Mémorial des sciences mathématiques

H. Dulac

Points singuliers des équations différentielles

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 61 (1934)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1934__61__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,

Professeur à la Sorbonne,

Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LXI

Points singuliers des équations différentielles

Par M. H. DULAC

Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1934

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matieres.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient a cette Bibliographie.

POINTS SINGULIERS

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Par M. H. DULAC,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

I. — INTRODUCTION.

1. Définitions et notations. — 1° Un *point singulier* d'un système différentiel

$$(1) \quad \frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1 x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

est un ensemble de valeurs $x_i = \alpha_i$, telles que l'application directe des théorèmes généraux relatifs à l'existence des solutions des équations différentielles ne donne aucun renseignement sur les solutions du système qui correspondent à ces valeurs initiales. Celles-ci seront dites *valeurs singulières*.

Si l'on se borne, comme nous le ferons, à examiner le cas où, pour les valeurs initiales $x_i = \alpha_i$ considérées, tous les X_i sont holomorphes, les points singuliers du système (1) sont les ensembles de valeurs pour lesquelles tous les X_i sont nuls simultanément. On aura donc, en particulier, à déterminer s'il y a des solutions relatives à ces valeurs singulières et à chercher une représentation analytique de ces solutions dans le voisinage du point singulier.

2° On peut toujours supposer que le point singulier que l'on considère est à l'origine : $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. On supposera qu'il n'existe pas de facteur $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ holomorphe et nul à l'origine, divisant tous les X_i.

Nous supposerons, dans ce fascicule que, sauf avis contraire, les x_i

varient dans le champ des variables complexes. L'application des résultats ainsi obtenus au cas où les équations sont à coefficients réels et où l'on considère les courbes réelles définies par (1) sera exposée dans le fascicule relatif aux « courbes definies par des équations différentielles ».

3° On dira que l'on a une *solution algébroïde nulle* du système (1) si, t étant une variable auxiliaire et i prenant les valeurs 1, 2, ..., n, il existe un système de fonctions $x_i = f_i(t)$ holomorphes et nulles pour $t = 0$ vérifiant les équations (1). Si l'on peut prendre pour t l'une des n variables x_i, on aura une *solution holomorphe nulle*.

Si les fonctions f_i vérifiant le système (1) ne sont pas holomorphes pour $t = 0$, si, par exemple, elles ne deviennent nulles que si t tend vers zéro en restant dans un certain domaine, on dira que l'on a une *solution nulle* de (1)

4° Une transformation

$$(2) \qquad y_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sera dite *régulière*, si tous les F_i sont holomorphes et nuls pour $x_i = 0$, tandis que leur Jacobien n'est pas nul pour $x_i = 0$. Ce changement de variables fait correspondre à (1) un système différentiel de même forme en dy_i et y_i. A une solution nulle de l'un des système correspond une solution nulle de l'autre. A une solution algébroïde ou holomorphe de l'un correspond une solution algébroïde ou holomorphe de l'autre.

5° Une série entière convergente pour des valeurs non nulles des variables sera dite *convergente*, sans qu'on se préoccupe de son domaine de convergence.

Dans certains cas, on obtiendra des séries divergentes pour toutes les valeurs des variables autres que la valeur zéro, On dira, dans ce cas, que la série est *divergente*.

6° Toutes les fois qu'il n'y aura aucune ambiguité à désigner par

$$[x - x_0], \quad [x - x_0, y - y_0]$$

des fonctions d'une variable x, ou de deux variables x et y, holomorphes et nulles pour $x = x_0$, $y = y_0$, nous ferons usage de ces notations. Si les séries entières représentant ces fonctions ne contiennent pas de termes de degré inférieur à n, nous emploierons les notations

$$[x - x_0]_n \quad [x - x_0, y - y_0]_n.$$

Des fonctions de n variables holomorphes et nulles à l'origine seront donc représentées par la notation

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n]_1.$$

2. Remarques sur les méthodes employées. — 1° Dans tous les cas où cela sera possible, nous emploierons de préférence une transformation régulière faisant correspondre d'une manière biunivoque au domaine du point singulier $x_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) d'un système différentiel (1) le domaine d'un point singulier $y_i = 0$ d'un système de forme plus simple, *système réduit*. Dans des cas généraux ce *système réduit* s'intègre en termes finis. On aura à volonté, soit les relations entre les x_i donnant l'intégrale générale de (2) dans le domaine du point singulier, soit les développements exprimant les x_i au moyen de séries entières par rapport à une variable t et des fonctions simples de cette variable. Cependant les méthodes par lesquelles Picard et Poincaré ont obtenu ces résultats, complétés par Bendixson, Lindelöf, Horn, conservent un intérêt théorique et pratique.

Même dans le cas où la variable indépendante x, dont les solutions de (1) doivent être fonctions, est imposée par le problème traité, l'expression des x_i et de x au moyen d'une variable auxiliaire t donne parfois un moyen commode d'étudier les x_i comme fonctions de x.

2° Pour certains points singuliers il n'est pas possible de ramener par une *transformation régulière* le système (1) à un *système réduit* dont on sache étudier les solutions nulles. On est conduit à diviser le domaine D du point singulier $x_i = \alpha_i$ en domaines partiels (D_j) et à faire correspondre aux points de (D_j) les points entourant un point $y_i = 0$, point singulier ou régulier d'un système différentiel (E_j) dont on sait étudier les solutions nulles.

Cette méthode employée déjà par Briot et Bouquet [7] pour $n = 2$, a été appliquée par Bendixson [c, *d*] à l'étude, dans le champ réel pour $n = 2$ des courbes intégrales passant par un point singulier. Elle ne soulève pas, dans ces conditions, les difficultés qui se présentent lorsqu'on veut étudier dans le domaine complexe D les solutions de (1) sans faire l'hypothèse que ces solutions restent dans l'un des domaines partiels (D_j) [11, *e*; 27, *b*].

3° La méthode des approximations successives est appliquée avec succès pour l'étude des points singuliers. Employée d'abord dans ce cas et le domaine réel, pour $n = 1$, par Bendixson [*c*, *d*], Picard [*c*], elle a été étendue au domaine complexe, en particulier par Garnier [*a*, *b*, *c*] et Chazy. Celui-ci et Goursat ont montré que l'on peut retrouver par cette méthode les développements signalés dans 1°. Le champ d'application de la méthode des approximations successives est plus étendu que celui des autres méthodes : elle peut être appliquée à un système

$$(3) \qquad \varphi(x)\,dy_i = g_i(x, y_1, \ldots, y_n)\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dans le cas où $\varphi(x)$ et g_i ne sont pas holomorphes pour les valeurs singulières $x = 0$, $y_i = 0$.

Généralisant la méthode employée par Picard [*c*] dans la recherche des *solutions asymptotiques*, Cotton a montré [*a*, *b*] que l'on peut obtenir ces solutions en faisant des hypothèses peu restrictives sur les equations différentielles. On ramène à ce problème des solutions asymptotiques [10, *b*] la recherche des solutions nulles de (3). Cotton, étudiant, dans le champ réel, les solutions de

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi(x)\,dy = [ax + f(x, y)]\,dx, \\ a = \text{const.} \qquad \varphi(0) = f(0, 0) = f'_x(0, 0) = 0, \end{cases}$$

a montré comment on pouvait reconnaître, dans des cas très généraux, s'il y a une seule solution ou une infinité de solutions nulles. On a une représentation analytique des solutions mises en évidence. Les hypothèses très larges faites sur f et φ permettent de faire rentrer dans ces cas tous ceux que nous aurons à considérer.

4° Si l'on introduit, comme l'ont fait par exemple Birkeland [3], Boutroux [*a*, *c*], un paramètre variable ω dans les équations et si l'on développe suivant les puissances de ω les solutions, on a une représentation analytique, qui est un cas particulier de celles que donnent les approximations successives. Boutroux a donné à ce procédé une portée plus etendue, par des considerations de continuité. Le paramètre ω est choisi de façon que, pour $\omega = 1$, on ait l'equation proposée et pour $\omega = 0$ une équation que l'on sait integrer. En montrant que les propriétés établies pour $\omega = 0$ subsistent pour $\omega = 1$, l'étude de l'équation proposée est effectuée. Toutefois, les demonstrations données sont trop peu explicites pour exclure toute possibilité de cas d'exceptions.

Garnier [*c*] a démontré par l'introduction d'un paramètre que tout point irrégulier d'une équation linéaire peut être regardé comme identique à un ensemble de points réguliers infiniment voisins. Cette conception a éclairci l'étude des *singularités irrégulières*. L'application d'une méthode analogue aux *points singuliers* des équations *differentielles quelconques* serait d'un grand intérêt.

5° Prenons, pour simplifier, au lieu de (1), le système

$$dx = X(x, y)\,dt, \qquad dy = Y(x, y)\,dt.$$

Soit h un accroissement fixe de la variable auxiliaire t.

La solution, qui, pour $t = 0$, prend les valeurs $x = x_0$, $y = y_0$, prend pour $t = h$ les valeurs $x = x_1$, $y = y_1$. On definit ainsi une substitution qui, au point P_0, (x_0, y_0), fait correspondre le point P_1 L'*itération* de cette substitution fournit une suite de points P_2, P_3, ..., P_m relatifs à une solution et renseigne sur la façon dont celle-ci se comporte dans le voisinage d'un point singulier. Si P_m tend vers une position limite P pour m infini, P est un point singulier. Cette *méthode de l'itération* a été appliquée en particulier par Levi Civita [23] et Malmquist [b, c].

6° Considérons le système

$$dy_i = f_i(x, y_1, \ldots, y_m)\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, x).$$

Si pour $x = a$, $y_i = b_i$, les f_i sont continus, mais ne satisfont pas aux conditions de Lipschitz, on a un point singulier P par lequel passent, en général, une infinité de courbes intégrales, ainsi que Peano l'a montré le premier. Cette question a fait l'objet de nombreux travaux relatifs au domaine réel et surtout au cas de $n = 1$. Dans ce cas, il y a parmi les courbes integrales issues du point P une *intégrale supérieure* et une *intégrale inférieure*. Ce n'est que dans le cas où ces deux intégrales coincident qu'il y a une solution unique relative au point P. S'il n'en est pas ainsi, les deux courbes intégrales extrêmes limitent un secteur (S), par tout point de (S) suffisamment voisin de P passe une courbe integrale aboutissant à P. On a cherché des conditions suffisantes et des conditions nécessaires ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait solution unique relative à P. Les démonstrations données ont des points de départ très variés. La méthode des approximations successives et le *principe* de la methode de Cauchy-Lipschitz ont eté fréquemment employés. Certains des cas examinés rentrent dans les cas généraux indiqués par Cotton pour (4). Dans ceux des exemples cités où les f_i sont des quotients de deux fonctions holomorphes pour P, les méthodes données par Briot et Bouquet, complétées par Bendixson, permettent de décider s'il y a ou non solution unique relative à P.

Nous nous bornerons à ces indications pour cette question, qui rentre plutôt dans l'étude des courbes définies par une équation différentielle. On trouvera, avant l'index bibliographique, une liste chronologique spéciale d'articles sur ce sujet.

Pour une raison analogue, nous ne nous occuperons pas de la détermination des solutions asymptotiques réelles et de la stabilité de l'équilibre, questions voisines de celles que nous étudierons. Nous renvoyons pour ces sujets aux exposés de Painlevé, Cotton [*a*, *b*] et au fascicule que ce dernier doit publier dans cette collection « sur les équilibres instables ».

II. — Système différentiel d'équations du premier ordre et du premier degré.

3. Remarques préliminaires. Conditions (*a*), (*b*), (*c*). — 1° Considérons le système (1) dans le cas où les X_i ont des termes du premier degré. En désignant par L_i une forme linéaire et homogène en x_1, x_2, ..., x_n, posons

$$X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L_i + [x_1, x_2, \ldots, x_n]_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on cherche pour le système différentiel

$$\frac{dx_1}{L_1} = \frac{dx_2}{L_2} = \ldots = \frac{dx_n}{L_n} = dt \tag{5}$$

une solution de la forme

$$x_i = C_i e^{\lambda t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

λ et les C_i étant des constantes, les C_i n'étant pas tous nuls, on obtient une équation appelée *équation caractéristique*

$$\Delta(\lambda) = 0. \tag{6}$$

Soient λ_1, λ_2, ..., λ_n les racines de cette équation de degré n en λ.

Soient λ_1, λ_2, ..., λ_n les racines de cette équation

2° On montre [29, c, p. 276] que l'on peut toujours faire pour le système (5) une transformation linéaire

$$z_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

telle que, à toute racine simple λ_i de (6), corresponde une variable z_i vérifiant l'équation

$$dz_i = \lambda_i z_i \, dt, \tag{8}$$

et que, de plus, à toute racine λ_s d'ordre α_s correspondent α_s variables z_i, qui se partagent en groupes de variables $z_\sigma, z_{\sigma+1}, \ldots, z_{\sigma+h-1}$ vérifiant les équations

$$dz_\sigma = \lambda_s z_\sigma, \tag{8'}$$

$$dz_m = (\lambda_s z_m + b_m z_{m-1})\, dt \qquad (b_m \neq 0,\ m = \sigma+1, \sigma+2, \ldots, \sigma+h-1). \tag{9}$$

Le nombre de ces groupes, qui est en général égal à un, peut devenir égal à α_s. Dans ce dernier cas, on n'a que des équations (8′).

On conviendra de faire correspondre à une racine λ, d'ordre α, des valeurs de λ_i au nombre de α, égales entre elles, mais affectées d'indices différents, de façon que, à chaque λ_i, corresponde une variable z_i. Nous supposerons pour le moment que ces indices sont des entiers consécutifs.

3° On appellera *combinaison* des λ_i [18, b; 25] une expression

$$\Sigma q_i \lambda_i = q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + \ldots + q_n\lambda_n,$$

où $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont des entiers positifs ou nuls *dont la somme est supérieure à un.*

4° Dans l'étude du point singulier $x_i = 0$, interviendront certaines conditions [30, b; 29, c; 18, b].

Condition (a). — Représentons par des points, dans le plan de deux axes d'origine ω, les racines réelles ou imaginaires λ_i. On dira qu'on a la *condition* (a), s'il est possible de trouver une droite D passant par ω et laissant tous les points λ_i du même côté de D.

Condition (b). — On dira qu'on a *la condition* (b) pour les variables z_i qui vérifient une équation de la forme (8).

Condition (c). — Si, comme cela a lieu en général, une racine simple ou multiple λ_k n'est égale à aucune *combinaison* de racines λ_i

(avec $\lambda_l \neq \lambda_k$), on dira qu'on a la *condition* (c) *pour* λ_k, ainsi que pour la variable z_k.

Si l'on a *les conditions* (b) *et* (c) pour toutes les variables z_1, z_2, ..., z_n, on dira *qu'on a les conditions* (b) *et* (c).

Si l'on n'a pas la condition (c) pour λ_k, le nombre des combinaisons égales à λ_k est fini si l'on a la condition (a).

5° Nous ferons les conventions suivantes :

A. Si pour λ_j, on a la condition (c) sans avoir la condition (b) et que, par suite, z_j vérifie une équation (9), nous poserons $\varphi_j = b_j z_{j-1}$.

B. Si l'on a la condition (a), on attribue aux racines λ_i des indices tels que la distance des points λ_i à la droite D ne diminue pas lorsque i augmente.

Dans ces conditions, une racine λ_{r+1} ne peut être égale qu'à des combinaisons de racines λ_i d'indice inférieur à $r+1$. Soit une combinaison telle que l'on ait

$$\lambda_{r+1} = q_1\lambda_1 + q_2\lambda_1 + \ldots + q_r\lambda_r. \tag{10}$$

C. Soit λ_{r+1} une racine pour laquelle on a la condition (b), mais non la condition (c), nous aurons au moins une relation (10). Si les racines λ_i qui figurent dans le second membre de (10) sont simples, nous faisons correspondre à cette combinaison le terme

$$A z_1^{q_1} z_2^{q_2}, \ldots, z_r^{q_r} \qquad (A = \text{constante arbitraire}).$$

Si, parmi ces racines λ_i, figurent des racines multiples, on peut toujours supposer que chacune de celles-ci ne figure que dans un seul terme de (10).

Soit $q_i\lambda_i$ le terme relatif à une racine λ_i d'ordre α_i, égal ou supérieur à un. On fera correspondre à (10) le polynome P *le plus général* satisfaisant à la condition suivante :

Quelle que soit la racine λ_i *figurant dans le second membre de la combinaison* (10) *que l'on considère*, P *est homogène et de degré* q_i *par rapport aux* α_i *variables qui correspondent à* λ_i.

S'il y a une seule combinaison égale à λ_{r+1}, on posera $\varphi_{r+1} = P$.

Si plusieurs combinaisons telles que (10) sont égales à λ_{r+1}, on désignera par φ_{r+1} *la somme des polynomes* P *associés à ces diverses combinaisons*.

D. Si l'on n'a ni la condition (b), ni la condition (c) pour λ_{r+1}, on désignera par φ_{r+1} *le polynome obtenu en ajoutant le terme* $b_{r+1}z_r$ *au polynome qui a été défini dans* C.

4. Simplification du système si l'on a les conditions (a), (b), (c). — Si l'on effectue la transformation (7), le système (1) est remplacé par le système

$$(11) \qquad dz_i = Z_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

t est une variable auxiliaire; Z_i, qui ne contient pas t, est une série entière dont les termes du premier degré en $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont identiques au second membre de l'équation (8) ou (9) d'indice i. Nous appellerons ce système (11) *système intermédiaire*.

Si l'on considère les diverses équations aux dérivées partielles

$$(12) \qquad Z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + Z_2\frac{\partial f}{\partial z_2} + \ldots + Z_n\frac{\partial f}{\partial z_n} - \lambda_i f = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

on montre que chacune de ces équations admet [30, b; 29, c] si l'on a les conditions (b) et (c) une solution

$$f = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_i + [z_1, z_2, \ldots, z_n]_2.$$

Les séries f_i sont convergentes si l'on a la condition (a).

Si l'on ne supposait plus que l'on ait les conditions (a), (b), (c), les séries f_i existeraient formellement pour les valeurs de i telles que l'on ait les conditions (b) et (c), mais elles *pourraient être divergentes* si l'on n'a pas la condition (a) [11, b; p. 25].

En faisant le changement de variables

$$(13) \qquad y_i = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le système (10) est remplacé par le système [11, k]

$$(14) \qquad dy_i = \lambda_i y_i\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'intégrale générale de (13) est donnée par

$$y_i = C_i e^{\lambda_i t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ C_i = \text{const.}),$$
$$y_i^{\lambda_1} = c_i y_1^{\lambda_i}: \qquad y_i y_1^{\nu_i} = K_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n;\ \lambda_1\nu_i = -\lambda_i).$$

D'après (7) et (13), on a

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1\ x_2, \ldots, x_n]_1$$

et l'intégrale générale du système (1) est donnée [30, *b*] par

$$F_i^{\lambda_1} = C_i F_1^{\lambda_i} \qquad i = 2, 3, \ldots, n).$$

Les variables x_i, ainsi que les variables z_i s'expriment au moyen de fonctions des y_i holomorphes et nulles à l'origine. Si l'on pose

$$u = e^t, \qquad y_i = C_i u^{\lambda_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on aura pour les x_i et les y_i les développements donnés par Picard [*a*, *b*, *c*] et Poincaré [*b*].

