TH. GOT

Propriétés générales des groupes discontinus

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 60 (1933)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1933__60__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LX

Propriétés générales des groupes discontinus

PAR M. TH. GOT

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1933

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

DES

GROUPES DISCONTINUS

Par M. Th. GOT.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES DISCONTINUS.

1. Notion de groupe. Définitions et notations. — Tout ensemble G de transformations T opérant sur les objets d'un ensemble Ω s'appelle un *groupe*, *au sens large*, si :

1° Il laisse invariant l'ensemble Ω.

2° Le *produit* $T_{i_1}T_{i_2}$ de deux transformations, c'est-à-dire la transformation résultant de l'exécution successive de T_{i_1} et de T_{i_2} est encore une transformation T_{i_3} de G.

On écrit (¹)

$$T_{i_1}T_{i_2} = T_{i_3}.$$

L'ensemble G forme un *groupe au sens restreint*, s'il remplit, en outre, les deux conditions suivantes :

3° Il contient une transformation U et une seule laissant *invariants individuellement* les objets de Ω, on l'appelle transformation *unité* ou transformation *identique*, et l'on a évidemment

$$TU = T, \qquad UT = T.$$

(¹) Certains auteurs, notamment Jordan, Fatou, M. Fubini, emploient l'écriture inverse $T_{i_2}T_{i_1} = T_{i_3}$.

4° A toute transformation T correspond la transformation *inverse* T′, c'est-à-dire une transformation unique telle que l'on ait

$$TT' = U.$$

Ne nous occupant que de groupes au sens restreint, nous les désignerons simplement par le nom de *groupes*.

Le produit d'un nombre quelconque de transformations représenté par

$$T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_n}$$

est, par définition, la transformation obtenue en effectuant d'abord la transformation T_{i_1}, puis T_{i_2}, et ainsi de suite. Cette *multiplication* symbolique est, en général, *associative*, mais pas toujours *commutative*. Deux transformations, dont le produit est commutatif, sont dites *permutables* ou *échangeables*. Un groupe, dont toutes les transformations prises deux à deux sont permutables, est dit *abélien*.

La multiplication étant supposée *associative*, toute transformation T est permutable avec son inverse T′; car si T″ est l'inverse de T′, on a

$$T'T'' = U, \qquad T(T'T'') = TU = T, \qquad (TT')T'' = T, \qquad UT'' = T,$$

donc $T'' = T$. A cause de cette réciprocité, T et T′ sont dites *inverses l'une de l'autre*.

La signification de T^m et de $T'^{m'}$ pour m, m' entiers positifs est évidente; si, de plus, on a $m > m'$, on aura

$$T^m T'^{m'} = T^{m-m'}.$$

Pour rendre cette formule générale, on emploie les exposants négatifs, en posant

$$T' = T^{-1},$$

et l'on a, quels que soient les entiers m et n positifs, négatifs ou nuls,

$$T^m T^n = T^{m+n},$$

T^0 désignant, bien entendu, la transformation identique.

2. Groupes finis. Groupes infinis. — Nous appellerons *groupes finis* ceux qui ne comprennent qu'un nombre *limité de transfor-*

mations distinctes (1). Exemples : le groupe des permutations circulaires de n lettres ; le groupe des superpositions d'un polyèdre régulier à lui-même. Le nombre des transformations distinctes est l'*ordre* du groupe. Ces groupes sont *discontinus*.

Les groupes *infinis* se divisent en deux classes :

1° Les groupes *discontinus*, composés d'une infinité *dénombrable* de transformations. Exemple : le groupe des substitutions

$$z' = z + m\omega + m'\omega'$$

effectuées sur la variable complexe z, ω et ω' étant des constantes, m et m' des entiers positifs, négatifs ou nuls.

2° Les groupes *continus* formés d'une infinité non dénombrable de transformations. Exemple : les groupes des déplacements dans le plan ou dans l'espace.

Il s'agit, dans ce fascicule, des groupes *discontinus*, mais un grand nombre des propriétés étudiées leur sont communes avec les groupes continus.

3. Transformations génératrices, structure. — Soient $T_1, T_2, \ldots, T_k$ des transformations distinctes d'un groupe discontinu G. La transformation

$$T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \ldots T_k^{\alpha_k}, \tag{1}$$

où les α sont des entiers positifs, négatifs ou nuls quelconques, appartient à G, ainsi que plus généralement,

$$T_1^{\alpha_1} \ldots T_k^{\alpha_k} T_1^{\beta_1} \ldots T_k^{\beta_k} \ldots T_1^{\lambda_1} \ldots T_k^{\lambda_k}, \tag{2}$$

les α, β, ..., λ étant des entiers quelconques (2). La question se pose immédiatement de savoir si, réciproquement, il existe dans G un certain nombre de transformations T_1, ..., T_k, dont toutes les autres soient des combinaisons : de telles transformations s'appel-

(1) Dans sa théorie des groupes continus, S. Lie emploie le mot fini dans un sens différent : les groupes finis sont ceux dont les transformations dépendent d'un *nombre fini de paramètres*.

(2) Tous les exposants désignés par une même lettre pouvant d'ailleurs être nuls, sauf un.

leront alors *transformations génératrices* ou *éléments générateurs* du groupe. La réponse est évidemment affirmative pour les groupes discontinus *finis*. Il y a deux classes de groupes discontinus *infinis*, suivant qu'ils contiennent ou non *un nombre limité d'éléments générateurs:* nous laisserons de côté les derniers dont l'étude, abordée pourtant par Poincaré (*groupes fuchsoïdes*), est peu avancée.

Soient donc $T_1, T_2, \ldots, T_k$ un certain nombre de transformations *engendrant* tout le groupe.

Dans le cas simple d'un groupe abélien, les transformations étant permutables, toute transformation sera de la forme (1)

$$T = T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \ldots T_k^{\alpha_k}.$$

Dans le cas général, toute transformation sera un produit d'expressions analogues tel que (2).

$$T = \Pi(T_i) = T_1^{\alpha_1} \ldots T_k^{\alpha_k} \ldots T_1^{\lambda_1} \ldots T_k^{\lambda_k}.$$

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que chaque transformation du groupe ne puisse être décomposée que* d'une seule manière *en un produit de transformations génératrices est que les transformations génératrices soient* indépendantes, *c'est-à-dire que la transformation identique* U *ne soit pas décomposable en un produit de transformations génératrices.*

Car, d'une part, s'il existait au moins une telle décomposition,

$$U = \Pi_1(T_i).$$

une transformation quelconque, $T = \Pi(T_i)$, admettrait une infinité de décompositions, par exemple, u et v étant deux entiers quelconques,

$$T = \Pi_1^u \Pi \Pi_1^v,$$

d'autre part, si une transformation T admettait deux décompositions distinctes,

$$T = \Pi(T_i) = \Pi'(T_i),$$

il en résulterait une décomposition de U,

$$U = \Pi'(T_i) \times [\Pi(T_i)]^{-1}.$$

Théorème. — *S'il existe* $k\,(k > 1)$ *transformations génératrices* *indépendantes* T_i, *il en existe une infinité* [1] *d'autres, mais le nombre de leurs éléments reste égal à* k.

En effet :

1° On peut remplacer l'élément T_1, par exemple, par

$$T'_1 = T_1 T_2^{a_2} \dots T_k^{a_k},$$

d'où l'on déduit inversement

$$T_1 = T'_1 (T_2^{a_2} \dots T_k^{a_k})^{-1},$$

de sorte que toute transformation $T = \Pi(T_1, T_2, \dots, T_k)$ s'exprime à l'aide des nouveaux éléments $T'_1, T_2, \dots, T_k$, qui sont évidemment indépendants comme les anciens;

2° Le nombre des éléments générateurs indépendants ne peut être réduit, car si l'on pouvait exprimer les k transformations T_i à l'aide de $k' < k$ éléments T'_j, je dis qu'il existerait $k - k'$ relations non identiques entre les T_i, qui, par suite, ne seraient pas indépendants; on aurait, en effet,

$$T'_j = \Pi_j(T_i) \qquad (j = 1, 2, \dots, k'),$$

et, d'autre part,

$$T_{j'} = \Pi'_{j'}(T'_j) \qquad (j' = k'+1, k'+2, \dots, k),$$

c'est-à-dire

$$T_{j'} = \Pi'_{j'}[\Pi_j(T_i)].$$

Définitions. Groupes libres. Groupes liés. — Nous appellerons *groupes libres* les groupes engendrés par des éléments *indépendants* et *groupes liés* ceux qui ne peuvent être engendrés par un système d'éléments indépendants. D'après cela, un groupe *abélien* n'est jamais *libre*, vu les relations de permutabilité $T_p T_q = T_q T_p$.

La structure d'un groupe lié résulte entièrement de la donnée des r relations

$$\Pi_l(T_i) = U \qquad (l = 1, 2, \dots, r),$$

qui existent entre les éléments générateurs. Ces relations peuvent, pour cela, s'appeler les *équations de définition ou de constitution du groupe*, ou encore *relations de structure*.

Les transformations du groupe formant, par hypothèse, un ensemble

---

[1] Dans le cas des groupes infinis.

dénombrable peuvent être *numérotées*. On appelle *table de multiplication du groupe* le tableau qui donne le produit de deux éléments quelconques

$$T_{n_1} T_{n_2} = T_{n_3}$$

ou, plus simplement,

$$(n_1, n_2) = n_3.$$

Les équations de définition peuvent se déduire de la table de multiplication et réciproquement. — En effet, si l'on remplace dans la table de multiplication tous ses éléments par leurs expressions en fonction des éléments générateurs, chaque relation $(n_1, n_2) = n_3$ donne lieu à une relation entre les éléments générateurs; il est clair que ces relations se trouvent équivalentes aux r équations de définition. Réciproquement si, dans le produit $T_{n_1} T_{n_2}$ on remplace T_{n_1} et T_{n_2} par leurs expressions en fonction des éléments générateurs, on obtient l'expression d'un élément T_{n_3} bien déterminé du groupe, d'où une relation $(n_1, n_2) = n_3$. Mais il importe de tenir compte de ce que, dans les groupes *liés*, un même élément peut, en général, s'exprimer de *plusieurs façons* en fonction des éléments générateurs. Le système des équations de définition lui-même n'est pas, en général, entièrement défini et il y en a d'autres qui lui sont équivalents [1].

4. Isomorphismes. Sous-groupes. Composition des groupes. — On appelle, d'après C. Jordan, *holoédriquement isomorphes*, deux groupes G_1 et G_2 de *même structure*, c'est-à-dire entre les éléments desquels existe une correspondance biunivoque telle que T_1 et T'_1 étant deux éléments quelconques de G_1 et T''_1 leur produit, le produit T''_2 des éléments T_2 et T'_2 de G_2 correspondants à T_1 et T'_1 est l'élément de G_2 correspondant à T'_1 et *réciproquement*.

On voit aisément que T_2^m correspond à T_1^m (m entier positif, négatif ou nul). Donc, en particulier, les éléments unités U_1 et U_2 se correspondent.

Soit S une transformation, appartenant ou non à un groupe G, mais telle, en tout cas, que son inverse S^{-1} soit définie et qu'on sache les combiner avec elles-mêmes et avec les transformations de G (toutes ces combinaisons étant associatives suivant les hypothèses

---

(1) *Voir* § 5.

fondamentales). La transformation $T' = S^{-1}TS$ s'appelle *transformée de* T *par* S [1].

L'ensemble des transformés des éléments d'un groupe G par S forme évidemment un groupe G' qu'on appelle *le transformé de* G *par* S; d'ailleurs, G est *le transformé de* G' *par* S^{-1}.

L'inverse du transformé de T est le transformé de l'inverse de T. L'élément unité U' de G' est le transformé de l'élément unité de G.

Une transformation T ne coïncide avec sa transformée $T' = S^{-1}TS$ que si l'on a

$$TS = ST,$$

c'est-à-dire si les transformations S et T sont *permutables*. Si S est permutable à toutes les transformations de G, le transformé G' coïncide avec G; dans le cas contraire, G' n'est qu'holoédriquement isomorphe à G.

On appelle *sous-groupe* d'un groupe G tout groupe formé uniquement d'éléments de G.

En particulier, les puissances T^m (m entier positif, négatif ou nul) d'une transformation T de G forment un sous-groupe G' de G. Un tel groupe G' s'appelle un *groupe cyclique*. Il est d'ordre fini si ses éléments se reproduisent périodiquement; le nombre de termes de la période est le plus petit entier positif n, tel que l'on ait

$$T^n = U,$$

n s'appelle l'*ordre* du groupe cyclique ou l'*exposant* de l'élément T.

Tout groupe dont tous les éléments sont d'exposant *deux* est *abélien*, car alors $T^2 = U$ donne $T = UT^{-1} = T^{-1}$, *toute transformation est égale à son inverse*, et l'on a, par suite,

$$T_i T_k = (T_i T_k)^{-1} = T_k^{-1} T_i^{-1} = T_k T_i.$$

Le transformé d'un sous-groupe quelconque G' de G par une transformation quelconque S de G est encore un sous-groupe G'' de G qu'on peut désigner par la notation symbolique

$$G'' = S^{-1} G' S.$$

Ces sous-groupes G' et G'' sont dits *équivalents*. Si S est permu-

---

(1) On dit encore que T et T' sont *semblables*.

table à toutes les transformations de G', G'' coïncide avec G'. Si un sous-groupe coïncide avec tous ses transformés, il s'appelle *sous-groupe invariant.* D'après cela, tous les sous-groupes d'un groupe abélien sont des sous-groupes invariants.

Indice d'un sous-groupe. — Soient U, T'_1, T'_2, ... les éléments, en nombre fini ou non, d'un sous-groupe G' de G.

Soit S_1 un *autre* élément de G. Tous les éléments de G :

$$US_1, \quad T'_1 S_1, \quad T'_2 S_1, \quad \ldots$$

sont distincts; ils sont aussi distincts des précédents, car si l'on avait

$$T'_i S_1 = T'_j,$$

on aurait

$$S_1 = (T'_i)^{-1} T'_j,$$

et S_1 appartiendrait à G'.

Si G contient encore un élément S_2 distinct des précédents, il contient aussi tous les éléments

$$US_2, \quad T'_1 S_2, \quad T'_2 S_2, \quad \ldots$$

qui sont encore distincts, et distincts des précédents.

Si, en continuant ainsi, l'on parvient à épuiser tous les éléments de G en écrivant une dernière ligne d'éléments

$$US_{n-1}, \quad T'_1 S_{n-1}, \quad T'_2 S_{n-1}, \quad \ldots,$$

on dit que G' est un sous-groupe *d'indice n.* Si la suite des éléments de G ne peut être épuisée ainsi, G' est *d'indice infini.* Dans un groupe G d'ordre fini, tous les sous-groupes sont d'ordre fini et leurs indices sont des diviseurs de l'ordre de G. Si G_1 est un sous-groupe d'indice n_1 d'un groupe G (d'ordre fini ou non), et si G_2 est un sous-groupe d'indice n_2 de G_1, G_2 est un sous-groupe de G d'indice $n_1 n_2$.

Compositiondes groupes. — Si deux groupes G et G' ont des éléments communs, ces éléments forment évidemment un groupe D, qu'on appelle *le plus grand commun diviseur* de G et G' et que l'on désigne par (G, G'). D peut se réduire à la substitution identique, G et G' sont alors dits *premiers entre eux.*

L'ensemble des produits formés d'éléments pris indifféremment dans G ou G′ forme aussi un groupe M; on dit qu'il résulte de la *composition* de G et G′, et on l'appelle *le plus petit commun multiple* de G et G′. On dit que G et G′ sont des *diviseurs* de M. Ce sont des sous-groupes de M, et s'ils sont *d'indices finis*, les deux groupes G et G′ sont dits *commensurables* (Poincaré).

Sous-groupes de groupes holoédriquement isomorphes. — Ils sont eux-mêmes holoédriquement isomorphes. Les éléments permutables se correspondent, ainsi que les sous-groupes invariants.

Isomorphisme mériédrique. — Deux groupes G et G_1 sont *mériédriquement isomorphes* (C. Jordan) si, à tout élément de l'un, G par exemple, correspond un élément bien déterminé de l'autre G_1, mais qu'à tout élément de G_1 correspondent *plusieurs* éléments de G (en nombre fini ou non). On démontre, comme pour l'isomorphisme holoédrique, que les éléments unités se correspondent.

