

L. LEAU

## **Les suites de fonctions en général (domaine complexe)**

*Mémorial des sciences mathématiques*, fascicule 59 (1932)

[http://www.numdam.org/item?id=MSM\\_1932\\_\\_59\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSM_1932__59__1_0)

© Gauthier-Villars, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# MÉMORIAL

DFS

# SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIE SOUS LE PATRONAGE DE  
**L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,**  
 DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COIMBRE, CRACOVIE, KIEW,  
 MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),  
 DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

*DIRECTEUR*

**Henri VILLAT**

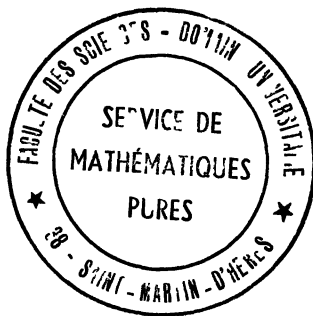
Membre de l'Institut,  
 Professeur à la Sorbonne,  
 Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LIX

Les suites de fonctions en général (domaine complexe)

PAR M. L. LEAU

Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>o</sup>, EDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
 Quai des Grands-Augustins, 55

—  
 1932

## **AVERTISSEMENT**

---

La Bibliographie est placée a la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matieres.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

---

---

LES

# SUITES DE FONCTIONS EN GÉNÉRAL

## DOMAINE COMPLEXE

Par **M. L. LEAU**,  
Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

---

### I. — INTRODUCTION.

1. **Aperçu historique.** — A part quelques généralités, d'ailleurs importantes, extension facile des connaissances fournies par l'étude des suites de fonctions réelles de variables réelles il ne sera question ici que de suites de fonctions analytiques.

Comme il est naturel les fonctions analytiques d'une seule variable ont donné lieu aux travaux les plus poussés et ont procuré la plus belle moisson. Les résultats fondamentaux remontent à Weierstrass. Beaucoup plus tard, en 1903, le théorème de Vitali marque un progrès décisif touchant la convergence uniforme. Mais, c'est surtout à la théorie des familles normales et quasi normales, dont l'auteur est P. Montel, qu'est dû le magnifique essor auquel on assiste depuis un quart de siècle. Les questions qui ont trait à la convergence des suites ont été approfondies; la nature de la fonction limite a été étudiée, mais sur ce sujet et sur celui des opérations permises dans le passage à la limite il reste bien des problèmes à élucider.

Il va de soi que, *a fortiori*, en ce qui concerne les fonctions analytiques de plusieurs variables, champ d'études où de beaux résultats ont été obtenus par G. Julia, et celles à une infinité d'arguments, sujet où le regretté R. Gateaux avait mis l'empreinte de sa forte personnalité, le domaine à explorer demeure immense et appelle de nombreuses recherches.

Sur les matières traitées ici on lira avec grand profit l'Ouvrage de P. Montel [I] et le fascicule [II] du *Mémorial*. Il est nécessaire de connaître certaines questions relatives aux suites de fonctions réelles de variables réelles [21].

*Nota.* —  $E'$  étant l'ensemble dérivé d'un ensemble  $E$  de points nous représenterons  $E + E'$  par  $\hat{E}$  qui pourra donc désigner un ensemble fermé quelconque. Un ensemble figuré par la lettre  $P$  sera toujours un ensemble parfait.

**2. Extensions immédiates.** — Par la représentation géométrique d'une quantité imaginaire bien des notions relatives aux fonctions réelles de variables réelles s'étendent immédiatement aux fonctions complexes de variables complexes. Ainsi en est-il de la continuité, de la convergence uniforme et, pour une famille de fonctions, de l'égalité de continuité, du concept de famille compacte. Elles se ramènent aussi aux mêmes notions relatives à un couple de fonctions d'un nombre double de variables réelles. On a ainsi deux moyens d'utiliser les démonstrations anciennes pour obtenir l'extension des résultats antérieurs.

Citons notamment les propriétés suivantes :

La somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues de variables complexes est une fonction continue de ces variables.

Pour qu'une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions également continues de variables complexes sur  $\hat{E}$  borné d'un seul tenant  $y$  soit bornée il est nécessaire et suffisant qu'elle soit bornée en un point.

Pour qu'une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions continues de variables complexes sur  $\hat{E}$  borné soit compacte il faut et, si elle est bornée, il suffit qu'elle soit également continue.

Si une suite de fonctions continues est convergente sur  $P$  elle est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait  $Q < P$ .

**3. Transformation stéréographique.** — Pour ramener à distance finie les points du plan complexe (plan de Gauss) on utilise une sphère (sphère de Riemann) à l'aide de l'inversion (*voir* à ce sujet [2, t. 1, p. 49]). Prenons la sphère de rayon unité dont le centre est

à l'origine  $O$  du plan et effectuons du pôle nord la projection stéréographique de la sphère sur le plan, laquelle établit une correspondance univoque et réciproque entre leurs points (point à l'infini du plan compris). Appelons distance sphérique de deux points (ou nombres)  $Z_1, Z_2$  du plan et notons  $|Z_1, Z_2|$  la longueur du plus petit arc de grand cercle joignant leurs images sphériques. On a

$$Z_1, Z_3 \leq |Z_1, Z_2| + |Z_2, Z_3|, \quad \left| \frac{1}{Z_1}, \frac{1}{Z_2} \right| = |Z_1, Z_2|, \quad \left| \frac{\pi}{2} \right| Z \leq |O, Z| \leq 2 |Z|.$$

Une variable  $Z_n$  a une limite  $Z$  ou est infiniment grande lorsque l'image sphérique  $\zeta_n$  tend vers un point limite  $\zeta$ , c'est-à-dire lorsque  $|Z_n, Z|$  tend vers zéro. Le critère de Cauchy s'applique en substituant à  $|Z_{n+p} - Z_n|$  la distance sphérique  $|Z_{n+p}, Z_n|$ . Si l'on considère les valeurs  $Z$  prises par  $f(z)$  définie sur  $E$  l'oscillation sphérique de la fonction est la borne supérieure des distances sphériques de deux quelconques des  $Z$ . Par une extension naturelle des anciennes notions on définit l'oscillation sphérique de  $f(z)$  en un point  $z_0$ , sa continuité sphérique (oscillation sphérique nulle), qui revient à la définition ordinaire de la continuité de  $f(z)$  aux points où elle est finie et de  $\frac{1}{f(z)}$  aux points où elle est infinie, l'oscillation sphérique d'une famille de fonctions sur un ensemble  $E$  (borne supérieure des oscillations sphériques des diverses fonctions), en un point  $z_0$ . Si cette dernière est nulle la famille est dite également continue en  $z_0$ ; à chaque  $\varepsilon > 0$  correspond alors un voisinage  $V$  de  $z_0$  tel que pour  $z$  de  $V$  et toute  $f(z)$  de la famille on ait  $|f(z), f(z_0)| < \varepsilon$ ; la famille  $\{f(z)\}$  est sphériquement également continue dans  $E$  si à tout  $\varepsilon > 0$  correspond  $\delta > 0$  tel que pour tout  $f$  et pour tout couple  $z_1, z_2$  de  $E$  tel que  $|z_1, z_2| < \delta$  on ait  $|f(z_1), f(z_2)| < \varepsilon$ . Pour que sur  $\hat{E}$   $\{f(z)\}$  soit également continue il faut et il suffit qu'elle le soit en chaque point de  $\hat{E}$ . On dit qu'une suite  $\{f_n(z)\}$  est à l'intérieur d'un domaine  $D$  sphériquement et uniformément convergente vers  $f(z)$  lorsqu'elle l'est dans tout  $\hat{\Delta}$  intérieur à  $D$ , c'est-à-dire lorsque à chaque  $\varepsilon > 0$  correspond un indice  $n_0$  tel que, quels que soient  $z$  dans  $\hat{\Delta}$  et  $n > n_0$ , on ait  $|f_n(z), f(z)| < \varepsilon$ . La notion de famille sphériquement compacte s'introduit immédiatement.

Pour qu'une famille de fonctions définies dans  $\hat{D}$  soit telle que de toute suite infinie de ces fonctions on puisse extraire une suite convergente uniformément sur la sphère, il faut et il suffit que la famille possède l'égalité de continuité sphérique.

Si l'on a dans  $D$  une suite de fonctions qui, sur la sphère, sont continues et convergent uniformément la fonction limite est continue sur la sphère.

Si l'on a dans  $D$  une suite de fonctions qui, sur la sphère, sont continues et convergent, dans tout domaine intérieur à  $D$  on peut en trouver un autre où la suite converge uniformément [I, p. 127, 209].

(On peut en trouver un où les valeurs des fonctions ne pénètrent pas dans une partie de la sphère; on ramène au cas de fonctions bornées dans leur ensemble.)

L'emploi de la sphère de Riemann a été fait par A. Ostrowski [31, d] dans son étude des fonctions méromorphes.

C. Carathéodory [5, b] page 515, qui use systématiquement de la sphère (diamètre unité) remplace pour des raisons de commodité la distance sphérique des deux points images par leur distance rectiligne. A la notion de convergence uniforme il substitue dans les démonstrations celle, qu'il estime plus maniable, de *convergence continue* qui, en ce qui concerne les suites de fonctions *continues*, lui est équivalente. Cette dernière notion, introduite par H. Hahn [21, a] dans l'étude des fonctions de variables réelles, est par lui ainsi définie : Une suite de fonctions complexes  $f_n(z)$  qui sont définies sur  $E$  est dite convergente continue en  $z_0$  de  $E$  par rapport à  $E$  si pour chaque suite  $z_p$  de points de  $E$  tendant vers  $z_0$  la suite  $w_n = f_n(z_p)$  est convergente (la limite est alors indépendante de la suite).

Si  $f(z)$  est défini sur l'ensemble  $E_1$  le diamètre de l'ensemble des points images de  $f$  est dit l'oscillation de  $f$  sur  $E_1$ . Reprenons alors la suite précédente et soit  $V_p(z_0)$  une suite de voisinages de  $z_0$  emboîtés le diamètre de  $V_p$  tendant vers zéro l'oscillation  $O_n^{(p)}$  de  $f_n$  sur  $V_p \cdot E_1$  a une plus grande limite  $\omega^{(p)}$  pour  $n$  infini; pour  $p$  infini  $\omega^{(p)}$  a une limite  $\omega$  qui ne dépend pas de la suite  $V_p$  considérée; elle est dite l'oscillation limite de la suite en  $z_0$ .

On a ce théorème : Pour que la suite  $f_n(z)$  soit convergente continue en  $z_0$  il faut et il suffit que : 1° l'oscillation limite de la suite en  $z_0$  soit nulle, et 2° la suite converge en ce point.

## II. — FONCTIONS HOLOMORPHES D'UNE VARIABLE.

4. **Première étude de la convergence; familles compactes.** — Les domaines  $D$  que nous considérons sont bornés et connexes; à moins d'indication contraire, ils sont ouverts. On spécifiera, s'il y a lieu, que leur frontière  $C$  est rectifiable.

Un domaine  $D'$  est dit (complètement) intérieur à  $D$  lorsque  $D'$  appartenant à  $D$  la borne inférieure des distances de deux points appartenant respectivement aux frontières de  $D$  et de  $D'$  est positive (que  $D$  et  $D'$  soient d'ailleurs ouverts ou non). On démontre que l'on peut trouver un domaine  $\Delta$  limité par un nombre fini de courbes rectifiables qui soit complètement intérieur à un domaine  $D$  et dont les points soient à une distance de la frontière de  $D$  inférieure à un nombre positif arbitraire  $\varepsilon$ . Il est donc possible, si  $D'$  est complètement intérieur à  $D$  de trouver un tel domaine  $\Delta$  auquel  $D'$  soit complètement intérieur et qui soit complètement intérieur à  $D$ .

Des fonctions sont dites bornées, également continues, une suite de fonctions est dite uniformément convergente à l'intérieur de  $D$  lorsque ces fonctions sont bornées, également continues, cette suite uniformément convergente dans tout domaine fermé (complètement) intérieur à  $D$ .

Si une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions holomorphes dans  $D$  est bornée à l'intérieur, elle est également continue à l'intérieur.

Soient  $D'$  intérieur à  $D$ , puis  $D_1$  intérieur à  $D$ , extérieur à  $D'$ , et limité par une frontière  $C_1$  rectifiable, les fonctions  $f(z)$  étant bornées sur  $C_1$ , il en est de même dans  $\hat{D}'$ , d'où la conclusion.

Une proposition fondamentale, dont le principe est dû à Weierstrass, est la suivante :

I. *Si une suite de fonctions  $f_n(z)$  continues dans un domaine fermé  $\hat{D}$  et holomorphes dans le domaine ouvert  $D$  est uniformément convergente sur la frontière :*

1° *Elle est uniformément convergente dans  $\hat{D}$  (utiliser le critère de Cauchy);*

2° *La fonction limite  $f(z)$  est continue dans  $\hat{D}$  et holomorphe dans  $D$ ;*



3° A l'intérieur de  $D$  la suite des dérivées d'ordre quelconque  $\alpha$ ,  $f_{(n)}^{(\alpha)}(z)$ , converge vers  $f^{(\alpha)}(z)$  uniformément;

4° Dans le domaine  $\hat{D}$ , le long de chemins de longueur bornée,  $\int f_n(z) dz$  tend uniformément vers  $\int f(z) dz$ .

*Remarque.* — Si l'on sait qu'une suite de fonctions  $f_n(z)$  holomorphes dans  $D$  y est uniformément convergente, on peut appliquer le théorème précédent à tout domaine intérieur à  $D$ .

Si une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions holomorphes dans  $D$  est bornée à l'intérieur, de toute suite infinie de la famille on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément à l'intérieur de  $D$  vers une fonction limite, et cette fonction est holomorphe.

En effet dans tout  $\hat{D}'$  intérieur la famille est également continue, donc elle y est compacte; de toute suite infinie de la famille on peut extraire une suite partielle tendant uniformément vers une fonction limite continue et, d'après le théorème précédent, celle-ci est holomorphe dans  $D'$ .

On imagine alors une suite de domaines  $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ , tous intérieurs à  $D$ , chacun intérieur au suivant,  $D_n$  tendant vers  $D$  (c'est-à-dire que tout point de  $D$  finit par être à l'intérieur de  $D_n$ ). Dans  $D_1$  nous avons obtenu la suite  $f_{\rho}^{(1)}$ ; extraite de celle-ci nous avons eu dans  $D_2$  la suite  $f_{\rho}^{(2)}$ , etc. La suite  $f_1^{(1)}, f_2^{(2)} \dots f_{\rho}^{(\rho)} \dots$  converge dans  $D_n$ , quel que soit  $n$ , vers une fonction holomorphe. Ainsi une fonction holomorphe est définie en tout point intérieur à  $D$ , vers laquelle tend la suite, uniformément dans tout  $D'$  intérieur à  $D$ , car l'on peut prendre  $n$  assez grand pour que  $D_n$  comprenne  $D'$ .

