JEAN DELSARTE

Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 57 (1932)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1932__57__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LVII

Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert

PAR M. JEAN DELSARTE

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1932

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LES

GROUPES DE TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

DANS

L'ESPACE DE HILBERT

Par M. Jean DELSARTE

CHAPITRE I.

LA NOTION DE LIMITE DANS L'ESPACE DE HILBERT.

1. **L'espace de Hilbert.** — Cet espace, désigné quelquefois par la notation E_ω, est l'espace fonctionnel des fonctions $f(s)$, réelles, de carrés sommables, définies dans un intervalle fixé une fois pour toutes, $(0 - 1)$ par exemple. Cet espace est distancié, la distance des deux fonctions $f(s)$ et $g(s)$ étant

$$r = \left[\int_0^1 [f(s) - g(s)]^2\, ds\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour que cette distance soit nulle, il faut et il suffit que la différence $f(s) - g(s)$ soit presque partout nulle, c'est-à-dire que $f(s)$ et $g(s)$ ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle. Au point de vue où nous nous plaçons, deux telles fonctions ne seront pas considérées comme différentes.

La distance de la fonction $f(s)$ à la fonction 0,

$$\left[\int_0^1 [f(s)]^2\, ds\right]^{\frac{1}{2}},$$

s'appelle la norme de $f(s)$.

L'intégrale

$$\int_0^1 f(s)\, g(s)\, ds$$

qui existe, d'après la formule de Schwarz, dès que $f(s)$ et $g(s)$ sont de carrés sommables, s'appelle le produit scalaire de $f(s)$ par $g(s)$; nous le désignerons toujours par la notation abrégée

$$[f.g].$$

Ces définitions très simples, obtenues par la méthode du passage à la limite de Volterra [29-30], remplacement des sommations par des intégrations, suffisent à la construction d'une géométrie métrique dans l'espace de Hilbert; construction réalisée par certains auteurs [27]. Enfin il est à peine besoin de dire que toutes les intégrations indiquées sont prises au sens de Lebesgue [18]. C'est bien nécessaire d'après le champ fonctionnel choisi.

2. **La convergence forte.** — La considération de cette convergence résulte immédiatement de la définition de la distance de deux fonctions. Une fonction $f_n(s)$ de l'espace E_ω, dont la forme varie suivant les valeurs prises par l'indice entier n, tend fortement vers une fonction $f(s)$ déterminée de E_ω si la norme de la différence

$$f(s) - f_n(s)$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. La condition nécessaire et suffisante de convergence forte d'une suite de fonctions f_n a été déterminée par MM. Fischer et Fr. Riesz [7-26]; elle est de même forme que la condition nécessaire et suffisante de convergence ordinaire de Cauchy :

Pour que la suite de fonctions f_n ait une limite forte, il est nécessaire et suffisant, qu'étant donné un nombre positif ε, aussi petit qu'on le veut, il soit possible de déterminer un entier N *tel que, quel que soit l'entier n, supérieur à* N, *et quel que soit l'entier p positif, la norme de la différence*

$$f_{n+p} - f_n$$

soit inférieure à ε. La démonstration de cette proposition, assez délicate, fait appel à la théorie des ensembles; nous ne la reproduirons pas.

On constate sans difficulté que si les deux suites f_n et g_n ont pour limites fortes f et g, la suite $\alpha f_n + \beta g_n$, où α et β sont des constantes, a pour limite forte $\alpha f + \beta g$, et le produit scalaire $[f_n . g_n]$ a pour limite $[f.g]$.

Il est souvent très utile de coordonner l'espace de Hilbert à l'aide d'un système de fonctions, orthogonal, normal et complet; c'est-à-dire d'un ensemble dénombrable de fonctions de carrés sommables $\varphi_i(s)$ où l'indice i prend toutes les valeurs entières de 1 à l'infini, par exemple; ces fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$[\varphi_i . \varphi_j] = 0 \quad \text{pour } i \neq j \qquad \text{(système orthogonal)},$$
$$[\varphi_i^2] = 1 \qquad \text{(système normal)},$$

quelle que soit la fonction f de carré sommable, non presque partout nulle, les produits scalaires $[f.\varphi_i]$ ne sont pas tous nuls. Le système φ_i est alors complet. Si nous prenons une fonction $f(s)$ de E_ω, les produits scalaires

$$x_i = [f.\varphi_i]$$

sont les coordonnées de cette fonction ou ses coefficients de Fourier, et la série

$$\sum_i x_i \varphi_i(s)$$

est la série de Fourier de la fonction f relativement au système φ_i. D'après l'inégalité de Bessel, classique dans la théorie des séries de Fourier, la série numérique

$$\sum x_i^2$$

est convergente et a une somme au plus égale à $[f^2]$. Si l'on désigne alors par f_n la fonction

$$f_n(s) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i(s);$$

on constate que

$$[f_n^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

et que

$$[(f_{n+p} - f_n)^2] = \sum_{i=n+1}^{n+p} x_i^2;$$

dès lors, d'après le théorème de Fischer-Riesz, la suite f_n converge fortement. Sa limite forte a évidemment les mêmes coefficients de *Fourier, relativement au système* φ_i, que la fonction f, c'est donc la fonction f elle-même, puisque le système φ_i est complet. Il résulte de là que tout ensemble dénombrable de nombres réels

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

rendant convergente la série

$$\sum_i x_i^2$$

définit une fonction de l'espace de Hilbert, une fois choisi le système coordonné φ_i, et inversement. Il y a identité entre l'espace E_ω et l'espace dont chaque point est défini par une *infinité de coordonnées réelles*

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

rendant convergente la série

$$\sum_i x_i^2.$$

L'espace de Hilbert apparaît donc maintenant comme une extension de l'espace euclidien à n dimensions.

Ajoutons enfin que si deux fonctions de cet espace ont respectivement pour coordonnées, relativement au système φ_i,

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

pour la première f,

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n, \quad \ldots$$

pour la seconde g, on a

$$[f^2] = \sum_i x_i^2, \qquad [g^2] = \sum_i y_i^2,$$

$$[f.g] = \sum_i x_i y_i,$$

$$[(f-g)^2] = \sum_i (x_i - y_i)^2.$$

3. Convergence faible. — La convergence forte, qui est dans l'espace de Hilbert l'extension naturelle de la convergence ordinaire dans les espaces à n dimensions, ne conserve pas toutes les propriétés de cette convergence ordinaire; en particulier le principe de Bolzano-Weierstrass ne s'applique pas à la convergence forte. C'est là une lacune très importante, étant donné le rôle fondamental joué par ce principe en analyse. C'est pour cette raison que Hilbert [14] a dû introduire dans l'analyse fonctionnelle des fonctions de carrés sommables une autre espèce de convergence, la convergence faible.

On dit qu'une suite de fonctions de carrés sommables

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_n, \quad \ldots$$

converge faiblement quand les

$$[f_i . \varphi]$$

ont une limite quelle que soit la fonction de carré sommable φ. On a le théorème suivant qui est dû à M. A. Weil [33]:

Les fonctions f_i sont à normes bornées dans leur ensemble si la suite f_i converge faiblement.

La démonstration se fait par l'absurde; nous nous bornerons à indiquer son principe.

