VÁCLAV HLAVATÝ

Les courbes de la variété générale à *n* dimensions

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 63 (1934)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1934__63__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LXIII

Les courbes de la variété générale à *n* dimensions

Par M. VÁCLAV HLAVATÝ
Professeur à l'Université Charles de Prague.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1934

La bibliographie est placée à la fin du volume (p. 313). Les chiffres ou lettres entre crochets qui suivent les noms des auteurs se rapportent à cette bibliographie.

LES COURBES

DE LA

VARIÉTÉ GÉNÉRALE A n DIMENSIONS

Par M. Václav HLAVATÝ,

Professeur à l'Université Charles de Prague.

INTRODUCTION.

Le fascicule présent est consacre à la théorie des courbes dans un espace n fois étendu, doué d'une connexion linéaire, plus ou moins générale. Il m'a paru bien inutile d'insister sur le développement complet de cette théorie. D'une part, les recherches modernes (E. Cartan) ont montre qu'il y a beaucoup de points communs entre la théorie des courbes dans les espaces plans et celle des courbes dans les espaces « courbes ». D'autre part, le lecteur intéressé trouve dans le Mémoire excellent de feu M. C. Guichard (fascicule XXIX de cette collection) une quantité de problèmes qui concernent la théorie des courbes dans les espaces plans à n dimensions. Cela étant, j'ai choisi de tels problèmes qui sont caractéristiques pour les courbes dans les espaces « courbes » à n dimensions (L'influence de la courbure de l'espace sur les courbes, etc.). Mais le lecteur y trouve aussi les questions classiques que je ne traite que pour accentuer la méthode qui, en résolvant le problème en question, embrasse en même temps aussi les cas particuliers des espaces plans (L'étude sur les courbes quasi asymptotiques, contact de deux courbes, etc.).

Nous laisserons complètement à l'arrière-plan quelques questions non moins intéressantes, par exemple la théorie des invariants projectifs des courbes dans les espaces « courbes », ou bien la théorie des courbes dans les espaces non holonomes (au sens de M. Vranceanu), car leur développement exigerait beaucoup de notions préliminaires qui dépasseraient les limites des fascicules de cette collection.

Le Chapitre I constitue un exposé sommaire des notions fondamentales, indispensables au calcul differentiel absolu, dont nous nous servons dans les chapitres qui suivent. Le Chapitre II étudie les invariants scalaires des courbes situées dans un espace à n dimensions, doue d'une connexion plus ou moins generale. Le Chapitre III a pour but de montrer les relations qui existent entre la courbure de l'espace et les courbures des courbes. Le Chapitre IV est consacre à l'étude des courbes, situées sur un espace a m dimensions dans l'espace ambiant, n fois étendu. Le Chapitre V traite les questions qui concernent la déformation infinitésimale.

Dans le chapitre suivant est résolu completement le système différentiel qui définit le parallélisme le long d'un rayon de lumiere donné dans l'espace-temps général de la relativité. Enfin le dernier Chapitre VII porte sur la question de l'equation intrinsèque des courbes sur une surface générale dans l'espace ambiant de Riemann à trois dimensions.

CHAPITRE I (1).

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Imaginons un espace X_n, n fois étendu aux coordonnees x^ν (2). Nous dirons que l'ensemble des fonctions $v^{\nu_1 \dots \nu_q}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}(x)$ est un affineur (p fois covariant et q fois contrevariant) si dans un autre système des coordonnées

$$(1) \qquad {}'x^\nu = {}'x^\nu(x),$$

cet ensemble devient

$$'v^{\nu_1 \dots \nu_q}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \frac{\partial' x^{\nu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial' x^{\nu_q}}{\partial x^{\alpha_q}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial' x^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_p}}{\partial' x^{\lambda_p}} v^{\alpha_1 \dots \alpha_q}_{\beta_1 \dots \beta_p}.$$

(1) Pour ce chapitre *cf* [1], [6], [10], [11], [13], [14], [19], [20], [21], [22], [25], [35], [47], [51], [53], [59], [64], [66], [71], [72], [77], [79]

(2) Les indices grecs parcourent les n symboles I, II, ... Nous supprimons le symbole de sommation d'après un indice (grec ou latin) *muet*.

Parmi les affineurs il y en a un privilégié, à savoir

$$A_\lambda^\nu = \begin{cases} 0 & \text{pour } \nu \neq \lambda, \\ 1 & \text{pour } \nu = \lambda. \end{cases}$$

Les affineurs « à un indice » sont les vecteurs, covariants, ou contrevariants, par exemple v_λ, w^ν. Une fonction $\mathfrak{w}(x)$ qui devient $\mathfrak{w}'('x)$ dans le système $'x$,

$$'\mathfrak{w} = \Delta^{-k}\mathfrak{w} \qquad \left(\Delta = \text{le déterminant } \frac{\partial' x}{\partial x}\right),$$

est dite « densité du poids k ». Si $k = 0$, on appelle les densités respectives « les scalaires ». Les fonctions $v_{\lambda_1}^{\nu_1} \, {}_{\lambda_p}^{\nu_q}$, v_λ, w^ν, $\mathfrak{w}$ sont les composantes des grandeurs énumérées.

2. Étant donné un affineur $p^{\nu_1 \ldots \nu_q}$, nous désignerons par $q!\, p^{(\nu_1 \ldots \nu_q)}$ la somme de toutes les composantes aux indices permutés, par exemple,

$$p^{(\mu\lambda\nu)} = \frac{1}{3!}(p^{\mu\lambda\nu} + p^{\lambda\nu\mu} + p^{\nu\mu\lambda} + p^{\mu\nu\lambda} + p^{\nu\lambda\mu} + p^{\lambda\mu\nu}).$$

Si $p^{\nu_1 \ldots \nu_q} = p^{(\nu_1 \ldots \nu_q)}$, nous dirons que $p^{\nu_1 \ldots \nu_q}$ est un tenseur. Étant donné un affineur $w^{\nu_1 \ldots \nu_q}$, on peut le décomposer en vecteurs « idéaux »,

$$w^{\nu_1 \ldots \nu_q} = \underset{1}{w}^{\nu_1} \ldots \underset{q}{w}^{\nu_q}.$$

Cela étant, on en peut construire les expressions telles que

$$w^{\nu_1 \ldots \nu_q} = \underset{1}{w}^{\nu_1} \ldots \underset{q}{w}^{\nu_q},$$

$$q!\, w^{[\nu_1 \ldots \nu_q]} = \text{le déterminant } \left| \underset{1}{w}^{\nu_1} \quad \underset{2}{w}^{\nu_2}, \quad \ldots \quad \underset{q}{w}^{\nu_q} \right|.$$

Si $w^{[\nu_1 \ldots \nu_q]} = w^{\nu_1 \ldots \nu_q}$, on dit que $w^{\nu_1 \ldots \nu_q}$ est un q-vecteur. Les opérations algébriques ( ) et [ ] peuvent être appliquées aussi aux indices covariants.

3. Étant donné un tenseur $g^{\nu\lambda}$ du rang n (c'est-à-dire le tenseur au déterminant $g^{\nu\lambda} \neq 0$) on en peut construire le tenseur cova-

riant $g_{\lambda\mu}$ du même rang d'après

$$g_{\lambda\mu}\, g^{\lambda\nu} = A^{\nu}_{\mu} \quad (^1).$$

Cela nous permet de construire les symboles de Christoffel,

$$\left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha}} \right).$$

Supposons donnés encore deux affineurs

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = S_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{2}\left(S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} - S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} \right),$$

$$Q_{\omega\mu\lambda} = Q_{\omega(\mu\lambda)} = \frac{1}{2}\left(Q_{\omega\mu\lambda} + Q_{\omega\lambda\mu} \right).$$

et posons

$$(2) \qquad \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\} - \frac{1}{2} g^{\alpha\nu}\left(Q_{\mu\alpha\lambda} + Q_{\lambda\alpha\mu} - Q_{\alpha\mu\lambda} \right) + S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} - g^{\nu\beta}\left(g_{\lambda\alpha} S_{\beta\mu}^{\cdot\cdot\alpha} + g_{\mu\alpha} S_{\beta\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} \right).$$

L'ensemble des fonctions $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}(x)$ qui pendant la transformation (1) se transforment d'apres

$$(3) \qquad {}'\Gamma^{\varkappa}_{\omega\pi} = \frac{\partial' x^{\varkappa}}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial' x^{\omega}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial' x^{\pi}} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial' x^{\omega}\, \partial' x^{\pi}} \right)$$

est dit « la connexion » de l'espace. Cette notion donne naissance à une autre notion, celle de la dérivée covariante d'un affineur $v^{\nu_1 \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$

$$(4) \qquad D_{\mu}\, v^{\nu_1 \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} v^{\nu_1 \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} + \sum_{u}^{q} {}_{1}\, \Gamma^{\nu_u}_{\alpha\mu}\, v^{\nu_1 \ldots \nu_{u-1}\alpha\nu_{u+1} \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} - \sum_{u}^{p} {}_{1}\, \Gamma^{\alpha}_{\lambda_u\mu}\, v^{\nu_1 \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{u-1}\alpha\lambda_{u+1} \ldots \lambda_p}.$$

D_{μ} est le symbole de la dérivée covariante de la connexion; c'est un vecteur covariant symbolique. On a en particulier

$$D_{\omega}\, g_{\mu\lambda} = Q_{\omega\mu\lambda}, \qquad D_{\mu}\, A^{\nu}_{\lambda} = 0,$$

(1) Nous distinguons l'affineur A^{ν}_{λ} et le symbole, dit « delta de Kronecker »

$$\delta^{\nu}_{\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \nu \neq \lambda, \\ 1 & \phantom{\text{pour }} \nu = \lambda \end{cases}$$

qui est l'ensemble des scalaires.

tandis que l'affineur $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$, dit « l'affineur de torsion » de la connexion est

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \Gamma^{\nu}_{[\lambda\mu]} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}). \tag{5}$$

Si $Q_{\omega\mu\lambda} \neq 0$ aussi bien que $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ sont des affineurs généraux, nous désignerons la connexion correspondante (2) par L_n (Lie), en préservant les dénominations V_n, S_n, W_n, A_n pour les cas particuliers suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} V_n\,(\text{variété}), \quad Q_{\omega\mu\lambda} = S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = 0, \\ S_n\,(\text{spazio}), \quad Q_{\omega\mu\lambda} = 0, \quad S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} \neq 0, \\ W_n\,(\text{Weyl}), \quad Q_{\omega\mu\lambda} = -Q_\omega\, g_{\mu\lambda}, \quad S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = 0 \\ \quad (Q_\omega \text{ n'est pas un vecteur gradient}), \\ A_n\,(\text{affine}), \quad Q_{\omega\mu\lambda} \neq 0 \text{ général}, \quad S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

L'espace X_n, doué d'une de ces connexions, sera dit « la variété » et désigné par la même lettre que la connexion correspondante.

3. Les varietés V_n et S_n sont « métriques », ce qui signifie que le tenseur « métrique » $g_{\lambda\mu}$ a sa dérivée covariante nulle

$$D_\omega\, g_{\mu\lambda} = 0. \tag{7}$$

Dans ce cas, chaque affineur (a deux indices au moins) a trois sortes de composantes, à savoir, les composantes covariantes, contrevariantres et mixtes par exemple

$$p_{\lambda\mu} = p^{\alpha\beta}\, g_{\alpha\lambda}\, g_{\beta\mu} = p_{\lambda}^{\cdot\alpha}\, g_{\alpha\mu} = p^{\alpha}_{\cdot\mu}\, g_{\alpha\lambda} \quad (^1).$$

Chaque vecteur donne naissance à un scalaire : « le module » ou « la longueur »

$$v = \sqrt{g_{\lambda\mu}\, v^\lambda\, v^\mu} = \sqrt{g^{\lambda\mu}\, v_\lambda\, v_\mu} = \sqrt{v^\lambda\, v_\lambda}.$$

Dans ce qui suit, nous supposerons, sauf avis contraire, que la forme quadratique $(v)^2$ est définie positive pour n'importe quel vecteur. Le vecteur au module $= 1$ sera dit « le verseur ». Nous désignerons les verseurs par i^ν, j^ν, I^ν, ... L'angle φ de deux vecteurs v^ν

(1) Or pour éviter toute ambiguïté, il faut accentuer la place des indices. C'est ce que nous faisons partout en affectant les points en bas, ou en haut.

et w^ν est défini par

$$(8) \qquad \cos\varphi = \frac{g_{\lambda\mu}\, v^\lambda\, w^\mu}{\sqrt{v^\alpha\, v_\alpha}\,\sqrt{w^\beta\, w_\beta}}.$$

Quant à la variété W_n, la métrique n'y est définie qu'à un facteur multiplicatif près. En effet on a tout d'abord

$$(9) \qquad D_\mu\, g_{\lambda\nu} = -\, Q_\mu\, g_{\lambda\nu}$$

et en posant

$$(10) \qquad \overline{g}_{\lambda\mu} = p\, g_{\lambda\mu}, \qquad \overline{Q}_\lambda = Q_\lambda - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \log p,$$

on trouve

$$D_\mu\, \overline{g}_{\lambda\nu} = -\, \overline{Q}_\mu\, \overline{g}_{\lambda\nu}.$$

4. L'affineur aux composantes

$$R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = \frac{\partial \Gamma^\nu_{\lambda\omega}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\lambda\mu}}{\partial x^\omega} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}\, \Gamma^\alpha_{\lambda\omega} - \Gamma^\nu_{\alpha\omega}\, \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}$$

est « l'affineur de courbure » de la varieté. On a pour n'importe quel vecteur v^ν, w_λ

$$(11) \qquad \begin{cases} 2\, D_{[\omega}\, D_{\mu]}\, v^\nu = -\, R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}\, v^\lambda + 2\, S_{\omega\mu}{}^{\alpha}\, D_\alpha\, v^\nu, \\ 2\, D_{[\omega}\, D_{\mu]}\, w_\lambda = R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}\, w_\nu + 2\, S_{\omega\mu}{}^{\alpha}\, D_\alpha\, w_\lambda. \end{cases}$$

Conformément à l'usage, nous désignerons par $K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$ l'affineur de courbure d'une variété métrique (V_n ou S_n). Il donne naissance a « la courbure » de la variété qui est le scalaire

$$(12) \qquad K = -\, \frac{1}{n(n-1)}\, g^{\omega\nu}\, g^{\mu\lambda}\, K_{\omega\mu\lambda\nu}.$$

L'affineur de courbure nous permet de distinguer encore parmi les variétés déjà mentionnées des cas spéciaux, à savoir

$$(6') \qquad \begin{array}{lll} V_n^0 = V_n & \text{avec} & K = \text{const.} \neq 0, \\ R_n\,(\text{Raum}) = V_n & \text{avec} & K = 0, \\ E_n\,(\text{Euclide}) = A_n & \text{avec} & R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = 0. \end{array}$$

5. Étant donné un espace à m dimensions X_m dans L_n, nous choisirons, le long de X_m, n champs vectoriels linéairement indépendants $\underset{j}{e}^{\nu}$ $(j = 1, \ldots, n)$ (de telle manière que les champs $\underset{1}{e}^{\nu}, \ldots, \underset{m}{e}^{\nu}$ soient tangents à X_m, tandis que les champs $\underset{m+1}{e}^{\nu}, \ldots, \underset{n}{e}^{\nu}$ ne le soient pas) et nous en construirons n champs vectoriels covariants $\overset{j}{e}_{\lambda}$ d'après

$$(13) \qquad \underset{j}{e}^{\nu}\,\overset{j}{e}_{\lambda} = A^{\nu}_{\lambda}$$

Cela étant, nous posons

$$(13') \qquad \begin{cases} B^{\nu}_{\lambda} = A^{\nu}_{\lambda} - \underset{f}{e}^{\nu}\,\overset{f}{e}_{\lambda} & (f = m+1, \ldots, n), \\ B^{\nu_1 \ldots \nu_r}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} = B^{\nu_1}_{\lambda_1} B^{\nu_2}_{\lambda_2} \ldots B^{\nu_r}_{\lambda_r} & \end{cases}$$

et définissons « la X_m — composante » $'v^{\nu_1 \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ d'un affineur $v^{\nu_1 \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ de L_n à l'aide de

$$'v^{\nu_1 \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = B^{\beta_1 \ldots \beta_p \nu_1 \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \alpha_1 \ldots \alpha_q}\, v^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}_{\beta_1 \ldots \beta_p}$$

Si la X_m — composante d'un affineur est égale à cet affineur, nous dirons que celui-ci se trouve dans X_m. La connexion L_n induit dans X_n une autre connexion du même genre, ainsi que nous obtenons une variété L_m. La X_m — composante de la dérivée covariante d'un affineur, situé dans L_m, est la dérivée covariante de cet affineur. En désignant par D_μ le vecteur symbolique de la dérivée covariante dans L_m, on a donc pour n'importe quel affineur $v^{\nu_1 \ldots \nu_p}_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ dans L_m

$$(14) \qquad D_\mu v^{\nu_1 \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = B^{\gamma\, \nu_1 \ldots \nu_q\, \beta_1 \ldots \beta_p}_{\mu\, \alpha_1 \ldots \alpha_q\, \lambda_1 \ldots \lambda_p}\, D_\gamma v^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}_{\beta_1 \ldots \beta_p}$$

L'affineur de torsion de L_m étant $S_{\lambda\mu}{}^{\nu}$, on trouve qu'il est la X_m composante de l'affineur $S_{\lambda\mu}{}^{\nu}$,

$$(15) \qquad S'_{\lambda\mu}{}^{\nu} = B^{\alpha\beta\nu}_{\lambda\mu\gamma}\, S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}.$$

L'affineur

$$(16) \qquad H_{\mu\lambda}{}^{\nu} = B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda}\, D_\alpha B^{\nu}_{\beta}$$

sera dit « l'affineur fondamental » de L_m. En posant

$$(17) \qquad \overset{f}{h}_{\mu\lambda} = B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda}\, D_\alpha \overset{f}{e}_{\beta}, \qquad \underset{f}{l}_{\mu}{}^{\nu} = B^{\alpha\nu}_{\mu\beta}\, D_\alpha \underset{f}{e}^{\beta},$$

on a

$$(17') \qquad H_{\mu\lambda}{}^{\nu} = -\overset{f}{h}_{\mu\lambda}\, \underset{f}{e}^{\nu} \qquad (f = m+1, \ldots, n)$$

et

$$B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\nu} = S'^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} - H^{\cdot\cdot\nu}_{[\mu\lambda]}, \tag{18}$$

ou bien

$$B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} S^{\cdot\cdot f}_{\alpha\beta} = \overset{f}{h}_{[\mu\lambda]} \quad (^1). \tag{19}$$

Si $v^\nu (w_\lambda)$ est un vecteur dans L_m, on trouve à cause de $(13)'$ et (14)

$$\left\{ \begin{array}{l} B^\alpha_\mu D_\alpha v^\nu = D'_\mu v^\nu + v^\lambda H^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}, \\ B^\alpha_\mu D_\alpha w_\lambda = D'_\mu w_\lambda + w_\nu L^{\cdot\nu}_{\mu\cdot\lambda}. \end{array} \right. \tag{14'}$$

Il s'ensuit pour n'importe quel vecteur $w^\nu (v_\lambda)$ dans L_m

$$\left\{ \begin{array}{l} w^\mu D_\mu v^\nu = w^\mu D'_\mu v^\nu + w^\mu v^\lambda H^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}, \\ v^\mu D_\mu w_\lambda = v^\mu D'_\mu w_\lambda + v^\mu w_\nu L^{\cdot\nu}_{\mu\cdot\lambda}. \end{array} \right. \tag{14''}$$

Soit $R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ l'affineur de courbure de L_m. On trouve l'équation de Gauss genéralisée

$$B^{\alpha\beta\gamma\nu}_{\omega\mu\lambda\delta} R^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma} = R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} - 2 B^\nu_\delta H^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{[\omega\mu]\lambda}, \tag{21}$$

avec

$$H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = B^{\alpha\beta\gamma}_{\omega\mu\lambda} D_\alpha H^{\cdot\cdot\nu}_{\beta\gamma} - \left(D'_\omega \overset{f}{h}_{\mu\lambda} \right) \underset{f}{e} - \underset{f}{l'}{}^{\nu}_{\omega} \overset{f}{h}_{\mu\lambda} + \overset{e}{h}_{\mu\lambda} \underset{f}{e}{}^{\nu} B^\alpha_\omega \underset{e}{e}{}^{\beta} D_\alpha \overset{f}{e}_\beta \tag{22}$$

$$(e, f = m+1, \ldots, n).$$

S'il s'agit d'une variété métrique (²), l'équation (21) peut s'écrire

---

(¹) Ici

$$S^{\cdot\cdot f}_{\mu\lambda} = S^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} \overset{f}{e}_\nu.$$

En général, la supposition faite sur les indices grecs nous permet d'adjoindre à chaque affineur $v^{\nu_1 \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ les scalaires

$$v^{a_1 \ldots a_q}_{b_1 \ldots b_p} = \overset{a_1}{e}_{\nu_1} \ldots \overset{a_q}{e}_{\nu_q} \underset{b_1}{e}{}^{\lambda_1} \ldots \underset{b_p}{e}{}^{\lambda_p} v^{\nu_1 \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}. \tag{20}$$

(²) Danc ce cas les vecteurs $\underset{1}{e}{}^\nu, \ldots, \underset{m}{e}{}^\nu$ sont considérés comme verseurs orthogonaux, tangents à la variété m fois étendue, et $\underset{m+1}{e}{}^\nu, \ldots, \underset{n}{e}{}^\nu$ peuvent être considérés comme verseurs orthogonaux et normaux à cette variété.

aussi

$$(21') \qquad B^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\omega\mu\lambda\nu} K_{\alpha\beta\gamma\delta} = K'_{\omega\mu\lambda\nu} - 2 B^{\alpha}_{\delta} H_{[\omega\mu]\lambda}{}^{\delta} g_{\alpha\nu}.$$

Le scalaire K'

$$(23) \qquad K' = -\frac{1}{m(m-1)} B^{\omega\mu\lambda\nu}_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} K'_{\omega\mu\lambda\nu}$$

est « la courbure moyenne absolue » de la variété à m dimensions, tandis que le scalaire

$$K_{(f)} = -\frac{1}{m(m-1)} B^{\omega\mu\lambda\nu}_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} K_{\omega\mu\lambda\nu}$$

est sa « courbure forcée ».

CHAPITRE II.

INVARIANTS D'UNE COURBE.

I.

1. Supposons un espace n fois étendu, doué d'une connexion métrique avec torsion,

$$(1) \quad \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right) + S_{\lambda\mu}{}^{\nu} - g^{\nu\beta}\left(g_{\lambda\alpha} S_{\beta\mu}{}^{\alpha} + g_{\mu\alpha} S_{\beta\mu}{}^{\alpha}\right),$$

et imaginons dans cette variété une courbe C aux équations paramétriques,

$$(2) \qquad x^{\nu} = x^{\nu}(t).$$

Le parametre s, défini moyennant

$$(3) \qquad s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{\lambda\mu}\, dx^{\lambda}\, dx^{\mu}},$$

sera dit « l'arc » de C. Il s'ensuit que $\frac{dx^{\nu}}{ds} = \iota^{\nu}$ est un verseur (tangent à C). On peut s'en servir pour introduire le symbole D de la dérivée covariante le long de C,

$$(4) \qquad D = \iota^{\mu} D_{\mu},$$

ainsi que l'on a pour n'importe quel vecteur v^ν, défini le long de C,

$$(5)\qquad Dv^\nu = \frac{dv^\nu}{ds} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda i^\mu, \qquad Dv_\lambda = \frac{dv_\lambda}{ds} - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v_\nu i^\mu.$$

Si j^ν est un champ versoriel le long de C, on a

$$(6)\qquad j^\mu D j_\mu = 0$$

et par conséquent j^ν est orthogonal à Dj^ν.

2. Supposons maintenant un champ versoriel J^ν parallèle à lui-même le long de C,

$$(7)\qquad DJ^\nu = \frac{DJ^\nu}{ds} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} J^\lambda i^\mu = 0.$$

Il s'ensuit que l'on a au voisinage suffisamment petit du point régulier $P(s = 0)$,

$$(8)\qquad J^\nu(s) = J^\nu(0) - s(\Gamma^\nu_{\lambda\mu} J^\lambda i^\mu)_0 + \frac{s^2}{2!}\left(-\frac{d\Gamma^\nu_{\lambda\mu}}{ds} J^\lambda i^\mu + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\omega} J^\lambda i^\omega i^\mu - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} J^\lambda \frac{di^\mu}{ds}\right)_0 + \dots$$

Imaginons d'autre part un champ versoriel j^ν le long de C,

$$(9)\qquad j^\nu(s) = j^\nu(0) + s\left(\frac{dj^\nu}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{2!}\left(\frac{d^2 j^\nu}{ds^2}\right)_0 + \dots$$

et désignons par $\alpha(s)$ l'angle des verseurs $J^\nu(s)$ et $j^\nu(s)$,

$$\cos\alpha(s) = J^\lambda(s) j_\lambda(s).$$

On a donc d'après (8) et (9),

$$(10)\qquad \begin{aligned}\cos\alpha(s) &= \cos\alpha(0) + s(J^\lambda D j_\lambda)_0 + \frac{s^2}{2!}(J^\lambda D^2 j_\lambda)_0 + \dots \\ &= J^\lambda(0)\left[j_\lambda(0) + s(Dj_\lambda)_0 + \frac{s^2}{2!}(D^2 j_\lambda)_0 + \dots\right].\end{aligned}$$

Ce développement, que nous utiliserons bientôt, est formellement le même que dans un espace euclidien, où le symbole de la dérivée covariante égale le symbole de la dérivée ordinaire.