D'ailleurs il serait inexact d'affirmer la possibilité de la convergence uniforme dans  $D[9, \alpha]$ . Exemple : pour  $D$  on prend  $|z| \leq 1$  et l'on pose  $f_n(z) = z^n$ .

Réciproquement : Lorsque de toute suite infinie d'une famille de fonctions holomorphes dans un domaine  $D$  on peut extraire une suite partielle qui converge uniformément à l'intérieur, la famille est bornée à l'intérieur de  $D$ .

Soit  $D'$  intérieur à  $D$ , on pourrait trouver  $f_n(z)$  telle qu'en  $z_n$  (et dans un petit cercle)  $|f_n(z)| > n$ . Il serait impossible d'extraire de cette suite une suite partielle uniformément convergente dans  $\hat{D}'$ .

Par suite, la famille est aussi également continue.

Ainsi, pour les fonctions holomorphes il y a identité entre familles compactes et familles bornées à l'intérieur d'un domaine D [1; 27, b, e; 9, a].

Le théorème de Weierstrass a reçu de Montel [27, b, c] l'extension suivante :

II. Si une suite de fonctions holomorphes dans D et continues dans  $\hat{D}$ , domaine à frontière rectifiable C, converge sur C et si les modules de ces fonctions sont bornés dans leur ensemble, la suite converge uniformément à l'intérieur de D et a par conséquent pour limite une fonction holomorphe.

On peut raisonner ainsi : Les  $f_n(z)$  sont bornés dans  $\hat{D}$ . Il existe donc une suite partielle  $f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_p} \dots$  qui converge uniformément à l'intérieur vers une fonction holomorphe  $f(z)$ . Soient D' un domaine intérieur à D et  $z$  un point quelconque de D'. On a

$$f_n(z) - f_{\alpha_p}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f_n(\zeta) - f_{\alpha_p}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Choisissons pour  $\alpha_p$  une fonction croissante de  $n$  et posons

$$f_n(\zeta) - f_{\alpha_p}(\zeta) = \varphi_n(\zeta) = u_n(s) + i v_n(s)$$

$s$  étant l'arc de C. En appliquant à  $u_n(s)$  et à  $v_n(s)$  le théorème de D. T. Egoroff [17; 21, n° 7] la conclusion est immédiate.

*Remarque.* — On ne connaît pas de conditions nécessaires et suffisantes auxquelles il faut assujettir la convergence de  $\{f_n(z)\}$  sur C pour entraîner la convergence dans D.

Au théorème précédent (II), par exemple, se ramène aisément cette proposition antérieure de W. F. Osgood [30].

Si la suite de fonctions  $f_n(z)$  holomorphes dans D est à l'intérieur bornée et convergente, la limite  $f(z)$  est holomorphe et la convergence est uniforme à l'intérieur.

Proposition qui comporte une hypothèse de convergence sur une aire. Déjà T. J. Stieltjès [38] avait établi le théorème que voici :

Soit une suite de fonctions  $f_n(z)$  holomorphes dans D et bornées dans leur ensemble à l'intérieur, si elle converge uniformément dans  $\Delta$  intérieur à D elle converge uniformément à l'intérieur de D.

G. Vitali [40] restreint singulièrement l'hypothèse (voir aussi [34, a, b]).

III. *Soit une suite de fonctions  $f_n(z)$  holomorphes dans D et bornées dans leur ensemble à l'intérieur, si elle converge en une infinité de points  $z_p$  ayant au moins un point limite intérieur à D elle converge uniformément à l'intérieur de D.*

La démonstration de ce théorème [I, p. 28 et 30] repose essentiellement sur le fait que deux fonctions holomorphes dans un domaine coïncident nécessairement si elles sont égales en une infinité de points avec un point d'accumulation à l'intérieur.

Soient I un tel point,  $\hat{\Delta}$  intérieur à D et contenant I. Il suffit de prouver la convergence sur  $\hat{\Delta}$ . Or si elle n'avait pas lieu en  $z'$  l'ensemble  $f_v(z')$  aurait au moins deux valeurs limites; deux suites partielles  $f_{\alpha_p}(z')$ ,  $f_{\beta_q}(z')$  auraient des limites différentes. Or de chacune des suites  $f_{z_p}(z)$ ,  $f_{z_q}(z)$  on pourrait extraire des suites partielles convergeant respectivement dans D vers des fonctions holomorphes distinctes en  $z'$  égales aux points  $z_p$ .

Voir d'autres démonstrations du théorème de G. Vitali (outre celle de l'auteur) par E. Lindelöf [22], R. Jentzsch [15] et récemment E. Jacobsthal [14].

Complétons cet ensemble de propositions par les suivantes :

IV. *Si, dans D, une suite de fonctions holomorphes  $f_n(z)$  est sur la sphère uniformément convergente la fonction limite  $f(z)$  est soit une fonction holomorphe, soit la constante infinie.*

En effet elle est continue sur la sphère (n° 3). Tout point  $z_0$  de D est centre d'un cercle dans lequel  $f(z)$  ou, si  $f(z_0)$  est infini,  $\frac{1}{f(z)}$  est continue et holomorphe (n° 3 et 1). Dans tout  $\hat{\Delta}$  intérieur à D chaque point est intérieur à un tel cercle  $\gamma$ , ces cercles étant en nombre limité (théorème de Borel-Lebesgue). Un point  $z'$  de  $\Delta$  où  $f(z)$  serait infini ne peut être isolé puisque  $\{f_n(z)\}$  convergerait uniformément, au sens habituel, sur un petit contour entourant  $z'$ . S'il y a une infinité de  $z'$  sur un  $\gamma$ ,  $\frac{1}{f(z)}$  est identiquement nul sur lui, donc de proche en proche sur tous car sur une partie commune de deux empiétant on ne peut avoir à la fois  $f(z)$  holomorphe et  $\frac{1}{f(z)}$  nul.

V. Si la suite de fonctions  $f_n(z)$  holomorphes dans  $D$  y converge uniformément à l'intérieur vers la fonction holomorphe  $f(z)$  et si cette dernière n'est pas identique à la constante  $a$ , dans tout  $D'$  intérieur à  $D$   $f_n(z) - a$  finit par avoir le même nombre de zéros que  $f(z) - a$ .

On écrit

$$f_n(z) - a = [f(z) - a] + [f_n(z) - f(z)]$$

et l'on applique le théorème de Rouché (le contour de  $D'$  étant supposé ne point passer par un zéro de  $f(z) - a$  [37, p. 183; 15; I, p. 20]).

§. Familles normales de fonctions holomorphes. — On doit à P. Montel pour les fonctions analytiques et sous le nom de familles normales, quasi normales, des extensions successives de la notion de familles compactes, auxquelles il a été conduit par l'observation d'une propriété commune aux fonctions admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine et dont l'étude remonte aux célèbres théorèmes de E. Picard, valeurs qui jouent d'autre part un rôle important au point de vue de la convergence uniforme. Un puissant instrument d'investigation a été ainsi forgé dont l'emploi s'est montré fécond dans les recherches récentes et qui a donné à plusieurs théories une remarquable unité (cf. les Mémoires [27]). Pour une étude détaillée des familles normales ou quasi normales voir son Ouvrage [I] ou le fascicule [II] qui, contient les résultats les plus récents.

On dit qu'une famille de fonctions holomorphes est normale dans  $D$  si, de toute suite infinie de la famille, on peut extraire une suite partielle possédant à l'intérieur de  $D$  la convergence sphérique uniforme vers une fonction  $f(z)$ , qui peut être la constante infinie (IV). (Les familles compactes de fonctions holomorphes sont donc des familles normales).

Cette propriété (de la définition) se conserve par représentation conforme.

Une famille est dite normale en un point si elle est normale dans un cercle ayant ce point comme centre.

Pour qu'une famille soit normale dans  $D$  il faut et il suffit qu'elle soit normale en tout point de  $D$ .

Si les valeurs des fonctions d'une famille normale dans  $D$  sont

bornées en un point  $z_0$  de  $D$  elles sont bornées dans leur ensemble à l'intérieur de  $D$ .

Exemple de famille normale : une famille de fonctions  $f_\alpha(z)$  holomorphes dans  $D$  et  $y$  vérifiant une inégalité de la forme  $|f_\alpha(z) - a| > k$ ,  $a$  et  $k$  étant constants. (On ramène au cas des fonctions bornées en posant  $g_\alpha(z) = \frac{1}{f_\alpha(z) - a}$ .)

*Remarque.* — Une suite uniformément convergente sur la sphère de fonctions holomorphes dans  $D$  forme une famille normale dans ce domaine. Les propriétés des familles normales appartiennent donc à de telles suites.

*Critère fondamental.* — Toute famille de fonctions holomorphes dans  $D$  où elles ne prennent ni la valeur  $a$  ni la valeur  $b$  est normale dans  $D$ .

*Note.* — C. Carathéodory [ $\S$ ,  $b$ ], page 515, préconise une autre définition des familles normales suggérée par une méthode dont voici le point de départ. Il étend d'abord à une famille quelconque  $f_\alpha(z)$  la définition (voir plus haut, Chap. I, n° 3) de l'oscillation limite en un point (à l'aide de la plus grande limite des oscillations des  $f_\alpha$  sur un voisinage). Appelons noyau normal (ponctuel) l'ensemble des points auxquels l'oscillation limite de la famille est nulle. Il démontre que de chaque suite de fonctions de la famille, dans laquelle ne figure pas une infinité de fois une même fonction, on peut extraire des suites partielles qui ont la convergence continue en chaque point du noyau central et que, si  $z_0$  est un point hors du noyau, il existe des suites ne donnant naissance à aucune suite partielle convergente continue en ce point.

L'exposé de l'auteur est valable avec plusieurs variables réelles ou non.

**6. Suites convergentes; points irréguliers; fonction limite.** — *Points irréguliers.* — Si une famille n'est pas normale dans  $D$  il existe au moins un point  $J$  où elle ne l'est pas (fait mis en évidence par G. Julia); un tel point est dit irrégulier. Plus particulièrement si pour un point  $O$  il existe une même suite telle que, si petit que soit le cercle considéré autour du point comme centre, elle ne donne nais-

sance à aucune suite partielle convergeant uniformément, elle est dite exceptionnelle. Tout point  $O$  est un point  $J$ , et A. Ostrowski [31, d] a montré que (pour les fonctions analytiques) les points  $J$  et  $O$  coïncident.

VI. *Toute suite convergente de fonctions holomorphes dans  $D$  appartenant à une famille normale converge uniformément à l'intérieur.*

On suppose d'abord qu'en chaque point  $f_n(z)$  converge vers une valeur finie  $f(z)$ . Si la proposition était inexacte il y aurait  $\varepsilon > 0$  et, dans  $\hat{D}$  intérieur à  $D$ , une suite  $f_{v_n}(z)$  et une suite  $z_n$  telles que  $|f_{v_n}(z_n) - f(z_n)| > \varepsilon$ ; de la suite  $f_{v_n}(z)$  on pourrait extraire une suite partielle uniformément convergente dans  $\Delta$  ( $D > \Delta > D'$ ), ce qui conduit à une contradiction.

Ainsi :

VII. *Pour qu'une suite convergente de fonctions holomorphes soit normale il faut et il suffit qu'elle soit uniformément convergente à l'intérieur du domaine. La propriété subsiste si l'on considère la convergence sur la sphère.*

VIII. *Pour une suite convergente, l'ensemble des points de convergence non uniforme coïncide avec celui des points irréguliers, soit  $E$ .*

*Les points irréguliers d'une suite convergente de fonctions holomorphes forment un ensemble  $E$  parfait, non dense, continu et d'un seul tenant avec la frontière du domaine (propriété qui s'étend au cas d'une famille quelconque bornée en chaque point) voir P. Montel [27, b et c].*

La démonstration repose sur le théorème de Weierstrass et sur la proposition (n° 3) qui permet d'affirmer que : dans tout domaine inclus dans  $D$  existe un domaine  $\hat{\delta}$  dans lequel les  $|f_n(z)|$  sont bornés dans leur ensemble.

Désignons par  $E_a$  l'ensemble dérivé des points racines des équations  $f_n(z) = a$ . Un point régulier appartient à un  $E_a$ , en général, et à un seul ( $V$ ). Inversement, un point  $M$  dans le voisinage duquel,

pour deux valeurs de la constante, les équations n'ont qu'un nombre de racines borné pour l'ensemble des  $n$  est régulier.

Supposons par exemple que dans un cercle  $C$  de centre  $z'$  et de rayon arbitrairement petit, mais que nous fixons, les  $f_n(z)$  ne prennent pas plus de  $s$  fois les valeurs 0 ou 1. Donnons-nous, provenant de la suite proposée, une suite quelconque (S)  $\varphi_1(z) \dots \varphi_n(z) \dots$ . Décrivons de  $z'$  comme centre un cercle  $\gamma'$  intérieur à  $C$  et petit à volonté. Si  $z'$  n'est pas un point d'accumulation des racines de  $\varphi_n(z) = 0$ ,  $\varphi_n(z) = 1$  et si  $\gamma'$  est convenablement choisi ces équations n'auront pas de racines à partir d'une valeur  $N$  de l'indice : la suite  $\varphi_{N+1}(z)$ ,  $\varphi_{N+2}(z)$ , ... sera normale (n° 19). Sinon, soit  $h$  le nombre maximum des racines qui soit trouvé une infinité de fois dans  $\gamma'$ . On peut de (S) extraire une suite  $(S_1)$ ,  $\varphi_{\alpha_1}$ ,  $\varphi_{\alpha_2}$ , ...,  $\varphi_{\alpha_p}$ , ... qui ait ce nombre de racines. Dans la portion de  $C$  extérieure à  $\gamma'$  le nombre des racines relatives à  $(S_1)$  sera au plus  $s - h$ . S'il y a dans cette région des points limites et si  $z_1$  est l'un d'eux on décrira de  $z_1$  comme centre un cercle  $\gamma_1$  extérieur à  $\gamma'$  et l'on extraira de  $(S_1)$  une suite  $(S_2)$  ayant un nombre fixe de racines intérieures à  $\gamma_1$ . Et ainsi de suite. Finalement on obtiendra une suite de fonctions ne prenant dans un domaine fermé  $\hat{\Delta}$  intérieur à la région subsistante et comprenant une couronne autour de  $\gamma'$  ni la valeur 0 ni la valeur 1. Elle est normale; donc enfin  $z'$  est régulier.