THÉORÈME. — *Les éléments d'un groupe* G *mériédriquement isomorphe à un groupe* G_1 *qui correspondent à l'élément unité de ce dernier forment un sous-groupe invariant* Γ *du premier.*

Soient, en effet, T, T′ deux éléments de G correspondant à l'élément unité U_1 de G_1; TT′ correspondra à U_1^2, c'est-à-dire encore à U_1; de plus, T^{-1} correspond aussi à U_1, car si V_1 est l'élément correspondant à T^{-1} dans G_1, on déduit de $TT^{-1} = U$ que $U_1 V_1 = U_1$, donc $V_1 = U_1$.

Soit, en outre, S un élément quelconque de G et T un élément de Γ, si S_1 est le correspondant de S dans G_1, il correspondra au transformé de T par S, c'est-à-dire $S^{-1}TS$, l'élément $S_1^{-1}U_1S_1$, c'est-à-dire U_1, donc ce transformé appartient à Γ.

C. Q. F. D.

Exemple. — Considérons les groupes de substitutions

$$z' = z + m\omega + m'\omega'$$

effectuées sur la variable complexe z. Soit G un groupe correspondant à un rapport non réel des périodes ω et ω'; soit G_1 un groupe où le rapport des périodes est réel, mais irrationnel; soit enfin G_2 un groupe où le rapport des périodes est réel et rationnel, de sorte que l'on ait

$$\omega_2 = p\lambda, \qquad \omega'_2 = p'\lambda,$$

p et p' étant deux entiers. G est *holoédriquement* isomorphe à G_1; il est *mériédriquement* isomorphe à G_2 : l'élément unité de ce dernier est obtenu pour tous les couples de valeurs $m = kp'$, $m' = -kp$ et le groupe g des substitutions

$$z' = z + k(p'\omega - p\omega'),$$

où k est un entier quelconque est un sous-groupe invariant de G.

5. **Structure des groupes liés.** — THÉORÈME. — *Tout groupe lié* $\overline{G}$ *est mériédriquement isomorphe au groupe libre* G *engendré par le même nombre de transformations génératrices.*

Soient, en effet, $T_1, T_2, \ldots, T_m$ et $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_m$ deux systèmes de transformations génératrices de G et $\overline{G}$. A tout élément $P(T_i)$ de G correspond un élément et *un seul* $P(\overline{T}_i)$ de $\overline{G}$. Mais à tout élément de $\overline{G}$ correspondent une infinité d'éléments de G. Car, d'abord, si la correspondance était biunivoque, groupes holoédriquement isomorphes, les éléments $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_m$, ne pourraient être liés par aucune relation : le groupe $\overline{G}$ ne serait pas lié. Or, il existe au moins une relation

$$P_1(\overline{T}_i) = \overline{U} = 1.$$

Les transformés de l'élément $P_1(T_i)$ de G par tous les éléments de G: $1, T, T', \ldots$, soient

$$P_1(T_i), \quad T^{-1}P_1(T_i)T, \quad T'^{-1}P_1(T_i)T', \quad \ldots$$

ont pour correspondants

$$P_1(\overline{T}_i) = 1, \quad \overline{T}^{-1}P_1(\overline{T}_i)\overline{T} = 1, \quad \ldots,$$

ils correspondent, par suite, tous à l'*élément unité* de $\overline{G}$, ainsi que toutes leurs combinaisons par multiplication ou itération. Or, tous ces éléments sont distincts et en nombre infini; ils forment avec leurs combinaisons un groupe Γ_1, qui, d'après ce qui précède, est permutable avec toutes les substitutions de G, dont il est, par conséquent, un *sous-groupe invariant*.

Quant aux éléments de G correspondants à un élément quelconque $Q(\overline{T}_i)$ de $\overline{G}$, ils sont donnés par

$$Q(T_i), \quad Q(T_i)\Pi_1, \quad Q(T_i)\Pi'_1, \quad \ldots,$$

$1, \Pi_1, \Pi'_1, \ldots$ désignant les divers éléments du groupe Γ_1.

Supposons, d'une façon générale, qu'il existe entre les éléments de $\overline{G}$ k relations distinctes,

$$(1) \qquad P_1(\overline{T}_i) = 1, \quad P_2(\overline{T}_i) = 1, \quad \ldots, \quad P_k(\overline{T}_i) = 1.$$

A tout élément de G correspond un élément bien déterminé de $\overline{G}$. Mais à tout élément $Q(\overline{T}_i)$ de $\overline{G}$ correspondent les éléments de G :

$$Q(T_i), \quad Q(T_i)\Pi, \quad Q(T_i)\Pi', \quad \ldots,$$

$\Pi, \Pi', \ldots$ désignant cette fois d'abord les éléments $P_1(T_i), P_2(T_i), \ldots, P_k(T_i)$, puis tous ceux qui s'en déduisent par itération, multiplication et transformation par les éléments de G et par combinaison de tous ces éléments entre eux. Tous ces éléments $\Pi, \Pi', \ldots$ correspondent dans $\overline{G}$ à la transformation identique. Ils forment un groupe Γ, produit des groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ auxquels donnent respectivement naissance les relations (1). Il est évident que tous ces groupes Γ_k qui sont déjà des sous-groupes invariants de G le sont aussi du groupe Γ.

En résumé, l'adjonction au groupe libre $G(T_i)$ *d'un groupe* $\overline{G}$ *caractérisé par les relations* $P_h(\overline{T}_i) = 1$ $(h = 1, 2, \ldots, k)$ *définit un sous-groupe invariant* Γ *de* G, *composé de tous les éléments correspondants à l'élément unité de* $\overline{G}$, *et le groupe* G *est le produit de ce groupe* Γ *et du groupe des éléments distincts qui correspondent à des éléments tous distincts de* $\overline{G}$.

Établir entre les transformations génératrices d'un groupe libre G les k relations $P_h(T_i) = 1$ revient à restreindre le groupe à celui $\overline{G}$ des transformations encore distinctes eu égard à ces relations.

Généralisation. — On peut établir, entre les éléments générateurs de $\overline{G}$, k' relations $P'_{h'}(\overline{T}_i) = 1$, et définir ainsi, par l'ensemble des $k + k'$ relations, un nouveau groupe $\overline{G}'$. Les rapports mutuels de $\overline{G}$ et de $\overline{G}'$

résulteront de ces relations $P'_{h'} = 1$ de la même façon que les rapports entre G et $\overline{G}$ résultent des relations $P_h = 1$.

Exemples simples de groupes liés. — On a déjà signalé (§ 3) les groupes *abéliens* comme groupes *liés*. Parmi les groupes non abéliens liés, signalons parmi les plus simples ceux qui contiennent au moins une transformation T d'*exposant* fini n (§ 4), c'est-à-dire qui contiennent au moins un *sous-groupe cyclique*. La relation de structure correspondante est alors

$$T^n = 1.$$

Tel est, par exemple, le groupe engendré par les substitutions

$$(S) \qquad z' = z + \omega,$$

$$(T) \qquad z' = z e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

6. Représentation géométrique liée à la structure. — Soit d'abord un groupe libre engendré par m transformations génératrices : S_1, S_2, ..., S_m et leurs inverses : S_1^{-1}, S_2^{-1}, ..., S_m^{-1}. Il est possible d'éviter l'emploi d'exposants négatifs par l'introduction d'une $(m+1)^{\text{ième}}$ opération S_n définie par la relation

$$S_1 S_2 \ldots S_m S_n = 1,$$

car on en tire successivement

$$\begin{aligned}
S_1^{-1} &= S_2 S_3 \ldots S_m \quad S_n,\\
S_2^{-1} &= S_3 S_4 \ldots S_n \quad S_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
S_m^{-1} &= S_n S_1 \ldots S_{m-2} S_{m-1},\\
S_n^{-1} &= S_1 S_2 \ldots S_{m-1} S_m.
\end{aligned}$$

Nous appellerons substitutions ou transformations *contiguës* à une transformations T les n transformations TS_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Pour avoir une représentation géométrique (ou mieux topologique) du groupe, il suffit de faire correspondre à chacune de ses *transformations* T un polygone P (*curviligne*) à n sommets a_1, a_2, ..., a_n, correspondant chacun à une des opérations génératrices S_1, S_2, ..., S_n, cette correspondance étant soumise aux règles suivantes :

1° A une substitution $T' = TS_i$ contiguë à T, correspondra un polygone P′ (représenté symboliquement par PS_i) *ayant en commun avec* P *le sommet a_i et nul autre point.*

2° Deux polygones quelconques auront *au plus un seul point commun* et ce sera alors *un sommet de même indice* sur chacun d'eux, de là résulte que les côtés devront être tangents entre eux aux sommets communs : les angles du polygone seront nuls.

3° L'ordre des indices des sommets sera le même dans tous les polygones pour un même sens de rotation.

Par exemple, en raisonnant pour simplifier avec $n = 3$, que l'on prenne pour les sommets a_1, a_2, a_3 du polygone P_0 correspondant à la transformation identique $U = 1$, les sommets d'un triangle équilatéral et pour les côtés de ce polygone les arcs de cercle intérieurs au cercle circonscrit C et tangents en a_1, a_2, a_3 aux rayons Oa_1, Oa_2, Oa_3 de ce cercle; qu'on *isole* ensuite ce polygone en l'entourant des polygones symétriques de P_0 par rapport à chacun de ses côtés (*symétrie* voulant dire *inversion* par rapport à un cercle), ces nouveaux polygones auront encore leurs sommets sur le cercle C, puisque les *circonférences de symétrie* ou d'*inversion* sont orthogonales à C; les sommets reçoivent le même indice que leur symétrique; on continue à former de nouveaux polygones et cela indéfiniment en prenant les symétriques des polygones déjà formés par rapport aux différents côtés; enfin l'on couvre de hachures tous les polygones déduits de P_0 par un nombre *impair* de symétries; il reste une infinité dénombrable de polygones *non hachurés* répondant à toutes les conditions requises. Pour obtenir la transformation du groupe à faire correspondre à chaque polygone P_k, il suffit de multiplier par S_i (ou par S_i^{-1}, suivant le sens de rotation) la transformation correspondant à celui $P'_{k'}$ des polygones dont P_k est déduit par deux symétries successives autour de deux côtés consécutifs aboutissant au sommet d'indice i de P_k, et dont le premier appartient à P'_{k}. Cette *double symétrie* est, *au point de vue purement topologique*, *une rotation.*

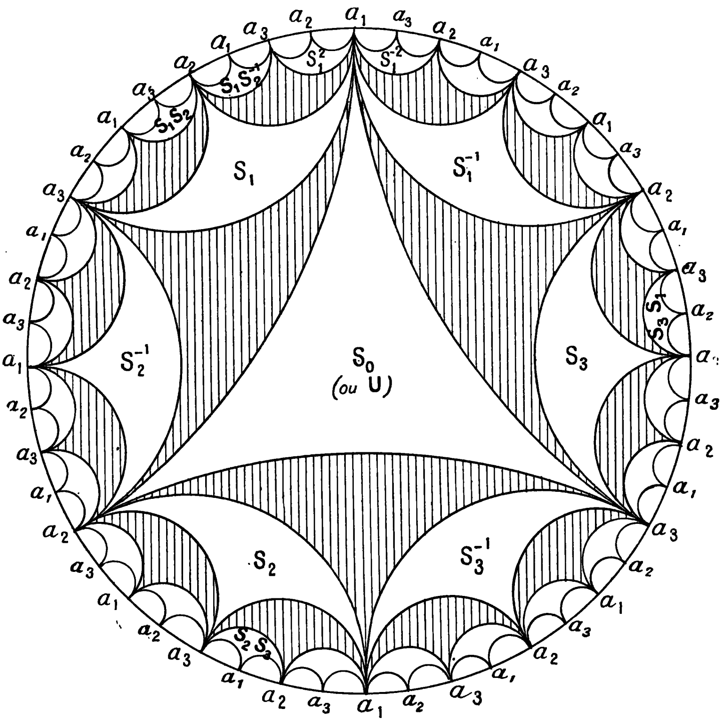
En procédant de proche en proche on peut donc, étant donnée une transformation du groupe, trouver le polygone qui lui correspond, et réciproquement [1].

---

[1] Pour simplifier l'exécution de la figure, on a substitué au procédé d'inversion,

On a marqué sur la figure 1 les transformations relatives aux premiers polygones obtenus, savoir U, S_1, S_2, S_3, $S_1 S_2$, $S_2 S_3$, $S_3 S_1$. On vérifie aisément que le cycle des rotations successives autour

Fig. 1.



des sommets d'un polygone redonne ce polygone, conformément à la relation

$$S_1 S_2 S_3 = 1.$$

Le réseau de l'ensemble des polygones présente la même *disposition* autour de chacun de ses éléments.

Si maintenant l'on considère un groupe *lié*, il existera, en vertu des relations de structure, une infinité de polygones *non contigus* correspondant à la transformation identique, et d'une façon générale à une transformation quelconque. Le réseau présente encore une

---

une simple subdivision progressive en parties égales — ce qui revient au même au point de vue topologique.

isotropie comme pour le groupe libre, mais relative à ces *ensembles* de polygones. La figure donne donc une représentation concrète de la réduction opérée dans le nombre des produits distincts de transformations par l'adjonction de relations de structure.

7. **Groupes de substitutions synectiques.** — Après l'étude sommaire précédente des propriétés générales communes à tous les groupes discontinus, passons aux propriétés des groupes résultant de leur définition analytique. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n variables indépendantes (réelles ou complexes) et $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r)$ autant de fonctions de ces variables et d'un certain nombre r de paramètres réels ou complexes. Les substitutions

$$(1) \qquad x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

définissent un groupe dans un certain domaine, si les formules (1) et les formules

$$(2) \qquad x''_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; a'_1, a'_2, \ldots, a'_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

entraînent

$$(3) \qquad x''_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a''_1, a''_2, \ldots, a''_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

avec

$$(4) \qquad a''_k = \varphi_k(a_1, a_2, \ldots, a_r; a'_1, a'_2, \ldots, a'_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

moyennant les conditions supplémentaires suivantes :

1° Les f_i sont des fonctions *synectiques* des x (c'est-à-dire des fonctions analytiques par rapport à chacune des variables x).

2° Leur déterminant fonctionnel $\Delta = \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ n'est pas identiquement nul, de sorte que les équations (1) définissent réciproquement les x comme fonctions synectiques des x'.

$$(5) \qquad x_i = f'_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

la correspondance étant biunivoque.

3° On a identiquement

$$(6) \qquad f'_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r) \equiv f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),$$

les α étant des fonctions bien déterminées des a.

4° Pour certaines valeurs $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_r$ des a, on a identiquement

$$x_i \equiv f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_r), \tag{7}$$

c'est-à-dire la substitution identique. Le produit de deux transformations inverses

$$(\mathrm{T}) \qquad x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r),$$
$$(\mathrm{T}^{-1}) \qquad x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_r),$$

devant donner la transformation identique, on doit avoir

$$\overline{a}_k = \varphi_k(a_1, \ldots, a_r; \alpha_1, \ldots, \alpha_r). \tag{8}$$

Moyennant les hypothèses précédentes, toutes les conditions du paragraphe 1 sont satisfaites, comme on le vérifie immédiatement.

Notation. — On représente souvent une transformation T par la notation abrégée $[x_i; f_i(\ldots x_k \ldots)]$.

Remarques. — I. Les conditions précédentes très restrictives pourraient être remplacées par des conditions plus larges. Par exemple les puissances de la substitution : $z' = z^3$ définissent un groupe de substitutions $z' = z^{3^n}$, n entier positif, négatif ou nul; si z est complexe, la correspondance n'est pas biunivoque, elle l'est au contraire pour z réel.