Ces développements sont convergents si les quantités $|C_i u^{\lambda_i}|$ sont suffisamment petites. On pourra toujours faire tendre t vers l'infini, de manière que ces développements soient convergents et tendent vers zéro. En effet, la condition (a) est nécessaire et suffisante pour que l'on puisse faire tendre t vers l'infini, de manière que toutes les quantités $u^{\lambda_i} = e^{\lambda_i t}$ tendent simultanément vers zéro [18, *b*].

Ces développements dépendent de $n - 1$ constantes arbitraires : en remplaçant t par $t + h$ et choisissant convenablement h, on peut supposer $c_1 = 1$.

Tous ces résultats sont des corollaires du théorème suivant :

Si l'on a les conditions (a), (b), (c), *il existe une transformation régulière telle que le système* (1) *prenne la forme* (14).

5. Simplification du système (1) si l'on a la seule condition (a). — Pour p des variables z_i, on a les conditions (b) et (c); p peut varier de 1 à $n - 1$. En modifiant, pour ces seules p variables z_i, les conventions du n° 3, 2°, on attribuera à ces variables et aux racines λ_i correspondantes les indices $1, 2, \ldots, p$. Les indices des autres variables restent fixés par les conventions du n° 3. Une racine λ_{r+1} ne pourra être égale qu'à une combinaison de λ_i d'indices inférieurs à $r + 1$. Le polynome φ_{r+1} ne dépendra que de $z_1, z_2, \ldots, z_r$ [11, *k*].

Considérons, pour $i = 1, 2, \ldots, p$ les équations (12) et le changement de p variables défini par les équations (13).

Ce qui a été dit au n° 4 subsiste, et l'on aura p équations (14) remplaçant les p équations (11) de même indice.

Les autres équations (11) sont remplacées par les équations

$$(15) \quad \begin{cases} \dfrac{dz_m}{dt} = Z'_m = \lambda_m z_m + b_m z_{m-1} + [y_1, \ldots, y_p, z_{p+1}, \ldots, z_n]_2 \\ \qquad\qquad (m = p + 1, p + 2, \ldots, n), \end{cases}$$

b_{p+1} n'est différent de zéro que si l'on a $\lambda_{p+1} = \lambda_p$, on prend dans ce cas $z_p = y_p$. Introduisons dans (12) les nouvelles variables y et considérons

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{m=p+1}^{n} Z'_m \frac{\partial f}{\partial z_m} - \lambda_{p+1} f = 0.$$

Si l'on cherche pour cette équation une solution de la forme

$$(16) \quad f = f_{p+1}(y_1, \ldots, y_p, z_{p+1}, \ldots, z_n) \equiv [y_1, \ldots, y_p, z_{p+1} \ldots, z_n]_1$$

il se présentera en général une impossibilité dans la détermination des termes de f semblables aux termes qui figurent dans le polynome φ_{p+r}. Considérons alors pour $r = p$ l'équation

$$(17) \qquad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} + \sum_{m=r+1}^{n} Z'_m \frac{\partial f}{\partial z_m} - \lambda_{r+1} f = \varphi_{r+1}(y_1, \ldots, y_r).$$

On montre [25; 2, a; 11, k], que l'on peut déterminer les coefficients arbitraires du polynome φ_{r+1}, de manière que l'équation (17) admette une solution de la forme (16).

Les coefficients des termes de f, semblables aux termes de φ_{r+1} restent arbitraires. On peut les prendre nuls. La série f sera convergente si l'on a la condition (a).

Si l'on remplace pour $r = p$ la variable z_{r+1} par y_{r+1} définie par

$$y_{r+1} = f_{r+1} \equiv z_{r+1} + [y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_n]_2$$

l'équation (11) relative à $i = r + 1$ est, pour $r = p$, remplacée par

$$\frac{dy_{r+1}}{dt} = \lambda_{r+1} y_{r+1} + \varphi_{r+1}(y_1, \ldots, y_r).$$

Le raisonnement qui vient d'être indiqué pour $r = p$ peut se répéter sans modification pour $r = p + 1$, et ainsi de suite. Le *système intermédiaire* (11) sera remplacé par le système

$$(18) \qquad dy_j = \lambda_j y_j \, dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(19) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dy_m = [\lambda_m y_m + \varphi_m(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})] \, dt \\ \qquad (m = p + 1, p + 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

On a donc le théorème suivant :

Si l'on a la condition (a), *il existe une transformation régu-*

lière et des polynomes φ_m (ne contenant que des variables d'indices inférieurs à m) tels que le système (1) *soit remplacé par le système* (18), (19).

Les coefficients des φ_m se déterminent par des équations du premier degré si l'équation (6) est resolue. Certains des polynomes φ_s peuvent avoir tous leurs coefficients nuls; s'il en est ainsi, on dira que *l'on a la condition* (*c*) *pour* y_s.

Si l'on remplace dans φ_m les y_i par $C_i e^{\lambda_i t}$ on a l'identité

$$(20) \quad \varphi_m(C_1 e^{\lambda_1 t}, C_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, C_{m-1} e^{\lambda_{m-1} t}) = e^{\lambda_m t} \varphi_m(C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}).$$

6. Intégration du système si l'on a la seule condition (a) **:**

1° *Intégration du système* (18), (19). — Soient C_i des constantes. Les équations (18) donnent

$$(21) \qquad y_j = C_j e^{\lambda_j t} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Désignons par s les valeurs de l'indice m telles que φ_s ne contienne pas d'autres variables que $y_1, y_2, \ldots, y_p$. D'après (20), on aura

$$(22) \qquad y_s = [C_s + t\varphi_s(C_1, \ldots, C_p)] e^{\lambda t}.$$

L'intégration des autres équations (19) s'obtient par l'intégration d'équations successives de la forme

$$dy_m = [\lambda_m y_m + e^{\lambda_m t} Q_m(t, C_i)] dt,$$

dont l'intégrale générale est

$$(23) \qquad y_m = [C_m + P_m(t, C_i)] e^{\lambda_m t},$$

Q_m et P_m sont des polynomes qui ne dépendent que de t et des C_i avec $i < m$.

2° *Développement de Horn* [*b*]. — Posons $\theta_j = e^{\lambda_j t}$ pour celles des racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ qui sont distinctes. Toutes les exponentielles $e^{\lambda_m t}$ sont des produits de puissances entières des θ_j. Dans les expressions (22) et (23) ne figurent que des termes $t^h e^{\lambda_m t}$, ceux-ci sont des produits de puissances entières des quantités $\theta_{\sigma j} = t^\sigma e^{\lambda_j t}$. On a $j = 1, 2, \ldots, p$. L'entier σ ne prend qu'un nombre fini de valeurs donné par les degrés en t des polynomes P_m.

Les variables x_i ou z_i s'expriment au moyen de fonctions des y_i

holomorphes et nulles pour $y_i = 0$. L'intégrale générale du système (1) ou (11) sera donnée par les expressions des x_i ou des z_i au moyen de séries entières en θ_j et θ_{σ_j} dépendant de $n - 1$ constantes. La condition (a) qui permet d'affirmer la convergence de ces séries permet également de montrer que l'on peut faire croître t indéfiniment de manière que les θ tendent simultanément vers zéro.

L'existence de ces développements, généralisant les développements de Picard [c] avait été démontrée par Kœnigsberger dans le cas où l'on a les conditions (a) et (b). Leur possibilité résultait des intégrales obtenues par Bendixson [a] si l'on a les conditions (a) et (c); par Lindelöf si l'on a les conditions (a) et (b). Des développements analogues ont été indiqués par Liapounoff.

On obtient directement ces développements en employant comme l'ont indiqué Picard [c] et Horn [b] la méthode des coefficients indéterminés. On peut encore les obtenir sous forme de séries entières en $C_1, C_2, \ldots, C_n$ [11, k].

3° *Intégrales de Lindelof* [25; 2, a; 11, k]. — On peut toujours supposer $\lambda_1 = 1$ puisqu'on a la condition (a). Les équations (18) donnent les intégrales

$$y_j = c_i y_1^{\lambda_j} \qquad (j = 2, 3, \ldots, p). \tag{24}$$

On obtient, d'après (20) et (22), en posant

$$C_{p+1} = c\varphi_{p+1}(C_1, \ldots, C_p), \qquad \varphi \equiv \varphi_{p+1}(y_1, \ldots, y_p),$$
$$\frac{y_{p+1}}{\varphi} - t = c, \qquad \frac{y_{p+1}}{\varphi} - \log y_1 = c. \tag{25}$$

Si l'indice s prend d'autres valeurs que $p + 1$, on aura, pour chacune d'elles, l'intégrale

$$\frac{y_{p+1}}{\varphi} - \frac{y_s}{\varphi_s(y_1, \ldots, y_p)} = c_s. \tag{26}$$

On montre de proche en proche, en se servant de (21), (22) et de

$$C_n e^{\lambda_m t} = c_m \varphi_m(C_1, \ldots, C_{m-1}) e^{\lambda_m t} = c_m \varphi_m(y_1, \ldots, y_{m-1}),$$

où c_m est une nouvelle constante, que les équations (23) donnent des relations

$$y_m = c_m \varphi_m(y_1, \ldots, y_{m-1}) + F_m(t, y_1, \ldots, y_{m-1}), \tag{27}$$

F_m est un polynome en t et en $y_1, \ldots, y_{m-1}$. En remplaçant dans (27) t par sa valeur tirée de (25), on a

$$(28) \qquad y_m = c_m \varphi_m(y_1, \ldots, y_{m-1}) + H_m(c, y_1, \ldots, y_{m-1}),$$

H_m est un polynome en c, dont les coefficients sont des fractions rationnelles où ne figurent en dénominateur que des puissances de φ.

Les équations (18) et (19) ne changeant pas en remplaçant t par $t+h$, on peut sans modifier l'ensemble des valeurs y_i constituant une solution, remplacer dans toutes les équations t par $t+h$; c est remplacé par $c+h$. Les constantes C_m sont modifiees, mais les constantes c_m ne le sont pas. La relation (28) étant vérifiée quel que soit c, en laissant fixe c_m, les coefficients des diverses puissances de c sont nuls. Les termes indépendants de c donnent l'intégrale

$$y_m - R_m(y_1, \ldots, y_{m-1}) = c_m \varphi_m(y_1, \ldots, y_{m-1}),$$

R_m est le quotient d'un polynome en $y_1, \ldots, y_{m-1}$ par une puissance de φ.

Les intégrales ainsi obtenues ont été données par Lindelof si l'on a les conditions (a) et (b), par Bendixson si l'on a les conditions (a) et (c).

7. **Cas où l'on n'a pas la condition** (a). — Supposons que les points λ_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) soient situés d'un côté d'une droite D passant par l'origine ω, tandis que les points λ_r ($r = m+1, m+2, \ldots, n$) ou bien coincident avec ω, ou bien sont de l'autre côté de D. Écrivons le *système intermédiaire* (11) sous la forme

$$(29) \qquad \frac{dz_j}{dt} = Z_j \equiv \lambda_j z_j + b_j z_{j-1} + [z_1, \ldots, z_n]_2 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_r}{dt} = Z_r \equiv \lambda_r z_r + b_r z_{r-1} + [z_1, \ldots, z_n]_2 \\ \qquad (r = m+1,\ m+2, \ldots, n]. \end{cases}$$

Certaines des constantes b_j sont nulles et en particulier b_1 et b_{m+1}. Cherchons des relations

$$(31) \qquad z_r = f_r(z_1, z_2, \ldots, z_m) \qquad (r \equiv m+1, m+2, \ldots, n)$$

telles que les fonctions qui vérifient les équations (29) et (31) soient solutions du système (29), (30). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les f_r vérifient les équations

$$\sum_{j=1}^{m} Z_j(z_1, \ldots, z_m, f_{m+1}, \ldots, f_m)\frac{\partial f_r}{\partial z_j} = Z_r(z_1, \ldots, z_m, f_{m+1}, \ldots, f_n).$$

On montre [30, e, f; 24, p. 310; 11, k) qu'on peut toujours vérifier ces équations par un système de séries convergentes.

$$f_r = [z_1, z_2, \ldots, z_m]_2.$$

En remplaçant dans (29) les z_r par les f_r, on a un système

$$(29') \qquad \frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j = b_j z_{j-1} + [z_1, z_2, \ldots, z_m]_2 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)\cdot$$

à m variables pour lequel la condition (a) est vérifiée.

Les solutions de ce système s'obtiennent par les formules du n° 5 ou du n° 6, suivant que les conditions (b) et (c) sont ou ne sont pas vérifiées. Ces formules et (31) fournissent des solutions particulières nulles de (1) dépendant de $m - 1$ constantes.

On obtient ainsi les développements donnés par Picard, Poincaré, Horn, Liapounoff.

En permutant le rôle joué par les équations (29) et (30) on obtient des solutions dépendant de $n - m - 1$ constantes si aucun des λ_r n'est nul. Les diverses positions possibles de D donneront chacune deux familles de solutions.

Si, dans le système (29), (30), on fait le changement de variables

$$y_r = z_r - f_r(z_1, \ldots, z_m) \qquad (r = m+1, m+2, \ldots, n),$$

les équations (30) sont remplacées par des équations en dy_r dont les seconds menbres sont nuls, quels que soient les z_j, si tous les y_r sont nuls.

8. **Systèmes dont certaines équations sont régulières.** — Soit le système

$$(32) \qquad dx_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; x)\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(33) \qquad dx = X(x_1, x_2, \ldots, x_n; x)\,dx_1 \qquad \text{d'où} \qquad dx = XX_1\,dt,$$

X et X_i seront des polynomes en x dont les coefficients sont des séries entières en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Le point $x_i = 0$, $x = c$ peut être un point singulier du système, bien que l'équation (33) soit régulière. Proposons-nous de chercher les solutions relatives aux valeurs initiales $x_i = 0$, $x = c$ [27, c, p. 24; 11, m].

I. Considérons le cas où l'une au moins des expressions

$$X_i(0, 0, \ldots, 0; x)$$

n'est pas nulle quel que soit x.

1° Si l'on a par exemple $X_2(0, 0, \ldots, 0; c) \neq 0$ et si l'on considère $x, x_1, x_3, \ldots, x_n$ comme des fonctions de x_2, on a n équations différentielles régulières pour $x_i = 0$, $x = c$. *Ce point n'est pas un point singulier*

2° Si l'on a $X_i(0, 0, \ldots, 0; c) = 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on est dans le cas d'un point singulier $x_i = 0$, $x = c$ auquel s'applique ce qui a été dit pour le cas où la condition (a) n'est pas vérifié. En effet, *l'équation caractéristique a au moins une racine nulle.*

II. Plaçons-nous dans le cas où les $X_i(0, 0, \ldots, 0; x)$ sont nuls quel que soit x :

1° *Les coefficients des termes du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des X_i ne dépendent pas de x.* Formons l'équation caractéristique relative aux termes du premier degré des équations (32) et supposons, comme au n° 7, que les racines $\lambda_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ soient les seules racines situées d'un certain côté d'une droite D.

Pour chercher les solutions relatives aux valeurs initiales $x = c$, $x_i = 0$, faisons la substitution $x = c + z$, en même temps que le changement linéaire qui substituant z_1, z_2, z_n à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ramène le système (32) à la *forme intermédiaire* (11). Les équations (32) et (33) sont remplacées par

$$(34) \quad \frac{dz_j}{dt} = Z_j \equiv \lambda_j z_j + b_j z_{j-1} + [z_1, \ldots, z_n, z]_2 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dz_r}{dt} = Z_r \equiv \lambda_r z_r + b_r z_{r-1} + [z_1, \ldots, z_n, z]_2, \\ \qquad (r = m+1, m+2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

$$(36) \quad \frac{dz}{dt} = Z = \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n + [z_1, \ldots, z_n, z]_2,$$

$$(37) \quad z_r = f_r(z_1, \ldots, z_m), \qquad z = f(z_1, \ldots, z_m) \qquad (r = m+1, m+2, \ldots, n).$$

On montre, comme au n° 7, qu'il existe des relations telles que les fonctions qui vérifient les équations (34) et (37) vérifient le système (34), (35), (36). f et les f_r dépendent de c, comme Z et les Z_i. On voit donc comme au n° 7 que le système (32), (33) admet des solutions, dépendant de $m - 1$ constantes, relatives aux valeurs initiales considérées.

2° Les coefficients des termes du premier degré en $x_1, \ldots, x_n$ des X_i dépendent de x. Posons d'abord $x = c + z$.

Formons l'équation caractéristique relative aux termes du premier degré en $x_1 \ldots x_n$ qui restent dans les X_i, lorsqu'on fait $z = 0$. Les racines de cette équation dépendront, dans ce cas, de c; le nombre m pourra changer avec c. Ces différences avec II, 1°, peuvent compliquer singulièrement l'application de la méthode, mais elles laissent subsister le raisonnement et les conclusions précédentes.

Le même raisonnement s'appliquerait quel que soit le nombre des équations régulières adjointes au système (32).

9. Solutions algébroïdes relatives à un point singulier [21; 13, t. 3; 11, k]. — 1° Si l'on a les conditions (a), (b), (c) le système réduit (14) permet de voir les diverses circonstances qui se présentent dans la recherche des solutions algébroïdes nulles de (1). On a n solutions holomorphes obtenues en annulant tous les y_i sauf un. Il n'y a d'autres solutions algébroïdes nulles que si le rapport de deux des λ_i est un nombre rationnel positif. Si l'on a par exemple $r\lambda_1 = s\lambda_2$, r et s étant entiers, et que l'on prenne

$$y_1^r = C y_2^s, \qquad y_3 = y_4 = \ldots = y_n = 0.$$

On a une infinité de solutions algébroïdes nulles de (1). Solutions holomorphes si r ou s est égal à un.

2° *Si l'on a la condition* (a), *mais non* (b) et (c), on doit pour obtenir des solutions holomorphes du système réduit (18), (19) annuler tous les polynomes φ_m. Cette obligation fait disparaître un certain nombre des n solutions holomorphes du cas 1°, *mais il reste toujours au moins une solution holomorphe*. Il peut y avoir d'autres solutions algébroïdes et en particulier holomorphes dépendant de constantes arbitraires. On les obtient en cherchant les solutions de (18), (19) assujetties aux conditions $\varphi_m = 0$.

3° *Si l'on n'a pas la condition* (a) et *si aucun des* λ_i *n'est nul*, considérons une droite D, passant par l'origine ω, ayant d'un côté les points λ_γ ($\gamma = 1, 2, \ldots, m$) et de l'autre les $n - m$ autres points λ_i

Si l'on a les conditions (b) et (c) pour les variables $z_1, z_2, \ldots, z_m$, le système ($29'$) fournira m solutions holomorphes nulles de (1). De même, si l'on a les conditions (b) et (c) pour $z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_m$, on aura $n-m$ solutions holomorphes de (1). Il y a donc, *si l'on a les conditions* (b) *et* (c), *n solutions holomorphes nulles, que l'on ait ou non la condition* (a), *pourvu qu'aucun des* λ_i *ne soit nul.*

4° Si certains des λ_i sont nuls, des solutions holomorphes disparaissent en général. Si par exemple $\lambda_1 = 0$ et si, le système étant mis sous la forme intermédiaire (11), on cherche à déterminer des séries entières $y_j = [y_1]_1$ ($j = 2, 3, \ldots, n$) vérifiant les équations (11) (dt étant éliminé), on obtient des séries vérifiant formellement les équations, mais *ces séries sont divergentes*, si les coefficients des équations sont quelconques.

