéaire $|F|$ une surface qui n'est pas rencontrée, en dehors de la base, par la surface générale du système. Il en résulte qu'une surface fondamentale fait partie de ∞^{r-1} surfaces du système $|F|$.

On donne également le nom de surface fondamentale à une surface lieu de ∞^1 courbes fondamentales, mais les proprietés d'une telle surface sont distinctes de celles de la surface fondamentale définie plus haut et que nous appellerons surface fondamentale proprement dite.

9. **Système jacobien.** — Soit $|F|$ un système linéaire de dimension $r \geqq 3$, de surface F d'ordre m, qui ne soit pas composé au moyen d'un faisceau ou d'une congruence. Désignons par F_J la jacobienne, d'ordre $4(m-1)$, d'un système linéaire ∞^3 tiré de $|F|$. Les différentes jacobiennes F_J appartiennent à un système linéaire $|F_J|$ appelé *jacobien* du système $|F|$.

La base du système $|F_J|$ comprend celle du système $|F|$, car en un point-base de $|F|$, multiple d'ordre s pour les surfaces F, les jacobiennes F_J ont une multiplicité au moins égale à $4s-2$.

Une courbe fondamentale de $|F|$ appartient aux jacobiennes F_J, car la jacobienne d'un système linéaire ∞^3 est également le lieu des points tels que les ∞^2 surfaces passant par un de ces points ont une tangente commune.

Si le système $|F|$ possède une surface fondamentale proprement dite Φ, tout système linéaire ∞^3 tiré de $|F|$ possède Φ comme surface fondamentale et cette surface fait partie comme surface double de la jacobienne, ou ce système possède Φ comme composante fixe et cette surface fait partie de la jacobienne comme surface quadruple. Il en résulte qu'une surface fondamentale est une composante fixe du système jacobien $|F_J|$ et que, s'il s'agit d'une surface fondamentale proprement dite, elle doit être comptée deux fois comme composante fixe.

10. **Systèmes homaloïdaux.** — On appelle système linéaire homaloïdal un système linéaire de degré un. Il résulte de cette définition qu'un tel système a la dimension trois et est simple. Les surfaces d'un système linéaire homaloïdal $|F|$ sont rationnelles et les intersections variables de deux surfaces F sont des courbes rationnelles.

Les surfaces d'un système homaloïdal $|F|$ passant par un point de la jacobienne F_J de ce système ont en ce point une tangente commune. Cette circonstance ne peut se présenter que si les surfaces en question ont une courbe ou une surface en commun, passant par ce point. Il en résulte que la jacobienne d'un système homaloïdal est formée des surfaces fondamentales de ce système, les surfaces fondamentales proprement dites étant comptées deux fois.

CHAPITRE II.

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES.

11. Transformations rationnelles. — Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées projectives homogènes d'un point x d'un espace Σ ; x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 celles d'un point x' d'un espace Σ'. Considérons les équations

$$(1) \qquad x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) : f_2 : f_3 : f_4,$$

f_1, f_2, f_3, f_4 étant des formes de degré $n > 0$, sans facteur commun. A un point x de Σ, les équations (1) font correspondre un point x' de Σ', variable avec le point x.

Si le système linéaire $|F|$ formé par les surfaces

$$(2) \qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0,$$

est composé au moyen d'un faisceau $|\Phi|$, lorsque le point x décrit une surface Φ, le point x' reste fixe. Les points de Σ' correspondant aux points de Σ forment donc une courbe.

Si le système $|F|$ est composé au moyen d'une congruence, les points de Σ' correspondant aux points de Σ forment une surface.

Nous supposerons que ces deux cas ne se présentent pas, il sera alors toujours possible de choisir le point x de manière à obtenir, par les formules (1), un point x' arbitrairement choisi. Il y a en effet une projectivité entre les surfaces (2) et les plans

$$\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3 + \lambda_4 x'_4 = 0$$

de Σ'. Aux plans de Σ' passant par un point x' correspondent les surfaces F d'un réseau et le point x' est l'homologue de chacun des points-base de ce réseau qui n'appartient pas à la base de $|F|$.

Si m est le degré du système $|F|$, les formules (1) définissent donc, sous les hypothèses faites, une correspondance rationnelle $(m, 1)$ entre les points de Σ, Σ'.

12. Éléments fondamentaux. — Soit O un point-base du système $|F|$. Considérons une droite p passant par O sans y toucher toutes les surfaces F et soit P un point de p, distinct de O. Les surfaces F passant par P forment un réseau ; à ce réseau correspond dans Σ' une gerbe de plans dont le sommet P' est bien déterminé. Faisons tendre P vers O sur la droite p : deux cas peuvent se présenter :

1° La surface F a, au point O, un cône tangent variable avec la surface. Alors, le réseau des surfaces F passant par P a pour limite le réseau des surfaces F tangentes à p en O. Le point P' a pour limite un point O' bien déterminé, sommet de la gerbe de plans de Σ' homologue de ce dernier reseau. Lorsque la droite p décrit la gerbe de sommet O, le point O' décrit une courbe ou une surface, appelée courbe ou surface *fondamentale* associée au point O.

2° Les surfaces F ont en O un cône tangent fixe. Si s est la multiplicité de O pour les surfaces F, le réseau des surfaces F passant par P a pour limite le réseau des surfaces F ayant la multiplicité $s+1$ en O. A ce réseau correspond dans Σ' une gerbe de sommet O' bien déterminé, limite du point P'. Lorsque la droite p varie dans la gerbe de sommet O, le point O' reste fixe. Les points O, O' sont des points *fondamentaux* associés.

13. Transformations birationnelles. — Supposons le système $|F|$ homaloïdal $(m = 1)$. Nous obtenons ainsi entre Σ, Σ' une correspondance birationnelle, c'est-à-dire rationnelle dans les deux sens. On dit aussi correspondance crémonienne, du nom du fondateur de la théorie, Cremona.

Une transformation birationnelle est donc obtenue en rapportant projectivement les plans d'un espace Σ' aux surfaces d'un système homaloïdal $|F|$ de Σ. Actuellement, les équations (1), résolues par rapport aux x, donnent

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = f_1(x_1, x_2, x'_3, x_4) : f'_2 , f'_3 : f'_4, \tag{3}$$

les fonctions f'_1, f'_2, f'_3, f'_4 étant des formes de degré $n' > 1$, sans facteur commun. Les surfaces F', d'équation

$$\lambda'_1 f'_1 + \lambda'_2 f'_2 + \lambda'_3 f'_3 + \lambda'_4 f'_4 = 0$$

forment un système homaloïdal $|F'|$, rapporté projectivement aux plans de Σ.

Soient ϖ'_1, ϖ'_2 deux plans de Σ', F_1, F_2 les surfaces correspondantes de $|F|$. Aux points de la droite $\varpi'_1 \varpi'_2$ correspondent les points de la courbe C commune aux surfaces F_1, F_2, en dehors de la base de $|F|$. Une surface F' coupe la droite $\varpi'_1 \varpi'_2$ en n' points, donc le plan correspondant dans Σ coupe C en n' points et à une droite de Σ' correspond donc dans Σ une courbe d'ordre n'. De même, à une droite de Σ correspond, dans Σ', une courbe C' d'ordre n.

Les nombres n, n' sont les indices de la transformation birationnelle et celle-ci peut être représentée par le symbole $\Theta_{n,n'}$.

La plus simple des transformations birationnelles est l'homographie ; elle est dépourvue de points fondamentaux et cette propriété est caractéristique.

14. Courbes fondamentales. — Les points d'une courbe-base du système $|F|$ sont fondamentaux pour la transformation birationnelle Θ et la courbe est appelée fondamentale pour la transformation.

Soient Γ une courbe-base de $|F|$, s sa multiplicité pour les surfaces F. Supposons que les plans tangents aux surfaces F en un point de Γ ne soient pas tous fixes. Considérons un point O de Γ, ordinaire, et soient t la tangente à Γ en O, τ un plan passant par t qui ne soit pas tangent en O à toutes les surfaces de $|F|$. Les surfaces F tangentes en O au plan τ forment un réseau auquel correspond dans Σ' une gerbe de sommet O'. Ce point est l'homologue, dans Θ, des points du plan τ, infiniment voisins de O. Lorsque le plan τ tourne autour de t, le point O' varie nécessairement et décrit une courbe Γ', courbe fondamentale associée à O. Mais lorsque le point O décrit la courbe Γ, la courbe Γ' peut varier et engendrer une surface fondamentale associée à Γ, ou bien elle peut rester fixe. Dans le premier cas, on dit que Γ est une courbe fondamentale de première espèce, dans le second cas, qu'elle est de seconde espèce.

Envisageons maintenant le cas où les plans tangents aux surfaces F en un point de Γ sont fixes. Il existe alors, comme nous l'avons vu, un réseau de surfaces F ayant la multiplicité $s+1$ en un point O de Γ et a ce point est associé un point fondamental O'. Le point O' correspond aux points de Σ infiniment voisins de O. Lorsque le point O décrit Γ, le point O' peut varier et décrire une courbe fondamentale associée à Γ, ou bien rester fixe. Ces circonstances n'ont pas été étudiées.

Supposons que les surfaces F aient un plan tangent fixe τ_0 en O, les autres plans tangents aux surfaces F en ce point étant fixes ou variables. Fixons l'attention sur une surface F générale, soit F_0, et coupons par un plan ϖ passant par O mais non par t. Une branche φ de la courbe (F_0, ϖ), d'origine O, tangente a τ_0 en ce point, a un contact d'un certain ordre h avec les surfaces F. Les surfaces F ayant en O un contact d'ordre $h+1$ avec la branche φ forment un réseau auquel correspond, dans Σ', une gerbe de sommet O'_0. Le lieu du point O'_0, lorsque le plan ϖ, la surface F_0 et enfin le point O varient, donnera un élément fondamental de la transformation Θ. Les recherches effectuées sur cette question par Godeaux [90] dans des cas particuliers assez étendus en montre l'extrême complexité.

Nous dirons qu'une courbe fondamentale Γ est ordinaire lorsque les surfaces F n'ont aucun plan tangent fixe en un point général de cette courbe.

15. Courbes fondamentales ordinaires de première espèce. — Supposons que la courbe Γ, d'ordre ν, multiple d'ordre s pour les surfaces F, soit fondamentale ordinaire de premiere espece. A chaque point O de Γ est associée dans Σ' une courbe fondamentale Γ' qui, lorsque O décrit Γ, engendre une surface fondamentale Φ'. Sur cette surface, les courbes Γ' forment un faisceau et ces courbes sont rationnelles. La surface Φ' est donc birationnellement équivalente à une surface réglée dont le genre est celui de la courbe Γ.

Les surfaces F' coupent la surface Φ', en dehors de la base de $|F'|$, suivant ν courbes Γ'. Les surfaces F' passant par un point de Φ' distinct des points-base de $|F'|$, contiennent la courbe Γ' passant par ce point et correspondent aux plans de Σ passant par le point O de Γ homologue de cette courbe Γ'.

A une droite passant par un point O de Γ correspond dans Σ' une courbe C' formée de la courbe Γ' associée à O et d'une courbe C'_1, variable avec la droite, d'ordre $n-s$; les courbes Γ' sont donc d'ordre s.

Si ν' est l'ordre de la surface Φ', les courbes C s'appuient en ν' points variables sur la courbe Γ.

16. **Courbes fondamentales ordinaires de seconde espèce.** — Supposons maintenant que la courbe Γ', associée au point O de Γ, reste fixe lorsque O décrit Γ.

Aux plans de Σ' passant par un point O′ de Γ' correspondent, dans Σ, des surfaces F, formant un réseau, ayant en chaque point O de Γ un certain nombre λ ($\geqq 1$) de plans tangents fixes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\lambda$. Lorsque le point O′ décrit la courbe Γ', le groupe des λ plans tangents fixes en chaque point de Γ engendre une involution g_λ^1 d'ordre λ et de dimension un, dans le faisceau des plans tangents à Γ au point considéré. Il en résulte que la courbe Γ' est rationnelle. De plus, si ν' est l'ordre de la courbe Γ', on a $\lambda\nu' = s$.

Considérons une droite p' passant par un point O′ de Γ'. Aux plans passant par p', correspondent, dans Σ, des surfaces F formant un faisceau et se raccordant suivant λ nappes le long de Γ. En d'autres termes, ces surfaces ont en commun λ courbes simples, infiniment voisines de Γ et, en dehors de la base de $|F|$, elles se rencontrent suivant une courbe C_1 d'ordre $n' - \lambda\nu$ qui, avec les λ courbes infiniment voisines de Γ considérées, forment une courbe C. Par suite, la courbe Γ' est multiple d'ordre $\lambda\nu = s'$ pour les surfaces F′ : elle appartient à la base de $|F'|$.

Les surfaces F rencontrent la courbe C_1 en un point variable, mais celles qui correspondent aux plans passant par O′ ne peuvent plus rencontrer cette courbe C_1. La courbe C_1 doit donc s'appuyer sur Γ en un certain point O et les surfaces F homologues des plans passant par O′ doivent toucher C_1 en ce point O. Dans la correspondance birationnelle entre la droite p' et la courbe C_1, les points O′, O sont homologues. Aux surfaces F′ touchant en O′ le plan τ' tangent à Γ' et contenant p', correspondent dans Σ les plans passant par O. On en conclut que la courbe Γ' est fondamentale ordinaire de seconde espèce pour Θ. On peut alors, en partant de Γ', répéter le raisonnement fait plus haut en partant de Γ. On supposera qu'aux plans de Σ passant par un point O de Γ correspondent dans Σ' des surfaces F′ ayant, en chaque point de Γ', λ' plans tangents fixes. On aura donc $\lambda'\nu = s'$, d'où $\lambda = \lambda'$.

Les courbes C (ou C') ne peuvent s'appuyer sur la courbe Γ (ou Γ') qu'en un certain nombre de points fixes.

Les courbes fondamentales ordinaires ont été étudiées par Cremona [**42**, **44**]; cependant, Cremona n'avait considéré les courbes de seconde espece que dans le cas $\lambda = 1$. C'est Montesano [**146**] qui a fait observer que l'on pouvait avoir $\lambda > 1$.

17. Points fondamentaux isolés. — Un point fondamental sera dit isolé lorsqu'il n'appartient à aucune courbe fondamentale ou que, appartenant a une ou plusieurs courbes fondamentales, il présente, pour les surfaces F, une singularité différente de celle présentée par un point général de cette ou de ces courbes fondamentales.

Une première classification des points fondamentaux isolés peut être faite en se basant sur la nature du système des cônes tangents aux surfaces F en ce point. Quatre cas peuvent se présenter :

1° Ces cônes forment un système linéaire ∞ , présentant éventuellement une composante fixe, les parties variables des cônes étant irréductibles;

2° Ces cônes forment un reseau ayant éventuellement une composante fixe, les parties variables étant irréductibles;

3° Ces cônes ont une composante fixe et les parties variables sont composées au moyen des cônes d'un faisceau;

4° Les surfaces F ont, au point considéré, un cône tangent fixe.

Nous dirons que le point O est fondamental ordinaire lorsque le premier cas se présente et qu'il n'existe aucun cône fixe tangent à toutes les surfaces F en ce point. Plaçons-nous dans ce cas. Les surfaces F tangentes en O à une droite p forment un réseau auquel correspond dans Σ' une gerbe de sommet O'. Le point O' correspond au point infiniment voisin de O sur la droite p. Lorsque p varie dans la gerbe de centre O, le point O' varie et décrit une surface rationnelle Δ', surface fondamentale associée à O. A un plan passant par O correspond, dans Σ', une surface F' formee de la surface Δ' et d'une surface F_1, variable avec le plan considéré. Si s est la multiplicité du point O pour les surfaces F_1 à une droite passant par O correspond dans Σ' une courbe C'_1, d'ordre $n - s$, partie variable de l'intersection de deux surfaces F'_1. Une courbe C'_1 rencontre la surface Δ' en un seul point en dehors de la base du système $|F'|$. Une surface F' passant par un point de Δ' en dehors de la base de $|F'|$ est l'homologue d'un plan passant par O et comprend donc Δ' comme partie. La surface Δ' est donc une surface fondamentale proprement dite du système $|F'|$ et elle intervient deux fois dans la jacobienne du systeme $|F'|$.

