Mémorial des sciences mathématiques

A. Buhl

Gravifiques, groupes, mécaniques

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 62 (1934)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1934__62__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LXII

Gravifiques, Groupes, Mécaniques

Par M. A. BUHL
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1934

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

GRAVIFIQUES, GROUPES, MÉCANIQUES

Par M. A. BUHL,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

Nous insistons à nouveau, dans ce fascicule, sur les rapports fondamentaux et frappants qui existent entre les Gravifiques, les Groupes et — bien que ce dernier point ne soit qu'effleuré — les Mécaniques nouvelles. Toutes ces parties si intéressantes de la Science reposent sur des transformations d'intégrales multiples.

Nous disons « les Gravifiques ». Il peut, en effet, y en avoir une infinité, tout comme, d'après Henri Poincaré [1], il peut y avoir une infinité d'interprétations mécaniques de l'Univers dès que l'on peut en concevoir une.

Nous réexposons brièvement la Gravifique d'Einstein, de 1929, d'après la traduction de M. R. Ferrier, traduction qui a l'avantage d'être augmentée de préliminaires de M. Th. De Donder [2].

Depuis que ce fascicule est rédigé, Albert Einstein lui-même a publié, en français, des formes développées de la nouvelle Gravifique [32], [46].

Le très utile travail présenté ainsi par M. Ferrier révèle, entre les conceptions de ce savant et les nôtres, des différences d'interprétation que nous n'hésitons pas à signaler. M. Ferrier écrit : « Le mois de janvier 1929 marque, dans l'histoire de la Relativité générale, une date importante : celle où M. Einstein, abandonnant la théorie de la mécanique relativiste qu'il avait soutenue jusqu'ici, sans parvenir à un système cohérent, tente dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Berlin, d'en édifier une nouvelle, basée sur des principes très différents. »

Or, pour nous, Einstein n'abandonne rien du tout et la Gravifique nouvelle n'est pas basée, par rapport à l'ancienne, sur des principes très différents.

La première Gravifique repose sur l'identité de Bianchi [(23) du Chapitre I ci-après, quand les Λ sont nuls]. La seconde est basée sur l'identité (24). Or, ces deux identités sont, pour ainsi dire, *conjuguées*, associées de la manière la plus intime; elles sortent *ensemble* de la même transformation analytique. Vraiment ce n'est pas du « très différent ».

Si l'on tenait à l'idée de différence, on pourrait remarquer aussi que la première Gravifique n'a recours qu'à l'Espace de Riemann, donc à un espace sans torsion; la seconde a recours à un espace tordu, au sens de M. Élie Cartan. Mais M. T. Levi-Civita a montré [3], dès mars 1929, que cet espace tordu pouvait être représenté sur un espace sans torsion et ce au moyen du Calcul différentiel absolu et des coefficients de rotation de Ricci. Là encore, le « très différent » disparaît.

M. Ferrier termine aussi par quelques lignes pessimistes. Le problème de l'association des champs électromagnétiques et gravitationnels ne pourrait guère être considéré comme définitivement résolu. C'est bien ce que nous croyons aussi, mais cela ne nous afflige nullement. Nous sommes d'une École philosophique, qui a encore eu pour chef Henri Poincaré, où l'on ne croit pas à la possibilité d'existence de Théories synthétiques à caractère définitif et parfait; pour nous, une Théorie devient admissible dès qu'elle présente une certaine extension et surtout une certaine esthétique. Or, de ce point de vue, les Théories einsteiniennes nous semblent sans rivales.

Où vont ces Théories? Sans doute vers l'emploi d'identités de plus en plus ardues à extraire de la Théorie des groupes infinis, de presque inextricables systèmes de Pfaff, conceptions qui semblent s'ébaucher en la pensée d'un Cartan [33], d'un De Donder, d'un Weyl, ...; n'oublions pas Einstein lui-même. A côté de ces identités, celle de Bianchi, par exemple, semblera une toute petite chose. Mais, quant à l'identité véritablement universelle qui exprimerait l'existence phénoménale de tout ce qui est, son essence — étrange contradiction — ne semble pas de ce monde.

CHAPITRE I.

GROUPES DE LIE ET ESPACES DE CARTAN.

1. Relations structurales et généralisations. — On sait que les relations structurales fondamentales de la Théorie des groupes continus et finis sont

$$c^s_{ij} + c^s_{ji} = 0, \tag{1}$$

$$c^\alpha_{ij}\, c^s_{k\alpha} + c^\alpha_{jk}\, c^s_{i\alpha} + c^\alpha_{ki}\, c^s_{j\alpha} = 0. \tag{2}$$

Ici α est un indice de sommation comme tout indice qui figure deux fois dans un monome. Le Calcul différentiel absolu, qui a rendu cette convention courante, nous porte aussi à remarquer que les égalités (2) peuvent subir une *contraction* en prenant i, ou j, ou k, égal à s. Soit $k = s$; la relation (2) deviendra

$$c^\alpha_{ij}\, c^s_{s\alpha} = 0 \tag{3}$$

avec, cette fois, deux indices de sommation, α et s.

Les relations (3) ne sont évidemment pas distinctes de (2) mais elles peuvent être le point de départ de considérations spéciales et très importantes.

Si les constantes c^s_{ij}, *pour lesquelles les indices* i, j, s *prennent, tous trois, toutes les valeurs entières de* 1 *à* r, *satisfont aux relations* (1) *et* (2), *on peut toujours trouver* r *transformations infinitésimales* X_s *telles que*

$$(X_i X_j) = X_i X_j - X_j X_i = c^s_{ij} X_s. \tag{4}$$

C'est là, en somme, le troisième théorème de Lie. Or, des progrès récents montrent que ce troisième et dernier théorème n'est pas un aboutissement à tous les points de vue; on peut faire apparaître les relations (1), (2) et mêmes des généralisations fonctionnelles de ces relations, de bien des manières, sans parler de groupes; on peut montrer que ces relations avoisinent de très près les principes de l'Analyse, qu'elles sont, par exemple, des conditions de simplicité pour de certains systèmes différentiels ou pour certains espaces dans lesquels on retrouvera ensuite les *espaces de groupes* déjà sommairement étudiés dans le fascicule XXXIII du *Mémorial* d'après de grands développements publiés par M. Élie Cartan [4].

Comme exemple de théorie à généralisation fonctionnelle des relations (1) et (2), nous allons d'abord développer la nouvelle Gravifique d'Einstein [2] dans le style adopté, en le fascicule XVI du *Mémorial*, pour la Gravifique première manière.

2. Identités fondamentales. Conséquences. — Nous ne varions nullement quant au choix de ces identités. Ce sont

$$\int_C X\,dY = \int\int_s dX\,dY, \qquad \int\int_s X\,dY\,dZ = \int\int\int_v dX\,dY\,dZ \tag{5}$$

et toutes les relations analogues obtenues avec un nombre quelconque de variables X, Y, Z, ... ; les *deux* relations (5) suffisent à la construction d'une Gravifique se rapportant à l'espace-temps ordinaire. Nous savons que, par des successions de changements de variables et de combinaisons linéaires, les identités (5) deviennent des *formules stokiennes* [5], en lesquelles se révèle tout de suite la forme des équations électromagnétiques de Maxwell. Et ce qui fait de Maxwell l'un des plus grands génies qui aient honoré l'humanité c'est précisément d'avoir jeté les bases d'un Électromagnétisme qui était, en même temps, une Géométrie.

De tels résultats sont codifiés de manière plus explicite par la théorie des formes de Pfaff pourvues d'une multiplication et d'une dérivation extérieures. Alors les identités (5) sont remplacées par

$$\int_C P_i dx^i = \int\int_S [dP_i dx^i], \qquad \int\int_S M_{ij} dx^i dx^j = \int\int\int_V [dM_{ij} dx^i dx^j]. \tag{6}$$

Les seules analogies d'écriture laissent penser qu'on a, en (5) et en (6), des identités au fond équivalentes. Les développements des crochets, en (6), donnent les déterminants symboliques

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^i} & \dfrac{\partial}{\partial x^j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^i} & \dfrac{\partial}{\partial x^j} & \dfrac{\partial}{\partial x^k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix}, \tag{8}$$

ce dernier avec

$$M_{ij} + M_{ji} = 0.$$

Quant à ω c'est l'indice de substitution au rôle immédiatement visible et d'ailleurs maintes fois expliqué. A partir de (7) et avec des dérivées en D qui seront plus générales que celles en ∂, nous poserons encore

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx^i} & \dfrac{D}{Dx^j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^i} & \dfrac{\partial}{\partial x^j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{\omega i} & \Gamma^{\alpha}_{\omega j} \\ {}_iP_{\alpha} & {}_jP_{\alpha} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

En écrivant

$$\Lambda^{\alpha}_{ij} = \Gamma^{\alpha}_{ij} - \Gamma^{\alpha}_{ji}, \tag{10}$$

le dernier déterminant de (9), abstraction faite du signe qui le précède, est égal à

$$\Lambda^{\alpha}_{ji} P_{\alpha}. \tag{11}$$

Et, quelle que soit cette expression (11), on peut scinder (9) en formules telles que

$$\frac{DP_j}{Dx^i} = \frac{\partial P_j}{\partial x^i} - \Gamma^{\alpha}_{ij} P_{\alpha}. \tag{12}$$

De même, avec

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx^i} & \dfrac{D}{Dx^j} \\ P^i & P^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^i} & \dfrac{\partial}{\partial x^j} \\ P^i & P^j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^{\omega}_{\alpha i} & \Gamma^{\omega}_{\alpha j} \\ {}^iP^{\alpha} & {}^jP^{\alpha} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

le dernier déterminant est égal a

$$(\Gamma^{j}_{\alpha i} - \Gamma^{i}_{\alpha j}) P^{\alpha}$$

ce qui ne disparaît pas avec les expressions (10) mais donne des dérivées

$$\frac{DP^j}{Dx^i} = \frac{\partial P^j}{\partial x^i} + \Gamma^{j}_{\alpha i} P^{\alpha} \tag{14}$$

avec lesquelles

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(P_j P^j) = P_j \frac{DP^j}{Dx^i} + P^j \frac{DP_j}{Dx^i}. \tag{15}$$

On pourrait écrire une formule analogue avec $P_j P^j$ remplacé par $P_j Q^j$.

Les formules

$$\frac{DP_j}{Dx^i}\,dx^i = dP_j - \Gamma^\alpha_{ji}\,P_\alpha\,dx^i = 0, \tag{16}$$

$$\frac{DP^j}{Dx^i}\,dx^i = dP^j + \Gamma^j_{i\alpha}\,P^\alpha\,dx^i = 0 \tag{17}$$

définissent un *déplacement parallèle* généralisé pour le vecteur de composantes *covariantes* P_j ou de composantes *contravariantes* P^j. L'affirmation peut avoir un sens très général qui ne fait nullement entrer en ligne de compte la nature des fonctions Γ^α_{ji}; on doit simplement retrouver le déplacement parallèle ordinaire quand toutes ces fonctions s'évanouissent identiquement. Soient deux vecteurs infiniment petits issus d'un même point, l'un d, de composantes dx^j, l'autre δ, de composantes δx^j. Si l'on veut que δ, déplacé parallèlement à lui-même le long de d, donne le même point que d, déplacé le long de δ, ceci peut se traduire par l'égalité

$$dx^j + \delta x^j + d\,\delta x^j = \delta x^j + dx^j + \delta\,dx^j$$

ou, d'après (17), par

$$\Gamma^j_{\alpha i}\,\delta x^\alpha\,dx^i = \Gamma^j_{\alpha i}\,dx^\alpha\,\delta x^i.$$

En intervertissant, dans l'un des deux membres, les indices de sommation i et α, on conclut de là que $\Gamma^j_{\alpha i}$ est égal à $\Gamma^j_{i\alpha}$ ce qui revient à la nullité des Λ^α_{ij} écrits en (10). Mais, si le contour quadrilatéral, que nous venons de définir, à l'aide de d et de δ, ne se ferme pas, les Λ^α_{ij} de (10) ne s'annulent plus; l'espace a une *torsion*. Nóus nous plaçons ici dans ce cas général.

La notion de torsion peut également se révéler de manière intéressante au moyen de la formule (9) sans qu'il y ait là, au fond, une chose distincte de ce qui vient d'être dit.

On peut conclure de (9)

$$\int\!\!\int_S \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx^i} & \dfrac{D}{Dx^j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} dx^i\,dx^j = \int_C P_i\,dx^i + \int\!\!\int_S P_\alpha\,\Lambda^\alpha_{ij}\,dx^i\,dx^j.$$

Si les Λ^α_{ij} sont identiquement nuls, on a une formule stokienne avec des ∂ remplacés par des D, ce qui permet justement de dire qu'une formule stokienne conserve sa physionomie ordinaire dans les espaces dépourvus de torsion; mais, dans les espaces tordus, il faut adjoindre un terme complémentaire à la formule en D.

On sait toujours [5] que les raisonnements faits, à partir de (7), peuvent être repris à partir de (8) et ainsi de suite. La règle de dérivation, trouvée en (12) et (14), prend la forme générale

$$\frac{D}{Dx^i} A^{****}_{*****} = \frac{\partial}{\partial x^i} A^{****}_{*****} \left\{ \begin{array}{l} -\Gamma^{\alpha}_{\mu i} A^{****}_{**\alpha**} \text{ pour chaque } {}^{****}_{**\mu**} \\ +\Gamma^{\mu}_{\alpha i} A^{**\alpha*}_{*****} \text{ pour chaque } {}^{**\mu*}_{*****} \end{array} \right. . \tag{18}$$

On remarquera que l'indice de dérivation i est toujours placé inférieurement et en dernier lieu dans les coefficients Γ.

A l'aide de la règle de dérivation (18), on reprendra aisément des calculs faits en [5] (p. 25) et l'on trouvera notamment

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx^i} & \dfrac{D}{Dx^j} \\ \dfrac{DA_k}{Dx^i} & \dfrac{DA_k}{Dx^j} \end{vmatrix} = B^{\alpha}_{\kappa ji} A_{\alpha} + \Lambda^{\alpha}_{ij} A_{k\alpha}, \\ \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx^i} & \dfrac{D}{Dx^j} \\ \dfrac{DA^k}{Dx^i} & \dfrac{DA^k}{Dx^j} \end{vmatrix} = B^{k}_{\alpha ij} A^{\alpha} + \Lambda^{\alpha}_{ij} A^{k}_{\alpha}, \end{array} \right. \tag{19}$$

avec le symbole de Riemann à quatre indices

$$B^{\alpha}_{\kappa ji} = \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^{\alpha}_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^{\alpha}_{kj} + \Gamma^{\beta}_{ki} \Gamma^{\alpha}_{\beta j} - \Gamma^{\beta}_{kj} \Gamma^{\alpha}_{\beta i}. \tag{20}$$

Bien entendu

$$A_{kj} = \frac{DA_k}{Dx^j}, \qquad A^k_j = \frac{DA^k}{Dx^j}.$$

On a de même

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx^{\tau}} & \dfrac{D}{Dx^{\sigma}} \\ \dfrac{DA_{\mu\nu}}{Dx^{\tau}} & \dfrac{DA_{\mu\nu}}{Dx^{\sigma}} \end{vmatrix} = B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} A_{\rho\nu} + B^{\rho}_{\nu\sigma\tau} A_{\mu\rho} + \Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma} A_{\mu\nu\alpha}. \tag{21}$$

Plus simplement on peut écrire

$$A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu} = B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} A_{\alpha} + \Lambda^{\alpha}_{\sigma\nu} A_{\mu\alpha}, \tag{22}$$

$$A_{\mu\nu\sigma\tau} - A_{\mu\nu\tau\sigma} = B^{\alpha}_{\nu\rho\tau} A_{\alpha\nu} + B^{\alpha}_{\nu\sigma\tau} A_{\mu\alpha} + \Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma} A_{\mu\nu\alpha}. \tag{21}$$

Partons maintenant de l'identité

$$\left| \begin{array}{r} A_{\mu\nu\sigma\tau} - A_{\mu\nu\tau\sigma} \\ + A_{\mu\sigma\tau\nu} - A_{\mu\sigma\nu\tau} \\ + A_{\mu\tau\nu\sigma} - A_{\mu\tau\sigma\nu} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} (A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu})_{\tau} \\ + (A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma})_{\nu} \\ + (A_{\mu\tau\nu} - A_{\mu\nu\tau})_{\sigma}. \end{array} \right.$$

Écrivons les binomes des premiers membres sous la forme (21) et le contenu des parenthèses sous la forme (22). Dérivons ensuite ces parenthèses, en D, comme il est indiqué par les indices extérieurs, en observant la règle de dérivation des produits dont (15) est un cas très particulier mais qui se conserve toujours sous l'aspect ordinaire.