II. Il est toujours possible de représenter la transformation la plus générale d'un groupe par un *seul* ensemble de formules [tel que (1)]; mais il peut y avoir intérêt à distinguer *plusieurs classes* de transformations suivant les valeurs des paramètres, et l'on peut alors définir le groupe par une série de formules telles que (1), soit

$$x'_i = f_{ik}(x_1, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, p).$$

Par exemple le groupe des puissances de la translation

$$z' = z + h$$

dans le plan analytique, combiné avec la symétrie par rapport à l'origine

$$z' = -z,$$

peut être représenté indifféremment soit par les formules

$$z' = z + nh \qquad \text{et} \qquad z' = -z$$

mettant en évidence deux classes de substitutions, soit par la formule unique

$$z' = (-1)^m z + nh.$$

III. Il peut arriver que les formules (1) de définition d'un groupe G se répartissent en plusieurs séries de transformations opérant seulement sur des portions distinctes de l'ensemble des n variables indépendantes; soient $x_i^{(1)}(i = 1, 2, \ldots, n_1)$, $x_i^{(2)}(i = 1, 2, \ldots, n_r)$, $\ldots$, $x_i^{(k)}(i = 1, 2, \ldots, n_k)$; elles s'écrivent alors

$$\begin{array}{ll} x_i^{(1)'} = f_i^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}; a_1^{(1)}, \ldots, a_{r_1}^{(1)}) & (i = 1, 2, \ldots, n_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_i^{(k)'} = f_i^{(k)}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}; a_1^{(k)}, \ldots, a_{r_k}^{(k)}) & (i = 1, 2, \ldots, n_k) \end{array}$$

avec

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n, \qquad r_1 + r_2 + \ldots + r_k = r.$$

En ce cas chacune des séries de formules définit un groupe, et le groupe G est alors dit *mixte* ou *composite;* il est alors formé par la réunion des groupes *partiels* G_1, G_2, $\ldots$, G_k qui en sont d'ailleurs des sous-groupes.

8. Continuité et discontinuité. Interprétations géométriques. — Si les paramètres peuvent varier d'une façon continue, le groupe est dit continu, *fini* ou *infini* (selon la terminologie de S. Lie) suivant qu'il y a un nombre *fini* ou une *infinité* de paramètres (bien que dans le premier cas, comme dans le second, le groupe contienne une *infinité continue* de transformations).

Dans le cas contraire, le groupe est *discontinu* et contient seulement un nombre *fini* ou une *infinité dénombrable* de substitutions. Mais il y a des degrés dans la discontinuité et il est commode, pour ces questions, d'avoir recours à des *interprétations géométriques.*

Considérons, d'une part, les valeurs, réelles ou complexes, des paramètres a_1, a_2, $\ldots$, a_r, comme définissant un point A dans un espace, à r ou à $2r$ dimensions suivant le cas : c'est l'*espace de groupe* de M. Cartan. Le point A est le *point représentatif* de la transformation. Définissons également, d'autre part, par les valeurs x_i,

$x_2, \ldots, x_n$, un point P dans un espace C à n ou à $2n$ dimensions suivant qu'il s'agit de valeurs réelles ou complexes [1] : cet espace s'appellera le *champ opératoire* du groupe. A chaque transformation du groupe, c'est-à-dire à chaque point représentatif A correspond une transformation de C en lui-même, c'est-à-dire une correspondance entre chaque point P et son transformé P'. Les points transformés de P par les diverses transformations du groupe sont dits *équivalents* à P, tous ces points sont d'ailleurs équivalents entre eux.

Dans le cas des groupes *continus finis*, les *points représentatifs* remplissent, d'une façon *continue*, l'espace de groupe ou, tout au moins, une portion de ce dernier ou d'une de ses variétés. De même les *points équivalents* à un point P remplissent d'une façon *continue* tout ou partie du champ C ou d'une de ses variétés. Exemple : le groupe des déplacements continus d'une figure invariable.

Dans le cas des groupes *discontinus finis*, les *points représentatifs* forment des *ensembles discontinus dénombrables*; pouvant être infinis; mais les points P' équivalents à un point donné P de C sont toujours en nombre *fini*. Exemple : le groupe cyclique des substitutions : $z' = e^{\frac{2k\pi i}{m}} z$, m entier donné, k entier arbitraire.

Dans le cas des groupes *discontinus infinis*, les *points représentatifs* et les *points équivalents* forment toujours des *ensembles infinis discontinus*, et nous bornons notre étude au cas où ces ensembles sont *dénombrables*. Les points représentatifs peuvent alors être numérotés, et les relations de structure (§ 3, 6 et 7) équivalent à des correspondances entre les points et les *vecteurs* qui les unissent.

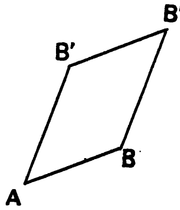
9. **Domaines équivalents. Discontinuité propre et impropre. Opérations infinitésimales. Domaines fondamentaux.** — Les différents groupes discontinus infinis ne sont pas de la même utilité au point de vue des applications analytiques, applications pour lesquelles le problème capital est le suivant : *déterminer toutes les fonctions* UNIFORMES *des x qui demeurent invariantes par les transformations du groupe*. Pour l'existence de telles fonctions, il est évidem-

(1) Il est important de remarquer que le groupe peut n'être défini que pour une région de l'espace de groupe et que de même ses opérations ou transformations peuvent ne porter que sur certaines régions de C.

ment nécessaire que, dans toute région *bornée* du champ opératoire, les points équivalents entre eux soient en *nombre limité*, et cela revient en définitive à l'existence d'un *domaine fondamental* (Poincaré) ou *de discontinuité* (Klein) (¹), c'est-à-dire d'une région comprenant *un équivalent et un seul* de tout point du champ opératoire.

Tel est le *parallélogramme des périodes* (*fig.* 2) dans le cas du

Fig. 2.



groupe des substitutions $z' = z + m\omega + m'\omega'$ des fonctions elliptiques; d'une façon plus précise le domaine fondamental comprend l'*intérieur* du parallélogramme, la moitié du périmètre et le quart des sommets, par exemple les côtés AB et AB', points B et B' non compris : il s'agit donc d'un domaine *ouvert*.

La notion de domaine fondamental se rattache à celle de *discontinuité propre :* un groupe est *proprement discontinu dans un domaine fermé* D (c'est-à-dire *frontière comprise*) du champ opératoire C, si le nombre des points de D équivalents entre eux est limité; il est dit proprement discontinu *en un point* P, s'il est proprement discontinu dans un cercle, une sphère ou une hypersphère de centre P (suivant le nombre des dimensions) frontière comprise; enfin il est proprement discontinu dans un *domaine ouvert* (c'est-à-dire frontière non comprise), s'il est proprement discontinu *dans tout domaine fermé* D' *intérieur à* D. Le groupe est alors proprement discontinu *en tout point intérieur à* D. Réciproquement s'il est proprement discontinu en tout point intérieur à D, il l'est dans tout domaine intérieur à D, en vertu du lemme de Borel-Lebesgue, d'après lequel étant donné un ensemble parfait de points dans un

(¹) Je propose aussi la dénomination de *domaine ou champ réduit*, qui rappelle peut-être mieux leur propriété.

espace à n dimensions, s'il existe une famille d'hypersphères, telle que tout point de l'ensemble est intérieur, au sens étroit, à au moins l'une d'elles, il y a un nombre *fini* d'hypersphères ayant la même propriété. On va voir dans l'étude des groupes automorphes que la condition nécessaire et suffisante de discontinuité propre dans une région de C est l'existence d'un domaine fondamental.

D'après la définition même, une condition nécessaire de discontinuité propre est l'*absence de points d'accumulation de points équivalents*. De tels points existent toujours, si le groupe admet des opérations *infinitésimales*, c'est-à-dire s'il existe une infinité de transformations correspondant à des valeurs a_{1m}, a_{2m}, ..., a_{rm} des paramètres, telle que, l'entier m augmentant indéfiniment, les points P_m transformés de P tendent vers P, qui est alors point d'accumulation de points équivalents [1].

Mais la réciproque n'est pas vraie, et c'est ce qui complique ces questions, *il peut y avoir des points d'accumulation sans qu'il y ait de substitutions infinitésimales.*

Exemples :

1° Les rotations planes de centre O et d'angle α incommensurable avec π forment un groupe cyclique défini par

$$x'_m = x \cos m\alpha - y \sin m\alpha,$$
$$y'_m = x \sin m\alpha + y \cos m\alpha.$$

Or, on peut approcher de l'irrationnelle $\frac{2\pi}{\alpha}$ par des fractions $\frac{m}{k}$, telles que l'on ait (théorie des fractions continues)

$$\left|\frac{m}{k} - \frac{2\pi}{\alpha}\right| < \frac{1}{k^2},$$

et, par suite,

$$|m\alpha - 2k\pi| < \frac{|\alpha|}{k},$$

x'_m, y'_m tendront donc vers x, y. Le groupe admet donc des transformations infinitésimales, et *n'est donc pas proprement discontinu.*

---

(1) Les groupes *continus* ont évidemment toujours des transformations infinitésimales.

2° Toutes les substitutions

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

effectuées sur la variable complexe a, b, c, d étant des entiers réels vérifiant la condition

$$ad - bc = 1$$

forment un groupe, appelé *groupe arithmétique*. Ce groupe *ne contient pas de transformation infinitésimale*, car la différence

$$z' - \frac{az+b}{cz+d} = \frac{cz^2 + (d-a)z - b}{cz+d},$$

ne peut être infiniment petite puisque a, b, c, d ne prennent que des valeurs entières. Cependant tout point d'abscisse rationnelle $\frac{a}{c}$ de l'axe réel est équivalent au point à l'infini. L'équation

$$ad - bc = 1$$

a une infinité de solutions entières en b et d (a et c pouvant être supposés premiers entre eux); d'autre part, on peut approcher autant qu'on le veut par des fractions de toute valeur irrationnelle, de sorte que *tout point de l'axe réel est point d'accumulation de points équivalents*.

10. L'homographie cas le plus simple de groupes de transformations. — La forme la plus simple des fonctions qui satisfont aux conditions (4) et (6) du paragraphe 7 relatives à la composition et à l'inversion des transformations, est évidemment la forme linéaire. Mais il en existe d'autres classes, par exemple, celles que l'on rencontre dans les transformations birationnelles de Cremona, qui se réduisent à des combinaisons de transformations homographiques et de la transformation quadratique, $x' = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{1}{y}$. Citons encore les groupes *hyperabéliens* de M. Picard qui sont des groupes mixtes de substitutions homographiques, formant des groupes de substitutions *quadratiques*. On trouvera dans l'*Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui et delle funzioni automorfe* de G. Fubini (1908) et dans les *Leçons sur les fonctions automorphes* de G. Giraud (1920) des généralisations diverses des classes de transformations précédentes. Une étude systématique de la nature des fonctions susceptibles de représenter les transformations d'un groupe ne paraît pas avoir encore été faite.

Dans le fascicule actuel, nous nous bornerons à l'étude des groupes de substitutions homographiques (ou linéaires)

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

de la variable complexe. a, b, c, d pourront être réels ou complexes, le *déterminant* $ad - bc$ de la substitution sera toujours différent de zéro (autrement on aurait $z' =$ const.).

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DE LA VARIABLE COMPLEXE. CORRESPONDANCE ENTRE LE PLAN ANALYTIQUE OU LE DEMI-ESPACE DE POINCARÉ AVEC LE PLAN OU L'ESPACE HYPERBOLIQUES DE LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DE CAYLEY.

11. Substitutions fuchsiennes et automorphes et géométries projectives. — Les substitutions

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

ne dépendent que des rapports de trois des coefficients au quatrième; les substitutions à *coefficients réels*, appelées *fuchsiennes*, d'après Poincaré, dépendent donc de *trois paramètres réels;* les substitutions à *coefficients complexes*, appelées *automorphes*, d'après Klein, dépendent de *six paramètres réels*.

L'un des exemples les plus simples de groupes automorphes est celui des *déplacements euclidiens dans le plan analytique*, déplacements représentés par la transformation

$$z' = a + e^{i\alpha} z, \tag{1}$$

où a est une quantité complexe quelconque et α un angle réel. Pour a et α arbitraires, ce groupe est continu. Mais il devient discontinu pour des valeurs convenables de ces paramètres : par exemple, en prenant $\alpha = 0$ et $a = m\omega + m'\omega'$ avec $\frac{\omega'}{\omega}$ non réel et m, m' entiers quelconques on a le groupe des *translations multiples de* ω *et de* ω';

auquel se rattachent les fonctions doublement périodiques; en prenant $a = 0$ et $\alpha = \frac{2m\pi}{\nu}$ (ν entier fixe, m entier quelconque), on a le groupe cyclique *des rotations multiples de l'angle* $\frac{2\pi}{\nu}$ autour de l'origine.

Les déplacements euclidiens dans l'espace à trois dimensions ne sont qu'un cas particulier des *transformations homographiques* les plus générales dont l'expression en coordonnées homogènes est

$$(2) \qquad x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Ils correspondent au groupe de celles de ces transformations qui conservent le *cercle* de *l'infini*, c'est-à-dire *la quadrique dégénérée située dans le plan de l'infini et inscrite dans le cône isotrope;* cette condition entraîne 9 relations entre les 15 paramètres de la transformation : 6 restent donc arbitraires.

C'est sur une conception analogue que se fonde la géométrie projective de Cayley. Grâce à la généralisation des notions de distance et d'angle à l'aide du rapport anharmonique, *invariant dans les transformations homographiques*, Cayley a pu construire des géométries calquées sur la géométrie ordinaire, qui correspondent, ainsi que Klein et Poincaré l'ont montré, aux géométries non euclidiennes de Lobatchewsky et de Riemann, et *les groupes fuchsiens et automorphes sont semblables aux groupes de mouvements cayleyens.* C'est là l'un des résultats fondamentaux de Poincaré qu'il s'agit maintenant de démontrer.

12. Géométrie de Cayley. — Soit, en coordonnées homogènes rectangulaires z_1, z_2, z_3, z_4, un ellipsoïde réel, par exemple la sphère

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 = 0$$

(on peut toujours se ramener à ce cas par une transformation homographique). Cayley appelle cette surface *l'absolu*.

Cayley prend pour *distance* de deux points p, q (à un facteur constant près) *le logarithme du rapport anharmonique* (p, q, a, b), a et b étant les points de rencontre de pq avec l'absolu.

Il prend de même pour valeur de *l'angle* de deux plans (à un facteur constant près) *le logarithme du rapport anharmonique*

(P, Q, A, B), A et B étant les plans tangents à l'absolu menés par l'intersection de P et Q.

En posant, pour abréger,

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=f_{xx}, \qquad x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4=f_{xy},$$

on trouve par un calcul facile pour cette distance et cet angle :

$$\mathcal{L}(pq)=k\log\left|\frac{f_{xy}+\sqrt{f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}}}{f_{xy}-\sqrt{f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}}}\right|, \tag{1}$$

$$\mathfrak{A}(PQ)=K\log\left|\frac{\varphi_{uv}+\sqrt{\varphi_{uv}^2-\varphi_{uu}\varphi_{vv}}}{\varphi_{uv}-\sqrt{\varphi_{uv}^2-\varphi_{uu}\varphi_{vv}}}\right|, \tag{2}$$

en désignant par x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4, les coordonnées ponctuelles de p et q; par u_1, u_2, u_3, u_4; v_1, v_2, v_3, v_4 les coordonnées tangentielles de P et Q, et enfin par

$$\varphi_{ww}=w_1^2+w_2^2+w_3^2-w_4^2,$$

le premier membre de l'équation tangentielle de l'absolu.

La plupart du temps on se borne à considérer l'*intérieur* de l'absolu (appelé par Klein *espace hyperbolique*).

On obtiendra des valeurs réelles pour la distance de deux points intérieurs et pour l'angle de deux plans dont la droite d'intersection coupe l'absolu en prenant pour k une valeur purement réelle et pour K une valeur purement imaginaire, par exemple $k=\frac{1}{2}$ et $K=\frac{1}{2i}$.

Un calcul facile donne alors

$$\cos\mathfrak{A}=\frac{\varphi_{uv}}{\sqrt{\varphi_{uu}\varphi_{vv}}}. \tag{3}$$

De ces définitions résultent les relations suivantes pour des segments consécutifs ou des angles dièdres adjacents :

$$\mathcal{L}(p_1p_2)+\mathcal{L}(p_2p_3)=\mathcal{L}(p_1p_3), \tag{4}$$

$$\mathfrak{A}(P_1P_2)+\mathfrak{A}(P_2P_3)=\mathfrak{A}(P_1P_3). \tag{5}$$

Les points de l'absolu jouent le rôle des points à l'infini, le rapport anharmonique $(pqab)$ devenant nul ou infini, si p ou q viennent sur la quadrique.