L'ordre de la surface Δ' est egal à la multiplicité du point O pour les courbes C.

Nous ne poursuivrons pas l'étude des points fondamentaux non ordinaires, elle présente d'ailleurs de réelles difficultés. Un certain nombre de cas ont été l'objet de recherches intéressantes de Burniat [23].

18. **Exemples de transformations birationnelles.** — Les transformations birationnelles de l'espace ont été étudiées en premier lieu par Cremona [42, 44], Cayley [32] et Nœther [155], qui ont considéré de nombreux exemples.

Si l'on part d'un système homaloïdal de quadriques ($n=2$), les cas suivants peuvent se présenter :

1° Quadriques passant par un point et par une conique. On a $n'=2$. Ces transformations jouent un rôle important dans l'étude des points singuliers des surfaces algébriques et nous les considérerons plus loin;

2° Quadriques passant par une droite et par trois points. On a $n'=3$ et les surfaces F' sont les surfaces cubiques ayant une droite double fixe et trois droites simples fixes s'appuyant sur la droite double;

3° Quadriques passant par quatre points et ayant même plan tangent en un de ces points. On a $n'=4$ et les surfaces F', d'ordre 4, passent doublement par les arêtes d'un triedre et simplement par une conique s'appuyant sur les trois droites doubles.

Bornons-nous à signaler un quatrieme exemple. Si l'on considère entre Σ, Σ' trois réciprocités n'appartenant pas a un même faisceau, les couples de points conjugués par rapport a ces trois réciprocités se correspondent dans une transformation birationnelle d'indices 3,3. Dans chacun des espaces, le systeme homaloïdal est formé des surfaces cubiques passant par une sextique de genre 3.

19. **Procédés de détermination des transformations birationnelles.** — Plusieurs méthodes permettant de déterminer les transformations

birationnelles ont été proposées; nous en indiquerons deux, une troisieme sera indiquée plus loin.

Cremona [42, 44] ramene la question à la détermination des réseaux homaloidaux de courbes planes. Reprenons le système homaloidal $|F|$, formé de surfaces d'ordre n et soit F_0 une de ses surfaces. La surface F_0 étant rationnelle, admet une représentation point par point sur un plan ϖ; supposons connue cette représentation. Aux sections planes de F_0 correspondent, sur ϖ, des courbes L d'un certain ordre l, formant un système linéaire, ∞^3, $|L|$. Les surfaces d'ordre n découpent sur F_0 des courbes d'ordre n^2 représentées sur le plan ϖ par les courbes du système $|nL|$. Les surfaces F découpent, sur F_0, en dehors de la base de $|F|$, un réseau de courbes de degré un; a ce réseau correspond, sur ϖ, un réseau homaloidal $|K|$. A la base du systeme $|F|$ correspond sur ϖ une courbe ou un ensemble de courbes D (et éventuellement quelques points fixes, communs à toutes les courbes K). Les courbes $K + D$ doivent appartenir au système $|nL|$. Cela étant, on choisira sur ϖ un réseau homaloidal $|K|$, formé de courbes d'ordre $m \leq l$ et l'on déterminera la courbe $D = |nL - K|$. Il restera alors a déduire de D la base du système $|F|$. On conçoit que ce procédé, d'application facile pour les petites valeurs de $n (n = 2, 3)$, se complique tres rapidement.

Un second procédé fait intervenir les hyperespaces. Considérons, dans un espace linéaire S_r a r dimensions, deux espaces à trois dimensions Σ, Σ'. Supposons que l'on connaisse, dans S_r, un système $\infty^{3(r-3)}$ d'espaces linéaires σ, à $r - 3$ dimensions, tel que par un point de S_r ne passe en général qu'un seul espace σ. Par un point de Σ passe un espace σ qui coupe Σ' en un point, et inversement. On obtient donc une transformation birationnelle entre Σ et Σ'. On conçoit que ce procédé, qui a été utilisé par Carrone [29] et Perazzo [165], est d'une application assez limitée.

20. Transformations de Jonquières. — Les transformations birationnelles du plan qui conservent un faisceau de rayons ont été considerées par de Jonquieres et portent son nom; elles jouent un rôle dans la théorie des groupes continus de transformations. Il en est de même de certaines transformations de l'espace généralisant les précédentes.

On appelle transformation de Jonquières de l'espace une transformation birationnelle qui conserve soit un faisceau de plans, soit une congruence linéaire de droites.

Soient a une droite de Σ, a' une droite de Σ', Θ une transformation birationnelle d'indices n, n' faisant correspondre à un plan α passant par a, un plan α' passant par a'. Les faisceaux de plans d'axes a, a' sont projectifs. A la droite a est associée une surface fondamentale d'ordre $n'-1$ et a la droite a', une surface fondamentale d'ordre $n-1$. Deux plans homologues α, α' sont liés par une correspondance birationnelle, les systèmes homaloïdaux de cette transformation étant découpés sur ces plans par les surfaces F, F'.

Soient maintenant $\mathcal{G}$ une congruence linéaire de Σ et $\mathcal{G}'$ une congruence linéaire de Σ'; θ une transformation birationnelle faisant correspondre à une droite de $\mathcal{G}$, une droite de $\mathcal{G}'$. Les surfaces F doivent rencontrer les droites de $\mathcal{G}$ en un seul point en dehors des lignes singulieres de cette congruence et les surfaces F' se comportent de même vis-à-vis de $\mathcal{G}'$. Entre les droites de $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, θ détermine une correspondance birationnelle T dont les propriétés sont analogues a celles des correspondances birationnelles entre deux plans et s'en déduisent facilement.

Lorsque les congruences $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ sont des gerbes de rayons de sommets A, A', les surfaces F, d'ordre n, ont la multiplicité $n-1$ en A et les surfaces F', d'ordre n', la multiplicité $n'-1$ en A'; ces surfaces sont donc des monoïdes et la transformation de Jonquieres obtenue porte le nom de transformation monoïdale. De telles transformations ont été étudiées par De Paolis [51].

Des transformations de Jonquieres pour lesquelles les congruences $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ ont une ou deux courbes singulières (système des cordes d'une cubique gauche, systeme des droites s'appuyant sur une droite et sur une courbe d'ordre m rencontrant la droite en $m-1$ points) ont été étudiées par Godeaux [88].

21. Transformations birationnelles régulières. — Une transformation birationnelle est dite régulière lorsque ses points fondamentaux, ses courbes fondamentales de première et de seconde espèce, dans les deux espaces, sont tous ordinaires. L'étude des transformations régulières a été poussée assez loin et nous allons résumer les résultats obtenus.

Considérons, entre les espaces Σ, Σ', une transformation birationnelle régulière Θ d'indices n, n'; soient $|F|$, $|F'|$ les systèmes homaloïdaux, C, C' les transformées des droites. Nous supposerons que Θ possède, dans Σ, h points fondamentaux $O_1, O_2, \ldots, O_h$ auxquels sont associées, dans Σ', les surfaces fondamentales (proprement dites) $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_h$; k courbes fondamentales de première espèce γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ auxquelles sont associées, dans Σ', les surfaces fondamentales $\Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_k$; l courbes fondamentales de seconde espèce δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_l$ ayant pour associées, dans Σ', les courbes fondamentales de seconde espèce $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_l$. De même, dans Σ', on supposera qu'il existe h' points fondamentaux $O_1, O_2, \ldots, O_{h'}$ et k' courbes fondamentales de première espèce $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{k'}$ et l'on désignera par $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{h'}, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k'}$ les surfaces fondamentales associées de Σ.

22. Propriétés des éléments fondamentaux. — Observons tout d'abord que du fait que la transformation Θ est birationnelle, tout point commun à deux courbes ou surfaces fondamentales de l'un des espaces, est nécessairement fondamental.

Considérons deux points fondamentaux O_i, O'_j et les surfaces fondamentales Ω'_i, Ω_j. Nous désignerons par p'_i, p_j les ordres de Ω'_i, Ω_j, par r_i, r_{ij} les multiplicités de O_i pour les surfaces F, Ω_j et par r'_j, r'_{ji} les multiplicités de O'_j pour les surfaces F', Ω'_i. Nous avons vu que les courbes C ont la multiplicité p'_i en O_i et les courbes C' la multiplicité p_j en O'_j. A un plan de Σ passant par O_i correspond dans Σ' une surface F' formée d'une surface variable F'_i et de la surface Ω'_i; les surfaces F'_i découpent sur Ω'_i, en dehors de la base de $|F'|$, des courbes ω'_i d'ordre r_i. Sur la surface Ω'_i, les courbes ω'_i forment un réseau de degré un; elles ont la multiplicité r_{ij} en O'_j. De même, aux plans de Σ' passant par O'_j correspondent des surfaces F formées de Ω_j et de surfaces variables F_j découpant sur Ω_j des courbes ω_j, d'ordre r'_j, ayant la multiplicité r'_{ji} en O_i.

Considérons deux courbes fondamentales de première espèce γ_i, γ'_j et les surfaces Φ'_i, Φ_j dont nous désignerons les ordres respectivement par q'_i, q_j. Soient s_i, s_{ij} les multiplicités de γ_i pour les surfaces F, Φ_j; s'_j, s'_{ji} celles de γ'_j pour les surfaces F', Φ'_i. Aux points infiniment voisins d'un point de γ_i correspond une courbe fondamentale Γ'_i appartenant à Φ'_i et d'ordre s_i. De même, à un point de γ'_j est associée une courbe fondamentale Γ_j, d'ordre s'_j, appartenant à Φ_j. Une courbe C s'appuie en q'_i points variables sur γ_i (et éventuellement en certains points fixes. fondamentaux) et une courbe C' s'appuie en q_j points variables sur γ'_j. Les courbes Γ'_i s'appuient en σ_{ij} points variables sur γ'_j et les courbes Γ_j en σ_{ji} points variables sur γ_i.

Envisageons maintenant le point fondamental O_i et la courbe fondamentale de premiere espèce γ'_j. Si ρ_{ij} est la multiplicité de O_i pour la surface Φ_j, les courbes ω'_i s'appuient en ρ_{ij} points variables sur γ'_j. Si d'autre part s'_{ij} est la multiplicité de la courbe γ_j pour la surface Ω'_i, les courbes Γ_j ont la multiplicité s'_{ji} en O_i.

23. Tableaux associés à une correspondance birationnelle régulière. — A la transformation birationnelle régulière Θ, supposée dépourvue de courbes fondamentales de seconde espece, Montesano [149] associe quatre tableaux, formés avec les ordres de multiplicité des courbes et des surfaces considérées aux points fondamentaux.

Formons un premier tableau A relatif aux surfaces F :

$$(\mathrm{A})\qquad \left|\begin{array}{ccccccccc} n & r_1 & r_2 & & r_h & s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ p_1 & r_{11} & r_{21} & \dots & r_{h1} & s_{11} & s_{21} & \dots & s_{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{h'} & r_{1h'} & r_{2h'} & \dots & r_{hh} & s_{1h'} & s_{2h} & \dots & s_{kh} \\ q_1 & \rho_{11} & \rho_{21} & \dots & \rho_{h1} & \sigma_{11} & \sigma_{21} & \dots & \sigma_{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k'} & \rho_{1k'} & \rho_{2k'} & \dots & \rho_{hk'} & \sigma_{1k'} & \sigma_{2k'} & \dots & \sigma_{kk'} \end{array}\right|$$

Dans la première ligne sont successivement indiqués l'ordre de F et les multiplicités des points $O_1, O_2, \dots, O_h$ et des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ pour cette surface. Dans les h' lignes suivantes sont indiqués les mêmes nombres relatifs aux surfaces fondamentales $\Omega_1, \dots, \Omega_{h'}$; enfin, dans les k' dernieres lignes sont indiqués les mêmes nombres relatifs aux surfaces $\Phi_1, \dots, \Phi_{k'}$.

Formons un second tableau B relatif aux courbes C :

$$(\mathrm{B})\qquad \left|\begin{array}{ccccccccc} n' & p'_1 & p'_2 & \dots & p'_h & q'_1 & q'_2 & \dots & q'_k \\ r'_1 & r'_{11} & r'_{12} & \dots & r'_{1h} & \rho'_{11} & \rho'_{12} & \dots & \rho'_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r'_{h'} & r'_{h'1} & r'_{h2} & \dots & r'_{hh} & \rho'_{h1} & \rho'_{h2} & \dots & \rho'_{hk} \\ s'_1 & s'_{11} & s'_{12} & \dots & s'_{1h} & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s'_k & s'_{k'1} & s'_{k'2} & \dots & s'_{k'h} & \sigma'_{k'1} & \sigma'_{k'2} & \dots & \sigma'_{k'k} \end{array}\right|$$

Les lignes sont successivement relatives aux courbes C, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{h'}$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k'}$ et donnant successivement l'ordre, les multiplicités en O_1, O_2, ... O_h et les nombres de points d'appui variables sur les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$.

On peut former les tableaux analogues concernant les surfaces F' et les courbes C'. Ces tableaux, A', B' sont respectivement identiques, sauf le changement de lignes en colonnes, aux tableaux B, A.

Représentons par R_{ij} le produit des premiers nombres de la $i^{\text{ième}}$ ligne du tableau A et de la $j^{\text{ième}}$ ligne du tableau B, diminué de la somme des produits des éléments des mêmes colonnes de ces deux lignes. On aura par exemple

$$R_{11} = nn' - r_1 p'_1 - \ldots - r_h p'_h - s_1 q'_1 - \ldots - s_k q'_k.$$

En exprimant qu'une courbe C ne rencontre une surface F qu'en un point en dehors de la base de $|F|$, on obtient $R_{11} = 1$. En exprimant que les courbes $\omega_1, \ldots, \omega_h, \Gamma_1, \ldots \Gamma_k$, ne rencontrent une surface F qui ne les contient pas qu'en des points fondamentaux et que, de même, les courbes C ne rencontrent les surfaces fondamentales de Σ qu'en des points fondamentaux, on trouve

$$R_{1i} = 0, \qquad R_{i1} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, h + k + 1).$$

Une courbe et une surface fondamentale ne se rencontrant qu'en des points fondamentaux, on a

$$R_{ij} = 0 \qquad (i \neq j).$$

La considération des surfaces de Σ qui correspondent à des plans passant par un point fondamental de Σ' conduit à

$$R_{ii} = -1 \qquad (i = 2, \ldots, h + 1).$$

Enfin, en considérant la courbe qui correspond dans Σ à une droite s'appuyant sur une des courbes $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_{k'}$, on obtient

$$R_{ii} = -1 \qquad (i = h + 2, \ldots, h + k + 1).$$

Comme les tableaux A, B donnent les tableaux B', A' en intervertissant les lignes et les colonnes, si l'on désigne par R'_{ij} les sommes analogues aux R_{ij} mais ou les lignes sont remplacées par les colonnes, les nombres R'_{ij} jouiront des mêmes propriétés que les nombres R_{ij}.

Cela étant, on a

$$R_{11} = R'_{11}, \qquad \sum_{i=2}^{h'+k'+1} R_{ii} = -(l'+k'), \qquad \sum_{i=2}^{h+k+1} R'_{ii} = -(h+k).$$

La comparaison entre ces trois relations donne immédiatement

$$h + k = h' + k'.$$

Comme les courbes fondamentales de seconde espèce sont en même nombre dans les deux espaces, on voit que *dans une transformation birationnelle régulière, les nombres d'éléments fondamentaux dans les deux espaces sont égaux.*

Les tableaux A, B sont carrés. Multiplions par $i = \sqrt{-1}$ les termes des premières colonnes de ces tableaux et faisons le produit ligne par ligne des deux déterminants formés avec ces tableaux. Ce produit est égal à l'unité et comme ces déterminants sont des entiers, ils sont en valeur absolue égaux à l'unité.