Prenons un système orthogonal normal et complet de fonctions coordonnées. Soit φ_i. Introduisons les coefficients de Fourier de la suite f_i et posons

$$[f_i . \varphi_j] = x_j^i.$$

Supposons que les f_i ne soient pas bornées dans leur ensemble, nous allons montrer qu'il est alors possible de construire une fonction φ, de carré sommable, telle que les $[f_i . \varphi]$ ne convergent pas, ce qui est contraire à l'hypothèse. Cette fonction sera déterminée par ses coefficients de Fourier

$$[\varphi . \varphi_j] = a_j.$$

Nous remarquerons que la suite f_i étant faiblement convergente les x_j^i ont des limites pour i infini, et nous poserons

$$\lim_{i=\infty} x_j^i = \xi_j.$$

La fonction φ est alors construite de la manière suivante:

On détermine de proche en proche deux suites d'indices

$$\begin{array}{llllll} i_1 = 1, & i_2, & i_3, & \ldots, & i_n, & \ldots, \\ N_1, & N_2, & N_3, & \ldots, & N_n, & \ldots, \end{array}$$

on pose

$$\sigma_{n+1}^2 = \sum_{j=N_n+1}^{j=\infty} (x_j^{i_{n+1}})^2$$

et

$$a_j = \frac{x_j^{i_{n+1}}}{n\sigma_{n+1}} \qquad \text{pour } N_n < j \leqq N_{n+1}.$$

On constate immédiatement que

$$\sum_{j=N_n+1}^{j=N_{n+1}} a_j^2 < \frac{1}{n^2};$$

par suite la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2$$

est convergente et les a_j sont les coefficients de Fourier d'une fonction φ; on a de plus

$$[f_i, \varphi] = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^i.$$

Il suffit de montrer que l'on peut choisir les indices i_n et N_n de telle sorte que

$$[f_{i_n}.\varphi]$$

croisse indéfiniment avec n. Indiquons seulement le résultat : les indices i et N étant choisis jusqu'à i_n, et N_n; et ε étant un nombre positif assez petit, on choisit i_{n+1} par la condition que

$$|\xi_j - x_j^{i_{n+1}}| < \frac{\varepsilon}{j} \qquad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, N_n,$$

et que

$$\sigma_{n+1}^2 > n^4$$
$$> 9n^2 \left[\sum_1^{N_n} \xi_j^2\right],$$

ce qui est possible puisqu'on suppose que les f_i ne sont pas à normes bornées dans leur ensemble. On détermine ensuite N_{n+1} comme étant le plus petit entier supérieur à N_n tel que

$$\sum_{j=N_{n+1}+1}^{j=\infty} (x_j^{i_{n+1}})^2 < \varepsilon^2.$$

On constate alors que $[f_{i_n}.\varphi]$ croît indéfiniment avec n.

Il résulte immédiatement du théorème de A. Weil, à savoir que les

$$[f_i^2]$$

sont bornées dans leur ensemble, qu'il existe un nombre positif M tel que

$$[f_i^2] < \mathrm{M},$$

quel que soit i. Par suite la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\xi_j)^2$$

converge et a une somme au plus égale à M. De même la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j \xi_j$$

converge dès que

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2$$

converge. On voit donc que les ξ_j sont les coefficients de Fourier d'une certaine fonction f telle que

$$[f^2] \leqq \mathrm{M}.$$

Montrons encore que φ étant une fonction quelconque, et x_i ses coefficients de Fourier, on a

$$\lim_{i=\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} x_j x_j^i \right] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \xi_j,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{i=\infty} [f_i . \varphi] = [f . \varphi].$$

Il suffit de remarquer que

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j(\xi_j - x_j^i) \right| < \left| \sum_{j=1}^{j=n} x_j(\xi_j - x_j^i) \right| + 2 \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} (x_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \left\{ \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} (x_j^i)^2 \right] + \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} (\xi_i)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Prenant alors ε positif et aussi petit qu'on le veut et n assez grand pour que

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} (x_j)^2 < \varepsilon^2,$$

puis n étant choisi, i assez grand pour que

$$|x_k^i - \xi_k| < \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|} \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, n$$

et tenant compte de

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x_j^i)^2 < \mathrm{M}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_j)^2 < \mathrm{M},$$

on voit que

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j (x_j^i - \xi_j)\right| < \varepsilon[2\sqrt{2\mathrm{M}} + 1].$$

En résumé : *Si une suite* f_i *converge faiblement, c'est-à-dire si*

$$[f_i \cdot \varphi]$$

a une limite quel que soit φ, *la suite* f_i *est bornée en normes dans son ensemble*

$$[f_i^2] < \mathrm{M}$$

et il existe une fonction f

$$[f^2] \leqq \mathrm{M},$$

telle que

$$\lim_{i=\infty} [f_i \cdot \varphi] = [f \cdot \varphi],$$

f *est la limite faible de la suite.*

On peut maintenant constater ce fait très important, et qui justifie l'introduction de la notion de convergence faible.

Il y a un principe de Bolzano-Weierstrass pour la convergence faible.

La démonstration est une application du procédé classique, appelé procédé diagonal. Soit une suite bornée en norme f_i. Désignons toujours par φ_i le système orthogonal normal complet, coordonné, et posons comme plus haut

$$[f_i . \varphi_j] = x_j^i,$$

on a

$$[f_i^2] < \mathrm{M}, \qquad (x_j^i)^2 < \mathrm{M}$$

De la suite bornée

$$x_1^1, \quad x_1^2, \quad x_1^3, \quad \ldots, \quad x_1^i, \quad \ldots,$$

on peut extraire une suite convergente

$$x_1^{i_1}, \quad x_1^{i_2}, \quad \ldots, \quad x_1^{i_n}, \quad \ldots,$$

de la suite bornée

$$x_2^{i_1}, \quad x_2^{i_2}, \quad \ldots, \quad x_2^{i_n}, \quad \ldots,$$

on peut extraire une suite convergente

$$x_2^{i'_1}, \quad x_2^{i'_2}, \quad \ldots, \quad x_2^{i'_n}, \quad \ldots$$

On prend ensuite la suite diagonale des indices, et l'on constate que la suite

$$x_j^{i_1}, \quad x_j^{i'_2}, \quad x_j^{i''_3}, \quad \ldots$$

converge quel que soit j. Prenons alors la suite de fonctions

$$f_{i_1}, \quad f_{i'_2}, \quad f_{i''_3}, \quad \ldots$$

extraite de la suite donnée. Ces fonctions sont bornées en normes dans leur ensemble et leurs coefficients de Fourier ont des limites. On démontre comme plus haut que cette suite converge faiblement vers une fonction f ayant pour coefficients de Fourier les limites des coefficients de Fourier des fonctions de la suite.

Ajoutons que si les suites f_i et g_i convergent faiblement vers f et g, la suite $\alpha f_i + \beta g_i$, où α et β sont des constantes, converge faiblement vers $\alpha f + \beta g$. Mais contrairement à ce qui se passe pour la convergence forte, $[f_i . g_i]$ n'a pas en général de limite. On doit cependant noter le point suivant : si la suite $f_n(s)$ tend *faiblement* vers $f(s)$, et si la suite $g_n(s)$ tend *fortement* vers $g(s)$, le produit scalaire $[f_n . g_n]$ tend vers $[f . g]$.

CHAPITRE II.

LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES CONTINUES DANS E_ω.

4. **La fonctionnelle linéaire continue.** — Un nombre $A[f]$ dépendant de la fonction de carré sommable $f(s)$ est une fonctionnelle de $f(s)$, ou une fonction de point définie dans l'espace de Hilbert. On dit que cette fonctionnelle est homogène et linéaire lorsque les conditions suivantes sont remplies :

$$A[0] = 0, \qquad A[f+g] = A[f] + A[g], \qquad A[\alpha f] = \alpha A[f],$$

α étant une constante. Une telle fonctionnelle est dite fortement continue, lorsque la suite de fonctions $f_n(s)$ tendant fortement vers $f(s)$, $A[f_n]$ tend vers $A[f]$. Nous allons d'abord déterminer la forme des fonctionnelles linéaires fortement continues.