3. Posons maintenant.

$$(11)\qquad i^\nu(s) = j^\nu(s), \qquad i^\nu(0) = j^\nu(0) = J^\nu(0).$$

Dans ce cas $a(s) = \underset{1}{a}$ est l'angle du verseur que l'on obtient, en deplaçant parallelement le verseur tangent $\iota'(0)$ en P(0) de P(0) en P(s), et du verseur tangent $\iota(s)$ en P(s). Il mesure dans un certain sens « la déviation » de la direction tangente de C. Parce qu'on a, d'après (6),

$$\iota^\lambda D\iota_\lambda = 0, \tag{6'}$$

on en deduit

$$(D\iota^\lambda)(D\iota_\lambda) = -\iota^\lambda D^2 \iota_\lambda \tag{6'}$$

et par conséquent l'équation (10) nous donne

$$\cos \underset{1}{a}(s) = 1 - \frac{s^2}{2!}[(D\iota^\lambda)(D\iota_\lambda)]_0 + \dots, \tag{12}$$

d'où l'on deduit, en supprimant l'indice 0,

$$\frac{d\underset{1}{a}}{ds} = \sqrt{(D\iota^\lambda)(D\iota_\lambda)} \tag{13}$$

D'autre part, en designant par $\underset{2}{\iota}^\nu$ le verseur dans la direction du vecteur $D\iota^\nu$ et par $\underset{1}{k}$ la longueur de $D\iota^\nu$ on a

$$D\iota^\nu = \underset{1}{k}\,\underset{2}{\iota}^\nu. \tag{14}$$

En comparant (13) et (14), on parvient a

$$\frac{d\underset{1}{a}}{ds} = \underset{1}{k} \tag{15}$$

Nous appellerons « première courbure » de C le scalaire $\underset{1}{k}$ et « premier verseur normal » de C le verseur $\underset{2}{\iota}^\nu$ qui en raison de (6) est orthogonal a ι'. Si $\underset{1}{k} = 0$, on a $D\iota = 0$ et C résulte autoparallèle.

Supposons $\underset{1}{k} \neq 0$ et $n > 2$. Dans ce cas, le vecteur $D\underset{2}{\iota}^\nu$, qui est orthogonal a $\underset{2}{\iota}^\nu$ [d'après (6)] définit avec ι^ν et $\underset{2}{\iota}^\nu$ un trivecteur $\underset{1}{\iota}^{[\nu}\underset{2}{\iota}^\lambda D\underset{2}{\iota}^{\mu]}$. Nous désignerons par $\underset{3}{\iota}^\nu$ le verseur, situé dans ce trivecteur, et orthogonal à ι et $\underset{2}{\iota}^\nu$. C'est « le deuxieme verseur normal » de C. On a donc

$$D\underset{2}{\iota}^\nu = \underset{1}{b}\,\iota^\nu + \underset{2}{b}\,\underset{2}{\iota}^\nu + \underset{1}{b}\,\underset{3}{\iota}', \tag{16}$$

avec

$$(16') \quad \underset{1}{b} = i^\lambda \, \mathrm{D}\underset{2}{i_\lambda} = -\underset{2}{i^\lambda} \, \mathrm{D}i_\lambda = -\underset{1}{k}, \qquad \underset{2}{b} = \underset{2}{i^\lambda} \, \mathrm{D}\underset{2}{i_\lambda} = 0, \qquad \underset{3}{b} = \underset{3}{i^\lambda} \, \mathrm{D}\underset{2}{i_\lambda} = -\underset{2}{i^\lambda} \, \mathrm{D}\underset{3}{i_\lambda}.$$

Le coefficient b est étroitement lié à l'angle, compris entre $\underset{3}{i^\nu}$ et $\underset{2}{i^\nu}$. Construisons le champ parallèle en partant du vecteur $\mathrm{J}^\nu(0) = \underset{2}{i^\nu}(0)$ et désignons par $\underset{2}{a}(s)$ l'angle des verseurs J^ν et $\underset{3}{i^\nu}$. La relation

$$(17) \qquad \frac{d\underset{2}{a}}{ds} = \underset{2}{k},$$

définit « la deuxième courbure » de C. Pour l'exprimer en fonction de b, posons en raison de (10) et (16')

$$(18) \qquad \cos \underset{2}{a}(s) = \underset{2}{i^\lambda}(0) \left[\underset{3}{i_\lambda}(0) + s \left(\mathrm{D}\underset{3}{i_\lambda} \right)_0 + \ldots \right] = \cos \underset{2}{a}(0) + s \left(\underset{2}{i^\lambda} \, \mathrm{D}\underset{3}{i_\lambda} \right) + \ldots$$
$$= \cos \underset{2}{a}(0) - s \left(\underset{3}{b} \right)_0 + \ldots .$$

En supprimant l'indice 0, on en déduit en toute rigueur à cause de (17)

$$(19) \qquad \frac{d\underset{2}{a}}{ds} = \underset{2}{k} = \underset{3}{b},$$

de sorte que l'on peut écrire pour (16)

$$\mathrm{D}\underset{2}{i^\nu} = -\underset{1}{k} \, \underset{1}{i^\nu} + \underset{2}{k} \, \underset{3}{i^\nu}.$$

En poursuivant ce procédé plus loin, on obtient *les formules de Frenet* (1),

$$(20) \qquad \mathrm{D}\underset{a}{i^\nu} = -\underset{a-1}{k} \, \underset{a-1}{i^\nu} + \underset{a}{k} \, \underset{a+1}{i^\nu} \qquad (a = 1, \ldots, n),$$

où

$$\underset{1}{i^\nu} = i^\nu, \qquad \underset{0}{k} = \underset{n}{k} = 0.$$

On appelle $\underset{2}{i}, \underset{3}{i}, \ldots, \underset{n}{i}$ le premier, ..., le $(n-1)^{\text{ieme}}$ verseur normal de C et les scalaires $\underset{1}{k}, \ldots, \underset{n-1}{k}$ la première, ..., la $(n-1)^{\text{ieme}}$ courbure de C.

---

(1) *Voir* [8], [71] pour V_n. Aussi [60] et [75].

Si toutes les courbures sont $\neq 0$, nous dirons que la courbe C est générale.

Dans ce cas, tous les vecteurs $i^{\nu}_1, \ldots, i^{\nu}_n$, mutuellement orthogonaux et par conséquent linéairement indépendants, sont bien définis. Pour le cas $k_m = 0$ $(m \leq n-1)$ voir plus loin.

4. Retournons au système (20) en l'envisageant comme système des formules de Frenet *pour le champ versoriel* i^{ν}_1. Dans ce cas, on ne tient pas compte du fait que i^{ν}_1 soit le verseur *tangent* de C et par conséquent, étant donné un champ versoriel I^{ν}_1 le long de C, qui n'est pas tangent à C, on peut déduire aussitôt le système correspondant des formules de Frenet, à savoir

$$(20') \qquad D I^{\nu}_a = -K_{a-1} I^{\nu}_{a-1} + K_a I^{\nu}_{a+1} \qquad \left(a = 1, \ldots, n;\ K_0 = K_n = 0\right).$$

Par analogie, on appelle « courbures du champ I^{ν}_1 » les scalaires $K_1, \ldots, K_{n-1}$. D'autre part, les champs versoriels $I^{\nu}_2, \ldots, I^{\nu}_n$ étant orthogonaux à I^{ν}_1, on les désigne comme « verseurs normaux » du champ I^{ν}_1. Si par hasard K_m $(m \leq n-1)$ est la première des courbures $K_1, \ldots, K_m$ qui s'annule le long de C, le système (20') se réduit à

$$(20'') \qquad D I^{\nu}_a = -K_{a-1} I^{\nu}_{a-1} + K_a I^{\nu}_{a+1} \qquad \left(a = 1, \ldots, m;\ K_0 = K_m = 0\right).$$

Dans ce cas, n'importe quel champ versoriel I^{ν}_{1+m}, orthogonal au m vecteur $I^{[\nu}_1 \ldots I^{\lambda]}_m$, donne naissance à un autre système de formules de Frenet,

$$(20'') \qquad D I^{\nu}_o = -K_{b-1} I^{\nu}_{b-1} + K_b I^{\nu}_{b+1} \qquad \left(b = m+1, \ldots, n;\ K_m = K_n = 0\right).$$

[Cette remarque nous permet d'envisager le cas, où k_m, soit la première courbure de C, est égale à zéro. Dans ce cas, les formules de Frenet se réduisent à (20) pour $a = 1, \ldots, m$ et $k_0 = k_m = 0$, et l'on peut construire un champ i^{ν}_{m+1} orthogonal au m-vecteur $i^{[\nu}_1, \ldots, i^{\lambda]}_m$ et les formules correspondantes (20''')].

Le système $(20)'$ $\left(\text{pour } \underset{1}{I}^\nu \overset{\neq}{=} \underset{1}{i}^\nu\right)$ nous permet de simplifier le système différentiel qui définit le parallelisme le long de C. En effet, étant donné un champ v^ν, parallele à lui-même le long de C

$$(21) \qquad Dv^\nu = \frac{Dv^\lambda}{ds} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda i^\mu = 0,$$

en introduisant les scalaires

$$v^a = \underset{a}{I}^\lambda v_\lambda \qquad \left(v^\nu = v^a \underset{a}{I}^\nu\right),$$

on a

$$Dv^\nu = \frac{dv^a}{ds}\underset{a}{I}^\nu + v^a D\underset{a}{I}^\nu = 0,$$

c'est-à-dire

$$(22) \qquad \frac{dv^a}{ds} = -v^{a-1}\underset{a-1}{K} + v^{a+1}\underset{a}{K}.$$

Ce systeme ne contient que $n-1$ coefficients $\underset{1}{K}, \ldots, \underset{n-1}{K}$, tandis que le système (21) en a n^2, savoir $(\Gamma^\nu_{\lambda\mu} i^\mu)$ (¹).

La théorie des systemes differentiels linéaires nous apprend, en raison de (22) :

Si l'on connait un champ versoriel le long de C *aux courbure constantes* $\neq 0$, *l'intégration du parallélisme le long de* C *n'exige que des opérations algébriques.*

Nous nous servirons de (22) pour résoudre le problème suivant : Étant donné un système de $n-1$ fonctions analytiques, holomorphes $\underset{w}{K}(s)\,(w = 1, \ldots, n-1)$ on a a trouver le long d'une courbe donnée C un champ $\underset{1}{I}^\nu$ ayant ces fonctions pour courbures. Construisons a cet effet avant tout n champs vectoriels $\underset{a}{J}^\nu(s)$, mutuellement orthogonaux et paralleles a eux-mêmes le long de C ainsi que n intégrales particulières lineairement indépendantes $\overset{1}{\underset{a}{i}}, \ldots, \overset{n}{\underset{a}{i}}$ du systeme

$$\frac{d\underset{a}{i}}{ds} = -\underset{a-1}{K}\,\underset{a-1}{i} + \underset{a}{K}\,\underset{a+1}{i}.$$

(¹) *Voir* [38], [57].

On peut choisir ces integrales de manière que

$$\det \begin{vmatrix} \overset{a}{\underset{b}{\iota}} \end{vmatrix} = 1, \qquad \sum_{1}^{n} \overset{c}{\underset{a}{\iota}}\,\overset{d}{\underset{a}{\iota}} = \delta_{cd}$$

et par conséquent aussi

$$\sum_{1}^{n} \overset{a}{\underset{c}{\iota}}\,\overset{a}{\underset{d}{\iota}} = \delta_{cd}$$

Cela etant, posons

$$\underset{a}{\mathrm{I}}^{\nu} = \underset{b}{\mathrm{J}}^{\nu}\,\overset{b}{\underset{a}{\iota}}.$$

Il s'ensuit non seulement

$$\mathrm{D}\underset{a}{\mathrm{I}}^{\nu} = -\underset{a-1}{\mathrm{K}}\,\underset{a-1}{\mathrm{I}}^{\nu} + \underset{a+1}{\mathrm{I}}^{\nu}\,\underset{a}{\mathrm{K}},$$

mais aussi

$$\underset{a}{\mathrm{I}}^{\nu}\,\underset{b}{\mathrm{I}}_{\nu} = \delta_{ab}.$$

Or, la solution du probleme en question est fournie par le champ

$$\underset{1}{\mathrm{I}}^{\nu} = \underset{a}{\mathrm{J}}^{\nu}\,\overset{a}{\underset{1}{\iota}},$$

tandis que $\underset{2}{\mathrm{I}}^{\nu}, \ldots, \underset{n}{\mathrm{I}}^{\nu}$ sont ses « verseurs normaux ».

3. Les courbures d'une courbe génerale forment l'analogie à ce qu'on appelle dans la théorie classique « un système complet » de invariants de C Pour le demontrer, il suffit manifestement de faire voir que ce système définit (a la position près) une courbe, dont $\underset{1}{k}, \ldots, \underset{n-1}{k}$ sont les courbures ([1]).

Quant aux courbes qui ont les mêmes courbures, sans avoir une tangente commune, on ne peut les comparer en géneral, le parallelisme n'etant pas absolu dans notre variete.

Or, on ne peut pas dire au sens precis du mot que les courbures (23) forment un système complet des invariants de C, car c'est encore la courbure de la variété le long de C, qui peut jouer un rôle important dans la théorie des invariants de la courbe examinee.

([1]) *Voir* plus loin la demonstration du probleme analogue.

En résumé, nous pouvons énoncer le théoreme suivant :

Étant donné un système (23) *de fonctions holomorphes dans* S_n, *ce système définit une courbe qui :*

a. Passe par un point P *choisi arbitrairement;*

b. En ayant un repère orthogonal $\underset{a}{i^\nu}(0)$, *prescrit d'avance en* P;

c. Et les fonctions (23) *pour courbures le long d'elle.*

Pour la démonstration de ce théoreme, *voir* la fin du n° 11.

6. Étant donnee une *congruence* des courbes, au verseur tangent $\underset{1}{i^\nu} = i^\nu(x)$, on peut manifestement construire la derivée covariante de $i^\nu(x)$ le long d'une direction arbitraire. Or, si l'on choisit un verseur arbitraire $j^\nu(x)$, on parvient aux formules de Frenet pour la congruence dans la direction $j^\nu(x)$, savoir

$$(24) \qquad j^\mu D_\mu \underset{a}{i^\nu} = -\underset{a-1}{k}\,\underset{a-1}{i^\nu} + \underset{a}{k}\,\underset{a+1}{i^\nu} \qquad (a = 1, \ldots, n,\ \underset{0}{k} = \underset{n}{k} = 0),$$

en obtenant ainsi les courbures et les verseurs normaux de la congruence pour la direction $j^\nu(x)$. On peut toujours trouver une telle direction j^μ, pour laquelle $\underset{1}{k} = 0$. En effet, le système des equations

$$j^\mu D_\mu \underset{1}{i^\nu} = 0$$

a toujours une solution $j^\nu \neq 0$, parce que l'affineur $D_\mu i^\nu$ est du rang $< n$ à cause de

$$(D_\mu i^\nu) i_\nu = 0.$$

Une telle direction s'appelle « direction principale » de la congruence (1).

Remarque. — Les formules de Frenet donnent naissance aux formules

$$(25) \qquad (j^\mu D_\mu)^p \underset{1}{i^\nu} = \underset{1}{k} \ldots \underset{p}{k}\,\underset{p+1}{i^\nu} + \underset{p}{P^\nu} \qquad (p \leqq n-1),$$

(1) *Voir* [22], [31] et [70]. *Cf* aussi [78].

valables pour $j^{\nu} \overset{\neq}{=} i^{\nu}$, toutes les fois que les courbures sont $\neq 0$. Le vecteur $\underset{p}{P}^{\nu}$ est situé dans le p vecteur osculateur $\underset{1}{i}^{[\nu} \ldots \underset{p}{i}^{\lambda]}$

II.

7. Nous nous proposons maintenant de trouver les invariants d'une courbe dans l'espace n fois étendu, doué d'une connexion de M. Weyl. Dans une telle variété, la métrique est donnée à un facteur multiplicatif près

$$\bar{g}_{\lambda\mu} = p\, g_{\lambda\mu}. \tag{26}$$

Étant donnée une courbe C, $x^{\nu} = x^{\nu}(t)$, nous trouverons avant tout un tenseur $G_{\lambda\nu}$, du rang n, dont la dérivée covariante s'annule le long de C

$$\theta G_{\lambda\mu} = 0 \qquad \left(\theta = \frac{dx^{\mu}}{dt} D_{\mu}\right)$$

et qui est invariant par rapport à la transformation (26). Dans ce qui suit, nous restreindrons notre recherche sur les courbes, dont les vecteurs

$$\underset{1}{v}^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{dt}, \qquad \underset{2}{v} = \theta \underset{1}{v}^{\nu}, \qquad \underset{3}{v}^{\nu} = \theta \underset{2}{v}^{\nu}, \qquad \ldots, \qquad \underset{n}{v}^{\nu} = \theta \underset{n-1}{v}^{\nu}, \tag{27}$$

sont linéairement indépendants, de sorte que le déterminant de leurs composantes est $\neq 0$, et nous désignerons sa valeur réciproque par $\mathfrak{w}$. C'est une densité, du poids 1. D'autre part, on peut construire une autre densité, ayant le même poids 1, mais indépendante de la connexion, la racine carrée du déterminant du tenseur $g_{\lambda\mu}$, qui par hypothèse est du rang n

$$\sqrt{g} = (|g_{\lambda\mu}|)^{\frac{1}{2}}.$$

Cela étant, on constate facilement que le tenseur

$$G_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu}\, e^{\frac{2}{n}\int_{t_0}^{t}\left(\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu} - \frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial x^{\nu}}\right)dx^{\nu}} \left(\frac{\mathfrak{w}}{\sqrt{g}}\right)^{\frac{2}{n}}_{t=t_0} \tag{26'}$$ (1)

jouit des propriétés mentionnées plus haut.

8. Nous sommes ainsi parvenus à un tenseur défini le long de la

(1) *Voir* [45].

courbe donnée qui joue le même rôle que le tenseur métrique dans une connexion métrique.

Or, il est bien naturel de le prendre pour le tenseur métrique le long de C dans notre connexion. Cela etant, on peut definir avant tout « l'arc » de C

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{G_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu},$$

le *verseur* tangent $\underset{1}{\iota}^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}$ de C et l'on parvient ensuite aux formules de Frenet

$$(\iota^\mu D_\mu)\underset{a}{\iota}^\nu = -\underset{a-1}{k}\;\underset{a-1}{\iota}^\nu + \underset{a+1}{\iota}^\nu\;\underset{a}{k} \qquad (a = 1, \dots, n),$$

avec

$$\iota^\nu = \underset{1}{\iota}^\nu, \qquad \underset{0}{k} = \underset{n}{k} = 0.$$

Toutes les notions qui y interviennent sont invariantes par rapport à la transformation (26) (¹).

Les courbures $\underset{w}{k}$ $(w = 1, \dots, n-1)$ ne s'annulent pas le long de C. Pour le faire voir remarquons que l'on a

$$\underset{1}{v}^\nu = \frac{ds}{dt}\underset{1}{\iota}^\nu$$

et par conséquent, en raison des formules, analogues à (25)

$$\underset{p}{v}^\nu = \left(\frac{ds}{dt}\right)^p \underset{1}{k}\,\underset{2}{k} \dots \underset{p-1}{k}\;\underset{p}{\iota}^\nu + \underset{p-1}{Q}^\nu \qquad (p = 2, \dots, n),$$

où $\underset{p-1}{Q}^\nu$ est situé dans le $(p-1)$-vecteur $\underset{1}{\iota}^{[\nu} \dots \underset{p-1}{\iota}^{\lambda]}$. Il s'ensuit immédiatement

$$\underset{1}{v}^{[\nu} \dots \underset{n}{v}^{\lambda]} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \underset{1}{k}^{n-1}\,\underset{2}{k}^{n-2} \dots \underset{n-1}{k}\;\underset{1}{\iota}^{[\nu} \dots \underset{n}{\iota}^{\lambda]}.$$

Le n-vecteur à gauche est par hypothèse $\neq 0$, d'où il suit

$$\underset{1}{k}\,\underset{2}{k} \dots \underset{n-1}{k} \neq 0.$$

(¹) Pour un autre systeme des formule de Frenet *voir* [48], [49], [66].

Une courbe générale située dans la variété à n dimensions de M. Weyl possède $n-1$ invariants scalaires, $\neq 0$, invariants aussi par rapport à (26).

III.

9. Supposons maintenant la courbe C dans L_n, dont la connexion est la plus générale. La métrique n'étant pas donnée dans cette variété, nous ne pouvons pas introduire la notion des *verseurs*, en particulier du *verseur* tangent. Mais il y a quand même un paramètre priviligié, « l'arc affine » de C que nous voulons définir avant tout. Remarquons à cet effet que chaque système des coordonnées x^ν donne naissance à une densité $\mathfrak{N}$ du poids -1, à savoir le déterminant des composantes des vecteurs tangents aux lignes paramétriques. *On a dans le système choisi* $\mathfrak{N}=1$, et par conséquent ([1])

$$\frac{dx^\mu}{dt}D_\mu\mathfrak{N}=\frac{d\mathfrak{N}}{dt}+\Gamma'_{\lambda\mu}\frac{dx^\mu}{dt}\mathfrak{N}=\left(\Gamma'_{\lambda\mu}\frac{dx^\mu}{dt}\right).$$

Chaque densité $\mathfrak{M}$ du même poids peut être « jaugée » par $\mathfrak{N}$ à l'aide d'un scalaire M correspondant $\mathfrak{M}=M\mathfrak{N}$ ($=M$ dans le système actuel) et l'on a

$$\frac{dx^\mu}{dt}D_\mu\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\left(\frac{d\log\mathfrak{M}}{dt}+\Gamma'_{\lambda\mu}\frac{dx^\mu}{dt}\right).$$

Or, si l'on désigne par $\mathfrak{M}$ l'intégrale du système

$$\frac{d\log\mathfrak{M}}{dt}+\Gamma'_{\lambda\mu}\frac{dx^\mu}{dt}=0,$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{M}=ce^{-\int\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}\frac{dx^\mu}{dt}}\qquad(c=\text{const. arb.}),$$

on a

$$\frac{dx^\mu}{dt}D_\mu\mathfrak{M}=0 \tag{28}$$

et cette équation sera notre point de départ.

10. Introduisons les vecteurs

$$\underset{1}{v}^\nu=\frac{dx^\nu}{dt},\qquad \underset{2}{v}^\nu=\left(\frac{dx^\mu}{dt}D_\mu\right)\underset{1}{v}^\nu,\qquad\ldots,\qquad \underset{n}{v}^\nu=\left(\frac{dx^\mu}{dt}D_\mu\right)^{n-1}\underset{1}{v}^\nu, \tag{29}$$

([1]) *Voir* [34], [80].

ainsi que les vecteurs

$$(30)\quad \underset{1}{u}^\nu = u^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}, \qquad \underset{2}{u}^\nu = \left(\frac{dx^\mu}{ds}\mathrm{D}_\mu\right)\underset{1}{u}^\nu, \qquad \ldots, \qquad \underset{n}{u}^\nu = \left(\frac{dx^\mu}{ds}\mathrm{D}_\mu\right)^{n-1}\underset{1}{u}^\nu,$$

adjoints à un autre parametre $s = s(t)$. On constate facilement la relation

$$(31)\qquad \underset{p}{v}^\nu = \left(\frac{ds}{dt}\right)^p \underset{p}{u}^\nu + \underset{p-1}{\mathrm{U}}^\nu \qquad (p = 1, \ldots, n),$$

le vecteur $\underset{p-1}{\mathrm{U}}^\nu$ étant situe dans le $(p-1)$ vecteur $\underset{1}{\mathrm{U}}^{[\nu} \ldots \underset{p-1}{\mathrm{U}}^{\lambda]}$ (et $\underset{0}{\mathrm{U}}^\nu = 0$). Dans ce qui suit nous restreindrons notre recherche sur les courbes, ayant les vecteurs $\underset{1}{v}^\nu, \ldots, \underset{n}{v}^\nu$ linéairement indépendants. Il s'ensuit d'après (31) que cette propriété ne dépend pas du choix particulier du paramètre. En désignant par $\mathfrak{w}$ et $\mathfrak{u}$ les déterminants des composantes des vecteurs $\underset{a}{v}^\nu$ et $\underset{a}{u}^\nu$ on a, d'apres (31),

$$(32)\qquad \mathfrak{w} = \mathfrak{u}\left(\frac{ds}{dt}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Nous choisirons le paramètre s de telle manière que $\mathfrak{M} = \mathfrak{u}$ (ce qui est toujours possible, $\mathfrak{u}$ étant une densité du même poids que $\mathfrak{M}$), c'est-à-dire

$$(33)\qquad s = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{M}}\right)^{\frac{2}{n(n+1)}} dt \text{ (1)},$$

en l'appelant, « l'arc affine » de C. Cela étant, on déduit à cause de (30)

$$\underset{1}{u}^\mu \mathrm{D}_\mu \underset{1}{u}^{[\nu} \ldots \underset{n}{u}^{\lambda]} = (-1)^{n-1}\left(\underset{1}{u}^\mu \mathrm{D}_\mu \underset{n}{u}^{[\lambda}\right)\underset{1}{u}^\nu \ldots \underset{n-1}{u}^{\alpha]}.$$

Mais parce que l'on a d'après le choix du paramètre s

$$\underset{1}{u}^\mu \mathrm{D}_\mu \mathfrak{u} = 0.$$

on en déduit immédiatement

$$(\underset{1}{u}^\mu \mathrm{D}_\mu \underset{n}{u}^{[\lambda})\, \underset{1}{u}^\nu \ldots \underset{n-1}{u}^{\alpha]} = 0.$$

(1) *Voir* [39], [40].