Enfin toute transformation homographique conservant le rapport anharmonique des points alignés ou des faisceaux de plans, les *déplacements cayleyens* correspondent aux *transformations homographiques* qui *conservent l'absolu*. Nous appellerons ces transformations *collinéations conservatives*.

En géométrie euclidienne il y a lieu de distinguer deux sortes de déplacements ou plus exactement de congruence des figures : les premiers se rapportent aux figures *égales*, c'est-à-dire *superposables*, les seconds aux figures dont l'*une* est *égale* à une *symétrique de l'autre* par rapport à un plan; on peut les appeler faux déplacements. Il en est de même en géométrie cayleyenne.

13. Expression générale des collinéations conservatives. — Remarquons avec Klein que les génératrices rectilignes de l'absolu sont changées en génératrices par toute collinéation conservative; de plus, comme seules se rencontrent des génératrices de systèmes différents, une collinéation conservative ou bien conserve chaque système, ou bien permute les deux systèmes.

Définissons les deux systèmes par les équations

$$(1)\qquad \frac{z_4+z_3}{z_1-iz_2}=\frac{z_1+iz_2}{z_4-z_3}=\lambda,\qquad \frac{z_4+z_3}{z_1+iz_2}=\frac{z_1-iz_2}{z_4-z_3}=\mu,$$

ou, en posant $z_4+z_3=y_1$, $z_1+iz_2=y_2$, $z_1-iz_2=y_3$, $z_4-z_3=y_4$,

$$(2)\qquad \frac{y_1}{y_3}=\frac{y_2}{y_4}=\lambda,\qquad \frac{y_1}{y_2}=\frac{y_3}{y_4}=\mu.$$

On peut alors exprimer les coordonnées homogènes auxiliaires y d'un point de l'absolu en fonction de λ et μ par les proportions

$$(3)\qquad y_1:y_2:y_3:y_4=\lambda\mu:\lambda:\mu:1,$$

et les coordonnées z par

$$(4)\qquad z_1:z_2:z_3:z_4=\lambda+\mu:-i(\lambda-\mu):\lambda\mu-1:\lambda\mu+1.$$

Les points réels de l'absolu correspondent donc à des valeurs imaginaires conjuguées de λ *et* μ *et réciproquement.*

La correspondance établie par la collinéation entre les paramètres λ et μ et leurs transformés λ' et μ' étant *algébrique et biunivoque* est nécessairement homographique de sorte que dans le premier cas (où chaque système est conservé) on a

$$(5)\qquad \lambda'=\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta},\qquad \mu'=\frac{\varepsilon\mu+\zeta}{\eta\mu+\theta},\qquad (\alpha\delta-\beta\gamma)(\varepsilon\theta-\zeta\eta)\neq 0.$$

Pour en déduire la collinéation correspondante de l'espace, il suffit d'employer (3) qu'on écrit sous forme homogène en posant $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$,

$$(3\ bis) \qquad y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \lambda_1\mu_1 : \lambda_1\mu_2 : \lambda_2\mu_1 : \mu_1\mu_2.$$

D'où par (5) rendu homogène,

$$(6) \qquad \begin{cases} y'_1 = \alpha\varepsilon\, y_1 + \alpha\zeta y_2 + \beta\varepsilon\, y_3 + \beta\zeta y_4, \\ y'_2 = \alpha\eta y_1 + \alpha\theta y_2 + \beta\eta y_3 + \beta\theta y_4, \\ y'_3 = \gamma\varepsilon y_1 + \gamma\zeta y_2 + \delta\varepsilon\, y_3 + \delta\zeta y_4, \\ y'_4 = \gamma\eta y_1 + \gamma\theta y_2 + \delta\eta\, y_3 + \delta\theta y_4. \end{cases}$$

On en déduit

$$y'_1 y'_4 - y'_2 y'_3 = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\varepsilon\theta - \zeta\eta)(y_1 y_4 - y_2 y_3),$$

ces formules sont dues à Cayley.

Pour avoir les collinéations de deuxième espèce, il suffit de permuter les systèmes en écrivant

$$(7) \qquad \lambda' = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta}, \qquad \mu' = \frac{\varepsilon\lambda + \zeta}{\eta\lambda + \theta},$$

cela revient à la substitution $y'_1 = y_1$, $y'_2 = y_3$, $y'_3 = y_2$, $y'_4 = y_4$, qu'il suffit de combiner avec les substitutions (6) pour avoir toutes les collinéations de *deuxième espèce, ou faux déplacements.*

Collinéations réelles. — Il est visible que pour rester dans le domaine réel, il faut prendre des valeurs imaginaires conjuguées pour λ et μ, ainsi que pour les coefficients correspondants de λ' et μ', c'est-à-dire (¹) :

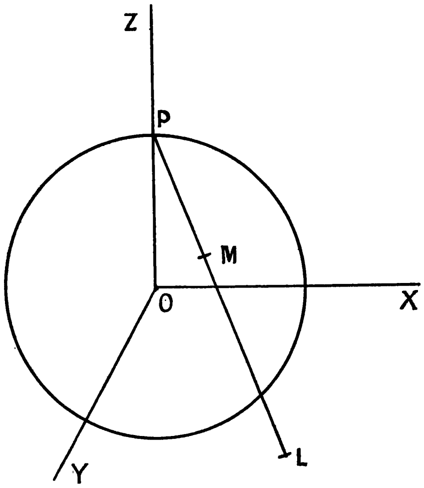
$$(8) \qquad \mu = \lambda_0, \qquad \varepsilon = \alpha_0, \qquad \zeta = \beta_0, \qquad \eta = \gamma_0, \qquad \theta = \delta_0.$$

14. Classification des déplacements cayleyens. — Pour étudier les déplacements cayleyens réels, on est conduit, par ce qui précède, à l'étude préalable des *transformations linéaires de la variable complexe.* La classification des déplacements correspondants dans l'espace hyperbolique sera ensuite facilitée par la considération du

(¹) Nous désignons par z_0 l'imaginaire conjuguée de z.

point associé à la variable complexe sur la sphère de Riemann. Cette sphère est ici (*fig*. 3) la sphère unité de centre O, $X^2+Y^2+Z^2=1$, qui coïncide avec l'absolu, si l'on prend $X=\frac{z_1}{z_4}$, etc. En projetant stéréographiquement à partir du pôle $P(0, 0, 1)$ le point $M(X, Y, Z)$ de

Fig. 3.



la sphère sur le plan XOY, on obtient le point L de coordonnées

$$\xi=\frac{X}{1-Z}, \qquad \eta=\frac{Y}{1-Z},$$

qui est le point représentatif de la quantité complexe $\lambda=\xi+i\eta$; M est son image sur la sphère.

15. Étude géométrique des substitutions fuchsiennes ou automorphes. — La substitution

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0),$$

conserve les angles, puisque z' est une fonction analytique de z. Elle peut se décomposer comme suit :

1° $\gamma\neq 0$

$$z'=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2\left(z+\frac{\delta}{\gamma}\right)},$$

substitution qui résulte des quatre opérations successives suivantes :

Addition de $\frac{\delta}{\gamma}$, c'est-à-dire une translation;

Inversion $\frac{1}{z_1}$ de $z_1 = z + \frac{\delta}{\gamma}$; le point $z_2 = \frac{1}{z_1}$ est le symétrique par rapport à l'axe réel de l'inverse du point z, par rapport au cercle unité de centre O ; au lieu d'*inversion* on dit souvent *symétrie;*

Multiplication par la constante $k = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}$, $z_3 = kz_2$; c'est une homothétie de centre O avec ou sans rotation autour de O, suivant que k est complexe ou réel;

Enfin une translation $z' = z_3 + \frac{\alpha}{\gamma}$.

2° $\gamma = 0$

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta},$$

substitution qui revient à une homothétie de centre O avec ou sans rotation suivie d'une translation.

De là cette conséquence importante : *un cercle se transforme en cercle.*

Classification d'après la nature des points fixes et des multiplicateurs.

Les affixes des points *doubles*, c'est-à-dire des points laissés fixes par une substitution, sont donnés par l'équation

$$(1) \qquad \gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0.$$

Ces deux points peuvent être réels ou complexes, distincts ou confondus.

1° *Points doubles distincts* ζ_1 *et* ζ_2.

Vu la conservation du rapport anharmonique, la transformation linéaire peut s'écrire

$$\frac{z' - \zeta_1}{z' - \zeta_2} = k \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2},$$

substitution de points doubles ζ_1 et ζ_2 exprimant la conservation du rapport anharmonique puisqu'on a aussi pour un autre point z_1 et son transformé

$$\frac{z'_1 - \zeta_1}{z'_1 - \zeta_2} = k \frac{z_1 - \zeta_1}{z_1 - \zeta_2},$$

d'où, par division,

$$(\zeta_1, \zeta_2, z', z'_1) = (\zeta_1, \zeta_2, z, z_1).$$

Elle peut encore s'écrire

$$(\zeta_1, \zeta_2, z', z) = k,$$

k s'appelle le *multiplicateur*. Soit $k = \rho e^{i\omega}$ (ρ et ω réels).

Premier cas : $\rho = 1$, $k = e^{i\omega}$. — La substitution est dite *elliptique* (Klein). Les circonférences passant par ζ_1 et ζ_2 sont changées en circonférences passant par ζ_1 et ζ_2 et faisant l'angle ω avec les premières $\left(\text{pour le voir il suffit de prendre } z \text{ et par suite } z' \text{ infiniment voisins de } \zeta_1 \text{ ce qui donne } \frac{dz'}{dz} = k\right)$. Les circonférences orthogonales à celles-là sont conservées.

Deuxième cas : $e^{i\omega} = 1$, $k = \rho$. — La substitution est dite *hyperbolique*. Une circonférence passant par ζ_1 et ζ_2 est conservée (car la transformée doit faire un angle nul avec la première); une circonférence orthogonale à celles-là est transformée en une autre circonférence orthogonale.

Troisième cas : $\rho \neq 1$, $e^{i\omega} \neq 1$. — La substitution est dite *loxodromique*, la famille des circonférences d'axe radical $\zeta_1\zeta_2$ et des circonférences orthogonales est conservée, mais aucune d'elles ne l'est individuellement.

Pour calculer k, il suffit de faire $z = \infty$ et par suite $z' = \frac{\alpha}{\gamma}$, d'où

$$(2) \qquad k = \frac{\alpha - \gamma\zeta_1}{\alpha - \gamma\zeta_2} = \frac{\alpha + \delta - \varepsilon\sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma}}{\alpha + \delta - \varepsilon\sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma}} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

(le double signe correspond au signe pris devant le radical dans l'expression de ζ_1).

Il est toujours possible en multipliant les α, β, γ, δ par un même facteur (réel ou complexe) de rendre $\alpha\delta - \beta\gamma$ égal à *un*. Alors $(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma$ est égal à $(\alpha + \delta)^2 - 4$ et l'on voit que les substitutions sont elliptiques, hyperboliques ou loxodromiques, suivant que $\alpha + \delta$ est réel et inférieur à *deux* en valeur absolue, réel et supérieur à *deux* en valeur absolue, ou enfin complexe.

2° *Points doubles confondus* $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$.

Dans ce cas, on a donc $\alpha + \delta = 2$. Le multiplicateur doit être considéré comme égal à *un*. La substitution, qui est dite *parabolique*, peut s'écrire

$$z' - \zeta = \frac{z - \zeta}{m(z - \zeta) + 1},$$

ou

$$\frac{1}{z' - \zeta} = m + \frac{1}{z - \zeta}.$$

Un calcul simple montre que toutes les circonférences tangentes en ζ à une certaine droite sont conservées, tandis que celles du faisceau orthogonal s'échangent par la substitution.

Transformation d'une substitution. — Il est aisé de voir que $T^{-1}ST$ est de même nature que S, et les points fixes sont des points équivalents à ceux de S.

Trajectoires. Lignes de niveau. — D'une façon plus précise, considérons les *groupes cycliques* formés par les puissances d'une substitution, c'est-à-dire n étant un entier quelconque positif, négatif ou nul,

$$\frac{z' - \zeta_1}{z' - \zeta_2} = k^n \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}$$

s'il s'agit d'une substitution à points doubles distincts;

$$\frac{1}{z' - \zeta} = mn + \frac{1}{z - \zeta}$$

s'il s'agit d'une substitution parabolique.

Ils sont contenus dans les groupes *continus* à un paramètre réel t :

$$\frac{z' - \zeta_1}{z' - \zeta_2} = k^t \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2},$$

ou

$$\frac{1}{z' - \zeta} = mt + \frac{1}{z - \zeta}.$$

Groupe elliptique. — Pour une substitution elliptique $k = e^{i\omega}$, ω étant un angle réel. Si z est fixé, z' décrit lorsque t varie une trajectoire

$$\left|\frac{z' - \zeta_1}{z' - \zeta_2}\right| = \left|\frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}\right| = \text{const.}$$

qui est une *circonférence orthogonale au segment des points doubles* $\zeta_1 \zeta_2$, et lorsque z varie toutes ces circonférences forment un faisceau ayant pour points de Poncelet ζ_1 et ζ_2. On les appelle *trajectoires* de la substitution. Leurs trajectoires orthogonales, appelées *lignes de niveau*, sont les circonférences passant par ζ_1 et ζ_2.

Groupe hyperbolique. — Alors k est réel, positif et différent de *un*. Si z est fixé, z' décrit, lorsque t varie, la *trajectoire* définie par

$$\operatorname{Arg}\frac{z'-\zeta_1}{z'-\zeta_2} = \operatorname{Arg}\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2},$$

c'est-à-dire une circonférence passant par ζ_1 et ζ_2. Les *lignes de niveau* sont les trajectoires orthogonales de celles-là. Les rôles des circonférences du cas précédent sont intervertis.

Groupe loxodromique. — Les trajectoires et les lignes de niveau sont des spirales s'enroulant autour des points doubles qui sont des points asymptotes.

Groupe parabolique. — Si z est fixé, z' décrit, lorsque t varie, une circonférence passant par le point double ζ. Toutes ces *trajectoires* sont tangentes en ζ, et les *lignes de niveau* forment le faisceau orthogonal.

En résumé une substitution *conserve* les *trajectoires* et *permute* les *lignes de niveau*.

16. Étude géométrique des collinéations de l'espace hyperbolique. — La projection stéréographique conserve les angles (euclidiens) et change les cercles (euclidiens) en cercles. Par conséquent :

1° Une collinéation correspondant à une substitution *elliptique* d'angle θ, laisse fixes deux points $A_1 A_2$ de la sphère de Riemann prise pour absolu et, par suite, *tous les points de la droite qui les joint*, c'est une *rotation cayleyenne*, et l'angle cayleyen de cette rotation est égal à θ : cela résulte aisément de la conservation des angles euclidiens rappelée plus haut et de la formule de Laguerre. La rotation conservant $A_1 A_2$ conserve aussi, mais *non point par point*, la droite $B_1 B_2$ *conjuguée* de $A_1 A_2$, c'est-à-dire l'intersection des plans tangents en A_1 et A_2. Quant aux lignes de niveau et trajectoires sur la *sphère*, — perspectives de celles du plan — ce sont respectivement les circonférences passant par A_1 et A_2 et celles dont les plans passent par $B_1 B_2$. *Dans l'espace* les trajectoires sont des cercles cayleyens d'axe A_1A_2, c'est-à-dire des coniques bitangentes à la sphère aux points de rencontre (imaginaires) avec B_1B_2.

2° Dans une collinéation ou rotation *hyperbolique*, les rôles de A_1A_2, B_1B_2 sont intervertis. L'angle cayleyen de la rotation est imaginaire. Les transformés successifs d'un plan passant par B_1B_2 par les puissances de la substitution ont pour position limite les plans tangents en A_1 et A_2. Les trajectoires sont des coniques bitangentes à la sphère en ces deux points.

3° Une collinéation *parabolique* peut être considérée comme un cas limite : les 4 points A_1, A_2, B_1, B_2 étant confondus. Les cercles passant par une tangente AA_1 sont conservés, tandis que ceux qui passent par la tangente perpendiculaire B_1B_2 sont échangés. Dans l'espace les trajectoires sont des coniques surosculatrices en A_1 à la sphère. On peut encore dire que le mouvement est une *rotation parabolique*, mais son angle est *nul :* c'est l'analogue d'une *translation* ou d'une *homothétie* en géométrie euclidienne.