Prenons un système de fonctions $\varphi_i(s)$ orthogonal, normal et complet, et posons

$$A[\varphi_i] = a_i.$$

Si l'on considère alors une fonction $f(s)$ de la forme

$$f(s) = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_n\varphi_n,$$

on aura, d'après les propriétés des fonctionnelles linéaires et homogènes,

$$A[f] = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

Si enfin on prend une fonction quelconque de carré sommable $f(s)$ de coefficients de Fourier

$$[f.\varphi_i] = x_i$$

cette fonction est la limite forte de la suite $f_n(s)$,

$$f_n(s) = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_n\varphi_n;$$

comme $A[f]$ est fortement continue, et comme

$$A[f_n] = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,$$

on devra avoir

$$A[f] = \sum_{i=1}^{\infty} a_ix_i. \tag{1}$$

La série figurant au second membre devra donc être convergente toutes les fois que

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2$$

convergera. On constate sans peine qu'il en sera ainsi, d'après la formule de Lagrange, si

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} (a_i)^2$$

converge. M. Landau [17] a démontré que cette condition suffisante est aussi nécessaire. Supposons en effet que

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i)^2$$

diverge; il est alors aisé de trouver une suite de nombres x_i rendant (2) convergente et (1) divergente. Posons

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2,$$

σ_n croît indéfiniment avec n puisque (3) diverge, et il est possible de trouver une suite d'indices

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_p, \quad \ldots,$$

telle que

$$\sigma_{n_p} - \sigma_{n_{p-1}} \geqq 2^p;$$

posons alors

$$x_i = \frac{a_i}{\sigma_{n_p} - \sigma_{n_{p-1}}} \qquad \text{pour } i = n_{p-1}+1,\ n_{p-1}+2,\ \ldots,\ n_p.$$

Il est clair que

$$\sum_{i=1}^{n_p} a_i x_i = p$$

et par suite que la série (1) diverge, tandis que l'on a

$$\sum_{i=1}^{n_p} x_i^2 = \sum_{q=1}^{p} [\sigma_{n_q} - \sigma_{n_{q-1}}]^{-1} \leqq \sum_{q=1}^{p} \frac{1}{2^q};$$

ce qui montre que la série (2) converge. Ce résultat est contraire à l'hypothèse, et il est bien nécessaire que (3) converge pour que la fonctionnelle homogène et linéaire

$$A[f] = \sum_i a_i x_i$$

soit fortement continue. Les a_i peuvent alors être considérés comme les coefficients de Fourier d'une certaine fonction de carré sommable relativement au système coordonné φ_i ; et l'on peut écrire

$$A[f] = [f.\varphi],$$

forme que nous adopterons pour la fonctionnelle linéaire homogène fortement continue. C'est la forme de Fréchet [8]. Il apparaît que la fonctionnelle $A[f]$ est aussi faiblement continue. Bien plus, la définition de la convergence faible est impliquée, en quelque sorte, par la forme même de la fonctionnelle linéaire.

Remarquons enfin que la fonctionnelle linéaire est bornée. Il existe un nombre positif M tel que

$$[f.\varphi]^2 \leqq M^2[f^2],$$

quelle que soit f. Il suffit de prendre, d'après la formule de Schwarz,

$$M^2 = [\varphi^2].$$

5. **Les transformations linéaires fortement continues.** — Ce sont les transformations ponctuelles, définies dans l'espace de Hilbert,

$$g = A[f]$$

et ayant les propriétés suivantes :

$$A[0] = 0, \qquad A[f+f_1] = A[f] + A[f_1], \qquad A[\alpha f] = \alpha A[f];$$

α étant un nombre. De plus elles sont fortement continues dans E_ω, c'est-à-dire qu'elles transforment une suite de fonctions f_n convergeant fortement vers f, en une suite de fonctions g_n convergeant fortement vers $A[f]$. Si l'on prend alors un système orthogonal, normal et complet de fonctions coordonnées φ_i, les coefficients de Fourier

$$[g.\varphi_i] = \big[A[f].\varphi_i\big]$$

de la fonction g seront des fonctionnelles linéaires et homogènes, fortement continues, de f; et l'on aura

$$[g.\varphi_i] = [f.\sigma_i],$$

les σ_i formant un certain système de fonctions dans E_ω. Ce système définit la transformation linéaire $A[f]$ une fois choisi le système coordonné. Il n'est d'ailleurs pas quelconque; il est nécessaire, en effet, pour que g existe, que la série

$$\sum_i [f.\sigma_i]^2$$

converge quelle que soit la fonction de carré sommable f. Tout système σ_i vérifiant cette condition sera appelé système L.

Inversement, soit σ_i un système L. A toute fonction f de E_ω, on peut faire correspondre une fonction g de E_ω définie par

$$[g.\varphi_i] = [f.\sigma_i],$$

et il est clair que la correspondance ainsi réalisée entre f et g est linéaire et homogène. Reste à savoir si elle est fortement continue. La réponse est affirmative. Nous montrerons d'abord que cette correspondance est faiblement continue. Considérons pour cela une fonction φ quelconque de E_ω, et la fonctionnelle

$$[\varphi.g]$$

qui est évidemment une fonctionnelle homogène et linéaire de f. φ est la limite forte d'une suite φ^n

$$\varphi^n = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i$$

avec

$$x_i = [\varphi.\varphi_i];$$

donc $[\varphi.g]$ est la limite de $[\varphi^n.g]$. Or

$$[\varphi^n.g] = \sum_{i=1}^{n} x_i[\varphi_i.g] = \sum_{i=1}^{n} x_i[\sigma_i.f] = [f.\psi^n]$$

avec

$$\psi^n = \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i.$$

Quelle que soit f, $[\varphi^n . g]$ a une limite $[\varphi . g]$: donc quelle que soit f, $[\psi^n . f]$ a une limite $[\varphi . g]$, et par conséquent la suite ψ^n converge faiblement vers une fonction ψ qui ne dépend évidemment que de φ, et l'on a

$$[\psi . f] = [\varphi . g].$$

Soit alors une suite f_i convergeant faiblement vers f. $[f_i . \psi]$ a pour limite $[f . \psi]$, et si l'on pose

$$g_i = \mathrm{A}[f_i],$$

on aura

$$[\varphi . g_i] = [\psi . f_i],$$

et l'on voit que $[\varphi . g_i]$ aura une limite $[\psi . f]$ quel que soit φ, d'où résulte que la suite g_i converge faiblement vers une fonction g telle que

$$[\varphi . g] = [f . \psi].$$

En particulier pour $\varphi = \varphi_i$, on a $\psi = \sigma_i$ et

$$[\varphi_i . g] = [f . \sigma_i];$$

donc

$$g = \mathrm{A}[f]$$

et la correspondance $g = \mathrm{A}[f]$, définie par le système L, σ_i, est faiblement continue. De plus le raisonnement précédent met en évidence une autre transformation fonctionnelle linéaire, celle qui fait correspondre la fonction ψ à la fonction φ. Elle est caractérisée par le fait que

$$\big[\varphi . \mathrm{A}[f]\big] = [\psi . f]$$

et il est facile de déterminer le système L qui lui correspond ; il suffit de faire $f = \varphi_i$, ce qui donne

$$\big[\varphi . \mathrm{A}[\varphi_i]\big] = [\varphi_i . f].$$

Le système de fonctions

$$\rho_i = \mathrm{A}[\varphi_i]$$

est donc un système L, et c'est le système L de cette nouvelle transformation que nous appellerons transformation associée de la transformation A considérée ; on la désignera souvent par le symbole $\overline{\mathrm{A}}$. On a, quelles que soient les fonctions f et f_1,

$$\big[f . \mathrm{A}[f_1]\big] = \big[f_1 . \overline{\mathrm{A}}[f]\big].$$

Inversement la transformation A est l'associée de $\bar{A}$, on a donc

$$\sigma_i = \bar{A}[\varphi_i], \qquad \rho_i = A[\varphi_i],$$

formules qui donnent les systèmes L de deux transformations associées. On peut remarquer qu'un système orthogonal et normal tel que φ_i est un système L particulier, et que, plus généralement, si α_i est un système L quelconque, il en est de même du système β_i, transformé de α_i par A,

$$\beta_i = A[\alpha_i].$$

C'est évident, car, quelle que soit f, on a

$$[f.\beta_i] = \left[f.A[\alpha_i]\right] = \left[\bar{A}[f]\cdot\alpha_i\right]$$

et

$$\sum_i [f.\beta_i]^2$$

converge puisque le système α_i est L. Les transformations linéaires envisagées invarient donc l'ensemble des systèmes L.