Désignons par  $E_a$  l'ensemble dérivé des points racines des équations  $f_n(z) = a$ . Un point d'un  $E_a$  n'appartient à aucun autre et il est alors régulier, ou bien il appartient à tous, sauf peut-être à l'un d'eux, et c'est cet ensemble de points communs qui est l'ensemble  $E$  des points irréguliers. Le raisonnement précédent nous a appris quelque chose de plus : pour un tel point irrégulier, pour chaque valeur de  $a$ , sauf une peut-être, il existe une infinité d'équations  $f_n(z) = a$  dont le nombre de racines est infiniment grand avec l'indice.

On peut remplacer les constantes par des fonctions holomorphes autour d'un point  $M$ . Ce point est régulier s'il existe deux fonctions  $\psi(z)$ ,  $\chi(z)$ , régulières en ce point et telles que les équations  $f_n(z) - \psi(z) = 0$ ,  $f_n(z) - \chi(z) = 0$  aient un nombre borné de racines dans le voisinage [27,  $b$  et  $c$ ].

M. Laurentieff [19  $a$ ] définit une classe d'ensembles : L'ensemble

fermé et borné  $E$  est un ensemble  $\mathfrak{N}$  si, quel que soit  $E_1$  fermé contenu dans  $E$ , il y a une portion  $E_2$  de  $E_1$  telle que : 1°  $E_2$  est la frontière d'un domaine connexe  $D$  qui contient le point infini; 2° chaque point de  $E$  appartient ou à  $E_2$  ou à  $D$ . Cela posé, il démontre que :

IX. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu  $E$  situé dans  $|z| \leq 1$ , avec un point au moins sur la circonférence, puisse être l'ensemble des points irréguliers d'une suite de fonctions holomorphes à l'intérieur du cercle est que  $E$  soit un ensemble  $\mathfrak{N}$ .*

*Nature de la fonction limite.* — Il résulte des propositions (n° 3 ou VIII) que :

Si la suite de fonctions  $f_n(z)$  holomorphes dans  $D$  est convergente, dans tout domaine inclus dans  $D$  il en existe un autre à l'intérieur duquel la suite est uniformément convergente et la fonction limite holomorphe.

Il peut y avoir une infinité de régions de  $D$  contiguës à  $E$  (l'ensemble des points irréguliers), cette infinité est alors dénombrable (il suffit de les répartir en classes caractérisées chacune par l'inégalité  $\frac{1}{n+1} < \rho \leq \frac{1}{n}$ ,  $\rho$  désignant la borne supérieure des cercles inclus dans la région); les diverses fonctions limites  $f(z)$  ainsi définies peuvent être toutes différentes, deux d'entre elles n'étant pas le prolongement l'une de l'autre, lorsque ce prolongement est possible [27,  $a$  et  $c$ ]. Effectivement, étant donnée une fonction  $f(z)$  holomorphe dans un domaine  $D$  (d'un seul tenant) on peut trouver une suite de fonctions uniformes dans tout le plan, holomorphes à l'intérieur de  $D$  où la suite converge uniformément vers  $f(z)$  et dans tout domaine borné extérieur à  $D$  où elle a pour limite zéro. Plus généralement, soit une infinité dénombrable de fonctions  $f_{(\sigma)}''$ , respectivement holomorphes dans des domaines  $D_\rho$  simplement connexes dont chacun est extérieur à tous les autres; on peut trouver une suite de fonctions holomorphes dans le plan uniformément convergente à l'intérieur de chaque  $D_\rho$  et y ayant  $f_{(\sigma)}^{(p)}$  pour limite [27,  $c$ , Chap. IV].

P. Montel [27,  $c$ , Chap. V] donne un exemple dans lequel les  $D_\rho$  sont des rectangles contigus decoupés dans un carré; la suite convergeant dans le carré et les  $f_{(\sigma)}^{(p)}$  étant arbitraires.



Sur l'ensemble  $E$  parfait des points irréguliers  $f(z)$ , fonction limite de fonctions continues, est ponctuellement discontinue ainsi que sur tout sous-ensemble parfait.

Pour que, en un point ou sur un sous-ensemble de  $E$ ,  $f(z)$  soit holomorphe, il faut déjà qu'elle y soit continue, considérée dans le domaine. Mais la continuité n'assure pas, en général, l'holomorphisme. Pour que  $f(z)$  soit holomorphe en un point  $M$  de  $E$ , il suffira qu'une suite partielle soit uniformément convergente autour de ce point. Un point n'est essentiellement irrégulier à l'égard de la suite que si aucune suite partielle n'est uniformément convergente dans le voisinage, c'est-à-dire la suite donnée est exceptionnelle pour le point. Ce nouvel ensemble, sous-ensemble de  $E$ , est évidemment fermé.

D'une manière générale, deux questions se posent relativement à un domaine  $D$ .

1° A quelles conditions une fonction  $f(z)$  définie sur  $D$  est-elle la limite d'une suite de fonctions holomorphes? La structure de l'ensemble  $E$  et, sur lui, la nature d'une fonction limite donnent des conditions nécessaires.

2° A quelles conditions la fonction limite  $f(z)$  d'une suite convergente de fonctions holomorphes est-elle holomorphe dans  $D$ ? Il faut qu'elle soit continue, donc que la suite possède la convergence quasi uniforme; mais cette condition n'est pas suffisante. D'après les théorèmes de Cauchy et de Morera, il sera alors nécessaire et suffisant que dans tout domaine inclus simplement connexe  $\int f(z) dz$  ne dépende que des extrémités du chemin. Or, cette condition est réalisée pour  $\int f_n(z) dz$ ; on peut donc l'appliquer à  $\int [f_n(z) - f(z)] dz$ . Donc, si le long d'un chemin quelconque,  $\lim \int f_n(z) dz = \int f(z) dz$ , on sera assuré du résultat; c'est là une condition suffisante, mais non nécessaire. C'est un point que P. Montel [27, a, p. 189] a mis en évidence sur un exemple, après qu'une telle condition eut été énoncée par D. Pompeiu [33, p. 57 et 94] comme nécessaire et suffisante.

Il est à remarquer que le théorème de Morera est applicable si l'on se borne à intégrer le long de lignes rectifiables d'un système de coordonnées tel que le rapport de la longueur totale de deux arcs,

menant de  $z$  à  $z + \Delta z$ , a  $|\Delta z|$  reste borné. Il suffit donc pour l'application de constater la possibilité du passage à la limite sur de tels arcs.

De nouvelles recherches ont été faites sur ces sujets par F. Hartogs et A. Rosenthal [43, *a* et *b*].

Soient dans le domaine  $D$  borne, simplement connexe, une suite de domaines  $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$  simplement connexes, extérieurs les uns aux autres, partout denses dans  $D$ , et  $E$  l'ensemble des points de  $D$  qui n'appartiennent pas aux  $D_n$ . Supposons qu'il existe un système  $S$  de bandes (à contour polygonal) qui conduisent à l'extérieur de  $D$ , tel que tout point de  $E$  soit intérieur au plus à un nombre fini d'entre elles. Si le voisinage d'un point quelconque de  $E$  est atteint par une infinité de bandes nous dirons que la condition  $A$  est remplie. Si les bandes correspondent aux domaines, la bande  $\beta_n$  au domaine  $D_n$ , de manière à conduire de l'intérieur de  $D_n$  à l'extérieur de  $D$  nous dirons que l'on satisfait à la condition  $B$ .

Cela posé les auteurs démontrent que *la condition A est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite  $f_n(z)$  de fonctions holomorphes dans  $D$  qui converge uniformément à l'intérieur des  $D_n$  et qui admette  $E$  comme ensemble des points irréguliers.*

On sait que, si une suite de fonctions holomorphes dans un domaine  $y$  est convergente, on peut lui substituer une suite de polynômes qui y aura même fonction limite et qui convergera uniformément aux mêmes points que la première.

Reprenons alors un domaine  $D$  où la condition  $A$  est satisfaite. Donnons-nous une fonction  $\varphi(z)$  dans  $D$ , formée de fonctions  $\varphi_n(z)$  holomorphes dans les  $D_n$  et d'une fonction  $\varphi_0(z)$  limite de polynômes, sur  $E$ . Peut-elle, sous ces réserves, être prise arbitrairement? Disons que la jonction (Anschluss) de Vitali est réalisée sur  $D_n$  s'il existe une suite de polynômes, bornés dans leur ensemble, sur  $\hat{D}_n$  et  $y$  convergent vers  $\varphi(z)$ . *Alors la condition supplémentaire, nécessaire et suffisante, est que soit satisfaite la condition  $B$ , lorsque l'on y substitue à l'ensemble des  $D_n$  l'ensemble de ceux où la jonction de Vitali ne peut être obtenue.*

Les auteurs traitent ensuite la question de savoir quelles propriétés doit posséder  $\varphi(z)$  pour être limite d'une suite de polynômes, au moins sur la partie de  $E$  où  $\varphi(z)$  ne sera pas régulière. Ils ont été conduits à étudier les « ensembles  $\alpha$  », ensembles (du plan de  $z$ )

bornés, fermés, sur lesquels  $x$  et par suite toute fonction continue de  $z$  peut être représentée par des polynômes avec une approximation uniforme et les « ensembles  $\beta$  » sur lesquels chaque fonction de classe 0 ou 1 (au sens de Baire) peut être représentée par une suite convergente (uniformément ou non) de polynômes. Ils ont prouvé que :

*Les ensembles  $\alpha$  sont identiques aux ensembles nulle part denses, bornés, fermés, qui ne morcellent pas le plan;*

*Les ensembles  $\beta$  fermés sont les ensembles fermés sommes d'ensembles  $\alpha$  en nombre fini ou dénombrable.*

De son côté M. Lavrentieff a énoncé [19, b] concernant la structure de la fonction limite des propriétés caractéristiques.

D'un ensemble  $E$  fermé et partout non dense <sup>(1)</sup> il dit qu'il est un ensemble  $M^*$  si quel que soit  $\hat{E}_1 < E$  il existe  $\hat{E}_2 < E_1$  tel que l'ensemble complémentaire de  $E_2$  soit un domaine connexe. Alors, pour que  $f(z)$  définie dans  $|z| < 1$  soit limite d'une suite  $P_n(z)$  convergente de polynômes il suffit qu'il y ait un ensemble  $E$  fermé, partout non dense, contenu dans ce même cercle et tel que :

1°  $E$  est un  $M^*$ ;

2° Si  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  sur  $E$  les fonctions soient de classe 1 au sens de Baire;

3° Si  $f(z) = f_n(z)$  dans  $D_n$ ,  $D_n$  étant un domaine connexe quelconque contigu à  $E$ ,  $f_n$  soit régulière dans ce domaine.

Désignant sous le nom de fonction  $M^*$  toute fonction définie dans le cercle, limite d'une suite de polynômes, régulière en dehors d'un ensemble qui est un  $M^*$  : la classe des fonctions  $M^*$  est la classe la plus générale des fonctions  $f(z)$ , limites de suites des polynômes, dans lesquelles  $\varphi$ ,  $\psi$  et les  $f_n$  sont indépendantes.

On doit à J. Wolff [41] la proposition suivante :

X. 1° Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction limite  $f(z)$  soit elle-même holomorphe dans  $D$  est la conver-

---

<sup>(1)</sup> L'auteur entend par portion d'un ensemble fermé l'ensemble de tous les points de ce dernier qui sont contenus dans un cercle ou sur sa circonférence. L'ensemble  $\hat{E}_1$ , ci-dessous doit être une portion de  $\hat{E}_1$ .

gence quasi uniforme de

$$\psi_n(x, y, z) = \frac{(y-z)f_n(x) + (z-x)f_n(y) + (x-y)f_n(z)}{(x-z)(y-z)}$$

sur tout ensemble  $\mathcal{E}$  borné et fermé que l'on peut former en associant des valeurs  $x, y, z$  de  $\mathbb{D}$  qui évitent les systèmes  $x = z, y \neq z$  et  $x \neq z, y = z$ ;

2° Si la suite donnée converge en un point de  $\mathbb{D}$  et si

$$\varphi_n(x, y) = \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}$$

converge quasi uniformément sur l'ensemble  $(x, y)$  formé en associant des valeurs  $x, y$  de  $\mathbb{D}$ ,  $f(z)$  est holomorphe dans  $\mathbb{D}$ , et  $\lim f'_n(z) = f'(z)$ ;

3° Si  $f(z)$  est holomorphe dans  $\mathbb{D}$ , et si la suite  $\{f_n(z)\}$  converge quasi uniformément sur tout ensemble borné et fermé de  $\mathbb{D}$ , on a  $\lim f'_n(z) = f'(z)$ .

Étant donné un ensemble  $E$  et les points  $z$  et  $z + \delta z$  étant assujettis à appartenir à cet ensemble disons que la suite  $\varphi_n(z, \delta z)$  converge quasi uniformément vers  $\varphi(z)$  sur  $E$  si à tout  $\varepsilon > 0$  correspond  $\eta > 0$  tel que l'on ait la propriété suivante : le nombre positif  $r$  étant arbitrairement choisi inférieur à  $\eta$ , quel que soit l'entier  $N$  il en existe un autre  $N' > N$  en sorte que si  $|\delta z| = r$  il y a une valeur de l'indice  $n$ , ne dépendant que de  $z$  et  $\delta z$ , comprise entre  $N$  et  $N'$  pour laquelle on a  $|\varphi_n(z, \delta z) - \varphi(z)| < \varepsilon$ .

Cela posé, L. Leau démontre [21, b] cette proposition :

Si dans le domaine ouvert  $\mathbb{D}$  les suites  $\{f_n(z)\}$  et  $\{f'_n(z)\}$  de fonctions holomorphes convergent respectivement vers les fonctions continues  $f(z)$  et  $g(z)$ , pour que  $f(z)$  admette  $g(z)$  comme dérivée il faut et il suffit que dans tout domaine  $\Delta$  borné et fermé inclus dans  $\mathbb{D}$  la différence  $\frac{f_n(z + \delta z) - f_n(z)}{\delta z} - f'_n(z)$  converge quasi uniformément vers zéro.

*Fonctions harmoniques.* — Un lien étroit rattache les fonctions harmoniques aux fonctions holomorphes. De propriétés de secondes, on passe à des propriétés des premières. Bornons-nous à signaler les résultats obtenus par P. Montel [III, p. 39], et notamment sa démonstration des théorèmes de Harnack.