5° Pour obtenir les solutions holomorphes dont on a parlé dans 1°, 2°, 3°, il est commode de mettre le système (1) sous la forme intermédiaire (11), mais il serait long d'utiliser la transformation conduisant au *système réduit*. La connaissance des λ_i et de la forme de ce *système réduit* permet de prévoir les circonstances qui se présentent dans la recherche des solutions holomorphes, et l'on obtient celles-ci par le système (11) et la méthode des coefficients indéterminés.

10. Classification provisoire des points singuliers. — On peut, d'après ce qui précède, distinguer trois catégories de points singuliers, suivant que l'équation caractéristique admet ou non des racines nulles.

1° *Aucune racine nulle.* On a un *point singulier simple.* Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le point singulier soit un point d'intersection simple des surfaces $X_i = 0$.

2° *Au moins une racine nulle et au moins une racine non nulle.* On a un *point singulier exceptionnel.*

3° Toutes les racines nulles. On a un *point singulier multiple.*

Dans les cas 1° et 2° on a toujours au moins une solution holomorphe nulle (le point singulier étant à l'origine). Dans le cas 1°, les séries entières nulles pour la valeur zéro de la variable et qui vérifient formellement les équations, sont convergentes.

Certaines d'entre elles sont en général divergentes dans le cas 2°.

Si les coefficients des équations sont quelconques, il y a n solutions holomorphes dons le cas 1°, moins de n en général, dans le cas 2°. Dans le cas 3°, il y a en général plus de n solutions holomorphes, mais il peut n'y avoir ni solutions holomorphes, ni solutions algébroïdes.

On peut trouver que les différences signalées n'ont rien d'essentiel. Des différences plus importantes entre les cas 1° et 2° s'accuseraient dans l'étude des solutions non algébroïdes. Comme on le verra pour $n = 2$, certaines solutions présentent dans le cas 2° des singularités que l'on ne rencontre pas dans le cas 1°.

La classification indiquée pourrait cependant être modifiée soit par l'emploi de méthodes différentes de celles exposées ici, soit en considérant les points singuliers à un autre point de vue [6, *a*, p. 106].

En particulier, pour le cas des variables réelles, on est conduit [11, *l*] à une autre classification.

11. Point singulier exceptionnel. — Comme on l'a vu au n° 7, on met en évidence dans ce cas des catégories de solutions tout à fait analogues à celles rencontrées dans le cas où la condition (a) est satisfaite: mais il existe des solutions présentant des singularités plus complexes. On peut, au moins dans certains cas, par la méthode des séries sommables [5], déduire des séries divergentes signalées au n° 10, des solutions nulles, fonctions d'une variable indépendante x, qui sont holomorphes seulement dans certains angles ayant $x = 0$ pour sommet [26, *a*; 31, *c*, *d*].

Ces solutions ont été mises en évidence, dans le champ réel, et représentées analytiquement par Bendixson [*e*], Birkeland.

Les recherches de Garnier [*a*, *b*, *c*] et Chazy fournissent sur des cas particuliers des exemples d'étude détaillée de points singuliers exceptionnels, dans le champ complexe.

Le cas qui a été surtout examiné [21, 13, t. 3] et auquel on peut toujours se ramener par des changements de variables non réguliers, est celui d'un système

$$x^m \frac{dy_i}{dx} = a_i x + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + [x, y_1, \ldots, y_n]_2 \qquad (m > 1).$$

Si le nombre des variables est supérieur à deux, le système (1) peut admettre une infinité de points singuliers formant une multiplicité continue. Il en est ainsi pour le système

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)} \tag{38}$$

si les surfaces $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ passent par une même courbe (Γ). Ce cas a été considéré par Poincaré [e] dans le champ réel, et Malmquist [c] dans le champ complexe.

Tous les points de Γ sont des points singuliers pour lesquels l'équation caractéristique a au moins une racine nulle (*cf.* n° 8).

L'étude de (38) a été faite en se ramenant au cas où (Γ) est $x = 0$, $y = 0$.

Malmquist a formé, par des changements de variables que nous indiquerons (n° 12), des systèmes canoniques fournissant diverses catégories de solutions et fait l'étude de ces solutions.

12. Point singulier multiple. — Toutes les racines λ_i étant nulles, le système (1) se met par un changement linéaire de variables sous la forme

$$\frac{dy_1}{P_1} = \frac{dy_2}{b_2 y_1 + P_2} = \frac{dy_3}{b_3 y_2 + P_3} = \ldots = \frac{dy_n}{b_n y_{n-1} + P_n},$$
$$P_i = [y_1, y_2, \ldots, y_n]_2.$$

Le cas le plus généralement examiné est celui où toutes les constantes b_i sont nulles et où les P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ne contiennent que des termes de degré au moins égal à m, avec $m \geqq 2$.

Les méthodes exposées jusqu'ici dans ce chapitre ne donnent, dans ce cas d'un *point singulier multiple*, aucun renseignement sur les solutions nulles. Leur étude a été abordée en recherchant les solutions nulles pour lesquelles l'une des variables y_r étant prise pour variable indépendante, les autres y_i sont d'un ordre infinitésimal déterminé ν_i.

Dans cette recherche on est amené à faire de nouvelles hypothèses restrictives sur les solutions nulles que l'on veut obtenir. On peut montrer que toutes les solutions ainsi trouvées le sont également en cherchant les solutions algébroïdes nulles, à condition de ne pas négliger les solutions non algébroïdes qui se mettent en évidence au cours de cette recherche. Les méthodes employées sont des extensions des méthodes que nous exposerons avec plus de détails dans le cas de $n = 2$. Les indications que nous allons donner pour $n = 3$ s'appliquent pour $n > 3$.

Considérons le système (38), X, Y, Z étant de la forme $[x, y, z]_m$, $m \geq 1$.

1° La méthode appliquée par Briot et Bouquet pour $n = 2$ a été généralisée par Kœnigsberger, Forsyth, Koopmann. En prenant x pour variable indépendante, on pose

$$y = Ux^{\mu} \qquad z = Vx^{\nu}.$$

On détermine les valeurs des constantes positives μ et ν telles qu'il puisse y avoir des solutions de (38) pour lesquelles U et V tendent respectivement vers des limites finies b et c ($bc \neq 0$), lorsque x tend vers zéro. Ces valeurs μ et ν sont en général rationnelles. On peut, dans le cas de $n = 3$, les déterminer [13, t. 3] par une construction généralisant, dans l'espace, la règle du polygone de Puiseux. Les limites b et c sont, en laissant de côté certains cas d'indétermination, données par deux équations algébriques. Si l'on a $\mu = r : \sigma$, $\nu = s : \sigma$; les entiers r, s, σ n'ayant pas de diviseur commun, posons

$$(39) \qquad x = x_1^{\sigma}, \qquad y = (b + y_1)x_1^{r}, \qquad z = (c + z_1)x_1^{s}.$$

On remplace le système (38) par un *système transformé* admettant, en général, $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ comme point singulier et l'on est ramené à chercher les solutions algébroïdes nulles de ce système. *Après un nombre fini de transformations du type* (39), *on arrive à un certain nombre de systèmes de la forme*

$$(40) \qquad \begin{cases} t^p \dfrac{du}{dt} = a't + b'u + c'v + [t, u, v]_2, \\ t^q \dfrac{dv}{dt} = \alpha t + \beta u + \gamma v + [t, u, v]_2. \end{cases}$$

On est ainsi ramené soit au cas d'un point singulier simple, soit à celui d'un point exceptionnel. Ce dernier cas se produit pour $p > 1$ ou $q > 1$.

Maillet [b, c] a indiqué des procédés de recherche de solutions holomorphes relatives à un point singulier multiple.

Rosenblatt [c] a montré (*cf.* n° 21) que des catégories de solutions algébroïdes qui disparaissent, dans des cas particuliers, sont remplacées par des solutions de la forme

$$y = ux^{\mu}(\log x)^{h} \qquad z = vx^{\nu}(\log x)^{k},$$

μ et ν sont positifs et rationnels; h et k positifs ou négatifs; u et v tendent vers des limites finies lorsque x tend vers zéro.

2° La méthode donnée pour $n=2$ par Bendixson [d] est généralisée de la façon suivante [27, c; 11, m].

Appelons solution *tangentée* de (38) une solution nulle telle que tous les quotients $y:x$, $z:x$, $y:z$ tendent vers des limites finies ou infinies, lorsque x, y, z tendent vers zéro.

Posant

$$y = \mathrm{U}x, \qquad z = \mathrm{V}x,$$

on cherche s'il y a des solutions tangentées telles que U et V tendent vers des limites finies, qui peuvent être nulles. Sauf cas particuliers où il y a une infinité de limites, tous les couples b et c de valeurs possibles des limites de U et V sont définis par deux équations algébriques. On pose

$$(41) \qquad x = x_1, \qquad y = (b+y_1)x_1, \qquad z = (c+z_1)x_1.$$

Si l'on veut chercher les solutions tangentées telles que V croisse indéfiniment, on pose

$$x = x_1 z, \qquad y = \mathrm{T}z,$$

x_1 tend vers zéro. Si T ne croît pas indéfiniment, T tendra vers une limite finie b qui, sauf cas particuliers, sera fournie par une équation algébrique. On pose

$$(42) \qquad x = x_1 z, \qquad y = (b+y_1)z_1, \qquad z = z.$$

Il est facile de montrer que toutes les autres solutions tangentées, qui n'ont pas encore été considérées, seront obtenues en posant

$$(43) \qquad x = x_1 y_1, \qquad y = y_1, \qquad z = z_1 y_1,$$

x_1, y_1, z_1 tendant simultanément vers zéro comme cela a lieu pour (41) et (42). Chacun des changements de variables de la forme (41), (42) ou (43) fournit un *système transformé* dont on est ramené à trouver les solutions nulles pour le point singulier $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$. On se bornera à chercher les solutions tangentées de chacun de ces systèmes, en opérant sur lui comme sur (38).

On démontre qu'*après un nombre fini de transformations* analogues à celles faites, *on est ramené à chercher les solutions nulles d'un certain nombre de systèmes* (40).

Dans des cas particuliers, on arrive à des systèmes dont une ou deux équations sont régulières.

Les solutions algébroïdes nulles de (38). étant des solutions tangentées et fournissant des solutions tangentées des *systèmes transformés*, s'obtiendront donc par cette méthode; mais les équations (40) mettent de plus, en général, en évidence des solutions nulles non algébroïdes.

III. — Point singulier non multiple d'une équation du premier ordre et du premier degré.

13. Diverses formes réduites de l'équation. — Pour étudier le point singulier $x = 0$, $y = 0$ de l'équation

$$(44) \qquad (\alpha x + \beta y + [x, y]_2)\, dy - (ax + by + [x, y]_2)\, dx = 0,$$

il sera commode de la ramener à des formes réduites simples.

Soient λ_1 et λ_2 les racines de l'équation caractéristique

$$(45) \qquad \Delta(\lambda) \equiv (\alpha - \lambda)(b - \lambda) - a\beta = 0.$$

On a la condition (a) (n° 3) si ni λ_1 ni λ_2 ne sont nuls, et si leur rapport λ n'est pas un nombre négatif. Une transformation régulière donne alors une *équation réduite*. On a les deux cas :

(A). *On a les conditions* (b) *et* (c). Il en est ainsi, en particulier, si ni λ, ni $1 : \lambda$ n'est un entier. On a l'équation

$$(46) \qquad u\,dv - \lambda v\, du = 0 \qquad (\lambda \neq 0).$$

(B). *On n'a pas les conditions* (b) *ou* (c). n étant un entier ($n \geqq 1$), on a l'*équation réduite*

$$(47) \qquad u\,dv - (nv + u^n)\, du = 0.$$

Si l'on n'a pas la condition (a), on est dans l'un des trois cas suivants :

(C). *Ni λ_1, ni λ_2 ne sont nuls et leur rapport est négatif.* Un changement linéaire donne l'équation

$$(48) \qquad (X + [X, Y]_2)\, dY + (-\lambda Y + [X, Y]_2)\, dX = 0 \qquad (\lambda \neq 0).$$

Cette équation admet (n° 9, 3°), [7], deux solutions holomorphes nulles

$$Y - f(X) = 0, \qquad X - g(Y) = 0.$$

En prenant pour variables u et v les premiers membres de ces relations, on obtient, après simplification, l'équation

$$(49) \qquad u\,dv + v(\nu + [uv]_1)\,du = 0 \qquad (\nu > 0).$$

(D). *Une seule des racines λ_1, λ_2 est nulle.* Comme dans (C), on obtient (48) avec $\lambda = 0$. Le point singulier $x = 0$, $y = 0$ est un *point exceptionnel.* Une transformation régulière donne [11, b] l'équation

$$(50) \qquad u^{n+1}\,dv = (av + [u, v]_2)\,du \qquad (a \neq 0,\ n \geqq 1).$$

(E). λ_1 et λ_2 sont nuls. Une transformation linéaire donne (n^{os} 4 et 12)

$$(51) \qquad (Y + [X, Y]_2)\,dY = [X, Y]_2\,dX.$$

On a un *point singulier multiple.*

Remarque. — Il est utile, surtout dans les applications, d'employer les procédés suivants pour distinguer les cas énumérés.

Les tangentes à l'origine aux solutions nulles de (44) vérifient

$$(52) \qquad (\alpha x + \beta y)y - (ax + by)x = 0.$$

Pour que ces deux droites se confondent, il faut et il suffit que l'équation (45) ait une racine double.

Convenons de dire que les deux droites

$$(53) \qquad \alpha x + \beta y = 0, \qquad ax + by = 0$$

sont confondues toutes les fois que ces deux équations se réduisent à une seule. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'équation (45) ait une racine nulle.

Si les droites (52) sont distinctes on les prendra pour axes et l'on aura l'équation (48).

Si les droites (52) sont confondues suivant (D′) on prendra (D′) comme axe $X = 0$, l'axe $Y = 0$ étant quelconque passant par O.

On a les cas suivants :

1° *Les droites* (52) *sont distinctes, ainsi que les droites* (53). On obtient l'équation (48) avec $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$.

Si λ est négatif on a le cas (C).

Si λ n'est ni négatif ni un entier ou l'inverse d'un entier positif, on a le cas (A).

Si λ est l'inverse d'un entier on peut, en permutant X et Y, supposer λ entier positif. $\lambda = n$ étant un entier positif. Suivant que l'on a ou non la condition (c) [n° 5], on sera dans le cas (A) ou (B). Pour distinguer les deux cas, on cherche une solution de (48) de la forme

$$Y = a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n + \ldots.$$

Si l'on est arrêté par une impossibilité dans la recherche de a_n, on a le cas (B). S'il ne se présente pas d'impossibilité dans la détermination de a_n, on a le cas (A).

2° *Les droites* (52) *sont distinctes, les droites* (53) *ne le sont pas*. On a le cas (D) : $\lambda = 0$.

3° *Les droites* (52) *sont confondues, les droites* (53) *ne le sont pas*. L'équation devient

$$(X + [XY]_2) dY - (Y + cX + [X, Y]_2 dX = 0.$$

Pour $c \neq 0$ on a le cas (B). On ne peut avoir $c = 0$ que si (52) est une identité. On a alors le cas (A), avec $\lambda = 1$.

4° *Les droites* (52) *sont confondues. les droites* (53) *le sont également*. On a le cas (E).

Conclusion. — Pour étudier un point singulier non multiple, il y a lieu d'étudier le point $u = 0$, $v = 0$ de l'une des équations (46), (47), (49), (50). On appellera ces équations *équations élémentaires*, ainsi que celles qui s'y ramènent par un changement de variables régulier.

14. Étude des équations réduites si l'on a la condition (a) :

I. *Cas* (A). — Considérons les solutions

(54) $$v = cu^\lambda$$

de l'équation (46). Laissant de côté les solutions holomorphes $u=0$, $v=0$, on cherchera dans quel cas et comment v tend vers zéro, lorsque u tend vers zéro.

Si λ est réel, λ est positif [condition (a)], v tend vers zéro avec u.

L'argument de v reste fini ou croît indéfiniment avec celui de u.

Si λ est complexe $\lambda = \alpha + i\beta$, on a [11, b] les résultats suivants, en posant $u = e^{t+i\theta}$, t et θ réels :

1° Pour que u et v tendent simultanément vers zéro, il faut et il suffit que le point de coordonnées t et θ reste dans un certain angle AOB et que la distance de ce point aux deux côtés de l'angle augmente indéfiniment.

2° Soient θ et ω les arguments de u et v. Si u et v tendent simultanément vers zéro, ω et θ croissent en général *tous les deux infiniment*. Ils ne peuvent rester tous les deux finis.

3° Pour $\alpha > 0$, et seulement dans ce cas, on peut faire tendre simultanément u et v vers zero de manière que ω ou θ reste fini. On peut, en particulier, faire en sorte que l'un d'eux tende vers telle limite que l'on voudra.

4° Si l'on considère le rapport $R = v : u^r$, r étant un nombre positif quelconque, on peut faire tendre u et v simultanément vers zéro de manière que R tende soit vers zéro, soit vers l'infini, ou encore ne tende vers aucune limite.

II. *Cas* (B). — La solution générale de (47) est

$$v = cu^n + u^n \log u \qquad (u = t + i\theta). \tag{55}$$

1° v ne tend vers zéro avec u que si t tend vers $-\infty$ et si le produit θe^{nt} tend vers zéro.

2° u et v tendant simultanément vers zéro, ω reste fini ou croît indéfiniment en même temps que θ.

3° Considérons le rapport $R = v : u^r$ pour $r > 0$, u et v tendant simultanément vers zéro. Si l'on a $r \geqq n$, R croît indéfiniment. Si l'on a $r < n$, R tend vers zéro ou croît indéfiniment en même temps que $\theta e^{(n-r)t}$. Si cette expression ne tend ni vers zéro, ni vers l'infini, R ne tend vers aucune limite.

15. Étude de l'équation donnée si l'on a la condition (a). — Étudions [11, b, m] les solutions de (44) en exprimant x et y en fonction de u; v étant donné par (54) ou (55). La transformation régulière qui conduit aux équations réduites peut, en général, s'écrire

$$(56)\quad \begin{cases} x = u(1+[u, v]_1) - av^p(1+[v]_1) & (p \geqq 1,\ a \neq 0), \\ y = v(1+[u, v]_1) - bu^q(1+[u]_1) & (q \geqq 1,\ b \neq 0). \end{cases}$$

Le seul cas où il peut être nécessaire de permuter x et y dans (56) est celui où les trois particularités suivantes se présentent à la fois : 1° On est dans le cas (B). On ne peut donc permuter u et v, comme dans A; 2° l'un au moins des entiers p et q est supérieur à un; 3° x et y ne jouent pas le même rôle dans la propriété à étudier. On veut, par exemple, considérer y comme fonction de x.

Si l'on a, dans (56), $a = 0$, (44) admet la solution $x = 0$.

Pour $p = q = 1$ on a $a \neq b$. On peut trouver des nombres r et r' tels que si l'on a

$$(57)\qquad |x| < r \qquad |y| < r'.$$

1° Toutes les séries entières en x et y qui figurent dans les calculs sont convergentes.

2° Les formules (56) font correspondre à ces valeurs de x et y des valeurs de u et v qui tendent vers zero avec x et y.

On appellera domaine Δ du point singulier l'ensemble des valeurs de x et y vérifiant les conditions (57). Une valeur y telle que l'on ait $|y| < r'$ sera dite appartenir à Δ. On supposera dans ce qui suit que x, y reste dans Δ.