Le vecteur $\underset{1}{u}^{\mu} D_{\mu} \underset{n}{u}^{\nu}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\underset{1}{u}^{\nu}, \ldots \underset{n-1}{u}^{\nu}$:

Les formules

$$
(33) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left(\underset{1}{u}^{\mu} D_{\mu}\right) \underset{1}{u}^{\nu} = \underset{2}{u}^{\nu}, \ldots, \left(\underset{1}{u}^{\mu} D_{\mu}\right) \underset{n-1}{u}^{\nu} = \underset{n}{u}^{\nu}, \\ \left(\underset{1}{u}^{\mu} D_{\mu}\right) \underset{n}{u}^{\nu} = \underset{1}{l}\, \underset{n-1}{u}^{\nu} + \underset{2}{l}\, \underset{n-2}{u}^{\nu} + \ldots + \underset{n-1}{l}\, \underset{1}{u}^{\nu} \end{array} \right. \text{ (1)}
$$

peuvent être envisagées comme formules de Frenet pour une courbe dans L_n. Les scalaires $\underset{1}{l}, \ldots \underset{n-1}{l}$ sont « les courbures affines » de C. En désignant par $\mathfrak{u}_a$ le déterminant

$$
\mathfrak{u}_a = \left| \underset{1}{u}^{\nu} \quad \underset{2}{u}^{\nu} \quad \ldots \quad \underset{a-1}{u}^{\nu} \quad \underset{1}{u}^{\mu} D_{\mu} \underset{n}{u}^{\nu} \quad \underset{a+1}{u}^{\nu} \quad \ldots \quad \underset{n}{u}^{\nu} \right| \qquad (a = 1, \ldots, n-1),
$$

on a

$$
\underset{n-a}{l} = \frac{\mathfrak{u}_a}{\mathfrak{u}} \qquad (a = 1, \ldots, n-1).
$$

Nous ne traiterons que des courbes, pour lesquelles $\mathfrak{u} \neq 0$, c'est-à-dire pour lesquelles les vecteurs $\underset{1}{u}^{\nu}, \ldots, \underset{n}{u}^{\nu}$ sont linéairement indépendants. Le cas échéant les courbures $\underset{1}{l}, \ldots, \underset{n-1}{l}$ seront dites « indépendantes ».

11. Étant donné un système des fonctions analytiques holomorphes $\underset{1}{l}(s), \ldots, \underset{n-1}{l}(s)$ (« indépendantes » au sens que nous venons de préciser), nous en voulons construire la courbe C qui ait ces fonctions pour courbures. Transcrivons à cet effet la dernière des équations (33)

$$
(33') \qquad \left(\underset{1}{u}^{\mu} D_{\mu}\right)^{n} \underset{1}{u}^{\nu} = \underset{1}{l}(u^{\mu} D_{\mu})^{n-2} \underset{1}{u}^{\nu} + \ldots + \underset{n-2}{l}\, (u^{\mu} D_{\mu}) \underset{1}{u}^{\nu} + \underset{n-1}{l}\, \underset{1}{u}^{\nu}
$$

et substituons-y les expressions

$$
(34) \qquad \frac{dx^{\nu}}{ds} = \underset{1}{u}^{\nu} = \underset{1}{\omega}^{\nu}, \qquad \frac{d\underset{1}{\omega}^{\nu}}{ds} = \underset{2}{\omega}^{\nu}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\underset{n-1}{\omega}^{\nu}}{ds} = \underset{n}{\omega}^{\nu},
$$

$$
(35) \qquad \underset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}[x(s)], \qquad \frac{d\underset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}}{ds} = \underset{1}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}, \qquad \frac{d\underset{1}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}}{ds} = \underset{2}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\underset{n-2}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}}{ds} = \underset{n-1}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}.
$$

---

(1) *Voir* [2] pour E_3 Un autre système donne Cartan [11] dans L_3.

Les expressions (35) ne dépendent que de x^ν, $\underset{1}{\omega}{}^\nu, \ldots, \underset{n-1}{\omega}{}^\nu$ de sorte que le système (33′) peut être écrit

$$(36)\qquad \mathrm{F}'\left(x, \underset{1}{\omega}, \ldots, \underset{n}{\omega}, \frac{d\underset{n}{\omega}}{ds}; \underset{1}{l}, \ldots, \underset{n-1}{l}\right) = 0.$$

L'ensemble (34) et (36) est un système de $\mathrm{N} = n + n^2$ équations différentielles du premier ordre par rapport à toutes les N inconnues $x^\nu, \underset{1}{\omega}{}^\nu, \ldots, \underset{n}{\omega}{}^\nu$.

Pour déterminer les N constantes arbitraires, dont dépend l'intégrale générale de ce système, nous prescrivons les valeurs x^ν, $\underset{1}{\omega}{}^\nu, \ldots, \underset{n}{\omega}{}^\nu$ pour $s = 0$, ce qui exige $\mathrm{N} = n^2 + n$ constantes. Mais ce choix des constantes est équivalent à la condition que la courbe cherchée passe par un point donné et qu'elle y ait [à cause de (30)] le repère $\left(\underset{a}{u}{}^\nu\right)_0$ prescrit d'avance arbitrairement.

Les $n-1$ fonctions holomorphes $\underset{1}{l}(s), \ldots, \underset{n-1}{l}(s)$ indépendantes déterminent dans L_n une courbe au moins, — qui passe par un point choisi arbitrairement, en y ayant le repère $\left(\underset{a}{u}{}^\nu\right)_0$ prescrit d'avance — dont les courbures sont $\underset{1}{l}(s), \ldots, \underset{n-1}{l}(s)$.

12. Les vecteurs $\underset{a}{u}{}^\nu$ étant linéairement indépendants, on en peut construire n vecteurs covariants, linéairement indépendants d'après $\underset{a}{u}{}^\nu \overset{a}{u}_\lambda = \mathrm{A}_\lambda^\nu$. Il s'ensuit immédiatement, en raison de (33).

$$(37)\qquad \underset{1}{u}{}^\mu \mathrm{D}_\mu \overset{a}{u}_\lambda = -\overset{a-1}{u}_\lambda - \underset{n-a}{l}\,\overset{n}{u}_\lambda \qquad \left(a = 1, \ldots, n;\ \overset{0}{u}_\lambda = 0,\ \underset{0}{l} = 0\right).$$

Les deux systèmes de Frenet, (33) et (37) nous autorisent à simplifier les équations différentielles qui définissent le parallélisme le long de C

$$(38)\qquad \underset{1}{u}{}^\mu \mathrm{D}_\mu v^\nu = \frac{dv^\nu}{ds} + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu v^\lambda \underset{1}{u}{}^\mu = 0, \qquad \underset{1}{u}{}^\mu \mathrm{D}_\mu w_\lambda = \frac{dw_\lambda}{ds} - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu w_\nu \underset{1}{u}{}^\mu = 0.$$

En effet, si l'on pose

$$v^\nu = v^a \underset{a}{u}{}^\nu, \quad w_\lambda = w_a \overset{a}{u}_\lambda \quad \left(v^a = v^\lambda \overset{a}{u}_\lambda, \quad w_a = w_\nu \underset{a}{u}{}^\nu\right),$$

on trouve à cause de (33) et (37)

$$\frac{dv^a}{ds} + v^{a-1} + v^n \underset{n-a}{l} = 0 \qquad \left(v^0 = \underset{0}{l} = 0\right),$$

$$\frac{dw_a}{ds} - w_{a+1} - \left(w_1 \underset{n-1}{l} + w_2 \underset{n-2}{l} + \ldots + w_{n-1} \underset{1}{l}\right)\delta^n_a = 0; \qquad \left(w_{n+1} = \underset{0}{l} = 0\right)$$

$$(a = 1, \ldots, n),$$

Il s'ensuit : *L'intégration du parallélisme dans* L_n *le long d'une courbe générale aux courbures constantes n'exige que des opérations algébriques.*

Remarque. — On constate facilement que les courbures $\underset{1}{l}, \ldots, \underset{n-1}{l}$ sont d'ordre resp. $n+2$, $n+3$, ..., $2n$, tandis que les vecteurs $\underset{1}{u}^\nu$, $\underset{2}{u}^\nu$, ..., $\underset{n}{u}^\nu$ sont d'ordre resp. n, $n+1$, ..., $2n-1$ par rapport à un paramètre arbitraire t. Si $n=3$ on peut trouver un repère $\underset{1}{e}^\nu$, $\underset{2}{e}^\nu$, $\underset{3}{e}^\nu$ d'ordre 4 et deux fonctions ρ, τ d'ordre 5

$$\underset{1}{e}^\nu = \underset{1}{u}^\nu, \qquad \underset{2}{e}^\nu = \underset{2}{u}^\nu, \qquad \underset{3}{e}^\nu = \underset{3}{u}^\nu - \frac{l_1}{4}\underset{1}{u}^\nu,$$

$$\rho = \frac{\underset{1}{l}}{4}, \qquad \tau = \underset{2}{l} - \frac{d\rho}{ds}$$

et l'on parvient aux formules

$$\underset{1}{e}^\mu D_\mu \underset{1}{e}^\nu = \underset{2}{e}^\nu, \qquad \underset{1}{e}^\mu D_\mu \underset{2}{e}^\nu = \underset{3}{e}^\nu + \rho \underset{1}{e}^\nu, \qquad \underset{1}{e}^\mu D_\mu \underset{3}{e}^\nu = \tau \underset{1}{e}^\nu + 3\rho \underset{2}{e}^\nu \quad (^1).$$

CHAPITRE III.

LES COURBURES DE V_n ET LES COURBES DANS V_n.

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'étudier l'influence de la courbure d'une V_n sur les courbes qui y sont situées.

1. Paramètres localement géodésiques (²). — Soient $g_{\lambda\mu}$ le tenseur

---

(¹) [2] pour E_3, [39], [40] pour L_3. *Cf.* aussi [50].

(²) *Voir* [17], [36]*a*, [36]*b*, [62], [76].

métrique d'une V_n et $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ ses coefficients

$$(1)\qquad \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{dx^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right).$$

Introduisons les coefficients

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu_1,\mu_2,\ \ ,\mu_s} = \frac{\partial^{s-1}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu_1}}{\partial x^{\mu_2}\ldots\partial x^{\mu_s}}$$

et

$$(2)\qquad \Lambda^{\nu}_{\lambda\mu_1\ \ \mu_s} = \Gamma^{\nu}_{(\lambda\mu_1\ \ \mu_s)}.$$

Si l'on passe du système des coordonnées x^{ν} à un autre système $'x^{\nu}$, les coefficients $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ se transforment d'après le Chapitre I, (3). On en déduit facilement le mode de transformation des coefficients Λ. D'autre part, on peut développer la transformation $'x \to x$ au voisinage infiniment petit du point $P(x = 0)$

$$(3)\qquad 'x^{\nu} = x^{\nu} + \sum_{1}^{\infty}{}_p \frac{1}{p!}\left(\frac{\partial^p\, 'x^{\nu}}{\partial x^{\lambda_1}\ldots\partial x^{\lambda_p}}\right)_0 x^{\lambda_1}\ldots x^{\lambda_p}.$$

En comparant les formules pour la transformation des coefficients Λ aux équations (3), on constate sans difficulté que le choix convenable des constantes $\left(\frac{\partial^p\, 'x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma_1}\ldots\partial x^{\gamma_p}}\right)_0$ nous fournit

$$(4)\qquad '\overset{0}{\Lambda}{}^{\nu}_{\lambda\mu_1\ \ \mu_s} = ('\Lambda^{\nu}_{\lambda\mu_1\ \ \mu_s})_0 = 0.$$

On parvient ainsi aux coordonnées

$$(5)\qquad 'x^{\nu} = x^{\nu} + \frac{1}{2!}\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}\, x^{\lambda} x^{\mu} + \frac{1}{3!}\left(\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu\omega} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\mu\omega}\right)_0 x^{\lambda} x^{\mu} x^{\omega} + \ldots.$$

Nous dirons que le système $'x^{\nu}$ est localement géodésique d'ordre r dans P si les équations (4) sont valables pour $s = 1, 2, \ldots, r$, tandis que

$$(4)\qquad \overset{0}{\Lambda}{}^{\nu}_{\lambda\mu_1\ \ \mu_p} \neq 0 \qquad \text{pour} \qquad p = r+1,\ r+2,\ \ldots.$$

Dès lors, nous supposerons que le système des coordonnées x^{ν} soit localement géodésique d'ordre 4 au moins dans P. Cela nous permet d'évaluer les coefficients

$$
(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\mu(\alpha,\beta)} = \frac{1}{3}\overset{0}{K}{}_{\dot{\mu}(\dot{\alpha}\beta)}{}^{\nu}, \qquad \overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\mu(\alpha,\beta\gamma)} = -\frac{1}{2}\left[D_{(\alpha} K_{\beta .\gamma)\mu}^{\cdot\nu}\right]_0, \\ & \overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\mu(\alpha,\beta\gamma\delta)} = -\frac{3}{5}\left(\frac{2}{9} K_{(\alpha .\beta}^{\cdot\rho\cdot\nu} K_{\delta .\gamma)\mu}^{\cdot\omega} g_{\rho\omega} + D_{(\alpha} D_\beta K_{\gamma .\delta)\mu}^{\cdot\nu}\right)_0 \end{aligned} \right.
$$

en P. D'autre part, en tenant compte de la définition des coefficients $\Gamma^{\nu}_{\lambda\nu}$ on en peut déduire les formules analogues pour $\Lambda^{\nu}_{\lambda\mu\alpha\beta\ldots\rho}$ à l'aide des dérivées de $g_{\lambda\mu}$. Cela étant, on trouve en raison de (6)

$$
(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)_0 = \frac{2}{3}\overset{0}{K}_{\mu(\alpha\beta)\lambda}, \\ & \left(\frac{\partial^3 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma}\right)_0 = -A^{\rho}_{(\gamma}\left[D_\alpha K_{\beta)\mu\rho\lambda}\right]_0, \\ & \left(\frac{\partial^4 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma \partial x^\delta}\right)_0 = \left(-\frac{6}{5} A^{\rho}_{(\delta} D_\alpha D_\beta K_{\gamma)\mu\rho\lambda} - \frac{16}{15} K_{\dot{\mu}(\dot{\alpha}\beta}{}^{\rho} A^{\omega}_{0} K_{\gamma)\lambda\omega\rho}\right)_0. \end{aligned} \right.
$$

Il s'ensuit au voisinage infiniment petit du point $P(x = 0)$

$$
(8) \qquad \begin{aligned} g_{\lambda\mu} = \overset{0}{g}_{\lambda\mu} - \frac{1}{3} x^\alpha x^\beta \overset{0}{K}_{\alpha\mu\beta\lambda} - \frac{1}{3!} x^\alpha x^\beta x^\gamma (D_\alpha K_{\beta\mu\gamma\lambda})_0 \\ + \frac{1}{5!} x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta \left(-6 D_\alpha D_\beta K_{\gamma\mu\delta\lambda} + \frac{16}{3} K_{\dot{\alpha}\dot{\mu}\dot{\beta}}{}^{\rho} K_{\gamma\lambda\delta\rho}\right)_0 + \ldots . \end{aligned}
$$

Nous aurons plus tard l'occasion d'utiliser ce développement.

2. **Le déplacement d'un vecteur le long d'une courbe** (¹). — Étant données une courbe $C(s)$ et la dérivée covariante le long de $C(s)$ d'un champ vectoriel v

$$
(9) \qquad i^\mu D_\mu v^\nu = D v^\nu = \frac{dv^\nu}{ds} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} v^\lambda i^\mu,
$$

ces équations représentent le système linéaire différentiel non-homogène dont nous nous proposons de trouver l'intégrale (²). D'après un théorème bien connu, l'intégrale cherchée est en général

$$
(10) \qquad v^\nu = \overset{0}{v}{}^\nu + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{s^p}{p!}\left(\frac{d^p v^\nu}{ds^p}\right)_0 \qquad (s \to 0).
$$

(¹) *Voir* [16], [36] *b*.

(²) Ici et dans la suite, nous supposerons que le système (9) admette une intégrale holomorphe au voisinage infiniment petit du point $P(x = 0)$.

En supposant que le système des coordonnées x^ν est localement géodésique en $P(x = 0)$ on trouve d'apres (9) et (6) les valeurs des coefficients dans (10) ainsi que l'intégrale cherchee peut s'ecrire

$$(11) \qquad v^\nu = \overset{0}{v}{}^\nu + s(Dv^\nu)_0 + \frac{s^2}{2!}\left(D^2 v^\nu + \frac{1}{3} i^\omega i^\mu v^\lambda K_{\omega\lambda\mu}{}^\nu\right)_0$$
$$+ \frac{s^3}{3!}\left(D^3 v^\nu + \frac{1}{2} i^\omega i^\lambda v^\mu DK_{\omega\mu\lambda}{}^\nu\right.$$
$$\left. + K_{\omega\mu\lambda}{}^\nu i^\omega i^\lambda Dv^\mu - \underset{1}{k} v^\omega i^\mu \underset{2}{i}{}^\lambda K_{\omega\mu\lambda}{}^\nu\right) + \dots$$

Si le deplacement du vecteur v^ν est parallele ($Dv^\nu = 0$) la formule (11) devient plus simple

$$(12) \qquad v^\nu = \overset{0}{v}{}^\nu + \frac{s^2}{3!}\left(K_{\omega\mu\lambda}{}^\nu i^\omega i^\lambda v^\mu\right)_0$$
$$+ \frac{s^3}{2\cdot 3!}\left(i^\omega i^\lambda v^\mu DK_{\omega\mu\lambda}{}^\nu - 2\underset{1}{k} v^\omega i^\mu \underset{2}{i}{}^\lambda K_{\omega\mu\lambda}{}^\nu\right)_0 + \dots$$

et ainsi l'on a

$$(13) \qquad \lim_{s\to 0} \frac{v^\nu - \overset{0}{v}{}^\nu}{s^2} = \frac{1}{3!}\left(K_{\omega\mu\lambda}{}^\nu i^\omega i^\lambda v^\mu\right)_0.$$

C'est ici pour la premiere fois que l'affineur de courbure intervient dans la theorie du déplacement parallele le long d'une courbe. En désignant par $K_{1\mu 1}{}^\nu$ l'affineur $\underset{1}{i}{}^\omega \underset{1}{i}{}^\lambda K_{\omega\mu\lambda}{}^\nu$, on déduit d'après (13) et (8)

$$(14) \qquad 36 \lim_{s\to 0} \frac{\left(v^\lambda - \overset{0}{v}{}^\lambda\right)\left(v_\lambda - \overset{0}{v}_\lambda\right)}{s^4} = \overset{0}{K}_{1\mu 1}{}^\alpha \overset{0}{K}_{1\lambda 1\alpha} \overset{0}{v}{}^\mu \overset{0}{v}{}^\lambda$$

et cette formule fait clairement voir le rôle de la courbure de V_n pour le déplacement parallele d'un vecteur.

3. Équations canoniques de $C(s)$ [1]. — L'application de la même méthode nous mène a l'integrale de l'équation differentielle de la courbe

$$\frac{dx^\nu}{ds} = i^\nu = \underset{1}{i}{}^\nu$$

---

[1] *Voir* [36]*a*.

qui est de la forme

$$(15)\quad x^\nu(s) = s i^\nu + \frac{s^2}{2!}(D i^\nu) + \frac{s^3}{3!}(D^2 i^\nu) + \frac{s^4}{4!}\left(D^3 i^\nu + \underset{1}{k} K_{121}{}^\nu\right)$$
$$+ \frac{s^5}{5!}\left(D^4 i^\nu + 2\underset{1}{k} L_{121}{}^\nu - 3\underset{1}{k}^2 K_{212}{}^\nu + \frac{7}{3} K_{1\mu 1}{}^\nu D^2 i^\mu\right) + \dots,$$

avec

$$L_{\omega\mu\lambda}{}^\nu = DK_{\omega\mu\lambda}{}^\nu, \qquad L_{121}{}^\nu = \underset{1}{i}^\omega \underset{2}{i}^\mu \underset{1}{i}^\lambda L_{\omega\mu\lambda}{}^\nu,$$
$$K_{abc}{}^\nu = \underset{a}{i}^\omega \underset{b}{i}^\mu \underset{c}{i}^\lambda K_{\omega\mu\lambda}{}^\nu, \qquad K_{1\mu 1}{}^\nu = \underset{1}{i}^\omega \underset{1}{i}^\lambda K_{\omega\mu\lambda}{}^\nu \qquad (a, b, c = 1, 2).$$

(Les coefficients de ce développement sont naturellement à prendre au point P.) Les équations (15) peuvent être envisagées comme équations canoniques de $C(s)$. On voit donc qu'à partir de s^4 elles sont bien différentes de celles d'une courbe dans l'espace euclidien tangent. Notre système des coordonnées étant géodésique d'ordre 4 au moins en P, les équations canoniques d'une géodésique, passant par P, sont d'après (15)

$$(15')\qquad x^\nu(S) = S I^\nu + \frac{S^6}{6!}(\quad) + \dots.$$

Cela étant, on déduit pour la distance géodésique des points infiniment voisins $P(x = 0)$ et $Q[x(S)]$ en raison de (8)

$$(16)\qquad S^2 = \overset{0}{g}_{\lambda\mu}\, x^\lambda(S)\, x^\mu(S),$$

avec une erreur d'ordre 7 par rapport à S. Supposons maintenant que la géodésique (15)' soit tangente en P à C, $I^\nu = i^\nu$, et désignons par Q l'autre point d'intersection (infiniment voisin à P) de ces deux courbes. On a donc pour Q $x^\nu(s) = x^\nu(S)$ et par conséquent, d'après (15) et (16),

$$(17)\quad S^2 = s^2 - \frac{s^4}{4!}\left(2\underset{1}{k}^2\right)_0 - \frac{s^5}{5!}\,5\left(\frac{d\underset{1}{k}^2}{ds}\right)_0$$
$$+ \frac{s^6}{6!}\,2\left[\underset{1}{k}^4 + \underset{1}{k}^2 \underset{2}{k}^2 - 8\left(\frac{d\underset{1}{k}}{ds}\right)^2 - 9\underset{1}{k}\frac{d^2\underset{1}{k}}{ds^2} - 3\underset{1}{k}^2 K_{1212}\right]_0 + \dots.$$

Cette formule, qui laisse clairement voir le rôle de l'affineur de courbure de V_n pour la distance géodésique (de deux points infiniment voisins de C) exprimée en fonction de l'arc de C, nous permet aussi de développer les coordonnées x du point Q de C en fonction de S

$$
\begin{aligned}
(18)\quad x^\nu = {} & \mathrm{S}\, \iota^\nu + \frac{\mathrm{S}^2}{2!}(\mathrm{D}\,\iota^\nu)_0 + \frac{\mathrm{S}^3}{3!}\left(\mathrm{D}^2\,\iota^\nu + \frac{1}{4}k^2\,\iota^\nu\right) \\
& + \frac{\mathrm{S}^4}{4!}\left(\mathrm{D}^3\,\iota^\nu + \underset{1}{k}^2\,\mathrm{D}\,\iota^\nu + \iota^\nu \underset{1}{k}\frac{d\underset{1}{k}}{ds} + \underset{1}{k}\,\mathrm{K}_{121}{}^\nu\right)_0 \\
& + \frac{\mathrm{S}^5}{5!}\Bigg\{\iota^\nu\Bigg[\frac{9}{16}\underset{1}{k}^4 - \frac{1}{6}\Bigg(\underset{1}{k}^2\,\underset{2}{k}^2 - 8\left(\frac{d\underset{1}{k}}{ds}\right)^2 \\
& \qquad - 9\underset{1}{k}\frac{d^2\underset{1}{k}}{ds^2} - 3\underset{1}{k}^3\,\mathrm{K}_{1212}\Bigg)\Bigg] \\
& \qquad + \mathrm{D}^4\,\iota^\nu + \frac{5}{2}\underset{1}{k}^2\,\mathrm{D}^2\,\iota^\nu + 5(\mathrm{D}\,\iota^\nu)\underset{1}{k}\frac{d\underset{1}{k}}{ds} + 2\underset{1}{k}\,\mathrm{L}_{121}{}^\nu \\
& \qquad - 3\underset{1}{k}^2\,\mathrm{K}_{212}{}^\nu + \frac{7}{3}\mathrm{K}_{1\lambda 1}{}^\nu\,\mathrm{D}^2\,\iota^\lambda\Bigg\}_0 + \ldots
\end{aligned}
$$

4. Conctact de deux courbes. — La formule (18) nous permet d'exprimer analytiquement les conditions pour le contact de deux courbes. Imaginons deux courbes C et 'C ayant le point régulier $\mathrm{P}(x = 0)$ en commum. Désignons par Q resp. 'Q le point infiniment voisin à P sur C resp. sur 'C. Choisissons Q et 'Q de telle maniere que soit $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{P'Q}} = \mathrm{S}$ et désignons par q le module du vecteur infiniment petit $\overrightarrow{\mathrm{Q'Q}}$. Nous dirons que les courbes C et 'C ont un contact d'ordre p en P si q est infiniment petit d'ordre $p+1$ par rapport à S, c'est-à-dire si

$$
(19)\qquad \lim_{\mathrm{S}\to 0}\frac{q}{\mathrm{S}^w} = 0, \qquad \lim_{\mathrm{S}\to 0}\frac{q}{\mathrm{S}^{p+k}} \neq 0, \qquad (w \leqq p;\ k = 1, 2, \ldots),
$$

en P. Si l'on désigne par $'x^\nu$ les composantes de 'Q, on peut écrire aussi au lieu de (19)

$$
(20)\qquad \lim_{\mathrm{S}\to 0}\frac{'x^\nu - x^\nu}{\mathrm{S}^w} = 0, \qquad \lim_{\mathrm{S}\to 0}\frac{'x^\nu - x^\nu}{\mathrm{S}^{p+k}} \neq 0 \qquad (w \leqq p;\ k = 1, 2, \ldots).
$$