Ces transformations sont faiblement continues; on peut en déduire un théorème qui fut démontré pour la première fois par MM. Hellinger et Tœplitz [12], à savoir que ces transformations sont *bornées*, c'est-à-dire qu'à chaque transformation A, correspond un nombre positif M, tel que, si

$$g = A[f],$$

on ait, quelle que soit f (1),

$$[g^2] \leqq M^2[f^2].$$

En effet, si une telle borne n'existait pas, on pourrait trouver une suite de fonctions f_i, de normes unités, telles que les fonctions de la suite correspondante

$$g_i = A[f_i]$$

aient des normes croissant indéfiniment. Or la suite f_i étant bornée en normes, on peut en tirer, par le procédé diagonal, une suite par-

(1) Cette démonstration du théorème de Hellinger et Tœplitz est due à M. A. Weil, elle est beaucoup plus simple que celle des auteurs et met bien en évidence le rôle essentiel joué par la convergence faible, qui admet un principe de Bolzano-Weierstrass.

tielle

$$f_{i_1}, \ f_{i_2}, \ \ldots, \ f_{i_n}, \ \ldots$$

convergeant faiblement; la suite correspondante

$$g_{i_1}, \ g_{i_2}, \ \ldots, \ g_{i_n}, \ \ldots$$

convergera aussi faiblement, d'après ce qui précède; donc les normes des fonctions g_{i_p} seront bornées dans leur ensemble, ce qui est contradictoire, et le nombre M existe.

Il n'y a plus alors aucune difficulté à montrer que toute transformation linéaire A, donnée par un système L,

$$\sigma_1, \ \sigma_2, \ \ldots, \ \sigma_n, \ \ldots$$

est fortement continue.

La borne de la transformation A sera souvent désignée par la notation M_A.

Une fois acquise la notion de transformation linéaire, il est aisé de définir les fonctionnelles bilinéaires et les fonctionnelles quadratiques fortement continues.

Une fonctionnelle bilinéaire définie dans l'espace de Hilbert est un nombre

$$\mathcal{A}(f, g)$$

dépendant de deux fonctions de carrés sommables quelconques f et g, et qui est une fonctionnelle linéaire et homogène de chacune d'elles. C'est une fonctionnelle bilinéaire fortement continue si elle est fonctionnelle linéaire fortement continue de chacune d'elles. g étant fixée, $\mathcal{A}(f, g)$ est une fonctionnelle linéaire fortement continue de f, et est de la forme

$$\mathcal{A}(f, g) = [f.\varphi];$$

de plus la fonction φ ne dépend que de g et doit s'en déduire par une transformation linéaire fortement continue; on a donc

$$\mathcal{A}(f, g) = \big[f.\mathrm{A}[g]\big] = \big[g.\overline{\mathrm{A}}[f]\big];$$

A étant une transformation fonctionnelle linéaire du type précité.

La forme générale d'une fonctionnelle quadratique fortement continue se déduit de la forme générale d'une fonctionnelle bilinéaire fortement continue en y faisant

$$f = g.$$

Une telle fonctionnelle est donc de la forme

$$\left[f.\mathrm{A}[f]\right] = \left[f,\bar{\mathrm{A}}[f]\right].$$

La borne d'une transformation linéaire $\mathrm{A}[f]$ est le plus petit des nombres M, tels que, quelle que soit f, on ait

$$[g^2] = \left[(\mathrm{A}[f])^2\right] \leqq \mathrm{M}^2[f^2];$$

c'est aussi la borne supérieure précise $\mathrm{M_A}$ de $[g^2]^{\frac{1}{2}}$ quand $[f^2] = 1$. De la même manière la borne d'une fonctionnelle bilinéaire est la borne supérieure précise de

$$\left[f.\mathrm{A}[g]\right]$$

quand $[f^2] = [g^2] = 1$.

C'est donc aussi $\mathrm{M_A}$. Or la fonctionnelle bilinéaire envisagée a également pour expression

$$\left[\bar{\mathrm{A}}[f].g\right];$$

par suite les deux transformations associées A et $\bar{\mathrm{A}}$ ont même borne

$$\mathrm{M_A} = \mathrm{M_{\bar{A}}}.$$

Terminons en indiquant les principales opérations qu'on peut effectuer sur les transformations linéaires. On définit sans difficulté la somme de deux transformations linéaires, et le produit d'une transformation linéaire par une constante. A et B étant deux transformations linéaires et α et β deux constantes, la transformation

$$\mathrm{C} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B}$$

est définie par

$$\mathrm{C}[f] = \alpha\,\mathrm{A}[f] + \beta\,\mathrm{B}[f].$$

Si σ_i et θ_i sont les systèmes L déterminant A et B relativement à un certain système coordonné, le système L déterminant C est

$$\rho_i = \alpha\sigma_i + \beta\theta_i.$$

On a de plus

$$\bar{\mathrm{C}} = \alpha\bar{\mathrm{A}} + \beta\bar{\mathrm{B}}.$$

On dit qu'une transformation A est symétrique quand elle est identique à son associée, c'est le cas de la transformation $\mathrm{A} + \bar{\mathrm{A}}$, A étant quelconque. On dit qu'une transformation est symétrique gauche quand elle est opposée à son associée, c'est le cas de la transformation $\mathrm{A} - \bar{\mathrm{A}}$, A étant quelconque.

La forme normale d'une fonctionnelle quadratique

$$[f.A[f]]$$

sera donc

$$[f.S[f]],$$

S étant une transformation symétrique, à savoir

$$S = \frac{1}{2}(\bar{A} + A).$$

On constate sans peine que

$$M_{\alpha A} = |\alpha| M_A,$$

α étant une constante, et que

$$M_{A+B} \leqq M_A + M_B,$$

d'après la définition de M_A et en tenant compte d'une inégalité classique.

Le produit $C = AB$ de deux transformations linéaires $A[f]$ et $B[f]$ prises dans cet ordre se définit de la manière suivante :

$$k = C[f] = B[g] \qquad \text{avec} \qquad g = A[f].$$

Il sera en général différent du produit BA. Si $AB = BA$ on dit que les deux transformations A et B sont permutables.

La transformation associée de C est $\bar{C} = \bar{B}\bar{A}$.

Soient φ_i le système orthogonal, normal, complet des fonctions coordonnées, et σ_i le système L qui définit la transformation B. Le système L qui définit la transformation C est alors

$$\rho_i = \bar{C}[\varphi_i] = \bar{A}\big[\bar{B}[\varphi_i]\big] = \bar{A}[\sigma_i].$$

On retrouve ici le fait qu'une transformation linéaire telle que A ou B transforme un système L quelconque en un autre système L.

Signalons enfin que la suite des fonctions

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_n, \quad \ldots$$

formant un système L, est une suite faiblement convergente vers la fonction o, car quelle que soit f, la série

$$\sum_i [f.\sigma_i]^2$$

converge, et par suite $[f.\sigma_i]$ tend vers zéro. C'est là une condition nécessaire, mais non suffisante, pour qu'une suite de fonctions forme un système L.

CHAPITRE III.

SUITES ET SÉRIES DE TRANSFORMATIONS LINÉAIRES.

6. Convergence faible d'une suite de transformations. — On dit qu'une suite de transformations linéaires

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_i, \quad \ldots$$

converge faiblement, si, quelle que soit la fonction f, la suite

$$g_i = A_i[f]$$

est une suite faiblement convergente. Soit

$$g = A[f]$$

la limite faible de la suite g_i. Introduisant le système coordonné, orthogonal, normal et complet φ_i,

$$\big[\varphi_j . A_i[f]\big]$$

tend vers

$$\big[\varphi_j . A[f]\big].$$

Mais si l'on désigne par σ_i^j le système L définissant A_i, on voit que, quelle que soit f,

$$[\sigma_i^j, f] = \big[\varphi_j . A_i[f]\big]$$

a une limite quand i devient infini, donc la suite

$$\sigma_1^j, \quad \sigma_2^j, \quad \sigma_3^j, \quad \ldots, \quad \sigma_i^j, \quad \ldots$$

converge faiblement vers une fonction σ_j, et l'on a

$$\big[\varphi_j . A[f]\big] = [f . \sigma_j],$$

ce qui prouve que σ_j est un système L, et qui montre que $A[f]$ est une transformation linéaire fortement continue, définie par ce système L. Nous dirons que les A_i convergent faiblement vers A.