Laissons de côté les solutions holomorphes fournies par $u = 0$ dans les cas (A) et (B) et par $v = 0$ dans le cas (A), pour ne considérer que les solutions relatives à des valeurs initiales x_0, y_0, pour lesquelles les valeurs correspondantes u_0, v_0 ne sont pas nulles.

Certaines des propriétes des solutions de (44) seront différentes selon que $x = 0$ sera ou non solution de (44) et selon que l'on est dans le cas (A) ou (B).

I. *Cas* (A) : $x = 0$ *est solution ou n'est pas solution :*

1° *Si* λ *est réel* et par suite positif, y tend vers zéro, lorsque x tend vers zéro d'une façon quelconque.

2° *Si* λ *est complexe* $\lambda = \alpha + i\beta$, on peut toujours faire tendre u vers zéro de manière que x et y tendent simultanément vers zéro. En général, les arguments de x et y croissent alors tous les deux indéfiniment.

3° Dans le cas où l'on a $\alpha > q$, et où l'on fait tendre u vers zéro avec un argument fini, x et y tendent vers zéro avec un argument fini. Le quotient $y:x$ tend vers une limite finie, qui est le coefficient angulaire de la tangente en O à la courbe intégrale obtenue en faisant $v = 0$ dans (56).

Si l'on a $\alpha > p(\alpha^2 + \beta^2)$ et si l'on fait tendre v vers zéro avec un argument fini, x et y tendent vers zéro avec un argument fini, et $y:x$ tend vers le coefficient angulaire de la tangente en O à la courbe intégrale fournie par $u = 0$.

Les deux conditions $\alpha > q$ et $\alpha > p(\alpha^2 + \beta^2)$ sont incompatibles.

4° *Si* λ *est complexe* et si les arguments de u et v augmentent indéfiniment, lorsque u tend vers zéro, deux cas peuvent se produire.

Si l'on a $p = q = 1$, on peut faire tendre u vers zéro de manière que x et y tendent vers zéro avec des arguments finis. Un exemple bien connu de ce cas est celui d'une équation (44) a coefficients réels pour laquelle λ est complexe (cas d'un foyer). Les courbes intégrales voisines de O admettent O comme point asymptote. x et y tendent vers zéro, leurs arguments sont tantôt zéro, tantôt π, tandis que les arguments de u et v augmentent indéfiniment.

5° Toutes les solutions sont holomorphes à l'origine, si λ est un entier ou l'inverse d'un entier. Elles sont algébroïdes, si λ est rationnel. Dans tous les autres cas, $x = 0$ est un point singulier transcendant pour toutes les solutions $y(x)$ considérées. Une infinité de déterminations de $y(x)$ nulles pour $x = 0$ se permutent autour de $x = 0$.

II. *Cas* (B) : $x = 0$ *est ou n'est pas solution :*

1° x et y tendent simultanément vers zéro si, en posant $u = e^{t+i\theta}$, t tend vers $-\infty$ et θe^{nt} tend vers zéro.

2° Les arguments de x et y restent finis, si θ reste fini, lorsque x et y tendent vers zéro.

3° $x = 0$ est un point singulier transcendant des solutions $y(x)$ nulles pour $x = 0$. Une infinité de ces déterminations de $y(x)$ se permutent autour de $x = 0$.

III. *Cas* (A) *et* (B) : $x = 0$ *est solution :*

1° On peut faire $x = u$; y s'exprime par une série entière en x et cx^λ dans le cas (A), en x et $x^n(c + \log x)$ dans le cas (B) [30, a, 29, c].

2° Dans le cas (B) ou le cas A *avec* λ *complexe* on peut, pour toutes les solutions $y(x)$ considérées, obtenir selon la manière dont on fait tendre x vers zéro, les trois résultats suivants : y tend vers zéro; y reste dans Δ, mais ne tend vers aucune limite; y sort de Δ.

3° On peut déterminer r et r' tels que les solutions $y(x)$ de (44) n'aient pas de point critique pour $|x| < r$, $|y| < r'$.

IV. *Cas* (A) *et* (B) : $x = 0$ *n'est pas solution :*

1° Si x tend vers zéro, ou bien y sort de Δ, ou bien y tend vers une limite qui peut être zéro.

2° y_1 étant arbitrairement choisi dans Δ, on peut trouver des valeurs initiales x_0, y_0 telles que la solution relative à x_0, y_0 soit holomorphe pour $|x| < x_0$ et soit égale à y_1 pour $x = 0$.

3° Dans le cas (A) avec λ complexe, il existe, pour *chacune* des solutions $y(x)$ considérées, des valeurs y_1 aussi voisines de zéro que l'on veut, telles que l'on puisse faire tendre x vers zéro de manière que y tende vers y_1.

Pour l'une quelconque de ces solutions il existe dans Δ des points critiques aussi voisins que l'on veut de zéro. Autour de chacun de ces points se permutent des déterminations (deux en général) dont une au plus est nulle pour $x = 0$. Lorsque partant de $x = 0$ avec une détermination nulle de $y(x)$, on décrit un lacet autour d'un de ces points critiques, ou bien on revient en $x = 0$ avec une détermination non nulle, ou bien y est sorti de Δ.

4° *Si* λ *est réel et irrationnel*, les énoncés de 3° doivent être légèrement modifiés, les valeurs y_1 et les points critiques, toujours en nombre infini, ne sont pas aussi voisins que l'on veut de zéro [6, *a*, *c*], de plus la constante c de l'équation (54) a un module qui ne doit varier que dans certaines limites.

Remarque. — Si dans (44) β n'est pas nul, un changement de variable $y = z + [x]_1$ ramène (44) à la forme

$$z\,dz = (mx + nz + [x, z]_2)\,dx.$$

Les fonctions $y(x)$, $z(x)$ ont les mêmes points critiques, Boutroux [*a*, *c*] a étudié les permutations des solutions $z(x)$.

16. Point singulier simple sans la condition (*a*). — On a le cas (C). Dans (48) λ est négatif. L'équation étant mise sous la forme

$$(58) \qquad x\,dy + y(\nu + A)\,dx = 0 \qquad (\nu > 0,\ A = [x, y]_1),$$

cherchons, comme dans le cas de λ quelconque, à mettre l'intégrale générale de (58) sous la forme

$$H(x, y) \equiv y x^{\nu} h(y, y) = C, \qquad h(x, y) = 1 + [x, y]_1,$$

$h(x, y)$ doit vérifier l'équation aux dérivées partielles

$$x h'_x - (\nu + A) h'_y = A(x, y) h(x, y).$$

Si ν est irrationnel le développement *h existe formellement*, est bien déterminé, mais est *convergent* ou *divergent* suivant les cas [11, *b*].

Si ν est rationnel, $\nu = p : q$ (p et q premiers entre eux), il *survient en général une impossibilité* dans la détermination du coefficient c d'un certain terme $c x^{rp} y^{rq}$. L'entier r déterminé par (58) ne dépend pas de la méthode suivie dans le calcul de h. En général $r = 1$. *Si cette impossibilité ne se produit pas, on peut d'une infinité de façons obtenir une série de $h(x, y)$ convergente* [30, *d*, p. 173; 2, *b*; 11 *b*; 27, *b*].

On a donc les trois cas suivants :

1° *$h(x, y)$ convergent, ν rationnel ou irrationnel.* — Les seules solutions nulles sont $x = 0$, $y = 0$. L'équation (44) n'a pas d'autres solutions nulles que les deux solutions holomorphes;

2° *ν est irrationnel, $h(x, y)$ est divergent.* — Il n'existe, en dehors de $x = 0$, $y = 0$, aucune solution nulle de (58) telles que x ou y tendent vers zéro avec un argument fini. Soient θ et ω les arguments de x et y. On montre [11, *b*] que s'il existe des solutions nulles, autres que $x = 0$, $y = 0$, les expressions $|x^n y^m \theta|$ et $|x^n, y^m \omega|$ croissent toutes les deux indéfiniment lorsque x et y tendent vers zéro, m et n étant des entiers aussi grands que l'on veut;

3° *ν est rationnel et l'on est arrêté par une impossibilité dans la détermination de $h(x, y)$.* — On a toujours dans ce cas une infinité de solutions pour lesquelles x et y tendent simultanément vers zéro [11, *b*; 27, *b*]. Pour toutes ces solution $|x^m y^n \theta|$ et $|x^m y^n \omega|$ croissent indéfiniment si l'on a : $m < rp$, $n < rq$. On met en particulier en évidence des solutions pour lesquelles x et y tendant vers zéro, le module du rapport de y^{rp} et x^{rq} tend vers une limite finie et arbitraire, tandis que l'argument de $x^{pr} y^{rq}$ tend vers une limite fixe.

Dans le cas 1° une transformatfon régulière met les équations (44) et (58) sous la forme (46). Il n'en est jamais ainsi pour les cas 2° et 3°.

Si ν *est rationnel* on ne connaît aucune règle *générale* permettant de décider si l'on est dans le cas 1° ou 2°. Dans le cas 2°, on ne sait s'il existe ou non des solutions nulles autres que $x=0$, $y=0$. Ce sont là deux questions qu'il y aurait grand intérêt à élucider.

Remarques. — I. Les propriétés énoncées dans 2° et 3° pour les arguments de x et y ne subsistent pour l'équation (44) que si cette équation admet les solutions $x=0$, $y=0$. S'il n'en est pas ainsi, il peut y avoir des solutions non holomorphes de (44) telles que x et y tendant vers zero leurs arguments restent finis. C'est ce qui se produit pour le cas général rencontré par Poincaré [30, *d*; 29, *c*] dans la *théorie des centres*. Si dans (44) on a $\alpha=b=0$ et $\beta+a=0$, les autres coefficients étant quelconques, l'équation (45) a pour racines ai et $-ai$. On a $\lambda=-1$. Dans le plan xOy des variables réelles les courbes intégrales sont au voisinage de O des spirales asymptotes à O.

II. Les conditions pour que, ν *étant rationnel*, on soit dans le cas 2° sont en nombre infini. Elles sont distinctes si les coefficients de $A(x, y)$ sont en nombre infini et indépendants les uns des autres. S'il n'en est pas ainsi, ces conditions en nombre infini peuvent se réduire a un nombre fini de relations distinctes. C est ce qui a lieu si les coefficients de dx et dy dans (44) étant des polynomes dont le degré est donné, mais dont les termes de degré supérieur au premier sont indéterminés, on cherche à déterminer ces termes de manière que, λ étant négatif et rationnel, on soit dans le cas 1°. Divers exemples de ce genre ont été donnés [35; 20, *a*, *b*; 11, *f*].

III. Citons quelques résultats qu'il est parfois utile d'employer pour l'étude des solutions de (58) dans les cas 2° et 3° :

1° On peut toujours supposer, à l'aide d'une transformation régulière, que l'on a, dans (58) :

$$A(x, y) = x^m y^n [x, y], \tag{59}$$

m et n sont aussi grands que l'on veut dans le cas 2°. Ils sont assujettis aux conditions : $m \leqq pr$, $n \leqq qr$ dans 3°.

Dans le cas 3° on peut mettre (58) sous la forme

$$x(q + ax^{pr} y^{qr})\,dy + y(p + bx^{pr} y^{qr} + x^m y^n B)\,dy = 0 \qquad B = [x, y],$$

m et n étant aussi grands que l'on veut. On peut déterminer formellement une transformation régulière telle que B soit identiquement nul, mais la série qui définit ce changement peut être divergente [11, g]. Si elle est convergente l'équation obtenue pour $B \equiv 0$ a pour intégrale générale

$$x^{p'} y^{q'} (1 - r x^{p'} y^{q'} \log x^a y^b) = \text{const.}$$

2° a et β étant nuls dans (44), α et b étant positifs, si l'on pose

$$x^{-b} y^{\alpha} = \rho^{\alpha - b}, \qquad \log \frac{x}{y} = u.$$

Bendixson [b] a montré qu'on a une intégrale de la forme

$$P(\rho, u) \equiv \rho + \rho^2 P_2(u) + \ldots + \rho^n P_n(u) + \ldots = \text{const.}$$

Les P_n sont des fonctions de u seul, holomorphes pour $u = 0$. $P(\rho, u)$ converge pour $|u| < G$, $|\rho u| < \delta$. G peut être choisi arbitrairement mais δ est déterminé. La série P n'a pas sa convergence démontrée lorsque $y : x$ tend vers zéro ou l'infini, c'est-à-dire dans le voisinage des solutions holomorphes nulles.

3° $A(x, y)$ ayant la forme (59) avec $n \geqq 1$, supposons α et β positifs et assez petits pour que la somme des valeurs absolues des termes de la serie $A(\alpha, \beta)$ soit inferieure à ν. L'équation (58) admettra une intégrale de la forme

$$y x^{\nu} [1 + x^m y^n g_n(x) + x^m y^{n+1} g_{n+1}(x) + \ldots + x^m y^s y_s(x) + \ldots] = \text{const.}$$

dont le premier membre converge dans le champ complexe, si $|y|$ et $|x^m y^n \theta|$ sont suffisamment petits (θ argument de x) [11, b]. *Dans le champ réel, la série converge pour* $|x| < \alpha$, $|y| < \beta$ [11, l].

Les g_i sont des fonctions de x seul. Dans le cas 2°, ce sont des polynomes en x^{ν} de degré égal à i. Dans le cas 3°, ce sont des polynomes de degre i en $x^{rp} \log x$ et de degré q_{-1} en x^{ν}, Dans les deux cas les coefficients de ces polynomes sont des séries entières en x.

4° Boutroux [a] et Malmquist [b] ont indiqué des séries dépendant d'une constante arbitraire et représentant les solutions de (58) dans une partie de leur domaine d'existence, Ces séries ne convergent pas pour x très voisin de zéro.

17. Point exceptionnel. — Comme on l'a indiqué pour le cas C d'un point exceptionnel, prenons l'équation sous la forme

$$(60)\qquad x^{n+1}\,dy = [y\,A(x) + y^2 B(x, y) + r^r F(x)]\,dx \qquad (A(0) \neq 0),$$

A et F sont des fonctions de x seul, holomorphes pour $x = 0$. On a $B(x, y) = [x, y]$. n et r sont des entiers positifs, n est bien déterminé par l'équation (44), r peut être pris aussi grand que l'on veut. Un changement de variables régulier permet de supposer que l'on a $A(x) = na + bx^n$ et que $B(x, y)$ contient x en facteur [11, b, l]. Si l'équation (60) admet une solution $y = f(x)$ holomorphe et nulle pour $x = 0$ on peut supposer $F(r) \equiv 0$.

1. *Solutions holomorphes nulles.* — En général la seule solution de (60) holomorphe nulle est $x = 0$. Briot et Bouquet ont montré qu'il existe une série

$$(61)\qquad y = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m + \ldots,$$

vérifiant formellement (60). Dans le cas où celle-ci est

$$(62)\qquad x^2 y' = ay + g_0 x + g_1 x^2 + \ldots + g_2 x^{i+1} + \ldots,$$

la série correspondante (61) n'est convergente que si a est un zéro de la fonction entière

$$H(x) \equiv g_0 + g_1 x + g_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + g_i \frac{x^i}{i!} + \ldots.$$

Watanable a donné la condition de convergence de (61) si dans (62) a au lieu d'être constant est égal à $\alpha + \beta x$. Horn a montré [d, t. 120] que si (60) est lineaire, il faut n conditions pour que la série (61) soit convergente [30 *bis*]. On a été assez naturellement amené à en conclure que la série (61) est en général divergente.

Rémoundos [a] pour justifier cette assertion a mis en lumière les raisons de cette divergence et démontré [a, d] les résultats suivants, en considérant plus particulièrement le cas de $n = 1$.

1° Si $A(0)$ est positif, tandis que les autres coefficients des séries A, B, F sont négatifs, la série (61) est divergente;

2° Si l'on suppose tous ces autres coefficients fixes et donnés et si l'on désigne par L l'ensemble des valeurs de $a = A(0)$ telles que (61) soit convergente, L ne comprend aucune aire dans des cas très généraux.

La série (61) étant supposée divergente, Borel [a, b] a montré, dans des cas particuliers, que sa théorie des séries sommables permet d'obtenir en partant de (61) une solution $y(x)$ nulle et fait voir qu'il en était probablement de même dans des cas beaucoup plus généraux. Rémoundos a donné [c] une règle permettant de trouver des cas où la théorie de Borel s'applique. Voir également l'application faite par Maillet [a] d'une généralisation par Le Roy de la méthode de Borel. La solution $y(x)$ ainsi obtenue est définie dans un angle de sommet $x = 0$, qui sera défini plus loin, et admet des dérivées de tout ordre pour $x = 0$.

II. *Solutions quelconques nulles.* — Considérons l'équation (60) où r peut être égal à un. Posons : $A(0) = na$. Appelons *frontières* les droites du plan de la variable complexe x pour lesquelles la partie réelle du quotient $u = a : x^n$ est nulle. Ces droites divisent le plan en secteurs. Appelons *secteurs nuls* ceux pour lesquels la partie réelle de u est positive. Lorsque x tend vers zéro à l'intérieur de l'un de ces secteurs e^{-u} tend vers zéro.

Horn [c, d, e, f, i] et Chazy ont établi dans le champ complexe les résultats suivants qui généralisent ceux obtenus par Bendixson [c, d] et Picard [c] :

1° Désignons par V un angle de sommet $x = 0$, intérieur ainsi que ses côtés à un *secteur nul*. Soient x_0, y_0 des valeurs de module suffisamment petit, x_0 étant dans V. Il existe deux arcs de courbes x_0A', x_0B' coupant les côtés de V en A' et B' distincts de O, tels que la solution $y(x)$ relative aux valeurs initiales, x_0, y_0, soit holomorphe dans le domaine ouvert D limité par $OA'x_0B'O$. Cette solution tend vers zéro, lorsque x tend vers zéro d'une façon quelconque dans V [8].

2° Soit Δ un domaine ouvert constitué par la portion d'un *secteur non nul* Σ limité par un cercle de centre $x = 0$ et de rayon suffisamment petit. Il existe une solution $y(x)$ qui tend vers zéro lorsque x tend vers zéro d'une façon quelconque dans Δ. Cette solution est holomorphe dans Δ. C'est la seule solution qui tende vers zéro, si x tend vers *zéro* suivant un chemin qui n'est pas tangent en $x = 0$ à l'une des frontières de Σ.

3° Toutes les solutions nulles définies dans V, d'après 1°, ainsi que l'unique solution nulle définie dans Δ d'après 2°, peuvent être représentées quel que soit m par

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m z_m, \tag{63}$$

z_m tendant uniformément vers zéro lorsque x tend vers zéro dans V ou Δ. On dit que la série (61) *représente asymptotiquement* ces solutions.

Malmquist [b] a montré que, dans tout angle V' intérieur (côtés compris) à l'angle formé par un secteur non nul Σ et les deux secteurs nuls adjacents, la solution qui tend vers zéro avec x, dans Σ, peut être représentée par (63). z_m tendant uniformément vers zéro lorsque x tend vers zéro dans V'.