D'autre part, en écrivant pour (18)

$$
(18')\qquad x^\nu = \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{\mathrm{S}^m}{m!}\underset{m}{a}^\nu,
$$

on obtient le développement analogue pour $'x^\nu$

$$
'x^\nu = \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{\mathrm{S}^m}{m!}\,'\underset{m}{a}^\nu.
$$

On a donc pour le contact d'ordre p en P

$$(21)\qquad \underset{w}{a^{\nu}} = \underset{w}{'a^{\nu}}, \qquad \underset{p+k}{'a^{\nu}} \neq \underset{p+k}{a^{\nu}} \qquad (w \leqq p;\ k = 1, 2, \ldots).$$

Il s'ensuit : pour $p = 1$,

$$\underset{1}{a^{\nu}} = \underset{1}{'a^{\nu}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \underset{1}{i^{\nu}} = \underset{1}{'i^{\nu}};$$

pour $p = 2$,

$$\underset{1}{a^{\nu}} = \underset{1}{'a^{\nu}}, \qquad \underset{2}{a^{\nu}} = \underset{2}{'a^{\nu}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \underset{1}{i^{\nu}} = \underset{1}{'i^{\nu}}, \qquad \mathrm{D}\underset{1}{i^{\nu}} = \mathrm{'D}\underset{1}{'i^{\nu}};$$

pour $p = 3$,

$$\underset{1}{a^{\nu}} = \underset{1}{'a^{\nu}}, \qquad \underset{2}{a^{\nu}} = \underset{2}{'a^{\nu}}, \qquad \underset{3}{a^{\nu}} = \underset{3}{'a^{\nu}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \underset{1}{i^{\nu}} = \underset{1}{'i^{\nu}}, \qquad \mathrm{D}\underset{1}{i^{\nu}} = \mathrm{'D}\underset{1}{'i^{\nu}}$$

et

$$\mathrm{D}^2 \underset{1}{i^{\nu}} + \frac{1}{4} \underset{1}{i^{\nu}} \underset{1}{k^2} = \mathrm{'D}^2 \underset{1}{'i^{\nu}} + \frac{1}{4} \underset{1}{'i^{\nu}} \underset{1}{'k^2}.$$

En tenant compte des équations de Frenet [Chap. I (20)] on en déduit pour le contact d'ordre 2

$$\underset{1}{i^{\nu}} = \underset{1}{'i^{\nu}}, \qquad \underset{2}{i^{\nu}} = \underset{2}{'i^{\nu}}, \qquad \underset{1}{k} = \underset{1}{'k}$$

et pour le contact d'ordre 3

$$(22)\qquad \underset{1}{i^{\nu}} = \underset{1}{'i^{\nu}}, \qquad \underset{2}{i^{\nu}} = \underset{2}{'i^{\nu}}, \qquad \underset{3}{i^{\nu}} = \underset{3}{'i^{\nu}}, \qquad \underset{1}{k} = \underset{1}{'k}, \qquad \underset{2}{k} = \underset{2}{'k}, \qquad \frac{d\underset{1}{k}}{ds} = \frac{d'\underset{1}{k}}{d's}.$$

Il s'ensuit (toujours en P) pour $p = 3$

$$\underset{a}{i^{\omega}} \underset{b}{i^{\mu}} \underset{c}{i^{\lambda}} \mathrm{K}_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = \underset{a}{'i^{\omega}} \underset{b}{'i^{\mu}} \underset{c}{'i^{\lambda}} \mathrm{K}_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} \qquad (a, b, c = 1, 2, 3)$$

et par conséquent les deux courbes ont le contact d'ordre 4 si, avec (22), sont satisfaites aussi les équations

$$\mathrm{D}^3 \underset{1}{i^{\nu}} = \mathrm{'D}^3 \underset{1}{'i^{\nu}}.$$

En poursuivant ce procédé plus loin, on vérifie le théorème général :

Si deux courbes dans V_n *ont le contact d'ordre* p *en* P, *elles y possèdent le vecteur tangent, les premiers* $p-1$ *vecteurs normaux, les premières* $p-1$ *courbures et les premières* u *dérivations des premières* $p-u-1$ *courbures d'après l'arc en com-*

mun :

$$\underset{1}{i}^{\nu} = \underset{1}{'i}^{\nu}, \quad \underset{2}{i}^{\nu} = \underset{2}{'i}^{\nu}, \quad \ldots, \quad \underset{p}{i}^{\nu} = \underset{p}{'i}^{\nu}, \quad \underset{1}{k} = \underset{1}{'k}, \quad \ldots, \quad \underset{p-1}{k} = \underset{p-1}{'k},$$

$$\frac{d^u}{ds^u} \underset{p-u-1}{k} = \frac{d^u}{d's^u} \underset{p-u-1}{'k} \qquad (u = 1, \ldots, p-2), \qquad (p \leqq n).$$

Nos moyens ne nous permettent de démontrer ce théorème que pour $p \leqq 5$. Mais on peut facilement vérifier qu'il est juste aussi pour $p \geqq 5$. Or, l'affineur de courbure de V_n ne joue aucun rôle dans la théorie du contact de deux courbes. Un théoreme analogue est vrai aussi pour $p > n$ (¹).

5. Courbures relatives de Lipka (²). — Lipka a défini la courbure relative de deux courbes moyennant la formule

$$\underset{1}{K} = \lim_{S \succ 0} \frac{2!\, q}{S^2}.$$

Si les courbes en question ont le contact d'ordre 2 la courbure relative $\underset{1}{K}$ est nulle. Le cas échéant, on pourrait définir la deuxième courbure relative $\underset{2}{K}$

$$\underset{2}{K} = \lim_{S \succ 0} \frac{3!\, q}{S^3}.$$

Si les courbes en question ont le contact d'ordre 3, on a $\underset{2}{K} = 0$ et ainsi de suite. On a en général pour le contact d'ordre p

$$\underset{w-1}{K} = \lim_{S \succ 0} \frac{w!\, q}{S^w} = 0 \qquad (w = 2, \ldots, p).$$

6. Une seule courbe dans deux connexions V_n et $\overset{0}{R}_n$ (³). — Nous avons toujours accentué le rôle de l'affineur de courbure $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ partout où celui-ci intervient dans la théorie des courbes, car l'étude des formules de Frenet peut conduire à une conclusion fausse, à savoir, que la théorie des courbes dans V_n ne diffère point de celle dans l'espace euclidien (R_n, sans courbure). En effet, si l'on introduit les coordonnées locales d'ordre 1, la dérivee covariante le long de C en P

(¹) *Voir* [26], [28] dans R_3 [37] dans V_n.
(²) *Voir* [30], [58], [74].
(³) *Voir* [36] *b*.

égale la dérivée ordinaire en P de maniere que l'on peut remplacer dans le Chapitre I, (20), le symbole D par $\frac{d}{ds}$. Nous avons vu tout de même que la conclusion, mentionnée plus haut n'est pas juste et nous voulons encore approfondir l'étude de l'influence de la courbure de V_n sur C en étudiant une seule courbe dans deux connexions différentes.

Supposons que C soit située dans un espace n fois étendu, doué d'une connexion riemannienne, déduite de $g_{\lambda\mu}$. Introduisons dans un de ses points réguliers, par exemple dans $P(x = 0)$, les coordonnées géodésiques d'ordre 4 au moins. Ce système de coordonnées est en même temps un système cartésien pour la connexion euclidienne à la métrique $\overset{0}{g}_{\lambda\mu} = (g_{\lambda\mu})_0$ que nous désignerons par $\overset{0}{R}_n$. Nous nous proposons d'étudier les invariants de C par rapport à ces deux connexions. Pour plus de clarté, nous affectons l'accent en haut à gauche aux expressions qui concernent notre courbe dans $\overset{0}{R}_n$ (ainsi par exemple 'C est notre courbe examinée dans $\overset{0}{R}_n$, etc.). En tenant compte de ce que la métrique de $\overset{0}{R}_n$ est fixée par $\overset{0}{g}_{\lambda\mu}$ on obtient pour les modules S et 'S du vecteur infiniment petit $\overrightarrow{PQ}$ en raison de (16)

$$\text{(16')} \qquad S = {}'S,$$

avec une erreur de l'ordre 6 par rapport à S. Il s'ensuit qu'on peut remplacer dans les premiers 5 membres du développement de 'C

$$'x = \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{'S^m}{m!} \, '\underset{m}{a}^\nu,$$

l'argument 'S par S. Cela étant, on obtient en raison de (18)'

$$\text{(23)} \qquad 'x^\nu - x^\nu = 0 = \sum_{1}^{5}{}_m \frac{S^m}{m!} \left('\underset{m}{a}^\nu - \underset{m}{a}^\nu \right) + \ldots,$$

les membres omis étant d'ordre plus élevé que S^5. Il s'ensuit d'abord

$$\underset{1}{a}^\nu = '\underset{1}{a}^\nu, \qquad \underset{2}{a}^\nu = '\underset{2}{a}^\nu, \qquad \underset{3}{a}^\nu = '\underset{3}{a}^\nu,$$

c'est-à-dire, d'après (18) et Chapitre I, (25), que pour $n \geqq 3$

$$\underset{1}{\iota}^{\nu}, \quad \underset{2}{\iota}^{\nu}, \quad \underset{3}{\iota}^{\nu}, \quad \underset{1}{k}, \quad \underset{2}{k}, \quad \frac{d\underset{1}{k}}{ds}$$

sont invariants par rapport à ces deux connexions. *Les premières deux courbures, la première dérivée de la première courbure d'après l'arc, le vecteur tangent et les premiers deux vecteurs normaux de la courbe considérée comme courbe de V_n ou de $\overset{0}{R}_n$ sont identiques.*

Mais (23) nous donne encore plus, c'est-à-dire

$$\underset{4}{a}^{\nu} = \underset{4}{a}'^{\nu}, \qquad \underset{\bullet}{a}' = '\underset{\bullet}{a}'$$

La première relation nous apprend, en raison de (18) et du théorème enoncé plus haut

$$D^3 \iota^{\nu} + \underset{1}{k} K_{121}{}^{\nu} = \frac{d^3\, '\iota^{\nu}}{d'\, s^3}$$

et cette relation peut être aussi décrite en raison du Chapitre I, (25), pour $n \geqq 4$

$$(24) \qquad \underset{2}{\iota}^{\nu}\left(\frac{d^2\underset{1}{k}}{ds^2}\right) + \underset{3}{\iota}^{\nu}\left(\frac{d\underset{1}{k}\underset{2}{k}}{ds}\right) + \underset{1}{k}\underset{2}{k}\underset{3}{k}\underset{4}{\iota}^{\nu} + K_{121}{}^{\nu}\underset{1}{k}$$
$$= '\underset{2}{\iota}^{\nu}\left(\frac{d^2\, '\underset{1}{k}}{d^2\, 's^2}\right) + '\underset{3}{\iota}^{\nu}\left(\frac{d\, \underset{1}{k}'\underset{2}{k}}{d's}\right) + '\underset{1}{k}'\underset{2}{k}'\underset{3}{k}'\underset{4}{\iota}^{\nu}.$$

Il s'ensuit en général pour $n > 4$

$$(25) \qquad \underset{4}{\iota}^{\nu} \neq '\underset{4}{\iota}^{\nu}$$

et de plus

$$(26)\quad \left|\begin{array}{ll} 1^{\circ} & \dfrac{d^2\, '\underset{1}{k}}{d's^2} = \dfrac{d^2\underset{1}{k}}{ds} + K_{1212}\underset{1}{k}, \\[2ex] 2^{\circ} & \dfrac{d'\underset{2}{k}}{d\, s} = \dfrac{d\underset{2}{k}}{ds} + K_{1213}, \\[2ex] 3^{\circ} & '\underset{3}{k} = \dfrac{\underset{2}{k}\underset{3}{k}\cos\left(\underset{4}{\iota}, '\underset{4}{\iota}\right) + K_{121}{}^{\nu}\, '\underset{4}{\iota}_{\nu}}{\underset{2}{k}} = \dfrac{\underset{2}{k}\underset{3}{k} + K_{1214}}{\underset{2}{k}\cos\left(\underset{4}{\iota}, '\underset{4}{\iota}\right)}. \end{array}\right.$$

Or, les expressions à gauche dans (25) et (26) ne sont plus des notions invariantes par rapport à V_n et $\overset{0}{R}_n$, car c'est l'affineur de courbure de V_n qui y intervient : *Les troisièmes courbures et les troisièmes verseurs normaux de la courbe examinée dans* V_n *et* $\overset{0}{R}_n$ *ne sont pas identiques en général.*

Exception fait le cas, si V_n est à courbure constante. Le cas échéant les composantes orthogonales de $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ à trois indices inégaux sont nulles et par conséquent l'équation (24) donne

$$\underset{4}{\iota} = \underset{4}{'\iota^{\nu}}$$

et (26) se réduisent à $(26)_1$ et

$$\frac{d'\underset{2}{k}}{d's} = \frac{d\underset{2}{k}}{ds} \qquad \left('\underset{3}{k} = \underset{3}{k}\right).$$

Nous ne poursuivrons pas plus loin notre méthode, car nous croyons avoir suffisamment démontré le rôle de l'affineur de courbure dans notre problème.

Remarque. — Le même procédé nous fournit aussi les invariants de C par rapport à deux connexions riemanniennes V_n et $'V_n$. Le lecteur intéressé en trouvera la démonstration dans un de mes travaux (¹).

7. Interprétation géométrique de la courbure de la variété. — Nous finirons ce chapitre en donnant une interprétation géométrique à la courbure de V_n dans une bidirection. Étant donnés deux vecteurs, aux directions différentes, i^ν et j^ν la courbure de V_n dans leur bidirection est

$$(K) = K_{\omega\mu\lambda\nu}\, i^\omega j^\mu i^\lambda j^\nu.$$

Cela étant, supposons une courbe infiniment voisine à C, construite à l'aide d'un vecteur V^ν, déplacé parallèlement le long de C. Les équations paramétriques de cette courbe $^*C$ sont donc

$$^*x^\nu = x^\nu + \varepsilon V^\nu \qquad (\varepsilon = \text{const.} \to 0).$$

Choisissons maintenant deux points infiniment voisins P et Q sur C et désignons par $^*P$ et $^*Q$ les points correspondants sur $^*C$. Le module du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ étant S, nous voulons calculer le module $^*S$ du vec-

(¹) *Voir* [37].

teur $\overrightarrow{{}^*\mathrm{P}{}^*\mathrm{Q}}$. On a pour lui avant tout

$$^*S^2 = g_{\lambda\mu}\left({}^*x^\lambda - {}^*\underset{0}{x}^\lambda\right)\left({}^*x^\mu - {}^*\underset{0}{x}^\mu\right) \quad (^1),$$

ou bien, d'après (8), (13) et (18),

$$\begin{aligned} ^*S^2 = & \left(g_{\lambda\mu} - \frac{\varepsilon^2}{3} K_{\omega\mu\nu\lambda} V^\omega V^\nu + \qquad \right) \\ & \times \left(S \underset{0}{i}^\lambda + \frac{S^2}{2!} \underset{1}{k}\, \underset{2}{i}^\lambda + \quad + \frac{\varepsilon s^2}{3!} K_{\alpha\beta\gamma}{}^{\lambda}\, i^\alpha V^\beta i^\gamma + \qquad \right) \\ & \times \left(S i^\mu + \frac{S^2}{2!} \underset{1}{k}\, \underset{2}{i}^\mu + \quad + \frac{\varepsilon s^2}{3!} K_{\alpha\beta\gamma}{}^{\mu}\, i^\alpha V^\beta i^\gamma + \qquad \right) \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$^*S^2 = S^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3} K_{\omega\mu\lambda\nu} V^\omega i^\mu V^\lambda i^\nu\right) + S^3(\quad) +$$

Si l'on designe par $\underset{0}{j}^\nu$ le verseur orthogonal à $\underset{0}{i}^\nu$ dans la bidirection des vecteurs i^ν et V^ν, par φ l'angle des vecteurs $\underset{0}{i}^\nu$ et $\underset{0}{V}^\nu$ et par $\underset{0}{V}$ le module du vecteur V^ν dans P, la dernière équation nous donne

$$\frac{\lim\limits_{S\to 0} \dfrac{^*S^2 - S^2}{S^2}}{\underset{0}{V}^2 \sin^2 \underset{0}{\varphi}} = -\frac{\varepsilon^2}{3} K_{\omega\mu\lambda\nu}\, j^\omega i^\mu j^\lambda i^\nu = -\frac{\varepsilon^2}{3} K_{\omega\mu\lambda\nu}\, i^\omega j^\mu i^\lambda j^\nu = -(K)\frac{\varepsilon^2}{3}$$

et cette relation nous fournit l'interprétation cherchée de la courbure de V_n dans une bidirection [2].

CHAPITRE IV.

COURBES SUR LA VARIÉTÉ A m DIMENSIONS, SITUÉE DANS UNE VARIÉTÉ A n DIMENSIONS

I.

1. Imaginons une S_{n-1} dans S_n et sur cette S_{n-1} une courbe asymptotique $\underset{p}{A}$ d'ordre $p\ (> 1)$, celle-ci etant définie comme suit :

(1) $\underset{0}{x}$ et x etant les coordonnées des points P et Q, nous designerons par $^*x$ et $^*\underset{0}{x}$ les coordonnees des points *P et *Q

(2) *Cf* [18] [52] [61], [69]

« Le p-vecteur osculateur $\underset{1}{i}^{[\nu} \dots \underset{p}{i}^{\lambda]}$ de $\underset{p}{A}$ est situé le long de $\underset{p}{A}$ dans S_{n-1} ». Nous nous proposons d'appliquer le théorème d'Enneper sur $\underset{p}{A}$. D'après la définition de $\underset{p}{A}$ on peut exprimer le verseur normal n^ν de S_{n-1} au moyen des verseurs normaux de $\underset{p}{A}$

$$(1) \qquad n^\nu = \sum_{p+1}^{n}{}_f \cos \overset{f}{a}\, \underset{f}{i}^\nu,$$

d'où il suit pour la seconde forme fondamentale de S_{n-1}

$$(2) \qquad h_{\lambda\mu} = B^\alpha_\lambda B^\beta_\mu D_\alpha n_\beta - B^\alpha_\lambda B^\beta_\mu \sum_{p+1}^{n}{}_f \left[\underset{f}{i}_\beta \left(D_\alpha \cos \overset{f}{a}\right) + \cos \overset{f}{a}\, D_\alpha \underset{f}{i}_\beta\right].$$

Or, en désignant par h_{ab} le scalaire $\underset{a}{i}^\lambda \underset{b}{i}^\mu h_{\lambda\mu}$, on obtient d'après le Chapitre II, (20),

$$(3) \qquad h_{1u} = 0, \qquad h_{1p} = -k \cos \overset{p+1}{\underset{p}{a}} \qquad (u = 1, \dots, p-1),$$

d'où il suit en particulier, en raison du Chapitre I, (19),

$$(4) \qquad -h_{u1} = 2 S_{1u}{}^n = 2 \underset{1}{i}^\omega \underset{u}{i}^\mu n_\lambda S_{\omega\mu}{}^\lambda, \qquad h_{p1} = 2 S_{p1}{}^n - k \cos \overset{p+1}{\underset{p}{a}}.$$

D'autre part, en designant par $K_{\omega\mu\lambda\nu}$ et $K'_{\omega\mu\lambda\nu}$ les affineurs de courbure S_n et S_{n-1}, on peut définir les courbures de S_n et S_{n-1}, dans la bidirection $\underset{1}{i}^{[\nu} \underset{a}{i}^{\lambda]}$

$$K_{1a1a} = \underset{1}{i}^\omega \underset{1}{i}^\lambda \underset{a}{i}^\mu \underset{a}{i}^\nu K_{\omega\mu\lambda\nu}, \qquad K'_{1a1a} = \underset{1}{i}^\omega \underset{1}{i}^\lambda \underset{a}{i}^\mu \underset{a}{i}^\nu K'_{\omega\mu\lambda\nu}$$

et, par conséquent, on obtient en raison du Chapitre I, (21),

$$(5) \qquad K_{1a1a} - K'_{1a1a} = h_{1a} h_{a1} - h_{11} h_{aa} = h_{1a} h_{a1} \qquad (a = 1, \dots, p).$$

En y substituant les valeurs déduites plus haut, on trouve

$$(5') \qquad \sum_{1}^{p}{}_a (K_{1a1a} - K'_{1a1a}) = \left(k \cos \overset{p+1}{\underset{p}{a}}\right)^2 + 2 S_{1p}{}^n k \cos \overset{p+1}{\underset{p}{a}} \quad (^1),$$

et cette formule nous présente la généralisation d'un théorème bien

(1) Voir [7], [42].

connu d'Ennepper. Si la connexion est sans torsion, on a $S_{\lambda\mu}^{\;\;\nu} = 0$ et par conséquent

$$\sum_{1}^{p}{}_{a}(K_{1a1a} - K'_{1a1a}) = \left(\underset{p}{k} \cos \overset{p+1}{a}\right)^2.$$

Si $p = n - 1$, c'est-à-dire si la courbe asymptotique est d'ordre $n - 1$, le scalaire

$$-\sum_{1}^{n-1}{}_{a} K'_{1a1a} = K'_{11}$$

est la mesure de courbure de S_{n-1} dans la direction de $\underset{1}{i}^{\nu}$ et la formule $(5)'$ devient

$$(6) \qquad \sum_{1}^{n-1}{}_{a} K_{1a1a} + K'_{11} = \underset{n-1}{k}^2 + 2 S_{1\,n-1}^{\;\;\;\;\;n} \underset{n-1}{k}.$$

Si $n = 3$, on a $p = n - 1 = 2$. Le scalaire $\sum_{1}^{2}{}_{a} K_{1a1a} = K_{(f)}$ est la courbure « forcee » de S_3 dans la bidirection tangente de S_2 et $K' = K'_{1212}$ est la courbure moyenne absolue de S_2. On a donc

$$(7) \qquad K_{(f)} - K' = \underset{2}{k}^2 + 2 S_{12}^{\;\;3} \underset{2}{k}$$

Si en particulier $S_{\lambda\mu}^{\;\;\nu} = 0$, $K_{\omega\mu\lambda\nu} = 0$, cette relation prend la forme bien connue du théorème d'Enneper

$$(7') \qquad K' = -\underset{2}{k}^2.$$

II.

2. Imaginons une V_2 dans V_n $(n > 3)$. Une courbe $\underset{p}{Q}$ sur V_2 est dite quasi asymptotique d'ordre p si son p-vecteur osculateur $\underset{1}{i}^{[\nu} \ldots \underset{p}{i}^{\lambda]}$ contient la bidirection tangente de V_2 dans chaque point $(p > 2)$. Le cas echéant les vecteurs normaux $\underset{p+1}{i}^{\nu}$ ..., $\underset{n}{i}^{\nu}$ sont orthogonaux à V_2. Or en completant le champ $\underset{q}{i}^{\nu}$ $(q = p + 1, \ldots, n)$ à une congruence des vecteurs orthogonaux à V_2, on peut s'en servir pour la definition de $\underset{q}{h}_{\lambda\mu}$ [Chap. I, (17)].

$$(7) \qquad \underset{q}{h}_{\lambda\mu} = B_{\lambda}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} D_{\alpha} \underset{q}{i}_{\beta}.$$

En désignant par $i = \underset{1}{i}^\nu$ le verseur tangent de $\underset{p}{Q}$ on a donc à cause du Chapitre I, (20),

$$h_{\lambda\mu} \underset{q}{i}^\lambda i^\mu = i^\lambda i^\mu D_\lambda \underset{q}{i}_\mu = 0. \tag{8}$$

Il s'ensuit immédiatement pour $n > 3$ qu'en general $q = n$, c'est-a-dire que parmi les verseurs normaux de $\underset{p}{Q}$ il n'y a que $\underset{n}{i}^\nu$ qui est orthogonal à V_2 et de plus qu'il y a

$$p = n - 1,$$

ainsi qu'il n'y a en general que des courbes quasi asymptotiques d'ordre $n - 1$ que nous designerons simplement par Q[1]. En écrivant D et D′ pour les derivees covariantes le long de i^ν dans V_n et dans V_2, l'equation differentielle de Q est

$$(D' i^{[\mu}) i^{\nu_1} (D' i^{\nu_2}) (D'^2 i^{\nu_3}) \ldots (D'^{n-2} i^{\nu_{n-1}]}) = 0,$$

ou bien, d'apres le Chapitre I, (14″), pour $v^\nu = i^\nu = w^\nu$

$$i^\alpha i^\beta H_{\alpha\beta}^{[\mu} i^{\nu_1} (D' i^{\nu_2}) \ldots (D'^{n-3} i^{\nu_{n-1}]}) = 0 \tag{9}$$

On en déduit qu'une courbe Q est en général déterminée par les vecteurs

$$i^\nu, \quad D' i^\nu, \quad \ldots, \quad D'^{n-4} i^\nu, \tag{10}$$

en un de ses points.