24. Relation entre les genres des courbes fondamentales. — Cremona, pour établir que le nombre des points fondamentaux d'une correspondance birationnelle entre deux plans, est le même dans ces deux plans, a évalué le nombre des points doubles des courbes d'un faisceau d'un des réseaux homaloïdaux. Pannelli [161] est arrivé au même résultat en évaluant de deux manières différentes le genre de la jacobienne d'un des réseaux homaloïdaux. L'extension de ces méthodes aux transformations birationnelles de l'espace conduit à évaluer le nombre des surfaces d'un faisceau pris dans $|F|$ ou $|F'|$, ayant des points doubles; ou le genre de la courbe jacobienne d'un réseau de surfaces pris dans $|F|$ ou $|F'|$; ou enfin les genres de la jacobienne du système $|F|$ ou $|F'|$. Pannelli a déterminé les relations que l'on obtient en utilisant le troisième [161], puis le premier procédé [162]. Il obtient ainsi, par des calculs compliqués, les formules

$$4k + 4\mu - \rho - 2\nu = 4k' + 4\mu' - \rho' - 2\nu',$$
$$h + k - \Sigma\rho_i = h' + k' - \Sigma\rho'_i,$$

où μ est la somme des ordres des courbes fondamentales de Σ, ρ le genre de la courbe formée de toutes les courbes fondamentales de Σ,

ν le nombre des branches de ces courbes ayant pour origines les points fondamentaux, ρ_i le genre de la $i^{\text{ième}}$ courbe fondamentale γ_i (les courbes δ sont rationnelles); μ', ρ', ν', ρ'_i ont des significations analogues dans Σ'.

D'après Montesano, on a $h+k=h'+k'$ et par suite : *Dans une transformation birationnelle régulière, les sommes des genres des courbes fondamentales dans chaque espace, sont égales.*

CHAPITRE III.

POINTS SINGULIERS DES SURFACES ALGÉBRIQUES.

25. Transformations quadratiques. — La transformation birationnelle d'indice 2,2 la plus générale est obtenue en rapportant projectivement aux plans de l'espace Σ' les quadriques passant par une conique γ et par un point O situé sur la conique.

Par un choix convenable de la figure de référence, les équations de cette transformation peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
\rho x'_1 &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_4,\\
\rho x'_2 &= (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)x_4,\\
\rho x'_3 &= (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)x_4,\\
\rho x'_4 &= f_2(x_1, x_2, x_3),
\end{aligned}$$

f_2 étant une forme du second degré et le déterminant $|a_{ik}|$ n'étant pas nul. On voit tout de suite que ces équations, résolues par rapport aux x, conserveront la même forme. Aux plans de Σ correspondent des quadriques passant par une conique γ' et par un point O' n'appartenant pas à γ'.

Des cas particuliers s'obtiendront en supposant la conique γ dégénérée, ou en supposant que le point O appartient à la conique, les quadriques ayant alors un plan tangent fixe en ce point. La conique γ' et le point O' présentent alors la même particularité.

Par exemple, les équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1x_3 : x_2x_3 : x_3^2 : x_1^2 - x_2x_4$$

représentent une transformation obtenue en partant du système de quadriques passant par la conique

$$x_3 = 0, \qquad x_1^2 - x_2 x_4 = 0$$

et tangentes, au point (o, o, o, 1), au plan $x_2 = 0$. Les formules inverses sont

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x'_1 x'_2 : x'^2_2 : x'_3 x'_2 : x'^2_1 - x'_3 x'_4$$

et aux plans du premier espace (x) correspondent les quadriques passant par la conique

$$x'_2 = 0, \qquad x'^2_1 - x'_3 x'_4 = 0$$

et touchant le plan $x_3 = 0$ au point (o, o, o, 1).

Un autre exemple est fourni par les équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 x_3 : x_2 x_3 : x_3^2 : x_1 x_2 - x_3 x_4,$$

dont les inverses sont

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x'_1 x'_3 : x'_2 x'_3 : x'^2_3 : x'_1 x'_2 - x'_3 x'_4.$$

Les deux systèmes homaloïdaux sont formés de quadriques ayant un contact du second ordre en un point fixe (o, o, 1, o).

26. Une transformation quadratique particulière. — Nous aurons à utiliser la transformation

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : x_3^2$$

obtenue en rapportant aux plans de Σ' les quadriques de Σ passant par le point O(o, o, o, 1) et touchant le plan $x_3 = 0$ le long de la droite $x_3 = x_4 = 0$. Les formules inverses ont exactement la même forme.

Aux points infiniment voisins du point O correspondent les points du plan $x'_4 = 0$, plan fondamental associé à ce point. En particulier, au point infiniment voisin de O situé sur la droite $x_1 = x_2 = 0$ correspond le point (o, o, 1, o). Les courbes fondamentales sont, dans Σ, la droite $x_3 = x_4 = 0$ a laquelle correspond le plan $x'_3 = 0$ et dans Σ', la droite $x'_3 = x_4 = 0$ à laquelle correspond le plan fondamental $x_3 = 0$.

Passons aux coordonnées cartésiennes en prenant pour plan impropre dans Σ le plan $x_4 = 0$ et dans Σ' le plan $x'_3 = 0$. Posons donc

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}, \quad x' = \frac{x'_1}{x'_3}, \quad y' = \frac{x'_2}{x'_3}, \quad z' = \frac{x'_4}{x'_3}.$$

Les équations de transformation s'écrivent

$$(1) \qquad x = x'z', \quad y = y'z', \quad z = z'.$$

Aux points infiniment voisins de l'origine O dans Σ correspondent les points du plan $z' = 0$ et en particulier un point infiniment voisin de O sur l'axe des z correspond l'origine O' dans Σ'.

Dans Σ, le système homaloïdal est formé de cylindres paraboliques passant par l'origine; dans Σ', de cylindres hyperboliques.

27. **Analyse des points singuliers des surfaces algébriques.** — Une surface algébrique F d'ordre n, ayant la multiplicité s à l'origine des coordonnées, a une équation de la forme

$$\varphi_s(x, y, z) + \varphi_{s+1}(x, y, z) + \ldots + \varphi_n(x, y, z) = 0,$$

les φ étant des formes algébriques en x, y, z dont le degré est indiqué par l'indice.

Le cône tangent en O à la surface F a pour équation

$$\varphi_s(x, y, z) = 0.$$

A la surface F, la transformation (1) fait correspondre une surface formée du plan $z' = 0$ compté s fois et d'une surface F' d'équation

$$\varphi_s(x', y', 1) + z'\varphi_{s+1}(x', y', 1) + \ldots + z'^{n-s}\varphi_n(x', y', 1) = 0.$$

Aux points de la surface F, infiniment voisins de O, correspondent sur F' les points de la courbe

$$(2) \qquad z' = 0, \quad \varphi_s(x', y', 1) = 0$$

qui, avec la droite à l'infini du plan $z' = 0$, comptée $2(n-s)$ fois, forme l'intersection de F' et du plan $z' = 0$, fondamental pour la transformation (1).

S'il existe, sur la courbe (2), un point P' multiple d'ordre s pour F', on a $s' \leqq s$ et l'on conviendra de dire que le point P de F, infiniment voisin de O, homologue de P', est multiple d'ordre s' pour F.

La courbe (2) peut comporter une partie d'ordre ν multiple d'ordre s' pour F'. Aux points de cette courbe correspond sur F une courbe infiniment petite d'ordre ν, infiniment voisine de O, multiple d'ordre s' pour F. Le cône tangent a F en O comprendra alors une partie d'ordre ν, multiple d'ordre s' au moins. On aura d'ailleurs $\nu s' \leqq s$.

On pourra operer, sur la surface F', une transformation quadratique ayant pour point fondamental un point de la courbe (2), et ainsi de suite. Ceci nous conduit aux considérations qui font l'objet du paragraphe suivant.

28. **Domaines des différents ordres d'un point multiple sur une surface algébrique.** — Soit F une surface algébrique ayant en O la multiplicité s. Effectuons une transformation quadratique T ayant O pour point fondamental; aux points infiniment voisins de O correspondent, sur la transformée F' de F, les points d'une courbe γ', d'ordre s, située dans le plan fondamental associé à O. Effectuons une seconde transformation quadratique T' ayant pour point fondamental un point O'_1 de γ'; à F' correspond une surface F'' et aux points de F' infiniment voisins de O'_1 correspondent les points d'une courbe plane γ'' dont l'ordre est égal à la multiplicité s' de O'_1 pour F'. Effectuons une troisième transformation quadratique T'' ayant pour point fondamental un point O''_2 de γ'', et ainsi de suite.

Aux points O'_1, O''_2, ... correspondront sur F des points $O_1, O_2, \ldots$ infiniment voisins *successifs* de O; O_1 sera multiple d'ordre s' pour F et l'on conviendra de dire que O_2 est multiple d'ordre s'' pour F si s'' est la multiplicité de O''_2 pour F'', et ainsi de suite. On aura d'ailleurs

$$s \geqq s' \geqq s'' \geqq \ldots .$$

Les points de F homologues des points de γ' seront dits constituer le domaine du premier ordre du point O sur la surface F. Les points de F, homologues des points des courbes γ'' obtenus en considérant tous les points de γ', constitueront le domaine du second ordre du point O sur la surface F. On définira, d'une manière analogue, les domaines des troisième, quatrième, etc. ordres.

L'utilisation de transformations quadratiques successives permet de fixer les multiplicités pour F des points des domaines des différents ordres d'un point multiple de la surface. On sera ainsi conduit à une analyse des singularités des surfaces algébriques.

C'est C. Segre [174] qui a le premier utilisé systématiquement ce procédé. On consultera également, sur cet argument, le Tome II de l'Ouvrage d'Enriques-Chisini [III].

29. Analyse des points doubles d'une surface algébrique. — Pour faire comprendre ce qui précède, nous étudierons succinctement les points doubles d'une surface algébrique. Considérons donc la surface F d'équation

$$\varphi_2(x, y, z) + \varphi_3(x, y, z) + \ldots + \varphi_n(x, y, z) = 0.$$

Trois cas peuvent se présenter :

1° Le cône tangent $\varphi_2 = 0$ est irréductible. O est un point double conique et tous les points du domaine du premier ordre de O sont simples pour F.

2° Le cône tangent se réduit à deux plans distincts. Le point O est biplanaire et l'on peut poser, sans restriction, $\varphi_2 \equiv xy$.

3° Le cône tangent se réduit à un plan compté deux fois; le point O est uniplanaire et l'on peut poser, sans restriction, $\varphi_2 \equiv y^2$.

Examinons le second cas. La transformation (1) fait correspondre à F la surface

$$x'y' + z'\varphi_3(x', y', 1) + \ldots = 0.$$

Les droites $x' = z' = 0$, $y' = z' = 0$ sont certainement simples pour F'; le point O' ($x' = y' = z' = 0$) est en général simple pour F'. Il est précisément simple si $\varphi_3(0, 0, 1)$ n'est pas nulle; le point O est alors biplanaire ordinaire pour F. Si $\varphi_3(0, 0, 1) = 0$, le point O' est double pour F' et le cône tangent à F' en O' a pour équation

$$x'y' + z'^2\varphi_4(0, 0, 1) + z'(ax' + by') = 0,$$

$ax' + by'$ étant les termes du premier degré dans $\varphi_3(x', y', 1)$.

Le point O est biplanaire singulier sur la surface F. On remarquera que si la droite $x = y = 0$ rencontre la surface F en quatre points confondus en O, ce point est biplanaire singulier. On pourra continuer l'étude dans ce cas en effectuant, sur F', la transformation

$$x' = x''z'', \qquad y' = y''z'', \qquad z' = z'',$$

et ainsi de suite.

Passons au troisième cas. La surface F′ a pour équation

$$y'^2 + z'\varphi_3(x', y', 1) + \ldots = 0.$$

En général, la surface F′ touche le plan $z' = 0$ le long de la droite $y' = z' = 0$. Posons

$$\varphi_3(x, y, z) = x^3\psi_0 + x^2\psi_1(y, z) + x\psi_2(y, z) + \psi_3(y, z),$$

les ψ étant des formes binaires dont le degré est indiqué par l'indice.

Pour que la droite $y' = z' = 0$ soit double pour la surface F′, il faut et il suffit que l'on ait

$$\psi_0 = 0, \qquad \psi_1(0, 1) = 0, \qquad \psi_2(0, 1) = 0, \qquad \psi_3((0, 1) = 0.$$

Supposons en premier lieu que ces conditions ne soient pas réalisées. Le plan $y = 0$ coupe F suivant une courbe dont les tangentes a l'origine sont $\varphi_3(x, 0, z) = 0$. Nous pouvons supposer, sans restriction, que l'une au moins de ces tangentes coïncide avec l'axe des z. Cela revient à supposer $\psi_3(0, 1) = 0$. Nous aurons à considérer trois cas :

1° $\psi_2(0, 1) \neq 0$. — L'axe Oz est une tangente simple de la section de F par le plan $y = 0$. Le point O′, qui correspond, sur F′, au point de F infiniment voisin de O sur Oz, est double conique pour F′. Le cône tangent a F′ en O′ a pour équation

$$y'^2 + z'\left[x'\psi_2(0, 1) + \frac{1}{2}y'\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2}\right] + z'^2\varphi_4(0, 0, 1) = 0.$$

2° $\psi_2(0, 1) = 0$, $\psi_1(0, 1) \neq 0$. — L'axe Oz est une tangente double de l'intersection de F et du plan $y = 0$. Le point O′ est double biplanaire pour F′; les plans tangents à cette surface en O′ passent par la droite $y' = z' = 0$.

Dans l'équation de F′, permutons x' et z'; elle devient

$$y'^2 + x'[z'^3\psi_0 + z'^2\psi_1(y', 1) + z'\psi_2(y', 1) + \psi_3(y', 1)] + x'^2\varphi_4(z', y', 1) + \ldots = 0.$$

Opérons la transformation

$$x' = x''z'', \qquad y' = y''z'', \qquad z' = z''$$

sur cette équation. Nous obtenons une surface F″ d'équation

$$\begin{aligned} y''^2 + x''[&z''^2\psi_0 + z''\psi_1(y''z'', 1) + a_{20}y''^2z''^2 + a_{21}y''z'' \\ &+ a_{30}y''^3z''^2 + a_{31}y''^2z'' + a_{32}y''] + x''^2\varphi_4(z'', y''z'', 1) + \ldots = 0,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\psi_2(y,\ z) \equiv a_{20}y^2 + a_{21}yz + a_{22}z^2 \qquad (a_{22} = 0),$$
$$\psi_3(y,\ z) \equiv a_{30}y^3 + a_{31}y^2z + a_{32}yz^2 + a_{33}z^3 \qquad (a_{33} = 0).$$

Le point $O''(0, 0, 0)$ de F'', qui correspond au point infiniment voisin de O' sur la droite $x' = y' = 0$, est double conique pour cette surface, le cône tangent étant

$$y''^2 + x''[z''\psi_1(0, 1) + a_{32}y''] + x''^2\varphi_4(0, 0, 1) = 0.$$

3° $\psi_2(0, 1) = 0$, $\psi_1(0, 1) = 0$, $\psi_0 \neq 0$. — En reprenant les calculs précédents, on voit que le point O'' est double biplanaire pour F'', les plans tangents à cette surface en ce point passant par la droite $x'' = 0$, $y'' = 0$. Opérons, sur la surface F'', la transformation

$$x'' = x'''z''', \qquad y'' = y'''z''', \qquad z'' = z'''.$$

Nous obtenons une surface F''' d'équation

$$y'''^2 + x'''[z'''\psi_0 + y''z'''^3\psi_1(1, 0) + \ldots + a_{32}y'''] + x'''^2\varphi_4(z''', y'''z'''^2, 1) + \ldots = 0,$$

pour laquelle le point $O'''(0, 0, 0)$ est double conique.