Il vient, après une première simplification,

$$\left.\begin{array}{r} B^{\alpha}_{\nu\sigma\tau}\,A_{\mu\alpha}+\Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma}\,A_{\mu\nu\alpha} \\ +\,B^{\alpha}_{\sigma\tau\nu}\,A_{\mu\alpha}+\Lambda^{\alpha}_{\nu\tau}\,A_{\mu\sigma\alpha} \\ +\,B^{\alpha}_{\tau\nu\sigma}\,A_{\mu\alpha}+\Lambda^{\alpha}_{\sigma\nu}\,A_{\mu\tau\alpha} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} (B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma})_{\tau}\,A_{\alpha}+\Lambda^{\alpha}_{\sigma\nu}\,A_{\mu\alpha\tau}+\Lambda^{\alpha}_{\sigma\nu\tau}\,A_{\mu\alpha} \\ +\,(B^{\alpha}_{\mu\sigma\tau})_{\nu}\,A_{\alpha}+\Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma}\,A_{\mu\alpha\nu}+\Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma\nu}\,A_{\mu\alpha} \\ +\,(B^{\alpha}_{\mu\tau\nu})_{\sigma}\,A_{\alpha}+\Lambda^{\alpha}_{\nu\tau}\,A_{\mu\alpha\sigma}+\Lambda^{\alpha}_{\nu\tau\sigma}\,A_{\mu\alpha}. \end{array}\right.$$

De la seconde colonne du membre de gauche retranchons la seconde du membre de droite en tenant compte de la première équation (19), c'est-à-dire de

$$A_{\mu\nu\alpha}-A_{\mu\alpha\nu}=B^{\beta}_{\mu\nu\alpha}\,A_{\beta}+\Lambda^{\beta}_{\alpha\nu}\,A_{\mu\beta};$$

il viendra

$$\left.\begin{array}{r} B^{\alpha}_{\nu\sigma\tau}\,A_{\mu\alpha}+\Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma}\left(B^{\beta}_{\mu\nu\alpha}\,A_{\beta}+\Lambda^{\beta}_{\alpha\nu}\,A_{\mu\beta}\right) \\ +\,B^{\alpha}_{\sigma\tau\nu}\,A_{\mu\alpha}+\Lambda^{\alpha}_{\nu\tau}\left(B^{\beta}_{\mu\sigma\alpha}\,A_{\beta}+\Lambda^{\beta}_{\alpha\sigma}\,A_{\mu\beta}\right) \\ +\,B^{\alpha}_{\tau\nu\sigma}\,A_{\mu\alpha}+\Lambda^{\alpha}_{\sigma\nu}\left(B^{\beta}_{\mu\tau\alpha}\,A_{\beta}+\Lambda^{\beta}_{\alpha\tau}\,A_{\mu\beta}\right) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} \left(B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}\right)_{\tau}A_{\alpha}+\Lambda_{\sigma\nu\tau}\,A_{\mu\alpha} \\ +\left(B^{\alpha}_{\mu\sigma\tau}\right)_{\nu}A_{\alpha}+\Lambda_{\tau\sigma\nu}\,A_{\mu\alpha} \\ +\left(B^{\alpha}_{\mu\tau\nu}\right)_{\sigma}A_{\alpha}+\Lambda_{\nu\tau\sigma}\,A_{\mu\alpha}. \end{array}\right.$$

Avec, dans le premier membre, quelques interversions d'indices de sommation, on a une égalité qui doit subsister indépendamment des A_{α} et $A_{\mu\alpha}$; elle se scinde finalement en deux identités. La première, qui généralise l'*identité de Bianchi*, est

$$(23)\quad \left(B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}\right)_{\tau}+\left(B^{\alpha}_{\mu\sigma\tau}\right)_{\nu}+\left(B^{\alpha}_{\mu\tau\nu}\right)_{\sigma}+B^{\alpha}_{\mu\nu\beta}\,\Lambda^{\beta}_{\sigma\tau}+B^{\alpha}_{\mu\sigma\beta}\,\Lambda^{\beta}_{\tau\nu}+B^{\alpha}_{\mu\tau\beta}\,\Lambda^{\beta}_{\nu\sigma}=0.$$

La seconde est

$$(24)\qquad \begin{aligned} &\left(B^{\alpha}_{\nu\sigma\tau}+B^{\alpha}_{\sigma\tau\nu}+B^{\alpha}_{\tau\nu\sigma}\right)+\left(\Lambda^{\alpha}_{\nu\sigma\tau}+\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau\nu}+\Lambda^{\alpha}_{\tau\nu\sigma}\right)\\ &\qquad+\Lambda^{\beta}_{\nu\sigma}\,\Lambda^{\alpha}_{\tau\beta}+\Lambda^{\beta}_{\sigma\tau}\,\Lambda^{\alpha}_{\nu\beta}+\Lambda^{\beta}_{\tau\nu}\,\Lambda^{\alpha}_{\sigma\beta}=0. \end{aligned}$$

En y joignant, d'après (10),

$$(25)\qquad \Lambda^{\alpha}_{ij}+\Lambda^{\alpha}_{ji}=0,$$

on a, en (24) et en (25), une extension manifeste des relations structurales fondamentales (2) et (1), de la Théorie des groupes finis et continus.

La Gravifique d'Einstein, première manière, repose sur la considération d'un espace incurvé mais non tordu; l'identité fondamentale de la théorie est l'identité de Bianchi, c'est-à-dire (23), réduite aux trois premiers termes puisque tous les Λ à trois indices sont nuls. La Gravifique nouvelle [2] est celle d'un espace tordu mais non incurvé; les B de Riemann, à quatre indices, s'évanouissent identiquement et l'identité (23) avec eux. Il ne reste que (24) et (25).

Les diverses Gravifiques et la Théorie des groupes apparaissent donc toujours comme étroitement liées par la base; elles ont exactement les mêmes droits à l'existence.

Quant à la diversité des Gravifiques, elle est analogue à la diversité des théories mécanistes. Henri Poincaré nous a suffisamment habitués à admettre l'existence d'une infinité d'images mécaniques dès que l'on peut en concevoir une; il semble bien que cette conception triomphe aujourd'hui de manière générale. Ainsi, dans un admirable Ouvrage publié en 1929, M. R.-H Fowler, de l'Université de Cambridge [6], écrit (p. 4) : « It is impossible to argue that the fact that a particular mechanism leads to a state of complete equilibrium in agreement with experimental facts is any evidence for the particular mechanism discussed. It is merely evidence that the laws of this mechanism have been correctly and consistently written down! Any other mechanism would give the same result. »

Des Gravifiques on peut certainement dire que ce sont des théories géométriques susceptibles d'être beaucoup plus variées que des théories mécaniques.

Notons encore que M. Fowler écrit encore dans l'Ouvrage cité (p. 7) : « Something more than success and logical rigour appears to be necessary for the acceptance of a model which is to account to our aesthetic satisfaction. »

C'est certainement en Gravifique que l'on rencontre le plus aisément ce qu'il faut accorder à notre satisfaction esthétique. Il serait difficile de trouver un raisonnement mathématique plus élégant que celui qui conduit des identités (5) aux identités (23) et (24).

Il nous a semblé fort intéressant de reprendre ce raisonnement au point de vue stokien; de plus, il semble que des études telles que celle de ce fascicule ne doivent jamais être faites qu'en liaison très explicite avec les Principes de l'Analyse.

Quant aux auteurs qui ont déjà donné les formules (23) et (24), en les établissant par des voies légèrement différentes de la précédente ou même plus générales, citons particulièrement MM. E. Cartan [7] (p. 382), H. Eyraud [8] (p. 21), R. Lagrange [9] (p. 22).

Le travail de M. H. Eyraud, publié en 1926, est actuellement remis très avantageusement en lumière par la nouvelle Théorie d'Einstein. En 1928 [10] (p. 161), nous écrivions : « Une Thèse récente, de M. H. Eyraud, introduit franchement la torsion en électromagnétisme, mais nous manquons du recul nécessaire pour apprécier la tentative à sa juste valeur. » Le recul a été favorable à M. Eyraud encore que sa théorie et celle d'Einstein soient assez dissemblables; mais, des deux côtés, il y a recours aux espaces à torsion.

Comme nous l'avons déjà reproduit en [11] (p. 7), M. E. Cartan [7] (p. 367) définit les composantes de la torsion et de la courbure par les formules

$$\Omega^i = [\pi^i]' - [\pi^\alpha \pi^i_\alpha] = \Lambda^i_{jk}\, [\pi^j\, \pi^k], \tag{26}$$
$$\Omega^i_k = [\pi^i_k]' - [\pi^\alpha_k \pi^i_\alpha] = B^i_{kml}[\pi^m\, \pi^l\,]. \tag{27}$$

Si l'on pose

$$\pi^i = -dx^i, \qquad \pi^i_j = \Gamma^i_{j\beta}\, dx^\beta,$$

en observant que les accents, dans (26) et (27), indiquent des dérivations extérieures, on obtient sans peine

$$\Gamma^i_{\alpha\beta} - \Gamma^i_{\beta\alpha} = \Lambda^i_{\alpha\beta}, \tag{28}$$

ce qui n'est autre chose que (10), et

$$B^i_{kml} = \frac{\partial}{\partial x^m}\Gamma^i_{kl} - \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{km} + \Gamma^\beta_{kl}\Gamma^i_{\beta m} - \Gamma^\beta_{km}\Gamma^i_{\beta l}, \tag{29}$$

ce qui coïncide avec (20). Rappelons que (29) est symétrique gauche en l, m, comme (28) en α, β. Plus exactement si, dans le second membre de (29), on intervertit l et m dans le premier et le troisième terme on obtient, aux signes près, le deuxième et le quatrième. Cette remarque sera bientôt utilisée.

3. Bifurcations et n-podes. — L'objet principal du paragraphe précédent a été l'obtention des formules (23) et (24). Il est grandement utile de ne pas les séparer pour juger, de suffisamment haut, les divers aspects de la Gravifique; répétons d'ailleurs qu'elles ne forment qu'une sorte de noyau dans des ensembles de formules du même type, de plus en plus chargées d'indices de dérivation, ensembles dont les procédés de formation ont été indiqués par M. Cartan [7] (p. 382).

Mais, ceci dit, il convient de préciser que, dans le présent fascicule, nous n'allons plus nous occuper que de la formule (24) à laquelle, bien entendu, (25) sera toujours associée. Il est même assez simple de reconstruire (24) isolément. Partons de (29) et formons

$$B^i_{kml} + B^i_{mlk} + B^i_{lkm}. \tag{30}$$

On trouve immédiatement que ce trinome peut être écrit

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\Lambda^i_{kl} + \frac{\partial}{\partial x^k}\Lambda^i_{lm} + \frac{\partial}{\partial x^l}\Lambda^i_{mk} + \Gamma^i_{\beta k}\Lambda^\beta_{lm} + \Gamma^i_{\beta l}\Lambda^\beta_{mk} + \Gamma^i_{\beta m}\Lambda^\beta_{kl}. \tag{31}$$

Si l'on introduit les dérivées

$$\Lambda^i_{klm} = \frac{\partial}{\partial x^m}\Lambda^i_{kl} - \Gamma^\alpha_{km}\Lambda^i_{\alpha l} - \Gamma^\alpha_{lm}\Lambda^i_{k\alpha} + \Gamma^i_{\alpha m}\Lambda^\alpha_{kl},$$

l'expression (31) devient

$$\Lambda^i_{klm} + \Lambda^i_{lmk} + \Lambda^i_{mkl} + \Lambda^\alpha_{kl}\Lambda^i_{m\alpha} + \Lambda^\alpha_{lm}\Lambda^i_{k\alpha} + \Lambda^\alpha_{mk}\Lambda^i_{l\alpha} \tag{32}$$

et l'égalité de (30) et de (32) n'est autre chose que (24).

On peut dire maintenant que la considération du trinome (30) conduit à des bifurcations des plus intéressantes. Il y a, au moins, trois grandes théories que l'on peut faire naître de l'évanouissement de ce trinome, selon la manière dont il s'évanouit.

En premier lieu, le trinome (30) est nul quand tous les Λ sont nuls. C'est le cas des espaces incurvés non tordus et celui de la Gravifique première manière.

En second lieu, le trinome (30) est nul quand les Γ, et par suite les Λ, sont de certaines constantes, quand notamment on a

$$\Gamma^s_{ij} = c^s_{ij} = -c^s_{ji}, \qquad \Lambda^s_{ij} = 2c^s_{ij}. \tag{33}$$

Alors les expressions (31) sont nulles si, de plus,

$$c^i_{\beta k}c^\beta_{lm} + c^i_{\beta l}c^\beta_{mk} + c_{\beta m}c^\beta_{kl} = 0. \tag{34}$$

En (33) et en (34), on reconnaît évidemment les relations (1) et (2), c'est-à-dire les relations structurales fondamentales de la Théorie des groupes finis et continus.

Les B de (30) ne sont pas nuls individuellement; ce sont des constantes telles que

$$B^i_{kml} = c^\beta_{kl}\, c^i_{\beta m} - c^\beta_{km}\, c^i_{\beta l} = c^i_{\beta k}\, c^\beta_{ml}. \tag{34*}$$

Dans l'espace ainsi constitué existe un déplacement par parallélisme défini par les équations (17), soit ici

$$dP^j + c^j_{\alpha i}\, P^\alpha\, dx^i = 0. \tag{35}$$

Si ce déplacement a lieu le long de la courbe d'équations différentielles

$$dx^i + \lambda^i\, dt = 0,$$

les λ^i étant des fonctions quelconques de t, les équations (35) deviennent

$$dP^j + c^j_{i\alpha}\, \lambda^i\, P^\alpha\, dt = 0. \tag{36}$$

Comme nous l'avons déjà montré, dans le fascicule XXXIII du *Mémorial*, et comme nous allons le revoir bientôt avec de nouveaux développements, ce système *linéaire* peut être considéré comme le système différentiel fondamental de la Théorie des groupes. C'est l'un des aspects du Problème de la *linéarisation* de cette Théorie. Nous avons d'abord considéré un espace auquel nous avons associé une certaine notion de parallélisme; une théorie peut en naître et se dérouler comme se déroule la géométrie euclidienne dès que le postulatum d'Euclide est admis.

En troisième lieu, le trinome (30) est nul quand les trois B le composant sont individuellement nuls. C'est pour réaliser une telle nullité que la nouvelle Théorie d'Einstein introduit l'ingénieuse notion des r-podes, qui sont des tétrapodes (*Vierbein*) dans l'espace-temps à quatre dimensions [2].

Un r pode est constitué par les r^2 fonctions

$$\begin{array}{cccc} {}^1h_1 & {}^1h_2 & \dots & {}^1h_r, \\ {}^2h_1 & {}^2h_2 & \dots & {}^2h_r, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ {}^rh_1 & {}^rh_2 & \dots & {}^rh_r, \end{array}$$

formant un déterminant h dont les mineurs *normés*, c'est-à-dire pourvus de leur signe et divisés par h, formeront, à leur tour, le tableau

$$\begin{array}{cccc} {}_1h^1 & {}_1h^2 & \dots & {}_1h^r, \\ {}_2h^1 & {}_2h^2 & \dots & {}_2h^r, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ {}_rh^1 & {}_rh^2 & \dots & h^r. \end{array}$$

On aura évidemment

$$(37) \qquad {}_sh^\lambda\, {}^sh_\nu = \delta^\lambda_\nu, \qquad {}^\lambda h_s\, {}_\nu h^s = \delta^\lambda_\nu,$$

avec δ^λ_ν nul, en général, mais égal à 1 si $\lambda = \nu$.

On pose, par définition, en dérivant (37),

$$(38) \qquad \Gamma^i_{kl} = {}_sh^i \frac{\partial}{\partial x^l}\, {}^sh_k = -\, {}^sh_k \frac{\partial}{\partial x^l}\, {}_sh^i.$$

On a ensuite

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\Gamma^i_{kl} = {}_sh^i \frac{\partial^2}{\partial x^l\, \partial x^m}\, {}^sh_k + \frac{\partial}{\partial x^m}\, {}_sh^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^l}\, {}^sh_k,$$

$$\Gamma^i_{\sigma m}\Gamma^\sigma_{kl} = -\, {}^sh_\sigma \frac{\partial}{\partial x^m}\, {}_sh^i \cdot {}_th^\sigma \frac{\partial}{\partial x^l}\, {}^th_k,$$

$$(39) \qquad \frac{\partial}{\partial x^m}\Gamma^i_{kl} + \Gamma^i_{\sigma m}\Gamma^\sigma_{kl} = {}_sh^i \frac{\partial^2}{\partial x^l\, \partial x^m}\, {}^sh_k.$$

Les termes qui semblent omis dans le second membre de (39) contiennent le facteur

$$(40) \qquad \frac{\partial}{\partial x^l}\, {}^sh_k - {}^sh_\sigma\, {}_th^\sigma \frac{\partial}{\partial x^l}\, {}^th_k,$$

qui est identiquement nul d'après la seconde relation (37).

Donc, d'après (29) et (39), *si* Γ^i_{kl} *est défini par* (38), *on a*

$$(41) \qquad B^i_{kml} = 0.$$

Avant d'aller plus loin, on peut faire deux remarques intéressantes.

On voit que (39) donne (41) en vertu de la permutabilité des dérivées partielles ordinaires, d'indices l et m, qui figurent dans le second membre de (39); or M. H. Weyl, dans le cas des espaces sans torsion, établit la nullité des $\Lambda^i_{\alpha\beta}$ en s'appuyant aussi sur une telle permutabilité [12].