4° Si l'on pose $x = ty$, (60) fournit une équation (58) où t remplace x et ν est égal à un. On peut montrer [11, m] que l'on est toujours dans le cas 3° du n° 16. Il y a toujours infinité de solutions nulles pour $t = 0, y = 0$. On met ainsi en évidence [11, b] une infinité de solutions nulles de (60). Ces solutions présentent les particularités suivantes : L'argument de $u = a : x^n$ tend vers l'une des valeurs $\frac{\pi}{2} + k\pi$; x tend donc vers $x = 0$ suivant une courbe tangente en $x = 0$ à une frontière. L'argument ω de y augmente indéfiniment de manière que $|x^n\omega|$ ne tende pas vers zéro. Le module de $y^2 : x$ tend vers une limite finie, autre que zéro. Le quotient $y : x$ croît donc indéfinimént lorsque x et y tendent vers zero. Les systèmes de valeurs de x et y ainsi obtenus ne peuvent être les valeurs prises par x et y pour les solutions de (60) définies, d'après 2° et 3°, dans un angle V, car pour ces solutions $y : x$ tend vers c_1. Ce sont des valeurs prises par x et y pour une solution definie d'après 1° dans V, lorsque x sort de V et tend vers $x = 0$ suivant certaines courbes tangentes en $x = 0$ à une frontière.

5° Cherchons [11, m] ce que devient ω pour les solutions 1° et 2°. Si l'équation (60) admet la solution $y = 0$, on ne doit considérer que les solutions, autres que $y = 0$, définies, d'après 1°, dans un *secteur nul*. ω ne reste fini que si la partie imaginaire de $u = a : x^n$ reste finie lorsque x tend vers zéro. Il faut pour qu'il en soit ainsi (mais cela n'est pas suffisant) que x suive une courbe tangente en $x = 0$ à la bissectrice du secteur nul.

Si (60) n'admet pas la solution $x = 0$, ω reste fini pour toute solution nulle quelle que soit la façon dont x tend vers zéro dans le secteur considéré. Ces résultats montrent, comme on l'a déjà vu (n° 15), que la possibilité de faire tendre simultanément x et y vers zéro, avec un argument fini. dépend souvent non de la nature du point singulier, mais du choix fait pour la fonction y ou la variable x.

Conclusion. — On peut résumer d'une façon un peu sommaire ce qui précède en disant : *Si x tend* vers zéro dans un secteur où les solutions $y(x)$ de

$$(\mathrm{E}) \qquad x^{n+1} y' = \mathrm{A}(0) y,$$

tendent vers zéro, l'équation (60) *a une infinité de solutions qui tendent vers zéro. Si x tend vers zéro dans un secteur où les solutions de* E, *autres que $y = 0$, ne tendent pas vers zéro, une seule solution de* (60) *tend vers zéro.* Cette solution peut être $y = 0$.

III. *Représentations analytiques.* — 1° Les solutions signalées dans 1° et 2° ont été représentées au moyen de séries obtenues de façons fort diverses [**18**, *c*, *e*, *f*, *i*; **2**, *c*, *d*; **29**, *c*; **27**, *a*; **8**]. Parmi ces séries les unes sont valables pour des angles intérieurs aux secteurs nuls, les autres pour des angles intérieurs aux secteurs non nuls. Certaines des représentations par des séries ou par des intégrales de Laplace sont valables pour un secteur non nul et les deux secteurs nuls adjacents. Ce n'est que dans des cas très particuliers que l'on peut représenter par une formule ou une série unique une solution dans tout son domaine d'existence.

2° On ramène, par une transformation régulière à la forme (60), l'équation

$$x^m y' = x(a + [x, y]_1) + y^{n+1}(c + [y]_1) \qquad (c \neq 0), \qquad n > 0,$$

si l'on a $m = 1$. Bendixson [*c*] et Horn [*b*] ont étudié directement, dans ce cas, les solutions réelles nulles pour $x = 0$ et ont donné une représentation de ces solutions.

Pour $m > 1$ Bendixson [*c*, *d*] a étudié les solutions réelles nulles, mais on ne connaît pas de représentation de ces solutions. Ce point singulier $x = 0$, $y = 0$, ainsi que celui dont nous parlerons dans 3°, ne sont pas des points *exceptionnels*, mais des points *singuliers multiples*. Ils ne sont cités ici qu'en raison de l'analogie entre (60) et les équations considérées.

3° Rosenblatt [*b*], considérant l'équation

$$x^m y' = byx^p(1 + [x]_1) + xy[x, y] + cx^n(1 + [y]) \qquad (bc \neq 0),$$

et supposant que l'on a $n \geqq m \geqq 2$, $p \geqq 1$ et que ces exposants vérifient certaines inégalités, a représenté, par des développements convergents, la plupart des solutions $y(x)$ nulles pour $x = 0$.

18. Solutions dans le voisinage d'une singularité essentielle. — Si le second membre de (60) n'est convergent que pour y voisin de zéro, on devra se borner à l'étude purement locale du point singulier $x = 0$, $y = 0$. Il serait artificiel de s'en tenir à ce point de vue, lorsque l'on a une équation valable pour y quelconque. Il y a lieu de chercher ce que devient y lorsque x tend vers zéro. Cette étude a été esquissée par Boutroux [c, p. 183]. Supposons que l'équation, qui a été mise sous la forme (60) pour la commodité de certains raisonnements, soit

$$(65) \qquad x^{n+1}[Q(y) + xH(x, y)]y' = P(y) + xG(x, y) \qquad (n \geqq 1),$$

G et H sont holomorphes pour $x = 0$; P, Q, H, G sont des polynomes en y. Supposons que $P(y)$ n'ait que des racines simples qui n'annulent par $Q(y)$. Soit b l'une quelconque des racines de P. Posons

$$x = \rho e^{i\theta}, \qquad P'(b) = ncQ(b), \qquad c = ae^{i\alpha} \qquad (a > 0, \ 0 < \alpha < 2\pi).$$

La règle du n° 17, III, montre qu'une infinité de solutions de (65) tendent vers b si x tend vers $x = 0$ dans l'un des secteurs tels que

$$y = b + Ce^{-\frac{c}{x^n}} = b + Ce^{-\frac{a\cos(n\theta-\alpha)}{\rho^n}} e^{i\frac{a\sin(\alpha-n\theta)}{\rho^n}}$$

tende vers b. Ces n secteurs définis par la condition $\cos(n\theta - \alpha) > 0$ seront appelés *secteurs nuls pour* b.

Si, comme on vient de le faire, on considère les solutions signalées n° 17, II, 1°, on fera tendre x vers $x = 0$, dans le domaine D où ces solutions sont holomorphes. On dira que, dans ce cas, x *tend directement* vers $x = 0$. Il en est ainsi lorsque x tend vers zéro suivant une droite. Si x tend vers $x = 0$ en restant dans un angle qui ne comprend à son intérieur ou sur ses côtés aucune frontière, on dira que x *tend normalement* vers $x = 0$.

Si x_0 et $y_0 - b$ sont suffisamment petits et si x_0 est dans *un secteur nul pour* b, y tend vers b si x tend directement vers $x = 0$. En dehors de cet énoncé, on ne peut affirmer *a priori*, dans le cas d'une équation générale (65), que lorsque x tend vers zero (même suivant une droite) y tend vers une limite. Si y tend vers une limite cette limite est l'une des racines b_j de $P(y)$.

Dès que P est de degré supérieur à 2, il existe deux secteurs nuls qui ont une partie commune A; par exemple les secteurs nuls pour b_1

et pour b_2. Si x tend vers $x=0$, il y a une infinité de fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ solutions de (65) qui tendent respectivement vers b_1 et b_2. Des exemples simples montrent que certaines de ces fonctions peuvent être des branches d'une même solution $y(x)$ et que ces deux déterminations se permutent lorsque x tendant vers $x=0$ d'une façon quelconque, on tourne autour de points critiques qui peuvent être aussi voisins que l'on veut de $x=0$.

Le cas de $n>1$ se ramene à celui de $n=1$ en remplaçant x^n par x. On introduit ainsi, en général, dans G et H (65) des puissances fractionnaires. Cette circonstance ne modifie pas les énoncés du n° **17**. Elle oblige seulement à faire varier de 0 à $2n\pi$ l'argument de la nouvelle variable x, si G et H contiennent des puissances fractionnaires.

Soient c_j les valeurs de c correspondant aux diverses racines b_j. En remplaçant x par kx les c_j sont divisés par k (pour $n=1$). Si les rapports des c_j sont tous réels, on peut donc supposer réels tous les c_j.

Afin d'avoir, dans un cas simple, un schéma des circonstances qui semblent egalement devoir se présenter dans des cas plus genéraux [6, *c*, p. 183], considérons l'équation [**6**, *c*; **8**; **11**, *m*]

$$x^2 Q(y) y' = P(y). \tag{66}$$

Soient p et q les degrés de P et Q. Si l'on a $q=p-1$ le changement de variable $y=1:v$ donne une équation différentielle ayant $x=0$, $v=0$ pour point exceptionnel, comme les points $x=0$, $y=b_j$ le sont pour (66). Nous supposerons : $q \leq p-1$. L'intégrale générale de (66) est

$$(y-b_1)^{c_1}(y-b_2)^{c_2}\dots(y-b_p)^{c_p} = Ce^{-\frac{1}{x}}.$$

Supposons d'abord que tous les c_j soient réels. Il n'y a qu'une frontière : $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Soient S le secteur pour lequel on a $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et S′ celui pour lequel on a $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ Supposons que pour $r=1, 2, \dots, p'$, on ait $c_r > 0$ et, pour $s = p'+1, p'+2, \dots$, on ait $c_s < 0$.

Ne considérons dans ce qui suit qu'une solution quelconque $y(x)$ de (66), définie par une valeur de C différente de zéro.

Les diverses déterminations de $y(x)$ tendent toujours vers une limite finie ou infinie si x tend *normalement* vers $x=0$. Les limites finies sont les b_r pour S et les b_s pour S′. Pour $q<p-1$, y ne

croît jamais indéfiniment si x tend vers $x=0$. Pour $q=p-1$ la somme $\sigma=c_1+c_2+\ldots+c_p$ n'est pas nulle et des déterminations de y croissent indéfiniment si x tend normalement vers $x=0$ dans S pour $\sigma<0$, et dans S' pour $\sigma>0$.

Toutes les determinations de y peuvent être indéterminées si x tend vers $x=0$ suivant une courbe quelconque tangente en $x=0$ à la frontière.

Soient y_m une racine de $Q(y)$ et ν son ordre de multiplicité. A cette racine correspondent une infinité de points x_m pour lesquels $\nu+1$ déterminations de y deviennent égales à y_m. Ces $\nu+1$ déterminations se permutent entre elles lorsqu'on tourne autour de x_m. Si l'on a $q=p-2-\nu$ avec $\nu>0$, il y a une infinité de points x_∞ pour lesquels $\nu+1$ déterminations deviennent infinies et se permutent autour de ce point. Chacun des ensembles de points x_m ou x_∞ est réparti sur une circonférence C_m (variable avec la solution) tangente en $x=0$ à la frontière. Aucun de ces ensembles n'admet d'autre point limite que $x=0$, si les rapports de c_j sont tous rationnels, c'est-à-dire si y n'admet qu'un nombre fini de déterminations. S'il n'en est pas ainsi, tout point de C_m est point limite de l'ensemble situé sur C_m.

Si y a une infinité de déterminations, il n'y a aucune raison de supposer que les déterminations qui se permutent autour d'un point critique soient celles qui se permutent autour d'un autre point critique du même ensemble. Il paraît vraisemblable que chaque détermination de y n'admet qu'un nombre fini de points critiques.

Si partant d'un point x_0 de S avec une détermination qui tend, par exemple, vers b_1 lorsque x tend normalement vers $x=0$, on décrit un lacet tournant autour de l'un des points critiques de cette détermination, on revient en x_0 avec une autre détermination. Celle-ci, lorsque x tend normalement vers $x=0$, tend soit vers l'infini (si l'un a $\sigma<0$), soit vers l'un des b_r. Elle peut tendre encore vers b_1.

Si α est une valeur différente des b_j, valeur qui peut être $\alpha=\infty$, si l'un a $q<p-1$, $y(x)$ devient egal à α pour une infinité de points x_α dont la disposition est exactement celle qui a été indiquée plus haut pour les points x_m.

On peut vérifier ces diverses propriétés par les équations :

$$x^2y'=y(1-y),\qquad x^2(y^2-1)y'=y(y^2+1),$$
$$x^2(y+1)y'=y(y-1),\qquad 2x^2(y-2)y'=y^2-2.$$

Dans le cas où les rapports des c_j ne sont pas tous réels des particularités nouvelles se présentent. Les frontières de secteurs nuls relatifs à deux racines b_j, b_g ne coïncident que si le rapport de c_j et de c_g est réel. On aura en général p frontières pour $q < p - 1$ et $p + 1$ frontières pour $q = p - 1$. Ces droites divisent le plan en $2p$ ou $2p + 2$ angles de sommet $x = 0$. Pour chacun d'eux, il y a un certain nombre de limites b_j ou l'infini vers lesquelles peuvent tendre une solution $y(x)$, si x tend normalement vers $x = 0$. Il existe effectivement une infinité de déterminations de y qui tendent vers chacune de ces limites, si x tend directement vers $x = 0$.

Contrairement à ce qui a lieu si les c_j ont tous leurs rapports réels, on peut faire en sorte que y ne tende vers aucune limite lorsque x tend normalement vers $x = 0$. Il existe des courbes Γ ne rencontrant pas les frontières, tangentes en O à une droite arbitraire et telles que si x tend vers $x = 0$ suivant Γ, $y(x)$ ne tende vers aucune limite.

A chacune des racines de $Q(y)$ et s'il y a lieu à $y = \infty$ correspondent, comme dans le cas précédent, une infinité de points critiques. Mais, dans ce cas, on peut pour l'un quelconque de ces ensembles de points x_m ou x_∞ trouver des points se rapprochant autant qu'on le veut de $x = 0$ et tels que Δ étant une droite arbitraire issue de $x = 0$, la droite joignant $x = 0$ à $x = x_m$ tende vers Δ lorsque x_m tend vers $x = 0$. Si les c_j n'ont pas tous leurs rapports réels, les frontières n'ont plus le privilège d'être les seules directions d'indétermination ou de voir se condenser dans leur direction les points critiques voisins de $x = 0$. Citons comme exemple les équations

$$x^2(y - 1)y' = y^2 + 1, \qquad x^2(y - 1 + i)y' = y(1 - y).$$

IV. — Point singulier multiple.

19. Point dicritique. — On dira qu'un point singulier $x = 0, y = 0$ est un *point dicritique* lorsque l'équation différentielle est de la forme

$$(67)\qquad \begin{cases} (x\,P(x, y) + F(x, y) + [x, y]_{n+2})\, dy \\ + (-y\,P(x, y) + G(x, y) + [x, y]_{n+2})\, dx = 0, \end{cases}$$

P, F, G sont des polynomes homogènes en x et y, P est de degré $n - 1$, F et G de degré $n + 1$. On dira qu'une direction $\beta x - \alpha y = 0$

est une *direction singulière* si les polynomes

$$P(x, y), \qquad Q(x, y) \equiv yF(x, y) + xG(x, y)$$

sont nuls simultanément pour $x = \alpha$, $y = \beta$. On montre [11, *h*] que :

1° S'*il n'y a pas de direction singulière*, toute solution $y(x)$ relative à des valeurs initiales x_0, y_0 suffisamment petites est, pour $|x| < x_0$, ou *bien holomorphe et tend vers zéro avec* x ou bien algébroïde et l'une au moins de ses déterminations tend vers zéro avec x. Ces diverses déterminations tendent toutes vers zéro avec x si l'équation (67) admet la solution $x = 0$.

2° Pour obtenir les solutions de (67) telles que lorsque x tend vers zéro, le quotient $y : x$ tende vers une valeur c arbitraire on pose $y = (c + y_1)x$ et l'on considère l'équation

$$(68) \qquad (P(1, c) + [x, y_1]_1)\, dy_1 + (Q(1, c) + [x, y_1]_1)\, dx = 0.$$

De même pour trouver les solutions telles que $y : x$ croisse indéfiniment, si x tend vers zéro, on pose : $x = x_1 y$ et l'on considère l'équation

$$(69) \qquad (P(0, 1) + [x_1, y]_1)\, dx_1 = (Q(0, 1) + [x_1, y]_1)\, dy.$$

Si la direction $y = cx$, ou $x = 0$ n'est pas une *direction singulière* l'équation (68) ou (69) nous donne une solution et une seule tangente en $x = 0$, $y = 0$ à la direction considérée. Cette solution est holomorphe ou algébroïde en $x = 0$, $y = 0$.

3° Toute solution nulle de (67) admet en $x = 0$, $y = 0$ une tangente. Si cette tangente $y = cx$ coïncide avec une direction singulière, on considère encore l'équation (68), pour laquelle $x = 0$, $y_1 = 0$ est un point singulier. On est ramené à chercher les solutions nulles de cette équation (68). De même, si $x = 0$ est une direction singulière, on considère l'équation (69) et l'on recherche les solutions nulles de (69). Le point singulier $x = 0$, $y_1 = 0$ ou $x_1 = 0$, $y = 0$, que l'on est ainsi amené à étudier, sera, en général, un point simple, mais il peut être aussi absolument quelconque.

20. Solutions algébroïdes en un point singulier multiple. — A et B étant des polynomes homogènes de degré n en x et y, considérons l'équation

$$(70)\quad \begin{cases} H(x, y)\,dy + K(x, y)\,dx = 0, \\ H = A(x, y) + [x, y]_{n+1}, \qquad K = B(x, y) + [x, y]_{n+1}. \end{cases}$$

Nous supposerons que H et K ne sont pas divisibles par un facteur $M(x, y)$ holomorphe et nul pour $x = 0$, $y = 0$. Nous laisserons aussi de côté les deux cas déjà examinés :

1° $n = 1$, et l'équation (45) n'a pas deux racines nulles;

2° Le polynome

$$yA(x, y) + xB(x, y)$$

est identiquement nul : $x = y = 0$ est alors un *point dicritique*.

Le point de départ de la plupart des méthodes employées pour l'étude du *point singulier multiple* $x = 0$, $y = 0$ est la recherche des solutions algébroïdes nulles. On met ainsi en évidence, avec les solutions algébroïdes, des solutions non algébroïdes nulles, et l'on étend au cas considéré beaucoup de résultats obtenus par un *point singulier simple*.

I. Exposons d'abord, pour la recherche des solutions algébroïdes nulles *la méthode de Briot et Bouquet*, complétée par divers travaux [7; 29, *c*; 18, *a*. 1; 13].

Les solutions algébroïdes font partie des solutions qui, si l'on pose

$$(71)\qquad y = Yx^{\nu}, \qquad xy' = Zx^{\nu},$$

jouissent, en choisissant ν convenablement, de la propriété suivante : si x tend vers zéro, Y et Z tendent vers les limites respectives b et νb, avec $b \neq 0$.