4° Collinéations *loxodromiques;* elles sont le produit d'une rotation elliptique et d'une rotation hyperbolique d'axes conjugués A_1A_2, B_1B_2 : on a l'analogue d'un *mouvement hélicoïdal;* les trajectoires sont des spirales s'enroulant autour des points A_1 et A_2 de la sphère; les seuls points fixes sont les points A_1, A_2, B_1, B_2 [1].

Groupes de rotations. Géométries cayleyennes planes. — L'ensemble des déplacements laissant fixe un point I forme évidemment un sous-groupe du groupe général, qui est évidemment un *groupe de rotations.*

Le groupe laisse fixe le plan polaire de I et son cercle d'intersection réel ou imaginaire avec l'absolu. On est ramené à un groupe de *mouvements plans :* géométrie plane dite *elliptique* pour I intérieur, *hyperbolique* pour I extérieur, *parabolique* pour I sur la sphère. Ces géométries sont, avec une dimension de moins, absolument analogues à la géométrie cayleyenne de l'espace : la quadrique absolue est ici remplacée par une conique; il n'y a rien à changer à la définition de la distance de deux points; quant à l'angle cayleyen de deux droites $d_1\,d_2$ il est le même que celui des plans menés par les droites

[1] B_1B_2 étant les points de rencontre (imaginaires) de la sphère et de la droite conjuguée de A_1A_2.

et la droite conjuguée de la polaire de leur point de rencontre par rapport à la conique absolue, et une expression de ce dernier angle est évidemment

$$\mathfrak{A}(d_1 d_2) = \frac{1}{2i}\log(u_1, u_2, d_1, d_2),$$

u_1 et u_2 désignant les tangentes à la conique absolue menées par le sommet.

Ces groupes de mouvements plans sont les plus importants et seront étudiés plus loin en détail. Mais auparavant il est nécessaire de compléter la correspondance entre les mouvements de l'espace ou du plan cayleyen et les substitutions fuchsiennes ou automorphes. En effet, d'une part, les mouvements de l'espace portent sur trois variables indépendantes, — les coordonnées —, et les substitutions de la variable z sur deux seulement; de plus on a établi une correspondance entre la sphère absolue et le plan analytique, mais non entre ce dernier et le plan cayleyen.

Demi-espace de Poincaré. — A chaque point P *intérieur* à la sphère correspond un cercle C de centre réel et de rayon purement imaginaire suivant lequel son plan polaire coupe la sphère; sa projection stéréographique sur le plan des z est donc un cercle Γ de rayon purement imaginaire, mais dont le centre réel ϖ est la perspective du point P, car ce dernier est le sommet du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle C. Ce cercle Γ définit une famille de sphères ayant pour plan radical commun le plan des z : *Poincaré fait correspondre au point* P *le centre* Π *de l'une des deux sphères de rayon nul passant par* Γ, *par exemple celui dont la côte est positive.* On obtient ainsi une correspondance biunivoque de l'espace hyperbolique (intérieur de la sphère) avec un *demi-espace euclidien* $O\xi\eta\zeta$. La sphère elle-même continue à correspondre au plan des z.

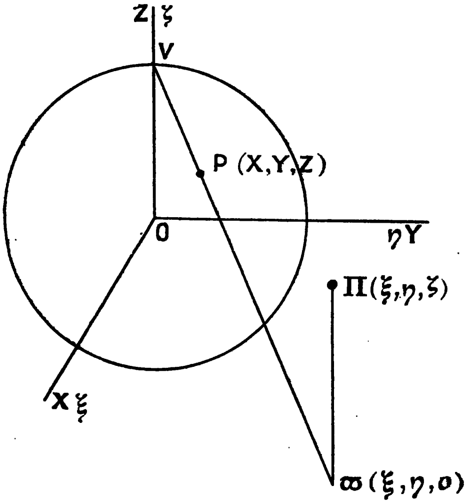
Formules de correspondance. — La côte du point Π est égale au rayon de Γ divisé par i; un calcul simple ou des considérations géométriques (voir *fig.* 4) donnent pour coordonnées ξ, η, ζ de ce point (XYZ étant celles de P)

$$\xi = \frac{X}{1-Z}, \qquad \eta = \frac{Y}{1-Z}, \qquad \zeta = \frac{r}{i} = \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2-Z^2}}{1-Z},$$

ou encore en employant les coordonnées homogènes (§ 13)

$$\xi = \frac{x_1}{x_4 - x_3}, \qquad \eta = \frac{x_2}{x_4 - x_3}, \qquad \zeta = \frac{\sqrt{x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}{x_4 - x_3}.$$

Fig. 4.



On en déduit

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{x_4 + x_3}{x_4 - x_3},$$

puis en introduisant les y,

$$(1) \quad \begin{cases} \rho^2 = zz_0 + \zeta^2 = \dfrac{y_1}{y_4}, \\ z = \xi + i\eta = \dfrac{y_2}{y_4}, \\ z_0 = \xi - i\eta = \dfrac{y_3}{y_4}. \end{cases}$$

A tout *plan* $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ de l'espace hyperbolique, correspond un *hémisphère* orthogonal au plan des $\xi\eta$ et inversement,

$$(2) \qquad (u_4 + u_3)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2u_1\xi + 2u_2\eta + u_4 - u_3 = 0.$$

Exceptionnellement aux plans passant par le point de vue V correspondent des plans orthogonaux à $\xi O \eta$.

A toute *droite*, correspond par suite une demi-circonférence orthogonale à ce plan. Exceptionnellement à toute droite passant par V correspond une droite perpendiculaire à $\xi O \eta$.

Seuls les points intérieurs à l'absolu ont des correspondants réels et réciproquement.

Les déplacements dans le demi-espace sont définis par les formules suivantes dérivées des formules (6) du paragraphe **13** :

$$
(3)\qquad\left\{
\begin{aligned}
\rho'^2 &= \frac{\alpha\alpha_0\rho^2 + \alpha\beta_0 z + \beta\alpha_0 z_0 + \beta\beta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0 z + \delta\gamma_0 z_0 + \delta\delta_0},\\
z' &= \frac{\alpha\gamma_0\rho^2 + \alpha\delta_0 z + \beta\gamma_0 z_0 + \beta\delta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0 z + \delta\gamma_0 z_0 + \delta\delta_0},\\
z'_0 &= \frac{\gamma\alpha_0\rho^2 + \gamma\beta_0 z + \delta\alpha_0 z_0 + \delta\beta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0 z + \delta\gamma_0 z_0 + \delta\delta_0}.
\end{aligned}
\right.
$$

L'angle cayleyen de deux plans est égal à l'angle euclidien des sphères correspondantes. — En effet, on a trouvé pour l'angle de deux plans

$$\cos\mathfrak{A} = \frac{\varphi_{uv}}{\sqrt{\varphi_{uu}\varphi_{vv}}},$$

tandis que l'angle euclidien des sphères est donné par

$$\cos\mathfrak{A}' = \frac{r^2 + r'^2 - d^2}{2rr'},$$

r, r', d sont les rayons et la distance des centres, en les calculant d'après les équations des sphères, on vérifie aisément l'égalité.

Quant à l'équivalent de la *distance cayleyenne* de deux points elle va apparaître plus nettement dans l'étude des mouvements plans.

Étude plus détaillée des mouvements plans. — Le groupe des déplacements plans correspond au groupe des rotations laissant fixe le pôle du plan. Il conserve par conséquent la conique (ici cercle) d'intersection du plan avec l'absolu. Dans le *demi-espace*, on a un groupe de transformations en lui-même d'un hémisphère orthogonal au plan des z avec conservation du cercle de base dans ce plan. Le cas le plus simple est celui des plans passant par V, qui se transforment en plans orthogonaux au plan des z avec conservation de la droite d'intersection. On peut même par une substitution linéaire préalable T, envoyer le centre de rotation à l'infini dans la direction $O\eta$. L'ancien groupe G est transformé en un nouveau groupe $G' = T^{-1}GT$. Dans ces conditions, on a : $\eta = 0$, $z = \xi$, $\rho^2 = +\xi^2 + \zeta^2$, les formules deviennent

$$(4)\quad \begin{cases} \rho'^2 = \dfrac{\alpha\alpha_0\rho^2 + (\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0)\xi + \beta\beta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2 + (\gamma\delta_0 + \delta\gamma_0)\xi + \delta\delta_0}, \\ \xi' = \dfrac{\alpha\gamma_0\rho^2 + (\alpha\delta_0 + \delta\alpha_0)\xi + \beta\delta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2 + (\gamma\delta_0 + \delta\gamma_0)\xi + \delta\delta_0} = \dfrac{\gamma\alpha_0\rho^2 + (\alpha\delta_0 + \delta\alpha_0)\xi + \delta\beta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2 + (\gamma\delta_0 + \delta\gamma_0)\xi + \delta\delta_0}. \end{cases}$$

Mais si l'on exprime que le point à l'infini de $O\eta$, soit $z_1 = z_3 = z_4 = 0$ ou $y_1 = y_4 = 0$, $y_2 = -y_3 = iz_2$ reste invariant, on trouve facilement que les coefficients α, etc., doivent être *proportionnels à des quantités réelles*, et comme ils ne sont définis qu'à un facteur près, il n'y a pas d'inconvénient à les supposer *eux-mêmes réels*. Posons en outre

$$(5)\quad \xi + i\zeta = u \quad \text{d'où} \quad \rho^2 = uu_0, \quad \xi' + i\zeta' = u', \quad \rho'^2 = u'u'_0,$$

un calcul facile à partir des formules précédentes conduit à l'une des deux substitutions

$$(6)\qquad u' = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta} \quad \text{ou} \quad u' = \frac{\alpha u_0 + \beta}{\gamma u_0 + \delta},$$

mais comme on considère seulement le demi-plan $\zeta > 0$, les secondes doivent être laissées de côté, elles ne forment d'ailleurs pas un groupe [1]; enfin $\alpha\delta - \beta\gamma$ doit être *positif* (pour que ζ reste positif dans les transformations).

La substitution $u' = \dfrac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$ est une substitution *fuchsienne*, ainsi *les déplacements plans cayleyens réels ont pour image dans le demi-plan analytique les transformations linéaires à coefficients réels de la variable complexe;* leur groupe est donc semblable à celui du groupe fuchsien laissant invariant l'axe réel.

Groupes à cercle principal. — Si l'on ne particularise pas les axes, on fait de même correspondre aux déplacements plans cayleyens réels les substitutions linéaires laissant fixe *un cercle réel du plan analytique*, les groupes correspondants sont dits à cercle principal.

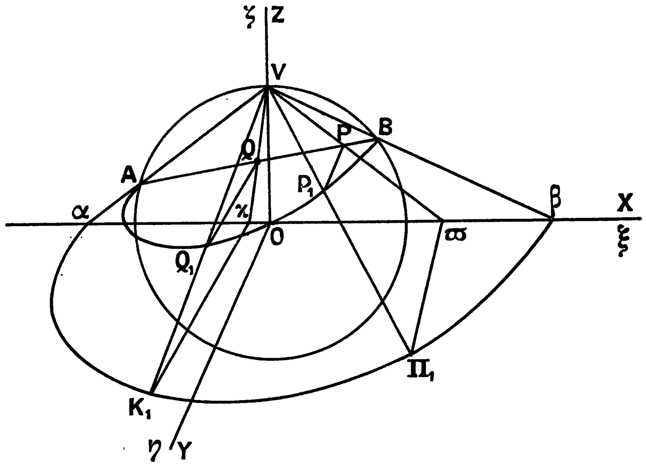
Constructions géométriques pour la correspondance. — Pour établir une correspondance géométrique aussi simple que possible

---

[1] Ces substitutions correspondent aux *faux déplacements plans*, c'est-à-dire aux déplacements combinés avec des symétries. Leur introduction deviendra utile dans la recherche des domaines fondamentaux.

entre le plan hyperbolique et le plan analytique, prenons pour absolu le cercle de centre O et de rayon un dans le plan XOZ; puis rabattons sur le plan $\xi O \eta$ autour de $O\xi$ le plan $\xi O \zeta$ qui coïncide avec XOZ;

Fig. 5.



soit Π_1, la position prise dans ce rabattement par le point Π du demi-espace de Poincaré qui correspond au point P intérieur à l'absolu. On a (*fig.* 5)

$$\varpi\Pi_1 = \varpi\Pi = \frac{\sqrt{1 - X^2 - Z^2}}{1 - Z},$$

Π_1 est alors la projection centrale de point de vue V du point P_1 de la sphère qui se projette orthogonalement en P, car les triangles semblables donnent bien

$$\varpi\Pi_1 = PP_1 \times \frac{V\varpi}{VP} = PP_1 \frac{1}{1 - Z} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En d'autres termes, *les points correspondants du plan hyperbolique et du demi-plan analytique sont les projections orthographique et stéréographique d'un même point de la sphère.*

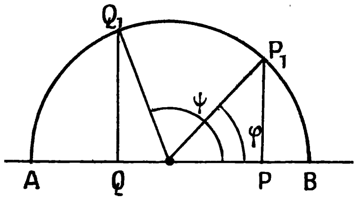
Équivalent de la distance cayleyenne. — Soient (*fig.* 5) P, Q deux points intérieurs à l'absolu, A, B les points de rencontre de PQ avec l'absolu. Soit BP_1Q_1A le demi-cercle de la sphère projeté orthographiquement suivant BPQA, et soit $\beta\Pi_1K_1\alpha$ sa projection stéréographique sur le plan analytique. La distance cayleyenne est

$$\mathcal{L}PQ = \frac{1}{2}\log(ABPQ).$$

Mais on a (*fig.* 6)

$$(ABPQ) = \frac{PA}{PB} : \frac{QA}{QB} = \frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} : \frac{1+\cos\psi}{1-\cos\psi} = \tang^2\frac{\psi}{2} : \tang^2\frac{\varphi}{2},$$

Fig. 6.



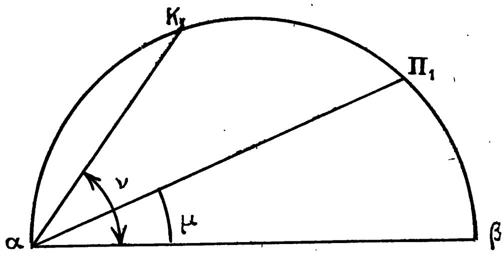
et

$$(ABP_1Q_1) = \frac{\tang\frac{\psi}{2}}{\tang\frac{\varphi}{2}} = (\alpha\beta\Pi_1K_1).$$

Donc (*fig.* 7)

(7) $$\mathcal{L}PQ = \log(\alpha\beta\Pi_1K_1) = \log\frac{\tang\nu}{\tang\mu} = \mathcal{L}\Pi_1K_1.$$

Fig. 7.



Cette formule définit la $\mathcal{L}$ dans le plan analytique. — Par suite les longueurs ainsi définies se conservent.

Élément linéaire. — Soient Π_1 fixe, K_1 variable, on a

$$d\mathcal{L} = \frac{d\nu}{\sin\nu\cos\nu} = \frac{2\,d\nu}{\sin 2\nu} = \frac{ds}{\eta},$$

en désignant par s l'arc (euclidien) de la circonférence et η l'ordonnée de l'élément. On a de même, pour les aires et volumes élémentaires,

$$d\omega = \frac{d\sigma}{\eta^2}, \qquad dv = \frac{d\tau}{\eta^3},$$

$d\sigma$ et $d\tau$ étant les éléments d'aire et de volume euclidiens.

Signification géométrique de l'affixe $\zeta = \xi + i\eta$ par rapport au plan hyperbolique. — L'équation de l'absolu pouvant s'écrire

$$(8) \qquad y_2^2 = y_1 y_4,$$

on peut représenter paramétriquement cette conique par

$$(9) \qquad \frac{y_1}{\zeta^2} = \frac{y_2}{\zeta} = \frac{y_4}{1}.$$

L'équation d'une tangente au point ζ est alors

$$(10) \qquad y_1 - 2\zeta y_2 + \zeta^2 y_4 = 0,$$

et d'après des formules antérieures, on a

$$(11) \qquad \xi^2 + \eta^2 = \frac{y_1}{y_4}, \qquad \xi = \frac{y_2}{y_4}.$$

Les ζ des points de contact des tangentes à l'absolu issues d'un point $\mathrm{P}(y_1, y_2, y_4)$ *sont les affixes du point correspondant* Π_1 *et de son conjugué.*

Les droites du plan hyperbolique se transforment en demi-circonférences orthogonales à l'axe réel et réciproquement. L'angle *cayleyen* de deux droites du plan hyperbolique est égal à l'angle *euclidien* des circonférences correspondantes dans le plan analytique.