7. **Familles quasi normales de fonctions holomorphes** [27, *g* et I, p. 66]. — P. Montel dit qu'une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions holomorphes dans  $D$  est quasi normale d'ordre  $q$  lorsque toute suite infinie de fonctions de cette famille donne naissance à une suite partielle ayant dans l'intérieur de  $D$  la convergence uniforme sur la sphère, sauf peut-être en certains points,  $q$  au plus, dont le nombre et la position peuvent varier avec la suite. En ces points, la suite partielle peut d'ailleurs converger ou non; mais dans ce dernier cas, on peut toujours en extraire une suite sphériquement convergente aux points considérés, car les valeurs qu'y prennent les fonctions admettent des valeurs d'accumulation, finies ou infinies. Les points de convergence non uniforme sont dits irréguliers. Si  $q = 0$ , la suite est normale.

Soit une suite convergente  $\{f_\nu(z)\}$  admettant de tels points. Elle converge par hypothèse dans tout  $\hat{\Delta} < D$ , d'où ces points sont exclus, uniformément soit vers une fonction holomorphe, soit vers l'infini. Mais, dans le premier cas, si  $z'$  est un point irrégulier, le théorème de Weierstrass appliqué à un petit cercle de centre  $z'$  montre que la convergence serait uniforme dans tout le cercle. Ainsi, à l'intérieur de  $D$ , la suite convergente  $\{f_\nu(z)\}$ , appartenant à une famille quasi normale d'ordre fini et ayant des points irréguliers converge uniformément vers l'infini sauf en ces points.

Si aucune suite extraite de la suite quasi normale  $\{f_\nu(z)\}$  ne converge uniformément autour de  $z'$ , à toute constante  $a$  et à tout rayon  $\rho$  suffisamment petit d'un cercle de centre  $z'$  correspond un indice  $n_0$  tel que toutes les équations  $f_n(z) - a = 0$  ( $n > n_0$ ) aient une racine dans le cercle (utiliser, dans l'hypothèse contraire la suite  $\frac{1}{f_{n_s}(z) - a}$ , les  $f_{n_s}(z) - a$  ne s'annulant pas dans le cercle).

Exemple de famille quasi normale :  $\lambda + \mu P(z)$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des paramètres et  $P(z)$  un polynôme.

*Critère fondamental* [I, p. 67]. — Une famille de fonctions  $f(z)$ , holomorphes dans  $D$  où elles ne prennent pas plus de  $p$  fois la valeur  $a$  ni de  $q$  fois la valeur  $b$  est quasi normale d'ordre au plus égal au plus petit des nombres  $p$  et  $q$ .

XI. *Toute suite convergente de fonctions holomorphes appartenant à une famille quasi normale converge uniformément* [I, p. 176). C'est une généralisation d'une proposition antérieure

(n° 6). De plus, la fonction limite est donc holomorphe dans le domaine, et la suite *constitue* une famille normale (VII).

La démonstration donnée par P. Montel [I, p. 28] du *théorème de Stieltjès s'étend à une suite appartenant à une famille normale ou quasi normale*.

XII. EXTENSION DU THÉORÈME DE VITALI. — *Si la suite de fonctions  $f_n(z)$  holomorphes dans un domaine D et appartenant à une famille normale ou quasi normale converge vers une limite (finie) en une infinité de points admettant au moins un point d'accumulation intérieur à D, elle converge uniformément dans l'intérieur de D* [I, p. 178].

De la suite, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément à l'intérieur de D vers une fonction holomorphe  $f(z)$ , points irréguliers non exclus puisque la limite est finie aux points donnés  $z_i$  de convergence. Si  $\hat{\Delta} < D$ , et si la suite donnée n'y convergerait pas uniformément, il y aurait une suite partielle de points et de fonctions telle que  $|f_{\alpha_p}(z_p) - f(z_p)| > \varepsilon$ . La suite  $f_{\alpha_p}$  donnerait naissance à une suite partielle convergeant uniformément vers une fonction holomorphe  $g(z)$  qui ne serait pas identique à  $f(z)$ . Or, elles coïncident aux points donnés  $z_i$ .

Le théorème a été établi dans le cas de fonctions ayant deux valeurs exceptionnelles par C. Carathéodory et E. Landau [6, p. 587].

8. **Étude de nouveaux cas de convergence.** — *Usage de la représentation conforme.* — C. Carathéodory [5, p. 107], a démontré que tout domaine simplement connexe peut être représenté sur un cercle lorsque sa frontière ne se réduit pas à un point (ce serait, par exemple, le cas du plan convexe ouvert, sans son point à l'infini). Faire la représentation conforme d'un domaine ( $d$ ) du plan des  $z$  sur un domaine (D) du plan des  $Z$ , c'est trouver une fonction holomorphe  $Z = f(z)$  holomorphe dans ( $d$ ) telle que à chaque point intérieur à ( $d$ ) corresponde un point intérieur à (D) et réciproquement;  $Z = f(z)$  est donc uniforme et univalente, et la fonction inverse  $z = F(Z)$  est aussi uniforme et univalente. (Une fonction uniforme dans ( $d$ ) est dite multivalente d'ordre  $q$  lorsqu'elle ne prend pas plus de  $q$  fois chacune de ses valeurs.)

Poincaré avait démontré qu'il ne peut exister qu'une représentation conforme faisant correspondre à un point et à une direction passant par ce point un point et une direction donnés. (On peut se servir du fait que : toute représentation conforme d'un cercle sur lui-même s'obtient au moyen d'une homographie.)

Tout domaine  $d$  simplement connexe limité par une ligne de Jordan peut être représenté sur un cercle  $D$ , les fonctions uniformes qui établissent la correspondance biunivoque étant holomorphes, dans les domaines ouverts et continues dans les domaines fermés [1, p. 93 et 116].

La propriété pour une famille de fonctions holomorphes d'être normale dans un domaine se conserve par une représentation conforme. Supposons que  $z = \varphi(z')$  donne la représentation conforme de  $D'$  sur  $D$ , les fonctions  $f(z)$  sur  $D$  deviennent  $g(z') = f[\varphi(z')]$  sur  $D'$  prenant respectivement les mêmes valeurs aux points correspondants  $z, z'$ ; les conditions de convergence se réalisent simultanément.

Même fait s'il s'agit de domaines fermés  $\hat{D}'$  et  $\hat{D}$ .

On peut donc supposer dans le cas d'un domaine simplement connexe qu'il s'agit d'un cercle de rayon un.

*Théorème de W. Blaschke.* — Dans l'énoncé du théorème de Vitali, les points de convergence sont supposés avoir un point limite à l'intérieur du domaine. Qu'arrive-t-il si l'on fait seulement l'hypothèse d'un point limite sur la frontière? La question revient à la suivante : dans quel cas peut-on affirmer qu'une fonction holomorphe dans un domaine est nulle en une infinité de points avec point d'accumulation à la frontière est identiquement nulle.

On établit [1, p. 180] dans le cas de fonctions holomorphes et bornées dans le cercle  $|z| < 1$ , s'annulant aux points  $z_n$  (aucun au centre) dont tous les points limites sont sur la circonférence, la condition nécessaire et suffisante suivante pour qu'il existe une telle fonction non identiquement nulle : le produit infini  $\prod_{n=1}^{n=\infty} |z_n|$  doit être convergent ou, ce qui revient au même, la série  $\Sigma [1 - |z_n|]$  convergente.

De là le théorème de W. Blaschke [4, p. 194] :

XIII. *Soit une suite de fonctions  $f_n(z)$ , holomorphes dans le cercle  $|z| < 1$ , dont les modules sont bornés dans leur ensemble*

( $|f_n(z)| < B$ ,  $B$  constant). Si la suite converge aux points  $z_p$  du cercle, il est suffisant pour qu'elle converge dans tout le cercle que le produit  $\prod |z_p|$  soit divergent ou, ce qui revient au même, que la série  $\sum [1 - |z_p|]$  soit divergente.

On voit que la condition exprime que les points  $z_p$  ne doivent pas s'approcher trop vite de la circonférence. La condition est évidemment réalisée dans le cas d'un point limite à l'intérieur (cas du théorème de Vitali).

W. Blaschke s'était appuyé sur la proposition qu'une suite de fonctions bornées dans leur ensemble est normale. Sa démonstration a été simplifiée par E. Landau [18, p. 156]. Ultérieurement, une preuve directe a été donnée par K. Lowner et T. Radó [23, p. 198].

Plus généralement soit la classe des fonctions holomorphes dans le cercle  $|z| < 1$  et dont le module  $y$  est inférieur à 1. Donnons-nous deux suites de nombres,  $a_n, b_n$ , de modules  $r_n$  et  $\rho_n$  inférieurs à 1; A. Denjoy s'est proposé [42], page 140 et page 1084, de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $f$  soit déterminée sans ambiguïté par les conditions  $b_n = f(a_n)$ ; il admet même que  $|a_n| = 1$  pourvu que  $|b_n| = 1$ , mais suppose alors connue la dérivée normale  $c_n$  en ce point, et aussi que  $p$  des  $a_n$  coïncident en un point intérieur  $a'$  en supposant aussi connues les  $p - 1$  premières dérivées en ce point. La condition cherchée est alors : Si l'on pose  $\lambda_n = \frac{1 - \rho_n}{1 - r_n}$  (en remplaçant  $\lambda_n$  par  $c_n$  si  $r_n = \rho_n = 1$ ) la série  $\sum \frac{1}{\lambda_n}$  doit être divergente.

R. Nevanlinna qui a repris le problème précédent en vue de discuter les solutions dans les différents cas [28, b] fait observer que la condition de Denjoy complète parfaitement les théorèmes de Vitali et de Blaschke :

XIII bis. Si, dans les conditions précédentes, la suite  $f_p(z)$  converge aux points  $z_n$  et si, posant  $b_n = \lim f_p(z_n)$ , la série  $\sum \frac{1}{\lambda_n}$  est est divergente, la suite converge uniformément à l'intérieur du cercle.

Le théorème de Blaschke s'étend aux fonctions holomorphes non bornées, mais qui sont égales au quotient de deux fonctions bornées que nous supposons de modules non supérieurs à un. Si une suite



de fonctions de cette nature appartient à une famille normale, la proposition lui est applicable [I, p. 183].

En particulier, il suffit de supposer qu'il existe une constante B telle que  $\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi < B$  (1) quel que soit  $r < 1$  et quelle que soit la fonction  $f$  de la suite.

C'est ce qu'ont montré Priwaloff [35, c, p. 149], qui s'appuie sur ce que  $|f(z)| < e^{\frac{B}{1-r}}$ , et F. et R. Nevanlinna [29]. Voir aussi la démonstration de A. Ostrowski [31, c].

Le théorème de Blaschke est encore applicable à des fonctions dont les valeurs  $f_n(z)$ , figurées dans le plan complexe, restent à l'extérieur d'une certaine région; car si  $a$  est l'affixe d'un point de cette région, les fonctions  $\varphi_n(z) = \frac{1}{f_n(z) - a}$  forment une famille bornée.

Mais il cesse d'être exact si, dans leur ensemble, les fonctions s'approchent de toute valeur. (Voir E. PICARD [32, t. 2, 3<sup>e</sup> édition, p. 149].)

Il s'applique encore lorsque ces fonctions ne prennent aucune valeur d'un continu linéaire. Il existe alors (Fatou) deux points  $\alpha$  et  $\beta$  de ce continu tel que l'argument de  $\frac{f_n(z) - \alpha}{f_n(z) - \beta}$  reste borné, et par conséquent, les fonctions  $\varphi_n(z) = e^{\frac{f_n(z) - \alpha}{f_n(z) - \beta}}$  sont bornées en module, etc. (Voir J. PRIWALOFF [35, a].)

Mais le théorème n'est plus valable pour une suite de fonctions n'ayant que deux valeurs exceptionnelles.

*Modification du théorème de Blaschke*, de manière à avoir une proposition applicable aux fonctions non bornées.

#### XIV. Supposons que (pour elles)

$$\log |f_n(z)| < \frac{\Lambda}{|1-r|^\sigma} \quad (|z| = r < 1),$$

$\Lambda$  et  $\sigma$  étant deux constantes positives. Alors (P. MONTEL [I, p. 184].)

Si la suite  $\{f_n(z)\}$  converge en une infinité de points  $z_p$  tels

(1) On pose, avec F. et R. Nevanlinna,

$$\varphi^+(t) = \frac{1}{2}[\varphi(t) + |\varphi(t)|],$$

$\varphi(t)$  désignant une fonction réelle de  $t$ .

que  $\sum_{p=1}^{\infty} [1 - |z_p|]^{\sigma+1+\varepsilon}$  soit divergente pour un certain nombre positif  $\varepsilon$ , elle converge uniformément à l'intérieur du cercle  $|z| = 1$ .

G. Valiron [39, p. 200] prend le problème sous une forme plus générale. Posant pour  $|z| < \rho$   $|f(z)| \leq M(\rho, f)$ , il suppose que pour les fonctions de la suite considérée,  $M(\rho, f) \leq \theta(\rho)$ ,  $\theta(\rho)$  étant une fonction donnée. Il observe que si  $m(\rho, f)$  est la valeur moyenne introduite par F. et R. Nevanlinna, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi,$$

on a

$$m(\rho, f) < \log M(\rho, f) < m(R, f) \frac{R + \rho}{R - \rho} \quad (\rho < R < 1),$$

de sorte que la condition posée peut être remplacée par une autre de la forme  $m(\rho, f) \leq \varphi(\rho)$ , Or, si  $n(x, f)$  est le nombre de zéros de  $f$  de modules inférieurs à  $x$  et si  $k$  et  $k'$  sont deux constantes dépendant de  $f$ , on a, d'après le théorème de Jensen,

$$\int_0^{\rho} n(x, f) dx < k\varphi(\rho) + k'.$$

Il suffit donc que,  $n(x)$  étant le nombre des  $z_p$  (points donnés de convergence) de modules plus petits que  $x$ , et  $N(\rho)$  étant

$$\int_0^{\rho} n(x) dx, \quad \lim_{\rho=1} \frac{N(\rho)}{\varphi(\rho)} = \infty \text{ pour que la propriété ait lieu.}$$

Plus généralement, si l'hypothèse faite est remplacée par celle-ci,

$$\int_0^1 m(x, f)(1-x)^{k+1} dx < B \quad (B \text{ et } k \text{ constants, } k > 0);$$

il suffit que la série  $\sum (1 - |z_p|)^{k+1}$  diverge. D'ailleurs, si elle convergerait, la proposition pourrait cesser d'être vraie (F. et R. NEVANLINNA [29, p. 33]). Voir aussi [28, p. 35.]