1° *Pour déterminer les valeurs possibles de b et* ν, écrivons (70),

$$(72)\qquad \begin{gathered} xH(x, y)y' + xK(x, y) = 0, \\ yH(x, y) \equiv \Sigma A_{\alpha\beta} y^{\alpha} x^{\beta}, \qquad xK(x, y) \equiv \Sigma B_{\alpha\beta} y^{\alpha} x^{\beta}. \end{gathered}$$

Si l'on remplace dans (72) y et xy' par les expressions (71), on a

$$Z \Sigma A_{\alpha\beta} x^{\beta+\nu\alpha} Y^{\alpha-1} + \Sigma B_{\alpha\beta} x^{\beta+\nu\alpha} Y^{\alpha} = 0.$$

Soit m la plus petite valeur de $\beta + \nu\alpha$. En divisant par x^m, on a

$$ZP(Y) + Q(Y) + \ldots = 0.$$

Les termes non écrits sont nuls pour $x = 0$. Les valeurs possibles de b sont les racines $Y = b$ de l'équation

$$\nu Y P(Y) + Q(Y) = 0. \tag{73}$$

Cette équation, appelée indicatrice, fournira b lorsque ν sera déterminé. Les termes de $YP(Y)$ et de $Q(Y)$ s'obtiennent en faisant $x = 1$ et $y = Y$ respectivement dans les termes de yH et de xK pour lesquels on a $\beta + \nu\alpha = m$. S'il n'y avait pas au moins deux de ces termes, l'équation (73) ne pourrait admettre d'autre racine que $Y = 0$, valeur inacceptable pour b.

On déterminera ν par la condition que les polynomes yH et xK fournissent au moins deux termes pour lesquels $\beta + \nu\alpha$ prennent la valeur minimum. Dans ce but, on construit un contour polygonal appelé *figuratif*, analogue au polygone de Newton-Puiseux. A chaque terme de yH et de xK, on fait correspondre un point d'abscisse α et d'ordonnée β. On trace un contour polygonal, dont les sommets sont certains de ces points, dont les côtés ont des coefficients angulaires négatifs et ne laissent au-dessous d'eux aucun autre de ces points. Les axes ont la disposition habituelle. Par le point le plus bas du contour, on mène une parallèle à $O\alpha$, et par le point le plus à gauche une parallèle à $O\beta$. Il sera commode d'appeler *pente* d'un côté du contour la valeur absolue de son coefficient angulaire.

Les valeurs possibles de ν sont données, les unes par des sommets, les autres par les côtés du figuratif.

2° *Valeurs de ν fournies par les sommets.* — Soit α, β un sommet correspondant à la fois à un terme de yH et à un terme de xK. Ni $A_{\alpha,\beta}$, ni $B_{\alpha,\beta}$ ne doivent être nuls. Si la valeur de ν définie par

$$\nu A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} = 0$$

est comprise entre les pentes des deux côtés du figuratif aboutissant au sommet α, β, il y a une infinité de solutions $y(x)$ d'ordre ν [**18**, a; **1**; **11**, b, i]. A une valeur arbitraire b correspond une solution telle que $y : x^\nu$ tende vers b si x tend vers zéro. Pour ν rationnel, $\nu = r : s$, le changement de variable

$$x = x_1^{s}, \qquad y = y_1 x_1^{r-1} \tag{74}$$

donne une équation admettant $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ comme point dicritique.

Cette équation fournit toutes les solutions $y(x)$ algébroïdes d'ordre ν.

3° *Valeurs de ν fournies par les côtés du figuratif.* — Soit ν la pente d'un des côtés. Sa valeur est l'ordre infinitésimal de la fonction $y(x)$ qui est définie en égalant à zéro la somme de deux termes de $y\mathrm{H}$ ou $x\mathrm{K}$ représentés par deux points distincts situés sur ce côté. ν est rationnel : $\nu = r : s$ et le changement de variable

$$x = x_1^s, \qquad y = \mathrm{Y} x_1^r$$

donne, après simplification, l'équation

$$x_1(\mathrm{P}(\mathrm{Y}) + x_1[x, \mathrm{Y}])\,d\mathrm{Y} + (\mathrm{R}(\mathrm{Y}) + x_1[x_1, \mathrm{Y}])\,dx_1 = 0,$$
$$\mathrm{R}(\mathrm{Y}) \equiv r\mathrm{Y}\mathrm{P}(\mathrm{Y}) + s\mathrm{Q}(\mathrm{Y}).$$

Dans le cas très particulier où $\mathrm{R}(\mathrm{Y})$ est identiquement nul à une valeur arbitraire b correspond une solution algébroïde $y(x)$ telle que Y tende vers b si x tend vers zéro.

Si l'on fait la transformation (74), toutes ces solutions sont fournies par une équation admettant $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ pour point dicritique.

En égalant à zéro le polynome $\mathrm{R}(\mathrm{Y})$, on obtient l'indicatrice (73). Soit b l'une de ses racines, le changement de variable

$$\mathrm{Y} = b + y_1$$

donne une équation appelée *transformée :*

$$x_1 \mathrm{H}_1(x_1, y_1)\,dy_1 + \mathrm{K}_1(x_1, y_1)\,dx_1 = 0.$$

4° On est donc amené à *rechercher les solutions algébroïdes nulles de la transformée.* On a vu comment on trouve ces solutions dans les deux cas suivants :

α. Le point singulier $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ de la transformée est un point singulier simple ou exceptionnel;

β. L'équation transformée admet $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ comme point dicritique, et l'on considère celles de ses solutions algébroïdes nulles qui ne sont pas tangentes en $x_1 = 0$ à une direction singulière.

Si l'on n'est pas dans l'un ou l'autre de ces cas, on applique à la transformée la méthode appliquée à l'équation (70) ou (67). On démontre [1; 27, b] qu'après un nombre fini de transformations, on obtient des transformées pour lesquelles l'un des cas (α) ou (β) se présente.

5° *Conclusions.* — *a.* Un nombre fini de changements de variables

$$x = u^\sigma, \qquad y = u^\rho(b + b_1 u + \ldots + b_m u^m v)$$

ramène toujours la recherche des solutions algébroïdes nulles de (67) ou (70), autres que $x = 0$, à la recherche des solutions $v(u)$ holomorphes nulles pour $u = 0$, vérifiant une équation

$$U(u, v)\,dv + V(u, v)\,du = 0,$$

qui est soit une *équation élémentaire* (n° 13), soit une équation dont $u = 0$, $v = 0$ est un *point dicritique, sans directions singulières.*

b. On peut toujours trouver un entier μ tel qu'en posant $x = u^\mu$, toute solution algebroïde nulle $y(x)$ de (67) ou (70) devienne une fonction $y(u)$ holomorphe et nulle pour $u = 0$.

c. Si dans (70) le polynome A contient un terme en y^n et B un terme en x^n et si les coefficients de A et B sont quelconques, (70) admet $n+1$ solutions holomorphes, et il n'y a pas d'autres solutions algebroïdes nulles. Si l'on n'est pas dans ce cas général, il peut y avoir des solutions algébroïdes données par

$$x = u^s, \qquad y = u^r[(b + \varphi(u)], \qquad b \neq 0, \qquad \varphi(u) = [u]_1.$$

On suppose qu'il n'y a pas de diviseurs communs à r, s et aux exposants des divers termes de φ. Soit q le plus petit des deux entiers r et s. Les diverses solutions algébroïdes données par ces formules comptent pour q solutions.

On dit qu'elles forment un *cycle*. Elles vérifient la relation

$$G(x, y) \equiv y^s + g_1(x) y^{s-1} + \ldots + g_{s-1}(x) y + g_s(x) = 0,$$
$$g_s = b x^r + [x]_{r+1}.$$

Les $g_i(x)$ sont des séries entières en x. Les termes de G sont de degré égal ou supérieur à q.

Toute solution holomorphe nulle compte pour une solution algébroïde. Il en est ainsi, en particulier pour $x = 0$ si dans (70) on a $H(0, y) = 0$.

Avec ces conventions, on peut dire [11, *b*) : *en général, l'équation* (70) *admet* $n+1$ *solutions algébroïdes nulles. Si elle a plus de* $n+1$ *telles solutions, elle en admet une infinité.*

II. *Méthode de Bendixson.* — Il est souvent commode, dans les applications, de rechercher les solutions algébroïdes nulles de (70) par la méthode employée par Bendixson [2, c, d] pour obtenir les courbes intégrales passant par un point singulier.

On trouvera en particulier ces solutions en cherchant les solutions *tangentées* (n° 12), c'est-à-dire telles que, lorsque x et y tendent simultanément vers zéro, $y:x$ tende vers une limite finie ou infinie. Les tangentes en $x=0$, $y=0$ à ces diverses solutions sont données par l'équation

$$yA(x,y)+xB(x,y)=0. \tag{75}$$

Soit $y=cx$ l'une de ces tangentes. En posant

$$y=(c+y_1)x,$$

on obtient une équation différentielle, transformée de (70), dont les solutions nulles fournissent les solutions de (70) tangentes à $y=cx$.

Si $x=0$ est solution de (75), en posant

$$x=x_1y,$$

on a une équation transformée de (70) dont les solutions nulles fournissent les solutions de (70) tangentes à $x=0$. Lorsque l'on est, pour une transformée, dans le cas (α) ou le cas (β), on sait trouver les solutions cherchées.

Dans les autres cas, on est ramené à chercher pour chaque transformée les solutions tangentées. On démontre encore [2, d] que, par un nombre fini de changements de variable de l'une ou l'autre forme indiquée, on arrive toujours à des équations transformées pour lesquelles le cas (α) ou le cas (β) se présente.

21. Solutions non algébroïdes. — On a vu (n° 20, I, 2°) que si la valeur de ν fournie par un sommet est irrationnelle et comprise entre les pentes des deux côtés du figuratif aboutissant à ce sommet, il y a une infinité de solutions $y(x)$ non algébroïdes d'ordre ν. Il en est de même si la valeur de ν donnée par $\nu A_{\alpha\beta}+B_{\gamma\delta}=0$ est un nombre complexe. Les solutions ainsi obtenues sont les seules [11, j] telles que, ν n'étant pas rationnel et pouvant être complexe, $y:x^\nu$ tende vers une limite finie lorsque x et y tendent vers zéro.

La circonstance qui vient d'être signalée pour (70) peut se présenter pour l'une quelconque des transformées employées dans la recherche des solutions algébroïdes. On obtient ainsi des solutions nulles non algébroïdes.

Dans des cas assez généraux, mais qui ne se rencontrent cependant que si des coefficients de (70) vérifient une certaine relation, on trouve [11, b, c] une infinité de solutions nulles de (70) appartenant à l'une des catégories suivantes :

1° *Solutions d'ordre infini.* — $y : x^m$ tend vers zéro avec x si grand que soit m.

Pour que l'équation (70) admette des solutions d'ordre infini, il faut que l'on ait

$$K(x, y) = y F(x, y), \qquad F(x, y) = [x, y],$$

et il suffit ensuite qu'en considérant l'équation

$$H(x, 0)\, dy + y F(x, 0) = 0$$

on obtienne, après simplification, une équation

$$ax^s\, dy + by\, dx \neq 0 \qquad (ab \neq 0,\ s \geqslant 1).$$

Il en est ainsi pour toute équation de la forme

$$(76) \quad (ax^{r+s} + [x]_{r+s+1} + y[x, y])\, dy + y(bx^r + [x]_{r+1} + y[x, y])\, dx \equiv 0$$

ainsi qu'on le montre en faisant le changement de variable,

$$y = v x^{r+s+1}.$$

2° *Solutions d'ordre nul.* — $y : x^m$ croît indéfiniment si petit que soit le nombre positif m.

Pour que l'équation (70) ait des solutions $y(x)$ d'ordre nul, il faut et il suffit qu'elle admette des solutions $x(y)$ d'ordre infini en y. Des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi s'obtiennent en permutant x et y d'une part, H et K d'autre part dans l'énoncé donné dans 1°.

Ces conditions sont satisfaites pour l'équation

$$(77) \quad x(ay^r + [y]_{r+1} + x[x, y])\, dy + (by^{r+s} + [y]_{r+s+1} + x[x, y])\, dx = 0.$$

3° *Solutions d'ordre* $\nu + 0$. — $y : x^m$ tend vers zéro avec x pour $m \leqq \nu$ et croît indéfiniment pour $m > \nu$. Par exemple, $y = x^\nu : \log x$.

Pour que (70) admette des solutions d'ordre $\nu + 0$, il suffit que la pente d'un côté du figuratif soit égale à ν et que si l'on ne conserve dans l'équation différentielle que les seuls termes correspondant à l'extrémité gauche de ce côté, on obtienne, après simplification, l'équation

$$x\,dy - \nu y\,dx = 0.$$

Il en est ainsi en particulier pour $\nu = 1$, et l'équation

$$(x + ay + [x, y]_2)\,dy - (y + [x, y]_2)\,dx = 0 \qquad (a \neq 0).$$

4° *Solutions d'ordre* $\nu - 0$. — $y : x^m$ tend vers zéro pour $m < \nu$ et croît indéfiniment pour $m \geqq \nu$ lorsque x et y tendent vers zero. On a des conditions suffisantes pour que (70) admette des solutions d'ordre $\nu - 0$ en remplaçant, dans l'énoncé donné dans 3°, « gauche » par « droite ».

Rosenblatt a montré [a] que les solutions d'ordre $\nu + 0$ ou $\nu - 0$ peuvent être représentées par

$$y = v x^{\nu} (\log x)^k,$$

v est une fonction de x qui tend vers une limite v_0 lorsque a tend vers zéro. m étant un entier négatif ou positif, et A une constante déterminée par (70), on a

$$km = 1, \qquad v_0^m = \mathrm{A}.$$

A chaque racine v_0 correspondent une infinité de fonctions v.

Si les coefficients des termes de yH et de xK représentés par des points situés sur un côté du figuratif sont quelconques, ce côté fournit un nombre de solutions algébroïdes égal au plus petit des deux entiers mesurant la projection du côté sur les deux axes de coordonnées. Si, par suite de relations particulières entre les coefficients, ce nombre de solutions algébroïdes fournies par ce côté de pente ν diminue, l'un au moins des deux cas suivants se présente [11, *b*, *c*] :

a. Il y a une infinité de solutions $y(x)$ d'ordre $\nu + 0$ *ou* $\nu - 0$;
b. Il y a une infinité de solutions algébroïdes d'ordre ν.

22. Propriétés des solutions. — Certaines propriétés des solutions de (70) dépendent de la possibilité d'avoir pour x et y voisins de zéro une intégrale générale de la forme

$$(78)\qquad F(x, y) \equiv f(x, y) x^{\lambda_0} \prod_{j=1}^{m'} [y + \varphi_j(x)]^{\lambda_j} = \text{const.},$$

$f(x,y)$ est une fonction holomorphe pour $x = 0$, $y = 0$. On suppose $f(0, 0) = 1$. Les exposants λ sont des nombres quelconques, λ_0 peut être nul. Π est le produit de puissances de m' facteurs tels que les équations

$$(79)\qquad y + \varphi_j(x) = 0$$

définissent des solutions de (70) algébroïdes à l'origine.

On dira que (70) admet une intégrale (F) si elle admet une intégrale générale de la forme (78).

En général, on a $m' = n$ ou $m' = n + 1$ suivant que $x = 0$ est solution ou non de (70), mais il peut en être autrement [11, *e*]. Si une solution algébroïde faisant partie d'un cycle est donnée par une des équations (79), toutes les solutions du même cycle sont données par les équations (79) et figurent dans (78) avec le même exposant. On peut donc remplacer tous ces facteurs par leur produit et écrire

$$(80)\qquad F(x, y) \equiv f(x, y) \prod_{\iota=1}^{m} (G_\iota(x, y))^{\lambda_\iota} = \text{const.}$$

Soit q_ι le degré minimum des termes de G_ι. Si l'on pose

$$\lambda = \sum_1^m q_\iota \lambda_\iota, \qquad y = tx,$$

des circonstances spéciales se présentent si l'on a $\lambda = 0$ [11, *d*, *e*]. En examinant seulement le cas de $\lambda \neq 0$, on peut poser $\lambda = 1$ et (80) devient

$$(81)\qquad x[1 + xL(t) + x^2 L_2(t) + \ldots +]\Pi(t - a_j)^{\lambda_j} = \text{const.},$$

en supposant que $y = a_j x$ soient les tangentes (autres que Oy) aux diverses solutions définies par (79). Les L_ι sont des fonctions rationnelles de t qui n'ont pas d'autres pôles que les points $t = a_j$. On peut se proposer de trouver directement une intégrale de la forme (81).

En général, s'il existe une intégrale de cette forme, il existe une intégrale (F) [11, *d*].

1° Si l'on rencontre dans la recherche des solutions de (70) algébroïdes à l'origine des transformées de la forme (76) ou (77) ou des solutions d'ordre $\nu+0$, $\nu-0$, ou encore une équation élémentaire se ramenant à la forme (47) ou (50), il n'y a pas d'integrale (F). Dans tous ces cas, on a une infinité de solutions non algébroïdes passant à l'origine.

2° En général, il n'y a aucune ambiguïté dans le choix des facteurs qui figurent dans le produit Π. Les valeurs de a dans les diverses équations élémentaires

$$(u+[u,v]_2)\,dv+(av+bu+[u,v]_2)\,du=0 \qquad (a\neq 0),$$

fournissant les solutions algébroïdes (79), déterminent les exposants λ_i relatifs à ces solutions, *en supposant* $\lambda=1$. *En général, on est arrêté par une impossibilité dans la détermination des coefficients de* $f(x,y)$.

Pour déterminer un nombre fini de ces coefficients, on a plus d'équations que d'inconnues. Si ces impossibilités ne se présentent pas, on dira que f existe formellement.

3° *Si les* λ_i *ne sont pas tous positifs*, on peut, sans chercher si (F) existe ou non, affirmer qu'il y a une infinité de solutions nulles, en genéral non algébroïdes.

4° *Quel que soient les* λ_i, *si* f *n'existe pas formellement*, il y a une infinité de solutions nulles admettant, en général, $x=0$ comme point transcendant [11, *b*, *d*].

5° *Si les* λ_i *ne sont pas tous positifs et si* f *existe* formellement, cette série $f(x,y)$ est convergente. *L'intégrale* (F) *existe.*

6° *Si les* λ_i *sont tous positifs et si* $f(x,y)$ *existe formellement, on a les cas suivants* [11, *b*, *c*] :

a. *Les* λ_i *ne sont pas tous rationnels et* $f(x,y)$ *est divergent;*

b. Les λ_i ne sont pas tous rationnels et $f(x,y)$ est convergent:

c. *Les* λ_i *sont tous rationnels*. Dans ce cas, les coefficients de $f(x,y)$ dépendent de constantes arbitraires que l'on peut, d'une infinité de façons, determiner de façon que $f(x,y)$ soit convergent.

Dans les cas *b* et *c*, il ne peut y avoir de solutions nulles autres que celles données par les équations (79) ou par $x=0$. Dans le cas a, il paraît probable qu'il en est encore ainsi, mais cela n'est pas démontré (*cf.* n° 16, cas 2°).

Étude du rapport $t = y : x$. — Si l'on étudie ce que devient ce rapport t pour une solution de (70) lorsque x et y tendent simultanément vers zéro, on démontre [11, *d*, *e*] que *t tend vers une limite* si l'on est dans l'un des trois cas suivants :

1° L'équation (70) admet une intégrale (F), et les exposants λ_i sont tous réels, sans être tous positifs;

2° L'équation (70) admet une intégrale (F), et la somme des exposants est nulle;

3° L'équation admet $x = 0$, $y = 0$ comme point dicritique.

Dans la plupart des autres cas, il y a une infinité de solutions telles que t ne tende vers aucune limite lorsque x et y tendent vers zéro. Il en est ainsi en particulier s'il n'y a pas d'intégrale générale de la forme (81).