Il est bon d'écrire les formules de transformation qui correspondent à ce cas particulier; elles se déduisent de celles du paragraphe **13** et se réduisent à

$$(12) \qquad \begin{cases} y'_1 = \alpha^2 y_1 + 2\alpha\beta y_2 + \beta^2 y_4, \\ y'_2 = \alpha\gamma y_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma) y_2 + \beta\delta y_4, \\ y'_4 = \gamma^2 y_1 + 2\gamma\delta y_2 + \delta^2 y_4, \end{cases}$$

d'où

$$(13) \qquad y'_1 y'_4 - y'^2_2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (y_1 y_4 - y_2^2),$$

on vérifie immédiatement

$$\frac{y'_1}{y'_2} = \zeta' = \frac{\alpha^2\zeta^2 + 2\alpha\beta\zeta + \beta^2}{\alpha\gamma\zeta^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)\zeta + \beta\delta} = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}.$$

17. Cas particulier de la géométrie elliptique. — Après les déplacements laissant fixe un point extérieur à l'absolu, envisageons ceux qui laissent fixe un point *intérieur :* on peut supposer que c'est le centre, par une transformation homographique préalable. Les déplacements correspondants laissent fixe le plan de l'infini (plan polaire du centre) et le cône isotrope $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$: ils coïncident donc avec les rotations euclidiennes de centre O. En projetant les déplacements de la sphère du point de vue O sur le plan $Z = 1$, par exemple, on aura donc des collinéations laissant invariable le cercle $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ de ce plan; c'est-à-dire les mouvements de la géométrie *elliptique* admettant pour absolu une conique sans points réels.

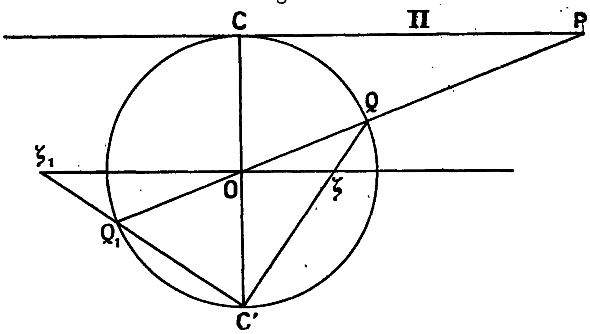
En raisonnant comme au numéro précédent, en exprimant que le point O reste fixe et en se bornant aux déplacements *réels*, on trouve pour α, β, γ, δ les expressions suivantes :

$$\alpha = \lambda + \mu i, \qquad \beta = \nu + \rho i, \qquad \gamma = -\nu + \rho i, \qquad \delta = \lambda - \mu i.$$

La substitution opérée sur les ζ est donc

$$\zeta' = \frac{(\lambda + \mu i)\zeta + \nu + \rho i}{(-\nu + \rho i)\zeta + \lambda - \mu i}.$$

Fig. 8.



Ici les deux valeurs ζ et ζ_1, de ζ fournies par l'équation analogue à l'équation (10) du paragraphe précédent ne sont pas imaginaires conjuguées, on trouve que $\zeta_1 = -\frac{1}{\zeta_0}$.

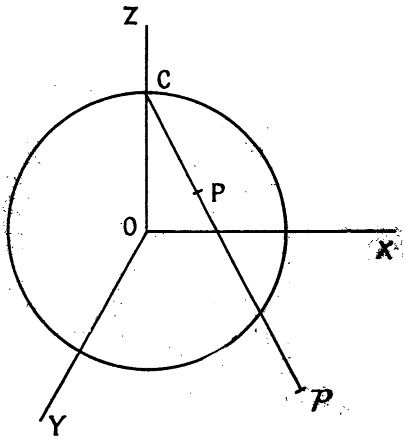
On obtient une correspondance très simple entre les mouvements sur la sphère, dans le plan elliptique Π et les transformations du plan analytique de la façon suivante : à tout point P du plan elliptique (tangent en C à la sphère) correspondent (*fig.* 8) deux points diamétralement opposés Q et Q_1 de la sphère, dont il est la projection centrale de centre O; puis aux points Q et Q_1 correspondent par une projection stéréographique de pôle C' diamétralement opposé à C les points ζ et ζ_1 du plan analytique (XOY). On est ainsi conduit à considérer Π comme un plan double, dont chaque face correspond à l'une des hémisphères. Les angles et les distances *elliptiques* ne sont autres que les angles et les longueurs *euclidiens* sur la sphère : il n'y a par suite pas de points à l'infini dans le plan elliptique.

18. La géométrie plane euclidienne comme cas particulier. — Considérons les rotations laissant fixe le point C (*fig.* 9). Les formules (6) et (8) du paragraphe 13 entraînent $\gamma = \gamma_0 = 0$. La substitution prend la forme

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\delta}.$$

Or, en projetant (*fig.* 9) un point quelconque P(X, Y, Z) de la

Fig. 9.



sphère du point de vue C sur le plan Z = o en p, l'affixe de ce point dans ce plan pris pour plan analytique est

$$z = \frac{X + iY}{1 - Z} = \lambda.$$

On peut toujours prendre $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, donc ici $\alpha\delta = 1$. En se bornant aux valeurs telles que $|\alpha| = |\delta| = 1$, la substitution

$$z' = \frac{\alpha z - \beta}{\delta}$$

représente tous les *déplacements euclidiens*.

Dans le cas général, $\delta = \frac{1}{\alpha}$ et $z' = \alpha^2 z + \alpha\beta$; *homothéties directes* combinées avec des *translations*.

19. Particularités des substitutions pour les déplacements du plan hyperbolique et du plan elliptique : I. *Plan hyperbolique*. — Les déplacements sont donnés (§ 16) par les substitutions

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

où α, β, γ, δ sont *réels*, substitutions appelées *fuchsiennes*, d'après Poincaré. On considère seulement celles de *première espèce* pour lesquelles $\alpha\delta - \beta\gamma$ est positif, c'est-à-dire celles qui conservent chacun des deux demi-plans ($\eta > 0$ et $\eta < 0$). (En adjoignant $z' = -z$, qui échange les deux demi-plans, on obtient un groupe étendu dont le premier est un sous-groupe d'indice 2.) On peut supposer $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ et la formule (2) du paragraphe 15, montre alors *qu'il n'y a pas de substitutions loxodromiques* dans les groupes fuchsiens. L'équation (1) du même paragraphe montre que les points doubles sont *imaginaires conjugués* pour les substitutions *elliptiques*, *réels et distincts* pour les substitutions *hyperboliques*, confondus sur l'axe réel pour les substitutions *paraboliques*.

II. *Plan elliptique*. — On a vu (§ 17) que les déplacements réels du plan elliptique correspondaient aux substitutions

$$z' = \frac{(\lambda + \mu i) z + \nu + \rho i}{(-\nu + \rho i) z + \lambda - \mu i} \qquad (\lambda, \mu, \nu, \rho \text{ réels}).$$

Les points doubles sont donnés par

$$(\nu + \rho i)\zeta^2 + 2\mu i \zeta + \nu + \rho i = 0.$$

Ils sont toujours *distincts*, car le discriminant $\mu^2 + \nu^2 + \rho^2$ est toujours *positif* (ou nul pour $\mu = \nu = \rho = 0$, cas de la substitution identique). Il n'y a donc pas de substitutions *paraboliques*. Le multiplicateur k (§ 15) a pour valeur

$$k = \frac{\lambda - \varepsilon i\sqrt{\mu^2+\nu^2+\rho^2}}{\lambda + \varepsilon i\sqrt{\mu^2+\nu^2+\rho^2}} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

c'est donc toujours une quantité *complexe de module un*. Donc toutes les substitutions du groupe sont *elliptiques*.

20. Composition des substitutions : *Permutabilité de deux substitutions*. — Il est évident que deux substitutions de *mêmes points doubles* sont *permutables;* leur produit est une substitution de mêmes points doubles, dont le multiplicateur est égal au produit des deux premiers multiplicateurs. On voit aisément que pour être permutables sans avoir mêmes points doubles, deux substitutions doivent :

1° *être elliptiques de période deux* (rotations de 180°);

2° *avoir leurs axes dans un même plan et orthogonaux* (au sens cayleyen, c'est-à-dire conjugués par rapport à la conique d'intersection avec l'absolu).

Composition de deux substitutions quelconques. — Nous emploierons les abréviations E, P, H ou L avec ou sans indices pour représenter des substitutions elliptiques, paraboliques, hyperboliques ou loxodromiques.

A. *Mêmes points doubles*. — Le produit a mêmes points doubles et un multiplicateur égal au produit des deux premiers. On a par suite :

$$E_1E_2 = E, \quad H_1H_2 = H, \quad EH = L, \quad HE = L,$$
$$E_1L_1 = L \text{ ou } H, \quad L_1E_1 = L \text{ ou } H, \quad H_1L_1 = L \text{ ou } E, \quad L_1H_1 = L \text{ ou } E,$$
$$L_1L_2 = L \text{ ou } H \text{ ou } E, \quad P_1P_2 = P.$$

B. *Un point double commun*. — Le produit est une substitution ayant un point double confondu avec ce point double commun, de multiplicateur égal encore au produit des multiplicateurs. Par suite :

$$E_1E_2 = E \text{ ou } P, \quad H_1H_2 = H \text{ ou } P, \quad EH = L, \quad HL = L),$$
$$E_1L_1 = L \text{ ou } H, \quad L_1E_1 = L \text{ ou } H, \quad H_1L_1 = L \text{ ou } E, \quad L_1H_1 = L \text{ ou } E,$$
$$L_1L_2 = L \text{ ou } H \text{ ou } E \text{ ou } P, \quad E_1P = E, \quad HP = H, \quad LP = L.$$

Dans le cas de deux substitutions S et S' de ce genre, la combinaison $S^{-1}S'^{-1}SS'$ est toujours *parabolique*.

C. *Pas de points doubles communs.* — Bornons-nous à deux substitutions *elliptiques :* leur produit est en général *loxodromique*. Pour qu'il en soit autrement il faut et il suffit que les points doubles soient sur un même cercle (c'est-à-dire que les axes correspondants dans l'espace hyperbolique soient dans un même plan). En effet nous pouvons, par une transformation linéaire, préalable prendre o et ∞ pour points doubles de l'une des substitutions, qui seront alors

$$(\mathrm{S}) \qquad z' = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad - bc = 1,\ a+d \text{ réel } |a+d| < 2);$$

$$(\mathrm{S}') \qquad z' = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} z}{e^{-\frac{i\theta}{2}}} \qquad \text{(de déterminant encore égal à 1).}$$

b et c ne sont pas nuls puisqu'il n'y a pas de point double commun. On trouve pour SS'

$$z' = \frac{ae^{\frac{i\theta}{2}} z + be^{\frac{i\theta}{2}}}{ce^{-\frac{i\theta}{2}} z + de^{-\frac{i\theta}{2}}}$$

de déterminant encore égal à 1 : pour qu'elle ne soit pas loxodromique, il faut donc et il suffit que $ae^{\frac{i\theta}{2}} + de^{-\frac{i\theta}{2}}$ soit réel, comme $a+d$, ce qui s'écrit

$$ae^{\frac{i\theta}{2}} + de^{-\frac{i\theta}{2}} = a_0 e^{-\frac{i\theta}{2}} + d_0 e^{+\frac{i\theta}{2}},$$
$$a + d = a_0 + d_0,$$

d'où

$$(a - d_0)e^{\frac{i\theta}{2}} + (d - a_0)e^{-\frac{i\theta}{2}} = 0,$$
$$a - d_0 + d - a_0 = 0,$$

ce qui entraîne

$$d_0 = a, \qquad a_0 = d.$$

Dès lors α, β étant les affixes des points doubles de S, c'est-à-dire les racines de

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0,$$

le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est *réel*, car $a - d = -(a_0 - d_0)$, $a - d$ est *purement imaginaire*

$$\frac{a - d + \sqrt{(d+a)^2 - 4}}{a - d - \sqrt{(d+a)^2 - 4}},$$

est donc le rapport de deux imaginaires pures. Les points doubles de S sont donc *alignés avec ceux* (o et ∞) *de* S′, et, en revenant au cas général, on voit que les quatre points doubles sont sur un cercle. C'est notamment ce qui a lieu pour les groupes fuchsiens, les points doubles d'une substitution elliptique étant toujours symétriques par rapport à l'axe réel. La vérification analytique de la réciproque est immédiate. On voit aisément que l'axe de la rotation résultante n'est pas dans un même plan avec ceux des rotations composantes.

Application. — *Produit de deux rotations opposées autour d'axes transformés l'un de l'autre par une rotation.* — Soit S une rotation d'angle θ autour de AB, S′ une rotation d'angle θ' autour de A′B′. Le déplacement S″ envisagé est

$$S'' = (S^{-1}S'^{-1}S)S'.$$

Soit A_1B_1 le transformé de A′B′ par S, qui est l'axe de la rotation $S^{-1}S'^{-1}S$. A_1B_1 et A′B′ sont concourants en même temps que AB et A′B′. Donc si AB et A′B′ sont dans un même plan, S″ n'est pas loxodromique : si leur point de rencontre est intérieur à la sphère, elle est évidemment *elliptique*, s'il est sur la sphère, elle est *parabolique;* enfin s'il est extérieur, elle est *hyperbolique*, car on trouve [1] pour S″

$$(S'') \qquad z'' = \frac{(ad - bce^{i\theta})z + ab(e^{i\theta} - 1)}{cd(e^{-i\theta} - 1)z + ad - bce^{-i\theta}},$$

d'où

$$a'' + d'' = 2(ad - bc\cos\theta) = 2 + 2bc(1 - \cos\theta).$$

Mais, si le point de rencontre avec AB de A′B′, qui coïncide ici avec le diamètre OZ de la sphère, est extérieur, le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ doit être positif, c'est-à-dire, comme les deux termes de la fraction sont des imaginaires pures, le produit de ces deux termes doit être négatif :

$$(a - a_0)^2 - (a + a_0)^2 + 4 < 0,$$

ou

$$1 - aa_0 < 0,$$

et, par $aa_0 - bc = 1$,

$$bc > 0, \qquad \text{donc } a'' + d'' > 2 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

---

[1] En prenant S et S′ sous la forme précédente $\left(z' = \frac{az + b}{cz + d}\right.$ pour S et $z' = ze^{-\frac{i\theta}{2}}$ pour S′$\left.\right)$

Une conséquence remarquable est la suivante : ***tout groupe ne renfermant que des substitutions elliptiques est contenu dans un groupe de mouvements du plan elliptique;*** car les axes devant ***se couper*** deux à deux à l'intérieur de la sphère et n'étant pas dans un même plan passent par un même ***point fixe intérieur.***

Composition d'une rotation parabolique avec une substitution quelconque. — Soient S et S′ deux substitutions :

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad z'=z+h,$$

la substitution parabolique S′ ayant été ramenée à avoir son point double à l'infini SS'^n est

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}+nh=\frac{(a+nch)z+b+ndh}{cz+d};$$

substitution de déterminant égal à *un* si l'on a pris $ad-bc=1$.