3. Imaginons une Q sur V_2 dans V_n et choisissons un de ses points, désigne par P. Le $(n - 1)$-vecteur osculateur de Q dans P, géodésiquement prolongé dans V_n [2], donne naissance à une varieté $\underset{P}{V}_{n-1}$ à $(n - 1)$ dimensions qui coupe V_2 le long d'une courbe $^*Q$, passant par P. On peut facilement démontrer que $^*Q$ est tangente a Q dans P, ainsi que l'on a pour le verseur $^*i^\nu = {}^*\underset{1}{i}^\nu$ de $^*Q$,

$$i^\nu = {}^*i^\nu \text{ dans P.} \tag{11}$$

Désignons maintenant par $\underset{P}{H}_{\lambda\mu}^{\nu}$ l'affineur fondamental de $\underset{P}{V}_{n-1}$.

---

[1] Bompiani [3] [4], a donne une autre definition plus generale que la nôtre.

[2] On « prolonge geodesiquement » une k direction en P (un k vecteur simple) en traçant toutes les ∞^{k-1} geodésiques y contenues, passant par P

Etant donné un champ versoriel j^ν dans $\underset{P}{V}_{n-1}$, on deduit de l'équation analogue au Chapitre I, (14'),

$$j^\alpha D_\alpha j^\nu = j^\alpha \underset{P}{D'_\alpha} j^\nu + j^\lambda j^\mu \underset{P}{H}_{\lambda\mu}{}^\nu \tag{12}$$

et en général pour $s = 2, \dots, n-1$

$$(j^\alpha D_\alpha)^s j^\nu = \left(j^\alpha \underset{P}{D_\alpha}\right)^s j^\nu + (s+1) j^\lambda \underset{P}{H}_{\lambda\mu}{}^\nu \left(j^\alpha \underset{P}{D'_\alpha}\right)^{s-1} j^\mu + \underset{s-2}{\rho^\nu}, \tag{13}$$

où le vecteur $\underset{s-2}{\rho^\nu}$ ne dépend que des vecteurs $(j^\alpha \underset{P}{D'_\alpha})^q j^\nu$ ($q = 0, \dots, s-2$) et des affineurs

$$\underset{P}{H}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}, \quad \underset{P}{H}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = B^\alpha_{\lambda_1} B^\beta_{\lambda_2} B^\gamma_{\lambda_3} D_\alpha H_{\beta\gamma\lambda_4}, \quad \dots,$$
$$\underset{P}{H}_{\lambda_1 \dots \lambda_{s+2}} = B^{\alpha_1}_{\lambda_1} \dots B^{\alpha_{s+1}}_{\lambda_{s+1}} \underset{P}{D}_{\alpha_1} \underset{P}{H}_{\alpha_2 \dots \alpha_{s+1} \lambda_{s+2}}.$$

Notre $\underset{P}{V}_{n-1}$ etant par hypothese formee par les géodésiques de V_n on a en P pour n'importe quelle direction j^ν de V_2

$$j^{\lambda_1} \dots j^{\lambda_q} \underset{P}{H}_{\lambda_1 \dots \lambda_q \lambda_{q+1}} = 0 \qquad (q = 2, \dots, n-1)$$

et par consequent. d'après (12) et (13) (toujours en P).

$$\left\{\begin{aligned} &{}^*D\,{}^*\iota^\nu = {}^*\underset{P}{D'}\,{}^*\iota^\nu, \qquad {}^*D^2\,{}^*\iota^\nu = {}^*\underset{P}{D'^2}\,{}^*\iota^\nu, \\ &{}^*D^3\,{}^*\iota^\nu = {}^*\underset{P}{D'^3}\,{}^*\iota^\nu + {}^*\iota^\mu\left(5\,{}^*\iota^\rho\,{}^*\underset{P}{D}\,{}^*\iota^\lambda + {}^*\iota^\lambda\,{}^*\underset{P}{D'}\,{}^*\iota^\rho\right) \underset{P}{H}_{\rho\lambda\mu}{}^\nu \qquad ({}^*D = {}^*\iota^\alpha D_\alpha), \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Ces équations nous apprennent a cause du Chapitre II, (20), qu'à partir du troisieme verseur normal et de la troisieme courbure les notions métriques de $^*Q$, examinee dans $\underset{P}{V}_{n-1}$, sont différentes de celles de $^*Q$, examinee dans V_n.

Ce fait nous contraint a supposer que notre varieté a n dimensions soit une V^0_n. Dans ce cas notre $\underset{P}{V}_{n-1}$ devient V^0_{n-1} et l'on a en chaque point de cette V^0_{n-1} $H_{\lambda_1 \dots \lambda_{q+1}} = 0$ ($q = 2, \dots, n-1$)

Dès lors nous supposerons — sauf avis contraire — que V_2 soit situee dans V^0_n.

4. Cela étant, l'équation (11) nous autorise a poser

$$\iota^\lambda \iota^\mu \iota^\rho H_{\lambda\mu\rho}{}^\nu = {}^*\iota^\lambda\,{}^*\iota^\mu\,{}^*\iota^\rho H_{\lambda\mu\rho}{}^\nu,$$

dans P. ($H_{,\mu}^{\ \nu}$ ainsi que $H_{\lambda\mu\rho}^{\ \ \ \nu}$, $H_{\lambda\mu\rho\omega}^{\ \ \ \ \nu}$. sont les affineurs qui se rattachent à V_2 dans V_n^0 En particulier $H_{,\mu}^{\ \nu}$ est l'affineur fondamental de V_2).

Il s'ensuit a cause de (13) pour $s = 2$ [1]

$$(15)\quad D^2 \iota^\nu - D'^2 \iota^\nu - 3\iota^\lambda H_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} D' \iota^\mu = {}^*D^2\, {}^*\iota^\nu - {}^*D'^2\, {}^*\iota^\nu - 3\, {}^*\iota^\lambda H_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}\, {}^*D'\, {}^*\iota^\mu.$$

Notre V_2 étant par hypothese située dans V_n^0, le vecteur normal ${}^*\iota^\nu$ est orthogonal à $\underset{n}{\iota^\nu}$ ($n > 3$) et par conséquent l'équation (15) nous donne, d'apres le Chapitre I, (20),

$$(16)\qquad \underset{n}{\iota_\nu}\, \iota^\lambda (D' \iota^\mu - {}^*D\, {}^*\iota^\mu) H_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} = 0,$$

ou bien d'après (7) et Chapitre I, (17'), Chapitre II, (20).

$$\iota^\lambda (D' \iota^\mu - {}^*D'\, {}^*\iota^\mu) \underset{n}{h_{\lambda\mu}} = -(D' \iota^\mu - {}^*D\, {}^*\iota^\mu) \underset{n-1}{\iota_\mu} \underset{n-1}{k} = 0,$$

$\underset{n-1}{k}$ étant la dernière courbure de Q et $\underset{n-1}{\iota^\nu}$ son avant-dernier verseur normal.

Nous supposerons $\underset{n-1}{k} \neq 0$ [2]. Or parce que le verseur $\underset{n-1}{\iota^\nu}$ n'est pas orthogonal a V_2, la derniere équation nous donne

$$(17)\qquad D' \iota^\mu = {}^*D'\, {}^*\iota^\mu,$$

(toujours en P). En confrontant les équations

$$D\iota^\nu = D' \iota^\nu + \iota^\lambda \iota^\mu H_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}, \qquad {}^*D\, {}^*\iota^\nu = {}^*D'\, {}^*\iota^\nu + {}^*\iota^\lambda\, {}^*\iota^\mu H_{\lambda\mu}^{\ \ \nu},$$

avec (11) et (17), on trouve en P

$$D\iota^\nu = {}^*D\, {}^*\iota^\nu$$

---

[1] Plus précisement, a cause de

$$(13)\qquad (\iota^\mu D_\mu)^s \iota^\nu = (\iota^\mu D'_\mu)^s \iota^\nu + (s+1)\iota^\nu H_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} (\iota^\omega D_\omega)^{s-1} \iota^\mu + \underset{s-2}{v^\nu}$$

pour $s = 2$.

[2] En general, il n'y a qu'une seule courbe sur V_2, contenue dans V_{n-1}^0 à savoir, la courbe d'intersection ${}^*Q$ Si $\underset{n-1}{k} = 0$, la courbe quasi asymptotique etant a son tour sur V_2 et dans V_{n-1}^0, il en resulte $Q = {}^*Q$. Or, en parlant d'une quasi asymptotique, nous sous-entendons toujours $\underset{n-1}{k} \neq 0$

En désignant par $\underset{u}{k}\,(\underset{u}{{}^*k})\,(u = 1, \ldots\, n - 1)$ les courbures de Q (*Q) et par $\underset{w}{\iota^\nu}\,(\underset{w}{{}^*\iota^\nu})\,(w = 2, \ldots, n)$ ses verseurs normaux, la dernière équation nous autorise à poser

$$\underset{1}{k} = \underset{1}{{}^*k}, \qquad \underset{2}{i} = \underset{2}{{}^*\iota^\lambda} \text{ en P.}$$

L'équation (17) nous permet, en raison de (13)′, de construire une relation analogue à (15) de l'ordre plus élevé, etc. On parvient ainsi (6) jusqu'aux relations, valables en P

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} (a) & D'^{q+1}\,\iota = {}^*D'^{q+1}\,{}^*\iota^\nu \\ (b) & \underset{q+2}{\iota} = \underset{q+2}{{}^*\iota}, \qquad \underset{q+1}{k} = \underset{q+1}{{}^*k} \end{array} \right. \qquad (q \leqq n - 4)$$

Parce que *Q est située dans V^0_{n-1} qui est le prolongement géodésique du $(n-1)$-vecteur osculateur de Q, on a en raison de (18, b) pour $q = n - 4$

$$(18)\,(c) \qquad \underset{n-1}{\iota^\nu} = \underset{n-1}{{}^*\iota^\nu}.$$

L'équation qui nous mène à (18, a) étant

$$(19) \qquad \underset{n}{i_\nu}\, D^{q+2}\,\iota^\nu - \underset{n}{\iota_\nu}\, D'^{q+2}\,\iota^\nu - (q+3)\, \underset{n}{i_\nu}\, \iota^\lambda\, H_{\lambda\mu}{}^{\nu}\, D'^{q+1}\,\iota^\mu$$
$$= \underset{n}{\iota_\nu}\, {}^*D^{q+2}\, {}^*\iota^\nu - \underset{n}{\iota_\nu}\, {}^*D'^{q+2}\, {}^*\iota^\nu - (q+3)\, \underset{n}{\iota_\nu}\, \iota^\lambda\, H_{\lambda\mu}{}^{\nu}\, {}^*D'^{q+1}\, {}^*\iota^\mu,$$

on en déduit pour $q = n - 3$ à cause de (18, b) et Chapitre II, (25)

$$(20) \qquad \underset{1}{k} \ldots \underset{n-3}{k} \left(\underset{n-2}{k}\, \underset{n-1}{k} - \underset{n-2}{{}^*k}\, \underset{n-1}{{}^*k} \right) = n\, \underset{n-1}{k}\, \underset{n-1}{\iota_\nu} (D'^{n-2}\,\iota^\nu - {}^*D'^{n-2}\, {}^*i^\nu),$$

tandis que (18, a) nous donne en raison de (13)′

$$(18)\,(d) \qquad \underset{n-1}{\iota_\nu}\, D^{n-2}\,\iota^\nu - \underset{n-1}{i_\nu}\, D'^{n-2}\,\iota^\nu - (n-1)\, \underset{n-1}{\iota_\nu}\, \iota^\lambda\, H_{\lambda\mu}{}^{\nu}\, D'^{n-3}\,\iota^\mu$$
$$= \underset{n-1}{\iota_\nu}\, {}^*D^{n-2}\, {}^*\iota^\nu - \underset{n-1}{i_\nu}\, {}^*D^{n-2}\, {}^*\iota^\nu - (n-1)\, \underset{n-1}{\iota_\nu}\, {}^*\iota^\lambda\, H_{\lambda\mu}{}^{\nu}\, D'^{n-3}\, {}^*i^\mu$$

et cette équation est équivalente à cause de (18, c) a

$$(21) \qquad \underset{1}{k} \ldots \underset{n-3}{k} \left(\underset{n-2}{k} - \underset{n-2}{{}^*k} \right) = \underset{n-1}{\iota_\lambda} (D'^{n-2}\,\iota^\lambda - {}^*D'^{n-2}\, {}^*\iota^\lambda).$$

Mais la courbe Q étant situee dans V^0_{n-1}, on a $\underset{n-1}{{}^*k} = 0$ et par con-

(1) *Voir* [32]

séquent l'élimination du scalaire $\underset{n-1}{i_\lambda}(\mathrm{D}'^{n-2} i^\lambda - {}^*\mathrm{D}'^{n-2\,*} i^\lambda)$ de (20) et (21) nous donne

$$\frac{\underset{n-2}{k}}{\underset{n-2}{{}^*k}} = \frac{n}{n-1}. \tag{22}$$

Pour formuler les résultats obtenus, remarquons encore que les équations (18, a) et (13)′ nous autorisent à poser en P

$$\mathrm{D}^{q+1}\, i^\nu = {}^*\mathrm{D}^{q+1\,*} i^\nu \qquad (q \leqq n-4), \tag{24}$$

ce qui est la condition suffisante et nécessaire pour que les deux courbes Q et *Q aient un contact d'ordre $q+2$ en P (*voir* Chapitre III) :

Une courbe quasi asymptotique Q (*d'ordre* $n-1$) *sur* V_2 *dans* V_n^0 *et la courbe d'intersection* *Q *de son* ($n-1$)*-vecteur osculateur — géodésiquement prolongé dans* V_n^0 *— ont avec* V_2 *un contact d'ordre* $n-2$ *en* P

$$\underset{1}{i^\nu} = {}^*\underset{1}{i^\nu}, \qquad \underset{r}{i^\nu} = {}^*\underset{r}{i^\nu}, \qquad \underset{r-1}{k} = {}^*\underset{r-1}{k}, \qquad \frac{d^u}{ds^u}\underset{n-u-3}{k} = \frac{d^u}{d^*s^u}\,{}^*\underset{n-u-3}{k},$$
$$(r = 2, \ldots, n-2;\ u = 1, \ldots, n-4).$$

La $(n-2)^{\text{ième}}$ *courbure de* Q *et la* $(n-2)^{\text{ième}}$ *courbure de* *Q *sont en relation*

$$\underset{n-2}{k} : {}^*\underset{n-2}{k} = n : (n-1) \text{ en P } \tag{22}$$ [1].

3. Il y a deux cas remarquables à signaler, à savoir $n=4$ et $n=3$. Si $n=4$ la première partie du théorème ne concerne que la première dérivée covariante, d'où il suit, en raison de (14), *que la première partie du théorème mentionné est valable aussi pour le cas d'une* V_2 *dans* V_4.

Quant au cas $n=3$, que nous avons exclu dès le commencement, la courbe Q devient asymptotique d'ordre 2. Notre méthode s'arrête dans ce cas à (15), d'où l'on déduit

$$\underset{1}{k}\,\underset{2}{k} = 3\,\underset{2}{k}\,\underset{2}{i_\nu}(\mathrm{D}'\, i^\nu - {}^*\mathrm{D}'\,{}^* i^\nu). \tag{20'}$$

---

(1) Pour V_2 dans R_n *voir* [3], [4].

D'autre part, (18, d) donne dans ce cas

$$(21') \qquad \left(\underset{1}{k} - \underset{1}{^*k}\right) = \underset{2}{i}_\prime(\mathrm{D}' i' - {}^*\mathrm{D}' {}^*i')$$

et, par conséquent, l'élimination du second membre dans $(20)'$ et $(21)'$ nous fournit

$$(23) \qquad \underset{1}{k} : \underset{1}{^*k} = 3 : 2.$$

Parce que la démonstration de (23) ne concerne que les premieres dérivées covariantes, on peut supposer d'après (14) que V_2 soit situé dans V_3.

Une courbe asymptotique Q *sur* V_2 *dans* V_3 *et la courbe d'intersection* *Q *de son bivecteur osculateur (géodésiquement prolongé dans* V_3*) ont les premières courbures liées par* (23).

Ce théorème est la généralisation du theorème bien connu de Beltrami.

6. La méthode exposée peut s'appliquer aussi s'il s'agit d'une courbe *Q sur V_2 dans V_n qui n'est pas une courbe d'intersection mais qui a, au point P le verseur tangent $\underset{1}{i}'$ et le $(n-1)^{\text{ième}}$ verseur normal en commun avec Q. Dans ce cas on a $\underset{n-1}{^*k} \neq 0$ et par conséquent les équations (20) et (21) nous donnent

$$(24) \qquad \frac{\underset{n-2}{k}}{\underset{n-2}{^*k}} = \frac{n\underset{n-1}{k} - \underset{n-1}{^*k}}{(n+1)\underset{n-1}{k}}.$$

Une courbe quasi asymptotique Q *sur* V_2 *dans* V_n *et une courbe quelconque sur* V_2 *qui a le verseur tangent et le* $(n-1)^{\text{ième}}$ *verseur normal en commun avec* Q *au point* P *ont un contact d'ordre* $n-2$ *en* P *et, de plus,* $\underset{n-1}{k}$, $\underset{n-2}{k}$ *et* $\underset{n-1}{^*k}$, $\underset{n-2}{^*k}$ *sont liées par* (24).

Admettons encore une troisième courbe **Q, soumise aux mêmes conditions que la courbe *Q, dont nous venons de parler. Le théorème étant valable aussi pour **Q, on en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Le théorème énoncé est valable même si l'on substitue à Q *une* *autre courbe* $^{**}Q$ *sur* V_2 *dans* V_n, *celle-ci ayant le verseur tangent et le* $(n-1)^{ième}$ *verseur normal en commun avec* Q.

7. La question sur les $n-2$ premières courbures de Q résolue, il nous reste maintenant à étudier la dernière courbure $\underset{n-1}{k}$ de Q. Parce qu'il ne s'agit plus de la courbe d'intersection, nous supposerons V_2 située dans V_n. Cela étant, complétons le champ $\underset{n}{i^\nu}$ à une congruence, orthogonale à V_2. Cette congruence détermine avec V_2 une variété à trois dimensions, V_3^*. Désignons par D_μ^* ($D_\mu^{*\prime}$) le symbole de la dérivée covariante de V_3^* dans V_n (de V_2 dans V_3^*). L'équation analogue au Chapitre I, (14′) pour $v^\nu = i^\nu$ nous apprend que

$$p^\lambda i^\mu D_\mu \underset{n}{i_\lambda} = p^\lambda i^\mu D_\mu^* \underset{n}{i_\lambda},$$

p^λ étant un vecteur arbitraire dans V_2. D'autre part, en désignant par $h^*_{\lambda\mu}$ les coefficients de la seconde forme fondamentale de V_2 dans V_3^* on a

$$p^\lambda i^\mu D_\mu \underset{n}{i_\lambda} = p^\lambda i^\mu D_\mu \underset{n}{i_\lambda} = h^*_{\mu\lambda} i^\mu p^\lambda.$$

Supposons maintenant que p^ν soit le verseur orthogonal à i^ν dans V_2 et introduisons les scalaires

$$(25)\qquad \begin{cases} p^\lambda i^\mu h^*_{\mu\lambda} = h^*_{12}, & p^\lambda p^\mu h^*_{\mu\lambda} = h^*_{22}, \\ i^\lambda i^\mu h^*_{\mu\lambda} = h^*_{11}, & K^*_{(f)} = K^*_{\omega\mu\lambda\nu} i^\omega p^\mu i^\lambda p^\nu, \end{cases}$$

$K^*_{\omega\mu\lambda\nu}$ étant l'affineur de courbure de V_3^* dans V_n. Or, l'équation de Gauss [Chap. I, (21′)] pour V_2 dans V_3^* nous donne

$$(26)\qquad (h^*_{12})^2 - h^*_{11} h^*_{22} = K^*_{(f)} - K',$$

K' etant la courbure moyenne absolue de V_2. Mais parce qu'on a en raison du Chapitre II, (20)

$$h^*_{11} = 0, \qquad h^*_{12} = -\underset{n-1}{k}\, \underset{n-1}{i^\lambda} p_\lambda,$$

la formule (26) nous fournit

$$(27)\qquad \underset{n-1}{k^2} \cos^2\omega = K^*_{(f)} - K' \quad (^1),$$

(1) Pour un theoreme analogue, qui concerne une V_2 dans R_n *voir* [3], [4]. Dans ce cas, on peut substituer la projection au prolongement.

ω étant l'angle de V_2 et $\underset{n-1}{i^\nu}$. C'est évidemment la généralisation du théorème d'Enneper sur la courbe asymptotique. En effet si $n = 3$ la courbe Q devient asymptotique et l'on a

$$\underset{2}{k^2} = \mathbf{k}_{(f)} - \mathbf{k}'. \tag{28}$$

[*cfr.* (7)']. En tenant compte de $h^*_{11} = 0$, on voit que Q est une courbe asymptotique de V_2 dans V^*_3. En désignant sa deuxième courbure dans V^*_3 par $\underset{2}{k^*}$ on a, en raison de (27) et (7),

$$\underset{n-1}{k^2} \cos^2\omega = \left(\underset{2}{k^*}\right)^2. \tag{29}$$

Une courbe quasi asymptotique sur V_2 *dans* V_n *est en même temps asymptotique sur* V_2 *dans* V^*_3. *La dernière courbure* $\underset{n-1}{k}$ *de* Q *dans* V_n *donne naissance au théorème généralisé d'Enneper* (27). *La dernière courbure* $\underset{2}{k^*}$ *de* Q *dans* V^*_3 *est liée à* $\underset{n-1}{k}$ *par* (28).

III.

8. Les courbes quasi asymptotiques sont caractérisées par quelques propriétés, valables le long d'elles. Dans les lignes qui suivent, nous voulons généraliser le théorème de Meusnier, en étudiant les courbes sur V_m dans V_n, caractérisées par une certaine propriété, qui n'est valable qu'au point P. Imaginons à cet effet deux courbes C et *C sur V_m dans V_n qui ont en P le p-vecteur osculateur en commun ($p > 1$), *celui-ci n'ayant aucune incidence particulière avec l'espace tangent de* V_m. Autrement dit, ce p-vecteur ne coupe V_m que dans la direction tangente de C et *C en P, d'où il suit, pour les verseurs tangents en P,

$$i^\nu = {}^*i^\nu. \tag{30}$$

Pour que cela ait lieu, il est nécessaire que soit

$$p + m \leqq n + 1.$$

En désignant par $H_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ l'affineur fondamental de V_m dans V_n on a d'après (30) en P

$$i^\lambda i^\mu H_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} = {}^*i^\lambda\, {}^*i^\mu H_{\lambda\mu}^{\ \ \nu},$$

d'où il suit d'après le Chapitre I, (14') pour ${}_{(1)}v^\nu = v^\nu = i^\nu$, ${}_{(1)}v^\nu = v^\nu = {}^*i^\nu$,

$$D i^\nu - {}^*D\, {}^*i^\nu = D' i^\nu - {}^*D'\, {}^*i^\nu, \tag{31}$$

Le vecteur à droite dans cette équation est dans V_m et par conséquent le vecteur à gauche doit s'y trouver à son tour. Mais ce vecteur étant situé dans le p-vecteur osculateur qui par hypothèse n'a aucune incidence particulière avec V_m, il doit ou s'annuler ou être dans la direction de $i^\nu = {}^*i^\nu$. Le deuxième cas ne peut pas avoir lieu, les vecteurs $D i^\nu$ et ${}^*D\, {}^*i^\nu$ étant orthogonaux à $i^\nu = {}^*i^\nu$. Or, l'équation (31) n'est satisfaite que par

$$\begin{cases} (a) & D i^\nu = {}^*D\, {}^*i^\nu, \\ (b) & D' i^\nu = {}^*D'\, {}^*i^\nu \text{ en P.} \end{cases} \tag{32}$$

L'équation (32, b) nous autorise à poser d'après (13)' en P

$$D^2 i^\nu - {}^*D^2\, i^\nu = D'^2 i^\nu - {}^*D'\, {}^*i^\nu. \tag{33}$$

De même le vecteur à gauche doit ou s'annuler, ou être situé dans la direction de i^ν, si $p > 2$, Mais parce que

$$i^\lambda D^2 i_\lambda = -(D i^\lambda)(D i_\lambda), \qquad {}^*i^\lambda\, {}^*D^2\, {}^*i_\lambda = -({}^*D\, {}^*i^\lambda)({}^*D\, {}^*i_\lambda),$$

il s'ensuit, en raison de (32),

$$i^\lambda (D^2 i_\lambda - {}^*D^2\, {}^*i_\lambda) = 0 \text{ en P}$$

et par conséquent le vecteur $D^2 i^\nu - {}^*D^{2*} i^\nu$ ne peut pas être situé dans la direction de i^ν. On en déduit d'après (33)

$$D^2 i^\nu = {}^*D^2\, {}^*i^\nu, \qquad D'^2 i^\nu = {}^*D'^2\, {}^*i^\nu. \tag{34}$$

En poursuivant le même procédé et en tenant compte de ce que la i^ν-composante du vecteur $D^s i^\nu$ est déterminée par i^ν, $D i^\nu$, $D^2 i^\nu$, ..., $D^{s-1} i^\nu$ (et du fait analogue pour ${}^*D^{s*} i^\nu$) on parvient aux formules

$$\begin{cases} (a) & D^{q+1}\, i^\nu = {}^*D^{q+1}\, {}^*i^\nu \\ (b) & D'^{q+1}\, i^\nu = {}^*D'^{q+1*}\, i^\nu \end{cases} \qquad (q + 1 < p), \tag{35}$$

valables en P. Cela étant, nous appliquons la définition du contact de deux courbes (Chap. III) à notre résultat, ce qui nous autorise à le formuler de la manière suivante :

Deux courbes sur V_m *dans* V_n *qui ont en* P *le* p*-vecteur oscula-*

teur en commun (ce p-vecteur n'ayant aucune incidence particulière avec V_m) ont en P un contact d'ordre p ces courbes étant envisagées comme courbes de V_m ou de V_n (1).