Cette dernière propriété et la considération des diverses transformées auxquelles on aboutit dans la recherche des solutions algébroïdes à l'origine permettent de trouver un ensemble de conditions nécessaires pour que toutes les solutions passant à l'origine soient algébroïdes à l'origine [11, *e*]. Ces conditions sont suffisantes si λ étant égal à un, *aucun des* λ_i *n'est un nombre irrationnel positif*. S'il n'en est pas ainsi, le doute signalé ci-dessus (6°, *a*) ne permet pas d'affirmer que ces conditions sont suffisantes.

23. Étude des solutions dans le voisinage d'un point singulier. — On sait que les seules valeurs $x = \alpha$ qui puissent être des points singuliers transcendants des solutions $y(x)$ d'une équation

$$y' = g(x, y) \tag{82}$$

sont : 1° les abscisses α des points singuliers α, β de (82); 2° les valeurs $x = \alpha$, qui sont des pôles de $g(x, y)$ quel que soit y; 3° les valeurs $x = \alpha$, qui sont des points essentiels de $g(x, y)$.

Pour éviter une confusion de ces valeurs avec les points singuliers de (82), il conviendrait d'appeler ces valeurs $x = \alpha$, points singuliers fixes *des solutions* $y(x)$.

Dans les cas 2° et 3°, une de ces valeurs $x = \alpha$ peut être un point singulier transcendant de toutes les solutions. Dans le cas 1°, que nous continuerons à considérer seul, une de ces valeurs $x = \alpha$ ne peut être point singulier transcendant que pour les solutions $y(x)$ prenant la valeur β pour $x = \alpha$. Ainsi qu'on l'a vu, dans certains cas, quelques-unes de ces solutions, ou même toutes, peuvent admettre $x = \alpha$ comme point critique algébrique, être uniformes ou holomorphes pour $x = \alpha$, mais en général $x = \alpha$ sera pour une infinité de solutions $y(x)$ un point critique transcendant dans le voisinage duquel se trouvent une infinité de points critiques algébriques (n^{os} 15, 18). Une infinité de déterminations de $y(x)$ s'échangent dans le voisinage de $x = \alpha$. La recherche des solutions relatives au point α, β n'est qu'une partie de l'étude de ce point singulier [4]. Il y a lieu de la compléter par la recherche des points critiques voisins de $x = \alpha$, et l'étude de la façon dont s'échangent les diverses déterminations.

α étant un point singulier fixe des solutions de (82), et $y(x)$ étant une de ces solutions, Boutroux [a, b, c] s'est posé les problèmes suivants : « Obtenir l'ensemble total des determinations qui se permutent au voisinage » de α, « déterminer le mécanisme suivant lequel s'échangent ces déterminations ». Boutroux s'est attaché à étudier d'abord le cas de l'equation

$$(83) \qquad 2yy' = ax + by \qquad (a \text{ et } b \text{ const.}),$$

et à montrer que l'étude des singularités présentées par les solutions de (82) se ramène à l'étude des singularités de (83).

Malmquist [a, b, c], étudiant le même problème, a cherché à obtenir une théorie aussi générale que possible. Il a distingué entre les diverses déterminations d'une solution des branches principales et des branches intermédiaires, précisé le domaine d'existence de ees branches et montré comment on échange deux branches principales en passant par une branche intermédiaire.

Bureau [7 *bis*. a, b] s'est attaché à étudier avec une complète rigueur, dans des cas précis, le mécanisme des permutations de ces diverses déterminations.

V. — Équations non résolues en y'.

24. Définitions et remarques. — Soit l'équation

$$(84) \qquad f(x, y, y') = 0,$$

f est supposé holomorphe pour les valeurs initiales x_0, y. z_0 de

x, y, y' que l'on considère. Pour simplifier, f sera un polynome en y'; mais de légères modifications dans l'exposé permettent de considérer des cas plus étendus.

Une solution $y(x)$ de (84) sera relative au point P_0 de coordonnées x_0, y_0, z_0 de la surface (S) d'équation

$$f(x, y, z) = 0 \tag{85}$$

si l'on a $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0$.

On appellera *valeurs singulières* ou *point singulier* de (84) un ensemble de valeurs x_0, y_0, z_0 coordonnées d'un point de (S) telles que l'application directe des théorèmes généraux relatifs aux solutions des équations différentielles ne donne aucun renseignement sur les solutions de (84) relatives à ces valeurs initiales. D'une façon plus précise, des valeurs x_0, y_0, z_0 seront singulières seulement dans le cas où la recherche des solutions relatives à x_0, y_0, z_0 ne peut se ramener à la recherche des solutions relatives à des valeurs initiales *non singulières* d'un système d'équations différentielles du premier ordre et du premier degré.

x_0, y_0 ne peuvent faire partie d'un système de valeurs singulières que dans les deux cas suivants :

1° L'équation (84) est vérifiée quel que soit y' pour $x = x_0$, $y = y_0$. La recherche des solutions $y = g(x)$ passant par x_0, y_0 fera connaître les valeurs z_0 que l'on doit associer à x_0, y_0 pour avoir un point singulier. Ces valeurs z_0 sont en général bien déterminées. Pour z_0 quelconque, on n'a pas de solution relative à x_0, y_0, z_0 [29, c; 33, a, b];

2° L'équation (85) admet une racine multiple $z = z_0$ pour $x = x_0$, $y = y_0$. Conformément à la définition donnée ci-dessus d'un point singulier de (84), on laissera de côté les cas suivants, bien connus, qui ne fournissent que des points singuliers algébriques des *solutions* $y(x)$.

a. y' étant l'une quelconque des racines de (84) qui deviennent égales à z_0 pour $x = x_0, y = y_0$, y' ou son inverse sont des fonctions de x et y holomorphes pour $x = x, y = y_0$.

b. On est dans l'un des cas examinés par Fuchs [14]. Pour définir ces cas, il est commode d'employer les locutions suivantes :

Soit Γ un arc de courbe du plan xOy admettant x_0, y_0 pour point ordinaire. L'arc étant représenté par $x = g(x)$, on dira que *s déterminations de y'* définies par (84) *se permutent autour de* Γ, si, en posant $y - g(x) = v$, ces s valeurs de y' sont des fonctions de v et de x, qui se permutent, lorsque, x étant fixe et quelconque, on tourne autour de $v = 0$ dans le plan de la variable v. Le changement de variable

$$y - g(x) = v = Y^s$$

fournit pour étudier les solutions relatives à x_0, y_0, z_0 et aux s déterminations considérdes l'équation

$$(86) \qquad Y^{s-1}\,dY = Y^n[\alpha_0(x) + \alpha_2(x)Y + \ldots +]\,dx,$$

$\alpha_0(x)$ n'étant pas nul, quel que soit x.

Si l'arc Γ est représenté par $x = g(y)$, on permute le rôle joué par x et y. En supposant que dans (86) n est négatif, on considère le cas où s déterminations de y' deviennent infinies sur Γ et se permutent autour de Γ.

Dans les cas considérés par Fuchs, en simplifiant (86), on a une équation pour laquelle $x = 0$, $Y = 0$ *n'est pas un point singulier.*

Le cas où l'on a $s - 1 > n$ et $\alpha_0(x_0) = 0$ échappe à la discussion de Fuchs. Il en est de même, en particulier, lorsque les s déterminations de y' considérées se permutent entre elles ou avec d'autres déterminations autour d'un arc Γ' distinct de Γ passant par x_0, y_0.

Dans tous les cas, que nous laissons de côté l'étude des solutions relatives à un point x_0, y_0, z_0 de (85) se ramène à l'étude, pour une équation differentielle du premier degré, des solutions relatives à un point non singulier.

On obtient donc, pour tous ces cas, un nombre fini de solutions $y(x)$ algébroides pour $x = x_0$.

25. Méthodes générales et applications. — Poincaré [d] a signalé les méthodes suivantes, pour l'étude des solutions relatives à des valeurs singulières :

1° Aux deux equations (85) et $dy = z\,dx$, équivalentes à (84), on substitue le système

$$(87) \qquad \frac{dx}{f_z} = \frac{dy}{zf_z} = \frac{dz}{-f'_x - zf_y},$$

dont on étudie les solutions relatives aux valeurs x_0, y_0, z_0. Celles-ci ne sont donc des valeurs singulières que si l'on a

$$(88) \qquad f(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad f'_{z_0} = 0, \qquad f'_{x_0} + z_0 f'_{y_0} = 0.$$

2° Une transformation birationnelle de surface à surface fait correspondre a (S) representée par (85) une surface $F(X, Y, Z) = 0$ et au système (87) le système

$$(89) \qquad \frac{dX}{A(X, Y, Z)} = \frac{dY}{B(X, Y, Z)} = \frac{dZ}{C(X, Y, Z)}.$$

Aux valeurs singulières de (87) correspondent des valeurs annulant à la fois A, B, C. Cette transformation permet de faire disparaître des singularités de (S). Par exemple la transformation

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}, \qquad Z + z = 1$$

fait correspondre à un point double de (S), supposé à l'origine. une conique (C) située dans le plan $Z = 1$. L'étude des solutions de (84) relatives à $x = y = y' = 0$ est ramenée à l'étude des solutions de (89) relatives aux divers points de (C).

3° Supposons que les coordonnees des points P de (S) voisins de P_0 soient exprimées par des fonctions de u et v holomorphes pour $u = 0$, $v = 0$. P vient en P_0 pour $u = v = 0$. La relation $dy = z\,dx$ fournira une équation du premier ordre et du premier degré. Les solutions de cette équation relatives à $u = 0$, $v = 0$ fournissent les solutions de (84) relatives à P_0. Les coordonnées x_0, y_0, z_0 ne seront des valeurs singulières que si $u = 0$, $v = 0$ est un point singulier de l'équation en du et dv.

Si P_0 est un point multiple de (S) où se coupent plusieurs nappes de (S), et si l'on a pour chacune de ces nappes une représentation de la nature indiquée, tout se passera pour chacune des nappes comme si P_0 était un point simple de (S).

La méthode 2° presente l'inconvenient suivant : à des solutions de (84) pour lesquelles x et y tendent vers x_0 et y_0 peuvent correspondre des solutions de (89) pour lesquelles X, Y ou Z ne tendent vers aucune limite. Indiquons deux applications simples [11, *a*, *m*] de 3°

I. Si le point P_0 est un point ordinaire de (S) un déplacement d'origine, dans le plan xOy, et le changement de la direction de Ox permettent toujours de supposer que l'on a $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Ces valeurs initiales ne sont singulières que si la fonction $f(x, y, z)$ est holomorphe et vérifie les conditions (88) pour $x = y = z = 0$. Le seul terme du premier degré de f sera le terme en y. En résolvant (85) par rapport à y, et se servant ensuite de $dy = z\,dx$, on aura

$$y = \alpha x^2 + \beta x z + \gamma z^2 + [x, z]_3,$$

$$(90) \quad (2\alpha x + (\beta - 1) z + [x, z]_2)\,dx + (\beta x + 2\gamma z + [x, z]_2)\,dz = 0.$$

Si les coefficients de dx et dz sont nuls simultanément par tous les points d'une courbe du plan xOz, passant par O, on est dans le cas où (84) admet une solution singulière. Le point $x = 0$, $z = 0$ n'est pas un point singulier de (90) et le point O de (S) n'est pas un point singulier de (84). S'il n'en est pas ainsi, le point singulier $x = 0$, $z = 0$ de (90) rentre toujours dans l'une des quatre catégories étudiées au Chapitre III. Le cas (E) (n^o 13) ne peut se produire. Tous les autres cas peuvent se présenter. En particulier pour $\alpha = \gamma = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$, on a un *point dicritique*. Les solutions de (90) relatives au point singulier $x = 0$, $y = 0$ fourniront des solutions de (84) relatives au point singulier $x = y = z = 0$.

II. Supposons que le point considéré, 0, 0, z_0 soit un point double de (S) et que deux valeurs seulement de y' tendent vers la limite finie z_0 lorsque x et y tendent vers zéro. Ces valeurs sont données par

$$(91) \quad y' = A(x, y) \pm \sqrt{P(x, y)}, \qquad A = z_0 + [x, y]_1, \qquad P = [x, y]_2.$$

On laissera de côté le cas où P ne contient pas de termes du second degré en x et y et celui où P est le carré d'une fonction de la forme $[x, y]_1$. Ce second cas est celui où le point double fait partie d'une ligne double de S. Le point 0, 0, z_0 n'est pas dans ce cas un point singulier de (84). *Si les termes du second degré de* P *ne forment pas un carré parfait* une transformation régulière remplace (91) par

$$(92) \qquad \frac{dY}{dX} = z_0 + aX + bY + [X, Y]_2 \pm \sqrt{XY}.$$

Si l'on pose :

$$Y = v^2, \qquad X = u^2,$$

on voit que si (92) admet la solution singulière $Y = 0$, le point o, o, z_0 n'est pas un point singulier de (84). Si $Y = 0$ n'est pas solution, l'équation (91) admet [11, *m*], en général, une infinité de solutions nulles dont deux sont algébroïdes. Il en est toujours ainsi lorsque z_0 et a ne sont pas nuls simultanément. *Si les termes du second degré de* P *forment un carré parfait*, une transformation régulière donne une équation qui se déduit de (92) en remplaçant $\sqrt{XY}$ par $\sqrt{X^2 - 4Y^n}$ ou $\sqrt{Y^2 - 4X^n}$ $(n \geqq 3)$. On posera

$$X = u^n + v^n, \quad Y = uv, \quad \text{ou} \quad X = uv, \quad Y = u^n + v^n,$$

et l'on obtiendra une équation admettant $u = 0$, $v = 0$ pour point singulier, si (91) n'admet pas une solution singulière nulle.

L'étude des points singuliers de (84), dans le domaine complexe, n'a fait l'objet que d'un nombre restreint de travaux. Les recherches de Picard [*c*] et Wahlgreen sur les solutions réelles d'une équation du second degré en y' permettent cependant de tirer des conclusions pour le domaine complexe. Le seul problème complètement traité est celui de la recherche des *solutions algébroïdes* relatives à des valeurs singulières.

26. Recherche des solutions algébroïdes. — Les valeurs singulières considérées étant $x = 0$, $y = 0$, Briot et Bouquet, [7; 29, *c*] ont recherché les solutions algébroïdes nulles par une méthode tout à fait analogue à celle exposée au n° 20. Toutefois leur exposé présentait de nombreuses lacunes comblées par Autonne [1; 12; 19].

Les solutions algébroïdes font partie des solutions données par

$$y = b x^{\nu} + b_1 x^{\nu_1} + \ldots + b_n x^{\nu_n}(1 + \varepsilon), \tag{93}$$

ε tend vers zéro avec x; b et b_i sont des constantes; ν et ν_i des nombres positifs augmentant avec l'indice. On peut :

1° Déterminer ν et b;

2° Après avoir obtenu n termes de (93), trouver le terme suivant;

3° Déterminer par un nombre fini d'opérations l'existence d'une solution de la forme (93) et en donner une représentation analytique.

Les solutions (93) font partie de solutions telles que ν étant convenablement déterminé, si l'on pose

$$y = \mathrm{Y} x^{\nu}, \qquad z = xy' = \mathrm{Z} x^{\nu}, \tag{94}$$

et si l'on fait tendre x vers zéro, Y et Z tendent respectivement vers des limites finies b et c, non nulles, liées par la relation

$$c = \nu b$$

En introduisant, dans (84), $z = xy'$ au lieu de y', on a les équations

$$g(x, y, z) = 0, \quad g \equiv \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta\gamma} y^{\alpha} x^{\beta} z^{\gamma}, \tag{95}$$

$$x\, dy = z\, dx \tag{96}$$

I. En remplaçant dans (95) y et z par les expressions (94) on a

$$g(x, \mathrm{Y} x^{\nu}, \mathrm{Z} x^{\nu}) \equiv x^{m}(\varphi(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \ldots +) = 0,$$

m est la plus petite valeur de $\beta + (\alpha + \gamma)\nu$. Les termes qui suivent $\varphi(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ sont nuls pour $x = 0$. Les limites b et c sont une solution $\mathrm{Y} = b$, $\mathrm{Z} = c$ des equations

$$\mathrm{Z} = \nu \mathrm{Y}, \qquad \varphi(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0. \tag{97}$$

Le polynome φ ne peut se reduire à un seul terme, car on aurait la seule solution $b = c = 0$, qui est inacceptable. Comme on le verra, cette condition détermine ν. Si on laisse pour le moment de côté le cas où les equations (97) ont une infinite de solutions, les équations (97) fourniront, pour chaque valeur de ν, un certain nombre de valeurs de b et c et le problème 1° est resolu.

II. Supposons déterminés les n premiers termes de l'expression (93) de y. Soient φ_n la somme de ces n termes et φ'_n sa derivée. Posons

$$\lambda_n = \nu_n - \nu_{n-1}, \qquad y = \varphi_n + x^{\nu_{n-1}} y_n, \qquad z = x \varphi'_n + x^{\nu_{n-1}} z_n. \tag{98}$$

A (95) et (96) correspondent, apres simplification, les équations

$$g_n(x, y_n, z_n) = 0, \quad x\, dy_n + (\nu_{n-1} y_n - z_n)\, dx = 0.$$

On est donc amené à chercher les premiers termes $b_n x^{\lambda_n}$ et $c_n x^{\lambda_n}$ des développements de y_n et z_n. On a, d'après (96), $c_n = \nu_n b_n$. Sauf dans un cas qui sera étudié à part, les ν_i sont rationnels. Si s_n est le plus petit dénominateur commun de ν, $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$ et si l'on pose $x = x_n^{s_n}$ on obtient les équations

$$\mathrm{G}_n(x_n, y_n, z_n) = 0, \tag{99}$$

$$x_n\, dy_n + s_n(\nu_{n-1} y_n - z_n)\, dx_n = 0. \tag{100}$$

La détermination de l'exposant $s_n \lambda_n$ et des premiers coefficients b_n et c_n de y_n et de z_n se fera par la méthode suivie pour ν, b, c. Le problème 2° est résolu.

III. Les équations (99) s'appelleront *transformées* de (95). On dira que la *transformée* (99) est *résoluble* si G_n, qui est holomorphe et nul pour $x_n = y_n = z_n = 0$, contient un terme du premier degré en x_n, y_n, z_n ou plus généralement si les coordonnées d'un point de la surface (99) peuvent dans le voisinage de l'origine s'exprimer au moyen de fonctions de deux paramètres u et v holomorphes et nulles pour

$$u = 0, \quad v = 0.$$

Si (99) est *résoluble*, en remplaçant x_n, y_n, z_n en fonction de u et v dans (100), on a l'équation

$$P(u, v)\,dv = Q(u, v)\,du \tag{101}$$

admettant en général, $u = 0$, $v = 0$ comme point singulier.

Dans tous les cas, la recherche des solutions nulles de (99) et (100) revient à la recherche des solutions nulles de (101). En particulier, on trouve les solutions algébroïdes nulles de (99) et (100) en cherchant les solutions algébroïdes nulles de (101). On est donc ramené au probleme traité au n° 20.

Si l'équation (99) n'est pas *résoluble*, on opérera sur elle comme on a opéré sur (95). On se servira, en particulier, *sans aucune modification* de la relation $c_n = \nu_n b_n$ où ν_n est l'*ancien exposant* de x qui figure dans (93).