On voit encore que si les trois méthodes employées ici, pour annuler le trinome (30), sont ingénieuses, elles n'en sont pas moins fort particulières; ce serait sans doute un grand sujet d'étude que de rechercher les espaces les plus généraux en lesquels ce trinome s'annule.

Dans cet ordre d'idées signalons un travail de M. G. Mattioli [34]. Il contient des formules remarquablement symétriques comparables à (31).

Poursuivons. *Les dérivées covariantes*, (12) et (14), *des* ${}^s h_\nu$ *et des* ${}_s h^\nu$ *sont identiquement nulles*. La vérification de cette assertion est immédiate et revient à constater la nullité d'expressions telles que (40). Si l'on pose

$$g_{\lambda\mu} = {}^s h_\lambda \, {}^s h_\mu, \qquad g^{\lambda\mu} = {}_s h^\lambda \, {}_s h^\mu, \tag{42}$$

les dérivées covariantes de ces nouvelles expressions seront encore identiquement nulles. Le déterminant g des $g_{\lambda\mu}$ est le carré du déterminant h.

Les g à deux indices ont le rôle connu quant à l'élévation et à l'abaissement des indices; on observera, de plus, qu'Einstein souligne souvent un indice avant de l'élever ou de l'abaisser. Ainsi

$$A_{\underline{\lambda}} = A^\lambda = g^{\lambda\mu} A_\mu, \qquad A^{\underline{\lambda}} = A_\lambda = g_{\lambda\mu} A^\mu.$$

Observons encore que

$$\frac{\partial h}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial h}{\partial ({}^i h_j)} \frac{\partial ({}^i h_j)}{\partial x^\sigma} = h ({}_i h^j) \frac{\partial ({}^i h_j)}{\partial x^\sigma} = h \Gamma^j_{j\sigma}.$$

Ceci permet, étant donnée la dérivée, conforme à (18),

$$\frac{\mathrm{D}T^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot}}{\mathrm{D}x^\tau} = \frac{\partial T^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot}}{\partial x^\tau} + \ldots + \Gamma^\sigma_{\alpha\tau} T^{\cdot\cdot\alpha}_{\cdot\cdot},$$

de contracter en σ et τ, de multiplier par h et, en posant $\mathfrak{T}$ pour hT, d'écrire

$$h \frac{\mathrm{D}T^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot}}{\mathrm{D}x^\sigma} = \frac{\partial \mathfrak{T}^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot}}{\partial x^\sigma} + \ldots + \Lambda^\sigma_{\alpha\sigma} \mathfrak{T}^{\cdot\cdot\alpha}_{\cdot\cdot}.$$

C'est là ce qu'Einstein écrit abréviativement

$$h T^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot;\sigma} = \mathfrak{T}^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot|\sigma} + \Lambda^\sigma_{\alpha\sigma} \mathfrak{T}^{\cdot\cdot\alpha}_{\cdot\cdot}. \tag{43}$$

On voit que la définition du symbole

$$\mathfrak{T}^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot|\sigma} \tag{44}$$

est bien simple; c'est avec lui que les équations gravifiques se condensent de manière extrêmement remarquable [2].

4. Quelques développements gravifiques. — Il n'entre pas, dans le plan de ce fascicule, d'aller jusqu'aux aboutissements physiques. Nous avons voulu revenir sur les espaces à torsion dont les principaux, pour l'heure actuelle, sont certainement les espaces de groupes et le précédent espace gravifique. Maintenant que nous connaissons la génération de cet espace et que nous sommes parvenu au symbole fondamental (44) y attaché, nous serons bref pour la suite.

La Gravifique première manière repose sur une contraction de l'identité de Bianchi; maintenant, nous allons contracter l'identité (24), abstraction faite, bien entendu, du premier trinome, ou, si l'on préfère, l'égalité obtenue en annulant (32). Cette contraction donne, en utilisant, comme en (43), le point-virgule pour indiquer la dérivation covariante,

$$\Lambda^{\alpha}_{kl;\alpha} + \varphi_{l;k} - \varphi_{k;l} - \varphi_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{kl} = 0, \qquad \varphi_{\alpha} = \Lambda^{\beta}_{\alpha\beta}. \tag{45}$$

Posons

$$\mathcal{V}^{\alpha}_{kl} = h(\Lambda^{\alpha}_{kl} + \varphi_l\delta^{\alpha}_k - \varphi_k\delta^{\alpha}_l). \tag{46}$$

Considérons l'égalité, du type (43),

$$h(\Lambda^{\alpha}_{kl;\alpha} + \varphi_{l;k} - \varphi_{k;l}) = \mathcal{V}^{\alpha}_{kl|\alpha} + h(\Lambda^{\alpha}_{kl} + \varphi_l\delta^{\alpha}_k - \varphi_k\delta^{\alpha}_l)\varphi_{\alpha}.$$

Les deux derniers termes de la dernière parenthèse se détruisent dans la sommation en α et l'équation contractée (45) s'écrit finalement

$$\mathcal{V}^{\alpha}_{kl|\alpha} = 0. \tag{47}$$

Ceci est l'analogue de l'équation (3) *de la Théorie des groupes.*

L'identité

$$\mathfrak{A}^{\cdot\cdot ik}_{\cdot\cdot|i|k} - \mathfrak{A}^{\cdot\cdot k}_{\cdot\cdot|k;i} = -(\mathfrak{A}^{\cdot\cdot ik}_{\cdot\cdot}\Lambda^{\sigma}_{ik})_{|\sigma}$$

est facile à démontrer en ayant recours à la définition (43) et en tenant compte de (41). Les démonstrations de ce type sont d'ailleurs courantes en Calcul différentiel absolu; on pourra encore consulter à ce sujet l'exposé de M. R. Lagrange [9] (p. 21). Ainsi

$$\mathcal{V}^{\alpha}_{k\underline{l}|l|\alpha} - \mathcal{V}^{\alpha}_{k\underline{l}|\alpha|l} = -(\mathcal{V}^{\alpha}_{k\underline{l}}\Lambda^{\tau}_{l\alpha})_{|\tau}$$

et, d'après (47), ceci peut s'écrire

$$(\mathcal{V}^{\alpha}_{k\underline{l}|l} - \mathcal{V}^{\sigma}_{k\underline{\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{|\alpha} = 0. \tag{48}$$

En première approximation, Einstein pose

$$\mathfrak{V}^{\alpha}_{k\underline{l}\,'l|\alpha} \equiv \mathfrak{V}^{\alpha}_{k\underline{l}\,|\alpha|l} = 0,$$

ce qui est bien nul d'après (47), puis écrit

$$\mathfrak{V}^{\alpha}_{k\underline{l}|l} = 0$$

pour loi gravitationnelle *de première approximation.*

Il considère ensuite l'expression

$$\overline{\mathfrak{V}}^{\alpha}_{kl} = \mathfrak{V}^{\alpha}_{kl} - \varepsilon h\left(\varphi_l \delta^{\alpha}_k - \varphi_k \delta^{\alpha}_l\right), \tag{49}$$

qui diffère de $\mathfrak{V}^{\alpha}_{kl}$ d'aussi peu qu'on veut, et remarque qu'en lui appliquant l'opération $|\alpha$ et en annulant, on retrouve les équations de Maxwell qui jouent alors le rôle d'équations électromagnétiques *de première approximation.*

Contentons-nous d'ajouter qu'on passe à la Théorie complète [2] en remplaçant, dans (48), les $\mathfrak{V}$ par les $\mathfrak{V}$ surlignés de (49).

On voit que toute la Théorie se déroule derrière l'égalité (47) et la définition (46).

Répétons qu'une forme plus développée de la même Théorie a été récemment donnée par Einstein lui-même [32], [46].

Nous n'avons d'ailleurs pas besoin d'aller plus loin que ces prémisses pour faire les plus importantes réflexions. D'abord, comme nous l'avons déjà dit au paragraphe précédent, de telles théories sont, de plus en plus manifestement, en nombre illimité; elles peuvent évidemment être aussi variées que les conceptions spatiales elles-mêmes. Une des prochaines formes de la Gravifique fera sans doute intervenir un espace dans lequel joueront, à la fois, courbure et torsion, comme dans les espaces de groupes.

Ensuite, toutes ces théories, à structure géométrique, font toujours retrouver, d'une manière ou d'une autre, les équations de Maxwell comme équations électromagnétiques *de première approximation;* c'est naturel, car ces équations ont été introduites au début des raisonnements, ici avec les déterminants symboliques (8) qui en condensent la forme. La seconde formule (6) est la formule maxwellienne par excellence.

On peut hautement affirmer, dans l'état actuel de la Science, qu'une

Physique à Électromagnétisme non maxwellien, à l'échelle ordinaire et en première approximation, est d'une constitution désormais aussi improbable qu'une Physique qui ne s'appuierait pas, en première approximation, sur quelque Géométrie simple, telle la Géométrie euclidienne, la Géométrie cayleyienne ou la Géométrie des Espaces de Riemann.

A l'appui de cette manière de voir, qui d'ailleurs n'a plus guère besoin d'être défendue à l'heure actuelle, citons un remarquable travail de F.-D. Murnaghan [13].

5. **Les coefficients de Ricci.** — La récente Théorie d'Einstein, dont nous venons d'exposer les prémisses, a été publiée en janvier 1929. Deux mois après, dans les mêmes *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin [3], M. Tullio Levi-Civita publiait un travail de même nature, promptement traduit en anglais, ayant mêmes conclusions que celui d'Einstein, mais ne faisant intervenir que l'espace de Riemann. Il n'y a là rien qui doive étonner; qu'une telle dualité soit possible prouve tout simplement que les espaces de Cartan, incurvés et tordus, peuvent être mis en correspondance avec des espaces sans torsion. La correspondance doit même pouvoir avoir lieu d'une infinité de manières.

La place nous manque pour analyser complètement l'exposé de M. Levi-Civita mais nous en dirons assez pour montrer que la théorie des coefficients de Ricci, qui entre alors en jeu, assure aisément la liaison précédente ainsi que d'autres liaisons avec la Théorie des groupes. Nous empruntons à M. Levi-Civita non seulement des résultats exposés dans sa Note de Berlin mais encore dans son *Calcolo differenziale assoluto* [14]. Ce dernier Ouvrage a été également traduit en anglais et en allemand.

Soit un n-uple de congruences orthogonales. Par chaque point P de l'espace V_n passent n lignes, deux à deux orthogonales, numérotées par les indices inférieurs dans le tableau

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^n, \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^n, \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot, \\ \lambda_n^1 & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^n. \end{array}$$

Dans une même ligne de ce tableau on a les paramètres directeurs d'une même ligne de l'n-uple. Soit maintenant le tableau de *moments*

$$\begin{array}{cccc} \lambda_{1|1} & \lambda_{1|2} & \dots & \lambda_{1|n}, \\ \lambda_{2|1} & \lambda_{2|2} & \dots & \lambda_{2|n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ \lambda_{n|1} & \lambda_{n|2} & \dots & \lambda_{n|n}. \end{array}$$

La correspondance entre les deux tableaux est telle que

$$(50) \qquad \lambda_{h|i}\lambda^i_k = \delta^k_h, \qquad \lambda_{h|i}\lambda^j_h = \delta^j_i.$$

On voit qu'ici la barre verticale, entre indices inférieurs, n'a pas du tout la même signification qu'en (44). Si l'on pose

$$g_{ik} = \lambda_{h|i}\lambda_{h|k}, \qquad g^{ik} = \lambda^i_h \lambda^k_h,$$

on a aisément

$$g^j_k = g_{ik}g^{ij} = \delta^j_k,$$

$$g^{ij}\lambda_{h|i} = \lambda^j_h, \qquad g_{ij}\lambda^j_h = \lambda_{h|i}.$$

Ceci permet la constitution d'une métrique riemannienne pour laquelle

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k.$$

Il semble bien qu'il n'en faille pas davantage pour montrer que, des tableaux ci-dessus relatifs à notre n-uple de congruences, on pourra tirer tout ce que l'on tire des n-podes d'Einstein. Poursuivons cependant jusqu'à la reproduction de certaines formules qui entraîneront ultérieurement des comparaisons intéressantes.

Du n-èdre attaché à P considérons particulièrement les directions λ_h et λ_k; elles sont orthogonales et donnent, d'après (50),

$$(51) \qquad \cos\widehat{\lambda_h\,\lambda_k} = \lambda_{h|i}\lambda^i_k = \delta^k_h.$$

Imaginons que λ_h soit transportée en P', infiniment voisin de P, par le simple jeu de la variation des coordonnées; il y aura, pour λ_h, transport *local* de symbole δ'.

D'autre part, λ_k sera transporté en P' par *parallélisme* de symbole δ^*.

Quelle est alors la variation δ de l'expression (51)? On aura

$$p_{hk}\,ds = \delta\cos\widehat{\lambda_h\,\lambda_k} = \lambda^i_k\,\delta'\lambda_{h|i} + \lambda_{h|i}\,\delta^*\lambda^i_k$$

et, d'après (17),

$$p_{hk}\,ds = \lambda_k^i\left(\frac{\partial\lambda_{h|i}}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^l\,\lambda_{h|l}\right)\delta x^j = \lambda_k^i\,\lambda_{h|ij}\,\delta x^j. \tag{52}$$

Soit maintenant le cas particulièrement remarquable où la direction δx^j coïncide avec celle d'une arête du n-èdre; prenons, par exemple, $\delta x^j = \lambda_l^j\,ds$. On aura, d'après Ricci, les *coefficients de rotation* du n-èdre.

$$\gamma_{hkl} = \lambda_{h|ij}\,\lambda_k^i\,\lambda_l^j. \tag{53}$$

Observons que, dans (52), le Γ à trois indices est le symbole à accolades de Christoffel, lequel ne change pas quand on intervertit i et j.

Dans le cas de $n = 3$, la théorie de Ricci redonne sans peine celle du *trièdre* mobile qui se rattache aisément, comme nous l'avons montré, dans le fascicule XXXIII du *Mémorial*, à la théorie des groupes paramétriques et aux équations de Maurer-Cartan. Ceci nous conduit encore à rappeler que la théorie du trièdre, grâce aux efforts des frères François et Eugène Cosserat, est aussi devenue un puissant instrument quant à la synthèse des théories physiques.

C'est dans le même ordre d'idées que nous pouvons unir la Gravifique dans l'espace de Riemann à la Gravifique dans l'espace de Cartan. Partout nous n'avons que d'admirables instruments de synthèse et il faut savoir se placer assez haut pour les voir jouer harmonieusement; insister sur des oppositions de détail paraît n'être qu'un témoignage d'incompréhension.

Revenons aux expressions (53). Si l'on a

$$W = U_i V^i, \qquad V^i = g^{ik} V_k,$$

l'on a également, par dérivation covariante,

$$W_l = U_{i|l} V^i + U_i g^{ik} V_{k|l} = U_{i|l} V^i + U^i V_{i|l}. \tag{54}$$

Appliquons cette formule à (50); il viendra

$$\lambda_{h|ij}\,\lambda_k^i + \lambda_h^i\,\lambda_{k|ij} = 0.$$

Si l'on multiplie par λ_l^j, on a

$$\gamma_{hkl} + \gamma_{khl} = 0 \tag{55}$$

Notons encore la non-permutabilité des dérivations faites, en P, dans les directions des diverses arêtes du n-èdre. On a

$$\frac{\partial f}{\partial s_h} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds_h} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\lambda_h^i = f_i\lambda_h^i = f_i g^{ni}\lambda_{h|n} = f^n\lambda_{h|n}.$$

Par dérivation covariante et d'après (54)

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial s_h} = f^i\lambda_{h|ij} + f_{ij}\lambda_h^i.$$

Mais

$$\lambda_h^i\frac{\partial f}{\partial s_h} = f^n\lambda_{h|n}\lambda_h^i = f^n\delta_n^i = f^i.$$

Portant ce f^i dans l'équation précédente multipliée par λ_k^j, il vient

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h} = \gamma_{hlk}\frac{\partial f}{\partial s_l} + \lambda_h^i\lambda_k^j f_{ij},$$

d'où finalement

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h} - \frac{\partial}{\partial s_h}\frac{\partial f}{\partial s_k} = (\gamma_{hlk} - \gamma_{klh})\frac{\partial f}{\partial s_l}. \tag{56}$$

Signalons encore la formule

$$\lambda_{i|\nu\rho} - \lambda_{i|\rho\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\rho}\lambda_{i|\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\lambda_{i|\rho}, \tag{57}$$

analogue à (9) quand l'expression (10) est nulle. Puis (57) donne

$$\gamma_{ikl} - \gamma_{ilk} = \lambda_k^\nu\lambda_l^\rho\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\lambda_{i|\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\lambda_{i|\rho}\right).$$

La différence

$$\gamma_{i|\nu\rho\sigma} - \lambda_{i|\nu\sigma\rho}$$

se transforme comme (19) et met alors en évidence les B, à quatre indices, de Riemann. On peut d'ailleurs poser

$$\gamma_{ij,hk} = \frac{d\gamma_{ijh}}{ds_k} - \frac{d\gamma_{ijk}}{ds_h} + \gamma_{ijl}(\gamma_{lhk} - \gamma_{lkh}) + \gamma_{lik}\gamma_{ljh} - \gamma_{lih}\gamma_{ljk}$$

et constater que

$$\gamma_{ij,hk} = -\gamma_{ij,kh}, \qquad \gamma_{ij,hk} = -\gamma_{ji,hk}, \qquad \gamma_{ij,hk} = \gamma_{hk,ij},$$
$$\gamma_{ij,hk} + \gamma_{ih,kj} + \gamma_{ik,jh} = 0,$$

ces dernières relations étant comparables à celles données par les B de seconde espèce.