Pour n assez grand, $a+nch+d$ sera aussi grand que l'on voudra en module, les substitutions SS'^n finiront par être ***hyperboliques*** ou ***loxodromiques.***

Par conséquent si un groupe renferme une substitution parabolique, toutes les autres étant *elliptiques* ou *paraboliques*, toutes les substitutions ont *un point fixe commun;* un point de l'absolu reste fixe; le groupe est donc semblable à un groupe de ***déplacements du plan euclidien.***

21. Tout groupe sans substitutions loxodromiques est un groupe de rotations, c'est-à-dire à cercle principal (réel ou imaginaire). — D'après ce qui précède, il ne reste plus à le démontrer que pour les groupes ayant une substitution hyperbolique, que l'on peut supposer ramenée à la forme $z'=kz$ (k réel et $\neq 1$). Il existera une substitution n'admettant ni zéro ni l'infini comme point double. En effet il y a des substitutions n'admettant pas zéro comme point double, autrement on retomberait sur un cas précédent, soit S_1 l'une d'elles; de même soit S_2 une substitution n'admettant pas l'infini comme point double. Alors soit S_1, soit S_2, soit $S_1 S_2$ n'admettra ni o ni ∞ comme point double; soit (S) cette substitution — qui n'est pas loxodromique par hypothèse — et (S') la substitution hyperbolique

$$(S) \qquad z' = \frac{az+b}{cz+d},$$

$$(S') \qquad z' = \frac{k^{\frac{1}{2}} z}{k^{-\frac{1}{2}}},$$

$ad - bc = 1$, $bc \neq 0$ puisque ni o ni ∞ ne sont points doubles, enfin $a + d$ est réel, puisque S n'est pas loxodromique.

Exprimons maintenant que SS' n'est pas loxodromique ; il faut que

$$ak^{\frac{1}{2}} + dk^{-\frac{1}{2}},$$

soit réel, donc, comme $a + d$ l'est aussi, que a et d le soient. On peut supposer c réel, en faisant au besoin un changement de variable ; alors $b = \frac{ad-1}{c}$ l'est aussi. Soit maintenant Σ une substitution quelconque du groupe

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

On démontrera par le même raisonnement que α et δ sont réels, ainsi que les coefficients extrêmes de la substitution ΣS, c'est-à-dire $a\alpha + c\beta$ et $b\gamma + c\delta$; donc β et γ sont aussi réels. On a donc un *groupe fuchsien*.

En résumé, affectons de l'indice 1 les groupes de substitutions $z' = ze^{i\theta} + b$, contenus dans celui des mouvements plans euclidiens, de l'indice 2 ceux de substitutions $z' = \rho z + b$ (ρ réel), contenus dans celui des homothéties directes et translations planes, de l'indice 3 les groupes laissant fixe le cercle $zz_0 + 1 = 0$, de l'indice 4 les groupes de substitutions à coefficients réels vérifiant $ad - bc = 1$ (groupes fuchsiens) :

1° Tout groupe de substitutions linéaires sans substitutions loxodromiques est semblable à un groupe g_1, g_2, g_3 ou g_4 (§ 18 et 20);

2° Tout groupe n'ayant que des substitutions elliptiques est semblable à un groupe g_3 (§ 20);

3° Tout groupe qui renferme au moins une substitution parabolique mais pas de substitutions hyperboliques, ni loxodromiques est semblable à un groupe g_1 (§ 20);

4° Tout groupe g_4 (fuchsien) a des substitutions hyperboliques, à moins que toutes ses substitutions aient leurs points fixes communs (§ 21).

CHAPITRE III.

CONDITIONS DE DISCONTINUITÉ PROPRE DES GROUPES DE SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

22. **Substitutions infinitésimales.** — On a vu (§ 9) qu'une première condition pour qu'un groupe soit *proprement discontinu*, c'est qu'il ne contienne pas d'opérations *infinitésimales*. Cherchons donc à quelle condition une substitution linéaire $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ est infinitésimale. Nous supposerons $ad - bc$ *borné* en module, et nous prendrons d'abord $ad - bc = 1$. Appliquons la substitution à deux points z_1 et z_2, on a

$$z'_1 - z'_2 = \frac{z_1 - z_2}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}$$

$z'_1 - z'_2$ devant tendre vers $z_1 - z_2$, le dénominateur doit tendre vers un, quels que soient z_1 et z_2; c et d sont donc bornés en module, car autrement pour des valeurs convenables de z_1 et z_2, le dénominateur augmenterait indéfiniment; alors c doit tendre vers zéro, autrement la limite du dénominateur dépendrait de z_1 et z_2; donc d^2 doit tendre vers un, c'est-à-dire d vers ± 1 et, comme $ad - bc = 1$, a doit tendre vers la même valeur; d'ailleurs, z' devant tendre vers z, b doit tendre vers zéro. En résumé, pour qu'une substitution soit infinitésimale, il est nécessaire que

$$\lim b = \lim c = \lim (a - d) = 0. \tag{1}$$

Ces conditions sont évidemment suffisantes et valent encore pour $ad - bc$ différent de 1.

Exemples de groupes discontinus ayant des substitutions infinitésimales et n'étant pas par suite proprement discontinus :

1° le groupe des substitutions paraboliques :

$$z' = z + m\omega + m'\omega' \qquad (m, m' \text{ entiers})$$

si le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est un nombre réel incommensurable : $c = a - d \neq 0$ et l'on peut faire varier m et m' de manière à faire tendre

$$b = m\omega + m'\omega'$$

vers zéro.

2° le groupe cyclique des substitutions elliptiques

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = e^{2i\pi m\theta} \frac{z - \alpha}{z - \beta} \qquad (m \text{ entier})$$

si θ est réel et irrationnel. Car on peut s'approcher autant qu'on le veut de θ par des fractions $\frac{n}{m}$ de telle sorte que $|m\theta - n|$ soit inférieur à $\frac{1}{m}$ et par suite $e^{2i\pi m\theta}$ infiniment voisin de l'unité [on vérifierait sans peine les conditions (6)]. Si θ est rationnel le groupe est *fini*.

Plus généralement, *tout groupe formé uniquement de substitutions elliptiques est fini, s'il n'a pas de substitutions infinitésimales* (groupes g_3, mouvements sur la sphère).

En effet, pour tous les angles de rotation $2\pi\theta$, les θ sont alors *rationnels*, soit $\frac{\mu}{\nu}$ leur expression irréductible : 1° les ν ne peuvent avoir une infinité de valeurs distinctes, car il est possible de déduire des puissances de la rotation $2\pi\frac{\mu}{\nu}$, une rotation $\frac{2\pi}{\nu}$, qui correspondrait à une substitution infinitésimale ; 2° les ν étant en nombre limité, ne peuvent correspondre à une infinité d'axes $A_1B_1, \ldots, A_pB_p, \ldots$, ayant pour limite AB, car la composition de deux substitutions S_p^{-1} et S_{p+1} correspondant à la même valeur de ν, d'angles opposés, et d'axes infiniment voisins donne évidemment une substitution $S = S_p^{-1} S_{p+1}$ infinitésimale.

23. Conditions de discontinuité propre d'un groupe sans transformations infinitésimales.

THÉORÈME. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe de substitutions linéaires soit proprement discontinu dans un domaine sont :* 1° *qu'il n'ait pas de transformations infinitésimales,* 2° *que les fonctions linéaires exprimant ses substitutions y forment une famille normale* [*au sens de M. Montel* (1)].

(1) *Voir* P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques* (Gauthier-Villars, 1927).

Un ensemble de fonctions analytiques méromorphes dans un domaine D est, d'après M. Montel, *une famille normale*, si de toute suite infinie de fonctions de cet ensemble on peut extraire une nouvelle suite infinie qui converge uniformément vers *une fonction limite :* celle-ci est nécessairement méromorphe, à moins de se réduire à une constante (finie ou non).

Lemme. — *Des fonctions linéaires qui ne prennent jamais dans* D *deux valeurs* A *et* B *y forment une famille normale.*

On peut supposer $A = 0$ et $B = \infty$ en effectuant au besoin la transformation

$$f_n(z) = \frac{g_n(z) - A}{g_n(z) - B}.$$

Une fonction $f_n(z)$ quelconque de la famille a l'une des trois expressions :

$$\frac{c_n(\alpha_n - z)}{\beta_n - z}, \quad c_n(\alpha_n - z), \quad \frac{c_n}{\beta_n - z} \quad (\text{avec } c_n \neq 0,\ \alpha_n \neq 0,\ \beta_n \neq 0).$$

Supposons que D soit le cercle de centre O et de rayon R. Pour la première forme, posons

$$\varphi_n(z) = \frac{f_n(z)}{f_n(0)} = \frac{\alpha_n - z}{\alpha_n}\,\frac{\beta_n}{\beta_n - z}.$$

D'après l'hypothèse α_n et β_n doivent être supérieurs à R en module. On aura donc pour $z \leqq \rho < R$, les inégalités

$$\frac{R-\rho}{R} < \left|\frac{\alpha_n - z}{\alpha_n}\right| < \frac{R+\rho}{R}, \qquad \frac{R}{R+\rho} < \left|\frac{\beta_n}{\beta_n - z}\right| < \frac{R}{R-\rho},$$

et par suite

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} < |\varphi_n(z)| < \frac{R+\rho}{R-\rho}.$$

Mais de toute suite infinie de fonctions $f_n(z)$, on peut en extraire une autre pour laquelle α_n et β_n auront des limites α et β, finies ou infinies, et par suite $\varphi_n(z)$ tendra uniformément vers

$$\varphi(z) = \frac{\alpha - z}{\alpha}\,\frac{\beta}{\beta - z}$$

fonction régulière, bornée et non nulle ni infinie pour $|z| \leqq \rho$. Mais on peut en outre choisir les n de manière que $f_n(0)$ ait une limite a

finie ou infinie, donc que $f_n(z)$ ait pour limite $f(z) = a\varphi(z)$, c'est-à-dire soit une fonction linéaire non nulle ni infinie pour $z \leqq \rho$, où bien l'une des constantes 0 ou ∞.

Même démonstration pour les autres formes de $f_n(z)$.

Quant à la restriction relative au choix du domaine, elle se lève facilement. Car on peut déduire de ce qui précède, qu'une suite de fonctions linéaires jamais nulles ni infinies dans un domaine D, converge uniformément dans tout domaine intérieur à D pourvu qu'elle converge en une infinité de points ayant au moins un point limite intérieur à D.

D'après cela, les puissances d'une substitution hyperbolique ou loxodromique

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = k^n \frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad (|k| \neq 1)$$

forment une famille normale dans tout domaine ne contenant ni α ni β, mais non en ces points eux-mêmes, car, n augmentant indéfiniment avec un signe convenable, z' tendra par exemple vers β, tandis que pour $z = \alpha$, z' est aussi égal à α et la suite n'est donc pas normale autour de α. Il en est de même pour la suite parabolique

$$\frac{1}{z'-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + nh$$

partout normale sauf au point α.

Démonstration du théorème : 1° *Les conditions sont nécessaires.* — On l'a déjà vu pour la première. Quant à la seconde, puisque le groupe est proprement discontinu dans D, deux points quelconques z_1 et z_2 de ce domaine n'y ont qu'un nombre limité de points équivalents : donc les fonctions linéaires du groupe, à part un *nombre fini* d'entre elles, ne prennent jamais les valeurs z_1 et z_2 dans D et y forment par suite une famille normale.

2° *Les conditions sont suffisantes.* — En effet, d'abord vu l'absence de substitutions infinitésimales une fonction limite est une constante, car autrement soit $f(z)$ une fonction limite non constante de substitutions $S_1, S_2, \ldots$. Un cercle C_0 de centre P_0 se transforme par $S_1, S_2, \ldots$, en $C_1, C_2, \ldots$, ayant pour limite C transformé de C_0 par la substitution limite S qui correspond à $f(z)$, et le point

$P = P_0 S$ est intérieur à C. La substitution $S_n^{-1} S_{n+1}$ serait infinitésimale dans tout cercle Γ entourant P.

Soit alors ζ la limite fixe de zS_n indépendante de la position de z dans C_0. A partir d'un certain rang les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n \ldots$ entoureront ζ en tendant vers zéro. ζ ne peut être intérieur à C_0 parce que, à partir d'un certain rang, les C_n seraient eux-mêmes intérieurs à C, les S_n seraient hyperboliques ou loxodromiques et auraient un point double dans C_0, la famille ne serait pas normale. Si ζ est extérieur, il en sera de même des C_n à partir d'un certain rang. Si ζ est sur C il suffit de partir d'un cercle concentrique à C_0 et plus petit. En résumé, si les fonctions linéaires du groupe forment une famille normale autour de P_0, les transformés d'un cercle de centre P_0 lui sont *extérieurs* à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que le groupe est *proprement discontinu* en P_0 et, par suite, dans D, puisque P_0 est arbitraire dans D (¹). C. Q. F. D.

Corollaire. — I. Du théorème précédent résulte aisément que dans tout domaine fermé intérieur à un domaine de discontinuité propre il n'y a qu'un nombre fini de points doubles de substitutions du groupe. Car dans le cas contraire ils auraient un point limite, et, dans son voisinage, il y aurait une infinité de points équivalents.

II. Les groupes *fuchsiens*, c'est-à-dire de substitutions $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$ à coefficients *réels* et déterminant *positif* sont *proprement discontinus* dans chacun des deux demi-plans séparés par l'axe réel, s'ils sont sans substitutions infinitésimales, car les fractions $\dfrac{az+b}{cz+d}$ ne pouvant prendre les valeurs 0 ou ∞ pour des valeurs non réelles de z y forment une famille normale.

24. Les frontières des domaines de discontinuité propre. — Il résulte de ce qui précède que les points fixes de substitutions *elliptiques* (périodiques, pour qu'il n'y ait pas de substitutions infinitésimales) ne sont pas points frontières du domaine de discontinuité propre. Au contraire *tout point fixe de substitution non périodique*

(¹) On voit le rapport étroit qui existe entre la notion de discontinuité propre et le grand théorème de M. Picard sur les valeurs d'exception pour les fonctions analytiques, théorème dont le rôle capital apparaît ici une fois de plus.

(donc parabolique, hyperbolique ou loxodromique) fait partie de la frontière, les substitutions ne formant pas une famille normale dans leur voisinage. En dehors de ces points peuvent seuls faire partie de l'ensemble frontière les *points de condensation de points équivalents à un point quelconque du plan* (à l'exception possible d'un point double qui serait *commun à toutes les substitutions du groupe*). Car les fonctions $f_n(z)$ ne formant pas une famille normale dans le voisinage du point frontière, ou bien elles y prennent toutes les valeurs, et, par suite, ce point est infiniment voisin de points équivalents à un point quelconque du plan, ou bien elles y prennent toutes les valeurs sauf une exceptionnelle ε et comme tous les transformés de ε sont encore exceptionnels, ils doivent coïncider avec ε qui est donc *un point fixe commun à toutes les substitutions du groupe*.

La frontière d'une région de discontinuité propre est donc un ensemble nécessairement *fermé*, qui *n'est dense* en aucune région *du plan* (puisque chacun de ses points est limite de points où le groupe est proprement discontinu).

25. Classification des groupes proprement discontinus d'après la nature de la frontière de leur domaine de discontinuité propre. — L'analyse précédente conduit, par ordre de complexité, à la classification suivante, selon la nature de la frontière du domaine de discontinuité propre.

A. *Groupes proprement discontinus dans tout le plan analytique.* — Ils ne doivent contenir aucune substitution *non périodique*, donc ils sont formés uniquement de substitutions elliptiques périodiques et en nombre fini (§ 22) : c'est un groupe semblable aux groupes discontinus de mouvements du plan elliptique, ou encore de mouvements sur la sphère, ces derniers groupes sont, comme on sait, ceux du *dièdre* (groupe cyclique), du *tétraèdre*, de l'*octaèdre* et de l'*icosaèdre réguliers* (1).

La frontière est nulle.

B. *Groupes proprement discontinus dans tout le plan sauf en un point.* — Il est nécessaire que ce point soit un point double commun à toutes les substitutions du groupe (§ 24). On peut le sup-

(1) *Voir* J. Hadamard, *Leçons de géométrie élémentaire* (Armand Colin).

poser à l'infini. Les substitutions sont nécessairement elliptiques ou paraboliques (§ 23), soit

$$z' = az + b \quad \text{avec } |a| = 1.$$

Ce sont les mouvements du plan euclidien (groupes g_1, § 21).

Si $a = 1$ pour toutes les substitutions, elles sont toutes paraboliques et les groupes proprement discontinus correspondants se réduisent à ceux de :

$z' = z + m\omega$ (m entier quelconque, groupe des fonctions périodiques).

$z' = z + m\omega + m'\omega'$ $\left(m, m' \text{ entiers, } \frac{\omega'}{\omega} \text{ non réel, groupe des fonctions doublement périodiques}\right)$.