L'analyse précédente nous montre donc qu'*à un point double uniplanaire d'une surface algébrique tel que le plan tangent en ce point coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple au point considéré, est infiniment voisine une droite simple sur laquelle se trouvent soit trois points doubles coniques, soit deux points doubles dont l'un est conique et l'autre biplanaire tel qu'un point double conique lui fait suite, soit un seul point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs deux points doubles dont le dernier est conique.*

Enfin, un point double biplanaire auquel est infiniment voisine une droite double est appelé tacnode. La section de la surface par le plan tangent $y = 0$ a alors un point quadruple au moins en O.

30. Courbes multiples des surfaces algébriques. — Soit F une surface algébrique d'ordre n possédant une courbe C multiple d'ordre s. On peut analyser la singularité de la surface F le long de la courbe C en opérant une transformation quadratique T ayant pour point fondamental un point général de cette courbe. En conservant les notations définies plus haut (n° 28), la courbe γ' de la surface F' se composera de s droites (distinctes ou non) passant par *un même* point O'_1, qui sera multiple d'ordre s pour F' et qui correspondra au point de F infiniment voisin de O sur la courbe C. L'existence d'un point de la courbe γ', distinct de O'_1, multiple pour la surface F', entraînera l'existence d'une courbe multiple de la surface F, infiniment voisine de la courbe C et qui aura même ordre que cette courbe.

On peut également reconnaître l'existence de ces courbes en considérant la section de F par un plan ϖ, coupant C en un point O et ne passant pas par la tangente a C en O. Il suffit d'opérer dans le plan ϖ une transformation quadratique plane ayant le point O pour point fondamental. Cela revient a étudier la singularité de O pour la section de F par le plan ϖ.

Considérons par exemple le cas ou C est double pour $F(s = 2)$. Si les plans tangents a F en un point général de C sont confondus, la surface F possédera en général une courbe simple, infiniment voisine de C. Mais si une tangente a F en un point géneral O de C, coupe cette surface en quatre points confondus en O, la surface F possédera une courbe double, infiniment voisine de C.

31. **Droites multiples d'une surface algébrique.** – L'etude du voisinage d'une droite r, multiple d'ordre s d'une surface algebrique F, peut se faire de la maniere suivante : Soient O_1, O_2, O_3 trois points quelconques tels que le plan $O_1O_2O_3$ ne passe pas par r. Rapportons projectivement les quadriques passant par r, O_1, O_2, O_3 aux plans de l'espace. On obtient ainsi une transformation birationnelle (n° 18). Aux plans fondamentaux $O_1O_2O_3$, O_1r, O_2r, O_3r correspondent des droites fondamentales r', r'_1, r'_2, r'_3, les trois dernières s'appuyant sur la premiere. Aux points infiniment voisins d'un point de la droite r correspondent les points d'une droite s'appuyant sur r'_1, r'_2, r'_3. Par conséquent, aux points infiniment voisins de r correspondent les points de la quadrique Q' de directrices r'_1, r'_2, r'_3. En particulier, a ceux de ces points qui appartiennent a F correspondent les points d'une courbe ρ' tracée sur cette quadrique. La courbe ρ' a le même ordre n que la surface F et rencontre en s points les génératrices rectilignes de Q' de même mode que r'.

Ce procédé a été utilisé par Burniat [24].

32. Points multiples des courbes gauches algébriques. — Soit C une courbe algébrique gauche ayant en un point O, la multiplicité s. Opérons une transformation quadratique ayant O comme point fondamental et soient ϖ' le point fondamental associé à O, Γ' la conique fondamentale (éventuellement réductible) située dans ce plan. Aux points de C infiniment voisins de O correspondent s points du plan ϖ', que l'on peut toujours supposer, par un choix convenable de la transformation, ne pas appartenir à la conique Γ. Si O'_1 est un de ces points, multiple d'ordre s' pour la transformée C' de C, on a $s' \leqq s$ et le point infiniment voisin O_1 de O, homologue de O'_1, sera dit multiple d'ordre s' pour C. On conçoit que, de même que dans le cas des surfaces, on peut définir les domaines du premier ordre, du second ordre, etc. du point O sur la courbe C et, par des transformations quadratiques successives, déterminer les multiplicités des points de ces différents domaines pour la courbe C.

On peut également, comme l'a fait Halphen [98], utiliser des développements analogues aux développements de Puiseux pour les courbes planes. On introduit ainsi le concept de branches d'une courbe algébrique gauche; on donne ce nom à des développements de la forme

$$\begin{aligned} x &= a_0\, t^{\alpha} + a_1\, t^{\alpha+1} + \ldots, \\ y &= b_0\, t^{\alpha} + b_1\, t^{\alpha+1} + \ldots, \\ z &= c_0\, t^{\alpha} + c_1\, t^{\alpha+1} + \ldots, \end{aligned}$$

qui, pour t suffisamment petit, définissent une branche de courbe algébrique d'origine O(o, o, o).

Enriques [69, 3] est revenu récemment sur ces développements pour en préciser la portée et montrer qu'ils permettent d'introduire le concept de points multiples infiniment voisins tel qu'il a été obtenu par les transformations quadratiques.

33. Intersection des courbes et surfaces algébriques. — Considérons une surface algébrique F et une courbe algébrique C ayant respectivement en O les multiplicités r, s. Le point O absorbe au moins rs des intersections de F et de C et précisément rs si aucune des tangentes à C en O ne touche la surface en ce point. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; opérons une transformation quadratique T ayant O comme point fondamental et soit ϖ' le plan fondamental associé. A F correspond une surface F' coupant ϖ' suivant une courbe γ' et à C une courbe C′ coupant ϖ', en dehors de la conique fondamentale, en s points dont quelques-uns appartiennent à γ'. Si un point O'_1 de ϖ' a les multiplicités r_1, s_1 pour F′, C′, il absorbe au moins $r_1 s_1$ intersections et par suite le point O_1, homologue de O'_1, infiniment voisin de O sur F et C, absorbe au moins $r_1 s_1$ intersections. On peut passer, par des transformations quadratiques successives, aux domaines des différents ordres de O et en conclure que, dans l'évaluation du nombre des intersections de F et C absorbées en O, les points infiniment voisins successifs de O communs à F et à C doivent être comptés comme s'ils étaient des points au sens ordinaire du mot.

CHAPITRE IV.

LA GÉOMÉTRIE ALGEBRIQUE DE L'ESPACE.

34. **Groupe principal.** — Le produit d'une transformation birationnelle par une autre étant encore une transformation birationnelle et l'inverse d'une transformation birationnelle étant également une transformation birationnelle, les transformations birationnelles de l'espace forment un groupe $\mathcal{G}$. Ce groupe $\mathcal{G}$ est le groupe principal, au sens de Klein, de la géométrie algébrique de l'espace.

On sait que le groupe analogue, dans le plan, est constitué à partir des homographies et des transformations quadratiques, toute transformation birationnelle du plan étant le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques et d'une homographie. En ce qui concerne l'espace, il reste encore à déterminer si le groupe des transformations birationnelles peut être obtenu en partant de transformations de certains types. C'est là une question difficile, à laquelle il faudra probablement répondre par la négative.

35. **Opérations sur les systèmes linéaires de surfaces.** — Revenons tout d'abord sur la définition d'un système linéaire de surfaces donné par sa base (n° 3). Donner la base d'un système linéaire de surfaces algébriques $|F|$, c'est donner l'ensemble des points et des courbes communs à toutes les surfaces du système, avec leurs multiplicités pour ces surfaces et les multiplicités des points infiniment voisins qui

doivent éventuellement être communs a toutes les surfaces. Deux surfaces du système doivent se comporter d'une manière identique en tout point-base et dans les domaines successifs de ce point.

Cela étant, soient $|F_1|$, $|F_2|$ deux systèmes linéaires complets de surfaces. On appelle somme de ces systèmes et l'on représente par $|F_1+F_2|$ le systeme complet qui comprend toutes les surfaces formées d'une surface F_1 et d'une surface F_2. Les surfaces du système $|F_1+F_2|$ sont en général irréductibles.

Désignons par n_1, n_2 les degrés de $|F_1|$. $|F_2|$, par π_1, π_2 leurs genres sectionnels, par p_1, p_2 leurs genres arithmétiques, par n_{12} le nombre de points communs, en dehors des bases, a deux surfaces F_1 et une surface F_2, par n_{21} le nombre de points communs à une surface F_1 et a deux surfaces F_2, par π le genre de la courbe commune a une surface F_1 et à une surface F_2. Le degré du système $|F_1+F_2|$ est égal à

$$n_1+n_2+3(n_{12}+n_{21}),$$

son genre sectionnel à

$$\pi_1+\pi_2+2\pi+2(n_{12}+n_{21})-3,$$

son genre arithmétique a

$$p_1+p_2+\pi.$$

On déduit de ce qui précède la définition des multiples

$$|2F|=|F+F|, \ldots, |\lambda F|$$

d'un systeme linéaire.

Considérons maintenant deux systemes linéaires complets $|F|$, $|F_1|$ et supposons l'ordre des surfaces F supérieur à celui des surfaces F_1. S'il existe une surface F_2 qui, jointe à une surface F_1, constitue une surface F, le système complet $|F_2|$ sera dit la différence des systèmes $|F|$, $|F_1|$ et représenté par $|F-F_1|$.

36. Système adjoint. — Nous avons défini plus haut ce qu'il fallait entendre par système jacobien $|F_j|$ d'un système linéaire $|F|$, ∞^3 au moins. Si m est l'ordre des surfaces F, les surfaces du système $|F_j|$ sont d'ordre $4m-4$. On appelle surfaces adjointes F' aux surfaces F, quand elles existent, les surfaces d'ordre $m-4$ définies par

$$|F'|=|F_j-3F|.$$

Pour obtenir les surfaces adjointes à une surface n'appartenant pas à un système linéaire ∞^3 au moins, considérons le système $|\Phi + F|$. On a

$$|(\Phi + F)_j| = |F_j| + 4|\Phi| = |\Phi_j| + 4|F|,$$

le système $|\Phi|$ étant ∞^3 au moins. On en déduit

$$|F' + \Phi| = |\Phi' + F|.$$

Cela étant, si Φ est une surface n'appartenant pas à un système linéaire ∞^3 au moins, on appellera adjointes Φ' à Φ les surfaces $F' + \Phi - F$ (si elles existent).

Les adjointes à une surface passent $s - 1$ fois par une courbe multiple d'ordre s, ordinaire, de la surface et $r - 2$ fois par un point multiple ordinaire d'ordre r. Elles découpent sur la surface le système canonique de celle-ci.

A côté du système adjoint $|F'|$ d'un système linéaire, on peut introduire le second adjoint $|F''|$, formé des surfaces d'ordre $m - 8$ adjointes aux surfaces F' (système qu'il ne faut pas confondre avec celui des surfaces bi-adjointes, d'ordre $2m - 8$), le troisième adjoint $|F'''|$, formé des adjointes aux surfaces F'', ...

Les surfaces dépourvues de surfaces adjointes sont les surfaces rationnelles, les surfaces réglées ou contenant un faisceau de courbes rationnelles, certaines surfaces de genre géométrique zéro, non encore toutes déterminées, telle que la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre (surface d'Enriques).

37. Les systèmes linéaires de surfaces et le groupe $\mathcal{G}$. — A un système linéaire $|F|$ de surfaces, une transformation birationnelle T fait correspondre un système linéaire $|F'|$. Si parmi les points et les courbes fondamentales de la transformation T, se trouvent des points-base et des courbes-base de $|F|$, les transformées des surfaces F contiendront les surfaces fondamentales correspondantes ; ces surfaces seront des composantes fixes du système F, et l'on pourra convenir de les retrancher de ce système ou non. En général, c'est la première convention que l'on adoptera et l'on désignera par $|F'|$ le système linéaire obtenu après suppression des composantes fixes éventuelles ; ce système sera appelé le transformé de $|F|$ par T. Les degrés et les genres sectionnels des systèmes $|F|$, $|F'|$ sont égaux, mais les ordres des surfaces F, F' sont en général différents.

Il est, d'autre, part bien clair que les opérations d'addition et de soustraction des systemes linéaires ne sont pas altérées par les transformations du groupe $\mathcal{G}$.

Considérons un système linéaire $|F|$, ∞^3, et sa jacobienne F_J. A une surface F possedant un point double en dehors de la base de $|F|$ et des points fondamentaux de T, correspond une surface F' ayant un point double au point correspondant. Par suite, à la jacobienne F_J de $|F|$ correspond la jacobienne F'_J de $|F'|$. Il en résulte qu'aux adjointes du systeme linéaire $|F|$, T fait correspondre les adjointes au systeme linéaire $|F'|$. Et ce résultat s'étend facilement aux surfaces qui n'appartiennent pas a un système linéaire ∞^3 au moins. En d'autres termes, l'opération d'adjonction est invariante vis-à-vis des transformations du groupe $\mathcal{G}$.

Le fait que les jacobiennes F_J, F'_J se correspondent résulte d'ailleurs du fait suivant : Si

$$\lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

est l'équation de $|F|$ et

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

les équations de T^{-1}, on a

$$\frac{\partial(f_1 f_2 f_3 f_4)}{\partial(x'_1 x'_2 x'_3 x'_4)} = \frac{\partial(f_1 f_2 f_3 f_4)}{\partial(x_1 x_2 x_3 x_4)} \frac{\partial(x_1 x_2 x_3 x_4)}{\partial(x_1 x'_2 x'_3 x'_4)}.$$

38. La représentation des systèmes linéaires de surfaces par les variétés à trois dimensions. — Soit $|F|$ un système linéaire de dimension $r \geq 4$, non composé au moyen d'un faisceau de surfaces ou d'une congruence de courbes. Rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace linéaire S_r a r dimensions. Si

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_2 f_2 = 0$$

est l'équation de $|F|$ et $X_0, X_1, \ldots, X_r$ les coordonnées projectives homogenes des points de S_r, on pourra poser

(1) $$\rho X_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, r),$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. Les équations (1) définissent une variété algébrique V_3, à trois dimensions, de S_r, image du système $|F|$.

Si $|F'|$ est le système linéaire qu'une transformation birationnelle fait correspondre à $|F|$, ou, comme l'on dit brièvement, si $|F'|$ est *birationnellement identique* à $|F|$, nous pouvons, en partant de $|F'|$, définir une variété à trois dimensions V'_3, de S_r, image de $|F'|$.

Observons qu'à un faisceau de surfaces F correspond, d'une part, un faisceau d'hyperplans de S_r et, d'autre part, un faisceau de surfaces F'. On en conclut que les variétés V_3, V'_3 se correspondent dans une homographie de S_r. Ou encore, *les variétés images de deux systèmes linéaires de surfaces birationnellement identiques sont projectivement identiques*.

Ce théorème ramène l'étude des systèmes linéaires de surfaces vis-à-vis du groupe $\mathcal{G}$ à l'étude des variétés à trois dimensions vis-à-vis du groupe projectif.

Observons que si le système $|F|$ est simple, il en est de même de $|F'|$ et les variétés V_3, V'_3 sont rationnelles. Mais si le système $|F|$ est composé au moyen d'une involution I_p, d'ordre p, le système $|F'|$ est également composé au moyen d'une involution d'ordre p. Dans le premier cas, l'ordre des variétés V_3, V'_3 est égal au degré n du système $|F|$; dans le second cas, cet ordre est égal à $\frac{n}{p}$. Dans le second cas, les variétés V_3, V'_3 ne sont pas nécessairement rationnelles, comme le montre un exemple dû à Enriques [67]. La variété V_3 est une image de l'involution I, et la détermination des cas où cette variété est rationnelle est un problème très difficile, à peine abordé [92].