Bref, la Théorie de Ricci, par ses formules fondamentales, rappelle, à la fois, la Théorie des groupes et celle des Espaces de Riemann. Mais la Théorie des groupes, comme l'ont montré Cartan [4] et Schouten [15], peut être une théorie de variétés à torsion; il peut donc y avoir, dans la Théorie des coefficients de Ricci, tout ce qu'il y a dans celle des Espaces de Riemann généralisés jusqu'à l'apparition de la torsion.

6. **De certains systèmes différentiels linéaires et homogènes.** — Nous voulons maintenant nous rapprocher plus particulièrement de la Théorie des Groupes et ce, en étudiant les systèmes différentiels (36). Nous avons vu comment ces systèmes naissaient, avec la notion de parallélisme, dans des espaces de groupes. Mais nous avons montré aussi, tout au début de notre fascicule XXXIII du *Mémorial*, comment ils pouvaient naître de considérations de simplicité.

Le système

$$\frac{d\theta^s}{dt} + C^s_k\,\theta^k = 0 \qquad (s, k = 1, 2, \ldots, r),$$

où les C^s_k sont des fonctions quelconques de t, n'est pas maniable en général. Essayons d'en diminuer la généralité en ne faisant dépendre les r^2 coefficients, C^s_k que de r fonctions λ^j. Pour cela, il n'y a pas de manière plus simple, plus intuitive que celle qui consiste à poser linéairement

$$C^s_k = c^s_{jk}\,\lambda^j,$$

les c à trois indices étant des constantes. *La difficulté est diminuée par linéarisation.* On a ainsi le système

$$\frac{d\theta^s}{dt} + c^s_{jk}\,\lambda^j\,\theta^k = 0, \tag{58}$$

qui n'est autre que (36), aux notations près.

Nous allons voir maintenant, chose essentielle, que la recherche de certaines nouvelles conditions de simplicité à adjoindre au système (58) oblige les c à trois indices à satisfaire aux relations (1) et (2).

Soit

$$f(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r, t)$$

une intégrale de (58), c'est-à-dire une expression qui reste constante en vertu de ce système. On aura

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \theta^s}\frac{d\theta^s}{dt} = 0$$

et, d'après (58),

$$\frac{\partial f}{\partial t} - c_{jk}^s \lambda^j \theta^k \frac{\partial f}{\partial \theta^s} = \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda^j \mathrm{E}_j(f) = 0.$$

On voit que nous introduisons l'opérateur

(59) $$\mathrm{E}_j(f) = - c_{jk}^s \theta^k \frac{\partial f}{\partial \theta^s}.$$

Étudions ses propriétés, notamment ses propriétés de permutabilité. On a

$$\mathrm{E}_j \mathrm{E}_i = c_{jk}^s \theta^k \frac{\partial}{\partial \theta^s}\left(c_{il}^t \theta^l \frac{\partial}{\partial \theta^t}\right) = c_{jk}^s c_{il}^t \theta^k \left(\frac{\partial \theta^l}{\partial \theta^s}\frac{\partial}{\partial \theta^t} + \theta^l \frac{\partial^2}{\partial \theta^s \partial \theta^t}\right),$$

(60) $$(\mathrm{E}_j \mathrm{E}_i) = \mathrm{E}_j \mathrm{E}_i - \mathrm{E}_i \mathrm{E}_j = (c_{jk}^s c_{is}^t - c_{ik}^s c_{js}^t)\theta^k \frac{\partial}{\partial \theta^t}.$$

Posons

(61) $$\mathrm{C}_{ijk}^t = c_{ij}^s c_{ks}^t + c_{jk}^s c_{is}^t + c_{ki}^s c_{js}^t,$$

(62) $$\gamma_{ij}^s = c_{ij}^s + c_{ji}^s.$$

Alors (60) peut s'écrire

$$(\mathrm{E}_j \mathrm{E}_i) = (\mathrm{C}_{ijk}^t + c_{ji}^s c_{ks}^t - \gamma_{ij}^s c_{ks}^t - \gamma_{ik}^s c_{js}^t)\theta^k \frac{\partial}{\partial \theta^t}.$$

Il est maintenant bien remarquable que cette dernière expression prenne une simplicité toute particulière si les expressions (61) et (62) sont toujours nulles. On a, dans ces conditions, d'après (59),

(63) $$(\mathrm{E}_j \mathrm{E}_i) = c_{ji}^k c_{sk}^t \theta^s \frac{\partial}{\partial \theta^t} = c_{ji}^s \mathrm{E}_s.$$

Il est évidemment fort possible d'étudier le système (58) quand (61) et (62) ne sont pas nuls mais cette nullité apparaît comme une circonstance simple attachée au système et qu'on peut mettre en évidence sans préliminaires. Ceci n'empêche pas que les résultats de ce paragraphe peuvent être comparés de manière intéressante avec ceux des paragraphes précédents. Ainsi, en rapprochant (60) et (63) de (34*)

$$(\mathrm{E}_j \mathrm{E}_i) = c_{ji}^s \mathrm{E}_s = \mathrm{B}_{kij}^t \theta^k \frac{\partial}{\partial \theta^t}.$$

La relation contractée

$$(3) \qquad c^l_{is}\, c^s_{jk} = 0$$

assure au système (58) *l'intégrale*

$$c^i_{is}\, \theta^s = \text{const.}$$

La vérification est immédiate. Dans le même ordre d'idées, avec r constantes nouvelles g_j et en posant

$$g_j\, \lambda^j\, dt = du,$$

le système (58) peut s'écrire

$$(64) \qquad \lambda^j\, \mathrm{A}^s_j = 0,$$

avec

$$(65) \qquad \mathrm{A}^s_j = g_j \frac{d\theta^s}{du} + c^s_{jk}\, \theta^k.$$

Ceci donne

$$c^l_{is}\, \mathrm{A}^s_j = 0.$$

Le déterminant des A^s_j est nul.

Il est à remarquer qu'au système (58), de r équations et r fonctions inconnues, on peut faire correspondre le système (65), de r^2 équations, qui, en revanche, est *à coefficients constants*.

Si, entre ces r^2 équations, on pouvait éliminer les r fonctions θ^s, on trouverait évidemment des relations entre les A^s_j lesquels sont liés, en (64), aux λ^j. Il y aura là, peut-être, un moyen de voir comment les systèmes (58) se rattachent aux systèmes intégrables par quadratures. Mais l'élimination dont il s'agit exige à la fois des considérations algébriques et des considérations différentielles ou intégrales; nous nous bornons à l'indiquer comme sujet d'étude.

7. Systèmes non homogènes. — Le fil des analogies simples conduit tout naturellement à adjoindre, à (58), le nouveau système

$$(66) \qquad \frac{d\theta^{s\rho}}{dt} + c^s_{jk}\, \lambda^j\, \theta^{k\rho} = \frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\rho}.$$

Celui-ci n'est qu'un assemblage de r systèmes (58) pourvus de seconds membres et, quant à ceux-ci, leur choix est encore vraisemblablement aussi simple que possible en imaginant que les fonctions λ^r contiennent, outre t, des constantes λ_ρ en nombre r. Ici, comme pour (58), nous commencerons par étudier le système (66) sans faire aucune hypothèse sur les constantes c_{jk}^s.

Dès lors, en raisonnant comme dans le fascicule XXXIII du *Mémorial* (Chap. III, § 2) et en posant

$$(67)\qquad V^{s\rho\tau} = \frac{\partial\theta^{s\rho}}{\partial\lambda_\tau} - \frac{\partial\theta^{s\tau}}{\partial\lambda_\rho} + c_{jk}^s\,\theta^{k\rho}\,\theta^{j\tau},$$

il vient aisément [16]

$$(68)\qquad \frac{\partial^2\lambda^s}{\partial\lambda_\rho\,\partial\lambda_\tau} - \frac{\partial^2\lambda^s}{\partial\lambda_\tau\,\partial\lambda_\rho} = \frac{\partial}{\partial t}V^{s\rho\tau} + c_{jk}^s\,\lambda^j\,V^{k\rho\tau} - \gamma_{jk}^s\,\theta^{j\tau}\,\frac{\partial\theta^{k\rho}}{\partial t}$$
$$- \lambda^m\,\theta^{l\rho}\,\theta^{n\tau}(C_{lmn}^s + \gamma_{mj}^s\,c_{nl}^j + \gamma_{ml}^j\,c_{jn}^s).$$

Là encore il est de toute évidence qu'il y aura une théorie particulièrement simple des systèmes différentiels du type (66), par rapport aux constantes λ_ρ introduites dans les λ^i, lorsque les expressions (61) et (62) seront nulles.

La formule précédente prendra même une forme comparable à la formule (56) de la théorie des coefficients de Ricci. Toutefois, ici, les considérations d'analyticité ordinaires rendent identiquement nul le premier membre de (68) si bien qu'avec la nullité des expressions (61) et (62), cette équation (68) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial t}V^{s\rho\tau} + c_{jk}^s\,\lambda^j\,V^{k\rho\tau} = 0,$$

ce qui reproduit la forme de (58).

Nous avons montré (*loc. cit.*) que les $\theta^{s\rho}$, qui intègrent le système (66) et s'annulent pour $t = 0$, rendent également nulles les expressions (67). De là l'intégration du système de Maurer-Cartan

$$\frac{\partial\theta^{s\rho}}{\partial\lambda_\tau} - \frac{\partial\theta^{s\tau}}{\partial\lambda_\rho} = c_{kj}^s\,\theta^{k\rho}\,\theta^{j\tau}.$$

Ce dernier système ne peut plus exister si les expressions (61) et (62) ne sont pas toujours nulles. La vérification est facile [11] (p. 15-16). Mais l'analyse du présent paragraphe explique le fait d'une manière beaucoup plus profonde à partir d'un système différentiel (66) qui a un sens quels que soient les coefficients constants c_{jk}^s.

D'une manière générale, nous parvenons à une question d'Analyse aussi importante que difficile, celle des systèmes différentiels construits avec des constantes et qui ont des propriétés extrêmement différentes suivant qu'entre ces constantes existent ou non certaines relations de nature arithmétique. On ne sait encore que peu de chose sur un tel sujet.

CHAPITRE II.

MÉCANIQUES ET NON-COMMUTATIVITÉ.

1. **Préliminaires.** — Revenons aux identités fondamentales et notamment à la première égalité (5) du chapitre précédent. Une telle identité prend diverses formes en vertu de

$$d(XY) = X\,dY + Y\,dX. \tag{1}$$

Or (1) peut s'écrire

$$\frac{d}{dX}(XY) - X\frac{d}{dX}Y = Y,$$

ce qui démontre l'existence de symboles, q et p, tels que

$$qp - pq = \frac{ih}{2\pi}\,1. \tag{2}$$

Le facteur de Planck s'introduit simplement, p et q pouvant être affectés de coefficients constants. Le principal secret des mécaniques nouvelles est dans (2), ce qui a été mis en évidence par M. H. Weyl [17].

Les déterminants constituent un instrument essentiel quant à la transformation de nos identités fondamentales. C'est pourquoi la plupart des formules du Calcul différentiel absolu conservent une symétrie de déterminant. Des considérations de même nature peuvent naître à propos de (2).

Soient deux déterminants de même ordre

$$x = |a_{hi}|, \qquad y = |b_{jk}|.$$

On a

$$xy = |a_{hm}\,b_{jm}|, \qquad yx = |b_{jm}\,a_{hm}|, \qquad xy = yx,$$

La multiplication des déterminants est commutative.

Soient maintenant des *matrices* [18]

$$(3) \qquad x = (a_{hi}), \qquad y = (b_{jk}),$$

avec lesquelles on a

$$xy = (a_{hm}\, b_{mk}), \qquad yx = (b_{jm}\, a_{mi}) \equiv (b_{hm}\, a_{mk}).$$

Ici, il n'y a aucune raison générale pour que yx soit égal à xy. Il est tout indiqué d'essayer de vérifier (2) avec les matrices (3).

2. **Non-commutativité et crochets de Poisson.** — Avec les variables d'action J et les variables d'angle νt de la théorie classique, les coordonnées sont de la forme [19]

$$x = \Sigma x(\alpha_1, \ldots, \alpha_s;\ J_1, \ldots, J_s)\, e^{2i\pi(\alpha_1\nu_1+\ldots+\alpha_s\nu_s)t},$$

les sommations ayant lieu par rapport aux *entiers* α_i. Cela peut s'écrire, en abrégé,

$$(4) \qquad x = x(\alpha, J)\, e^{2i\pi(\alpha\nu)t}.$$

Dans la Théorie quantique, x est un ensemble de termes

$$x(n, n-\alpha)\, e^{2i\pi\nu(n, n-\alpha)t},$$

tel que l'on ait (Principe de correspondance), pour n élevé,

$$x(n, n-\alpha) \rightarrow x(\alpha, J).$$

Soit maintenant la matrice $xy - yx$ dont l'un des éléments est

$$\sum_k \begin{vmatrix} x(nk) & y(nk) \\ x(km) & y(km) \end{vmatrix} e^{2i\pi\nu(nm)t}.$$

Pour de grandes valeurs de m et n, Dirac écrit ceci sous une forme équivalente à

$$\sum_{\alpha+\beta=n-m}\sum \begin{vmatrix} x(n, n-\alpha) & y(n, n-\beta) \\ x(n-\beta, n-\beta-\alpha) & y(n-\alpha, n-\alpha-\beta) \end{vmatrix} e^{2i\pi\nu(n, n-\alpha-\beta)t}.$$

Pour n très grand, avec Δ dû à $n_r \rightarrow n_r + \tau_r$,

$$\frac{\Delta}{h} x(n, n-\alpha) \rightarrow \sum \tau_r \frac{\delta}{\delta J_r} x(\alpha, J).$$

Dans ces conditions si, dans le déterminant de l'expression précédente, on retranche la première ligne de la seconde, cette expression devient

$$-\sum\sum\sum h \begin{vmatrix} \alpha_r x(\alpha, J) & \beta_r y(\beta, J) \\ \frac{\delta}{\delta J_r} x(\alpha, J) & \frac{\delta}{\delta J_r} y(\beta, J) \end{vmatrix} e^{2i\pi[(\alpha\nu)t+(\beta\nu)t]}.$$

Soit maintenant $w_r = \nu_r t + \varepsilon_r$ avec ε_r constante de phase. On a aisément

$$\frac{\delta}{\delta w_r}[y(\beta, J)\, e^{2i\pi(\beta\nu)t}] = 2i\pi\beta_r y(\beta, J)\, e^{2i\pi(\beta\nu)t}.$$

Alors la somme triple précédente prend une forme telle qu'à toute la matrice correspond l'expression

$$xy - yx = \frac{ih}{2\pi}\sum \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta w_r} & \frac{\delta y}{\delta w_r} \\ \frac{\delta x}{\delta J_r} & \frac{\delta y}{\delta J_r} \end{vmatrix} = \frac{ih}{2\pi}[xy]. \tag{5}$$

Ainsi, *aux crochets de Poisson, classiquement formés avec les coordonnées* (4), *correspond, dans la théorie quantique, un calcul de matrices à multiplication non commutative.*

Nous construisons les dérivées partielles avec des δ et écrivons des *crochets* plutôt que des *parenthèses* de Poisson pour être d'accord avec les notations de Birtwistle [19].

Les considérations précédentes sont dues à Dirac et à Heisenberg; elles ont été généralisés, en [20], avec des extensions des crochets de Poisson.

3. Double théorème fondamental. — Les équations canoniques d'Hamilton et Jacobi jouent un rôle essentiel dans les Mécaniques nouvelles. Nous les rattachons, comme tous les fondements essentiels des théories physiques, à une identité (7). Ceci, par un double théorème dont les deux parties ont été étudiées à assez grand intervalle [21], [22], [11].

a. Soient la formule de Green

$$\int \alpha_i \Phi_i \, d\sigma = \int \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} d\tau, \qquad \operatorname{div}\Phi = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

et l'identité

$$\int_{W_{n-1}} X_1\, dX_2 \ldots dX_n = \int_{W_n} dX_1\, dX_2 \ldots dX_n. \tag{7}$$

On passe de (6) *à* (7) *par la transformation*

$$X_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

si

$$X(f) = \frac{\Phi_i}{\operatorname{div}\Phi}\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad \text{avec} \qquad f = X_2, X_3, \ldots, X_n$$

et si

$$X(U_1) = 1, \qquad \text{avec} \qquad U_1 = \log X_1.$$

b. Ceci permet la construction du multiplicateur de Jacobi

$$D = \frac{\partial(U_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

avec lequel

$$X(f) = \frac{1}{D}\frac{\partial(f, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

et

$$Y(f) = \frac{1}{D}\left|\begin{array}{cccc|c} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} & 0 \\ \hline & & & & F_1 \\ & & D & & F_2 \\ & & & & \cdots \\ & & & & F_n \end{array}\right|$$

donnent

$$\text{(8)} \qquad X[Y(\;)] = Y[X(\;)].$$

Les F *sont des fonctions arbitraires de* $X_2, \ldots, X_n$, *non de* U_1.