9. La même méthode nous permet de poser d'après (35 *b*), pour $q = p - 2$

$$D^p i^\nu - {}^*D^p\, {}^*i^\nu = D'^p i^\nu - {}^*D'^p\, {}^*i^\nu. \tag{36}$$

Quoique le vecteur à droite dans cette équation soit situé dans V_m, on ne peut pas en conclure que le vecteur à gauche s'annule. Cette conclusion pourrait être en défaut, parce que le $(p+1)$-vecteur osculateur n'est pas le même pour C et pour *C. D'autre part, en désignant par ω, λ, ${}^*\lambda$ les angles des vecteurs

$$\underset{p+1}{i^\nu},\quad \underset{p+1}{{}^*i^\nu};\quad \underset{p+1}{i^\nu},\quad (D'^p i^\nu - {}^*D'^p\, {}^*i^\nu);\quad \underset{p+1}{{}^*i^\nu},\quad (D'^p i^\nu - {}^*D'^p\, {}^*i^\nu),$$

on obtient de (36) pour $p < n - 1$

$$\frac{\underset{p}{k}}{\underset{p}{{}^*k}} = \frac{\cos\omega \cos{}^*\lambda - \cos\lambda}{\cos{}^*\lambda - \cos\omega\cos\lambda}. \tag{37}$$

Si $p < n - 1$, les $p^{\text{ièmes}}$ courbures des courbes, mentionnées plus haut sont en relation (36).

Il ne s'agit ici, cela va sans dire, que des courbures de C et *C dans V_n. Si $\underset{p+1}{i^\nu}$ $(\underset{p+1}{{}^*i^\nu})$ est orthogonal à V_m, l'équation précédente se simplifie à

$$\frac{\underset{p}{k}}{\underset{p}{{}^*k}} = \cos\omega, \qquad \text{resp.}\ \frac{\underset{p}{k}}{\underset{p}{{}^*k}} = \frac{1}{\cos\omega} \qquad (p \lessgtr n-1) \quad (2).$$

10. Supposons maintenant que le p-vecteur ait une incidence particulière avec V_m en P. Ce p-vecteur étant commun aux courbes C et *C en P, on ne peut pas en conclure *a priori*, que C et *C aient les r-vecteurs osculateurs $(1 < r < p)$ en commun. Or, nous supposerons que parmi les multi-vecteurs osculateurs de C et *C, le p-vecteur

(1) *Voir* [33].
(2) Pour V_2 dans R_n *voir* [5], [56].

osculateur soit le premier qui ait une incidence particulière avec V_m. Dans ce cas la même méthode que nous avons employée plus haut nous mène au résultat

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} &(a)\quad D^q i^\nu = {}^*D^q\,{}^*i^\nu \\ &(b)\quad D'^q i^\nu = {}^*D'^q\,{}^*i^\nu \end{aligned}\right. \qquad (q+1<p),$$

valable en P pour les courbes tangentes en P.

Si le p-vecteur osculateur en commun est le premier parmi les multivecteurs osculateurs qui a une incidence particulière avec V_m *en* P, *les deux courbes tangentes en* P *ont en* P *un contact d'ordre* $p-1$.

Pour une étude plus détaillée voir le Mémoire [33].

CHAPITRE V.

DÉFORMATION INFINITÉSIMALE.

Étant donnés un vecteur arbitraire $V^\nu(x)$ et une constante infiniment petite ε nous appellerons la transformation infinitésimale

$$(1)\qquad 'x^\nu = x^\nu + \varepsilon V^\nu,$$

« déformation infinitésimale ». Dans ce qui suit, nous nous proposons d'étudier la déformation infinitésimale d'une courbe $C(s)$ dans l'espace n fois étendu, doué d'une connexion métrique avec torsion (¹).

1. En désignant par $g_{\lambda\mu}$ le tenseur métrique de la connexion, on obtient pour les paramètres $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ les relations [Chap. I, (2)] avec $Q_{\mu\lambda\alpha} = 0$. D'autre part, si l'on déplace le tenseur $g_{\lambda\mu}$ d'après (1) on trouve

$$(2)\qquad \begin{aligned} {}^*g_{\lambda\mu} &= g_{\lambda\mu} + \varepsilon('x^\alpha - x^\alpha)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\lambda\mu} + \ldots \\ &= g_{\lambda\mu} + \varepsilon V^\alpha\left(g_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\lambda\alpha} + g_{\lambda\beta}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}\right) + \ldots, \end{aligned}$$

(¹) *Voir* [9], [12], [15], [23], [43], [54], [55], [62], [67], [68].

tandis que le verseur tangent $'i^\nu$ de la courbe déformée $'C('s)$ se calcule d'après

$$(3)\qquad 'i^\nu = \frac{d'x^\nu}{d's} = \left(i^\nu + \varepsilon\frac{dV^\nu}{ds}\right)\frac{ds}{d's}.$$

On en déduit

$$1 = {}^*g_{\lambda\mu}\,'i^\lambda\,'i^\mu = \left(\frac{ds}{d's}\right)^2\left[1 + 2\varepsilon i_\lambda\left(DV^\lambda - 2S_{\omega\mu}{}^\lambda\, i^\mu V^\omega\right) + \varepsilon^2(\ldots)\right] + \ldots,$$

d'où la formule approchée

$$(4)\qquad \frac{d's}{ds} = 1 + \varepsilon i_\lambda\left(DV^\lambda - 2S_{\omega\mu}{}^\lambda\, i^\mu V^\omega\right) + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots.$$

Pour l'interpréter, remarquons tout d'abord qu'à côté des formules de Frenet pour le verseur tangent de C, chaque champ versoriel $I^\nu = \underset{1}{I}{}^\nu$, défini le long de C, donne naissance aux formules analogues [Chap. II, (20″)]

$$(5)\qquad D\underset{j}{I}{}^\lambda = \underset{j}{K}\,\underset{j+1}{I}{}^\nu - \underset{j-1}{K}\,\underset{j-1}{I}{}^\lambda \qquad \left(j = 1, \ldots, n;\ \underset{0}{K} = \underset{n}{K} = 0\right).$$

Or, en posant

$$(5')\qquad V^\nu = \rho\,\underset{1}{I}{}^\nu, \qquad \cos\alpha_1 = g_{\lambda\mu}\, i^\lambda\, \underset{1}{I}{}^\mu, \qquad \cos\alpha_2 = g_{\lambda\mu}\, i^\lambda\, \underset{2}{I}{}^\mu,$$

on trouve

$$(6)\qquad i_\lambda DV^\lambda = \rho\left(\frac{d\log\rho}{ds}\cos\alpha_1 + \underset{1}{K}\cos\alpha_2\right).$$

D'autre part, la connexion étant avec torsion, les extrémales de l'équation

$$\delta\int\sqrt{g_{\lambda\mu}\, dX^\lambda\, dX^\mu} = 0,$$

c'est-à-dire les géodésiques $x^\nu = X^\nu(S)$ ne sont pas autoparallèles. En désignant par $\underset{0}{k}{}^\nu$ le vecteur de la première courbure de la gèodésique, on obtient

$$(7)\qquad \frac{d^2X^\nu}{dS^2} + \left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\}\frac{dX^\lambda}{dS}\frac{dX^\mu}{dS} - 2S^\nu{}_{\lambda\mu}\frac{dX^\lambda}{dS}\frac{dX^\mu}{dS} = -2S^\nu{}_{\lambda\mu}\frac{dX^\lambda}{dS}\frac{dX^\mu}{dS} = k^\nu$$

et cette équation nous permet d'introduire la notion de « la courbure géodésique » respectivement du « vecteur de courbure géodésique » d'une courbe $C(s)$. La courbure géodésique k, respectivement le vecteur de courbure géodésique k^ν d'une courbe $C(s)$ sont les notions qui se rattachent à la courbe géodésique qui, *au point examiné*, possède le même verseur tangent avec $C(s)$ [1]. Or, en désignant par β l'angle des vecteurs k^ν et V^ν, on trouve d'après (7)

$$(8)\qquad -2S_{\omega\mu}{}^{\lambda}\, i_\lambda\, i^\mu\, V^\omega = k_\omega V^\omega = k\, v \cos\beta$$

et, par conséquent, en raison de (6), (8) et (4),

$$(9)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\dfrac{d's}{ds}-1}{\varepsilon} = v\left(\cos\alpha_1 \frac{d\log v}{ds} + \underset{1}{K_1}\cos\alpha_2 + k\cos\beta\right).$$

2. Nous dirons que l'arc s de $C(s)$ est « fixe » pendant la transformation (1) si

$$(10)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\dfrac{d's}{ds}-1}{\varepsilon} = 0.$$

Or, pour que l'arc s soit fixe pendant la transformation (1) avec $V^\nu \neq 0$ qui n'est pas orthogonal à $C(s)$ il suffit et il est nécessaire d'après (9) que v soit de la forme

$$v = ce^{-\int \frac{K_1 \cos\alpha_2 + k\cos\beta}{\cos\alpha_1}} \qquad (c = \text{const.} \neq 0).$$

Il s'ensuit : *L'arc s de $C(s)$ est fixe pour toutes les déformations* (1) *avec*

$$V^\nu = c I^\nu e^{-\int \frac{K_1 \cos\alpha_2 + k\cos\beta}{\cos\alpha_1}},$$

quel que soit le verseur I^ν qui n'est pas orthogonal à $C(s)$ $(\cos\alpha_1 \neq 0)$.

Supposons maintenant que V^ν soit orthogonal à $C(s)$. Dans ce cas on a $\cos\alpha_1 = 0$, de manière que la condition nécessaire et suffisante pour que l'arc s reste fixe est d'après (9)

$$(11)\qquad \underset{1}{K}\cos\alpha_2 + k\cos\beta = 0.$$

Si cette condition, qui ne dépend pas de v, n'est pas satisfaite, il est en général impossible de trouver un tel scalaire $v \neq 0$ pour que (10) soit vraie.

---

[1] Toutes les courbes tangentes dans un point ont la même courbure géodésique et le même vecteur de courbure géodésique.

Si au contraire (11) est satisfaite pour un champ I^ν, chaque vecteur $V^\nu = v I^\nu$ mène à une déformation infinitesimale, pour laquelle l'arc s reste fixe. Nous voulons démontrer qu'on peut toujours choisir le champ I^ν, orthogonal à C, de telle maniere que (11) soit satisfaite. Posons a cet effet

$$I^\nu = \sum_{1}^{n}{}_{u}\, \underset{u}{i^\nu} \cos\gamma_u.$$

Il s'ensuit en raison de (5) et du Chapitre II, (20),

$$I^\nu \underset{1}{k} = \sum_{2}^{n}{}_{u} \Big(\underset{u}{k}\, \underset{u+1}{i^\nu} - \underset{u-1}{k}\, \underset{u-1}{i^\nu} \Big) \cos\gamma_u + \sum_{2}^{n}{}_{u}\, \underset{u}{i^\nu} \frac{d\cos\gamma_u}{ds}$$

et par conséquent

$$\underset{1}{k} \cos\alpha_2 = - \underset{1}{k} \cos\gamma_2 \tag{12}$$

Or, si $\underset{1}{k} = 0$ [c'est-à-dire, si $C(s)$ est autoparallele], il suffit de prendre pour I^ν un champ versoriel orthogonal au champ k^ν. Dans ce cas on a $\cos\beta = 0$ et, par conséquent, l'équation (11) est satisfaisante. Si, au contraire $\underset{1}{k} \neq 0$, on tire de (12) et (11)

$$\cos\gamma_2 = \frac{k\cos\beta}{\underset{1}{k}}$$

et, par consequent,

$$V^\nu = v\left(\underset{2}{i^\nu} \frac{k\cos\beta}{\underset{1}{k}} + \sum^{n}{}_{u}\, \underset{u}{i^\nu} \cos\gamma_u \right) \tag{13}$$

peut être considéré comme résolvant notre probleme pour n'importe quelle valeur de v, β et $\gamma_3, \ldots, \gamma_n$ $\big($avec $k\cos\beta < \underset{1}{k}\big)$. *En déformant* $C(s)$ *d'après* (1) *où* V^ν *est défini par* (13) *avec des valeurs arbitraires* v, β, $\gamma_3, \ldots, \gamma_n$, *l'arc s reste fixe.*

Remarque. — Si la connexion est sans torsion (c'est-à-dire si notre variété devient V_n) on a $k^\nu = 0$ et par conséquent l'équation (11) est satisfaite par $\cos\alpha_2 = 0$ et le vecteur (13) devient

$$V^\nu = v\left(\sum_{3}^{n}{}_{u} \cos\gamma_u\, \underset{u}{i^\nu} \right) \tag{13'}$$

On voit donc que le théorème énoncé est la généralisation du fait bien connu que la déformation de l'arc, suivant la binormale (dans l'espace euclidien à trois dimensions) est nulle [1].

La formule (9) est susceptible encore d'autres interprétations géométriques qui se présentent sous une forme assez simple surtout dans le cas d'une variété sans torsion V_n [2].

3. Supposons maintenant que C appartienne à une congruence des courbes dont le verseur tangent soit $i^\nu = \underset{1}{i^\nu}(x)$. En déformant C on obtient une courbe 'C, aux équations (1) qui n'appartient pas en général à la congruence. Dans ce qui suit nous trouverons les conditions suffisantes et nécessaires pour que la congruence se reproduise au second ordre près, c'est-à-dire pour que 'C soit identique au second ordre près avec la courbe infiniment voisine de C dans la congruence. Imaginons à cet effet le champ versoriel $i^\nu(x)$ qui enveloppe C et déformons-le d'apres (1),

$$(14)\qquad i^\nu('x) = {}^*(i^\nu) = i^\nu(x) + \varepsilon V^\alpha \frac{\partial i^\nu(x)}{\partial x^\alpha} + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots$$

On constate facilement le caractère intrinsèque *au second ordre près* des fonctions i^ν et de plus on a, d'après (2),

$$ {}^*g_{\lambda\mu}\,{}^*(i^\lambda)\,{}^*(i^\mu) = 1 + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots .$$

Dès lors nous dirons que ${}^*(i^\nu)$ est un verseur (sous-entendu : au second ordre près). L'ensemble des verseurs ${}^*(i^\nu)$ le long de 'C est un champ versoriel ${}^*(C)$ qui en général n'enveloppe pas la courbe infiniment voisine de C dans la congruence [3]. En tenant compte de (3) et de (14) on trouve pour la différence $'i^\nu - {}^*(i^\nu)$

$$(15)\qquad 'i^\nu - {}^*(i^\nu) = \varepsilon\left(i^\alpha \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\alpha} - V^\alpha \frac{\partial i^\nu}{\partial x^\alpha} - L i^\nu\right) + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots,$$

(1) *Voir* [2]. *Cf.* aussi [70].

(2) *Voir* [73].

(3) Voici un exemple bien simple, pour faciliter les idées. Supposons que la congruence consiste en droites parallèles à l'axe x dans le plan (x, y). Prenons, pour V le vecteur aux composantes 0, $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ Dans ce cas la courbe 'C, déformée de l'axe x est une branche de l'hyperbole à l'équation

$$'x^2 - \frac{'y^2}{\varepsilon^2} = -1.$$

Elle n'est pas enveloppée par les verseurs tangents de la congruence.

où

$$(16)\qquad L = v\left(\cos\alpha_1 \frac{d\log v}{ds} + \underset{1}{K}\cos\alpha_2 + k\cos\beta\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{d's}{ds}-1}{\varepsilon}.$$

Si l'on introduit le symbole $\Theta = V^\alpha D_\alpha$ de la dérivée covariante le long de V^ν, l'équation (14) résulte dans la forme

$$(17)\qquad {}'\iota^\nu - {}^*(\iota^\nu) = \varepsilon(DV^\nu - \Theta\iota^\nu + 2S_{\mu\omega}{}^\nu V^\omega \iota^\mu - L\iota^\nu) + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots$$

et cette relation fait clairement voir le caractère intrinsèque des composantes

$$(18)\qquad \underset{1}{L}{}^\nu = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{{}'\iota^\nu - {}^*(\iota^\nu)}{\varepsilon} = DV^\nu - \Theta\iota^\nu + 2S_{\mu\omega}{}^\nu V^\omega \iota^\mu - L\iota^\nu.$$

Nous dirons que la congruence se reproduit au second ordre près par la déformation infinitésimale (1), ou bien que le champ ${}^*(\iota^\nu)$ enveloppe $'C$ au second ordre près, si

$$(19)\qquad \underset{1}{L}{}^\nu = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{{}'\iota^\nu - {}^*(\iota^\nu)}{\varepsilon} = 0.$$

Dans ce cas, on peut dire (moins précisément) que *les courbes* $'C$ et $^*(C)$ sont identiques au second ordre près.

Le vecteur $\underset{1}{L}{}^\nu$ est orthogonal à $\underset{1}{\iota}{}^\nu$. En effet, on a à cause de (5)

$$\underset{1}{L}{}^\nu = v\left(\frac{d\log v}{ds}\underset{1}{I}{}^\nu + \underset{1}{K}\underset{2}{I}{}^\nu - \frac{\Theta\iota^\nu}{v} + 2S_{\mu\omega}{}^\nu \underset{1}{I}{}^\omega \underset{1}{\iota}{}^\mu - \iota^\nu\frac{L}{v}\right)$$

et par conséquent, en raison de (5)$'$ et (8),

$$(20)\qquad \underset{1}{L}{}^\nu \underset{1}{\iota}{}_\nu = v\left(\frac{d\log v}{ds}\cos\alpha_1 + \underset{1}{K}\cos\alpha_2 + k\cos\beta - \frac{L}{v}\right) \equiv 0,$$

pour n'importe quel vecteur $\underset{1}{L}{}^\nu$, Nous utiliserons cette identité pour le système (19), ou bien pour le système

$$(21)\qquad L_a = \underset{1}{L}{}^\nu \underset{a}{\iota}{}_\nu = 0 \quad (^1) \qquad (a = 1, \ldots, n),$$

équivalent à (19). La fonction $L(s)$ n'y intervient que dans $L_1 = 0$

---

(1) Si la courbe est autoparallele, on peut prendre n'importe quel systeme des verseurs $\underset{1}{\iota}{}^\nu, \ldots, \underset{n}{\iota}{}^\nu$ linéairement independants, pourvu que $\underset{1}{\iota}{}^\nu = \iota^\nu$ soit le verseur tangent de C.

et cette équation est, en raison de (20), la définition de $L(s)$. Autrement dit la fonction $L(s)$ qui figure dans le système différentiel (19) peut être choisie arbitrairement et ce choix porte sur la position du vecteur inconnu V^ν. En effet, si l'on désigne par W la projection orthogonale de V^ν sur i^ν, on a

$$\frac{dW}{ds} = DV^\lambda i_\lambda = i_\lambda DV^\lambda + V^\lambda Di_\lambda,$$

et par conséquent

$$L = i_\lambda (DV^\lambda - 2S_{\omega\mu}{}^\lambda i^\mu V^\omega) = \frac{dW}{ds} - V^\lambda Di_\lambda - 2S_{\omega\mu}{}^\lambda i_\lambda i^\mu V^\omega$$
$$= \frac{dW}{ds} - V^\lambda(Di_\lambda - k_\lambda),$$

ce qui confirme notre assertion. (Si, par exemple, C est géodésique, en posant $L = 0$, on parvient au vecteur V^ν, dont la projection sur i^ν est constante, etc.) Nous avons ainsi le résultat : *La condition suffisante et nécessaire pour que la congruence se reproduise au second ordre près par la déformation infinitésimale* (1) *est que* V^ν *soit l'intégrale du système* (19). *La fonction* $L(s)$ *qui y figure peut être donnée arbitrairement et produit son influence non seulement sur la position de* V^ν, *mais définit à son tour l'arc de* 'C *au second ordre près.*

La fin de ce théorème est vérifiée par la formule, déduite de (4) et de (9),

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{d's}{ds} - 1}{\varepsilon} = L(s)$$

4. Nous voulons maintenant étudier de près les relations qui existent entre les courbures de 'C d'une part et celles de C de l'autre. Imaginons à cet effet un champ vectoriel P^ν, fonction de i^ν et de ses dérivées

$$P^\nu = F^\nu\left(i, \frac{di}{ds}, \ldots\right)$$

Tout ce qui concerne le champ P^ν le long de C est fourni par les vecteurs dérivés

$$(22)\qquad \underset{1}{P}^\nu = DP^\nu, \qquad \underset{2}{P}^\nu = D\underset{1}{P}^\nu, \qquad \ldots.$$

Le champ P^ν étant défini en chaque point de la congruence, on en peut construire le champ

$$'P^\nu = F^\nu\left('i, \frac{d'i}{d's}, \dots\right),$$

ainsi que les champs dérivés le long de $'C$

$$(23)\quad \begin{cases} 'P^\nu_1 = 'D\, 'P^\nu = \dfrac{d'P^\nu}{d's} + \left(\Gamma^\nu_{\lambda\mu} + \varepsilon V^\alpha \dfrac{\partial \Gamma^\nu_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right)'i^\mu\, 'P^\lambda + \varepsilon^2(\dots) + \dots, \\ 'P^\nu_{r+1} = 'D\, 'P^\nu_r = \dfrac{d'P^\nu_r}{d's} + \left(\Gamma^\nu_{\lambda\mu} + \varepsilon V^\alpha \dfrac{\partial \Gamma^\nu_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right)'i^\mu\, 'P^\lambda_r + \varepsilon^2(\dots) + \dots \\ \qquad (r = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

De l'autre côté, on peut déformer le champ P^ν d'après (1)

$$(24)\qquad {}^*(P^\nu) = P^\nu + \varepsilon V^\alpha \frac{\partial P^\nu}{\partial x^\alpha} + \varepsilon^2(\dots) + \dots,$$

ainsi que ses champs dérivés

$$(25)\qquad {}^*\left(P^\nu_r\right) = P^\nu_r + \varepsilon V^\alpha \frac{\partial P^\nu_r}{\partial x^\alpha} + \varepsilon^2(\dots) + \dots \qquad (r = 1, 2, \dots).$$

En supposant que la différence $'P^\nu - {}^*(P^\nu)$ soit un vecteur au second ordre près,

$$'P^\nu - {}^*(P^\nu) = \varepsilon M^\nu_1 + \varepsilon^2(\dots) + \dots,$$

nous tâcherons d'exprimer les différences $'P^\nu_1 - {}^*(P^\nu_1)$ en fonction de M^ν_1 et de P^ν. En tenant compte des équations (17), (23) et (24) on trouve, après un calcul assez long,

$$(26)_1\qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{'D\, 'P^\nu - {}^*(DP^\nu)}{\varepsilon} = \lim \frac{'P^\nu_1 - {}^*\left(P^\nu_1\right)}{\varepsilon} = DM^\nu_1 + L^\alpha_1 D_\alpha P^\nu = M^\nu_2,$$

et par conséquent la même méthode nous donne

$$(26)_2\qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{'P^\nu_2 - {}^*\left(P^\nu_2\right)}{\varepsilon} = DM^\nu_2 + L^\alpha_1 D_\alpha P^\nu_1 = M^\nu_3,$$

et en général

$$(26)_r\qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{'P^\nu_r - {}^*\left(P^\nu_r\right)}{\varepsilon} = DM^\nu_r + L^\alpha_1 D_\alpha P^\nu_{r-1} = M^\nu_{r+1} \qquad (r = 1, 2, \dots).$$

On en déduit : *La condition suffisante et nécessaire pour que* *l'on ait pour n'importe quel champ* P^ν

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{'P^\nu_r - {}^*\!\left(P^\nu_r\right)}{\varepsilon} = 0 \qquad \left(P^\nu_0 = P^\nu, \ r = 0, 1, 2, \ldots\right)$$

est

$$L^\nu_1 = 0, \qquad M^\nu_1 = 0. \tag{27}$$

Le système M^ν_1 est en général une fonction de V^ν et par conséquent les deux systèmes (27) sont en général incompatibles. Exception fait le cas très important, où $M^\nu_1 = L^\nu_1$. On l'obtient, en posant $P^\nu = i^\nu$. Dans ce cas les vecteurs dérivés (22) sont

$$k^\nu_1 = Di^\nu, \qquad k^\nu_2 = D^2 i^\nu = Dk^\nu_1, \qquad \ldots \tag{22'}$$

J'appelle le « $(r+1)^{\text{ième}}$ élément de C » l'ensemble des vecteurs i^ν, k^ν_1, ..., k^ν_r. Si $r < n$, cet élément nous fournit non seulement les verseurs normaux i^ν_2, ..., i^ν_{r+1} de C, mais en même temps aussi ses courbures k_1, ..., k_r. Cela étant, on obtient d'après (15) et (26)

$$\left\{\begin{array}{ll} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{'i^\nu - {}^*(i^\nu)}{\varepsilon} = L^\nu_1, & \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{'k^\nu_r - {}^*\!\left(k^\nu_r\right)}{\varepsilon} = DL^\nu_r + L^\alpha_1 D_\alpha k^\nu_{r-1} = L^\nu_{r+1} \ ^{(1)} \\ & (r = 1, 2, \ldots). \end{array}\right. \tag{28}$$

Le $(r+1)^{\text{ième}}$ *élément de* 'C *et le* $(r+1)^{\text{ième}}$ *élément déformé de* C *sont liés par* (28).

On voit donc que *la condition suffisante et nécessaire pour que le* $(r+1)^{\text{ième}}$ *élément de* 'C *soit identique* (*au second ordre près*) *au* $(r+1)^{\text{ième}}$ *élément déformé de* C *est* (19).