39. Systèmes linéaires de surfaces à intersections variables rationnelles, elliptiques ou hyperelliptiques. — Si $|F|$ est un système linéaire de surfaces de genre sectionnel p, ∞^3 au moins, les sections de la variété V_3 qui le représente dans S_r par les espaces S_{r-2} sont des courbes de genre p. Les sections hyperplanes de V_3 sont donc des surfaces à sections de genre p. La nature de ces surfaces est connue pour $p = 0, 1$ ou pour des sections hyperelliptiques. En utilisant ces résultats, Enriques [63, 64] a déterminé les types birationnellement distincts de systèmes linéaires de surfaces à intersections variables rationnelles, elliptiques ou hyperelliptiques. Il est arrivé aux résultats suivants :

Tout système linéaire simple de surfaces à intersections *variables rationnelles, est birationnellement identique à l'un des suivants :*

1° *Système des quadriques par une conique;*
2° *Système des quadriques tangentes à un plan en un point;*
3° *Système de surfaces d'ordre m ayant une droite-base multiple d'ordre $m-1$ et, éventuellement, d'autres éléments-base.*

Tout système linéaire simple de surfaces à intersections variables elliptiques de degré supérieur à trois, est birationnellement identique à l'un des suivants :

1° *Systeme ∞^5 des surfaces cubiques ayant pour base une quintique de genre deux (degré quatre);*
2° *Système ∞^{n+1} de surfaces cubiques ayant un point-base double, à cône tangent fixe, et $9-n$ droites-base appartenant à ce cône ($n = 5, 6, 7, 8, 9$);*
3° *Système ∞^6 des surfaces cubiques ayant pour base une quartique de seconde espèce;*
4° *Système ∞^7 des surfaces cubiques passant par trois droites deux à deux gauches;*
5° *Système ∞^7 des surfaces cubiques ayant pour base un point double et une cubique gauche passant simplement par ce point;*
6° *Système ∞^7 des surfaces cubiques ayant pour base un point double biplanaire, un plan osculateur fixe en ce point et une cubique plane ayant un point double en ce point;*
7° *Système des quadriques ayant au plus un point-base;*
8° *Système ∞^9 des surfaces du quatrième ordre ayant pour base un point triple, deux droites doubles passant par ce point, le cône tangent en ce point étant formé du plan des deux droites et d'un cône irréductible du second ordre.*

Les systemes de degré $n = 3$ ne sont pas connus; cela tient a ce que, jusqu'à présent, il a été impossible de démontrer si la variété cubique à trois dimensions de l'espace à quatre dimensions, est rationnelle ou non [92].

Tout système linéaire simple de surfaces à intersections variables hyperelliptiques est birationnellement équivalent à un système linéaire de surfaces d'ordre m ayant pour base une *droite multiple d'ordre $m-2$, une courbe simple coupant en deux points variables les plans passant par la droite et, éventuellement, d'autres éléments.*

40. Systèmes linéaires de surfaces rationnelles. — G. Fano [78] a étudié les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces rationnelles; il a démontre que toutes ces variétés sont rationnelles, sauf eventuellement la variété cubique de l'espace à quatre dimensions. De ses résultats, Fano a deduit les propriétés suivantes des systemes linéaires de surfaces rationnelles :

Soit $|F|$ un systeme linéaire simple de surfaces rationnelles. Considérons le systeme $|F+F'|$ adjoint au systeme linéaire $|2F|$. Le système $|F+F'|$ est formé de surfaces rationnelles et si l'on répète sur $|F+F'|$ l'opération qui fait passer de $|F|$ a $|F+F'|$, et ainsi de suite, on est conduit à de nouveaux systemes linéaires de surfaces rationnelles, sauf eventuellement pour le dernier système obtenu. Après un nombre fini d'opérations, on parvient à un système linéaire de surfaces rationnelles a intersections variables hyperelliptiques, elliptiques ou rationnelles, ou a un systeme birationnellement identique à un système de cônes de même sommet.

41. Surfaces n'ayant que des courbes multiples ordinaires. — Étant donnee une surface algébrique F, on peut se proposer de construire une de ses transformées birationnelles n'ayant que des courbes multiples ordinaires (à plans tangents généralement distincts). Ce problème a été résolu par Chisini [36], qui a demontré que, par des transformations du groupe $\mathcal{G}$, une surface algébrique F peut être transformée en une surface F, dépourvue de points multiples isolés, n'ayant que des courbes multiples ordinaires. Ces courbes peuvent posséder, en nombre fini, des points cuspidaux par lesquels passent simplement les courbes decoupées sur F' par les premieres polaires de cette surface, en y ayant une tangente distincte de celle de la courbe multiple. Les points communs a deux courbes multiples d'ordre s_1, $s_2 (s_1 \geq s_2)$ n'appartiennent pas à une troisieme courbe multiple de la surface et les deux courbes passant par ce point ont des tangentes distinctes; le point est multiple d'ordre s_1 pour la surface et n'appartient pas à toutes les courbes decoupées par les polaires de cette surface.

Pour obtenir ce résultat, Chisini elimine en premier lieu les points fondamentaux isolés de F au moyen de transformations birationnelles d'indices 2, 3. Une fois cette élimination faite, il utilise des transformations monoidales ayant comme courbes fondamentales les courbes multiples non ordinaires de la surface obtenue.

42. Remarque. — On peut chercher à transformer une surface algébrique en une autre n'ayant comme singularités que des courbes multiples ordinaires, la transformation n'étant birationnelle qu'entre les surfaces et non pas entre les espaces ambiants. On sait que dans ces conditions, on peut transformer toute surface en une autre ne possédant comme singularités qu'une courbe double n'ayant qu'un nombre fini de points triples à la fois pour la surface et la courbe double. Ce theorème a été etabli par B. Levi [119]; on consultera également sur ce sujet le Tome I du Traité de Picard et Simart [VI] et un Mémoire de Severi [175]. Une demonstration simple a été donnée récemment par Albanese [1].

Le théoreme en question revient au suivant : on peut trouver une transformée birationnelle d'une surface algébrique, appartenant à un espace linéaire ayant au moins cinq dimensions, privée de points multiples. Il suffit alors de projeter cette surface sur un espace ordinaire pour obtenir le théoreme sous sa premiere forme.

Albanese commence par construire, sur une surface algebrique irréductible F, un systeme linéaire simple de courbes, de dimension $r > 6$ et de degré n, Σ'_n, tel que chacun de ses systèmes de dimension $r - i (i \leq 4)$ soit irréductible et de degre $n - j (j < 2i + 1)$. En rapportant projectivement les courbes de Σ'_n aux hyperplans d'un espace S_r a r dimensions, il obtient une transformée birationnelle F' de F qui ne peut posséder que des courbes doubles ordinaires ayant un nombre fini de points cuspidaux, et, en dehors des courbes doubles, un nombre fini de points doubles coniques, biplanaires ou uniplanaires non tacnodaux, a distance finie ou infiniment voisins. En considérant les hypersurfaces de S_r d'ordre suffisamment élevé passant par les courbes doubles et en les rapportant projectivement aux hyperplans d'un espace à un nombre convenable de dimensions, on transforme birationnellement F' en une surface F'' dépourvue de courbes doubles. On élimine successivement de la même manière les points doubles restants et l'on parvient ainsi à une surface dépourvue de points multiples, transformée birationnelle de F.

43. Courbes algébriques gauches depourvues de points multiples. — Soit C une courbe gauche algébrique ayant des singularités quelconques; on peut, par des transformations birationnelles, transformer cette courbe en une autre C′ dépourvue de points multiples (effectifs).

En premier lieu, au moyen de transformations quadratiques successives, on transformera la courbe C en une courbe C_1 n'ayant que des points multiples (effectifs) ordinaires. On peut également, dans ce but, utiliser la transformation

$$x_1 x'_1 = x_2 x'_2 = x_3 x'_3 = x_4 x'_4,$$

qui possède dans chaque espace quatre points fondamentaux ordinaires et quatre plans fondamentaux. C'est ce qu'a fait Pannelli [159].

On pourra se débarrasser des points multiples de la courbe C_1 soit en utilisant la transformation birationnelle d'indices 2, 3 dont il a été plusieurs fois question, soit en utilisant, comme l'a fait B. Levi [121], une transformation dépourvue de points fondamentaux isolés. B. Levi utilise la transformation qui fait correspondre aux plans de l'espace Σ les surfaces cubiques de Σ' passant par une sextique gauche de genre trois, K′. Aux plans de Σ' correspondent les surfaces cubiques passant par une sextique gauche K de genre trois. Aux points de K (ou K′) correspondent les trisécantes de K′ (ou K) engendrant une surface fondamentale R′ (ou R) d'ordre huit, passant trois fois par K′ (ou K). Si C_1 est une courbe ayant en O_1 la multiplicité s, on choisira la transformation de manière que la courbe K passe par O_1, sans y toucher C_1, aucune des trois trisécantes de K passant par O_1 ne s'appuyant ultérieurement sur C_1. De plus, on supposera que la courbe C_1 ne rencontre la surface R en des points d'une même triséсante de K. Dans ces conditions, a la courbe C_1 correspond une courbe C'_1 s'appuyant en s points simples sur la trisécante de K′ homologue de O_1. En répétant ce raisonnement pour tous les points multiples de C_1, C'_1, ..., on arrivera finalement à une courbe C_r dépourvue de points multiples.

44. Congruences linéaires de courbes algébriques. — On appelle congruence linéaire de courbes algebriques un ensemble doublement infini, algébrique, de courbes, tel que par un point de l'espace passe en général une seule courbe de l'ensemble.

Une congruence linéaire ne possède pas de surface focale; ses courbes sont assujetties a passer par certains points fixes et à s'appuyer, en des points variables, sur certaines courbes appelées courbes singulières. De plus, le long d'une courbe singulière, les courbes d'une congruence linéaire peuvent être assujetties à toucher certaines surfaces.

Soit $\|C\|$ une congruence linéaire de courbes algébriques C. Si l'on effectue, sur toutes les courbes de $\|C\|$, les transformations birationnelles qui permettent de transformer une de ces courbes en une courbe C′ n'ayant aucun point multiple effectif, à la congruence correspondra une congruence linéaire $\|C'\|$ dont la courbe générale sera dépourvue de points multiples effectifs. Si les courbes de $\|C\|$ doivent, le long d'une courbe singulière Γ, avoir un contact d'un certain ordre avec une surface passant par Γ, on pourra, au moyen d'une transformation monoïdale ayant Γ comme courbe singulière, transformer $\|C'\|$ en une congruence $\|C''\|$ dont les courbes auront, le long des courbes singulières naissant de Γ, un contact d'ordre moindre avec certaines surfaces. En continuant de la sorte, on arrivera à une congruence linéaire $\|C_1\|$ dont les courbes s'appuyeront en des points variables sur des courbes singulières, sans avoir de contacts avec certaines surfaces le long de ces courbes. Le nombre des points d'appui est égal à $4m+2(p-1)$, m étant l'ordre des courbes C_1, p leur genre, ainsi que l'a etabli Godeaux [87]. On peut en déduire que si la courbe singuliere de la congruence $\|C_1\|$ est irréductible, son ordre est inférieur a $\left(\frac{4m+2p-2}{m}\right)^2$.

Observons que si les courbes d'une congruence linéaire ont un point simple fixe, ce point compte en général pour deux points d'appui sur une courbe singulière. On peut par suite trouver $2m+p-1$ points tels que les courbes d'ordre m et de genre p passant par ces points forment une congruence linéaire.

Considérons maintenant les congruences linéaires de courbes rationnelles. Soit $\|C\|$ une telle congruence. Si l'on sait trouver une surface unisécante des courbes C, on pourra transformer birationnellement $\|C\|$ en une gerbe de rayons. Enriques [65] a démontré que cela est toujours possible si les courbes C sont d'ordre impair. Par contre, il existe des congruences linéaires de coniques dépourvues de surfaces unisécantes, comme l'a montré Montesano [142].

45. Transformations birationnelles involutives. — On pourrait se proposer de déterminer les transformations birationnelles involutives de l'espace qui ne soient pas birationnellement identiques, mais ce problème n'a pas encore été abordé. Il semble d'ailleurs devoir présenter de sérieuses difficultés, car on se heurte à la question de la rationnalité des involutions (n° 38).

Soit T une transformation birationnelle involutive de l'espace faisant correspondre aux plans des surfaces F d'ordre m formant un système homaloïdal $|F|$. Puisque $T^2=1$, aux droites correspondront des courbes C d'ordre m. Désignons par Φ les surfaces d'ordre $m+1$ ayant, aux points-base et aux courbes-base de $|F|$, le même comportement que les surfaces F. Le système $|\Phi|$ est transformé en lui-même par T; il a le degré $2(3m+1)$ et le genre sectionnel $2\pi-4m-3$, π étant le genre de la section plane d'une surface F. Les surfaces Φ ont le genre arithmétique π.

Dans le système $|\Phi|$, il existe deux systemes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2, d'ordre deux, engendrée par T. L'un de ces systèmes, $|\Phi_1|$, comprend les surfaces Φ composées d'un plan et de la surface F qui lui correspond; l'autre système, $|\Phi_0|$, comprend les surfaces Φ lieu des sections des plans d'un faisceau par les surfaces F qui leur correspondent. Il en résulte que les surfaces Φ_0 passent par les points unis de l'involution I_2 (points invariants pour la transformation T). Les points unis de l'involution I_2 peuvent être en nombre ∞^2 et former une surface algébrique, composante fixe de $|\Phi_0|$, ou être en nombre ∞^1 et former une courbe algébrique-base de $|\Phi_0|$, ou enfin être en nombre ∞^0, ce sont alors des points-base de $|\Phi_0|$.

Désignons par r, r_1, r_0 les dimensions des systemes $|\Phi|$, $|\Phi_1|$, $|\Phi_0|$. En rapportant projectivement les surfaces de $|\Phi|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, on obtient une variété V_3 à trois dimensions, rationnelle, sur laquelle il correspond à T une homographie harmonique dont un axe ne rencontre pas V_3, l'autre axe la rencontrant suivant les points qui correspondent aux points unis de I_2. Si l'on rapporte les surfaces de $|\Phi_1|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à r_1 dimensions, on obtient une variété V'_3 image de l'involution I_2, d'ordre $1+3m$. On obtiendra une seconde variété image de l'involution I_2 en rapportant projectivement les surfaces Φ_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions. Observons que si l'involution I_2 possède un nombre fini de points unis, il leur correspondra des points quadruples de la variété V'_3 [91]; si I_2 possède une courbe unie, il lui correspondra une courbe double de la variété V'_3.

Les systemes adjoints successifs de $|\Phi|$, lorsqu'ils existent, sont transformes en eux-mêmes par T. En partant de l'un de ces systemes, lorsque la chose est possible, on obtient des variétés analogues à V_3, V'_3, d'un ordre moindre.

46. Détermination de systemes homaloïdaux. — Les surfaces d'un systeme homaloïdal $|F|$ étant rationnelles, leurs adjointes n'existent pas. Cette remarque a permis a M. Piazzola-Beloch [11], d'obtenir des propriétés des eléments fondamentaux des transformations birationnelles, dans l'hypothese ou ces transformations sont régulieres.

Soit donc $|F|$ un systeme homaloïdal de surfaces d'ordre m, possédant une courbe-base Γ multiple ordinaire d'ordre s et un point-base O multiple ordinaire d'ordre r. Le $h^{\text{ième}}$ systeme adjoint $|F^{(h)}|$ a $|F|$, formé de surfaces d'ordre $m-4h$, ne peut exister, quel que soit h positif. Les surfaces $F^{(h)}$ doivent passer $s-h$ fois par Γ et $r-2h$ fois par O et ces conditions doivent être impossibles a remplir. Si k est le quotient de la division de m par 4, on prendra $h=k$. On trouve alors, si

$$\begin{array}{llll} m=4k, & s\geqq k+1 & \text{ou} & r\geqq 2k+1; \\ m=4k+1, & s\geqq k+1 & \text{ou} & r\geqq 2k+2, \\ m=4k+2, & s\geqq k+1 & \text{ou} & r\geqq 2k+3; \\ m=4k+3, & s\geqq k+1 & \text{ou} & r\geqq 2k+4. \end{array}$$

Le systeme $|F|$ doit donc posseder soit une courbe-base multiple d'indice s, soit un point-base multiple d'ordre r, s ou r satisfaisant aux inégalités précédentes.