Sur ce sujet, outre les références déjà indiquées on peut consulter deux Mémoires récents, l'un de M. Pfeiffer [35], l'autre de l'auteur [36].

C'est toujours l'évaluation d'une étendue W qui, par transformation très directe, donne des formules à significations physiques. Quant à la permutabilité (8), ce peut être le germe de beaucoup de non-permutabilités.

On peut rattacher plusieurs théories actuelles à l'équation

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{div}\Phi = \frac{\partial\Phi_i}{\partial x_i} = 0.$$

M. Bateman [37] voit même dans l'équation (9) l'origine de toutes les équations fondamentales de la Physique.

Ainsi avec des variables p_i, q_i, réparties en deux séries, (9) peut s'écrire

$$\text{(10)} \qquad \frac{\partial P_i}{\partial p_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} = 0,$$

d'où, aussi naturellement que possible,

$$P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad dH = Q_i\,dp_i - P_i\,dq_i = 0,$$

si le mouvement doit s'effectuer sur la variété $H = \text{const.}$ Alors on est encore conduit à poser, toujours aussi simplement que possible,

$$P_i = \frac{dp_i}{dt}, \qquad Q_i = \frac{dq_i}{dt},$$

d'où les équations canoniques

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{11}$$

On pourrait imaginer d'autres choses à partir de (9). En posant, par exemple,

$$\Phi_i = \frac{\partial V}{\partial x_i},$$

on aurait une équation de Laplace à n variables qui donnerait, à la mécanique en p, q, l'aspect d'une extension de la théorie du potentiel newtonien. Puis cette équation de Laplace elle-même pourrait prendre l'aspect d'une généralisation de l'équation des ondes et la mécanique prendrait un caractère ondulatoire. *Voir*, plus loin, Chapitre III.

En (10) nous avons aussi le fameux théorème de Liouville

$$\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = 0,$$

fondamental en Mécanique statistique [6].

Si x est une fonction des p et des q,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial x}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = [x, H].$$

Donc, d'après (5),

$$\frac{ih}{2\pi}\dot{x} = xH - Hx.$$

Ce sont les équations de Heisenberg [19]. Comparer avec [17] (page 28).

Prenons maintenant l'identité de Poisson-Jacobi

$$[\varphi_l(\varphi_m, \varphi_n)] + [\varphi_m(\varphi_n, \varphi_l)] + [\varphi_n(\varphi_l, \varphi_m)] = 0 \tag{12}$$

en vertu de laquelle $[\varphi_m, \varphi_n]$ est une intégrale de (11) s'il en est ainsi pour φ_m et φ_n.

Lorsqu'on a *linéairement*

$$[\varphi_m, \varphi_n] = c^s_{mn}\,\varphi_s,$$

on conclut, de là et de (12),

$$(13)\qquad \begin{cases} c^s_{mn} + c^s_{nm} = 0, \\ c^s_{lm}\,c^\alpha_{ns} + c^s_{mn}\,c^\alpha_{ls} + c^s_{nl}\,c^\alpha_{ms} = 0. \end{cases}$$

Ce sont les relations structurales fondamentales de la Théorie des groupes finis et continus. On voit que ces relations (13) sont aussi bien liées avec les mécaniques qu'avec les gravifiques.

Parmi les mécaniques à équations canoniques, la plus importante est vraisemblablement la Mécanique statistique [6]. Dans l'espace à N dimensions, le produit $dp_1 \ldots dq_N$ mesure une étendue cellullaire de *poids* $K\,dp_1 \ldots dq_N$. S'il y a M systèmes en présence, la cellule a pour étendue

$$(dp_1 \ldots dq_s)_1 \ldots (dp_1 \ldots dq_s)_M.$$

A chacune des parenthèses de ce produit, on peut faire correspondre un facteur *énergétique*

$$K_1\,e^{-2/E_1}, \quad \ldots, \quad K_M\,e^{-2/E_M}$$

et imaginer que le produit de ces facteurs soit aussi un K si

$$E_1 + \ldots + E_M = \text{const.}$$

Ainsi l'espace *en phase* se complique, s'étend par factorisation, alors que les énergies E_i s'allient *par addition*. Cet aperçu, si rudimentaire soit-il, fait apparaître le rôle fondamental de l'exponentielle en Mécanique statistique. En Physique, l'exponentielle apparaît pour beaucoup d'autres raisons, par exemple par l'équation

$$dA = kA\,dt,$$

qui régit une foule de phénomènes simples [23]. Elle est essentielle pour la représentation des phénomènes périodiques mais les choses ne peuvent aller indéfiniment ainsi rien qu'avec l'exponentielle *ordinaire*. Les groupes introduisent des transformations infinitésimales X et des transformations finies correspondantes e^X. C'est là une exponentielle *symbolique*, à multiplication non commutative.

4. L'exponentielle symbolique. — Les premières études tant soit peu profondes sur les exponentielles symboliques précédentes semblent remonter à J.-E. Campbell qui, en 1897, leur consacra deux intéressants Mémoires [24], [25]. On est étonné lorsqu'on parcourt ceux-ci, d'y trouver un langage et des préoccupations ressemblant étrangement au langage et aux préoccupations qui se rencontrent dans les Ouvrages consacrés de nos jours à la microphysique. Campbell eut d'ailleurs le beau rôle d'inspirer Henri Poincaré.

Les célèbres Mémoires de ce dernier, sur les groupes [26], font immédiatement usage du symbolisme exponentiel précédent. Henri Poincaré rend à Campbell l'hommage qui lui est dû; il ne faut même pas oublier que l'exponentielle symbolique est employée par Lie et ses disciples immédiats mais elle est alors seule à intervenir. Poincaré, dont nous allons bientôt exposer les idées fondamentales, apporte ici son génial esprit de généralisation; nous le comprendrons mieux en résumant d'abord l'analyse beaucoup plus élémentaire du premier Mémoire de Campbell [24], Mémoire dont nous conserverons les notations autant que possible.

J.-E. Campbell considère d'abord deux opérateurs, x et y, qui sont associatifs, distributifs mais *non commutatifs*. En conséquence, il écrit

$$\begin{aligned} y_1 &= yx - xy, \\ y_2 &= y_1 x - xy_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_r &= y_{r-1} x - xy_{r-1}. \end{aligned}$$

Il écrit également

$$[yx^r] = yx^r + xy\,x^{r-1} + x^2y\,x^{r-2} + \ldots + x^r y$$

et définit des constantes a_i telles que

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = \frac{1}{12}, \qquad a_3 = 0, \qquad a_4 = -\frac{1}{720}, \qquad \ldots,$$

$$(m+1)a_m = a_{m-1} - (a_1\,a_{m-1} + a_2\,a_{m-2} + \ldots + a_{m-1}\,a_1).$$

Tous les a d'indices impairs sont nuls, sauf a_1. On a alors

$$\frac{yx^r}{r!} = \left[\frac{yx^r}{(r+1)!}\right] + a_1\left[\frac{y_1\,x^{r-1}}{r!}\right] + \ldots + a_{r-1}\left[\frac{y_{r-1}\,x}{2!}\right] + a_r y_r.$$

Cette formule se vérifie facilement pour $r = 1, 2, 3\ldots$; la démonstration générale se fait par récurrence, en passant de r à $r+1$.

Aucune difficulté. Soit, de plus,

$$y = y.$$

$$yx = \frac{1}{2}[yx] + a_1 y_1,$$

$$y\frac{x^2}{2!} = \left[y\frac{x^2}{3!}\right] + a_1\left[y_1\frac{x}{2!}\right] + a_2 y_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on pose

$$z = y + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots,$$

l'addition des formules précédentes donne

$$ye^x = z + \left[z\frac{x}{2!}\right] + \left[z\frac{x^2}{3!}\right] + \ldots.$$

Si μ est une constante telle que l'on puisse négliger son carré,

$$(x + \mu z)^r = x^r + \mu[zx^{r-1}],$$

$$(1 + \mu y)e^x = 1 + \frac{x + \mu z}{1!} + \frac{(x + \mu z)^2}{2!} + \ldots = e^{x+\mu z}. \tag{14}$$

On pourrait écrire, avec la même approximation,

$$e^{\mu y} e^x = e^{x+\mu z}.$$

Nous verrons plus loin que Poincaré ne dédaigne nullement ces formules approchées et qu'il cherche, de manière très ingénieuse, comment on peut les maintenir quand μ cesse d'être une constante très petite.

Soient maintenant

$$X = \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad X' = \xi_i(x')\frac{\partial}{\partial x'_i}.$$

En abrégé, $\xi_i(x)$ signifie $\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Remarque analogue avec les x'.

De même

$$Y = \eta_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y' = \eta_i(x')\frac{\partial}{\partial x'_i} = Y'(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Nous avons aussi

$$f(x') = f(x) + \frac{t}{1!}X(f) + \frac{t^2}{2!}X^2(f) + \ldots = e^{tX},$$

$$f(x) = f'(x') - \frac{t}{1!}X'(f') + \frac{t^2}{2!}X'^2(f') - \ldots = e^{-tX'}.$$

D'où

$$x_i = e^{-tX'(x'_i)},$$

(15) $$Y'(x_i) = Y' e^{-tX'(x'_i)} = e^{tX} Y e^{-tX(x_i)}.$$

Ceci posé, le point principal du premier Mémoire de Campbell consiste à établir que l'on a aussi

(16) $$Y'(x_i) = e^{-tY_*},$$

l'exponentielle se développant en série comme les précédentes en observant toutefois que la puissance n de Y_* s'écrira Y_n et que l'on aura

(17) $$\left\{\begin{array}{l} Y_1 = Y\,X - XY, \\ Y_2 = Y_1X - XY_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ Y_r = Y_{r-1}X - XY_{r-1}. \end{array}\right.$$

Il faut donc établir que, dans ces conditions, les derniers membres de (15) et (16) sont égaux.

Pour cela, il suffit que, dans ces membres, les coefficients de t^r soient égaux. Il faut donc prouver que

$$(-1)^r \frac{Y_r}{r!} = \frac{X^rY}{r!} - \frac{X^{r-1}Y}{(r-1)!}\frac{X}{1!} + \frac{X^{r-2}Y}{(r-2)!}\frac{X^2}{2!} - \dots.$$

C'est vrai pour $r = 1$. Récrivons l'égalité, en y remplaçant r par $r-1$, puis multiplions par X, une première fois à droite, une seconde fois à gauche. On a

$$(-1)^{r-1}\frac{Y_{r-1}X}{(r-1)!} = \frac{X^{r-1}YX}{(r-1)!} - \frac{X^{r-2}Y}{(r-2)!}\frac{X^2}{1!} + \frac{X^{r-3}Y}{(r-3)!}\frac{X^3}{2!} - \dots,$$

$$(-1)^{r-1}\frac{XY_{r-1}}{(r-1)!} = \frac{X^rY}{(r-1)!} - \frac{X^{r-1}Y}{(r-2)!}\frac{X}{1!} + \frac{X^{r-2}Y}{(r-3)!}\frac{X^2}{2!} - \dots,$$

d'où, par soustraction,

$$(-1)^{r-1}\frac{Y_r}{(r-1)!} = -\frac{X^rY}{(r-1)!} + r\frac{X^{r-1}YX}{(r-1)!} - r\frac{X^{r-2}Y}{(r-2)!}\frac{X^2}{2!} + \dots;$$

en divisant par $-r$, on retrouve l'égalité à établir et que ce procédé de récurrence établit effectivement pour toute valeur de l'entier r. Bref, l'égalité fondamentale (16) est démontrée.

Soient maintenant, plus explicitement, les r transformations infinitésimales X_i telles que

$$(18) \qquad X_i X_j - X_j X_i = c_{ij}^s X_s.$$

Il faut démontrer qu'elles engendrent un groupe, c'est-à-dire que, si l'on a

$$x' = e^X, \qquad X = \lambda_i X_i,$$
$$x'' = e^{Y'}, \qquad Y = \mu_i X_i,$$

on a aussi

$$x'' = e^Z, \qquad Z = \nu_i X_i.$$

C'est là ce que Poincaré, dans son premier Mémoire, appelle le *Problème de Campbell.*

Il faut prouver que

$$e^{\mu_i X_i'} = e^Z.$$

Campbell, également dans son premier Mémoire, se contente de démontrer cette égalité en supposant les μ assez petits pour qu'on puisse la remplacer par

$$(1 + \mu_i X_i')x_i' = e^Z.$$

Alors $\mu_i X_i' = Y'$ est de la forme $\rho_i X_i$ d'après la formule (16) dont on développe le second membre en tenant compte des égalités (17) et de (18). Donc il faut maintenant démontrer que

$$(1 + \mu U)e^X = e^Z,$$

si U et X' sont de la forme $\rho_i X_i$. Or, on peut transformer le premier membre d'après (14) et écrire

$$e^{X + \mu \overline{U}} = e^Z,$$

avec

$$\overline{U} = U + a_1 U_1 + a_2 U_2 + \ldots.$$

Les U_i se définissant comme les Y_i du tableau (17), on voit que U est aussi de la forme $\rho_i X_i$, ce qui achève la demonstration.

Cette démonstration est certainement pleine d'intérêt; elle a même une indéniable esthétique. Mais, en fin de compte, elle paraît faible à cause de la nécessité d'y supposer μ et les μ_i assez petits pour que l'on puisse négliger leurs puissances et leurs produits. Campbell lui-même remédia à ce défaut dans son second Mémoire.

Henri Poincaré, ensuite, porta le remède à la perfection, ce que nous allons voir dans les paragraphes suivants. Son analyse, souvent difficile, paraît toutefois beaucoup plus abordable quand on est habitué aux raisonnements de Campbell et c'est pourquoi nous avons commencé par ceux-ci. Une notion fondamentale, pour Poincaré, est celle de *polynome régulier*. Un polynome symbolique formé avec les X_i est dit *régulier* quand il ne contient autre chose que des puissances d'expressions de la forme $\rho_i X_i$.

Tout polynome peut être *régularisé* en faisant intervenir les relations (18). Il ne peut l'être que d'une seule manière. Nous admettrons ces deux assertions que Poincaré démontre en toute rigueur et non sans quelque longueur. En (14) nous avons une série régulière; les développements des exponentielles de Lie en donnent d'autres.

Pour en revenir au très grand mérite de Campbell, notons que les coefficients a_i s'expriment facilement par les nombres de Bernoulli. Si

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + B_1 \frac{t^2}{2!} - B_3 \frac{t^4}{4!} + \ldots,$$

$$(2n)!\, a_{2n} = (-1)^{n-1} B_{2n-1}.$$

Ceci nous ramène aux travaux de Schur cités dans notre fascicule XXXIII. Les nombres de Bernoulli ne jouent pas dans la théorie des groupes un rôle fortuit; ils accompagnent, très naturellement, toute analyse exponentielle, ordinaire ou symbolique.

5. Le symbole $\Phi(\theta)$. — Considérons les r symboles de transformations infinitésimales ou, plus brièvement, les r opérateurs X_i et l'une de leurs combinaisons linéaires

$$T = t_i X_i.$$

Soit ensuite V un autre opérateur élémentaire qui pourra être ou ne pas être une combinaison linéaire des opérateurs X. Mais V est supposé tel que

$$(VX_i) = VX_i - X_i V = b_{ij} X_j,$$

d'où

$$(VT) = VT - TV = b_{ij}\, t_i X_j = \theta(T).$$

On peut imaginer des itérations telles que

$$\theta[\theta(T)] = \theta^2(T), \qquad \ldots, \qquad \theta[\theta^m(T)] = \theta^{m+1}(T),$$

Soit maintenant

$$\Phi(\theta) = \Sigma g_k\, \theta^k$$

un polynome ou une série ordonnée suivant les puissances croissantes de θ.

Henri Poincaré pose

$$\Phi(\theta)(\mathrm{T}) = \Sigma g_k \theta^k(\mathrm{T}).$$

Considérons l'équation *caractéristique*

$$(19) \qquad \mathrm{B}(\theta) = \begin{vmatrix} b_{11}-\theta & b_{21} & \dots & b_{r1} \\ b_{12} & b_{22}-\theta & \dots & b_{r2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ b_{1r} & b_{2r} & \dots & b_{rr}-\theta \end{vmatrix} = 0.$$

Il sera commode, pour la suite, de désigner les éléments du déterminant $\mathrm{B}(\theta)$ par B_{ij}. Donc $\mathrm{B}_{ij} = b_{ij}$ quand i et j diffèrent, tandis que

$$\mathrm{B}_{ii} = b_{ii} - \theta.$$

Le mineur algébrique de B_{ij} sera désigné par P^{ij} et le même mineur *normé* par B^{ij}. Donc $\mathrm{B}\mathrm{B}^{ij} = \mathrm{P}^{ij}$.