Il est facile de constater que, si une suite de transformations linéaires A_i converge faiblement, ces transformations sont bornées dans leur ensemble, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif M tel que l'on ait

$$\left[(A_i[f])^2\right] \leqq M^2[f^2]$$

quelle que soit f et quel que soit i. En effet, dans le cas contraire, étant donnée une fonction f de norme unité, on pourrait tirer de la suite A_i une suite partielle

$$A_{i_1}, \quad A_{i_2}, \quad \ldots, \quad A_{i_n}, \quad \ldots,$$

telle que les fonctions

$$g_{i_1} = A_{i_1}[f], \quad \ldots, \quad g_{i_n} = A_{i_n}[f], \quad \ldots$$

aient des normes croissant indéfiniment; ce qui est impossible puisque la suite g_{i_n} doit converger faiblement.

On peut montrer inversement qu'il existe un principe de Bolzano-Weierstrass pour la convergence faible des transformations linéaires, c'est-à-dire que si les transformations d'une suite

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n, \quad \ldots$$

sont bornées dans leur ensemble, on peut tirer de cette suite une suite partielle de transformations convergeant faiblement. Il existe en effet un nombre positif M tel que l'on ait, quel que soit i et quelle que soit f,

$$\left[(A_i[f])^2\right] \leqq M^2[f^2], \qquad \left[(\bar{A}_i[f]^2)^2\right] \leqq M^2[f^2];$$

en particulier, si σ_i^j est le système L qui définit A_i, on a

$$\sigma^j = \bar{A}_i[\varphi_j]$$

et

$$[(\sigma_i^j)^2] \leqq M^2.$$

Les fonctions de la suite

$$\sigma_1^1, \quad \sigma_2^1, \quad \sigma_3^1, \quad \ldots, \quad \sigma_i^1, \quad \ldots$$

sont donc bornées en normes, et l'on peut tirer de cette suite une suite partielle

$$\sigma^1_{i_1},\quad \sigma^1_{i_2},\quad \sigma^1_{i_3},\quad \ldots,\quad \sigma^1_{i_n},\quad \ldots$$

faiblement convergente; de la même manière, on peut tirer de la suite

$$\sigma^2_{i_1},\quad \sigma^2_{i_2},\quad \sigma^2_{i_3},\quad \ldots,\quad \sigma^2_{i_n},\quad \ldots$$

une suite partielle

$$\sigma^2_{i'_1},\quad \sigma^2_{i'_2},\quad \sigma^2_{i'_3},\quad \ldots,\quad \sigma^2_{i'_n},\quad \ldots,$$

faiblement convergente; et ainsi de suite, le procédé diagonal s'applique sans difficulté et la suite

$$\sigma^j_{i_1},\quad \sigma^j_{i'_2},\quad \sigma^j_{i''_3},\quad \ldots,\quad \sigma^j_{i_n^{(n-1)}},$$

converge faiblement quel que soit j. Désignons par σ_j sa limite faible, on a

$$\sum_{j=1}^{p}\left[f.\sigma^j_{i_n^{(n-1)}}\right]^2 < \sum_{j=1}^{\infty}\left[f.\sigma^j_{i_n^{(n-1)}}\right]^2 = \left[(A_{i_n^{(n-1)}}[f])^2\right] \leqq M^2[f^2];$$

puis faisant n infini

$$\sum_{j=1}^{p}[f.\sigma_j]^2 \leqq M^2[f^2].$$

Ceci ayant lieu quelle que soit f et aussi grand que soit p, on voit que la suite

$$\sigma_1,\quad \sigma_2,\quad \ldots,\quad \sigma_n,\quad \ldots$$

est un système L qui définit une transformation linéaire continue A, on a de plus, quelle que soit f,

$$\left[(A[f])^2\right] \leqq M^2[f^2].$$

On constate ensuite sans peine que la suite de transformations

$$A_{i_1},\quad A_{i'_2},\quad A_{i''_3},\quad \ldots,\quad A_{i_n^{(n-1)}},\quad \ldots$$

converge faiblement vers A. Montrons en effet que, quelle que soit f, la suite de fonctions

$$g_n = A_{i_n^{(n-1)}}[f]$$

converge faiblement vers $A[f]$. Le produit scalaire

$$[g_n.\varphi_j] = \left[f.\sigma^j_{i_n^{(n-1)}}\right].$$

tend vers $[f.\sigma_j]$, puisque la suite

$$\sigma^j_{i_1},\quad \sigma^j_{i'_2},\quad \ldots,\quad \sigma^j_{i^{(n-1)}_n}$$

converge faiblement vers σ_j. On montre alors, comme au paragraphe 3, que la suite g_n converge faiblement vers la fonction g définie par

$$[g.\varphi_j] = [f.\sigma_j],$$

c'est-à-dire vers $A[f]$.

7. Suite de transformations linéaires uniformément convergentes [25]. — On dit qu'une suite de transformations A_n tend uniformément vers une substitution A quand la borne M_{A-A_n} de la substitution $A - A_n$ tend vers zéro. f désignant alors une fonction quelconque, on a

$$\left[(A[f] - A_n[f])^2\right] \leqq M^2_{A-A_n}[f^2]$$

et $A_n[f]$ tend fortement vers $A[f]$. Par conséquent A_n tend aussi vers A faiblement. Bien plus, les $A_n[f]$ tendent *fortement* vers $A[f]$, et même *uniformément*, si les f restent intérieures à un domaine borné de l'espace E_ω, c'est-à-dire restent bornées en normes dans leur ensemble.

La condition nécessaire et suffisante pour que les A_n convergent uniformément est que

$$M_{A_{n+p}-A_n}$$

puisse être rendue aussi petite qu'on le veut, en prenant n assez grand et p positif. C'est bien nécessaire car

$$M_{A_{n+p}-A_n} \leqq M_{A-A_n} + M_{A-A_{n+p}}.$$

Cette condition est aussi suffisante. En effet, l'inégalité

$$\left[(\sigma^j_{n+p} - \sigma^j_n)^2\right] = \left[(\bar{A}_{n+p}[\varphi_j] - \bar{A}_n[\varphi_j])^2\right] \leqq M^2_{\bar{A}_{n+p}-\bar{A}_n}$$

montre, en désignant par σ^j_n le système L définissant A_n, que la suite σ^j_n tend fortement vers une fonction σ_j; et l'inégalité

$$|\, M_{A_{n+p}} - M_{A_n} \,| < M_{A_{n+p}-A_n}$$

prouve que les M_{A_n} ont une limite déterminée pour n infini. Il en résulte que les A_n sont bornées dans leur ensemble, et à cause de

$$\sum_{=1}^{\infty} [f.\sigma^j_n]^2 \leqq M^2_{\bar{A}_n}[f^2]$$

que le système σ_j est un système L. Il définit donc une transformation linéaire A qui est la limite faible des transformations A_n. Cela étant, l'indice n étant fixé, la transformation $A_{n+p} - A_n$ tend faiblement vers $A - A_n$, et si l'on prend n assez grand pour que

$$M_{A_{n+p}-A_n} < \varepsilon,$$

on aura

$$M_{A-A_n} < \varepsilon,$$

ce qui prouve que la condition est suffisante.

Indiquons maintenant un théorème important : Si A_n et B_n tendent uniformément vers A et B, la suite des transformations produit $A_n B_n$ tend uniformément vers AB.