Si la congruence consiste en courbes autoparallèles on a

$$k^\nu_r = {}^*\!\left(k^\nu_r\right) = 0 \qquad \text{pour} \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

et par conséquent l'élément de 'C est donné par L^ν_1 et par ses vecteurs dérivés

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{'i - {}^*(i^\nu)}{\varepsilon} = L^\nu_1, \qquad \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{'k^\nu_1}{\varepsilon} = L^\nu_2 = DL^\nu_1 + L^\alpha_1 D_\alpha i^\nu, \\ \qquad \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{'k^\nu_r}{\varepsilon} = L^\nu_{r+1} = D^{r-1} L^\nu_2 \qquad (r = 2, \ldots). \end{array}\right. \tag{28'}$$

(1) Nous posons $k^\nu_0 = i^\nu$.

5. Si l'on tient compte de la définition (28) du vecteur $\underset{r+1}{L}{}^\nu$ on peut le transcrire de la manière suivante :

$$(29)\qquad \underset{r+1}{L}{}^\nu = D^r \underset{1}{L}{}^\nu + \Big[\underset{1}{L}{}^\alpha D_\alpha \underset{r-1}{k}{}^\nu + D\big(\underset{1}{L}{}^\alpha D_\alpha \underset{r-2}{k}{}^\nu\big) + \dots + D^{r-1}\big(\underset{1}{L}{}^\alpha D_\alpha \underset{0}{k}{}^\nu\big)\Big].$$

D'autre part, en se servant de la définition (18) du vecteur $\underset{1}{L}{}^\nu$ on trouve en raison du Chapitre I, (11)

$$(30)\qquad \underset{1}{L}{}^\alpha D_\alpha \underset{r-p}{k}{}^\nu = (D\theta - \theta D)\underset{r-p}{k}{}^\nu - L \underset{r-p+1}{k}{}^\nu + V^\mu \iota^\omega \underset{r-p}{k}{}^\lambda R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu,$$

ainsi que l'on a enfin

$$(31)\qquad \begin{cases} \underset{r+1}{L}{}^\nu = D^r \underset{1}{L}{}^\nu + \displaystyle\sum_{1}^{r}{}_p D^{p-1}\Big(D\theta \underset{r-p}{k}{}^\nu - \theta D \underset{r-p}{k}{}^\nu - L \underset{r-p+1}{k}{}^\nu + V^\mu \iota^\omega \underset{r-p}{k}{}^\lambda R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu\Big) \\ D^0 = 1. \end{cases}$$

En particulier, si $r = 1$, cette formule devient

$$(32)\qquad \begin{aligned} \underset{2}{L}{}^\nu &= D\underset{1}{L}{}^\nu + (D\theta - \theta D)\iota^\nu - \underset{1}{L} k^\nu + V^\mu \iota^\omega \iota^\lambda R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu \\ &= D^2 V^\nu + V^\mu \iota^\omega \iota^\lambda R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu + 2DS_{\omega\mu}{}^\nu \iota^\omega V^\mu - DL\iota^\lambda - L\underset{1}{k}{}^\nu - \theta \underset{1}{k}{}^\nu. \end{aligned}$$

Le vecteur (32) joue un rôle très important dans la théorie des congruences des courbes autoparallèles. En effet, dans ce cas, on a

$$\underset{r}{k}{}^\nu = {}^*\big(\underset{r}{k}{}^\nu\big) = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots),$$

et par conséquent, si V^ν est l'intégrale de $\underset{2}{L}{}^\nu = 0$, on a aussi

$$\underset{3}{L}{}^\nu = \underset{4}{L}{}^\nu = \dots = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{{}'\underset{r}{k}{}^\nu}{\varepsilon} = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots),$$

même si le vecteur $\underset{1}{L}{}^\nu \neq 0$. Dans ce cas, la courbe déformée $'C$ résulte autoparallele au second ordre près, mais elle n'est pas nécessairement l'enveloppe du champ $^*(C)$, deformé de C. Le rôle des vecteurs $\underset{1}{L}{}^\nu$ et $\underset{2}{L}{}^\nu$ dans ce problème est suffisamment éclairci par le theorème suivant :

La condition suffisante et nécessaire pour que dans la con-

gruence aux courbes autoparallèles la courbe $'C$, *déformée de* C *par* (1), *soit autoparallèle à son tour* (*au second ordre près*) *est que le vecteur* V^ν *soit l'intégrale de*

$$\underset{2}{L}^\nu = D^2 V^\nu + V^\mu i^\omega i^\lambda R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu + 2DS_{\omega\mu}{}^\nu i^\omega V^\mu - (DL) i^\nu = 0 \quad (^1),$$

La condition suffisante et non nécessaire est que V^ν *soit l'intégrale de*

$$\underset{1}{L}^\nu = DV^\nu - V^\alpha D_\alpha i^\nu + 2 S_{\omega\mu}{}^\nu V^\mu i^\omega - i^\nu L = 0.$$

Dans ce cas *et seulement dans ce cas la courbe* $'C$ (*autoparallèle au second ordre près*) *est identique, au second ordre près, avec l'enveloppe du champ* $^*(C)$, *déformé du champ* C.

Nous n'avons pas besoin d'accentuer que chaque intégrale du système $\underset{1}{L}^\nu = 0$ est en même temps l'intégrale du système $\underset{2}{L}^\nu = 0$.

Remarquons expressément que pour trouver une déformation infinitésimale (1) par laquelle C se deforme en une courbe autoparallèle (au second ordre près) *on n'a pas besoin de recourir au système* $\underset{2}{L}^\nu = 0$ *d'ordre deux, car l'intégrale du système linéaire* $\underset{1}{L}^\nu = 0$, *nous donne encore plus.*

Si $\underset{2}{L}^\nu = 0$ et $\underset{1}{L}^\nu \neq 0$ sont dans la direction principale de la congruence (c'est-à-dire si la courbure de la congruence dans la direction de $\underset{1}{L}^\nu$ est nulle) et seulement dans ce cas le vecteur $\underset{1}{L}^\nu$ parallèle à lui-même le long de C est l'intégrale du système (linéaire par rapport à $\underset{1}{L}^\nu$) $\underset{2}{L}^\nu = 0$.

CHAPITRE VI.

INTÉGRATION DU PARALLÉLISME DANS W_4 RELATIVISTIQUE.

1. Dans W_4 relativistique, l'indice d'inertie du tenseur $g_{\lambda\mu}$ (défini à un facteur multiplicatif près), est égal à 1. Il s'ensuit que l'équation $g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu = 0$ peut être satisfaite aussi par un vecteur réel que nous

(1) Pour un théorème analogue dans V_n, *voir* [55].

appellerons « le vecteur fondamental » (auto-orthogonal). Tel est, par exemple, le vecteur tangent du rayon de lumière $l^\nu = \frac{dx^\nu}{dt}$, qui est en même temps autoparallèle,

$$
(1) \qquad Dl^\nu = \frac{dx^\mu}{dt} D_\mu l^\nu = \frac{dl^\nu}{dt} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} l^\lambda l^\mu = 0.
$$

Nous utiliserons ce fait, pour intégrer le système

$$
(2) \qquad Dv^\nu = 0,
$$

qui définit le parallélisme le long d'un rayon *donné* de lumière. Introduisons à cet effet les coefficients

$$
(3) \qquad a_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} P, \qquad \left(P^2 = \frac{e^{\int_{t_0}^{t} \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} dx^\lambda}}{\sqrt{\text{dét.} \, |g_{\lambda\mu}|}} \right),
$$

qui sont invariants par rapport à la transformation $\bar{g}_{\lambda\mu} = p g_{\lambda\mu}$ [Chap. I, (10)] et deviennent, dans un autre système de coordonnées,

$$
(3') \qquad {}'a_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial' x^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial' x^\mu} a_{\alpha\beta} \sqrt{\Delta_0} \quad (^1) \qquad \left(\Delta_0 = \left[\text{dét.} \left| \frac{\partial' x}{\partial x} \right| \right]_{t=t_0} \right).
$$

Nous appellerons cet ensemble de coefficients $a_{\lambda\mu}$ « le pseudo-tenseur métrique ». Il nous servira comme tenseur métrique le long du rayon de lumière. Ainsi, un vecteur contrevariant i^ν, pour lequel $a_{\lambda\mu} i^\lambda i^\mu = 1$ sera dit « verseur », deux vecteurs p^ν et q^ν seront orthogonaux si $a_{\lambda\mu} p^\lambda q^\mu = 0$ [2], etc. Cela étant, on peut facilement démontrer les théorèmes suivants [3] : *a*. Trois vecteurs linéairement indépendants (et non fondamentaux) étant orthogonaux à un vecteur fondamental, celui-ci est la combinaison linéaire de ceux-là; *b*. Ces trois vecteurs ne peuvent pas être mutuellement orthogonaux tous les trois; *c*. Les signes des vecteurs orthogonaux à un vecteur fondamental sont égaux (le signe d'un vecteur est le signe du carré

---

[1] Nous ne pouvons pas utiliser le tenseur $G_{\lambda\mu}$ déduit ailleurs (Chap. II), car le rayon de lumière est *autoparallèle*, de sorte que les vecteurs dérivés ne sont pas linéairement indépendants.

[2] Tandis que la notion de l'orthogonalité est indépendante du choix des coordonnées, la notion du verseur ne l'est pas, la « longueur » du verseur étant dans un autre système $\sqrt{\Delta_0}$. Cela ne nous empêche pas de résoudre notre problème.

[3] Pour la démonstration, *voir* [44].

de sa « longueur »); *d*. La dérivee covariante de $a_{\lambda\mu}$ le long du rayon donné est nulle,

$$(4) \qquad D a_{\lambda\mu} = \frac{da_{\lambda\mu}}{dt} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\omega}\, l^{\omega}\, a_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\omega}\, l^{\omega}\, a_{\lambda\alpha} = 0.$$

2. Cela etant, nous trouverons avant tout deux intégrales particulières du système (2). Construisons à cet effet un verseur $\underset{1}{i}^{\nu}$ orthogonal à l^{ν}. On a donc

$$(5) \qquad a_{\lambda\mu}\, \underset{1}{i}^{\lambda}\, \underset{1}{i}^{\mu} = \pm 1, \qquad a_{\lambda\mu}\, \underset{1}{i}^{\lambda}\, l^{\mu} = 0.$$

Il s'ensuit, d'apres (1) et (4), que $D\underset{1}{i}^{\nu}$ est un vecteur orthogonal à l^{ν} et à $\underset{1}{i}^{\nu}$. Le choix arbitraire de $\underset{1}{i}^{\nu}$ ne nous donne pas $D\underset{1}{i}^{\nu}$ comme vecteur fondamental de maniere qu'en designant par $\underset{2}{i}^{\nu}$ le verseur dans la direction de $D\underset{1}{i}^{\nu}$, on a

$$(6) \qquad D\underset{1}{i}^{\nu} = \underset{1}{k}\, \underset{2}{i}^{\nu}, \qquad \underset{1}{k} = \sqrt{\frac{a_{\lambda\mu}\, D\underset{1}{i}^{\lambda}\, D\underset{1}{i}^{\mu}}{a_{\lambda\mu}\, \underset{2}{i}^{\lambda}\, \underset{2}{i}^{\mu}}} \neq 0 \;\cdot$$

Parce qu'on a

$$(7) \qquad a_{\lambda\mu}\, \underset{2}{i}^{\lambda}\, l^{\mu} = 0,$$

le vecteur $D\underset{2}{i}^{\nu}$ est orthogonal non seulement à $\underset{2}{i}^{\nu}$, mais aussi a l^{ν}. Les trois vecteurs $\underset{1}{i}^{\nu}$, $\underset{2}{i}^{\nu}$ et $D\underset{2}{i}^{\nu}$ etant en genéral linéairement indépendants et orthogonaux à l^{ν}, ce vecteur fondamental est la combinaison linéaire de $\underset{1}{i}^{\nu}$, $\underset{2}{i}^{\nu}$, $D\underset{2}{i}^{\nu}$. (*Voir a.*) On trouve facilement

$$l^{\nu} = p\left(\underset{1}{k}\, \underset{1}{i}^{\nu} + D\underset{2}{i}^{\nu}\right)$$

et en désignant par h la valeur réciproque de $p \gtrless 0$, on peut écrire cette équation

$$(8) \qquad D\underset{2}{i}^{\nu} = -\underset{1}{k}\, \underset{1}{i}^{\nu} + h\, l^{\nu}$$

Les équations (6) et (8) forment un système clos. Nous entendons par cela que chaque vecteur p^{ν}, qui est la combinaison linéaire de l^{ν}, $\underset{1}{i}^{\nu}$ et $\underset{2}{i}^{\nu}$, jouit de la propriété que sa dérivée Dp^{ν} l'est à son tour. Nous en tiendrons compte pour determiner les scalaires a, r, u dans

$$\underset{1}{j}^{\nu}=\underset{1}{i}^{\nu}\cos a+\underset{2}{i}^{\nu}\sin a+r\,l^{\nu},\qquad \underset{2}{j}=\underset{1}{i}^{\nu}\sin a-\underset{2}{i}^{\nu}\cos a+u\,l^{\nu},$$

de telle manière que les verseurs $\underset{1}{j}^{\nu}$, $\underset{2}{j}^{\nu}$ (mutuellement orthogonaux pour n'importe quel choix de a, r, u) résultent comme intégrales particulières de (2). Parce qu'on a

$$\mathrm{D}\underset{1}{j}^{\nu}=\left(u\frac{da}{dt}+u\underset{1}{k}+\frac{dr}{dt}+h\sin a\right)l^{\nu}-\underset{2}{j}^{\nu}\left(\frac{da}{dt}+\underset{1}{k}\right),$$
$$\mathrm{D}\underset{2}{j}^{\nu}=-\left(r\frac{da}{dt}+r\underset{1}{k}-\frac{du}{dt}+h\cos a\right)l^{\nu}+\underset{1}{j}^{\nu}\left(\frac{da}{dt}+\underset{1}{k}\right),$$

on en déduit les intégrales cherchées

$$(9)\qquad \begin{cases}\underset{1}{j}^{\nu}=\underset{1}{i}^{\nu}\cos\int k\,dt-\underset{2}{i}^{\nu}\sin\int k\,dt+l^{\nu}\int h\left(\sin\int \underset{1}{k}\,dt\right)dt,\\ \underset{2}{j}^{\nu}=-\underset{1}{i}^{\nu}\sin\int k\,dt-\underset{2}{i}^{\nu}\cos\int k\,dt+l^{\nu}\int h\left(\cos\int \underset{1}{k}\,dt\right)dt.\end{cases}$$

3. Ces deux integrales trouvées, nous en chercherons encore **deux** autres. Choisissons deux verseurs mutuellement orthogonaux,

$$(10)\qquad a_{\lambda\mu}\underset{3}{i}^{\lambda}\underset{4}{i}^{\mu}=0,$$

qui sont normaux aux verseurs $\underset{1}{j}^{\nu}$, $\underset{2}{j}^{\nu}$,

$$(11)\qquad a_{\lambda\mu}\underset{f}{i}^{\lambda}\underset{a}{j}^{\mu}=0\qquad (f=3,4,\ a=1,2)$$

La dernière équation nous donne

$$a_{\lambda\mu}\underset{a}{j}^{\lambda}\mathrm{D}\underset{f}{i}^{\nu}=0,$$

de sorte que $\mathrm{D}\underset{f}{i}^{\nu}$ est orthogonal aux verseurs $\underset{1}{j}^{\nu}$ et $\underset{2}{j}^{\nu}$, et par conséquent,

$$\mathrm{D}\underset{3}{i}^{\nu}=p\,i^{\nu}+q\underset{4}{i}^{\nu}$$

Les vecteurs $\underset{1}{j}^{\nu}$ et $\underset{2}{j}^{\nu}$ étant orthogonaux a l^{ν}, ils doivent avoir le même signe (*voir* le théorème c). Or, cela ne restreint pas la généralité si l'on suppose que i^{ν} ait le même signe que $\underset{1}{j}$ et $\underset{2}{j}$. On a donc

$$a_{\lambda\mu}\underset{3}{i}^{\lambda}\underset{3}{i}^{\mu}=-a_{\lambda\mu}\underset{4}{i}^{\lambda}\underset{4}{i}^{\mu}=a_{\lambda\mu}\underset{1}{j}^{\lambda}\underset{1}{j}^{\mu}=a_{\lambda\mu}\underset{2}{j}^{\lambda}\underset{2}{j}^{\mu}=s\,(=\text{ou }+1,\text{ ou }-1),$$

et, par conséquent,

$$(12)\qquad \underset{3}{D}i^\nu = k \underset{2}{\,} \underset{4}{i^\lambda} \quad ([1]) \qquad \left(k = \sqrt{\frac{a_{\lambda\mu}\, D\underset{3}{i^\lambda}\, D\underset{1}{i^\mu}}{a_{\lambda\mu}\, \underset{1}{i^\lambda}\, \underset{4}{i^\mu}}} = \sqrt{\frac{a_{\lambda\mu}\, D\underset{3}{i^\lambda}\, D\underset{3}{i^\mu}}{-s}}\right).$$

On trouve de même

$$(13)\qquad \underset{4}{D}i^\nu = \underset{2}{k}\, \underset{1}{i^\nu}.$$

Les équations (12) et (13) nous permettent de construire deux intégrales particulières du système (2), à savoir

$$(14)\qquad \begin{cases} \underset{1}{j^\nu} = \underset{1}{i^\nu} \operatorname{Cos}\displaystyle\int \underset{2}{k}\,dt - \underset{1}{i^\nu} \operatorname{Sin}\int \underset{2}{k}\,dt \\ \underset{4}{j^\nu} = -\underset{1}{i^\nu} \operatorname{Sin}\displaystyle\int \underset{2}{k}\,dt + \underset{4}{i^\nu} \operatorname{Cos}\int \underset{2}{k}\,dt \end{cases} \qquad (\operatorname{Sin} = \sinh\text{hyp},\ \operatorname{Cos} = \cos\text{hyp}).$$

4. Le vecteur l^ν est à son tour l'intégrale particulière du système (2). En tout cas, on peut l'écrire

$$(15)\qquad l^\nu = \underset{1}{r}\, \underset{3}{i^\nu} + \underset{2}{r}\, \underset{4}{i^\nu}.$$

En tenant compte des équations (12) et (13), on trouve facilement les coefficients $\underset{1}{r}$ et $\underset{2}{r}$, et l'on obtient

$$(16)\qquad l^\nu = \underset{3}{i^\nu}\left(c_1 e^{\int \underset{2}{k}\,dt} + c_2 e^{-\int \underset{2}{k}\,dt}\right) + \underset{4}{i^\nu}\left(-c_1 e^{\int \underset{2}{k}\,dt} + c_2 e^{-\int \underset{2}{k}\,dt}\right).$$

Ce vecteur étant fondamental, on doit avoir, d'après (16),

$$a_{\lambda\mu}\, l^\lambda\, l^\mu = 4 s\, c_1\, c_2 = 0,$$

d'où il suit que l'une ou l'autre des deux constantes c_1, c_2 doit être nulle. On obtient ainsi deux vecteurs fondamentaux

$$c_1 e^{\int \underset{2}{k}\,dt}\left(\underset{3}{i^\nu} - \underset{4}{i^\nu}\right), \qquad c_2 e^{-\int \underset{2}{k}\,dt}\left(\underset{3}{i^\nu} + \underset{4}{i^\nu}\right),$$

dont l'un seulement est le vecteur tangent du rayon de lumière connu

([1]) Si $\underset{2}{k} = 0$ le verseur $\underset{1}{i_\nu}$ est déjà une intégrale particulière. Nous supposerons $\underset{2}{k} \neq 0$. Le choix du verseur $\underset{1}{i^\nu}$ étant plus ou moins arbitraire, le vecteur $D\underset{3}{i\nu}$ n'est pas en général un vecteur fondamental.

par hypothèse. [Dans ce qui suit, nous écrirons toujours la forme générale (16), en supposant que l'on ait deja fait le calcul des constantes c_1, c_2.] En substituant les valeurs (16) dans (9), on obtient

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
\underset{1}{j}{}^\nu &= \underset{1}{i}{}^\nu \cos\int \underset{1}{k}\,dt - \underset{2}{i}{}^\nu \sin\int \underset{1}{k}\,dt \\
&\quad + \left[\underset{3}{i}{}^\nu\left(c_1 e^{\int \underset{2}{k}\,dt} + c_2 e^{-\int \underset{2}{k}\,dt}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \underset{4}{i}{}^\nu\left(-c_1 e^{\int \underset{2}{k}\,dt} + c_2 e^{-\int \underset{2}{k}\,dt}\right)\right]\int h\left(\sin\int \underset{1}{k}\,dt\right)dt, \\
\underset{2}{j}{}^\nu &= -\underset{1}{i}{}^\nu \sin\int \underset{1}{k}\,dt - \underset{2}{i}{}^\nu \cos\int \underset{1}{k}\,dt \\
&\quad + \left[\underset{3}{i}{}^\nu\left(c_1 e^{\int \underset{2}{k}\,dt} + c_2 e^{-\int \underset{2}{k}\,dt}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \underset{4}{i}{}^\nu\left(-c_1 e^{\int \underset{2}{k}\,dt} + c_2 e^{-\int \underset{2}{k}\,dt}\right)\right]\int h\left(\cos\int \underset{1}{k}\,dt\right)dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Les integrales (14) et (17) sont linéairement indépendantes, comme on peut s'en persuader. Il s'ensuit que l'intégrale générale de (2) peut être écrite en combinaison linéaire des verseurs $\underset{1}{j}{}^\nu$, $\underset{2}{j}{}^\nu$, $\underset{3}{j}{}^\nu$, $\underset{4}{j}{}^\nu$, avec des coefficients constants. En les choisissant convenablement, on obtient pour v^ν,

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
v^\nu = {}& c\left[\underset{1}{i}{}^\nu \cos\left(a + \int \underset{1}{k}\,dt\right) - \underset{2}{i}{}^\nu \sin\left(a + \int \underset{1}{k}\,dt\right)\right] \\
&+ C\left[\underset{3}{i}{}^\nu \operatorname{Cos}\left(A + \int \underset{2}{k}\,dt\right) - \underset{4}{i}{}^\nu \operatorname{Sin}\left(A + \int \underset{2}{k}\,dt\right)\right] \\
&+ c\left[\underset{3}{i}{}^\nu\left(c_1 e^{\int \underset{2}{k}\,dt} + c_2 e^{-\int \underset{2}{k}\,dt}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \underset{4}{i}{}^\nu\left(-c_1 e^{\int \underset{2}{k}\,dt} + c_2 e^{-\int \underset{2}{k}\,dt}\right)\right]\int h\left[\sin\left(a + \int \underset{1}{k}\,dt\right)\right]dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour obtenir l'integrale dans la direction de l^ν, on doit poser $c = 0$. Cela étant, l'intégrale cherchée est

$$
\text{ou} \quad \lim_{A \to \infty} \frac{v^\nu}{e^A} \quad \text{ou} \quad \lim_{A \to -\infty} \frac{v^\nu}{e^{-A}}.
$$

L'intégrale générale (18) du système (2), qui définit le vecteur général contrevariant, déplacé par parallélisme le long du rayon de lumière donné dans l'espace général de la relativité (dans W_4

relativistique), *s'obtient par trois quadratures. Les constantes* a, A, c, C *sont arbitraires, tandis que l'une des constantes* c_1, c_2 *est nulle et l'autre déterminée par le fait que l'un des vecteurs*

$$c_1 e^{\int \underset{1}{k}\,dt} (\underset{1}{i}^{\nu} - \underset{4}{i}^{\nu}), \quad c_1 e^{-\int \underset{2}{k}\,dt} (\underset{3}{i}^{\nu} + \underset{4}{i}^{\nu})$$

est identique au vecteur tangent du rayon de lumière $l^{\nu} = \dfrac{dx^{\nu}}{dt}$ (1).

CHAPITRE VII.