Si l'équation $\mathrm{B}(\theta) = 0$ a ses r racines θ_i distinctes, il existe r combinaisons

$$(20) \qquad \mathrm{Y}_k = \alpha_{ik}\mathrm{X}_i,$$

telles que

$$(21) \qquad \mathrm{V}\mathrm{Y}_k - \mathrm{Y}_k\mathrm{V} = \theta_k \mathrm{Y}_k.$$

Il est évident, ici, que, dans le second membre, k n'est pas indice de sommation, puisque cet indice est libre dans le premier membre. Alors

$$\mathrm{T} = t_i\mathrm{X}_i = t'_k\mathrm{Y}_k.$$

Multipliant (21) par t'_k, on a

$$\theta(\mathrm{T}) = \theta_k t'_k \mathrm{Y}_k,$$
$$\theta^2(\mathrm{T}) = \theta_k\,\theta(\mathrm{T}) = \theta_k^2 t'_k \mathrm{Y}_k$$

et, d'une manière tout à fait générale,

$$\Phi(\theta)(\mathrm{T}) = \Phi(\theta_k)\, t'_k \mathrm{Y}_k = h_i \mathrm{X}_i.$$

Ici, k est bien indice de sommation puisqu'il a disparu dans le premier membre de l'équation. De (20), on tire, avec la notation habituelle des mineurs normés,

$$X_i = \alpha^{ik} Y_k, \qquad t'_k = \alpha^{ik} t_i,$$

$$\Phi(\theta)(T) = \Phi(\theta_k) t'_k \alpha_{ik} X_i,$$

$$h_i = \Phi(\theta_k) t_j \alpha^{jk} \alpha_{ik}. \tag{22}$$

Cette dernière formule est déjà très remarquable. Naturellement k y est indice de sommation. Si k n'était contenu que dans la somme de produits

$$\alpha^{jk} \alpha_{ik} = \alpha^j_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

nous aurions évidemment un résultat très simple et très élégant que le calcul différentiel absolu utilise aujourd'hui à chaque pas. Mais, dans le second membre de (22), les choses se présentent d'une manière beaucoup plus générale; il faut faire intervenir, dans la sommation en k, le coefficient $\Phi(\theta_k)$, où les θ_k sont toutes les racines d'une équation algébrique et où Φ est une fonction quelconque. Or, traiter ce cas a été l'occasion, pour Henri Poincaré, d'un véritable trait de génie. Il se propose de déterminer d'abord le produit sans sommation $\alpha^{jk}\alpha_{ik}$ en prenant provisoirement

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\xi - \theta},$$

avec ξ désignant une constante quelconque. Alors

$$\frac{1}{\xi - \theta}(T) = h_i X_i = H,$$

$$h_i = \frac{1}{\xi - \theta_k} t_j \alpha^{jk} \alpha_{ik}, \qquad (\xi - \theta)(H) = T. \tag{23}$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\xi h_i - b_{ki} h_k = t_i. \tag{24}$$

De ce système, on peut tirer les h en fonction des t. On trouve [1]

$$h_i = -t_j \frac{P^{ij}}{B(\xi)} = -t_j B^{ij},$$

---

[1] La résolution du système (24) porte tout naturellement à écrire le déterminant de (19) comme il l'est ici. C'est le déterminant du Mémoire de Poincaré avec changement des lignes en colonnes.

les P^{ij} et les B^{ij} contenant, bien entendu, ξ à la place de θ. Les h_i ainsi obtenus étant des fonctions rationnelles en ξ, décomposons-les en éléments simples. Il vient

$$h_i = -t_j \frac{P_k^{ij}}{B'(\theta_k)(\xi - \theta_k)},$$

si P_k^{ij} est ce que devient P^{ij} quand on y remplace ξ par θ_k. Comparant avec (23), on a

$$\alpha^{jk}\alpha_{ik} = -\frac{P_k^{ij}}{B'(\theta_k)}$$

et enfin

$$\Phi(\theta)(T) = -t_j\,\Phi(\theta_k)\frac{P_k^{ij}}{B'(\theta_k)}X_i. \tag{25}$$

On peut encore écrire, avec une intégrale de Cauchy,

$$\Phi(\theta)(T) = -\frac{1}{2i\pi}\int d\xi\,\Phi(\xi)\,t_j\frac{P^{ij}}{B(\xi)}X_i$$

ou bien

$$\Phi(\theta)(T) = -\frac{1}{2i\pi}\int d\xi\,\Phi(\xi)\,t_j\,B^{ij}\,X_i. \tag{26}$$

Le contour d'intégration doit naturellement comprendre à son intérieur toutes les racines θ_i et la fonction Φ doit être holomorphe dans ce contour.

Le résultat (26) est certainement plus frappant que (25); il a notamment repris toute la simplicité habituelle quant au jeu des indices de sommation i et j. Les formules où l'indice de sommation était triple n'ont joué qu'un rôle transitoire. Observons aussi que les formules (26), (25) et les précédentes sont données par Poincaré sans signes *moins* dans les seconds membres; ceci tient à ce que l'illustre auteur ne s'est pas préoccupé du signe à attribuer exactement aux mineurs P^{ij}, ce signe n'ayant point de rôle essentiel dans la suite.

Il resterait à reprendre le raisonnement précédent pour le cas où l'équation caractéristique aurait des racines multiples; on trouvera quelques indications, à ce sujet, dans le Mémoire de Poincaré.

Si V est une combinaison linéaire à coefficients constants des X_i, soit

$$V = v_i X_i,$$

et si

$$(X_i X_j) = c_{ij}^s X_s,$$

on a

$$(27)\qquad \theta(T) = v_j t_i c_{ji}^k X_k = b_{ik} t_i X_k, \qquad b_{ik} = c_{ji}^k v_j.$$

6. Combinaisons exponentielles fondamentales. — Parmi les applications les plus immédiates du symbole $\Phi(\theta)(T)$ il faut signaler le beau théorème de Poincaré qui s'exprime simplement par la réunion des deux formules

$$(28)\qquad e^{-\alpha V} e^{\beta T} e^{\alpha V} = e^{\beta U}, \qquad U = e^{-\alpha\theta}(T).$$

Le produit des trois exponentielles est une succession de transformations à lire de droite à gauche. Le théorème s'établit d'abord lorsque les constantes α, β sont supposées très petites et de telle sorte que l'on puisse négliger les termes du troisième ordre en α et β.

Dans ces conditions, le premier membre de la première équation (28) peut s'écrire

$$\left(1 - \alpha V + \frac{1}{2}\alpha^2 V^2\right)\left(1 + \beta T + \frac{1}{2}\beta^2 T^2\right)\left(1 + \alpha V + \frac{1}{2}\alpha^2 V^2\right)$$

ou

$$1 + \beta T + \frac{1}{2}\beta^2 T^2 - \alpha\beta(VT - TV) \equiv e^{\beta T - \alpha\beta\theta(T)},$$

d'où

$$U = T - \alpha\,\theta(T) \equiv e^{-\alpha\theta}(T).$$

Supposons maintenant que l'on pousse l'approximation jusqu'aux termes en β et en α^m inclusivement. Le premier membre de (28) va devenir un polynome symbolique en V et T que l'on pourra rendre *régulier* d'une seule manière, soit

$$\varphi(\alpha, \beta) = \Sigma A \Pi.$$

On aura

$$\varphi(\alpha + d\alpha, \beta) = e^{-(\alpha + d\alpha)V} e^{\beta T} e^{(\alpha + d\alpha)V} = e^{-d\alpha V} \varphi(\alpha, \beta) e^{d\alpha V},$$

$$\varphi(\alpha + d\alpha, \beta) - \varphi(\alpha, \beta) = d\alpha \sum \frac{dA}{d\alpha}\Pi.$$

Le premier membre de cette dernière égalité contient linéairement les A qui satisfont ainsi à des équations différentielles linéaires. De plus ces A, pour $\alpha = 0$, doivent se réduire aux coefficients de $e^{\beta T}$.

Ces conditions suffisent pour les déterminer. Or, on peut satisfaire aux équations différentielles en question en prenant, conformément à (28),

$$\varphi(\alpha, \beta) = e^{\beta U}, \qquad U = e^{-\alpha\theta}(T).$$

Ceci donne, en effet,

$$\varphi(\alpha + d\alpha, \beta) = e^{\beta U'}, \qquad U' = e^{-(\alpha+d\alpha)\theta}(T)$$

et il faut vérifier que

$$e^{-d\alpha V} e^{\beta U} e^{d\alpha V} = e^{\beta U'}.$$

Or ici, comme on néglige le carré de $d\alpha$, on peut écrire, d'après (28)

$$e^{\beta U''} = e^{\beta U'}, \qquad U'' = e^{-d\alpha\theta}(U) = e^{-d\alpha\theta} e^{-\alpha\theta}(T) = U'.$$

Ainsi le théorème (28) est bien vérifié dans une approximation d'ordre *un* en β, d'ordre m en α.

Poussons maintenant l'approximation en β. On aura

$$\varphi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{-\alpha V} e^{(\beta+d\beta)T} e^{\alpha V} = \varphi(\alpha, \beta)\, \varphi(\alpha, d\beta)$$

et, d'après (28), puisque l'on néglige le carré de $d\beta$,

$$\varphi(\alpha, d\beta) = e^{d\beta U}, \qquad U = e^{-\alpha\theta}(T).$$

Donc

$$\varphi(\alpha, \beta + d\beta) = \varphi(\alpha, \beta)\, e^{d\beta U}.$$

C'est là un système différentiel analogue à celui formé lors de l'approximation précédente.

Il donne lieu aux mêmes raisonnements. Il est d'accord avec (28), ce que l'on voit encore en écrivant

$$\varphi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{(\beta+d\beta)U} = e^{\beta U} e^{d\beta U} = \varphi(\alpha, \beta)\, e^{d\beta U}.$$

Bref, le théorème (28) est maintenant complètement établi, quels que soient α et β.

Il est évidemment valable si

$$V = v_i X_i, \qquad T = t_i X_i, \qquad (X_i X_k) = c_{ik}^s X_s.$$

Il l'est encore avec des opérateurs V et X_i, ces derniers en nombre r, si

$$(29) \qquad (VX_i) = b_{ik} X_k, \qquad (X_i X_k) = 0,$$

car ce cas se ramène immédiatement au précédent.

Reprenons (28). En permutant V et T, on a

$$(30)\qquad e^{-\beta T}e^{\alpha V}e^{\beta T}=e^{\alpha W},\qquad W=e^{-\beta\eta}(V).$$

Le symbole η est formé avec T comme le symbole θ avec V. Ainsi

$$\eta(Y)=(TY),\qquad \eta(V)=(TV)=-\theta(T).$$

Si les secondes relations (29) entrent en jeu, on a

$$\eta(X)=0,\qquad \eta^2(V)=0,\qquad \eta^m(V)=0,$$
$$e^{-\beta\eta}(V)=V-\beta\eta(V)=V+\beta\theta(T).$$

La formule (30) devient ainsi

$$(31)\qquad e^{-\beta T}e^{\alpha V}e^{\beta T}=e^{\alpha V+\alpha\beta\theta(T)}.$$

Cette formule n'est plus vraie si l'on abandonne les secondes relations (29) mais ces dernières peuvent encore être considérées comme satisfaites avec des X très petits d'où des T également très petits et du premier ordre qui permettront, dans (31), de faire jouer le rôle d'infiniment petit à β et non à T puisque T ne figure qu'avec le facteur β. Au même degré d'approximation, la formule (31) peut s'écrire

$$e^{\alpha V+\alpha\beta\theta(T)}\equiv e^{\alpha V}-\beta T\,e^{\alpha V}+e^{\alpha V}\beta T\equiv e^{\alpha V}-e^{\beta T}e^{\alpha V}+e^{\alpha V}e^{\beta T},$$

ou, en vertu de (28),

$$e^{\alpha V+\alpha\beta\theta(T)}\equiv e^{\alpha V}-e^{\alpha V}e^{\beta U}+e^{\alpha V}e^{\beta T},\qquad U=e^{-\alpha\theta}(T)$$

et, toujours en négligeant le carré de β,

$$e^{\alpha V+\alpha\beta\theta(T)}\equiv e^{\alpha V}(1-\beta U+\beta T)\equiv e^{\alpha V}e^{\beta(T-U)}.$$

Si nous posons

$$(32)\qquad \alpha\theta(T)=W,\qquad T-U=Y,$$

il vient

$$(33)\qquad e^{\alpha V+\beta W}=e^{\alpha V}e^{\beta Y},\qquad Y=\frac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}(W).$$

Henri Poincaré pose ici une question d'apparence subtile mais qu'il est cependant nécessaire d'envisager pour faire comprendre la nécessité de détours contenus, à première vue, dans les raisonnements précédents. Dans la première équation (32), où T représente

$t_i X_i$ et où W représente $w_i X_i$, peut-on déterminer les t quels que soient les w? Il faut que l'on ait

$$\alpha \beta_{ij} t_i = w_j,$$

ce qui est évidemment possible si le déterminant des b_{ij} n'est pas nul. Mais, si l'on n'avait jamais raisonné qu'avec les X_i, ce déterminant aurait toujours été nul, d'après les secondes relations (27), d'où la nécessité de commencer par considérer le cas où V n'est pas forcément une combinaison linéaire des X; le cas de V combinaison linéaire des X peut alors suivre, comme cas limite, l'équation caractéristique (19) ayant, dans ce cas limite, une racine nulle, fait bien connu qui n'altère pas les généralités associables à cette équation, si ce n'est pour les simplifier légèrement.

7. Génération des X_i à partir de la structure. — Soient donc les r opérateurs X_i liés par les relations

$$(X_i X_k) = c_{ik}^s X_s,$$

dans lesquelles les c_{ik}^s sont les « constantes de structure » liées par les relations structurales fondamentales et données à l'avance. Soient aussi, comme précédemment,

$$T = t_i X_i, \qquad U = u_i X_i, \qquad v = v_i X_i, \qquad W = w_i X_i.$$

Soit la série *régularisée*

$$\varphi(\alpha, \beta) = e^{\alpha V} e^{\beta T} = \varphi_0 + \beta \varphi_1 + \beta^2 \varphi_2 + \ldots. \tag{34}$$

On a

$$\varphi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{\alpha V} . e^{\beta T} e^{d\beta T} = \varphi(\alpha, \beta) e^{d\beta T} = \varphi(\alpha, \beta)(1 + d\beta T),$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{d\beta} = \varphi T, \qquad m \varphi_m = \varphi_{m-1} T.$$

Ces conditions, jointes à $\varphi_0 = e^{\alpha V}$, déterminent φ. Faisons maintenant

$$\varphi(\alpha, \beta) = e^W, \quad \varphi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{W + dW}; \tag{35}$$

il vient

$$e^{W + dW} = e^W e^{d\beta T}.$$

Or, d'après (33), on peut satisfaire à ceci en posant

$$(36) \qquad d\beta T = \frac{1 - e^{-\eta}}{\eta}(dW),$$

si η est un symbole qui est à W ce que θ est à V. On a ainsi, en (36), une représentation symbolique d'un système d'équations différentielles, équations auxquelles doivent satisfaire les coefficients w_i. On peut écrire, d'après (26),

$$d\beta T = -\frac{1}{2i\pi}\int d\xi \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} dw_j B^{ij} X_i,$$

d'où

$$(37) \qquad t_i\, d\beta = -\frac{1}{2i\pi}\int d\xi \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} dw_j B^{ij}.$$

Ici, l'on a

$$(WX_i) = c_{ki}^s w_k X_s = b_{is} X_s;$$

l'équation caractéristique, après un échange de lignes et de colonnes dans le déterminant, est (19), c'est-à-dire $B(\xi) = 0$. Quant à B^{ij} c'est le mineur *normé* défini comme plus haut sur l'équation (19). Donc B^{ij} est une fraction rationnelle en ξ dont le dénominateur $B(\xi)$ est de degré r, alors que le numérateur est de degré $r - 1$. Les intégrations doivent être effectuées, dans le plan de la variable complexe ξ, le long d'un contour enveloppant toutes les racines de l'équation caractéristique.

Il est maintenant aisé de conclure. Si les w_j satisfont aux équations différentielles (36) intégrées de telle manière qu'elles donnent $w_i = v_i$, c'est-à-dire $\varphi = \varphi_0$, pour $\beta = 0$, alors, les deux formes de $\varphi(\alpha, \beta)$, écrites en (34) et (35), sont égales (tout est maintenant disposé pour qu'il en soit ainsi); finalement, on a

$$e^{\alpha V} e^{\beta T} = e^W.$$

Le produit des transformations finies $e^{\alpha V}$ et $e^{\beta T}$ est bien une transformation de même forme dans laquelle les paramètres seuls ont changé. Il y a *groupe*. Le problème de Campbell est résolu.

Toutefois la question, traitée comme elle vient de l'être, est loin de s'arrêter là. Nous ne sommes même pas à la fin du premier Mémoire de Poincaré alors que l'illustre savant en a consacré trois au sujet. Contentons-nous pour l'instant, d'indiquer deux transformations très importantes des équations (37).