XV. SUITES QUI CONVERGENT SUR UNE PARTIE DE LA FRONTIÈRE. — Soit un domaine  $D$  et sur sa frontière formée de courbes de Jordan un arc  $\lambda$ . Si une suite de fonctions holomorphes et bornées dans  $D$ , continues dans  $D + \lambda$ , converge uniformément sur  $\lambda$ , elle converge uniformément dans tout domaine  $\hat{D}'$  contenu dans  $D$  et

*n'ayant avec lui d'autre frontière commune qu'un arc intérieur à l'arc  $\lambda$ .*

Un point essentiel de la démonstration [P. MONTÉL, I, p. 188] réside en ceci qu'une fonction holomorphe dans un domaine  $D'$  et continue dans le domaine fermé  $\hat{D}'$ , à frontière formée d'arcs de Jordan, ne peut être nulle sur un arc de la frontière sans être identiquement nulle. Ce fait s'établit par la représentation conforme de  $\hat{D}'$  (simplement connexe) sur un cercle et le prolongement analytique [voir, par exemple, P. MONTÉL, I, p. 48].

Ce théorème, qui est dû à P. Montel [27,  $f$ ] et qui constitue une extension remarquable de la proposition (II), comporte lui-même une généralisation importante [I, p. 192] due à Khintchine.

XVI. *Soit une suite de fonctions  $f_n(z)$  holomorphes dans  $D$ , limité par une ligne de Jordan, bornées dans leur ensemble et continues dans  $\hat{D}$ . Si elle converge uniformément sur un ensemble de points de la frontière, situés sur une portion rectifiable, dont la mesure est positive, elle converge uniformément à l'intérieur de  $D$ .*

On ramène le domaine à un cercle de rayon 1. Une telle représentation conforme fait correspondre à un ensemble de points de mesure positive d'un arc rectifiable de la frontière un ensemble de points de mesure positive de la circonférence [24, p. 156].

On peut remplacer l'hypothèse que les  $|f_n(z)|$  sont bornés dans leur ensemble par celle plus large que les intégrales

$$\int_0^{2\pi} \log |f_n(e^{i\varphi})| d\varphi,$$

sont, quel que soit  $n$ , inférieures à un nombre fixe.

On peut même se débarrasser de l'hypothèse de l'uniformité de la convergence sur l'ensemble de points donnés et de celle de la continuité dans le domaine fermé. La condition précédente doit alors être remplacée par celle-ci :

$$\int_0^{2\pi} \log |f_n(\rho e^{i\varphi})| d\varphi < A \quad (\rho < 1 \text{ et } A \text{ étant une constante}).$$

On montre, en effet, que les  $f_n(z)$  ont presque partout sur la circonférence une limite lorsqu'on se déplace sur un rayon [31,  $b$ ].

J. Priwaloff a démontré la propriété suivante [33, b] :

Soit, dans un domaine D, limité par une courbe rectifiable C une fonction holomorphe  $\varphi(z)$ . Supposons que  $z$  tendant vers un point quelconque  $t$  du contour par un chemin non tangent  $\varphi(z)$  tende vers une fonction intégrable (L),  $\varphi(t)$ . La condition nécessaire et suffisante pour que la formule de Cauchy

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(t) dt}{t-z}$$

ait lieu est que en presque chaque point  $t_0$  de C, on ait

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(t_0)} \frac{f(t) dt}{t-t_0} = \frac{1}{2} f(t_0),$$

en désignant par  $\int_{C(t_0)} \frac{f(t) dt}{t-t_0}$  la limite, si elle existe, de l'intégrale le long de C lorsque l'on supprime un arc de longueur infiniment petite dont le milieu est  $t_0$ .

Cela étant, Gr. Fichtenholtz s'est proposé [8, b], comme prolongement d'une étude [8, a] sur les suites de fonctions harmoniques, d'établir des conditions de convergence dans un domaine moyennant certaines hypothèses sur les valeurs limites au contour. Il a établi le théorème suivant dont il a aussi donné une extension :

XVII. *Soit dans le cercle une suite  $\{f_n(z)\}$  de fonctions holomorphes pour lesquelles (proposition précédente), on a, C désignant la circonférence,*

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(t) dt}{t-z}.$$

*Pour que  $\{f_n(z)\}$  converge à l'intérieur du cercle vers une fonction holomorphe  $f(z)$ , il faut et il suffit que les fonctions*

$$F_n(\theta) = \int_0^\theta f_n(e^{i\lambda}) d\lambda$$

*tendent, pour n infini, vers une fonction limite  $F(\theta)$  dans un ensemble de points de la circonférence, de mesure positive.*

*Cette condition étant remplie, la limite  $F(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\theta)$  existera partout sur C et se présentera sous la forme de l'intégrale*

indéfinie d'une fonction sommable  $f(e^{it})$ , et l'on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{t-z}.$$

Sur ce sujet, voir une Note antérieure de A. Kovanko [17].

Dans le même ordre d'idées, on doit à F. Hartogs [12] cette proposition :

XVIII. Soient un domaine  $D$  simplement connexe, limité par une courbe de Jordan, et  $l$  un arc quelconque de cette courbe. Si une suite de fonctions  $f_n(z)$ , holomorphes et bornées dans leur ensemble dans  $D$ , continues dans  $D+l$ , converge presque partout sur  $l$ , et par conséquent, partout dans  $D$ , les valeurs de la fonction limite sur  $l$  coïncident presque partout avec les valeurs définies par continuité depuis l'intérieur de  $D$ , selon le sens de la représentation conforme.

Il montre sur des exemples que, en fait, en des points d'un ensemble de mesure nulle sur  $C$ , les deux fonctions peuvent ne pas coïncider et aussi que la convergence peut avoir lieu sur l'arc  $l$  en entier sans être uniforme sur aucun arc partiel.

*Extensions du théorème de Stieltjès.* — Une proposition de J. Hadamard [11 et I, p. 196], connue sous le nom de « théorème des trois cercles », est la suivante :

Soient trois cercles concentriques  $C_1, C_2, C_3$  de rayons  $r_1 < r_2 < r_3$ , une fonction  $f(z)$  holomorphe dans l'anneau  $C_1 C_3$ , admettant  $M_t$  comme module maximum sur  $C_t$ , on a

$$M_2 \leq M_1^\gamma M_3^{1-\gamma},$$

en posant

$$\gamma = \frac{\log \frac{r_3}{r_2}}{\log \frac{r_3}{r_1}}.$$

Soient alors  $C_t$  et  $C_3$  fixes, une suite de fonctions  $f_n(z)$  holomorphes dans  $\hat{C}_3$  et tendant uniformément dans  $\hat{C}_1$  vers une fonction  $f(z)$  holomorphe elle-même dans  $\hat{C}_3$ . En appliquant le théorème précédent aux fonctions  $f_n(z) - f(z)$  et si leur module maximum  $M_n$

dans  $\hat{C}_3$  est infiniment grand, mais ne croît pas trop vite, on pourra choisir  $\hat{C}_2$  de manière que la convergence uniforme de la suite s'y étende.

On peut même remplacer l'aire ( $\hat{C}_1$ ) de l'hypothèse primitive par un arc ou un ensemble dénombrable de points. Une inégalité de Carleman est la suivante : Soit un domaine limité par deux segments de droite AB et AC, faisant entre eux l'angle  $\alpha\pi$  et un arc de courbe de Jordan BC dont tous les points sont à une distance de A inférieure à R. Si  $f(z)$  est une fonction qui est holomorphe dans le domaine D ainsi construit et continue dans  $\hat{D}$ , dont le module est inférieur à  $\mathcal{M}$  sur AB et AC, à  $m$  sur l'arc BC, on a un point  $\zeta$  intérieur situé sur la bissectrice, à une distance  $r$  de A,

$$|f(\zeta)| < \mathcal{M}^{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} m^{\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Partant de là, H. Milloux [26] a réussi à établir les propositions que voici :

**XIX.** Soient dans un domaine D une suite de fonctions holomorphes  $f_n(z)$  et une fonction  $f(z)$  holomorphe elle aussi. On suppose que sur un arc continu C intérieur à D, la suite converge uniformément vers la fonction. Soient  $m_n$  et  $M_n$  les bornes supérieures de  $|f_n(z) - f(z)|$  sur C et dans D. Si, quelque petit que soit  $\varepsilon > 0$ , on finit par avoir  $M_n < m_n^{-\varepsilon}$  la suite converge uniformément dans D. Dans un domaine  $\hat{D}'$  quelconque intérieur à D, on finit par avoir  $|f_n(z) - f(z)| < m_n^\lambda$ ,  $\lambda$  ne dépendant que de la configuration de D, D' et de l'arc C.

On peut supposer que C est une partie de la frontière de D à condition que les fonctions considérées soient continues dans  $D + C$ .

Ce théorème généralise une proposition de A. Ostrowski [31, a], dont on obtient l'énoncé en remplaçant dans l'énoncé précédent l'arc de courbe C par un domaine intérieur à D.

La convergence est assurée aussi en remplaçant, dans certaines conditions, l'arc par une suite discontinue de points. Soit une suite de points  $\{z_k\}$  à modules décroissants. Elle sera dite exponentiellement compacte, d'ordre supérieur à 2, autour de son point limite O

si l'on a

$$\log \log \left| \frac{z_k}{z_{k+1} - z_k} \right| < \frac{1}{F(|z_k|)},$$

où  $F(u)$  a le signe de  $u$  et où  $\frac{F(u)}{u}$  tend vers zéro avec  $u$ . Alors :

XX. Soit une suite de fonctions  $f_n(z)$  holomorphes dans  $D$  et qui converge uniformément vers une fonction  $f(z)$ , elle-même holomorphe dans  $D$ , en une suite de points exponentiellement compacte, d'ordre supérieur à 2, autour d'un point  $O$  intérieur à  $D$  ou situé sur la frontière de ce domaine; dans ce cas, on suppose, en outre, que les points de la suite sont compris dans un angle intérieur au domaine  $D$ . En ces points  $|f_n(z) - f(z)| < m_n$ . Soit  $M_n$  la borne supérieure de  $|f_n(z) - f(z)|$  dans  $D$ . Si l'on a

$$\log M_n < \left[ \log \frac{1}{m_n} \right]^{1-\alpha},$$

$\alpha$  étant une constante positive, la suite converge uniformément vers  $f(z)$  dans le domaine  $D$ . Dans un domaine  $\hat{D}'$  intérieur à  $D$ , on a

$$\log |f_n(z) - f(z)| < \lambda \left[ \log \frac{1}{m_n} \right]^{1-\varepsilon(m_n)},$$

où  $\lambda$  ne dépend que de la configuration de  $D$  et  $D'$ ,  $\varepsilon(m_n)$  tend vers zéro avec  $m_n$  et est déterminé par la suite des points donnés dans l'hypothèse.

Cette remarquable proposition constitue une extension du théorème de Vitali [qui, toutefois, ne suppose pas  $f(z)$  donnée holomorphe dans  $D$ ] et aussi du théorème de Blaschke.

*Rapidité de la convergence.* — Lorsqu'une suite de fonctions continues converge dans un domaine, la rapidité de la convergence peut varier beaucoup d'une région à l'autre. Dans le cas de fonctions holomorphes, la comparaison donne lieu à des résultats limitatifs. Les fonctions de la suite étant  $f_n(z)$ , et la fonction limite étant  $f(x)$ , si l'on désigne par  $m_n$  et  $m'_n$  les bornes supérieures de  $|f_n(z) - f(z)|$  dans deux régions, on peut déduire du théorème des trois cercles que  $\frac{\log m'_n}{\log m_n}$  reste compris entre deux nombres constants, proposition due à A. Ostrowski.

S. Mandelbrojt apporte à ce résultat d'intéressantes précisions et introduit des notions nouvelles [25, a et b]. Il donne ultérieurement un exposé d'ensemble de ses recherches [25, c].

XXI. *Étant donnés une suite  $\{f_n(z)\}$  de fonctions holomorphes dans D, possédant à l'intérieur la convergence sphériquement uniforme, et un domaine  $\hat{D}_1$  quelconque intérieur à D, il existe  $\alpha > 1$  tel que, à partir d'un certain indice, on ait pour tout couple  $z_0, z_1$  de points de  $\hat{D}_1$ , soit*

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{\log |f_n(z_1)|}{\log |f_n(z_0)|} < \alpha,$$

*si la limite de la suite est la constante infinie, soit*

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{\log |f_n(z_0) - f(z_0)|}{\log |f_n(z_1) - f(z_1)|} < \alpha,$$

*si la limite est la fonction holomorphe  $f(z)$  et si  $f_n(z) - f(z)$  ne s'annule pas (à partir d'un certain indice) dans D.*

Le théorème d'Ostrowski est un cas particulier de la deuxième inégalité.

Introduisant sous le nom de *noyau* d'une suite  $\{f_n(z)\}$  de fonctions holomorphes dans D l'ensemble de fonctions harmoniques qui ne deviennent pas infinies dans ce domaine et qui,  $z_0$  étant à l'intérieur de D, sont des limites des fonctions  $\frac{\log |f_n(z)|}{\log |f_n(z_0)|}$ , il prouve que :

XXII. *Si une suite de fonctions  $f_n(z)$  holomorphes dans D converge uniformément à l'intérieur vers l'infini, si les  $f_n(z)$  ne s'y annulent pas et si, enfin, le noyau de la suite donnée ne contient pas la constante 1, pour chaque ordre p de dérivation la suite des  $f_n^{(p)}(z)$  converge uniformément à l'intérieur de D vers l'infini et les noyaux de ces suites sont les mêmes que celui de la suite donnée.*

M. Biernacki a récemment apporté [3] des compléments à ce dernier résultat. Il établit que :

XXIII. *Les hypothèses étant les mêmes qu'au théorème XXII,*



si  $\hat{D}_1$  est complètement intérieur à  $D$ , on a

$$f_n^{(p)}(z) = [1 + \varepsilon_{n,p}(z)] \frac{[f_n'(z)]^p}{[f_n(z)]^{p-1}},$$

$\varepsilon_{n,p}(z)$  tendant vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ , uniformément dans  $\hat{D}_1$  ( $p$  quelconque constant).

Supposant ensuite que les  $f_n'(z)$  peuvent s'annuler :

1° Si tous les zéros des  $f_n(z)$ , dont  $N_n$  se trouvent à l'intérieur de  $\hat{D}_1$ , restent à une distance de la frontière de  $\hat{D}_1$  supérieure à un nombre fixe, ce domaine contient exactement  $pN_n$  zéros de  $f_n^{(p)}(z)$  à partir d'un certain indice  $n'_p$ ;

2° Le nombre de zéros de  $f_n^{(p)}(z)$  dans  $\hat{D}_1$  ne dépasse pas un nombre constant, qui peut dépendre de  $D$ ,  $D_1$ ,  $p$  et de la suite considérée.