[On ne peut avoir plus de deux périodes, le groupe des

$$z' = z + m\omega + m'\omega' + m''\omega''$$

a des substitutions infinitésimales; (Jacobi)].

Si, pour certaines substitutions, a diffère de l'unité, le groupe doit contenir aussi une substitution parabolique, $a = 1$, car autrement on aurait un groupe *cyclique elliptique*, on serait dans le cas A. Soit $z' = z + \omega$ cette substitution parabolique P et soit $z' = az + b$ une substitution elliptique périodique E$\left(a = e^{\frac{2i\pi}{\nu}}\right)$. Le groupe contient la substitution $\mathrm{E}^{-n}\mathrm{P}\mathrm{E}^{n}$ c'est-à-dire $z' = z + a^n\omega$. On a donc aussi toutes les substitutions

$$z' = z + m\omega + m'a^n\omega.$$

Vu l'absence de substitutions infinitésimales, il y a une période de module minimum, on peut supposer que c'est ω et il faudra par suite avoir

$$|a^n \pm 1| \geqq 1$$

(pour $n \not\equiv 0$, modν). Cette inégalité entraîne $\nu \leqq 6$ (le côté de l'hexagone régulier étant égal au rayon).

$\nu = 5$ est impossible car $\left|e^{\frac{4i\pi}{5}} + 1\right|$ côté du décagone régulier dans le cercle de rayon 1, est inférieur à 1. Restent les valeurs 2, 3, 4, 6. On voit aisément que tous les multiplicateurs figurant dans le groupe sont les puissances d'une racine primitive a_0 de l'unité appartenant à l'exposant maximum ν_0 figurant dans le groupe. Les substitutions sont donc toutes de la forme

$$z' = a_0^n z + m_1 \omega_1 + m_2 a_0^{n'} \omega \qquad (n \text{ et } n' \text{ entiers } \leqq \nu_0 - 1).$$

Le groupe correspondant est sans substitution infinitésimale et proprement discontinu dans tout le plan sauf au point à l'infini, point limite de points équivalents à un point quelconque.

C. *Groupes proprement discontinus dans tout le plan sauf en deux points.* — Supposons d'abord qu'il y ait au moins une substitution S hyperbolique ou loxodromique parmi les substitutions du groupe, lesquelles ont par hypothèse un point double commun, supposé à l'infini. Je dis que, s'il existe une autre substitution T n'ayant pas son second point double confondu avec celui de S (qu'on peut supposé ramené à l'origine), il y a des substitutions infinitésimales. Car on déduit de S, $z' = kz$ avec $|k| \neq 1$ et T, $z' = az + b$, $b \neq 0$ la substitution $S^{-m}T^{-1}S^{m}T$:

$$z' = z + b(1 - k^m).$$

On aurait donc les substitutions

$$z' = z + pb(1 - k^m) \qquad \text{et} \qquad z' = z + pb(1 - k^m) + qb(1 - k^n)$$

et en particulier

$$z' = z - b(k^n - k^m)$$

qui est infinitésimale pour m et n de signes convenables.

Toutes les substitutions du groupe doivent donc avoir les deux mêmes points doubles. Mais le groupe ne sera proprement discontinu que :

1° s'il est formé des puissances d'une seule substitution hyperbolique ou loxodromique;

2° si, avec une telle substitution S, $z' = kz$, il y a au plus une autre substitution de mêmes points doubles S′, $z' = k'z$, pourvu que l'on ait $k^n k'^{n'} = 1$ (n et n' entiers), autrement il y aurait des substitutions $z' = k^m k'^{m'} z$ infinitésimales.

(On ne peut avoir plus de deux substitutions de mêmes points doubles sans avoir de transformations infinitésimales, cela revient au théorème de Jacobi.)

Supposons en second lieu qu'en plus des substitutions précédentes il y en ait d'autres n'ayant pas de points doubles communs avec elles mais *elliptiques* et *permutant simplement les deux points doubles.*

Leur introduction n'ajoutera pas de nouveaux points frontières, mais ceux-ci deviennent points limites d'une infinité de points fixes elliptiques.

D. En dehors des cas précédents, il y a *une infinité de points doubles de substitutions hyperboliques ou loxodromiques, et par suite de points frontières.*

En effet, soient S : $z' = kz$ $|k| \neq 1$ une substitution hyperbolique ou loxodromique du groupe, et T : $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$, une autre substitution du groupe de points doubles différents (donc $bc \neq 0$) et ne permutant pas les points 0 et ∞ (donc a et d non nuls simultanément). La substitution TS^n, c'est-àdire

$$z' = \frac{ak^{\frac{n}{2}} z + bk^{\frac{n}{2}}}{ck^{-\frac{n}{2}} z + dk^{-\frac{n}{2}}}$$

de déterminant égal à un, si l'on a pris $ad - bc = 1$, sera hyperbolique ou loxodromique si l'on a

$$\left| ak^{\frac{n}{2}} + dk^{-\frac{n}{2}} \right| > 2$$

ce qui aura lieu pour n assez grand et de signe convenable. Quant aux points doubles donnés par

$$cz^2 + (d - ak^n)z - bk^n = 0,$$

il y en a une infinité, puisque le produit $-\dfrac{b}{c}k^n$ des racines prend une infinité de valeurs distinctes.

26. Ensemble frontière et domaine de discontinuité propre dans le cas général. — L'ensemble frontière $\mathfrak{F}$ comprend tous les points doubles de substitutions hyperboliques ou loxodromiques, dont il existe une *infinité dénombrable* et en outre tous les points limites de tels points doubles. D'ailleurs *aucun de ces points doubles n'est isolé* dans $\mathfrak{F}$. Il suffit de le montrer, si ces points sont 0 et ∞; or c'est ce qui résulte de ce qui précède, puisque si, par exemple, on a $a \neq 0$ et $|k| > 1$, il suffira de prendre n positif et assez grand pour avoir des racines de l'équation précédente croissant indéfiniment, et par suite des points de $\mathfrak{F}$ s'éloignant à l'infini. De même pour le point zéro. L'ensemble $\mathfrak{F}$ est donc *parfait* et par suite *non dénombrable*.

Quant au domaine de discontinuité propre il peut être formé d'une seule région $\mathcal{R}$ ou de plusieurs $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$, ... d'un seul tenant. Dans le second cas, les régions $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$, ..., sont simplement *échangées* par les opérations du groupe, et l'on s'occupe, en général, seulement du sous-groupe qui laisse l'une d'elles invariante. Dans le cas particulier important où le nombre des régions est égal à *deux*, elles sont donc séparées par un continu linéaire. Alors ce continu ne peut être qu'une *droite*, une *circonférence* ou une *courbe non analytique*. Les deux premiers cas sont ceux où il n'y a pas de substitutions *loxodromiques* (sauf peut-être des opérations à multiplicateur réel et négatif permutant les deux régions). Les groupes correspondants font partie des *groupes fuchsiens* laissant fixe chacun des demi-plans limités par l'axe réel (auxquels on peut ramener les groupes laissant fixes deux demi-plans limitrophes quelconques ou l'intérieur et l'extérieur d'un cercle, tous ces groupes étant les groupes dits *à cercle principal* qui seront étudiés en détail dans un fascicule spécial du Mémorial). Si au contraire il y a des substitutions loxodromiques, le continu linéaire $\mathcal{F}$ renferme une *infinité partout dense* de points fixes de substitutions loxodromiques, à multiplicateurs d'argument non multiple de π : d'après ce qu'on a vu des *trajectoires* des groupes cycliques loxodromiques, la courbe n'a pas de *tangente* en ces points : elle n'est pas *analytique*.

Enfin il peut arriver qu'un groupe *discontinu* ne soit *proprement discontinu nulle part*. Tel est le cas du *groupe de Picard* formé par les

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc = 1$$

dont les coefficients sont des *entiers de Gauss* c'est-à-dire de la forme $a = a' + a''i, \ldots;\ a', a'', \ldots$ étant des entiers ordinaires (et qui, par suite, n'a pas de transformations infinitésimales).

On peut en effet approcher d'une valeur complexe quelconque ζ par une série de fractions de Gauss irréductibles $\frac{a}{c}$, auxquelles correspondent toujours des solutions de l'équation $ad - bc = 1$ en entiers de Gauss d et b, si bien que *tout point ζ du plan analytique est point limite de points équivalents au point $z = \infty$.*

27. Propriétés générales des domaines de discontinuité des principales classes de groupes :

I. *Groupes à cercle principal.* — On ne restreint pas la généralité en se bornant aux groupes fuchsiens qui laissent fixe l'axe réel. A part les cas des groupes cycliques simples ou des groupes mixtes $\left(z' = k^n z,\ z' = -\frac{1}{z}\right.$, après changement de variable préalable, si nécessaire$\left.\right)$ — cas où $\mathfrak{F}$ comprend deux points au plus — $\mathfrak{F}$ est un *ensemble parfait de points de l'axe réel.*

Alors $\mathfrak{F}$ *comprend cet axe tout entier ou n'en comprend aucun segment.* Car si $\mathfrak{F}$ comprend un segment s de cet axe, tout segment de l'axe comprend des points de $\mathfrak{F}$: autrement $\mathfrak{F}$ dont tous les points seraient limites de *segments* équivalents à *s ne serait dense nulle part.* Dès lors tout point de l'axe fait partie de $\mathfrak{F}$.

Si donc $\mathfrak{F}$ n'est pas l'axe tout entier, il est constitué par un ensemble parfait *partout discontinu* de points de cet axe.

Dans le premier cas, il y a donc *deux régions de discontinuité propre*, et dans le second *une seule région*, mais d'un *ordre de connexion infini.*

Comme exemple du premier cas, on a le groupe *arithmétique* formé des substitutions $z' = \frac{az - b}{cz + d}$, $ad - bc = 1$, a, b, c, d entiers ordinaires; même raisonnement que pour le groupe de Picard.

II. *Groupes automorphes* (autres que ceux des types g_1, g_2, g_3, g_4; § 21). — On a vu sur un exemple (groupe de Picard), que ces groupes peuvent être sans transformations infinitésimales sans être proprement discontinus: mais *il n'en est plus de même* pour les groupes de déplacements correspondants *dans l'espace hyperbolique. Dans cet espace — et par suite dans le demi-espace de Poincaré — un groupe sans transformation infinitésimale est proprement discontinu.*

Démonstration par l'absurde. — On va voir que si un groupe G n'est pas proprement discontinu, il a des transformations infinitésimales.

Soit en effet P un point où G est improprement discontinu, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de points équivalents tendant vers P. Soit Q, Q′ un couple de points équivalents tendant vers P; soient $Q' = QS$ et $P' = PS$. Donc $\mathcal{L}(PQ) = \mathcal{L}(P'Q')$, et $\mathcal{L}(PQ)$ tendant vers zéro, il en est de même de $\mathcal{L}(P'Q')$ et par suite des longueurs (ordinaires) PQ, P′Q′. Dès lors PQ, QQ′ et P′Q′ étant infiniment petits, il en est de même de PP'; il y a donc *une infinité de points équivalents à* P *tendant vers ce point*.

S qui change P en P' est en général *loxodromique*, c'est-à-dire est le produit de deux rotations elliptique et hyperbolique E et H autour de deux axes AB et CD conjugués par rapport à la quadrique absolue. Si AB et CD ne deviènnent pas infiniment voisins de cette quadrique, la rotation H est infiniment petite, parce que PP' tend vers zéro. Soit $P_1 = PE$. Alors $P' = P_1 H$; $P_1 P'$ est donc infiniment petit, comme PP' et il en est donc de même de PP_1. Cela peut tenir à ce que le mouvement $S = EH$ est *infinitésimal*. Dans le cas contraire c'est que l'axe AB de E est infiniment voisin de P : donc il existe une infinité de substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ telles que les axes elliptiques $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots$ correspondants ont une position limite AB passant par P, les angles des rotations elliptiques ayant d'ailleurs une limite θ. Alors la substitution $(S_n)^{-1} S_{n+1}$ est *infinitésimale*. Il est aisé de voir que la conclusion subsiste si AB et CD sont infiniment voisins de la quadrique.

Il ne suffit pas qu'un groupe automorphe soit proprement discontinu dans l'espace cayleyen ou le demi-espace de Poincaré pour l'être *sur la quadrique* ou *dans le plan analytique* (exemple du groupe de Picard qui n'a pas de transformations infinitésimales, et qui est par suite proprement discontinu dans l'espace cayleyen).

Poincaré a appelé *kleinéens* ceux de ces groupes qui sont encore proprement discontinus dans le plan analytique. Fricke et Klein appellent *polygonaux* ces mêmes groupes, tandis qu'ils appellent *polyédriques*, ceux qui, comme le groupe de Picard, ne sont proprement discontinus que dans l'espace à trois dimensions. La raison de ces dernières dénominations se rattache à la nature des *domaines fondamentaux*. L'étude des domaines fondamentaux fait l'objet d'un fascicule spécial du *Mémorial*.

BIBLIOGRAPHIE.

(*N. B.* — Les chiffres romains entre crochets indiquent les Chapitres du fascicule qui se rattachent aux Ouvrages ou Mémoires cités.)

E. Cartan. — Leçons sur la Géométrie projective complexe (Paris, Gauthier-Villars et C^ie, 1931) [I, II, III].

CAYLEY. — On the homographic transformation of a surface of the second order into itself (*Philosophical Magazine*, vol. 7, 1854) [II].

— A sixth memoir upon quantics (*Philosophical Transactions*, vol. 149, 1854 [II].

— Sur la transformation d'une forme quadratique en elle-même par des substitutions linéaires (*Journal de Crelle*, t. 50, 1855) [II].

— On the Non-Euclidian Geometry (*Mathematische Annalen*, Band 5, 1872) [II].

DYCK (W.). — *Gruppentheoretische Studien* (Inaugural dissertation, Leipzig, 1882) [I].

FATOU. — Fonctions fuchsiennes [t. II de la *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, par APPELL et GOURSAT (Paris, Gauthier-Villars et C[ie], 1931)] [II et III].

FRICKE und KLEIN. — *Vorlesungen ueber die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* (Leipzig, 1890-1892) [II et III].

— *Vorlesungen ueber die Theorie der Automorphen Functionen : Erster Band : die gruppen theoretischen Grundlagen* (Leipzig, 1897) [II et III].

FUBINI. — *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui et delle funzioni automorfe* (Spoerri, Pisa, 1908) [I, II, III].

HERMITE. — Sur la théorie des formes quadratiques (*Journal de Crelle*, t. 47, 1853) [II].

JORDAN (C.). — Traité des substitutions et des équations algébriques (Paris, 1870) [I].

KLEIN (F.). — Ueber die sogenannte nicht enklidische Geometrie (*Math. Ann.*, Band 4 und 6, 1871-1873) [II].

— Ueber binaere Formen mit linearen Substitutionen in sich selbst (*Math. Ann.*, Band 9, 1875) [II].

LAGUERRE. — Sur la théorie des foyers (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 12, 1853 [II].

MONTEL (P.). — *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques* (Paris, Gauthier-Villars et C[ie], 1927) [III].

PICARD (E.). — Mémoire sur les formes quadratiques indéfinies (*Annales de l'École Normale*, 1884) [III].

PICARD (E.). — Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés d'un même côté d'un plan (*Bul. de la Soc. Math. de France* 1884) [II et III].

PICARD (E.). — *Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'Analyse et de Physique mathématique* (Paris, Gauthier-Villars et C[ie], 1928) [II].

POINCARÉ (H.). — Théorie des groupes fuchsiens (*Acta mathematica*, t. 1, 1882) [I, II, III].

— Mémoire sur les groupes kleinéens (*Acta mathematica*, t. 3, 1883) [II et III].

SÉGUIER (J. A. de). — *Théorie des groupes finis. Groupes abstraits* (Paris, Gauthier-Villars et C[ie], 1904) [I].

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES DISCONTINUS.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DE LA VARIABLE COMPLEXE. CORRESPONDANCE ENTRE LE PLAN ANALYTIQUE OU LE DEMI-ESPACE DE POINCARÉ AVEC LE PLAN OU L'ESPACE HYPERBOLIQUES DE LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DE CAYLEY.

CHAPITRE III.

CONDITIONS DE DISCONTINUITÉ PROPRE DES GROUPES DE SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.