Si μ est l'ordre de la courbe-base ayant la multiplicité la plus élevée, on doit avoir

$$m^2-\mu s^2>0,$$

d'où

$$\mu\leqq 15.$$

La courbe-base de multiplicité maximum de $|F|$ ne peut posséder qu'un nombre fini de quadrisécantes, et celles-ci font partie de la base de $|F|$. Si la courbe en question est plane, on a donc $\mu \leqq 3$; si elle est tracée sur une quadrique, on a $\mu \leqq 6$; si elle est tracée sur une surface cubique, on a $\mu \leqq 11$.

Les procédés utilisés ont permis à M. Piazzola-Beloch d'obtenir des résultats sur les courbes-base et les points-base de $|F|$ distincts des courbes et des points-base de multiplicités maxima. En outre, elle a pu déterminer les systèmes homaloïdaux dépourvus de courbes-base. Pour ces systèmes, on a $m \leqq 4$; ils sont au nombre de trois :

a. Système des quadriques circonscrites à un tétraèdre et ayant un plan tangent fixe en un des sommets;

b. Système des surfaces cubiques ayant en commun un point double et trois points simples, avec un contact du troisième ordre en un de ceux-ci;

c. Système des surfaces du quatrième ordre ayant en commun un point triple et un point simple, en lequel elles ont un contact du cinquième ordre.

Ajoutons que M. Piazzola-Beloch a également obtenu quelques résultats sur la décomposition des transformations birationnelles ayant comme courbe fondamentale de multiplicité maximum une sextique de genre trois, en produits de transformations d'un ordre moindre.

CHAPITRE V.

GROUPES CONTINUS DE TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES.

47. **Préliminaires.** — La détermination des groupes continus finis, birationnellement distincts, de transformations birationnelles de l'espace a été effectuée par Enriques et Fano [70]. On sait qu'un tel groupe est algébrique, ou contenu dans un groupe algébrique plus ample; on se bornera donc à l'étude des groupes algébriques.

Soit $\mathcal{G}$ un groupe continu, fini, de transformations birationnelles de l'espace. Appliquons les transformations de $\mathcal{G}$ aux surfaces d'un système continu; les systèmes transformés formeront un corps de surfaces d'un certain ordre n. Le système linéaire de dimension minimum auquel ce corps appartient sera transformé en lui-même par les transformations du groupe $\mathcal{G}$; il en sera de même du système linéaire complet de surfaces ayant la même base que le système précédent. Si r est la dimension de ce système linéaire complet, rapportons projectivement ses surfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions; on obtient ainsi dans cet espace une variété rationnelle V_3 et aux transformations du groupe $\mathcal{G}$ correspondent des homographies transformant la variété V_3 en elle-même. *Tout groupe continu fini de transformations birationnelles de l'espace est donc semblable à un groupe d'homographies d'un certain espace.*

48. Courbes et surfaces algébriques ayant une infinité de transformations projectives en elles-mêmes. — La propriété précédente montre que les recherches d'Enriques et Fano s'appuient sur les propriétés des courbes et des surfaces admettant un groupe continu de transformations projectives en elles-mêmes.

Les courbes possédant ces propriétés ont été étudiées par Klein et Lie [114, 115], qui les ont appelées courbes W. Une courbe transformée en elle-même par ∞^1 homographies, est algebrique ou transcendante; si elle est algébrique, elle est rationnelle; il n'existe sur la courbe que deux points unis (éventuellement coincidents) pour les homographies en question. Une courbe transformée en elle-même par ∞^2 homographies, est rationnelle.

Les surfaces de l'espace ordinaire admettant une infinité de transformations projectives en elles-mêmes ont été determinees par Enriques [66]; celles qui admettent un groupe ∞^1 de telles transformations ont également été determinées par Lie dans le troisieme volume de sa *Theorie der Transformations gruppen.* Fano [71] a déterminé les surfaces algebriques situées dans un espace quelconque, invariantes pour un groupe continu de transformations projectives.

Si F est une surface algébrique de S_r, admettant un groupe continu ∞^1 de transformations projectives en elle-même, elle contient un faisceau de courbes W. Il existe des projectivités échangeant ces courbes entre elles et par suite, si ces courbes sont transcendantes, la surface F admet un groupe transitif ∞^2 de transformations projectives en elle-même. De telles surfaces sont rationnelles. Si d'autre part, les courbes W de F sont algébriques, elles sont rationnelles et la surface F peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une réglée ou bien elle est rationnelle.

On en conclut alors que toute surface invariante pour un groupe continu ∞^2 au moins de transformations projectives, opérant transitivement sur les points de la surface, est rationnelle.

Dans l'espace ordinaire, on a donc les propriétés suivantes :

Toute courbe invariante pour un groupe algébrique $\mathcal{G}$ de transformations birationnelles, donnant sur la courbe ∞^2 transformations distinctes, est rationnelle.

Toute courbe invariante pour un groupe algébrique $\mathcal{G}$, donnant sur la courbe ∞^1 transformations distinctes, est rationnelle.

Toute surface invariante pour un groupe algébrique $\mathcal{G}$, opérant transitivement sur les points de cette surface, est une surface rationnelle.

L'examen des points unis des groupes de projectivités laissent invariante une surface algébrique, ou une variété algébrique V_3, donne enfin la proposition suivante :

Toute courbe lieu de points unis pour les transformations birationnelles d'un groupe continu, est une courbe algébrique ou appartient a une surface algébrique, egalement lieu de points unis pour les transformations du groupe.

49. Groupes primitifs de transformations ponctuelles de l'espace. — Dans sa *Théorie des groupes de transformations*, vol. III, S. Lie a montré que tout groupe primitif de transformations ponctuelles de l'espace, peut être ramene, par une transformation ponctuelle, à l'un des groupes suivants :

a. Groupe ∞^{10} des transformations conformes;

b. Groupe ∞^{15} des homographies, ou groupe ∞^{12} des affinités, ou groupe ∞^{11} des équivalences affines, ou groupe ∞^{10} des homographies conservant un système nul, ou groupe ∞^6 des homographies conservant une quadrique non conique, ou groupe ∞^7 des similitudes ou enfin groupe ∞^6 des mouvements (euclidiens).

Cette classification est valable pour les groupes de transformations birationnelles, mais lorsqu'il s'agit de determiner ceux de ces groupes qui sont birationnellement distincts, il convient d'examiner si de nouveaux cas ne peuvent se présenter, car les transformations ponctuelles utilisées par Lie pour la réduction ne sont pas nécessairement birationnelles.

50. **Groupes primitifs de transformations birationnelles.** — Soit, dans un espace Σ, $\mathcal{G}$ un groupe algébrique primitif de transformations birationnelles. Il existe, dans un espace Σ', un certain groupe $\mathcal{G}'$, rentrant dans un des types énumérés par Lie, tel que l'on passe de $\mathcal{G}'$ à $\mathcal{G}$ par une transformation ponctuelle T entre Σ, Σ'. Il existe une infinité de transformations de $\mathcal{G}'$ laissant fixes tous les points d'une droite, sans laisser fixes tous les points d'une surface passant par cette droite. La courbe C de Σ que T fait correspondre à cette droite est lieu de points unis des transformations de $\mathcal{G}$ sans appartenir à une surface lieu de points unis; elle est donc algébrique. Mais de plus, les transformations de $\mathcal{G}$ qui laissent C invariante, déterminent sur cette courbe au moins ∞^1 transformations distinctes. Par suite, aux droites de Σ', T fait correspondre des courbes rationnelles (ou des courbes formées de parties irréductibles variables rationnelles).

Aux plans de Σ', T fait correspondre des surfaces appartenant à un système linéaire invariant complet, dont les surfaces se coupent suivant des courbes rationnelles. Ces systèmes ont été déterminés par Enriques (n° 39) et par suite :

Chaque groupe primitif de transformations birationnelles de l'espace est birationnellement identique à un groupe projectif ou à un groupe conforme.

Les groupes primitifs projectifs sont connus, ce sont ceux qui ont été énumérés par Lie. Les sous-groupes primitifs du groupe conforme sont birationnellement identiques à des groupes projectifs, exception faite pour le groupe des transformations conformes laissant fixe une sphère donnée. Ce dernier groupe ne peut être ramené à un groupe projectif que par une transformation (1, 2).

51. **Groupes algébriques simplement infinis.** — Soit $\mathcal{G}$ un groupe algébrique simplement infini. Les trajectoires des points sont des courbes rationnelles C, formant une congruence linéaire. Sur chacune de ces courbes, se trouvent deux points unis par les transformations

de $\mathcal{G}$. Si ces points sont confondus, leur lieu est une surface (éventuellement réduite à une courbe ou à un point fixe) unisécante des courbes C. Si les points unis sont distincts, leur lieu se scinde en deux surfaces unisécantes des courbes C, car autrement, si l'on passe à la variété V_3 comme il a été indiqué plus haut (n° 47), l'espace contenant la surface lieu des points unis des courbes C sera formé de points unis; mais alors l'espace linéaire contenant une courbe C contient une infinité de points unis et par suite une infinité d'hyperplans unis. Il en résulterait que $\mathcal{G}$ déterminerait, sur toute courbe C, un nombre fini de transformations, ce qui est absurde.

La congruence des courbes C ayant une surface unisécante, est birationnellement équivalente à une gerbe de rayons. Par suite : *Un groupe algébrique ∞^1 de transformations birationnelles de l'espace est birationnellement équivalent à un groupe dont les trajectoires sont les rayons d'une gerbe.*

52. **Conséquence pour la réduction d'autres groupes.** -- Le résultat précédent permet de déterminer les types birationnellement équivalents aux groupes de certaines classes.

Si $\mathcal{G}$ est un groupe doublement intransitif, il existe une congruence de courbes C, trajectoires d'un sous-groupe ∞^1 algébrique de $\mathcal{G}$ et, par suite, on peut transformer birationnellement $\mathcal{G}$ en un groupe laissant invariante une gerbe de droites.

Un groupe continu algébrique intégrable possède un sous-groupe ∞^1 invariant qui est algébrique et l'on peut également le transformer birationnellement en un groupe laissant invariante une gerbe de droites.

En particulier, un groupe ∞^2 étant intégrable, on peut lui appliquer le résultat précédent en le précisant davantage. D'une manière précise, un groupe algébrique ∞^2 de transformations birationnelles est birationnellement équivalent à un groupe laissant invariants les plans d'un faisceau et une gerbe de droites dont le sommet appartient à l'axe du faisceau.

Un groupe simplement intransitif est birationnellement équivalent à un groupe laissant invariants les plans d'un faisceau.

Un groupe algébrique, transitif, ∞^1 au moins, qui laisse invariante une série ∞^1 de surfaces, laisse invariante une série ∞^1 de surfaces algébriques. Si cette série est un faisceau, le groupe est birationnellement équivalent à un groupe laissant invariant un faisceau de plans. Si cette série n'est pas un faisceau, le groupe se transforme birationnellement en un groupe laissant invariante une gerbe de droites.

33. Groupes transitifs possédant une congruence invariante du premier ordre de courbes. — Soit $\mathcal{G}$ un groupe transitif, ∞^{3} au moins, possédant une congruence invariante, du premier ordre, de courbes C, dont les éléments sont échangés d'une manière primitive. Les courbes C sont algébriques ainsi que la congruence. De plus, les courbes C sont rationnelles et la congruence étant linéaire (par un point de l'espace passe par une courbe C), est également rationnelle en vertu du théorème de Castelnuovo sur la rationnalité des involutions planes.

Considérant les courbes C comme eléments, les transformations du groupe $\mathcal{G}$ déterminent un groupe primitif $\mathcal{G}'$ semblable à un groupe projectif du plan (Fano, [72]). Les groupes $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}$ sont isomorphes, mais cette isomorphie peut être mériédrique. Une analyse minutieuse des circonstances qui peuvent se presenter montre l'existence d'une surface unisecante des courbes C. Par suite : *Un groupe algébrique de transformations birationnelles, laissant invariante une congruence du premier ordre de courbes et déterminant, sur l'ensemble de ces courbes, un groupe primitif, est birationnellement équivalent à un groupe laissant invariante une gerbe de rayons, sur les éléments de laquelle il opère d'une manière primitive.*

34. Groupes simples, transitifs, ∞^{3}. — Soit $\mathcal{G}$ un groupe algébrique ∞^{3}, simple, transitif, de transformations birationnelles. Les transformations de $\mathcal{G}$ portant un point A en un point B forment un groupe d'ordre fini $n \geq 1$. Le point A étant fixe et le point B variable et considérons les opérations de $\mathcal{G}$ portant A en B une première fois comme éléments d'une variété V_3, une seconde fois comme opérations agissant sur les points de V_3 (par multiplication à droite, ou à gauche, le sens étant fixé). On obtient ainsi un groupe transitif $\mathcal{G}'$ opérant sur les points de V_3. De plus, entre les points de l'espace ambiant et les points de V_3, on obtient une correspondance $(1, n)$, les n points de V_3 qui correspondent à un point B de l'espace représentant les n transformations portant A au point B. Ces groupes de n points forment, sur V_3, une involution I_n. Cette involution est invariante pour le groupe $\mathcal{G}'$.

Cela étant, la réduction des groupes $\mathcal{G}$ considérés comprendra deux parties :

a. Détermination des variétés V_3 birationnellement distinctes;

b. Construction des involutions I_n invariantes pour le groupe Γ'.

On sait que le groupe $\mathcal{G}$ et le groupe $\mathcal{G}'$ ont la même composition que le groupe projectif binaire (Lie, *loc. cit.*). Il existe par suite sur V_3 une congruence du premier ordre de courbes rationnelles C et une série ∞^1 de surfaces rationnelles F se coupant deux a deux suivant des courbes C. Les courbes C et les surfaces F ont en commun le point qui représente la transformation identique de $\mathcal{G}$, mais elles peuvent avoir d'autres points communs (en nombre fini); ces points représentent les transformations d'un groupe cyclique, invariant de $\mathcal{G}$. Le groupe $\mathcal{G}$ sera dit de premiere espèce dans le premier cas, de seconde espece dans le second cas.

Les groupes $\mathcal{G}$ de premiere espèce se ramènent aux groupes d'homographies biaxiales de l'espace ordinaire, laissant fixes une quadrique déterminée et toutes les génératrices d'un mode de cette quadrique.

Les groupes $\mathcal{G}$ de seconde espece se ramenent aux groupes d'homographies de S_4 laissant fixes une hyperquadrique non conique, une de ses sections hyperplanes et toutes les génératrices rectilignes d'un mode de cette section. Ces groupes possèdent un sous-groupe invariant d'ordre deux, et sont en correspondance d'isomorphie (2, 1) avec le groupe projectif binaire (en d'autres termes, les courbes C et les surfaces F ont deux points fixes communs).

Au point A correspondent, sur V_3, les points qui représentent les transformations de $\mathcal{G}$ laissant fixe le point A et qui forment un groupe de l'involution I_n. Si $\mathcal{G}$ est un groupe de première espece, les transformations laissent le point A fixe, forment un sous-groupe fini en isomorphisme holoédrique avec un groupe binaire, cyclique ou diédrique, ou avec un des groupes des polyèdres réguliers. Si $\mathcal{G}$ est un groupe de seconde espece, ce sous-groupe est cyclique d'ordre impair ($\geqq 1$). Appelons Γ ce sous-groupe.

Si Γ est cyclique, le groupe $\mathcal{G}$ est birationnellement identique à un groupe laissant invariante une gerbe de droites. Il en est de même si le groupe Γ est diédrique. Au contraire, si Γ correspond à un des trois groupes de polyèdres réguliers, il n'existe aucune congruence du premier ordre de courbes rationnelles qui soit invariante pour le groupe $\mathcal{G}$. Il n'existe pas non plus dans ce cas, pour le groupe $\mathcal{G}$, de faisceau invariant de surfaces rationnelles.

Si Γ correspond au groupe du tétraèdre, le groupe $\mathcal{G}$ est birationnellement identique à un groupe conforme laissant invariante une quartique gauche rationnelle (de seconde espèce).