De son côté, G. Valiron, utilisant le théorème de Schottky sous une forme particulière qu'il lui a donnée, a généralisé [39, b] plusieurs résultats de S Mandelbrojt.

### III. — FONCTIONS MÉROMOPHES D'UNE VARIABLE.

9. Familles normales, quasi normales [27, h et I, p. 124]. — Si une suite  $\{f_\nu(z)\}$  de fonctions méromorphes dans  $D$  y possède la convergence sphérique uniforme vers une fonction  $f(z)$ , tout point  $z_0$  de  $D$  est le centre d'un cercle dans lequel  $\{f_\nu(z)\}$  ou  $\left\{\frac{1}{f_\nu(z)}\right\}$  converge uniformément, au sens habituel du mot, en sorte que dans ce cercle et par conséquent dans tout  $\hat{D}_1 < D$ , donc enfin dans  $D$ , la fonction limite est une fonction méromorphe pouvant se réduire à une constante finie ou infinie. La constante infinie sera considérée comme une fonction méromorphe particulière.

Cette notion remonte à C. Carathéodory et E. Landau [6, p. 604].

Famille normale de fonctions méromorphes dans  $D$ . — C'est une famille telle que toute suite de fonctions de la famille est génératrice d'une suite partielle possédant à l'intérieur de  $D$  la convergence sphérique uniforme.

Cette propriété se conserve par toute transformation homographique à coefficients constants effectuée sur les fonctions de la famille.

*Critère fondamental.* — La famille  $F$  des fonctions méromorphes dans  $D$  qui admettent trois valeurs exceptionnelles  $a, b, c$  est normale, car la transformation  $g = \frac{f-a}{f-b} : \frac{c-a}{c-b}$  la transforme en une famille  $G$  de fonctions holomorphes qui ne prennent ni la valeur 0, ni la valeur 1.

Pour qu'une famille de fonctions méromorphes dans  $D$  soit normale, il faut et il suffit qu'elle soit également continue vers la sphère (n° 3).

A. Orłowski démontre [31, d] que si en  $z_0$  une famille de fonctions sphériquement continues n'est pas normale et si en ce point l'oscillation sphérique  $\omega$  est positive, le point qui est un point  $J$  et aussi un point  $O$  (n° 6). Pour une famille de fonctions méromorphes tout point  $J$  est un point  $O$  et l'ensemble des points irréguliers coïncide avec l'ensemble des points en lesquels l'oscillation sphérique est égale à  $\pi$  (il généralise ainsi la propriété relative aux fonctions holomorphes).

*Remarque.* — Une suite uniformément convergente sur la sphère de fonctions méromorphes dans  $D$  forme une famille normale dans ce domaine. Les propriétés des familles normales appartiennent donc à de telles suites.

*Nombre des zéros et des pôles.* — On a cette généralisation d'une propriété des suites de fonctions holomorphes :

XXIV. Si la suite de fonctions  $f_n(z)$  méromorphes dans  $D$  possède à l'intérieur la convergence sphérique uniforme vers la fonction méromorphe  $f(z)$  et si cette dernière n'est pas égale à la constante  $a$ , dans tout  $D'$  intérieur à  $D$ ,  $f_n(z) - a$  finit par avoir le même nombre de zéros que  $f(z) - a$ .

On en conclut cette proposition :

XXV. Si une famille normale de fonctions méromorphes n'admet aucune fonction limite égale à la constante  $a$ , le nombre

des zéros est borné pour l'ensemble des fonctions de la famille, dans chaque domaine intérieur.

Et, par transformation homographique, cette autre :

XXVI. Si une famille normale de fonctions méromorphes n'admet aucune fonction limite égale à la constante infinie, le nombre des pôles est borné pour l'ensemble des fonctions de la famille, dans chaque domaine intérieur.

Notamment : Si les valeurs, au point  $z_0$  intérieur à un domaine D, de fonctions méromorphes qui y forment une famille normale ont leurs modules bornés, il existe un cercle de centre  $z_0$  qui ne contient aucun pôle des fonctions de la famille.

*Famille quasi normale d'ordre  $q$  dans D.* — P. Montel nomme ainsi toute famille de fonctions méromorphes dont chaque suite engendre une suite partielle qui possède la convergence sphérique uniforme à l'intérieur de D, sauf en  $q$  points irréguliers au plus [1, p. 137].

Une suite uniformément convergente de fonctions méromorphes peut avoir des points irréguliers sans converger vers la constante infinie (ce qui n'était pas le cas avec les fonctions holomorphes); en dehors de ces points elle peut converger vers une fonction holomorphe ou méromorphe. Exemple :

$$f_n(z) = f(z) + \frac{g(z) - f(z)}{1 + nP(z)},$$

où  $f(z)$  et  $g(z)$  sont des fonctions holomorphes ou méromorphes et où  $P(z)$  est un polynôme. La convergence est uniforme sauf aux racines  $z_i$  de  $P(z)$  où  $f_n(z)$  tend vers  $g(z_i)$ .

Si un point  $z_0$  est irrégulier pour une famille quasi normale, il existe une suite de fonctions  $f_n(z)$  de la famille telle que, quel que soit  $a$ , l'équation  $f_n(z) - a = 0$  ait des racines voisines de  $z_0$ , à partir d'un certain indice, sauf peut-être pour une seule valeur de  $a$  (car, s'il y avait deux valeurs  $a'$ ,  $a''$  exceptionnelles, on ferait la transformation  $g(z) = \frac{f(z) - a'}{f(z) - a''}$ , etc.).

La nature de  $z_0$  pour  $f(z)$  est connue dans le cas très intéressant que voici :

XXVII. Soit une suite de fonctions méromorphes  $f_n(z)$  convergeant uniformément sur la sphère autour du point irrégulier  $z_0$ ; s'il existe un nombre  $a$  tel que, à partir d'un certain rang et dans un certain cercle de centre  $z_0$  la fonction  $f_n(z) - a$  n'a pas plus de  $\mu$  zéros,  $\mu$  étant constant, la fonction limite  $f(z)$  est méromorphe en  $z_0$ .

Au sujet des racines des équations  $f_n(z) - a = 0$  on a cette proposition limitative.

XXVIII. Soit une suite de fonctions méromorphes  $f_n(z)$  convergeant uniformément sur la sphère autour du point irrégulier  $z_0$ . Si les équations  $f_n(z) = a'$ ,  $f_n(z) = a''$  n'ont respectivement pas plus de  $\mu'$  et  $\mu''$  racines voisines de  $z_0$ , les équations  $f_n(z) = a$  auront à partir d'un certain rang et dans un certain cercle de centre  $z_0$ , sauf peut-être pour une valeur de  $a$ , un nombre de racines inférieur à une limite fixe  $\mu$ .

P. Montel part de là pour définir [I, p. 144] un point irrégulier d'ordre  $\mu$  relatif à une suite et l'ordre total d'une famille quasi normale.

Il établit que :

Une famille quasi normale de fonctions méromorphes dans un domaine  $D$  où elles n'ont pas plus de  $q$  zéros et restent bornées en  $q + 1$  points fixes intérieurs ne peut admettre de constante infinie comme fonction limite.

Et il généralise cette propriété.

D'autre part, une famille normale de fonctions holomorphes qui n'admet pas la constante infinie parmi ses fonctions limites, est bornée dans son ensemble dans tout domaine intérieur. P. Montel étend ainsi cette proposition :

Soit une famille quasi normale de fonctions méromorphes dans  $D$ , dont aucune fonction limite n'est la constante infinie. À chaque  $\hat{\Delta} < D$  et à chaque  $\delta > 0$  correspond  $\Omega$  tel que pour chaque fonction  $f(z) | < \Omega$  à l'intérieur du domaine obtenu en retranchant de  $\hat{\Delta}$  les points intérieurs aux cercles  $\gamma$  de rayon  $\delta$  ayant pour centre les pôles de  $f(z)$  contenus dans  $\hat{\Delta}$ .

Enfin :

*Critère fondamental.* — Les fonctions  $f(z)$ , méromorphes dans  $D$ , prenant dans ce domaine  $p$  fois au plus une valeur  $a$ ,  $q$  fois au plus une valeur  $b$ ,  $r$  fois au plus une valeur  $c$ , forment une famille quasi normale dans ce domaine. (L'ordre de cette famille est égal au nombre moyen de la suite  $p, q, r$  et son ordre total est fini.)

10. **Suites de fonctions méromorphes** [I, p. 207]. — On a la propriété suivante :

XXIX. *Une suite infinie  $\{f_\nu(z)\}$  de fonctions méromorphes, appartenant à une famille normale  $D$  et ayant en chaque point la convergence sur la sphère, possède à l'intérieur du domaine la convergence sphérique uniforme.*

(Proposition inapplicable si la suite forme seulement une famille quasi normale.) Ainsi :

XXX. *Pour qu'une suite infinie  $\{f_\nu(z)\}$  de fonctions méromorphes, sphériquement convergente dans un domaine,  $\gamma$  forme une famille normale il faut et il suffit que la convergence soit sphériquement uniforme à l'intérieur du domaine.*

Le théorème de Vitali reçoit aisément une très importante extension :

XXXI. *Une suite infinie  $\{f_\nu(z)\}$  de fonctions méromorphes, appartenant à une famille normale dans  $D$  qui converge sur la sphère en une infinité de points avec point d'accumulation intérieur à  $D$  possède en tout point de  $D$  la convergence sphérique.*

*La fonction limite.* — Un théorème, énoncé au n° 17, applicable aux fonctions méromorphes, prend avec elles la forme suivante :

XXXII. *Soit une suite de fonctions méromorphes, sphériquement convergente dans un domaine  $D$ . Dans tout domaine intérieur à  $D$  on peut en trouver un autre où la convergence sphérique est uniforme. Le caractère analytique ne disparaît pas par un seul passage à la limite [27, j].*

*Ensemble des points irréguliers* — L'ensemble  $E$  des points du domaine  $D$  en lesquels la convergence cesse d'être uniforme n'est

autre que l'ensemble des points  $J$  ou des points  $O$  (qui ici coïncident); il est fermé et non dense. Il est parfait si les fonctions de la suite admettent deux valeurs exceptionnelles.

L'ensemble  $E$  comprend un ensemble parfait  $E_1$ , et un ensemble dénombrable. Sur  $E_1$ , et sur tout ensemble parfait inclus, la fonction limite  $f(z)$  est ponctuellement discontinue sphériquement.

La fonction  $f(z)$  peut être égale dans les domaines où elle est méromorphe à des fonctions méromorphes distinctes.

*Suites de fonctions ayant pour limite une constante.* — Nous avons constaté l'intérêt de ce cas particulier. P. Montel en a fait l'objet d'un Mémoire [27, i].

XXXIII. Il établit d'abord que : *Si la suite normale  $\{f_\nu(z)\}$  de fonctions holomorphes dans  $D$  converge en  $z_0$  vers  $a$  et si dans le voisinage de  $z_0$  les fonctions de la suite ne prennent pas la valeur  $a$  à partir d'un certain rang, la suite tend uniformément vers  $a$  à l'intérieur de  $D$ . La proposition s'applique notamment si  $f_n(z_0)$  est infiniment grand avec  $n$ .*

Il la généralise en considérant une suite normale  $\{f_\nu(z)\}$  telle que  $f_n(z_0)$ ,  $f'_n(z_0)$ ,  $\dots$ ,  $f_n^{(k)}(z_0)$  aient respectivement pour limites, avec  $n$  infini, la première la valeur  $a$ , les autres 0. Si, dans le voisinage de  $z_0$  les  $f_n(z)$  ne prennent pas, à partir d'un certain rang, plus de  $k$  fois la valeur  $a$ , ces fonctions tendent uniformément vers  $a$  à l'intérieur de  $D$ .

Il étend ensuite ces propositions aux familles quasi normales de fonctions holomorphes. Et il applique les résultats obtenus aux suites multivalentes d'ordre  $p$  dans un domaine  $D$ . Signalons les propositions suivantes :

XXXIV. *Si une suite de fonctions holomorphes multivalentes d'ordre  $p$  converge vers  $a$  en  $p+1$  points du domaine elle converge vers  $a$  à l'intérieur; si elle converge vers une fonction limite non constante, cette limite est multivalente d'ordre  $p$  au plus. La convergence est dans tous les cas uniforme, la suite étant quasi normale d'ordre  $p$ .*

XXXV. *Toute suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément vers une fonction multivalente d'ordre  $p$  est*

formée à partir d'un certain rang de fonctions multivalentes d'ordre  $p$ .

Les propositions obtenues pour les suites normales de fonctions holomorphes s'appliquent aussi aux fonctions méromorphes; il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit de suites quasi normales.

#### IV. — FONCTIONS ALGÈBROÏDES.

**11. Familles normales; limites de suites.** — On dit que  $u(z)$  est une algébroïde à  $\nu$  déterminations dans un domaine  $D$  lorsque cette fonction  $y$  est définie par une équation de la forme

$$u^\nu + a_1(z)u^{\nu-1} + \dots + a_\nu(z) = 0,$$

les  $a(z)$  étant holomorphes ou méromorphes dans le domaine.

Lorsque les  $a(z)$  sont holomorphes, l'algébroïde est entière dans le domaine; elle est dite entière si  $D$  est le plan complexe lui-même.

Si l'un des  $a$  au moins est méromorphe dans  $D$  la fonction est dite algébroïde non entière.

Ces fonctions ont été étudiées spécialement par G. Rémoundos [36 *a* et *b*] qui a consacré un fascicule du *Mémorial* aux familles et aux séries de fonctions algébroides. Le lecteur est prié de s'y reporter ainsi qu'à l'Ouvrage de P. Montel pour compléter ce très bref exposé. La théorie, qui fait appel aux méthodes de Montel, vise l'extension des résultats obtenus avec les fonctions uniformes.

Une suite d'algébroides  $f_n(z)$  à  $\nu$  déterminations, entières dans  $D$ , est uniformément convergente sur la sphère dans  $\hat{\Delta} \subset D$  lorsqu'il existe une fonction  $f(z)$  à  $\nu$  déterminations qui, en chaque point, correspondent chacune à celles de  $f_n(z)$ ,  $f^{(l)}(z)$  à  $f_n^{(l)}(z)$ , de sorte qu'à tout  $\varepsilon > 0$  on ait à partir d'une certaine valeur de l'indice et quel que soit  $z$  dans  $\hat{\Delta}$   $|f_n^{(l)}(z), f^{(l)}(z)| < \varepsilon$ .