On a en effet

$$M_{AB-A_nB_n} = M_{A(B-B_n)+(A-A_n)B_n} \leqq M_{A(B-B_n)} + M_{(A-A_n)B} < M_A M_{B-B_n} + M_{A-A_n} M_B,$$

et comme M_{A-A_n} et M_{B-B_n} tendent vers zéro, il en sera de même de

$$M_{AB-A_nB_n},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème n'est pas exact pour la convergence faible, et il est aisé d'en donner des exemples, mais il y a encore un cas très important, où l'on peut affirmer que $A_n B_n \rightarrow AB$, c'est celui de la convergence forte des transformations linéaires. Cette convergence est l'intermédiaire entre la convergence faible et la convergence uniforme. On dit qu'une suite de transformations A_n converge fortement vers la transformation A, quand, quelle que soit f, la suite de fonctions $g_n = A_n[f]$ converge fortement vers $g = A[f]$. La considération des fonctionnelles bilinéaires $[f_1 . A_n[f]]$ montre que $\overline{A}_n$ converge fortement vers $\overline{A}$. Il en résulte que, si σ_n^j est le système définissant A_n, et σ_j le système L définissant A, σ_n^j tend fortement vers σ_j. Il est à peine besoin d'ajouter que la convergence faible comprend comme cas particulier la convergence forte. Montrons maintenant que A_n et B_n tendant fortement vers A et B, $A_n B_n$ tend fortement vers AB. Il suffit de montrer que $AB - A_n B_n$ tend fortement vers la transformation (o). Or

$$AB - A_n B_n = A(B - B_n) + (A - A_n) B_n.$$

Soit f une fonction quelconque, et

$$g = A[f], \qquad g_n = A_n[f];$$

on a

$$\{A(B - B_n)\}[f] = B[g] - B_n[g],$$

qui tend fortement vers zéro puisque B_n tend fortement vers B.

De même

$$\{(A - A_n)B_n\}[f] = B_n[g] - B_n[g_n].$$

et $g - g_n$ tendant fortement vers zéro, il en sera de même de

$$B_n[g] - B_n[g_n],$$

car les B_n sont bornées dans leur ensemble. Finalement, quelle que soit f,

$$\{AB - A_nB_n\}[f]$$

tend fortement vers zéro; et le théorème est démontré.

8. **Application à l'inversion des transformations linéaires.** — Nous désignerons par E la transformation linéaire identique. Relativement à un système coordonné, orthogonal, normal et complet quelconque, φ_i, la transformation E est définie par le système L

$$\sigma_i = \varphi_i.$$

Étant donnée la transformation linéaire continue A, le problème se pose de déterminer, si elle existe, la transformation inverse A^{-1} telle que l'on ait

$$E = AA^{-1} = A^{-1}A.$$

Il est facile de constater, quand A^{-1} existe, que ces deux conditions sont équivalentes, et qu'une seule suffit pour déterminer A^{-1}.

On a de même

$$\overline{E} = E = \overline{A^{-1}}.\overline{A} = \overline{A}\,\overline{A^{-1}},$$

ce qui prouve que si A^{-1} existe, l'inverse de $\overline{A}$ existe aussi et n'est autre que l'associée de A^{-1}.

Soit φ_i le système des fonctions coordonnées, et désignons par σ_i le système L définissant A relativement à ce système. Supposons que A^{-1} existe, on a

$$\left[\sigma_i . A^{-1}[\varphi_j]\right] = \left[\overline{A}[\varphi_i].A^{-1}[\varphi_j]\right] = \left[\varphi_i.(A^{-1}A)[\varphi_j]\right] = [\varphi_i.\varphi_j] = \varepsilon_{ij}.$$

avec

$$\varepsilon_{ii} = 1, \quad \varepsilon_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Le système σ_i est donc biorthogonalisable par le système

$$\psi_i = A^{-1}[\varphi_i],$$

lequel est un système L. Inversement, A étant une transformation continue quelconque, supposons que son système L, σ_i, soit biorthogonalisable par un autre système L, ψ_i,

$$[\sigma_i . \psi_j] = \varepsilon_{ij}$$

et soit B la transformation linéaire continue définie par ce système L (relativement au même système coordonné). On a

$$[\sigma_i . \psi_j] = \left[\bar{A}[\varphi_i] . \bar{B}[\varphi_j]\right] = \left[\varphi_i . (\bar{B}A)[\varphi_j]\right] = \varepsilon_{ij}$$

le système des fonctions

$$(\bar{B}A)[\varphi_i]$$

biorthogonalise donc le système orthogonal, normal et complet φ_i; ce qui ne peut avoir lieu que si

$$(\bar{B}A)[\varphi_i] = \varphi_i,$$

et il résulte aisément de là que $\bar{B}A$ se réduit à la transformation identique. A^{-1} existe donc et n'est autre que $\bar{B}$.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse inverser la transformation A, *est que son système* L *soit biorthogonalisable par un autre système* L.

On a donné d'autres conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse inverser une transformation continue A. Nous ne pouvons ici que renvoyer aux mémoires originaux [25-28].

Il est particulièrement instructif d'étudier la transformation inverse de

$$E - \lambda A,$$

A étant une transformation continue quelconque, et λ un paramètre variable, lorsque cette transformation inverse existe. Il y a évidemment deux catégories de valeurs de λ, celles pour lesquelles

$$(E - \lambda A)^{-1}$$

existe, ce sont les valeurs ordinaires; et celles pour lesquelles

$$(E - \lambda A)^{-1}$$

n'existe pas, ce sont les valeurs singulières. $\lambda = 0$ est évidemment une valeur ordinaire. On peut se demander alors, si, par continuité, $E - \lambda A$ n'est pas résoluble pour des valeurs de λ suffisamment petites en modules. La réponse est affirmative.

Hilb [13], le premier, a considéré la série de transformations linéaires

$$S = E + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \lambda^3 A^3 + \ldots + \lambda^n A^n + \ldots$$

qui vérifie formellement la relation

$$(E - \lambda A) S = E$$

comme on le constate sans peine. Examinons dans quels cas cette série a un sens. Soit M_A la borne de la transformation continue A, et posons

$$S_n = E + \lambda A + \ldots + \lambda^n A^n.$$

La borne de la transformation $\lambda^n A^n$ est certainement inférieure à $|\lambda|^n (M_A)^n$, et par suite

$$M_{S_{n+p}-S_n} \leqq |\lambda|^{(n+1)} (M_A)^{n+1} + |\lambda|^{(n+2)} (M_A)^{n+2} + \ldots + |\lambda|^{(n+p)} (M_A)^{n+p}.$$

Il apparaît que pour

$$\lambda | < \frac{1}{M_A}$$

$M_{S_{n+p}-S_n}$ peut être rendue aussi petite qu'on le veut. Donc la transformation S_n converge uniformément vers une transformation S qui est la somme de la série de Hilb, pour ces valeurs de λ. On constate de plus que

$$(E - \lambda A) S_n = E - \lambda^{n+1} A^{n+1}.$$

La transformation $\lambda^{n+1} A^{n+1}$ converge uniformément vers la transformation o, quand $|\lambda| < \frac{1}{M_A}$, donc $E - \lambda^{n+1} A^{n+1}$ converge uniformément vers la transformation identique. D'autre part $(E - \lambda A) S_n$ converge uniformément vers $(E - \lambda A) S$, on a donc

$$(E - \lambda A) S = E,$$

et pour ces valeurs de λ, $(E - \lambda A)^{-1}$ existe et est la somme de la série uniformément convergente de Hilb.

Les transformations A^n, puissances successives entières positives de A, qui figurent dans cette série, s'appellent les transformations itérées de A.