EQUATION INTRINSÈQUE DES COURBES SUR V_2 DANS V_3,

1. Chaque courbe réelle dans le plan peut être caractérisée par $\underset{1}{k} = 0$. Cette équation peut être envisagée comme l'équation intrinsèque des courbes dans le plan. Dans les lignes qui suivent, nous nous proposons de trouver l'équation intrinsèque des courbes situées sur une surface générale (V_2) dans V_3. Soit C une telle courbe et désignons par p, q ses courbures, par $\underset{1}{i}^{\nu}$, $\underset{2}{i}^{\nu}$, $\underset{3}{i}^{\nu}$ son repère versoriel dans V_3. Les formules de Frenet sont dans ce cas :

$$(1) \qquad D\underset{1}{i}^{\nu} = p\underset{2}{i}^{\nu}, \qquad D\underset{2}{i}^{\nu} = -p\underset{1}{i}^{\nu} + q\underset{3}{i}^{\nu}, \qquad D\underset{3}{i}^{\nu} = -q\underset{2}{i}^{\nu}.$$

La même courbe, examinée comme courbe de V_2 n'a qu'*une courbure* P, et le repère versoriel se compose du verseur tangent $\underset{1}{I}^{\nu} = \underset{1}{i}^{\nu}$ et du verseur normal $\underset{2}{I}^{\nu}$ dans V_2. Les formules correspondantes de Frenet sont :

$$(2) \qquad D^{*}\underset{1}{I}^{\nu} = P\underset{2}{I}^{\nu}, \qquad D^{*}\underset{2}{I}^{\nu} = -P\underset{1}{I}^{\nu}.$$

Ici, $D^{*} = \underset{1}{I}^{\mu} D^{*}_{\mu}$ et D^{*}_{μ} est le symbole de la dérivée covariante dans V_2. Les symboles D et D^{*} sont liés par l'équation

$$(3) \qquad D v^{\nu} = D^{*} v^{\nu} + \underset{1}{i}^{\lambda} v^{\mu} H_{\lambda\mu}{}^{\nu},$$

(1) Pour une étude plus détaillée, *cf.* [44] Une autre méthode pour V_n donne [16]. Pour $V_4^{(0)}$, *voir* [29]. *Cf.* aussi [65].

valable pour n'importe quel vecteur v^ν dans V_2 [Chap. I, (14'')]. En désignant par n^ν le verseur normal à V_2 dans V_3, on a aussi

$$H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = -h_{\lambda\mu} n^\nu,$$

et, par conséquent, l'équation (3) peut être écrite

$$\text{(4)} \qquad Dv^\nu = D^* v^\nu - i^\lambda v^\mu h_{\lambda\mu} n^\nu.$$

2. En introduisant les scalaires $h_{ab} = \underset{a}{I}^\lambda \underset{b}{I}^\mu h_{\lambda\mu}$, on trouve, d'après (4), (2) et (3),

$$\text{(5)} \qquad p\underset{2}{i}^\nu = P\underset{2}{I}^\nu - h_{11} n^\nu \quad \text{ou bien} \quad h_{11} n^\nu = P\underset{2}{I}^\nu - p\underset{2}{i}^\nu,$$

d'où l'on déduit

$$\text{(5')} \qquad h_{11} = \varepsilon(p^2 - P^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

La courbe C étant réelle par hypothèse, on a $p^2 \geqq P^2$. La dérivée covariante du vecteur $h_{11} n^\nu$ nous donne, d'après (5), (1), (2) et (3),

$$h'_{11} n^\nu + h_{11} Dn^\nu = -P^2 \underset{1}{I}^\nu + P' \underset{2}{I}^\nu - P h_{12} n^\nu - \left(-p^2 \underset{1}{i}^\nu + p' \underset{2}{i}^\nu + pq \underset{3}{i}^\nu\right).$$

(L'accent affecté à droite remplace la dérivée d'après l'arc de C.) En excluant les géodésiques de V_3 (c'est-à-dire en excluant le cas $p = 0$, et par conséquent aussi $P = 0$), on peut exprimer n^ν en fonction de $\underset{2}{i}$ et $\underset{3}{i}$,

$$n^\nu = -\varepsilon \underset{2}{i}^\nu \left(1 - \frac{P^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \bar{\varepsilon} \underset{3}{i}^\nu \frac{P}{p} \qquad (\varepsilon = \pm 1) \quad (^1).$$

Cela nous permet de calculer h_{12} de l'équation précédente

$$\text{(6)} \qquad h_{12} = -q\bar{\varepsilon} + \left(\arcsin \frac{P}{p}\right)' \varepsilon.$$

D'autre part, on a, d'après le Chapitre I, (21'),

$$\text{(7)} \qquad K - K^* = (h_{12})^2 - h_{11} h_{22} \quad (^2).$$

En introduisant le scalaire

$$\text{(8)} \qquad 2h = \left(\underset{1}{I}^\lambda \underset{1}{I}^\mu + \underset{2}{I}^\lambda \underset{2}{I}^\mu\right) h_{\lambda\mu},$$

---

(1) Pour $\bar{\varepsilon} = +1$, les trivecteurs $\underset{1}{i}^{[\nu} \underset{2}{I}^\lambda n^{\mu]}$ et $\underset{1}{i}^{[\nu} \underset{2}{i}^\lambda \underset{3}{i}^{\mu]}$ ont la même orientation.

(2) Nous écrivons K et K* au lieu de $K_{(f)}$ et K' pour éviter toute ambiguïté.

qui est *indépendant* du choix de la courbe C, on tire de (7), en raison de (5),

$$(9) \qquad h_{12} = \varepsilon^*(K - K^* + 2\varepsilon h\sqrt{p^2 - P^2} + P^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (\varepsilon^* = \pm 1).$$

L'élimination de h_{12} de (6) et (9) nous donne

$$(10.a) \qquad -\varepsilon q + \varepsilon\left(\arc\sin\frac{P}{p}\right)' = \varepsilon^*(K - K^* + 2\varepsilon h\sqrt{p^2 - P^2} + P^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (1)}.$$

Si l'on désigne par ρ l'angle des verseurs n^ν et i^ν, on peut écrire pour (10, a),

$$(10, b) \qquad -\bar{\varepsilon} q + \varepsilon(\rho)' = \varepsilon^*(K - K^* - 2\varepsilon p h \cos\rho - p^2\cos^2\rho)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Il y a des cas particuliers où l'équation (10) résout complètement notre problème. Citons-en quelques exemples :

a. L'équation intrinsèque des cercles géodésiques sur V^2 est, d'après (10, a),

$$-\bar{\varepsilon} q + \varepsilon\left(\arc\sin\frac{c}{p}\right)' = \varepsilon^*(K - K^* + 2\varepsilon h\sqrt{p^2 - c^2} + c^2 - p^2)^{\frac{1}{2}},$$

c étant une constante arbitraire;

b. L'équation intrinsèque des courbes sur V^2, dont le bivecteur osculateur (dans V_3) est incliné à V_2 sous un angle constant, est en raison de (10, a),

$$q^2 = K - K^* - 2\varepsilon hp\cos c - p^2\cos^2 c.$$

Cette formule généralise la formule bien connue d'Enneper [Chap. X, (7')]. En effet, si $c = \pi/2$, la courbe examinée devient asymptotique, et la dernière équation devient

$$q^2 = K - K^*,$$

c. Citons encore un exemple qui traite les courbes générales sur une V_2 spéciale :

$$h_{\lambda\mu} = Cg^*_{\lambda\mu},$$

---

(1) Les symboles ε et $\bar{\varepsilon}$ ne sont pas en général indépendants, car on doit avoir

$$\varepsilon^*[-\bar{\varepsilon} q + (\arc\sin P/p)'\varepsilon] > 0 \quad \text{pour } h_{12} \neq 0.$$

C étant une constante arbitraire $\neq 0$, et $g^*_{\lambda\mu}$ le tenseur métrique de V_2.

Dans ce cas, l'équation (10) devient

$$C^2 = \frac{q^2 p^2}{p'^2 + p^2 q^2}.$$

En posant $p = 1/R$ et $q = -1/T$, on peut écrire aussi

$$C^2 = \frac{1}{R^2 + R'^2 T^2},$$

ce qui est l'integrale de l'équation differentielle bien connue des courbes « sphériques »

$$\frac{R}{T} + (R'T)' = 0$$

4. Introduisons encore les scalaires

$$h_{abc} = \underset{a}{I^\lambda} \underset{b}{I^\mu} \underset{c}{I^\nu} D^*_\nu h_{\mu\lambda},$$

et calculons

$$h_{11} = D^* \underset{1}{I^\lambda} \underset{1}{I^\mu} h_{\lambda\mu}.$$

On obtient ainsi

(11) $$h_{11} = 2 P h_{12} + h_{111}$$

d'où il suit, en raison de (6) et (5'),

(12) $$h_{111} = + 3\varepsilon \frac{P(Pp - pP')}{p\sqrt{p^2 - P^2}} + \varepsilon \frac{p'}{p} \sqrt{p^2 - P^2} + 2 P q \bar{\varepsilon}.$$

L'élimination de P' et h_{12} de (6), (9) et (12), nous donne

(13) $$h_{111} = \varepsilon \frac{p'}{p} \sqrt{p^2 - P^2}$$
$$- 3\varepsilon^* P (K - K^* + 2\varepsilon h \sqrt{p^2 - P^2} + P^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} - q P \bar{\varepsilon}.$$

De même, on peut calculer h_{12}

(14) $$h'_{12} = D^* \underset{1}{I^\lambda} \underset{2}{I^\mu} h_{\lambda\mu} = 2P(h - h_{11}) + h_{112}.$$

L'élimination de h_{11}, h_{12} et de P' de (5), (6) et (14) nous donne

(15) $$h_{112} \varepsilon^* (K - K' + 2\varepsilon h \sqrt{p^2 - P^2} + P^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (h - \varepsilon\sqrt{p^2 - P^2}) h_{111} + \frac{1}{2}[(K - K^*)' + 2\varepsilon h' \sqrt{p^2 - P^2}].$$

5. Les coefficients

$$h_{111}, \quad h_{112}, \quad (\mathrm{K}-\mathrm{K}^*), \quad h',$$

qui figurent dans (14) et (15) dependent encore du choix de C. Nous les exprimerons en fonction des grandeurs connues de V_2. Désignons à cet effet par u_1, u_2 les paramètres de V_2, et introduisons les coefficients

$$E = g_{\lambda\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u_1}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_1}, \qquad F = g_{\lambda\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u_1}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_2}, \qquad G = g_{\lambda\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u_2}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_2},$$

$$L = h_{\lambda\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u_1}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_1}, \qquad M = h_{\lambda\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u_1}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_2}, \qquad N = h_{\lambda\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u_2}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_2},$$

$$L_a = (D^*_\omega h_{\mu\lambda})\frac{\partial x^\omega}{\partial u_a}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_1}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u_1}, \qquad M_a = (D^*_\omega h_{\mu\lambda})\frac{\partial x^\omega}{\partial u_a}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_1}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u_2},$$

$$N_a = (D^*_\omega h_{\mu\lambda})\frac{\partial x^\omega}{\partial u_a}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_2}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u_2}.$$

Cela étant, désignons par x, y les composantes du verseur $\underset{1}{I}^\nu$ dans V_2,

$$\underset{1}{I}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial u_1}x + \frac{\partial x^\nu}{\partial u_2}y,$$

et par $\bar{x}$, $\bar{y}$ les composantes du verseur $\underset{2}{I}^\nu$ dans V_2,

$$\underset{2}{I}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial u_1}\bar{x} + \frac{\partial x^\nu}{\partial u_2}\bar{y}.$$

On a donc, pour ces composantes,

$$(16) \quad Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = 1, \qquad Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = h_{11} = \varepsilon\sqrt{p^2 - P^2}.$$

$$(17) \quad E\bar{x}^2 + 2F\bar{x}\bar{y} + G\bar{y}^2 = 1, \qquad Ex\bar{x} + F(x\bar{y} + y\bar{x}) + Gy\bar{y} = 0.$$

Les coefficients h_{111}, h_{112} peuvent être exprimés en fonction de x, $\bar{x}$, $\bar{y}$, y,

$$(18) \quad h_{111} = x(L_1x^2 + 2M_1xy + N_1y^2) + y(L_2x^2 + 2M_2xy + N_2y^2),$$

$$(19) \quad \begin{aligned} h_{112} = {} & x[L_1x\bar{x} + M_1(x\bar{y} + \bar{x}y) + N_1y\bar{y}] \\ & + y[L_2x\bar{x} + M_2(x\bar{y} + \bar{x}y) + N_2y\bar{y}]. \end{aligned}$$

En substituant dans (19) les valeurs $\bar{x}$, $\bar{y}$ tirées de (17), on obtient

$$(19)' \quad h_{112} = \begin{vmatrix} x^2 & -xy & y^2 \\ xN_1 + yN_2 & xM_1 + yM_2 & xL_1 + yL_2 \\ G & F & E \end{vmatrix} : \sqrt{EG - F^2}.$$

Quant aux coefficients $(K - K^*)'$ et h', on a

$$h' = x\frac{\partial h}{\partial u_1} + y\frac{\partial h}{\partial u_2},$$

et de même pour $(K - K^*)'$. Nous pouvons donc écrire pour (13) et (15)

$$\text{(I)}\quad x(L_1x^2 + 2M_1xy + N_1y^2) + y(L_2x^2 + 2M_2xy + N_2y^2)$$
$$= \varepsilon\frac{p'}{p}\sqrt{p^2 - P^2} - 3\varepsilon^* P(K - K^* + 2\varepsilon h\sqrt{p^2 - P^2} + P^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} - qP\bar{\varepsilon},$$

$$\text{(II)}\quad \varepsilon^* \begin{vmatrix} x^2 & -xy & y^2 \\ xN_1 + yN_2 & xM_1 + yM_2, & xL_1 + yL_2 \\ G & F & E \end{vmatrix}$$
$$\times \frac{(K - K^* + 2\varepsilon h\sqrt{p^2 - P^2} + P^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{EG - F^2}}$$
$$= (h - \varepsilon\sqrt{p^2 - P^2})$$
$$\times\left[\varepsilon\frac{p'}{p}\sqrt{p^2 - P^2} - 3\varepsilon^* P(K - K^* + 2\varepsilon h\sqrt{p^2 - P^2} + P^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} - qP\bar{\varepsilon}\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial(K - K^*)}{\partial u_1} + y\frac{\partial(K - K^*)}{\partial u_2}\right.$$
$$\left. + 2\varepsilon x\sqrt{p^2 - P^2}\frac{\partial h}{\partial u_1} + 2\varepsilon y\sqrt{p^2 - P^2}\frac{\partial h}{\partial u_2}\right).$$

Supposons maintenant que l'on ait substitué les valeurs x, y tirées de (16) dans ces équations. Le cas échéant, elles ne contiennent que P qui est à éliminer. Le resultat de cette élimination ne se réduit pas à l'identité. Pour le faire voir, examinons les courbes qui correspondent aux courbes de Darboux, c'est-à-dire les courbes pour lesquelles $h_{111} = 0$. Dans ce cas, l'équation (I) devient

$$\varepsilon\frac{p'}{p}\sqrt{p^2 - P^2} - 3\varepsilon^* P(K - K^* + 2\varepsilon h\sqrt{p^2 - P^2} + P^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} - qP\varepsilon = 0,$$

tandis que (II) *ne contient plus* q (à cause de $h_{111} = 0$). Il s'ensuit que l'élimination de P ne nous mène pas à l'identité dans ce cas particulier, et par cette raison aussi dans le cas général [1].

---

[1] Il y a quand même des cas particuliers qui ne conduisent qu'à l'identité (par exemple, le cas dejà cité de la surface spéciale $h_{\lambda\mu} = C g^*_{\lambda\mu}$).

L'équation intrinsèque des courbes générales sur V_2 *dans* V_3 *s'obtient par l'élimination de* P, x, y *de* (16), (I) *et de* (II) (1).

6. Il nous reste maintenant le cas, jusqu'alors exclu, des courbes géodésiques sur V_2. Le verseur normal $\underset{2}{i}^{\nu}$ d'une géodésique étant dans la direction de $n^{\nu}\left(n^{\nu} = \varepsilon \underset{2}{i}^{\nu}\right)$, on déduit de la definition de $h_{\lambda\mu}$ [Chap. I, (17)],

$$h_{11} = \underset{1}{i}^{\lambda} \mathrm{D} n_{\lambda} = \varepsilon \underset{1}{i}^{\lambda} \mathrm{D} \underset{2}{i}_{\lambda} = -\varepsilon p, \qquad (h_{12})^2 = \left(\underset{1}{i}^{\lambda} \mathrm{D} n_{\lambda}\right)^2 = \left(\underset{1}{i}^{\lambda} \mathrm{D} \underset{2}{i}_{\lambda}\right)^2 = q^2,$$

et, par conséquent, à cause de (9),

$$q^2 + p^2 - 2p\varepsilon h = \mathrm{K} - \mathrm{K}^{\star} \quad (^2).$$

Cette *équation intrinsèque* des géodésiques sur V_2 dans V_3 s'obtient aussi de (10), en y posant $\mathrm{P} = 0$.

Prague, janvier 1931.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. BERWALD (L.). — Differentialinvarianten in der Geometrie (*Enzyklopädie*, III D. 11, 1923).
2. BLASCHKE (W.). — *Vorlesungen uber Differentialgeometrie*, t. I, II (Berlin, 1923, 1924).
3. BOMPIANI (E.). — Analisi metrica delle quasiasintotiche sulle superficie degli iperspazi (*Rendiconti Lincei*, 5e série, t. 25, 1916, p. 493-498, 576-578).
4. — Sur les courbes quasi asymptotiques des surfaces dans un espace quelconque (*C. R .Acad. Sc., Paris*, t. 168, 1919, p. 755-757).
5. — Sopra alcune estensioni dei theoremi di Meusnier e di Eulero (*Atti Ac. Torino*, t. 48, 1913, p. 393-410).
6. — Studi sugli spazî curvi (*Atti Ist. Veneto*, t. 80, 1920-1921, p. 355-386, 839-859, 1113-1145).
7. BORTOLOTTI (E.). — Extension du théorème de Beltrami-Enneper aux réseaux conjugués d'une V_2 en V_3 (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 180, 1925, p. 189-191).

(1) *Voir* [46]. Une autre méthode donne [24], [26], [27], [28].

(2) *Voir* [41].

8. — Su di una generalizzazione della teoria delle curve (*R. Ist. Lombardo* t. 58, nos XI XV. 1925).
9. — Scostamento geodetico e sue generalizzazioni (*Gior. di Math.*, t. **46**, 1928, p. 153-191).
10. Burali-Forti (C.), Boggio (T.). — Espaces courbes, critique de la relativité (Torino, 1924).
11. Cartan (E.). — Sur les variétés à connexion affine (*Annales Éc. Norm. sup.*, t. **40**, 1923, p. 325 412; t. **41**, 1924, p. 1 25).
12. — Sur l'écart géodésique et quelques notions connexes (*Rendiconti Lincei*, 6e série, t. **5**, 1927, p. 609 613).
13. — La géométrie des espaces de Riemann (*Mémorial*, Paris, fasc. IX, 1925).
14. — *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (Paris, 1928).
15. Crudeli (U.). — Sullo scostamento geodetico (*Rendiconti Lincei*, 6e série, t. **5**, 1927. p. 248-251).
16. Dienes (P.). — Sur l'intégration des équations du déplacement (*Rendiconti Palermo*, t. **67**, 1923, p. 144-152).
17. Donder (De Th.). — Interprétation physique de la relativité (*Bull. Ac. de Belgique*, 5e série, t. **9**, 1923, p. 59-79).
18. Dubourdieu (J.). — Sopra le coordinate cartesiane lungo una curva (*Rendiconti Lincei*, 6e série, t. **5**, 1927, p. 654-655).
19. Duschek (A.), Mayer (W.). — *Lehrbuch der Differentialgeometrie*, II (Leipzig, 1930).
20. Egnell (A.). — *L'ochématique* (Paris, 1926).
21. Eisenhart (L. P.). — *Riemannian geometry* (Princeton, 1926).
22. — *Non Riemannian geometry* (New York, 1927).
23. Fernandez (De, M.). — Sur l'écart géodésique... (*Rendiconti Lincei*, 6e série, t. **7**, 1928, p. 482-486).
24. Finikov. — Sur l'équation intrinsèque d'une surface (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **186**, 1928, p. 825-827).
25. Galbrun (H.). — *Introduction à la théorie de la relativité* (Paris, 1923).
26. Gambier (M.-B.). — Contact de deux courbes gauches (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **185**, 1927).
27. — Équation intrinsèque d'une surface (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **187**, p. 872-874).
28. — Contact des courbes gauches (*Journal de Math. pures et appl.*, t. **73**, 1928, p. 75-91).
29. Godeaux (L.). — L'Univers d'Einstein et la métrique cayleyenne elliptique (*Bulletin Ac. de Belgique*, t. **5**, 1924, p. 429-433).
30. Hatzidakis (N.). — On pairs of Frenetian trihedra (*Int. Congress of Math.*, 1912, Cambridge).
31. Hlavatý (V.). — Les congruences dans les espaces non euclidéens (*Věstnik Kr. České Spol. Nauk*, 1922-1923).
32. Sur les courbes quasi asymptotiques (Christiaan Huygens, t. **3**, p. 209-245).
33. — Les courbes sur la variété à *m* dimensions (*Věstnik Kr. České, Spol. Nauk*, 1924).

34. — Théorie des densités dans le déplacement général (*Annali di Mat.*, 4e série, t. 5, 1927-1928, p. 73-83).

35. — Contribution au calcul différentiel absolu (*Vestnik Kr. Ceské Spol. Nauk*, 1926).

36. — Les paramètres locaux dans une variété de Riemann (*Rendiconti Lincei*, 6e série, t. 4, 1926, p. 99-103).

36 *bis*. — Application des paramètres locaux (*Annales Soc. polonaise de math.*, t. 5, 1926, p. 44-62).

37. — Contact des deux courbes dans une V_n (*Rendiconti Lincei*, 6e série, t. 5, 1927, p. 415-420).

38. — Sulla riduzione dei sistemi ortogonali di equazioni differenziali lineari (*Rendiconti Lincei*, t. 6, 6e série, 1927, p. 467-474).

39. — Proprieta differenziali delle curve in uno spazio a connessione lineare generale (*Rendiconti Palermo*, t. 53, 1929).

40. — Ancora sulle proprieta differenziali (*Ibid.*, t. 53, 1929).

41. — Sur la seconde forme fondamentale (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 186, 1928, p. 1088-1090).

42. — Sur la seconde forme fondamentale, II (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 186, 1928, p. 1258-1260).

43 — Sur la déformation infinitésimale d'une courbe dans la variété métrique avec torsion (*Bull. Soc. math. de France*, t. 56, 1928, p. 18-25).

44. — Le parallélisme de la connexion de M. Weyl (*Annales Éc. Norm. sup.*, t. 46, 1929, p. 73-103).

45. — Ein Beitrag zur Theorie der Weyl'schen Ubertragung (*Kon. Ak. Amsterdam*, t. 31, n° 8, 1928, p. 878-881).

46. — Natürliche Gleichung der Kurven (*Math. Ztschr.*, t. 30, 1929, p. 470-480).

47. Juvet (G.). — Introduction au calcul tensoriel (Paris, 1922).

48. — Les formules de Frenet dans un espace généralisé de Weyl (*Bull. Soc. neuchâteloise des Sc. nat.*, t. 46, 1920-1921).

49. — Les formules de Frenet pour un espace de M. Weyl (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 172, 1921, p. 1647-1650).

50. — Sur le déplacement (*Bull. Soc. math. de France*, t. 53, 1925, p. 60-74).

51. Lagrange (R.). — Calcul différentiel absolu (*Mémorial*, Paris, fasc. XIX).

52. Levi-Civita (T.). — Nozioni di parallelismo in una varietà qualunque (*Rendiconti Palermo*, t. 42, 1917, p. 173-215).

53. — *Lezioni di calcolo differenziale assolute* (Roma, 1925).

54. — Sullo scostamento geodetico (*Bolletino Unione Mat. Ital.*, 1926, p. 1-4).

55. — Sur l'écart géodésique (*Math. Annalen*, t. 97, 1926, p. 292-320).

56. Levi (E. E.). — Saggio sulla teoria delle superficie (*Annali R. Scuola Norm. Pisa*, t. 10; aussi *Diss. Pisa*, 1905).

57. Levy (H.). — On curves of zero curvature in Riem. space (*Bull. Am. Math. Soc.*, t. 36, 1930, p. 361).

58. Lipka. — On the relative curvature of two curves in V_n (*Bull. Am. Math. Soc.*, t. 29, 1923, p. 345-348).

59. Marais (H.). — *Introduction géométrique à l'étude de la relativité* (Paris, 1923).

60. Mc Connell (A. I.). — Schmidt's orthogonal ennuple and the Frenet formulas for a curve (*Bull. Am. Math. Soc.*, t. 34, 1928, p. 713-714).
61. — Strain and torsion in Riemannian Space (*Annali di Mat.*, 4e série, t. 6, 1928-1929, p. 207-231).
62. Oninescu (O.). — Scostamento geodetico (*Rendiconti Lincei*, 6e série, t. 5, 1927, p. 561-563).
63. Riemann (B.), Weyl (H.). — Ueber die hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Berlin. 1923).
64. Rothé (H.). — *Einfuhrung in die Tensorrechnung* (Wien, 1924).
65. Schlesinger (L.). — Ueber Parallelverschiebung in der Weltgeometrie (*Journal für die reine u. ang. Math.*, t. 161, p. 14-20).
66. Schouten (J. A.). — *Der Ricci-Kalkül* (Berlin, 1924).
67. — Quelques remarques sur l'écart géodésique et des problèmes pareils (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 185, 1927, p. 1096-1098).
68. — Over infinitesimale vervormingen van een V_m in een V_n (*Kon. Ak. van Wet. Amsterdam*, t. 36, nº 9).
69. Severi (J.). — Sulla curvatura delle superficie e varietà (*Rendiconti Palermo*, t. 42, 1917, p. 222-259).
70. Slebodzinski (W.). — Contribution à la théorie des courbes et des congruences (*Prace mat. fiz.*, t. 34, 1925-1926).
71. Struik (D. J.). — *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie* (Berlin, 1922).
72. — Geometry of linear displacement (*Bull. Am. Math. Soc.*, t. 33, 1927, p. 523-564).
73. Synge (J. I.). — The first and second variations (*Proc. London Math. Soc.*, t. 25, série 2, 1926, p. 247-264).
75. Taylor (J. H.). — A generalization of Levi-Civita's parallelisme (*Transactions Am. Math. Soc.*, t. 27, 1925, p 246-264
76. — Thomas (M. J.). On normal coordinates (*Proc. Nat. Ac. of Sciences*, t. 12, 1926, p. 58-63).
77. Veblen (O.). — *Invariants of quadratic differential forms* (London, 1927).
78. Vranceanu (G.). — Sur les directions principales associées à une courbe (*Bull. math. de la Soc. roumaine des Sciences*, t. 30, p. 75-80).
79. Weyl (H.). — *Temps, espace, matière* (traduit par Juvet-Leroy, Paris, 1922).
80. — *Mathematische Analyse des Raumproblems* (Berlin, 1923).

TABLE DES MATIÈRES.