De là la définition de l'uniformité sphérique de la convergence à l'intérieur de  $D$ .

Si de toute suite infinie d'une famille d'algébroides entières à  $\nu$  déterminations dans  $D$ , on peut extraire une suite partielle qui possède à l'intérieur la convergence sphérique uniforme, on dit que cette famille est normale.

Or on appelle famille complexe normale une famille de systèmes

de  $\nu$  fonctions  $[a_1(z), a_2(z), \dots, a_\nu(z)]$  holomorphes dans  $D$  lorsque la famille  $a_p(z)$  où  $p$  a une valeur fixe quelconque est normale.

Une expression à coefficients constants

$$A(z) = \lambda_0 + \lambda_1 a_1(z) + \dots + \lambda_\nu a_\nu(z)$$

est dite combinaison exceptionnelle  $A$  pour le système des  $a(z)$  dans  $D$  si  $A(z)$  ne s'y annule pas;  $\nu$  combinaisons,  $\nu + 1$  sont distinctes lorsqu'il n'y a pas respectivement de relation identique linéaire ou linéaire et homogène à coefficients constants non tous nuls entre elles. Si  $D$  est le plan entier, une combinaison exceptionnelle se réduit soit à un polynôme  $P(z)$ , soit au produit d'un polynôme par un facteur exponentiel  $e^{Q(z)}$ ,  $Q(z)$  étant une fonction entière. Si l'un des  $a(z)$  au moins n'est pas un polynôme, le nombre total des combinaisons exceptionnelles ne peut dépasser  $2\nu - 1$ , à savoir  $\nu - 1$  du premier type,  $\nu$  du deuxième. Lorsque dans  $D$  les fonctions admettent deux groupements de  $\nu$  combinaisons exceptionnelles distinctes de la forme

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda'_0 + a_1, & A_2 &= \lambda'_0 + \lambda'_1 a_1 + a_2, & \dots, & & A_\nu &= \lambda'_0 + \lambda'_1 a_1 + \lambda'_2 a_2 + \dots + a_\nu; \\ B_1 &= \mu'_0 + a_1, & B_2 &= \mu'_0 + \mu'_1 a_1 + a_2, & \dots, & & B_\nu &= \mu'_0 + \mu'_1 a_1 + \mu'_2 a_2 + \dots + a_\nu; \end{aligned}$$

on appelle écart de ces tableaux triangulaires le plus petit module des  $A_i - B_i$  en chaque point  $z$ .

Les combinaisons exceptionnelles ont ici un rôle analogue à celui des valeurs exceptionnelles dans le cas des fonctions uniformes. *On a ce critère important :*

Une famille de systèmes de  $\nu$  fonctions holomorphes dans  $D$  y est normale lorsqu'elle admet  $2\nu$  combinaisons exceptionnelles formant deux tableaux triangulaires distincts si : 1° les fonctions sont bornées en un point particulier de  $D$ ; 2° l'écart des tableaux en un point fixe de  $D$  reste supérieur à un nombre positif.

Lorsque l'on a une famille  $\mathcal{F}$  d'algebroides définies dans  $D$ , si la famille complexe  $\mathcal{A}$  des  $a_i(z)$  n'est pas bornée à l'intérieur elle peut être normale sans que  $\mathcal{F}$  le soit et réciproquement.

*Bornons-nous aux familles d'algebroides entières bornées dans leur ensemble à l'intérieur de  $D$ .* Une telle famille est normale. La famille complexe correspondante est bornée et normale. Réciproque-



ment à une telle famille complexe bornée et normale correspond une famille d'algebroides bornée et normale.

G. Rémoundos démontre notamment ces propositions :

XXXVI. *Si la suite d'algebroides  $f_n(z)$  à  $\nu$  branches, entières, finies dans  $D$ , converge en une infinité de points avec point d'accumulation intérieur à  $D$ , elle converge uniformément dans l'intérieur de  $D$  vers une fonction algebroïde entière à  $\nu$  branches (ou un ensemble de fonctions algebroides ou holomorphes dont le nombre total des branches est  $\nu$ ) [36, a].*

XXXVII. *Soit une suite de fonctions algebroides à  $\nu$  branches  $f_n(z)$ , entières et finies dans un domaine  $D$  dans lequel il n'existe que  $\mu$  points critiques  $c_1, c_2, \dots, c_\mu$  des fonctions de la suite. Posons*

$$P(z) = (z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_\mu).$$

*Si la suite  $f_n(z)$  converge uniformément à l'intérieur de  $D$  vers  $f(z)$  la suite  $[P(z)]^q f_n^{(q)}(z)$  converge uniformément, pour chaque valeur de  $q$  vers  $[P(z)]^q f^{(q)}(z)$  [36, b].*

#### V. — FONCTIONS UNIFORMES DE PLUS D'UNE VARIABLE.

**12. Fonctions analytiques de plusieurs variables.** — Dans le dessein d'étudier ces fonctions alors mal connues, G. Julia a eu l'idée de considérer des familles de telles fonctions et de porter notamment son attention sur les points où elles cessent d'être normales [16]. Les beaux résultats obtenus sont en rapport avec notre sujet.

Pour simplifier le langage limitons-nous aux familles de fonctions holomorphes de deux variables complexes  $z$  et  $z'$ . Le point  $z = x + iy$ ,  $z' = x' + iy'$  a pour coordonnées  $x, y, x', y'$  dans un espace à quatre dimensions et il est à l'intérieur d'une région limitée par une hypersurface fermée, souvent une hypersphère  $|z|^2 + |z'|^2 \leq R^2$  ou un hypercylindre  $|z| \leq R, |z'| \leq R'$ . Une surface (deux paramètres) est l'intersection de deux hypersurfaces (un plan l'intersection de deux hyperplans). Une surface est appelée caractéristique lorsqu'elle est représentée par  $F(z, z') = 0$ ,  $F$  étant analytique.

Une fonction  $f(z, z')$  est holomorphe au point  $(z_0, z'_0)$  si dans le

voisinage de ce point (par exemple pour  $|z - z_0| < \rho, |z' - z'_0| < \rho$ ), elle est égale à la somme d'une série entière en  $z - z_0, z' - z'_0$ , absolument convergente. Elle est holomorphe dans un domaine  $V$  si elle est holomorphe en tout point intérieur. Elle est méromorphe en  $(z_0, z'_0)$  si dans le voisinage de ce point elle est égale au quotient  $\frac{f_1(z, z')}{f_2(z, z')}$  de deux fonctions holomorphes en ce point. Si  $(f_2)_0 = 0$  et  $(f_1)_0 \neq 0$ , le point est un pôle; si  $(f_2)_0 = (f_1)_0 = 0$ ,  $f_1$  et  $f_2$  sont respectivement les produits d'un polynôme qui s'annule en  $(z_0, z'_0)$  par une fonction entière qui y est différente de zéro (Weierstrass); en général donc  $(z_0, z'_0)$  est alors un point d'indétermination. Tout autre point singulier est dit essentiel.

Une famille de fonctions holomorphes est *normale* dans le domaine  $D$  si toute suite infinie est génératrice d'une suite qui possède à l'intérieur de  $D$  la convergence sphérique uniforme. La fonction limite sera donc une fonction holomorphe dans  $D$  ou la constante infinie. Une famille est normale au point  $M$  de  $D$  si elle est normale dans un voisinage de  $M$ ; si elle est normale en tout point (intérieur) de  $D$  elle est normale dans  $D$ . Une famille de fonctions holomorphes et bornées à l'intérieur de  $D$  est une famille normale (car dans tout  $\hat{\Delta} < D$  elle possède l'égalité de continuité; utiliser la formule de l'intégrale double de Cauchy).

On généralise ainsi une propriété concernant les racines d'une suite :

XXXVIII. *Soit une suite de fonctions  $f_n(z, z')$  holomorphes dans  $D$  et qui converge uniformément à l'intérieur vers  $f(z, z')$ ; si en  $(z_0, z'_0)$  on a  $f = a$  et si d'ailleurs  $f(z, z')$  ne se réduit pas à cette constante, dans tout domaine contenu dans  $D$  et contenant  $(z_0, z'_0)$  à son intérieur on finit par avoir constamment, à partir d'un certain indice, des racines de  $f_n(z, z') = a$ .*

En s'appuyant sur ce résultat on valide ici des critères trouvés pour les familles de fonctions d'une variable et en particulier celui-ci.

*Critère fondamental.* — Si les fonctions, holomorphes dans  $D$ , d'une famille  $F$  n'y prennent ni la valeur  $a$ , ni la valeur  $b$  (valeurs exceptionnelles), la famille est normale dans  $D$ .

XXXIX. *En ce qui concerne une suite de fonctions holo-*

*morphes et sphériquement convergentes dans D on retrouve (par un même raisonnement) cette propriété : pour qu'elle soit uniformément convergente il faut et il suffit qu'elle forme une famille normale.*

Les questions relatives à la convergence d'une suite se posent de nouveau ici. La convergence sur un ensemble infini  $E$  de points appartenant à un domaine  $D$  entraînera-t-elle dans certains cas, pour une suite, la convergence dans le domaine, en supposant que la suite constitue une famille normale? Oui, d'après le raisonnement antérieur, si l'ensemble  $E$  est tel qu'une fonction holomorphe dans  $D$  ne puisse être nulle sur  $E$  sans être identiquement nulle. Or, le fait est exact si  $E$  forme un hypervolume; *donc le théorème de Stieltjès est applicable.* Celui de Vitali ne l'est pas sans restriction. Disons qu'un point  $M_0$  est un point limite d'ordre infini pour  $E$  si les plans  $\pi$  caractéristiques passant par  $M_0$  et un point  $M$  de  $E$  ont, quand  $M$  tend vers  $M_0$  sur  $E$ , une infinité de positions limites distinctes. Alors *le théorème de Vitali est valable si l'ensemble  $E$  a un point limite d'ordre infini intérieur à  $D$ .*

Entre autres applications intéressantes de sa théorie, G. Julia a démontré que :

*XL. Si des fonctions  $\varphi_n(z)$ , algébroides et bornées dans un domaine du plan complexe, convergent uniformément dans ce domaine vers une fonction uniforme  $\varphi(z)$ , cette fonction est holomorphe.*

On ne suppose pas que le nombre des branches des  $\varphi_n$  reste borné.

Relativement à l'ensemble des points irréguliers pour une famille de fonctions holomorphes dans  $D$ , c'est-à-dire des points où la famille n'est pas normale, G. Julia a prouvé que cet ensemble est parfait et ne comprend aucune partie isolée dans l'intérieur de  $D$ . Cet ensemble est *parfait, continu et d'un seul tenant avec la frontière du domaine* [16, p. 68] et [I, p. 250].

**13. Fonctions analytiques d'une infinité de variables.** — J. Le Roux étudie [20,  $a$  et  $b$ ] les fonctions d'une infinité de variables complexes  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ ; chaque  $z_n$  est assujéti à être dans une aire  $A_n$ , la borne supérieure  $\rho_n$  des cercles inscrits n'étant pas

nulle; si la limite inférieure des  $\rho_n$  est nulle le domaine est dit évanouissant; un changement linéaire des variables permet d'écartier cette hypothèse. Il étend au domaine complexe les définitions et les propriétés données dans le champ réel [21, n° 15 A].

Corrélativement aux espaces  $E'_\omega$  et  $\Omega$  [9 a et b; 21, n° 15 B] d'une infinité de variables réelles se présentent avec les mêmes définitions et propriétés les espaces  $E_\omega$  et  $\Omega'$  d'une infinité de variables complexes. Un point  $z$  de  $E_\omega$  est constitué par une infinité dénombrable de variables  $z_n$ , un point de  $\Omega'$  d'une infinité telle que  $\sum |z_n|^2$  soit une série convergente.

Soient  $P_p(z)$  une forme de degré  $p$  par rapport aux variables  $z_n$  et une série

$$(1) \quad F(z) = P_0 + P_1(z) + \dots + P_n(z) + \dots$$

D. Hilbert [13] a étudié les fonctions analytiques d'un point de  $E_\omega$  dans des domaines  $|z_p| \leq \rho_p$  à l'intérieur desquels la série est absolument convergente.

R. Gâteaux, qui a ébauché la théorie [10, p. 70] donne les définitions suivantes :  $\{R_p\}$  étant une suite de nombres positifs et  $C$  le système des domaines

$$(C_k) \quad |z_k| < kR_p \quad (0 < k < 1).$$

On désigne par  $-C$  tout domaine constitué d'une manière analogue, mais avec un centre quelconque  $z'_k$  ( $|z_k - z'_k| < kR_p$ ).

Si la série (1) converge uniformément dans tout  $C_k$ ,  $F(z)$  est dite holomorphe dans  $(C)$ .

Cela posé, utilisant la fonction  $F(\lambda z + \mu t)$ , dans laquelle  $\lambda$  et  $\mu$  désignent deux nombres complexes il établit le théorème suivant [10, p. 89] :

XLI. *Si une série*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z)$$

*de fonctions holomorphes dans  $-C$  converge uniformément dans tout  $C_k$  sa somme est holomorphe dans  $-C$ . De plus le développement de  $F(z)$  en série entière s'obtient en ajoutant terme à terme les développements des  $F_n(z)$ .*

Une expression  $\sum_n P_n(z - a)$ , soit  $\mathcal{F}(z - a)$ , admettant un domaine  $\text{--- C}$  de convergence est dite un élément de fonction analytique, élément de centre  $a$  et de domaine  $\text{--- C}$ . Lorsqu'elle admet un domaine  $\text{--- C}$  elle en admet en général plusieurs dont l'ensemble est dit le domaine de convergence,  $\text{--- S}$ .

Une fonction analytique est l'ensemble des éléments qu'on peut déduire d'un élément initial par changements de centre en nombre fini. L'ensemble des points de  $E_\omega$  où elle est définie est le domaine d'existence de la fonction. Il peut y avoir (Hilbert) en un même point un ensemble continu de déterminations.

Soient dans le plan de  $z_n$  une suite de contours simples  $\Gamma_{n,p}$ , chacun contenant le précédent,  $\Gamma_p$  le domaine des points de  $E_\omega$  tels que  $z_n$  soit à l'intérieur de  $\Gamma_{n,p}$ , quel que soit  $n$ , et  $\Gamma$  la somme des  $\Gamma_p$ . Une fonction  $F(z)$  est dite monogène dans  $\Gamma$  si elle y est définie et si, dans chaque  $\Gamma_p$ , elle est continue et admet des dérivées partielles premières. Une telle fonction est holomorphe en chaque point mais n'est pas nécessairement analytique. On a, par application du théorème (XLI) cette proposition :

*XLII. Si une série de fonctions monogènes dans  $\Gamma$  est uniformément convergente dans toute portion finie de tout  $\Gamma_p$  sa somme est une fonction monogène dans  $\Gamma$ .*

La théorie des fonctions d'une infinité de variables complexes présente dès ses éléments, comme on l'a déjà vu ci-dessus, des différences essentielles avec celle des fonctions d'un nombre fini de variables.