Nous avons

$$B^{ij}\,B_{ik} = B^{ij}\,b_{ik} - \xi B^{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq j, \\ 1 & \text{si} \quad k = j, \end{cases}$$

d'où

$$b_{ik}\,t_i\,d\beta = -\frac{1}{2i\pi}\int d\xi(1 - e^{-\xi})\,dw_j\,B^{kj}.$$

L'emploi des relations précédentes, pour $k = j$, ne change rien à ce résultat, l'intégrale de Cauchy s'augmentant alors d'une autre qui est identiquement nulle.

Voici encore un autre aboutissement de (37), prodigieusement important cette fois.

L'équation (36) peut s'écrire

$$\frac{dW}{d\beta} = \frac{\eta}{1 - e^{-\eta}}(T) = -\frac{1}{2i\pi}\int \frac{\xi\,d\xi}{1 - e^{-\xi}}\,t_j\,B^{ij}\,X_i,$$

l'intégrale de Cauchy provenant d'un nouveau recours à la formule (26). Donc

$$\frac{dw_i}{d\beta} = -\frac{1}{2i\pi}\int \frac{\xi\,d\xi}{1 - e^{-\xi}}\,t_j\,B^{ij}. \tag{38}$$

Observons maintenant que les équations (37), résolues par rapport aux dw_j, donnent un résultat de la forme

$$\frac{dw_i}{d\beta} = A_{ji}\,t_j,$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial w_i}\frac{dw_i}{d\beta} = A_{ji}\,t_j\frac{\partial f}{\partial w_i} = t_j\,X_j, \qquad X_j = A_{ji}\frac{\partial f}{\partial w_i}.$$

Comparant avec (38), on a

$$X_j = -\frac{1}{2i\pi}\int \frac{\xi\,d\xi}{1 - e^{-\xi}}\,B^{ij}\frac{\partial f}{\partial w_i}.$$

Ceci peut être considéré comme un aboutissement de la plus grande valeur logique et esthétique. A partir de la structure donnée, de l'équation caractéristique et des mineurs B^{ij} on voit qu'on peut construire, très simplement, une intégrale à la Cauchy, avec contour enfermant toutes les racines de l'équation caractéristique mais non les points $2ki\pi$, intégrale qui représente r transformations infinitésimales associées à la structure considérée. Seulement il faut bien observer une chose que Poincaré ne dit pas immédiatement et qu'il ne met même en évidence qu'au début de son second Mémoire.

Nous avons commencé notre raisonnement au paragraphe 3, avec des opérateurs X qu'on se représente tout d'abord comme construits chacun avec de certaines variables indépendantes x, les w utilisés en dernier lieu n'étant que des *paramètres* extérieurs, pour ainsi dire, aux X. Or ce ne sont pas ces X que nous venons de construire mais des X dépendant des w, engendrant bien cependant un groupe ayant la structure donnée mais un groupe *paramétrique*. Bref nous retrouvons ici, en dernier lieu, un fait que, avec M. Élie Cartan, nous avions mis en premier lieu dans notre fascicule XXXIII.

La construction la plus générale des groupes dépend, avant tout, de la construction de groupes paramétriques ; ce sont notamment ces derniers qui engendrent les *espaces de groupes* au sens de M. Cartan.

Autre et capitale remarque. — Nous avons rappelé, dans notre fascicule XXXIII et à la fin du paragraphe 2 du présent chapitre, que certains auteurs, notamment Schur, Pascal, avaient rattaché la théorie des groupes finis et continus à celle des nombres de Bernoulli. Or la théorie exponentielle, essentiellement constructive, due à Henri Poincaré, rend aussi la liaison évidente. Il suffit, dans notre dernière formule donnant l'opérateur X_j, de se proposer d'étudier l'intégrale du second membre en développant

$$\frac{\xi}{1-e^{-\xi}},$$

suivant les puissances croissantes de ξ. Les nombres de Bernoulli apparaissent immédiatement comme coefficients d'un tel développement.

8. **Rapprochements terminaux.** — Ces rapprochements, avec lesquels nous sommes dans l'obligation matérielle de terminer un chapitre d'étendue limitée, pourraient être le point de départ de nouveaux et grands développements. Dans le Chapitre I du présent exposé, nous avons rappelé que la Gravifique, même avec des perfectionnements très récents, est toujours sous la dépendance des transformations d'intégrales multiples. Nous avons commencé à voir, dans le Chapitre II, qu'il en était de même pour les Mécaniques nouvelles. La

Théorie des groupes, avec son caractère exponentiel, naît en même temps que les disciplines précédentes et des mêmes principes. Certes les travaux de Campbell et de Poincaré ne semblent pas correspondre immédiatement à des réalités physiques mais les premières recherches sur les matrices de Charles Hermite donnent la même impression.

Au point de vue bibliographique nous citerons des Mémoires de M. Th. De Donder [27] qui réunissent Gravifiques et Mécaniques par beaucoup de liens plus haut placés que ceux que nous avons mis tout à la base des théories, entre principes initiaux. La conclusion est aussi qu'il n'y a nullement lieu d'opposer la Gravifique et la Mécanique ondulatoire [28]. Le chapitre suivant va confirmer cette impression.

L'un des premiers développements de la Mécanique statistique constitue la théorie des invariants adiabatiques exposée dans l'Ouvrage de M. R.-H. Fowler déjà cité mais reprise par M. T. Levi-Civita [29]. L'éminent géomètre italien y fait grand usage des méthodes de Lie quant à la transformation des systèmes canoniques.

Tous ces domaines sont encore en pleine élaboration. On ne peut tout embrasser, tout fixer. Si l'œuvre de Birtwistle est traduite en français, l'œuvre fondamentale de M. Louis de Broglie est traduite en allemand [30]. Une autre exposition, particulièrement physique, très claire, très einsteinienne, due à M. J. Frenkel [31], arrive de Leningrad. Et tout cela, sans doute, n'est qu'un premier élan.

CHAPITRE III.

GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE DES ESPACES A CANAUX.

1. Formule de Stokes pour espaces à canaux. — La formule ainsi dénommée est

$$(1)\qquad \int_{\Sigma} U\,dP + V\,dQ = \int\int_{\sigma} \left(\frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial U}{\partial Q}\right) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma.$$

Un canal élémentaire a une section quadrilatérale. Sur ses faces latérales, P, Q, $P + dP$, $Q + dQ$ sont constants.

Soit un canal contenant $d\sigma$ (en x, y, z) et dS (en X, Y, Z). Les cloisons finies σ et S sont interceptées par un même faisceau de canaux; elles sont *en projection canale*. En appelant $\Lambda(P, Q)$ la parenthèse qui figure, en (1), dans l'intégrale double, on peut écrire, pour $\Lambda\, dP\, dQ$,

$$\Lambda(P,Q)\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma = \frac{\Lambda(P,Q)}{\Theta(X,Y,Z)}\begin{vmatrix} \Phi_X & \Phi_Y & \Phi_Z \\ P_X & P_Y & P_Z \\ Q_X & Q_Y & Q_Z \end{vmatrix} \frac{\Theta(X,Y,Z)\, dS}{\sqrt{\Phi_X^2+\Phi_Y^2+\Phi_Z^2}}.$$

La cloison S a pour équation $\Phi = 0$. Posons

$$(2)\qquad \frac{1}{\Theta\sqrt{\Phi_X^2+\Phi_Y^2+\Phi_Z^2}}\begin{vmatrix} \Phi_X & \Phi_Y & \Phi_Z \\ P_X & P_Y & P_Z \\ Q_X & Q_Y & Q_Z \end{vmatrix} = \begin{cases} \Delta(X, Y, Z), \\ \Delta_1(\Phi, P, Q), \\ \Delta_1(0, P, Q) \text{ sur S} \end{cases}$$

puis, pour déterminer $\Lambda(P, Q)$,

$$\Lambda(P, Q)\,\Delta_1(0, P, Q) = 1.$$

C'est le moyen d'avoir

$$\int\!\!\int_S \Theta\, dS = \int\!\!\int_\sigma \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{\Delta_1(0, P, Q)}.$$

L'intégrale double du second membre est stokienne et prend facilement la forme du premier membre de (1).

Bref, en un canal ou en un faisceau de canaux, se propagent des intégrales doubles, en $\Theta\, dS$, invariantes. L'équation générale et fondamentale du phénomène est (2) avec second membre $\Delta_1(\Phi, P, Q)$. A cette équation, aux dérivées partielles de Φ, peuvent correspondre des surfaces propagatrices S générales. Celles-ci dépendent d'éléments arbitraires, par exemple d'un paramètre t qu'on appellera *temps*. Ainsi, le long des canaux, il peut y avoir propagation d'éléments invariants (ou dépendant du temps d'une certaine manière) analogues à des *masses* (constantes ou variables). Il y a donc, dans les considérations géométriques précédentes, le fondement d'une Mécanique très générale [38]. Cette Mécanique aurait, pour équation fondamentale, l'équation (2), analogue à l'équation de Jacobi écrite pour le mouvement d'un point, mais beaucoup plus plastique.

2. Rapprochements avec l'équation de Jacobi. — Ces rapprochements semblent pouvoir s'effectuer de diverses manières. Pour l'instant, soient P et Q homogènes d'ordre zéro. Alors

$$XP_X + YP_Y + ZP_Z = 0, \qquad XQ_X + YQ_Y + ZQ_Z = 0.$$

L'équation $\Phi = 0$ sera mise sous la forme $f = 1$, avec f homogène d'ordre un, ce qui est toujours possible. Sur les surfaces $f = 1$, l'équation (2) peut s'écrire, en utilisant le théorème d'Euler,

$$(3) \qquad \frac{1}{\Theta\left(\frac{X}{f}, \frac{Y}{f}, \frac{Z}{f}\right)} \frac{1}{\sqrt{f_X^2 + f_Y^2 + f_Z^2}} \begin{vmatrix} f_X & f_Y & f_Z \\ P_X & P_Y & P_Z \\ Q_X & Q_Y & Q_Z \end{vmatrix} = \frac{\Delta(P, Q)}{f^2},$$

ou bien

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2 = F\left(\frac{X}{f}, \frac{Y}{f}, \frac{Z}{f}\right).$$

C'est l'équation de Jacobi *homogénéisée*. Sur toute surface $f = 1$, elle revêt la forme ordinaire,

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2 = F(X, Y, Z).$$

Mais, dira-t-on, avec P et Q homogènes d'ordre zéro, les canaux seront toujours rectilignes et, plus exactement, coniques de sommet O.

Or, on peut les *varier*, d'après une remarque générale concernant (1). La réduction pfaffienne,

$$U\, dP + V\, dQ = M\, dN,$$

se traduit, dans le second membre de (1), par

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial U}{\partial Q}\right) \begin{Vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{Vmatrix}.$$

De même (3) peut prendre la forme

$$(5) \qquad \frac{1}{\Theta \sqrt{f_X^2 + f_Y^2 + f_Z^2}} \begin{vmatrix} f_X & f_Y & f_Z \\ M_X & M_Y & M_Z \\ N_X & N_Y & N_Z \end{vmatrix} = \frac{1}{f^2}.$$

Le second membre se réduit évidemment à 1 sur une surface $f = 1$. Seulement, en (5), M et N sont encore homogènes, d'ordre zéro, commes fonctions de P et Q. Observons alors que (5) ne change pas si, par exemple, on y remplace M et N respectivement par

$$M^* = M + \rho(f), \qquad N^* = N + \sigma(f).$$

Ainsi apparaissent de nouveaux canaux non rectilignes et même assez profondément indéterminés [39].

Il est essentiel de remarquer que (4), en Mécanique classique, correspond au mouvement *d'un seul point* et qu'ici on associe à (4) des espaces à canaux dans lesquels les mouvements *multiponctuels* sont le cas général.

3. Symboles de Jacobi et de Schrödinger. — Prenons ces deux sortes de symboles sous les formes respectives

$$\begin{gathered} J(S) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - S^2\Omega, \\ \Sigma(W) = \Delta W + W\Omega. \end{gathered} \tag{6}$$

Posons, de plus,

$$u = S_1 + S_2, \qquad v = S_1 - S_2.$$

Changeons maintenant de notations, dans l'intégrale double de (1), en posant

$$\left\{\begin{aligned} \Lambda(P, Q)(P_y Q_z - P_z Q_y) &= w_x + u v_x = F, \\ \Lambda(P, Q)(P_z Q_x - P_x Q_z) &= w_y + u v_y = G, \\ \Lambda(P, Q)(P_x Q_y - P_y Q_x) &= w_z + u v_z = H. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ce système (7), en somme élémentaire, paraît fondamental quant au fait de mettre la Géométrie et la Mécanique des espaces à canaux sous les formes quantique, ondulatoire et corpusculaire les plus communément adoptées. On a forcément

$$F_x + G_y + H_z = 0,$$

ce qui peut s'écrire, Δ étant le laplacien à trois variables,

$$\Delta w + u\,\Delta v + u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0,$$

ou bien

$$\Delta w + (S_1 + S_2)\Sigma(S_1 - S_2) + J(S_1) - J(S_2) = 0. \tag{8}$$

Cette relation, la seule qui soit nécessaire pour que (7) puisse avoir lieu, lie, de manière *non symbolique*, les symboles J, de Jacobi, et Σ, de Schrödinger [40].

Elle est, sans doute, le prétexte le plus naturel quant à l'introduction de Σ.

4. **Quantification.** — Reprenons l'équation de Schrödinger, avec les notations de Weyl [17], soit

$$\frac{h^2}{2m}\Delta\varphi + (\mathrm{E}-\mathrm{V})\varphi = 0. \tag{9}$$

Le W de (6) est remplacé par φ. Dans (9), V représente l'énergie potentielle. E est l'énergie totale constante.

Posons

$$\varphi = e^{i\nu t}\psi(x, y, z).$$

On a

$$\psi = e^{-i\nu t}\varphi, \qquad -\frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = h\nu\psi,$$

et l'équation (9), en ψ, devient

$$\frac{h^2}{2m}\Delta\psi - \frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathrm{V}\psi = 0 \qquad \text{si} \quad \mathrm{E} = h\nu. \tag{10}$$

On voit que le seul fait d'introduire le temps, de façon périodique, dans l'équation de Schrödinger, entraîne la quantification de l'énergie.

5. **Équations ondulatoires.** — Reprenons maintenant l'équation de Schrödinger, avec la notation (6),

$$\Delta\mathrm{W} + \mathrm{W}\Omega = 0.$$

En cherchant toujours des solutions périodiques par rapport au temps

$$\mathrm{W} = e^{i\nu t}w(x, y, z), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial^2\mathrm{W}}{\partial t^2} = -\nu^2\mathrm{W},$$

on peut l'écrire

$$\Delta\mathrm{W} - \frac{\Omega}{\nu^2}\frac{\partial^2\mathrm{W}}{\partial t^2} = 0.$$

Avec la notation employée en (9) pour Ω et $\mathrm{E} = h\nu$, il vient

$$\Delta\mathrm{W} - \frac{1}{\mathrm{C}^2}\frac{\partial^2\mathrm{W}}{\partial t^2} = 0, \qquad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{2m(\mathrm{E}-\mathrm{V})}}.$$

Cette valeur de C est précisément le résultat qu'on obtient en comparant l'équation de propagation d'un front d'onde

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2$$

avec l'équation de Jacobi

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = 2m(E - V),$$

pour F remplacé par $F(x, y, z) - Et$.

On voit avec quelle simplicité la Mécanique des espaces à canaux lie les formules fondamentales des théories ondulatoires, corpusculaires et quantiques.

6. **Homogénéité et non-commutativité.** — Quel est le rapport de l'exposé précédent avec la non-commutativité ? Il est facile de voir qu'au paragraphe 2 cette dernière notion est remplacée par celle d'homogénéité car l'homogénéité permet de créer, de diverses manières, des opérateurs différentiels non commutatifs. Il y a d'abord le théorème d'Euler,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = mf,$$

qui associe les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

et

$$x, \quad y, \quad z.$$

Cette association a été indiquée par Weyl pour raisons probabilitaires [17]. Elle donne immédiatement des combinaisons telles que

$$\frac{\partial}{\partial x}(xf) - x\frac{\partial}{\partial x}f = f,$$

chose déjà indiquée au début du chapitre précédent.

La Théorie des groupes permet de varier ceci. On peut trouver, comme nous l'avons encore vu au paragraphe 3 du Chapitre II, des opérateurs différentiels linéaires X et Z tels que $XZ = ZX$. Soit, de plus,

$$Y = Z + rX, \qquad \text{d'où} \qquad XY - YX = X(r)X.$$

Le théorème d'Euler donnant $X(f) = kf$, et, prenant r tel que $X(r) = 1$, on peut avoir

$$XY(f) - YX(f) = kf.$$

Avec n variables x_i et f homogène d'ordre k, on a encore

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i f) - x_i \frac{\partial}{\partial x_j} f = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ nf & \text{si } i = j, \end{cases}$$

car, pour $i = j$, l'indice devient sommatoire.

Bref l'homogène équivaut, de plusieurs points de vue, au non-commutatif.

C'est pourquoi nous trouvons, dans ce chapitre, des appels à l'homogénéité, là où d'autres auteurs auraient recours à des notions de non-commutativité.