Si Γ correspond au groupe de l'octaèdre, le groupe $\mathcal{G}$ est birationnellement identique à un groupe de transformations cubiques caractérisé par la condition de transformer en lui-même le système linéaire des surfaces du troisième ordre passant par une quartique gauche de seconde espèce.

Si Γ correspond au groupe de l'icosaèdre, le groupe $\mathcal{G}$ est birationnellement identique à un groupe de transformations du septième ordre caractérisé par la condition de transformer en lui-même un système linéaire ∞^{12} de surfaces d'ordre sept se touchant le long d'une courbe-base formée d'une conique double, d'une droite simple tangente à la conique, le point de contact étant triple pour les surfaces.

55. **Résumé.** — Parmi les transformations rencontrées, se trouvent des transformations qui laissent invariant soit un faisceau de plans, soit une gerbe de droites; ces transformations généralisent les transformations planes laissant invariant un faisceau de droites et qui ont été considérées par de Jonquières. Pour cette raison, les transformations en question ont été appelées, par Enriques et Fano, transformations de Jonquières. Cette définition posée, on peut énoncer le théorème suivant :

Les groupes algébriques, continus, finis de transformations birationnelles de l'espace peuvent se ramener, par des transformations birationnelles, à un groupe projectif, ou à un groupe conforme, ou à un groupe de transformations de Jonquières, ou à un groupe simple transitif de transformations cubiques, ou à un groupe simple transitif de transformations du septième ordre.

56. **Groupes de transformations de Jonquières.** — Les groupes de transformations de Jonquières peuvent être classés en utilisant les résultats connus sur les groupes de projectivités d'une droite et sur

les groupes de transformations birationnelles du plan. Cette recherche a été effectuée par Fano [74], dont voici les résultats.

Tout groupe de transformations de Jonquières (algébrique, continu, fini) peut se ramener, par une transformation birationnelle, à l'un des douze types suivants (ou à un de leurs sous-groupes) :

1° Groupe ∞^{11} transformant en eux-mêmes un faisceau de plans et une gerbe de droites dont le sommet n'appartient pas à l'axe du faisceau, déterminant dans la gerbe le groupe des projectivités.

2° Groupe ∞^{9} ayant un faisceau uni de plans et une gerbe unie de droites dont le sommet n'appartient pas à l'axe du faisceau, déterminant dans la gerbe le groupe conforme.

3° Groupe ∞^{n+7} ayant un faisceau uni de plans et une gerbe unie de droites dont le sommet n'apppartient pas à l'axe du faisceau, déterminant dans la gerbe un groupe de transformations de Jonquières.

Groupes laissant invariant un système de monoïdes de même sommet, ayant même cône tangent en ce sommet, éventuellement d'autres éléments communs et déterminant dans la gerbe de droites ayant pour sommet celui des monoïdes :

4° Le groupe projectif.

5° Le groupe conforme.

6° Un groupe de transformations de Jonquières.

7° Groupe ∞^{2n+9} des transformations d'ordre n qui laisse invariant le système linéaire ∞^{n+2} des cônes d'ordre n ayant une génératrice $(n-1)$-uple en commun et des plans tangents fixes le long de cette génératrice.

8° Groupe ∞^{7} des transformations d'ordre $m+n-1$ qui laisse invariant le système ∞^{m+n+1} des surfaces d'ordre $m+n-1$ ayant deux droites gauches multiples d'ordres $m-1$, $n-1$ et des plans tangents fixes le long de ces droites.

9° Groupe de dimension $\frac{1}{2}p(n+1)n-n+p+5$ des transformations d'ordre np laissant invariant un système linéaire de surfaces d'ordre np ayant un point $(np-1)$-uple fixe, une droite $(np-n)$-uple fixe passant par ce point et $p-1$ droites n-uples fixes. infiniment voisines de la précédente.

10° Groupe ∞^{3}, simple, intransitif, des transformations d'ordre n laissant fixe chaque plan d'un faisceau et le système linéaire ∞^{n+2} de surfaces d'ordre n ayant l'axe du faisceau comme droite multiple d'ordre $n-2$, les $n-2$ plans tangents le long de cette droite étant fixes, et passant encore par une courbe plane d'ordre n.

11° Groupe ∞^8 des transformations cubiques laissant invariant le système linéaire ∞^7 des surfaces cubiques ayant un même point double et passant encore par une cubique gauche qui contient ce point.

12° Groupes ∞^1, simples, transitifs, tels que les transformations laissant fixe un point quelconque forment un groupe diédrique fini d'ordre $2n (n \geqq 2)$.

Pour $n=2$, sous-groupe du groupe 11° formé par les transformations qui laissent fixe un cône quadratique ayant pour sommet le point double des surfaces cubiques.

Pour $n \geqq 3$, groupe des transformations d'ordre $2n-5$ laissant invariant le système ∞^n des surfaces d'ordre $2n-5$ ayant une cubique gauche fixe multiple d'ordre $n-3$, passant par les cordes de cette cubique joignant deux à deux $n-3$ de ses points et tangente en chaque point de la cubique aux plans projetant ces $n-3$ points de la tangente à la cubique au point considéré.

37. **Sur les groupes continus primitifs.** — Comme on l'a vu plus haut, Enriques et Fano ont utilisé les résultats de Lie pour déterminer les types birationnellement distincts des groupes continus primitifs; Fano [73] a ensuite retrouvé ces résultats, en les précisant, par une méthode directe.

La méthode de Fano est basée sur l'observation suivante :

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe continu, fini, primitif, ∞^r. Il y aura au moins ∞^{r-3} transformations de $\mathfrak{G}$ laissant fixe un point P. Ces transformations forment un sous-groupe qui agit dans la gerbe des directions des droites de sommet P comme un groupe projectif, continu (sans quoi $\mathfrak{G}$ serait imprimitif). Quatre cas peuvent se présenter :

a. Les directions des droites de la gerbe de sommet P sont permutées entre elles suivant les ∞^8 projectivités de cette gerbe;

b. Il y a au moins une direction fixe issue de P;

c. Il y a un faisceau de directions de sommet P invariant, sans qu'il y ait aucune direction fixe issue de P;

d. Il existe un cône quadratique de sommet P (considéré comme ensemble des directions de ses génératrices) transformé en lui-même.

Dans le premier et le quatrième cas, le groupe $\mathcal{G}$ est certainement primitif; dans le deuxième, il est certainement imprimitif; dans le troisième, les deux alternatives peuvent se présenter.

L'analyse détaillée de ces cas permet à Fano de retrouver les groupes projectifs et conformes dont il a eté question plus haut (n° 50).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

TRAITÉS.

I. Bertini. — Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi (Pise, 1907).

II. Doehlemann. — Geometrische Transformationen, Teil II (Leipzig, 1908).

III. Enriques-Chisini. — Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche (Bologne, 1915, 1918, 1924).

IV. Enriques-Chisini. — Courbes et fonctions algébriques d'une variable. Traduction Légaut (Paris, 1927).

V. Hudson. — Cremona Transformations in plane and space (Cambridge, 1927).

VI. Picard-Simart. — Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes (Paris, 1897, 1906).

VII. Severi. — Trattato di geometria algebrica (Bologne, 1927).

VIII. Sturm. — Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften (Leipzig, 1909).

MÉMOIRES.

1. Albanese. — Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque in un'altra priva di punti multipli (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1928).

2. Amigues. — Recherches sur deux modes de transformations des figures solides (*Nouv. Ann. math.*, 1879, 1880).

3. Aprile. — Una trasformazione cremoniana dello spazio ed alcuni sistemi di quartiche gobbe di 2° specie (*Mem. Circ. Matem. di Catania*, 1921).

4. Aprile. — Sulle involuzioni di coppie di punti dello spazio ordinario (*Atti Accad. Gioenia di Catania*, 1932).

5. Aroldi. — Le trasformazioni birazionali dello spazio determinate dalla più generale superficie del quart'ordine dotata di conica doppia (*Giornale di Battaglini*, 1920).

6. Aschieri. — Sopra una classe di trasformazioni razionali in spazi a tre dimensioni (*Mem. R. Istituto Lomb.*, 1881).

7. ASCHIERI. — Sulle corrispondenze cremoniane nel piano e nello spazio (*Rend. R. Istituto Lomb.*, 1881).

8. ASCIONE. — Studio di una trasformazione (3,3) (*Giornale di Battaglini*, 1893).

9. ASCIONE. — Sopra alcune involuzioni dello spazio (*Rend. R. Accad. di Napoli*, 1896).

10. AUTONNE. — Sur les substitutions régulières non linéaires (*C. R. Acad. Sci.*, 2e sem., 1896).

11. BELOCH. — Sulle trasformazioni birazionali dello spazio (*Annali di Matematica*, 3e série, t. 16, 1909).

12. BELOCH *in* PIAZZOLA. — Sulle trasformazioni birazionali nello spazio aventi un'unica curva fondamentale (*Rend. Seminario Padova*, 1930).

13. BELTRAMI. — Estensione allo spazio a tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti (*Giornale di Battaglini*, 1863).

14. BERARDI. — Le trasformazioni birazionali dello spazio determinati da sistemi omaloidici di quintiche dotate di una retta tripla e di due doppie (*Giornale di Battaglini*, 1923).

15. BERTINI. — Sui sistemi lineari (*Rend. R. Istituto Lomb.*, 1882).

16. BERTINI. — Construzioni geometriche della trasformazione univoca di 3o ordine (*Rend. R. Istituto Lomb.*, 1882).

17. BERTINI. — Sui sistemi lineari di grado zero (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1901).

18. BERZOLARI. — Sulle intersezioni di tre superficie algebriche (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 24, 1896).

19. BIANCHI. — Nota sulle trasformazioni univoche nel piano e nello spazio (*Giorn. di Battaglini*, 1878).

20. BOLUS. — Sur une involution du second ordre de l'espace (*Mém. Soc. roy. Sci. Liége*, 1929, 1930).

21. BONICELLI. — Sopra una trasformazione birazionale dello spazio di 3o grado e una classe di superficie razionali del 6o ordine (*Giornale di Battaglini*, 1902).

22. BURNIAT. — Sur une transformation birationnelle associée à une surface du quatrième ordre ayant deux points doubles coniques (*Mém. Soc. roy. Sci. Liége*, 1931, 1932).

23. BURNIAT. — Sur les points fondamentaux des transformations birationnelles de l'espace (*Bull. Acad. roy. Belgique*, 1932, 1933).

24. BURNIAT. — Sur une représentation du domaine d'une droite multiple sur une surface algébrique (*Bull. Soc. roy. Sci. Liége*, 1932).

25. CALDARERA. — Le trasformazioni birazionali dello spazio ineranti ad una cubica sghemba (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1904).

26. CAMPEDELLI. — Sulla postulazione di una curva i-pla (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1931).

27. CANTONE. — Teoremi sulla cubica gobba, dedotti dallo studio di una trasformazione involutoria nello spazio (*Rend. R. Accad. di Napoli*, 1886).

28. CAPORALI. — Sulla superficie del quinto ordine dotata d'una curva doppia del quinto ordine (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 7, 1875).

29. CARBONE. — Le trasformazioni birazionali fra due spazi ad n dimensioni con particolare considerazione al caso $n = 4$ (*Atti Accad. Gioenia di Catania*, 1898).

30. CASTELLI. — Studio di una particolare trasformazione cubica dello spazio con applicazione a talune superficie del 4° e del 5° ordine (*Giornale di Battaglini*, 1916).

31. CASTELNUOVO. — Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 25, 1897).

32. CAYLEY. — On the rational transformation between two spaces (*Proc. London Math. Soc.*, 1870).

33. CECH. — Sur une transformation birationnelle du troisième ordre (en tchèque) (Casopis, 1921).

34. CHISINI. — Osservazioni sui punti singolari delle curve multiple di una superficie algebrica (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1917).

35. CHISINI. — Sulla singolarità di une superficie in un punto generico di una curva multipla (*Rend. R. Accad. Bologna*, 1920).

36. CHISINI. — La risoluzione delle singolarità di una superficie mediante trasformazioni birazionali dello spazio (*Mem. R. Accad. Bologna*, 1921).

37. CHIZZONI. — Sopra una certa famiglia di superficie che s'incontrano in una trasformazione involutoria di terzo grado nello spazio (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1886).

38. COBLE. — Point sets and allied Cremona groups (*Trans. Amer. Soc.*, 1915, 1916, 1917).

39. CREMONA. — Memoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre (*Journal de Crelle*, 1868).

40. CREMONA. — Sulla trasformazione razionale di 2° grado nello spazio, la cui inversa e di 4° grado (*Mem. R. Accad. Bologna*, 1871).

41. CREMONA. — Sulla superficie di quart ordine, dotata di una conica doppia (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1871).

42. CREMONA. — Sulle trasformazioni razionali nello spazio (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1871).

43. CREMONA. — Ueber die Abbildung algebraischer Flachen (*Math. Annalen*, t. 4, 1871).

44. CREMONA. — Sulle trasformazioni razionali nello spazio (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 5, 1871).

45. CREMONA. — On a geometrical transformation of the fourth order in space of three dimensions, the inverse transformation being of the sixth order (*Trans. Irish Acad.*, 1884).

46. CREMONA. — Sopra une trasformazione birazionale del sesto grado, del spazio a tre dimensioni, la cui inversa e del quinto ordine (*Proc. London Math. Soc.*, 1884).

47. DARBOUX. — Sur un mode de transformation des figures et son application à la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points (*Ann. Éc. Norm. sup. Paris*, 1869).

48. DEL PEZZO. — Sui sistemi di curve e di superficie (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1889).

49. DEL PEZZO. — Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1892).

50. DEL PEZZO. — Le trasformazioni coniche dello spazio (*Rend. R. Accad. Napoli*, 1896).

51. DE PAOLIS. — Sopra un sistema omaloidico formato di superficie d'ordine n con un punto $(n-1)$-plo (*Giornale di Battaglini*, 1875).

52. DE PAOLIS. — Alcuni trasformazioni particolari involutorie dello spazio (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1885).

53. DE PAOLIS. — Le trasformazioni doppie dello spazio (*Mem. R. Accad. Lincei*, 1885).

54. DERUYTS. — Sur quelques transformations géométriques (*Mém. Soc. roy. Sci. Liége*, 1888).

55. DOEHLEMANN. — Ueber eine synthetische Erzeugung der Cremona'schen Transformationen dritter und vierter Ordnung (*Zeitsch. für Math. und Phys.*, 1887, 1888).

56. DOEHLEMANN. — Untersuchung der Flächen, welche sich durch eindeutigen aufeinander bezogene Strahlenbündel erzeugen lassen (Munich, 1889).

57. DOEHLEMANN. — Ueber lineare Systeme in der Ebene und im Raum und ueber deren Jacobi'sche Curve beziehungsweise Jacobi'sch Fläche (*Math. Annalen*, t. 41, 1893).

58. DOEHLEMANN. — Ueber eine einfache, eindeutige Raumtransformation 3. Ordnung (*Berichte Akad. München*, 1894).

59. DOHOGNE. — Sur une transformation birationnelle de l'espace (*Mém. Soc. roy. Sci. Liége*, 1929).

60. EBERHARDT. — Ueber eine räumliche involutorische Verwandschaft siebenten Grades und ihre Kernfläche vierter Ordnung (Breslau, 1885).

61. ECKHARDT. — Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere zur Theorie der Flächen 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten und der Steiner'schen Flächen, sowie zur Lehre von den Raumkurven (*Math. Annalen*, t. 5, 1872).

62. EMCH. — On surfaces and curves which are invariant under Cremona transformations (*Amer. Journ. of Math.*, 1926).

63. ENRIQUES. — Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1893; *Math. Annalen*, t. 46, 1894).

64. ENRIQUES. — Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabile sono curve ellittiche (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1894).

65. ENRIQUES. — Sulle irrazionalità di cui puo farsi dipendere la risoluzione di un'equazione algebriche $f(x, y, z) = 0$ con funzioni razionali di due parametri (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1895; *Math. Annalen*, t. 49, 1895).

66. ENRIQUES. — Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse (*Atti. R. Ist. Veneto*, t. 4 et 5, 1893).

67. ENRIQUES. — Sopra un'involuzione non razionale dello spazio (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1912).