---

#### OUVRAGES A CONSULTER.

---

- I. MONTEL (P.). — Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications (*Collection Borel*, Gauthier-Villars, 1927).  
 II. VALIRON (G.). — Familles normales et quasi normales de fonctions méromorphes (*Mémorial*, fasc. 38, 1929).
-

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. ARZELA (C.). — Sulle serie di funzioni analitiche (*Mem. d. R. Acc. di. Bdlogna, nuove serie*, t. 7, 1902-1903).
2. BIEBERBACH (L.). — Lehrbuch der Funktionentheorie (Teubner, 1923, 2<sup>e</sup> édition).
3. BIERNACKI (M.). — Sur les suites de fonctions holomorphes (*C. R. Ac. Sc.*, 1<sup>er</sup> semestre 1928).
4. BLASCHKE (W.). — Eine Erweiterung der Satzes von Vitali uber Folgen analytischer Funktionen (*Sächs. Leipz. Ber.*, t. 67, 1915).
5. CARATHÉODORY (C.). — a. Untersuchungen uber die konformen Abbildungen von festen and veranderlichen Gebieten (*Math. Ann.*, t. 72, 1912); b. Stetige Konvergenz und normale Familien (*Math. Ann.*, t. 101, 1929).
6. CARATHÉODORY (C.) et LANDAU (E.). — Beitrage zur konvergenz von Funktionenfolgen (*Sitz. ber. d. k. Pr. Ak.*, 1911).
7. EGOROFF (D. T.). — Sur les suites de fonctions sommables (*C. R. Ac. Sc.*, t. 152, 1911).
8. FICHTENHOLTZ (Gr.). — a. Sur les suites de fonctions harmoniques (*Ibid.*, 1<sup>er</sup> semestre 1927).  
b. Sur les suites de fonctions analytiques (*Ibid.*, 1<sup>er</sup> semestre 1927).
9. FRÉCHET (M.). — a. Sur quelques points du calcul fonctionnel (*Rendic. d. Circ. mat. Palermo*, t. 22, 1906).  
b. Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées (*N. Ann. Math.*, 1<sup>re</sup> série, t. 8, 1908).
10. GATEAUX (R.). — Fonctions d'une infinité de variables indépendantes (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1919).
11. HADAMARD (J.). — a. Sur les fonctions entières (*Ibid.*, t. 24, 1896).  
b. Notice sur les travaux scientifiques de J. Hadamard (Paris, 1912).
12. HARTOGS (F.). — Ueber die Grenzfunktionen beschränkter Folgen von analytischen Funktionen (*Math. Ann.*, t. 98, 1927).
13. HILBERT (D.). — Wesen und Ziele eines Analysis des unendlichirelen unabhängigen Variablen (*Rend. d. Circ. mat. Palermo*, t. 27, 1909).
14. JACOBSTHAL (E.). — Bemerkungen zum Vitalischen Satze (*Jahr. b. d. deutsch. Math. V.*, t. 36, 1927).
15. JENTZSCH (R.). — Untersuchungen zur Theorie der Folgen der analytischer Funktionen (*Acta math.*, 1918).
16. JULIA (G.). — Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables (*Ibid.*, 1926).
17. KOVANKO (A.). — Sur les suites de fonctions à une variable complexe (*C. R. Ac. Sc.*, 2<sup>e</sup> semestre 1924).
18. LANDAU (E.). — Ueber die Blaschtes Verallgemeinerung des Vitalischen Satzes (*Sächs. Ber.*, t. 70, 1918).

19. LAVRENTIEFF (M.). — *a.* Sur un problème de M. P. Montel (*C. R. Ac. Sc.*, 1<sup>er</sup> semestre 1927); *b.* *Ibid.*, 1<sup>er</sup> semestre 1929.
20. LE ROUX (J.). — *a.* Recherches sur les équations aux dérivées partielles (*Journ. Math. pures et appl.*, 5<sup>e</sup> série, t. 9, 1903).  
*b.* Les fonctions d'une infinité de variables indépendantes (*N. Ann. Math.*, 4<sup>e</sup> série, t. 4, 1904).
21. LEAU (I.). — *a.* Les suites de fonctions en général. Domaine réel (*Mémorial*, fasc. 41, 1930); *b.* Sur les suites convergentes de fonctions holomorphes (*Congrès de l'Ass. fr. pour l'avancement des Sc.*, Nancy 1931).
22. LINDELOF (E.). — Démonstration nouvelle d'un théorème fondamental sur les suites de fonctions monogènes (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1913).
23. LOWNER (K.) et RADO (T.). — Bemerkung zu einen Blaschkeschen Konvergenzratze (*Jahr. b. d. deutsch. Math. V.*, t. 32, 1923).
24. LUSIN (N.) et PRIWALOFF (J.). — Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques (*Ann. Éc. Norm.*, 1925).
25. MANDELBROTT. — *a.* Les suites de fonctions holomorphes. Fonctions entières (*C. R. Ac. Sc.*, 2<sup>e</sup> semestre 1927).  
*b.* Sur les suites de fonctions holomorphes (*Ibid.*, 2<sup>e</sup> semestre 1927).  
*c.* Sur les suites des fonctions holomorphes (*Journ. Math.*, t. 8, 1929).
26. MILLOUX (H.). — Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières (*Journ. Math. pures et appl.*, 1924).
27. MONTEL (P.). — *a.* Sur les séries de fonctions analytiques (*Bull. Sc. math.*, t. 30, 1906).  
*b.* Sur les suites infinies de fonctions (*Ann. Éc. Norm.*, 1907).  
*c.* Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe (*Collection Borel*, 1910).  
*d.* Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine (*Ann. Éc. Norm.*, 1912).  
*e.* Sur les familles normales de fonctions analytiques (*Ibid.*, 1916).  
*f.* Sur la représentation conforme (*Journ. Math. pures et appl.*, 1917).  
*g.* Sur les familles quasi normales de fonctions holomorphes (*Mém. Ac. roy. Belg.*, 1922).  
*h.* Sur les familles quasi normales de fonctions analytiques (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1924).  
*i.* Sur les suites de fonctions analytiques qui ont pour limite une constante (*Ibid.*, 1926).  
*j.* Sur les séries de fonctions méromorphes (*C. R. Ac. Sc.*, 2<sup>e</sup> semestre 1926).
28. NEVANLINNA (R.). — *a.* Untersuchungen uber den Picard'schen Satz (*Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. 50, 1924); *b.* Sur un problème d'interpolation (*C. R. Ac. Sc.* t. 188, 1929).
29. NEVANLINNA (F. et R.). — Ueber die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie (*Acta. Soc. sc. Fennicæ*, t. 50, 1926).

30. OSGOOD (W. F.). — Note on the functions defined by infinite series whose terms are analytic functions of a complex variable (*Annals of Math.*, 2<sup>e</sup> série, t. 3, 1901-1902).
31. OSTROWSKI (A.). — a. Ueber vollständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen (*Abhandl. Math. Semin. d. Hamb. Univ.*, t. 1, 1922).  
 b. Ueber die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionen theorie (*Acta l. ac. sc. r. Univ. Hung.*, t. 1, 1923).  
 c. Über Nullstellen gewisser im Einheitskreise regulären Funktionen und einige Sätze zur Konvergenz unendlichen Reihen (*Jahr. b. d. deutsch. Math. V.*, t. 34, 1925).  
 d. Ueber Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes (*Math. Zeitschrift*, t. 24, 1926).
32. PICARD (E.). — *Traité d'Analyse*.
33. POMPEIU (D.). — Sur les séries de fonctions holomorphes (*Bull. Sc. math.*, t. 30, 1906).
34. PORTER (H.). — a. On functions defined by infinite series of analytic functions of a complex variable (*Annals of Math.*, 2<sup>e</sup> série, t. 6, 1905).  
 b. Concerning series of analytic functions (*Ibid.*, 1905).
35. PRIWALOFF (J.). — a. Sur les suites de fonctions analytiques (*Recueil math. Moscou*, t. 32, 1924).  
 b. Sur certaines propriétés métriques des fonctions analytiques (*C. R. Ac. Sc.*, 1<sup>er</sup> semestre 1924).  
 c. Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen (*Math. Zeitschrift*, 1924).
36. REMOUNDOS (G.). — a. Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine (*Acta math.*, 1914).  
 b. Sur les familles et les séries de fonctions multiformes dans un domaine (*Annali di Matematica*, 1914).
37. SEVERINI (C.). — Sulle successioni infinite di funzioni analitiche (*Atti d. IV Congr. internaz. d. Matem.*, t. 2, 1909).
38. STIELTJÈS (T. J.). — Recherches sur les fractions continues (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1894).
39. VALIRON (G.). — a. Remarque sur la convergence des suites de fonctions holomorphes (*Bull. Sc. math.*, t. 50, 1906), b. Sur quelques propriétés des fonctions holomorphes et des fonctions entières (*Rendiconti del circ. Matem. di Palermo*, t. 54, 1930).
40. VITALI (G.). — Sopra la serie di funzioni analitiche (*R. Ist. Lomb.*, 1903, et *Annali di Matematica*, 1904).
41. WOLFF (J.). — Sur les suites de fonctions holomorphes (*C. R. Ac. Sc.*, 2<sup>e</sup> semestre 1919).
42. DENJOY (A.). — Sur une classe de fonctions analytiques (*C. R. Ac. Soc.*, t. 188, 1929).
-



## SUPPLÉMENT

AU FASCICULE XLIV « LES SUITES DE FONCTIONS EN GÉNÉRAL. DOMAINE RÉEL ».

---

Page 32, n° 12. *Dérivées.* — E. Landau avait donné la généralisation suivante d'un théorème classique [2] :

Si ( $a < x < b$ ) les fonctions réelles de la suite  $f_n(x)$  ont des dérivées d'ordre  $k$ , si  $\sum_n f_n(x)$  converge et que  $\sum_n f_n^{(k)}(x)$  converge uniformément, la fonction  $F(x) = \sum_n f_n(x)$  peut être différenciée  $k$  fois dans l'intervalle et  $F^{(k)}(x) = \sum_n f_n^{(k)}(x)$ .

Par les théorèmes énoncés page 33 L. Neder a obtenu de nouveaux et importants résultats dont on pourra lire un exposé [3].

Depuis lors, N. Obrechhoff a établi [4] cette proposition :

Si les fonctions  $f_n(x)$ , définies dans l'intervalle  $(a, b)$ , y admettent des dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  qui toutes sont monotones dans un même sens, si  $\sum_n f_n(x)$  converge en  $k+1$  points  $x_0, x_1, \dots, x_k$  de  $a$  à  $a+\delta$  et en  $k+1$  points  $y_0, y_1, \dots, y_k$  de  $b-\delta$  à  $b$  ( $a < a+\delta < b-\delta < b$ ), alors  $\sum_n f_n^{(k)}(x)$  converge uniformément dans l'intervalle  $(a+\delta, b-\delta)$ . Il en conclut, utilisant un théorème de L. Neder (*loc. cit.*) que, dans ces conditions, les séries  $\sum_n f_n^{(p)}(x)$  ( $p \leq k$ ) sont uniformément convergentes ainsi que  $\sum_n f_n(x)$  et que cette dernière série peut être dérivée terme à terme jusqu'à l'ordre  $k$ .

Page 38, ligne 2. — Le mérite d'avoir soulevé la question revient bien à Noaillon mais la démonstration nouvelle du théorème de Fischer et Riesz (qui avait déjà donné lieu antérieurement à un exposé simplifié de M. Plancherel signalé à la page précédente) est due à P. Lévy (Mémoire cité).

Ajoutons que :

1° Si  $\omega$  est borné la convergence en moyenne relativement à  $\omega$  est indépendante de  $\omega$  et identique à la convergence en mesure ;

2° Si  $\omega$  est borné et si  $\omega(r + r') = \omega(r) + \omega(r')$ ,  $\int_0^1 \omega [|f - g|] dx$  peut servir de distance et remplacer par une expression explicite celle de la page 36. On prendre par exemple  $\omega(r) = \text{th } |r|$ ,  
 $\omega(r) = \frac{|r|}{1 + |r|} \cdot \dots$

[M. Fréchet, lettre de novembre 1930.]

Page 39 B. — On trouvera aussi dans [1] un exposé fort important de notions et de résultats alors nouveaux dus à M. Fréchet.

#### *Index bibliographique.*

1. FRÉCHET (M.). — Sur les fonctionnelles continues (*Ann. Éc. Norm.*, t. 27, 1910).
2. LANDAU (E.). — Ueber mehrfache gliedweise Differentiation unendlichen Reihen (*Archiv. d. Math. u. Phys.*, t. 26, 1917).
3. NEDER (L.). — Ueber die mehrmalige gliedweise Differentiation unendlicher Reihen und integrale (*Math. Zeitsch.*, t. 28, 1928).
4. OBRECHKOFF (N.). — Sur les séries des fonctions (*C. R. Acad. Sc.*, t. 190, 1930).



---

## TABLE DES MATIÈRES.

---

### I. — INTRODUCTION.

	Pages
1. Aperçu historique.....	1
2. Extensions immédiates.....	2
3. Transformation stéréographique.....	2

### II. — FONCTIONS HOLOMORPHES D'UNE VARIABLE.

4. Première étude de la convergence; familles compactes.....	5
5. Familles normales de fonctions holomorphes.....	9
6. Suites convergentes; points irréguliers; fonction limite.....	10
7. Familles quasi normales de fonctions holomorphes.....	17
8. Étude de nouveaux cas de convergence.....	19

### III. — FONCTIONS MÉROMORPHES D'UNE VARIABLE.

9. Familles normales, quasi normales.....	30
10. Suites de fonctions méromorphes.....	34

### IV. — FONCTIONS ALGÈBREÏDES.

11. Familles normales; limites de suites.....	36
---	----

### V. — FONCTIONS UNIFORMES DE PLUS D'UNE VARIABLE.

12. Fonctions analytiques de plusieurs variables.....	38
13. Fonctions analytiques d'une infinité de variables.....	40
OUVRAGES A CONSULTER.....	42
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.....	43
SUPPLÉMENT AU FASCICULE XLIV « LES SUITES DE FONCTIONS EN GÉNÉRAL. DOMAINE RÉEL ».....	46
TABLE DES MATIÈRES.....	48