Pour les valeurs ordinaires de λ, on pose

$$(E - \lambda A)^{-1} = E + \lambda A_\lambda,$$

A_λ est la *résolvante* de A. Pour λ assez petit en module on a

$$A_\lambda = A + \lambda A^2 + \lambda^2 A^3 + \ldots + \lambda^n A^{n+1} + \ldots$$

et par continuité

$$A_0 = A.$$

Nous allons indiquer les principales propriétés de la résolvante A_λ, dans le domaine des valeurs ordinaires de λ. Pour deux telles valeurs λ et μ, on a

$$E - \lambda A = (E + \lambda A_\lambda)^{-1}, \qquad E - \mu A = (E + \mu A_\mu)^{-1}$$

et par soustraction

$$(\mu - \lambda) E = \mu (E + \lambda A_\lambda)^{-1} - \lambda (E + \mu A_\mu)^{-1}.$$

Une combinaison évidente donne ensuite

$$(\mu - \lambda)(E + \lambda A_\lambda)(E + \mu A_\mu) = \mu(E + \mu A_\mu) - \lambda(E + \lambda A_\lambda)$$

et en simplifiant

$$\lambda\mu[A_\lambda - A_\mu + (\mu - \lambda) A_\lambda A_\mu] = 0.$$

Si $\lambda\mu$ est différent de zéro, on en tire

$$A_\lambda - A_\mu + (\mu - \lambda) A_\lambda A_\mu = 0, \tag{1}$$

et cette relation s'étend facilement au cas où $\lambda\mu$ est nul. En permutant λ et μ, on constate que

$$A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda;$$

A_λ et A_μ sont donc des transformations permutables.

Il résulte de l'équation (1) que A_λ est, d'une certaine manière, une fonction continue de λ. Plus précisément, si une suite de valeurs ordinaires

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

converge vers λ, et si les M_λ restent bornées dans leur ensemble,

λ est aussi une valeur ordinaire. On a, en effet d'après (1),

$$M_{A_{\lambda_m}-A_{\lambda_n}} \leqq |\lambda_m - \lambda_n| M_{A_{\lambda_m}} M_{A_{\lambda_n}} \leqq |\lambda_m - \lambda_n| M^2,$$

puisque

$$M_{A_{\lambda_n}} \leqq M$$

et $M_{A_{\lambda_m - \lambda_n}}$ peut être rendue aussi petite que l'on veut. A_{λ_n} tend donc uniformément vers une substitution B. $E + \lambda_n A_{\lambda_n}$ tend uniformément vers $E + \lambda B$; $(E - \lambda_n A)(E + \lambda_n A_{\lambda_n})$ ainsi que $(E + \lambda_n A_{\lambda_n})(E - \lambda_n A)$ tendent uniformément vers $(E - \lambda A)(E + \lambda B)$ et $(E + \lambda B)(E - \lambda A)$, les termes de ces deux dernières suites étant tous égaux à E, on voit que $E + \lambda B$ sera l'inverse de $E - \lambda A$.

Enfin on peut montrer que M_{A_λ} est fonction continue de λ car

$$|M_{A_\lambda} - M_{A_\mu}| \leqq |\lambda - \mu| M_{A_\lambda} M_{A_\mu},$$

on en déduit, si $M_{A_\lambda} \neq 0$, $M_{A_\mu} \neq 0$,

$$\left| \frac{1}{M_{A_\lambda}} - \frac{1}{M_{A_\mu}} \right| \leqq |\lambda - \mu|,$$

ce qui prouve que $\frac{1}{M_{A_\lambda}}$, et M_{A_λ} sont des fonctions continues de λ. D'ailleurs l'hypothèse faite : $M_{A_\lambda} \neq 0$, $M_{A_\mu} \neq 0$, revient à $A_\lambda \neq 0$, $A_\mu \neq 0$; et cela est bien réalisé, car $A_\lambda = 0$ équivaut à $A = 0$, d'après (1)

$$A = A_\lambda - \lambda A A_\lambda.$$

Nous allons montrer maintenant que l'ensemble des valeurs ordinaires de λ, est un ensemble ouvert, c'est-à-dire que si λ est ordinaire, et $|\mu - \lambda|$ suffisamment petit

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{M_{A_\lambda}},$$

μ est aussi ordinaire. En effet, d'après les propriétés de A_λ, on peut écrire

$$\begin{aligned} E - \mu A &= E - \lambda A - (\mu - \lambda) A \\ &= E - \lambda A - (\mu - \lambda)[E - \lambda A][E + \lambda A_\lambda] A \\ &= E - \lambda A - (\mu - \lambda)[E - \lambda A] A_\lambda \\ &= [E - \lambda A][E - (\mu - \lambda) A_\lambda]. \end{aligned}$$

Sur cette forme de $E - \mu A$ on constate que le premier facteur $E - \lambda A$

a une réciproque, par hypothèse, et qu'il en est de même du second, d'après ce qui a été supposé sur $|\mu - \lambda|$, et le raisonnement fait à propos de la série de Hilb. $[E - \mu A]^{-1}$ existe donc et a pour valeur

$$\begin{aligned}[E - \mu A]^{-1} = E + \mu A_\mu &= [E - (\mu - \lambda) A_\lambda]^{-1} [E - \lambda A]^{-1} \\ &= [E - (\mu - \lambda) A_\lambda]^{-1} [E + \lambda A_\lambda].\end{aligned}$$

On peut appliquer la série de Hilb à $[E - (\mu - \lambda) A_\lambda]^{-1}$, ce qui donne

$$[E - (\mu - \lambda) A_\lambda]^{-1} = E + (\mu - \lambda) A_\lambda + (\mu - \lambda)^2 A_\lambda^2 + \ldots + (\mu - \lambda)^n A_\lambda^n + \ldots$$

et par multiplication

$$\begin{aligned}E + \mu A_\mu = E &+ \mu A_\lambda + \mu(\mu - \lambda) A_\lambda^2 \\ &+ \mu(\mu - \lambda)^2 A_\lambda^3 + \ldots + \mu(\mu - \lambda)^n A_\lambda^{n+1} + \ldots,\end{aligned}$$

finalement

$$A_\mu = A_\lambda + (\mu - \lambda) A_\lambda^2 + (\mu - \lambda)^2 A_\lambda^3 + \ldots + (\mu - \lambda)^n A_\lambda^{n+1} + \ldots$$

ou plus symétriquement

$$A_{\lambda+\mu} = A_\lambda + \mu A_\lambda^2 + \mu^2 A_\lambda^3 + \ldots + \mu^n A_\lambda^{n+1} + \ldots. \tag{2}$$

A_λ, considérée comme fonction de λ, admet donc comme dérivées successives

$$1!\, A_\lambda^2, \quad 2!\, A_\lambda^3, \quad \ldots, \quad n!\, A_\lambda^{n+1}, \quad \ldots.$$

Succinctement, on peut dire que, pour λ ordinaire, A_λ est une fonction holomorphe de λ. Cette remarque a conduit certains auteurs [25] à considérer A_λ comme une fonction analytique de λ, et à lui appliquer tout l'appareil de Cauchy. Par exemple on définit les résidus de A_λ comme étant les transformations

$$A^{(k)} = \frac{-1}{2\pi i} \int_C \lambda^{-k} A_\lambda \, d\lambda,$$

où k est un entier quelconque et où la courbe C ne passe que par des valeurs ordinaires de λ. Nous ne pouvons que mentionner ces recherches grâce auxquelles il est possible de préciser la structure de l'ensemble singulier de A_λ, considérée comme une fonction analytique, et aussi les propriétés de $E - \lambda A$ pour ces valeurs singulières.

Nous nous bornerons ici à indiquer un cas particulier important, celui où A est une transformation complètement continue.

9. **Les transformations linéaires complètement continues.** — Une transformation continue A quelconque est faiblement continue, c'est-à-dire qu'elle transforme une suite de fonctions f_n faiblement convergente, en une suite $g_n = A[f_n]$ qui est aussi faiblement convergente; elle est fortement continue, c'est-à-dire qu'elle transforme une suite f_n fortement convergente, en une suite $g_n = A[f_n]$ qui est aussi fortement convergente. On dit que A est complètement continue si elle transforme toute suite f_n, faiblement convergente en une suite $g_n = A[f_n]$, *toujours* fortement convergente.