On continuera à opérer de même et à former des transformées successives, jusqu'à ce qu'on arrive à une *transformée résoluble.*

Autonne a montré que si les formules

$$x = \varphi(x) \qquad z = r\varphi'(x)$$

correspondant à une solution algébroïde de $y(x)$ de (84) ne représentent pas une courbe lieu de points multiples de la surface (95), on arrive après un nombre fini de transformations (98) à une équation (99) de la forme

$$A y_n + B z_n + C x_n + |x_n, y_n, z_n|_2 = 0 \qquad (\text{A, B, C const.}), \tag{102}$$

A et B n'étant pas nuls simultanément.

Si l'on a $B \neq 0$, on prendra $x_n = u$, $y_n = v$. En tirant de (102)

z_n en fonction de u et v et portant dans (100), on sera ramené à une équation

$$udv + (av + bu + [u, v]_2)\,du = 0 \qquad (a \neq 0).$$

Si l'on a $B = 0$, on prendra $x_n = u$, $z_n = v$ et l'on obtiendra

$$u[u, v]\,dv + (v + bu + [u, v]_2)\,du = 0.$$

Nous savons que ces équations ne fournissent, en général, $u = 0$ mis à part, qu'une seule solution algébroïde nulle. Celle-ci est alors holomorphe. Si l'on exprime pour cette solution, ou ces solutions algébroïdes u et v au moyen de fonctions d'un paramètre t holomorphes et nulles pour $t = 0$, la suite des transformations qui a conduit à l'équation (102) fournit, pour les diverses solutions de (84), x, et y au moyen de fonctions de t holomorphes et nulles pour $t = 0$. Le problème 3° est résolu.

IV. *Détermination des exposants* ν. — Ainsi qu'on l'a remarqué à propos des équations (97), il faut trouver des valeurs de ν telles qu'il y ait au moins deux termes de $g(x, y, z)$ pour lesquels l'expression $\beta + (\alpha + \gamma)\nu$ prenne la valeur mininum. On opere comme au n° 20. La somme $\alpha + \gamma$ remplace l'abscisse α considérée au n° 20. On construit le figuratif. Il fournit deux catégories de valeurs possibles pour ν, données les unes par un côté; les autres par un sommet.

Considérons d'abord *une valeur de* ν *fournie par la pente d'un côté*. Elle est rationnelle, $\nu = r : s$.

Les termes de g, dont les exposants ont fourni les points $\alpha + \gamma$, β situés sur le côté de pente ν, donnent le polynome φ.

Si b, c est une solution de (98), en posant

$$Y = b + y_1, \ Z = c + z, \qquad x = x_1^s, \tag{103}$$

on obtient les équations (99) et (100) pour $n = 1$. On a vu ci-dessus (III) comment on doit employer (99).

V. *Valeurs de* ν *fournies par un sommet*. — Soit $x^q h(y, z)$ l'ensemble des termes de $g(x, y, z)$ correspondant à un sommet de coordonnées p, q du figuratif. On a pour tous ces termes, $\beta = q$, $\alpha + \gamma = p$, En faisant la transformation (94) dans (95) on a, après division par $x^{q+\nu p}$,

$$h(Y, Z) + x^\sigma H(x, Y, Z) = 0 \qquad (\sigma > 0),$$

à condition que ν soit compris entre les pentes m_1 et m_2 des deux côtés du figuratif qui aboutissent au sommet. $h(Y, Z)$ est un polynome homogène et de degré p. Le nombre ν et les limites b *et* c de Y et Z vérifient les équations

$$h(Y, Z) = 0, \qquad Z = \nu Y, \qquad h(1, \nu) = 0.$$

Il n'y a donc de solutions $y(z)$ d'ordre ν que si l'équation $h(1, \nu) = 0$ admet une racine comprise entre m_1 et m_2. S'il en est ainsi, on montre [1] que, sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles de b, a chaque valeur de b correspond une solution $y(x)$ de (84) ayant pour partie principale bx^ν. Ces solutions ne sont algébroïdes que si ν est rationnel. Dans les autres cas, on aura des solutions analogues à celles signalées au n° 20, I, 2°, et au début du n° 21.

La méthode employée par Wahlgreen [*a*, *b*], dans le cas où le degré m de l'équation (84) en y' est égal à 2, pour rechercher les courbes intégrales réelles passant par le point singulier, fournirait également, pour m quelconque, toutes les solutions algebroïdes nulles. Cette méthode est la généralisation de la méthode donnée par Bendixson [*d*] pour $m = 1$ (n° 20).

27. Cas particuliers et solutions non algébroïdes. — Il y a lieu de signaler des cas particuliers qui peuvent se produire aussi bien pour l'équation (95), qui associée à (96) remplace (84), que pour les équations transformées (99) et (100). Considérons un côté du figuratif, auquel correspondent les équations (97). Appelons, avec Autonne, *directrice* la droite $Z = \nu Y$ et *indicatrice* la courbe $\varphi(Y, Z) = 0$.

1° Si la *directrice* coïncide avec une direction asymptotique de l'*indicatrice* l'équation (84) admet une infinité de solutions $y(x)$ d'ordre $\nu - 0$.

2° Si la *directrice* est tangente en $Y = 0$, $Z = 0$ à l'*indicatrice*, l'équation (84) admet une infinité de solutions $y(x)$ d'ordre $\nu + 0$.

3° Si l'*indicatrice* contient la *directrice*, les limites b et c ne sont plus déterminees. Il ne subsiste que la relation $c = b\nu$. A chaque valeur de b arbitrairement choisie correspond, en général, une solution $y(x)$ ayant bx^ν pour partie principale. $\varphi(Y, Z)$ est divisible par $Z - \nu Y$. Si l'on fait la transformation

$$Z = \nu Y + T, \qquad x = X^s,$$

en supposant $\nu = r : s$ on obtient les équations

$$(104) \qquad T\,l(Y, T) + X\,L(X, Y, T) = 0, \qquad X\,dY - sT\,dX = 0,$$

dont la première représente une surface Σ contenant l'axe $X = 0$, $T = 0$.

On démontre [II, m] qu'à tout point $X = 0$, $Y = b$, $T = 0$, qui n'est pas un point multiple de Σ, et où le plan tangent n'est pas confondu avec $X = 0$, correspond une solution algebroide, et une seule, de partie principale bx^{ν}.

Dans les deux cas d'exception signalés, la recherche des solutions algébroides ayant bx^{ν} pour partie principale se ramène à la recherche de solutions algébroides nulles pour une équation (101).

4° On doit remarquer que chacune des équations (101), auxquelles on aboutit dans la recherche des solutions algébroides nulles, admet, en général, une infinité de solutions nulles non algébroides, qui fournissent des solutions de même espèce pour (84).

Travaux relatifs aux cas où les conditions de Lipschitz ne sont pas satisfaites.

VOLTERRA. — *Giornale di Matem.*, t. 19, 1881.
PEANO. — *Math. Annalen*, t. 37, 1890.
MIE. — *Math. Annalen*, t. 43, 1893.
LA VALLÉE POUSSIN (DE). — *Mémoires Acad. Belgique*, t. 47, 1892-1893; *Ann. Société scient. de Bruxelles*, t. 17, 1892-1893.
ARZELA — *Mém. Acad. Scienze Bologna*, t. 5 et 6, 1895-1897.
OSGOOD. — *Monatshefte fur Math.*, t. 9, 1898.
ARCAIS (D'). — *Atti Istituto Veneto di scienze*, t. 61, 1901-1902.
MONTEL. — *Ann. École Normale*, t. 24, 1907.
ROSENBLATT. — *Arkiv fur Math. Astr.*, t. 5, 1909.
PERRON. — *Math. Annalen*, t. 75 et 76, 1914 et 1915.
WADA. — *Kyoto Imp. University Memoirs*, t. 11, 1917.
KNESER. — *Sitzung. Akad.*, Berlin, 1923.
TAMARKINE. — *Math. Zeitschrift*, t. 16, 1923.
SALTYKOW. — *Glas srpske., Public. Acad. R. Belgrade*, t. 116, 1925.
BOMPIANI. — *Atti di Lincei*, t. 1, 1925.

TONNELLI. — *Atti di Lincei*, t. 1, 1925.
LAVRENTIEFF. — *Math. Zeitschrift*, t. 22, 1925.
YOSIE. — *Japanese Journ. of Math.*, t. 2, 1925-1926.
MONTEL. — *Bull. Sciences math.*, t. 50, 1926.
PERRON. — *Math. Annalen*, t. 95, 1926.
NAGUMA. — *Japanese Journ. of Math.*, t. 3 et 4, 1926 et 1927.
MÜLLER. — *Math. Zeitschrift*, t. 26, 1926-1927.
PERRON. — *Math. Zeitschrift*, t. 28, 1928.
SHIMIZU. — *Proceedings Imp. Acad. Tokio*, t. 4, 1928.
KAMKE. — *Acta math.*, t. 52, 1928.
KAMKE. — *J. für Math.*, t. 161, 1929.
WATANABLE. — *Japanese Journ. of Math.*, t. 7, 1930.
CHARPENTIER (Marie). — *C. R. Acad. Sc.*, t. 191, 1930, p. 509 et 919.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. AUTONNE. — Sur l'équation différentielle du premier ordre (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, cahier 2, 1897).

2. BENDIXSON. — *a*. Sur le développement des intégrales d'un système d'équations différentielles au voisinage d'un point singulier (*Ofversigt Vetensk. Akad. förhandl.*, t. 51, 1894).
b. Sur les points singuliers d'une équation différentielle (*Ibid.*, t. 52, 1895).
c. Sur les points singuliers des équations différentielles (*Ibid.*, t. 55, 1898, p. 69-85, 139-151, 171-188).
d. Sur les courbes définies par des équations différentielles (*Acta mathematica*, t. 24, 1900).
e. Sur les points singuliers des systèmes d'équations différentielles (*Arkiv för mat. astr.*, t. 5, 1909).

3. BIRKELAND. — Sur certaines singularités des équations différentielles (*Arkiv för mat. natur.*, t. 30, 1909).

4. BJÖRLING. — Ueber singuläre Punkte der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung (*Archiv der Mat. Phys.*, 2e série, t. 4, 1886).

5. BOREL. — *a*. Mémoire sur les séries divergentes (*Ann. École Norm.*, 3e série, t. 16, 1899).
b. Leçons sur les séries divergentes (Paris, Gauthier-Villars, 1900).

6. BOUTROUX. — *a*. Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre (Paris, Gauthier-Villars, 1908).

b. Équations différentielles et fonctions multiformes (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 29, 1910).

c. Sur les singularités des équations difiérentielles rationnelles du premier ordre et du premier degré (*Journ. de Math.*, 6e série, t. 6, 1910).

7. Briot et Bouquet. — Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles (*Journ. École Polytech.*, t. 21, cahier 36, 1856),

7 *bis*. Bureau. — *a.* Étude de l'intégrale de l'équation $y\frac{dy}{dx} = y + 1$ (*Bull. Soc. R. Siences Liége*, t. 1, 1932).

b. Recherches sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre et du premier degré (*Mémoires Soc. R. Sciences Liége*, 3e série, t. 18, 1933).

8. Chazy. — Sur la limitation du degré des équations différentielles algébriques à points critiques fixes (*Acta math.*, t. 41, 1918).

9. Cherry. — On integrals developable about a singular point of a Hamiltonian system (*Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. 22, 1924, p. 343 et 510).

10. Cotton. — *a.* Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles (*Ann. École Norm.*, 3e série, t. 28, 1911).

b. Approximations successives et équations différentielles (Paris, Gauthier-Villars, 1928).

11. Dulac. — *a.* Sur les intégrales analytiques des équations du premier ordre et de degré quelconque dans le voisinage de certaines valeurs singulières (*C. R. Acad. Sc.*, t. 133, 1901).

b. Recherches sur les points singuliers des équations différentielles (*Journ. École Polyt.*, 2e série, cahier 9, 1904).

c. Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage de conditions initiales singulières (*Ann. Université Grenoble*, t. 17, 1905).

d. Intégrales passant par un point singulier d'une équation différentielle (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 27, 1909).

e. Sur les points singuliers d'une équation différentielle (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 3e série, t. 1, 1909).

f. Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre (*Bull. Sciences math.*, 2e série, t. 32, 1908).

g. Sur une forme de l'intégrale générale d'une équation différentielle dans le voisinage de certaines valeurs singulières (*Ibid.*, t. 37, 1913).

h. Sur les points dicritiques (*Journ. de Math.*, 6e série, t. 2, 1906).

i. Sur les intégrales passant par un point singulier d'une équation différentielle (*Bull. Soc. math.*, t. 36, 1908).

j. Solutions d'ordre imaginaire d'une équation différentielle (*Ibid.*, t. 39, 1911).

k. Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières (*Ibid.*, t. 40, 1912).

l. Sur les cycles limites (*Ibid.*, t. 51, 1923).

m. Travaux non publiés.

12. FINE. — On the functions defined by differential equation with an extension of Puiseux polygon (*American Journ. de Math.*, t. 11, 1889).

13. FORSYTH. — Theorie of differential equations (Cambridge, 1900, t. 2 et 3).

14. FUCHS. — Ueber Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen (*Sitz. Kg. Akad. Wiss.*, Berlin, 1884).

15. GARNIER. — *a.* Étude de l'intégrale générale de l'équation (VI) de M. Painlevé (*Ann. École Norm.*, 3e série, t. 34, 1917).

b. Solution du problème de Riemann pour des systèmes différentiels linéaires du deuxième ordre (*Ibid.*, t. 43, 1926).

c. Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires (*Journ. de Math.*, 8e série, t. 2, 1919).

16. GOURSAT. — Cours d'Analyse mathématique (Paris, Gauthier-Villars, 1911),

17. HLIBOWICKY. — Integrale der Differentialgleichungen erster ordnung in der n-fachen kritischen Punkten (*Samm. math. Gessel. Wiss.*, Lemberg, t. 6, 1900).

18. HORN (J.). — *a.* Zur Briot Bouquetschen Theorie der Differentialgleichungen erster ordnung (*Journ. für Math.*, t. 113, 1894).

b. Ueber die Reihenentwickelung der Integrale einer Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singularer Stellen (*Ibid.*, t. 116, 1896; t. 117, p. 104-128 et 254-266).

c. Ueber das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veranderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle (*Ibid.*, t. 118, 1897; t. 119, 1898, p. 196-209 et 267-290.

d. Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle (*Ibid.*, t. 120, 1899; t. 122, 1900; t. 143, 1913).

e. Laplasche Integrale als Lösungen nicht linearen Differentialgleichungen (*Ibid.*, t. 144, 1914; t. 151, 1927).

f. Untersuchung der Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung vermittelst successiven Annäherungen (*Math. Ann.*, t. 51, 1899, p. 346 et 360).

g. Beitrage zur Theorie der kleinen Schwingungen (*Zeitsch. für Math.*, t. 48, 1903).

h. Reelle periodische lösungen einer Differentialgleichung (*Archiv der Math.*, 2e série, t. 8, 1905).

i. Zur Theorie des nichtlinearen Differentialgleichungen (*Math. Zeitsch.*, t. 13, 1922).

19. HUDSON. — *a.* Geometrical theory of differential equations (*Proc. London math. Soc.*, t. 33, 1901).

b. The Puiseux diagram and differential equations (*Ibid.*, t. 34, 1902).

20. KAPTEYN (W.). — *a.* On the centra of the integral curves wich satisfy differential equations of the first order and the first degree (*Kon. Akad. Wetens. Amsterdam, Proceedings*, t. 13, 1910-1911).

b. New researches upon the centra of the integral... (*Ibid.*, t. 14, 1911-1912; t. 15, 1912.

21. Konigsberger. — Lehrbuch der Theorie des Differentialgleichungen (Leipzig, Teubner, 1889).

22. Koopman. — On a extension of a method of Briot et Bouquet for the reduction of a singular point (*Bull. American Math. Soc.*, t. 32, 1926).

23. Levi-Civita. — Sopra alcuni criteri di instabilita (*Ann. di Mat.*, 3e série, t. 5, 1901).

24. Liapounoff. — Problème général de la stabilité du mouvement (*Ann. Fac, Sc. Toulouse*, 2e série, t. 9, 1907).

25. Lindelöf. — Sur la forme des intégrales des équations différentielles au voisinage des points singuliers (*Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. 22, 1897).

26. Maillet. — *a.* Sur les séries divergentes et les équations différentielles (*Ann. École Norm.*, 3e série, t. 20, 1903).

b. Sur certains systèmes différentiels (*Ibid.*, 6e série, t. 5, 1909).

c. Solutions de certains systèmes d'équations différentielles (*Bull. Soc. math.*, t. 33, 1905).

27. Malmquist. — *a.* Sur les fonctions d'un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre (*Acta math.*, t. 36, 1913).

b. Sur les points singuliers des équations différentielles (*Arkiv för Mat. Ast.*, t. 15, 1920, n° 3).

c. *Ibid.*, t. 15, 1921, n° 27).

28. Painlevé. — Équations différentielles ordinaires. Existence de l'intégrale générale (*Encyclopédie des Sciences math.*, édition française, t. 2, vol. 3, 1910).

29. Picard. — *a.* Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 87, 1878, p. 430 et 743).

b. Sur la forme des intégrales des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage de certains points critiques (*Bull. Soc. math.*, t. 12, 1883).

c. Traité d'Analyse (t. III, 1928).

30. Poincaré. — *a.* Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles (*Journ. École Polyt.*, cahier 45, 1878).

b. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles (*Thèse*, Paris, 1879).

c. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (*Journ de Math.*, 3e série, t. 7, 1881).

d. *Ibid.*, 4e série, t. 1, 1885.

e. *Ibid.*, t. 2, 1886.

f. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique (*Acta math.*, t. 13, 1890).

30 *bis*. Rambaud. — *Thèse*, Lyon, 1932.

31. Rémoundos. — *a.* Contribution à la théorie des singularités des équations différentielles du premier ordre (*Bull. Soc. math.*, t. 36, 1908).

b. Sur la densité des zéros des séries de fonctions et les singularités des équations différentielles (*Ibid.*, t. 43, 1915).

c. Les singularités des équations différentielles et les séries sommables (*Ibid.*, t. 48, 1920).

d. Sur les singularités des équations différentielles (*Proc. fifth inter Congress math.*, t. I, p. 372; Cambridge, 1912).

32. ROSENBLATT. — *a.* Ueber singulare Punkte der Differentialgleichubgen erster ordnung (Kaestner, Göttingen, 1908).

b. Ueber Reihenentwicklungen der Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle (*Prace matem. fizyc. Varszawa*, t. 20, 1909).

c. Sur certaines intégrales d'un système de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre satisfaisant à des conditions initiales singulières (*C. R. Acad. Sc.*, t. 158, 1914).

33. WAHLGREEN. — *a.* Om de singulära punktema (*Thèse*, Upsal, 1903).

b. Sur les points singuliers des équations du premier ordre et du second degré (*Bikang till k. sven. vet. akad. handlingar*, t. 28, 1902).

34. WATANABLE. — Some properties of the coefficients of the formal solution of the differential equation (*Tokohu math. Journ.*, t. 7, 1915).

35. WIGERT. — Sur les points singuliers des équations différentielles (*Ofversigt Vetens. Akad. förhandl.*, t. 56, 1899; t. 57, 1900).

36. YOSIE. — Ueber Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ welche eine Singulärestelle von $f(x, y)$ hindurlaufen (*Proceedings of Phys. Math. Society, Japan*, t. 44, 1922).

TABLE DES MATIÈRES.

I. — Introduction.

II. — Système différentiel d'équations du premier ordre et du premier degré.

III. — Point singulier non multiple d'une équation du premier ordre et du premier degré.

IV. — Point singulier multiple.

V. — Équations non résolues en y'.