68. ENRIQUES. — L'interno d'una curva sopra una superficie algebrica (*Rend. R. Accad. Bologna*, 1916).

69. ENRIQUES. — Sui rami delle curve algebriche gobbe nell'intorno di un punto singolare (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1917).

69 *bis*. — ENRIQUES. — Sull'analisi delle singolarità puntuali delle superficie algebriche mediante divisioni di polinomi (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1917).

70. ENRIQUES et FANO. — Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniani dello spazio (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 26, 1897).

71. FANO. — Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1895).

72. FANO. — Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1896).

73. FANO. — I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniani dello spazio (*Atti. R .Accad. Torino*, 1897-1898).

74. FANO. — I gruppi di Jonquières generalizzatti (*Mem. R. Accad. Torino*, 1898).

75. FANO. — Sopra alcuni gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntali dello spazio (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1898).

76. FANO. — Le trasformazioni infinitesimi dei gruppi cremoniani tipici delle spazio (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1898).

77. FANO. — Ueber Gruppen insbesondere continuirliche Gruppen von Cremona Transformationen der Ebene und des Raumes (*Monatshefte Math. Phys.*, 1898).

78. FANO. — Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie sezioni razionali (*Annali di Matematica*, 3e série, t. 24, 1915).

79. GECK. — Ueber die singularen Punkten algebraischer Flachen (Tübingue) 1900).

80. GECK. — Ueber uniplanare Knotenpunkte (*Mitth. Wurtenberg*, 1904).

81. GEISER. — Ueber zwei geometrische Probleme (*Journal de Crelle*, 1867).

82. GEISER. — Zur Theorie der Flachen zweiten und dritten Grades (*Journal de Crelle*, 1868).

83. GEISER. — Ueber die Flachen vierten Grades, welsche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen (*Journal de Crelle*, 1869).

84. GODEAUX. — Sur une transformation arguésienne de l'espace (*Bull. Acad. roy. Belgique*, 1907).

85. GODEAUX. — Sur les transformations birationnelles involutives qui permutent les droites d'une congruence (*Mém. Soc. Hainaut*, 1910).

86. GODEAUX. — Sur la quatrième congruence de cubiques gauches de M. Stuyvaert (*Nouv. Ann. math.*, 1911).

87. GODEAUX. — Sur la théorie des congruences de courbes (*Bull. Acad. Cracovie*, 1921).

88. GODEAUX. — Sur les transformations birationnelles de Jonquières de l'espace (*Acad. roy. Belgique*, 1922; Mém. in-8).

89. GODEAUX. — Sur une transformation birationnelle monoïdale involutive (*O Istituto, Coïmbre*, 1925).

90. GODEAUX. — Sur les courbes fondamentales des transformations birationnelles involutives de l'espace (*Bul. Acad. roy. Belgique*, 1929).

91. GODEAUX. — Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Bul. Acad. roy. Belgique*, 1931).

92. GODEAUX. — Questions non résolues de géométrie algébrique. Les involutions de l'espace et les variétés algébriques à trois dimensions (Paris, 1933).

93. GUCCIA. — Sui sistemi lineari di superficie algebriche dotati di singolarità base qualunque (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1887).

94. GUCCIA. — Théorèmes sur les points singuliers des surfaces algébriques (*C. R. Acad. Sci.*, 1er sem. 1887).

95. GUCCIA. — Un teorema sulla curve singolari delle superficie algebriche (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1888).

96. GUCCIA. — Sulla intersezione di tre superficie algebriche in un punto singolare e su una questione relativa alle trasformazioni razionali nello spazio (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1889).

97. HALPHEN. — Sur un point de la théorie du contact (*Bul. Soc. math. France*, 1874).

98. HALPHEN. — Sur les singularités des courbes gauches algébriques (*Bul. Soc. math. France*, 1877).

99. HASKELL. — On a certain rational transformation in space (*Amer. math. Monthly*, 1903).

100. HUDSON. — On the 3-3 birational transformation in three dimensions (*Proc. London math. Soc.*, 1911, 1912).

101. HUDSON. — On cubic birational space transformation (*Amer. Journ. of math.*, 1912).

102 HUDSON. — On the product of two quadro-quadric space transformations (*Amer. Journ. of math.*, 1913).

103. HUDSON. — On fundamental points in Cremona space transformations (*Annali di Matematica*, 3e série, t. 19, 1912).

104. HUDSON. — Curves of simple contact on algebraic surfaces (*Math. Annalen*, t. 73, 1913).

105. HUDSON. — Curves of contact of any order on algebraic surfaces (*Proc. London Math. Soc.*, 1913).

106. HUDSON. — On binodal and nodal curves (*Congrès de Cambridge*, 1913).

107. HUDSON. — On the composition of Cremona space transformations (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 35, 1913).

108. HUDSON. — Incidence relations for Cremona space transformations (*Proc. London Math. Soc.*, 1927).

109. HUDSON et WREN. — Involutory point-pairs in the quadro-quadric Cremona space transformation (*Proc. London Math. Soc.*, 1926).

110. KANTOR. — Sur le nombre de groupes cycliques dans une transformation de l'espace (*C. R. Acad. Sci.*, 2e sem. 1880).

111. KANTOR. — Theorie der Transformationen im R_r, welche sich aus quadratischenzusammensetzen lassen (*Amer. Journ. of math.*, 1896).

112. Kantor. — Theorie des periodischen cubischen Transformationen im Raume R_3 (*Amer. Journ. of math.*, 1897).
113. Kantor. — Theorie der Transformationen im R_3, welche keine Fundamentalcurven I. Art besitzen und ihre *r* endlichen Gruppen (*Acta math.*, 1897).
114. Klein et Lie. — Sur une certaine famille de courbes et de surfaces (*C. R. Acad. Sci.*, 1er sem. 1870).
115. Klein et Lie. — Ueber diejenigen ebenen Kurven welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich uebergehen (*Math. Annalen*, t. 4, 1871).
116. Kobb. — Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables (*Journal de Liouville*, 1892).
117. Lairesse. — Sur quelques transformations birationnelles involutives de l'espace (*Mém. Soc. roy. Sci. Liége*, 1929).
118. Legaut. — Sur les courbes gauches algébriques (*Bul. Soc. math. France*, 1925).
119. Levi (B.). — Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 26, 1897; 3e série, t. 2, 1899).
120. Levi (B.). — Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche (*Atti R. Accad. Torino*, 1897).
121. Levi (B.). — Sulla trasformazione di una curva algebrica in un'altra priva di punti multipli (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1898).
122. Levi (B.). — Sulla trasformazione dell'intorno di un punto per una corrispondenza birazionale fra due spazi (*Atti R. Accad. Torino*, 1900).
123. Levi (B.). — Sur la résolution des points singuliers des surfaces algébriques (*C. R. Acad. sci.*, 2e sem. 1902).
124. Levi (B.). — Punti doppi uniplanari delle superficie algebriche (*Atti R. Accad. Torino*, 1904).
125. Loria. — Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio, in particolari sulle trasformazioni di genere zero (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1890).
126. Loria. — Le trasformazioni razionali dello spazio determinate de una superficie generale di terz'ordine (*Atti R. Accad. Torino*, 1891).
127. Luroth. — Rationale Flachen und involutorische Transformationen (Freibourg, 1889).
128. Marletta. — Alcuni sistemi omaloidici nell' S_n (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1925).
129. Martinetti. — Sopra una classe di trasformazioni involutorie dello spazio (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1885).
130. Medugno. — Della trasformazione birazionale 2-4 (Naples, 1910).
131. Moffa. — Su alcune corrispondenze birazionali involutorie dello spazio dotate di un sistema lineare di dimensione tre di superficie del terzo ordine (Naples, 1923).
132. Montesano. — Su alcuni gruppi chiusi di trasformazioni involutorie nel piano e nello spazio (*Atti R. Ist. Veneto*, 1888).

133. MONTESANO. — Su le trasformazioni involutorie monoidale (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1868).

134. MONTESANO. — Su una classe di trasformazioni involutorie dello spazio (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1888).

135. MONTESANO. — Su le trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso lineare di rette (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1888).

136. MONTESANO. — Sula trasformatione involutoria dello spazio che determina un complesso tetraedrale (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1889).

137. MONTESANO. — Su le trasformazioni involutorie delle spazio nelle quali ai piani corrispondano superficie di ordine n con una retta $(n-2)$-pla (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1889).

138. MONTESANO. — Su le trasformazioni univoche dello spazio che determinano complessi quadratici di rette (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1892).

139. MONTESANO. — Su di un sistema lineare di coniche nello spazio (*Atti della R. Accad. Torino*, 1892).

140. MONTESANO. — Su le congruenze lineari di coniche nello spazio (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1893).

141. MONTESANO. — Su una classe di trasformazioni razionali ed involutorie dello spazio di genere arbitrario n e di grado $2n+1$ (*Giornale di Battaglini*, 1893).

142. MONTESANO. — Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio (*Rend. R. Accad. Napoli*, 1895).

143. MONTESANO. — Su due trasformazioni razionali ed involutorie dello spazio di 4° ordine e di genere zero (*Rend. R. Ist. Lomb*, 1897).

144. MONTESANO. — Su alcuni sistemi razionali di trasformazioni Cremoniani (*Giornale di Battaglini*, 1903).

145. MONTESANO. — Sulle corrispondenze birazionali dello spazio che determinano complessi di tangenti (*Rend. R. Accad. Napoli*, 1907).

146. MONTESANO. — Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1918; 2e sem. 1921).

147. MONTESANO. — Principio di estensione nella teoria delle corrispondenze birazionali dello spazio (*Rend. R. Accad. Napoli*, 1921).

148. MONTESANO. — Su alcuni tipi di corrispondenze cremoniane spaziali collegati alle corrispondenze birazionali piane di ordine n (*Rend. R. Accad. Napoli*, 1921).

149. MONTESANO. — Su la teoria generale delle corrispondenze birazionali fra i punti dello spazio (*Atti R. Accad. Napoli*, 1926).

150. MONTESANO. — Le iperomografie dello spazio con indici eguali (*Atti R. Accad. Napoli*, 1930).

151. MOUTARD. — Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques (*Nouv. Ann. math.*, 1864).

152. NEUMANN. — Ueber quadratische Verwandschaften in Ebene und Raum; insbesondere Kreis-und Kugelverwandschaft (*Kœnigsberg*, 1908).

153. NOBILE. — Le trasformazioni birazionali di genere uno dello spazio (*Giornale di Battaglini*, 1921).

154. Noether. — Ueber die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen (*Math. Annalen*, t. 3, 1871).

155. Noether. — Sulle curve multiple di superficie algebriche (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 5, 1871).

156. Osborn. — A study of the involutorial transformations in space which leave a web of sextic surfaces invariant (*Amer. Journ. of math.*, 1924).

157. Paelinck. — Sur une transformation birationnelle involutive de l'espace (*Mém. Soc. roy. Sci. Liége*, 1932).

158. Pannelli. — Sui complessi associati ad ogni trasformazione birazionale dello spazio (*Giornale di Battaglini*, 1890).

159. Pannelli. — Sulla riduzione delle singolarità di una curva gobba (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1893).

160. Pannelli. — Sulla riduzione delle singolarità di una superficie algebrica per mezzo di trasformazioni birazionali dello spazio (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 25, 1897).

161. Pannelli. — Sopra una proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1910; 1er sem. 1911).

162. Pannelli. — Sopra alcune relazioni fra gli elementi fondamentali di due spazi in corrispondenza birazionale (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1914).

163. Paul. — Sur les points triples uniplanaires d'une surface algébrique (*Mém. Soc. roy. Sci. Liége*, 1933).

164. Pelzner. — Ueber involutorische Raumverwandschaften, und solche transformationen, bei denen den Ebenen des einen Raumes Flächen 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt entsprechen (Munich, 1913).

165. Perazzo. — Sulle incidenza di rette, piani, e spazii ordinarii in uno spazio a cinque dimensioni e su alcune corrispondenze birazionali fra piani e spazii ordinarii (*Mem. R. Accad. Torino*, 1904).

166. Pieri. — Sulle trasformazioni birazionali dello spazio inerenti a un complesso lineare speciale (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1892).

167. Pieri. — Sulle trasformazioni involutorie dello spazio determinate da un complesso hirstiano di rette (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1892).

168. Pieri. — Le trasformazioni razionali dello spazio inerenti ad una conica (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1893).

169. Pieri. — Sui sistemi lineari di coni (*Rivista di Matem.*, 1893).

170. Pieri. — Sui sistemi lineari di monoidi (*Giornale di Battaglini*, 1893).

171. Pieri. — Sulle trasformazioni razionali dello spazio che inviduano complessi di tangenti (*Giornale di Battaglini*, 1895).

172. Saltel. — Sur l'application de la transformation arguésienne à la génération des courbes et des surfaces géométriques (*Acad. roy. Belgique*, 1872; Mém. in-8).

173. Segre (B.). — Sulle condizioni per la regolarità di un sistema di forme (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1932).

174. Segre (C.). — Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 25, 1897).

175. Severi. — Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque in una priva di punti multipli (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1914).
176. Sharpe et Snyder. — Birational transformations of certains quartic surfaces (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 1914).
177. Sharpe et Snyder. — Certain types of involutorial space transformations (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 1919, 1920).
178. Snyder. — Problems in involutorial transformations in space (*Bul. Amer. Math. Soc.*, 1924).
179. Snyder. — Further Types of involutorial transformations which leave each cubic surface of a web invariant (*Amer. Journ. of Math.*, 1924).
180. Snyder. — On the types of monoidal involutions (*Annals of Math.*, 1924).
181. Snyder. — Non-monoidal involutions which contain a web of invariant monoids (*Annals of Math.*, 1925).
182. Snyder. — The problem of the cubic variety in S_4 (*Bul. Amer. Math. Soc.*, 1930).
183. Snyder et Schoonmaker. — Two involutorial transformations, of order 11 and 9, associated with null reciprocities (*Amer. Journ. of Math.*, 1932).
184. Steinmetz. — Ueber die durch ein lineares Flächen-System n^{ter} Ordnung definierten mehrdeutigen involutorischen Raumverwandschaften (*Zeitsch. Math. Phys.*, 1890).
185. Sturm. — Ueber diejenigen Cremonaschen Verwandschaften, bei denen den Ebenen des eines Raumes allgemeine Flächen 3. Ordnung im andern entspechen (*Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, 1905).
186. Tinto. — On the three-dimensional transformations founded on the twisted cubic and its chord system (*Proc. Math. Soc. Edimbourg*, 1916).
187. Torrey. — Classification of monoidal involutions having a fixed tangent cone (*Amer. Journ. of Math.*, 1925).
188. Tummarello. — Una trasformazione birazionale (6, 9) dello spazio a tre dimensioni (Naples, 1907).
189. Tummarello. — Le trasformazioni birazionali dello spazio, di genere tre, determinate da una notevole superficie di sest'ordine (Naples, 1909).
190. Tummarello. — Le trasformazioni birazionali monoidiche (n, n^2) dello spazio (*Rend. R. Accad. Napoli*, 1911).
191. Tummarello. — Nuovi tipi generali di superficie razionali d'ordine m con retta $(m-3)$-pla et $m-3$ punti tripli (*Giornale di Battaglini*, 1920).
192. Tummarello. — Una nuova trasformazione birazionale $(n, 2n-3)$ dello spazio a tre dimensioni (*Mem. Circ. Matem. Catania*, 1921).
193. Tummarello. — Sui sistemi omaloidici costuiti da monoidi aventi un contatto di second'ordine nel vertice (*Mem. Circ. Matem. Catania*, 1921)
194. Tummarello. — Sulla teoria generale delle trasformazioni birazionali piane e spaziali (*Atti Soc. Ital. Progr. Sci.*, 1924).
195. Wren. — Some applications of the two-three birational space transformation (*Proc. London Math. Soc.*, 1916).
196. Young et Morgan. — The geometries associated with a certain system of Cremona groups (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 1916).

TABLE DES MATIÈRES.

97520 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.