De plus l'équation fondamentale (2), aux dérivées partielles de Φ, est une équation du premier ordre intégrable par la considération d'un système différentiel canonique mêlé, comme tous ces systèmes, aux constructions fondamentales de la Théorie des groupes. Cette Théorie et la Mécanique apparaissent encore comme inséparables.

7. **Considérations probabilitaires.** — L'intégrale double de (1) ou, d'après (7),

$$\int\int_\sigma \left(\frac{dw}{dn} + u \frac{dv}{dn} \right) d\sigma,$$

exprime évidemment une certaine probabilité pour qu'un certain phénomène ait lieu dans le faisceau de canaux intercepté par la cloison σ. Il est indiqué d'exprimer par $\varpi(u, v, w)\, d\tau$ la probabilité pour qu'un phénomène analogue se produise dans l'élément de volume $d\tau$. Dans une théorie, d'accord avec (8), qui ne ferait intervenir que des solutions v de l'équation de Schrödinger, la même probabilité serait simplement $\varpi(v)\, d\tau$. Des considérations de simplicité peuvent guider dans le choix de $\varpi(v)$; réduisons cette fonction à v^2, pour qu'elle soit toujours positive. Mais l'équation de Schrödinger invoquée ici est l'équation indépendante du temps $\Sigma = 0$ tandis qu'en général il faut pouvoir considérer l'équation complète (10) et même des solutions ψ imaginaires de celle-ci. C'est alors que la probabilité $v^2\,d\tau$ est à remplacer par

$$\psi\overline{\psi}\,d\tau, \tag{11}$$

le ψ surmonté d'un tiret désignant l'imaginaire conjuguée de ψ.

L'étude de l'expression (11) et de ses intégrales est un cas limite de l'étude des formes à indéterminées conjuguées de Charles Hermite,

$$a_{ik}\overline{x}_i x_k, \qquad a_{ki} = \overline{a}_{ik}, \tag{12}$$

formes auxquelles correspond la Géométrie unitaire dont l'étude préliminaire joue un si grand rôle dans la microphysique actuelle. Les Ouvrages qui développent de telles considérations tendent à devenir extrêmement nombreux; bornons-nous à citer encore celui de M. H. Weyl [17] ainsi que des *Leçons* de M. Élie Cartan [41] qui relèvent de l'esprit géométrique pur.

8. Fluides et ondes de probabilité. — Les considérations de ce chapitre sont essentiellement d'accord avec la remarque fondamentale de M. Bateman faite à propos de l'équation (9) du chapitre précédent. Pour satisfaire à

$$F_x + G_y + H_z = 0, \tag{13}$$

posons maintenant [42]

$$\left\{\begin{aligned} 2F &= uv_x - vu_x = 2\Lambda(P, Q)(P_y Q_z - P_z Q_y), \\ 2G &= uv_y - vu_y = 2\Lambda(P, Q)(P_z Q_x - P_x Q_z), \\ 2H &= uv_z - vu_z = 2\Lambda(P, Q)(P_x Q_y - P_y Q_x). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

L'équation (13) prend la forme

$$u\Sigma v - v\Sigma u = 0 \tag{15}$$

en désignant toujours par Σ le symbole de Schrödinger (6). Or (15) peut s'écrire aussi

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\lambda) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\mu) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\nu) = 0 \tag{16}$$

en posant

$$\rho = uv, \qquad \lambda, \mu, \nu = \frac{\partial}{\partial(x, y, z)} \log\frac{v}{u}. \tag{17}$$

On a, en (16), une équation de continuité relative à un mouvement fluide permanent.

Soient l'équation de Schrödinger complète (10) et sa conjuguée

$$\frac{h^2}{2m}\Delta\psi^* + \frac{h}{i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - V\psi^* = 0. \tag{18}$$

Elles donnent

$$\frac{hi}{2m}(\psi\Delta\psi^* - \psi^*\Delta\psi) + \frac{\partial}{\partial t}(\psi\psi^*) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\lambda) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\mu) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\nu) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \tag{19}$$

en posant

$$\rho = \psi\psi^*, \qquad \lambda, \mu, \nu = \frac{hi}{2m}\frac{\partial}{\partial(x, y, z)}\log\frac{\psi^*}{\psi}. \tag{20}$$

Cette fois (19) se rapporte à un mouvement fluide général et $\rho\, d\tau$ est la probabilité (11) reconstruite par un raisonnement plus complet. Pour être d'accord avec [42] le ψ surmonté d'un tiret est remplacé par ψ^*.

En (10) et en (18) nous avons des équations relatives à des *ondes de probabilité*, ondes imaginaires en général, ce qui n'empêche pas que les résultats (20) sont réels.

La recherche d'extensions concernant (16) et (17), (19) et (20) est l'une des questions les plus actuelles de la Mécanique ondulatoire. Citons des résultats de M. Crudeli [43], [44] et de M. Darwin, commentés par M. Néculcéa [45].

Ici, nous attirons aussi l'attention sur la détermination de A, P, Q, d'après (14); les fonctions P et Q sont alors deux intégrales distinctes de

$$F\frac{\partial\theta}{\partial x} + G\frac{\partial\theta}{\partial y} + H\frac{\partial\theta}{z} = 0.$$

C'est déterminer un *espace à canaux* dans lequel des cloisons transversales se propagent comme des fronts d'ondes en transportant certains invariants intégraux. Ces fronts, de canal à canal contigu, peuvent ne pas être raccordés; ils s'émiettent alors en corpuscules.

Remarquons encore que l'on peut imaginer qu'en (13) les fonctions F, G, H dépendent non seulement de x, y, z mais encore d'une fonction $f(x, y, z)$ et des dérivées partielles de f prises jusqu'à un ordre quelconque. On a ainsi une immense classe d'équations, d'ordre quelconque, aux dérivées partielles de f, telles qu'à toutes on peut faire correspondre des propagations canales.

9. Conclusions. — Tout en regrettant la brièveté de ce fascicule, nous croyons cependant y avoir dessiné des voies essentielles. Nous avons rappelé d'abord que les deux principales formes de la Gravifique conduisaient à des considérations spatiales, d'une extrême généralité, en lesquelles la Théorie des groupes de transformations était incluse. On ne saurait trop méditer cette dernière surtout quant à l'origine des symboles commutatifs ou non; c'est pourquoi nous avons développé des considérations dues à Henri Poincaré bien qu'elles soient encore éloignées d'applications physiques.

Enfin les espaces à canaux, d'abord euclidiens, ne vont pas sans considérations non euclidiennes correspondant aux formes (12); il resterait à poursuivre une Géométrie extrêmement intéressante de par ses invariances, ses multiplications matricielles non commutatives et ses *représentations* de groupes.

M. Luther Pfahler Eisenhart, de Princeton University, vient de publier un livre très remarquable sur la Théorie des Groupes continus [47]. A beaucoup de points de vue, cet Ouvrage développe le présent fascicule; c'est de la très belle Analyse à méditer d'abord par qui veut s'occuper ensuite de Physique théorique.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. H. Poincaré. — *Électricité et Optique*. Leçons professées à la Sorbonne en 1888, 1890 et 1899 (Gauthier-Villars et Cie, Paris).

   Le renvoi concerne l'Introduction de cet Ouvrage, Introduction prophétique dont on ne saurait trop se pénétrer encore à l'heure actuelle.

2. R. Ferrier. — I. Les champs de vecteurs. — II. Sur l'électrodynamique. — III. Sur la théorie synthétique des champs. Introduction de Th. De Donder et Mémoires de A. Einstein (*Revue générale de l'Électricité*, 13e année, t. 25, 20 et 27 avril 1929. Articles réunis en un fascicule spécial avril-mai).

3. T. Levi-Civita. — Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen, 14 März 1929 (*Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften*, Berlin, W. de Gruyter). — A simplified presentation of Einstein's unified Field Equations. Blackie and son Limited, London, 1929.

4. E. Cartan. — La géométrie des groupes de transformations (*Journal de Mathématiques*, rédigé par H. Villat, 9e série, t. 6, 1927, p. 1-120).

5. A. Buhl. — Formules stokiennes (*Mémorial des Sciences mathématiques*, dirigé par H. Villat, fasc. XVI, 1926).

6. R.-H. Fowler. — *Statistical Mechanics*. The Theory of the Properties of Matter in Equilibrium (At the University Press, Cambridge, 1929).

7. E. Cartan. — Sur les variétés à connexion affine et la Théorie de la Relativité généralisée (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 40, décembre 1923).

8. H. Eyraud. — Les équations de la Dynamique de l'Éther (A. Blanchard, Paris, 1926).

9. R. Lagrange. — Calcul différentiel absolu (*Mémorial des Sciences mathématiques*, dirigé par H. Villat, fasc. XIX, 1926).

10. P. Barbarin. — *La Géométrie non euclidienne*. Troisième édition augmentée de *Notes sur la Géométrie non euclidienne dans ses rapports avec la Physique mathématique*, par A. Buhl (Collection *Scientia*, Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1928).

11. A. Buhl. — Aperçus modernes sur la Théorie des Groupes finis et continus (*Mémorial des Sciences mathématiques*, dirigé par H. Villat, fasc. XXXIII, 1928).

12. H. Weyl. — *Raum, Zeit, Materie*. Vierte Auflage (J. Springer, Berlin, 1921; *cf*. S. 101). — *Temps, Espace, Matière*. Trad. G. Juvet et R. Leroy (A. Blanchard, Paris, 1922; *cf*. p. 97).

13. F.-D. Murnaghan. — The absolute significance of Maxwell's Equations (*Physical Review*, N. S., vol. 17, no 2, February, 1921).

14. T. Levi-Civita. — *Calcolo differenziale assoluto*, compilato dal Dott. Enrico Persico (Alberto Stock, Roma, 1925). — *The absolute Differential Calculus*. Translation by Miss M. Long (Blackie and son Limited, London and Glasgow, 1927). — *Der absolute Differentialkalkül*, Deutsche Ausgabe von Adalbert Duschek (J. Springer, Berlin und Wien, 1928).

15. E. Cartan and J.-A. Schouten. — On the geometry of the group-manifold of simple and semi-simple groups. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (*Proceedings*, vol. 29, no 6, March 27, 1926). — On Riemannian Geometries admitting an absolute parallelism (*Ibid.*, no 7, April 24, 1926).

16. A. Buhl. — Sur les systèmes différentiels linéaires dépendant de paramètres et les groupes qu'ils engendrent (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 52, mai 1928).

17. H. Weyl. — *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (S. Hirzel, Leipzig, 1928).
Une seconde édition de cet ouvrage a été publiée en 1931.

18. A. Wintner. — *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen*. Mit einer Einleitung von Leon Lichtenstein (S. Hirzel, Leipzig, 1929).

19. George Birtwistle. — *La Nouvelle Mécanique des Quanta*. Traduction augmentée de quatre Appendices par les traducteurs : M. Ponte et Y. Rocard. Préface de M. Jacques Hadamard (A. Blanchard, Paris, 1929).

20. Neal M. Mc Coy. — On Commutation Formulas in the Algebra of Quantum Mechanics (*Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 31, no 4, october 1929).

21. A. Buhl. — Transformations et extensions de la formule de Stokes (3e Mémoire) (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914).

22. A. Buhl. — Permutation des intégrales d'un système d'équations différentielles (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 9 décembre 1907).

23. M. Petrovitch. — *La Mécanique des Phénomènes fondée sur les analogies* (Collection *Scientia*, no 27, février 1906. Gauthier-Villars et Cie, Paris).

24. J. E. Campbell. — On a Law of Combination of Operators bearing on the Theory of Continuous Transformation Groups (*Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 28, 1896-1897, March 11, 1897).

25. J. E. Campbell. — On a Law of Combination of Operators (*Ibid.*, vol. 29, 1897-1898, november 11, 1897).

26. H. Poincaré. — Trois Mémoires : Sur les groupes continus : 1o *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 18, 1900. — 2o *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 15, 1901, parte prima. — 3o *Ibid.*, t. 25, 1908, 1er semestre.

27. Th. De Donder. — Les publications de M. De Donder, sur les liens existant entre Gravifiques et Mécaniques, sont nombreuses. Bornons-nous à une liste réduite. Tout d'abord, dans le *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*, nous trouvons :

1o Sur un théorème de Boltzmann (8 novembre 1924 et 7 février 1925). — 2o Tenseur électromagnétique et force de Maxwell-Lorentz (5 juin 1926). — 3o Quantification des systèmes relativistiques (avec Fr.-H. van den Dungen, 3 juillet 1926). — 4o Contribution à la quantification relativistique (9 octobre 1926). — 5o Généralisation de l'équation de Schrödinger (5 mars et 2 avril 1927). — 6o Le principe de correspondance déduit de la Gravifique et de la Mécanique ondulatoire (2 août 1927). — 7o Le problème relativistique et quantique des *n* corps (5 novembre 1927). — 8o Équation de quantification des molécules comprenant *n* particules électrisées (3 décembre 1927). — 9o Les statistiques quantiques appliquées aux réactions irréversibles (3 mars 1928). — 10o Le champ photonique (2 juin 1928). — 11o Le principe de correspondance de la Mécanique ondulatoire de Dirac généralisée (2 février 1929).

Dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, nous trouvons :

1o La quantification déduite de la Gravifique einsteinienne (11 octobre 1926). — 2o Interprétation physique de l'équation de quantification des systèmes continus (28 mars 1927). — 3o L'équation fondamentale de la Chimie quantique (10 octobre 1927). — 4o Le problème des *n* corps dans la Théorie de la Relativité (7 novembre 1927). — 5o La Thermodynamique relativiste des systèmes électromagnétiques en mouvement (2 juillet 1928). — 6o Le champ photonique et la généralisation relativiste de la Mécanique ondulatoire de Dirac (7 janvier 1929).

28. Th. De Donder. — Au delà de la Relativité (*Le Flambeau*, Bruxelles, 1er juillet 1929).

29. T. Levi-Civita. — Sugli Invarianti adiabatici (*Atti del Congresso Internazionale dei Fisici*, Como, Settembre 1927, Bologna, Nicola Zanichelli, 1928).
Une publication séparée de ce travail a été faite à Bologne sous forme d'un fascicule in-8° de 40 pages.

30. L. de Broglie. — *Einführung in die Wellenmechanik*. Uebersetzt von Rudolf Peierls (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1929).

31. J. Frenkel. — Einführung in die Wellenmechanik (J. Springer, Berlin, 1929).

32. A. Einstein. — Théorie unitaire du champ physique (*Annales de l'Institut Henri Poincaré*, vol. 1, 1931, fasc. 1, p. 1).

33. Élie Cartan. — Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la Relativité (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 59, 1931, p. 88).

34. Giandomenico Mattioli. — Sopra certi sistemi coordinati associati ad un' ennupla di congruenze (*Rendiconti del Seminario matematico della R. Universita di Padova*, Anno 1, 1930).

35. G. Pfeiffer (Kiew). — Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. 23, 1931, p. 139).

36. A. Buhl. — Tourbillons, Corpuscules, Ondes avec quelques préliminaires sur le rôle des opérateurs en Physique théorique (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. 24, 1932, p. 1).

37. H. Bateman. — *Partial differential Equations of Mathematical Physics*, vol. gr. in-8° de xxii-524 pages (Cambridge University Press, 1932).

38. A. Buhl. — La propagation curviligne d'intégrales invariantes. Cas des intégrales doubles. Propagation corpusculaire (*Comptes rendus*, t. 192, 27 avril 1931, p. 1006).

39. A. Buhl. — Mouvements multiponctuels correspondant à l'équation de Jacobi écrite pour le cas d'un seul point (*Comptes rendus*, t. 194, 2 mai 1932, p. 1562).

40. A. Buhl. — Mouvements multiponctuels correspondant à l'équation de Schrödinger écrite pour le cas d'un seul point (*Comptes rendus*, t. 194, 20 juin 1932, p. 2195).

41. Élie Cartan. — *Leçons sur la Géométrie projective complexe*, d'après des Notes recueillies et rédigées par M. F. Marty (*Cahiers scientifiques* publiés sous la direction de M. Gaston Julia; vol. gr. in-8° de viii-326 pages. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1931).

42. A. Buhl. — Ondes et Corpuscules dans les Espaces à canaux (*Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*, t. 19, 1933, p. 809).

43. U. Crudeli. — Su la Probabilita di presenza dell' elettrone secondo la Meccanica ondulatoria (*Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich*, Bd 2, 1932, S. 309).

44. U. Crudeli. — The Motion of the Probabilistic Fluid of presence of the electron in Relativistic Wawe Mechanics (*The Quarterly Journal of Mathematics*. Oxford Series, vol. 4, n° 14, March 1933).

45. C. G. Darwin. — Sur la Théorie du Rayonnement. Analyse de M. Eugène Néculcéa (*Exposés de Physique théorique publiés sous la Direction de M. Louis de Broglie.* Hermann et Cie, Paris, 1933).

46. Albert Einstein. — *Les Fondements de la Théorie de la Relativité générale. Théorie unitaire de la Gravitation et de l'Électricité. Sur la Structure cosmologique de l'Espace.* Traduit de l'allemand par Maurice Solovine, 110 pages (Hermann et Cie, Paris, 1933).

47. Luther Pfahler Eisenhart. — *Continuous Groups of Transformations*, vol. gr. in-8 de x-302 pages (Princeton University Press, 1933).

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.