La fonctionnelle bilinéaire

$$\big[f_1.A[f]\big] = \big[f.\bar{A}[f_1]\big]$$

est dite alors complètement continue. Sa considération montre que la transformation $\bar{A}$ est aussi complètement continue. φ_i désignant comme de coutume le système orthogonal, normal, complet des fonctions coordonnées, le système L, définissant A relativement à φ_i, est

$$\sigma_i = \bar{A}[\varphi_i].$$

Or la suite φ_i converge faiblement vers zéro. A étant complètement continue, on voit que la suite σ_i converge fortement vers zéro. Pour que A soit complètement continue, il est donc nécessaire que tout système L, définissant A, forme une suite de fonctions convergeant fortement vers zéro. On démontre que cette condition est suffisante.

Notons encore le fait suivant. A étant une transformation complètement continue, et B une transformation linéaire continue quelconque, AB est complètement continue, ainsi que BA. La démonstration est immédiate.

L'intérêt principal des substitutions complètement continues réside dans le théorème suivant. A étant complètement continue et λ étant une valeur ordinaire au sens précité plus haut, si l'on pose

$$(E - \lambda A)^{-1} = E + \lambda A_\lambda,$$

A_λ, considérée comme fonction analytique de λ, est indéfiniment méromorphe. L'ensemble singulier de A_λ se compose donc d'une infinité dénombrable de points isolés.

Nous ne pouvons qu'indiquer, ici, le principe de la démonstration.

Soit σ_i le système L définissant la transformation complètement continue A. Soit A_n une transformation ayant pour système L, relativement aux mêmes fonctions coordonnées, la suite

$$\begin{aligned} \sigma_i^n &= \sigma_i \qquad \text{pour } i \leqq n, \\ \sigma_i^n &= 0 \qquad \text{pour } i > n \end{aligned}$$

et R_n une autre transformation ayant pour système L

$$\begin{aligned} \sigma_i^n &= 0 \qquad \text{pour } i \leqq n, \\ \sigma_i^n &= \sigma_i \qquad \text{pour } i > n. \end{aligned}$$

On a

$$A = A_n + R_n;$$

de plus, A étant complètement continue, M_{R_n} tend vers zéro. En effet

$$M_{R_n} \leqq \mathfrak{M}_n,$$

en désignant par $\mathfrak{M}_n$ la borne supérieure des normes des fonctions σ_i, pour $i > n$. Or σ_i tend fortement vers zéro, donc $[\sigma_i^2]$ ainsi que $\mathfrak{M}_n$ et M_{R_n} tendent vers zéro. Il sera donc possible, étant donné un nombre positif r quelconque, de choisir n suffisamment grand pour que

$$(E - \lambda R_n)^{-1} = E + \lambda R_{n\lambda}$$

existe et soit donnée par la série de Hilb, pour $|\lambda| < r$.

D'autre part, on constate sans peine que l'inversion de la transformation

$$E - \lambda A_n$$

revient à la résolution d'un système fini de n équations linéaires à n inconnues, de sorte que $A_{n\lambda}$ définie par

$$(E - \lambda A_n)^{-1} = E + \lambda A_{n\lambda}$$

est une fonction rationnelle de λ à n pôles. Dès lors une décomposition convenable de $(E - \lambda A)^{-1}$ en fonction de A_n, R_n, $A_{n\lambda}$, $R_{n\lambda}$, permet d'affirmer que A_λ n'a comme singularités qu'un nombre fini de pôles dans la région du plan complexe des λ définie par $|\lambda| < r$, et cela aussi grand que soit r.

CHAPITRE IV.

LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS LINÉAIRES.

10. **Les groupes fonctionnels.** — La notion de groupe s'étend sans difficulté aux espaces fonctionnels, et cette extension peut se faire de bien des manières. On sait que dans la théorie des groupes, on constate rapidement que les propriétés les plus essentielles d'un groupe ne dépendent nullement de la nature de l'élément analytique sur lequel opèrent les transformations du groupe. Ce qui au contraire joue un rôle fondamental, c'est la nature géométrique, le nombre des dimensions de ce qu'on a appelé l'espace du groupe, c'est-à-dire l'espace abstrait ayant pour éléments les diverses transformations du groupe. Cette remarque nous prouve que tant qu'on se bornera à considérer les groupes fonctionnels — c'est-à-dire opérant dans des espaces fonctionnels — qui n'ont qu'un nombre fini de paramètres, on n'obtiendra rien d'essentiellement nouveau. Ces groupes seront très analogues aux groupes de Lie. Il est au contraire très indiqué d'étudier les groupes ayant pour espace de groupe des espaces fonctionnels, c'est-à-dire des espaces de complexité variable ayant une infinité de dimensions. Il sera d'ailleurs utile de faire opérer ces groupes dans des espaces fonctionnels, et c'est souvent dans cette condition qu'ils se présenteront le plus naturellement. En particulier on tirera avantage de l'analogie entre certains groupes fonctionnels et certains groupes à un nombre fini de paramètres opérant dans un espace à un nombre fini de dimensions.

Disons tout de suite qu'une première difficulté se présente, laquelle tient en somme à ce que le sujet ainsi défini est trop vaste.

Dans le cas simple des groupes finis, c'est le nombre des paramètres qui définit l'étendue du groupe. Au contraire dans le cas des groupes à une infinité de paramètres, bien des hypothèses sont possibles. On peut concevoir par exemple des groupes dont la transformation générale dépend d'une fonction arbitraire d'un argument et d'un nombre fini r de paramètres numériques. On pourra dire qu'un tel groupe dépend de $\omega + r$ paramètres, en désignant par ω le premier nombre transfini. Mais on peut imaginer aussi des groupes dont la transformation générale dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments, d'un nombre fini s de fonctions arbitraires d'un seul argument, et d'un nombre fini r de paramètres numériques. On dira qu'un tel groupe dépend de $\omega^2 + s\omega + r$ paramètres. On peut continuer ainsi en suivant les degrés successifs de la classification cantorienne des nombres transfinis.

Il serait évidemment prématuré de faire une théorie générale de tous ces types de groupes, d'autant qu'une telle théorie ne serait qu'une forme vide étant donné le petit nombre de groupes fonctionnels à une infinité de paramètres effectivement connus.

Le premier exemple de groupes de cette nature a été donné, sauf erreur, par M. Pérès [23-31]. C'est le groupe des transformations conservant la composition, qui joue un rôle important dans la théorie des noyaux permutables de première espèce de M. Volterra.

Il paraît donc beaucoup plus indiqué de chercher d'abord à former des exemples variés de groupes fonctionnels, et d'examiner si ces groupes ont en quelques manières des propriétés voisines de celles des groupes finis. C'est ce à quoi nous nous bornerons ici.

11. Les groupes de transformations linéaires fonctionnelles. — Il résulte des travaux de Lie, Engel, Killing et M. Cartan [1-6-15-21] que les quatre grands types de groupes simples finis continus se rencontrent parmi les sous-groupes du groupe linéaire à n variables et n^2 paramètres le plus général. La considération du groupe paramétrique d'un groupe continu fini quelconque montre d'ailleurs qu'un tel groupe admet au moins un représentant linéaire. Pour ces raisons nous chercherons des exemples de groupes fonctionnels parmi les groupes de transformations linéaires fonctionnelles. Comme l'espace de Hilbert est, de tous les espaces fonctionnels, celui qui a les propriétés les plus voisines de celles de l'espace euclidien à n dimensions, espace dans lequel opèrent les transformations linéaires à n variables, nous chercherons ces exemples parmi les transformations linéaires opérant dans l'espace de Hilbert, transformations dont l'étude a fait l'objet des chapitres précédents.

Nous restreindrons même encore le sujet. En effet, dans la théorie des groupes continus finis, deux hypothèses jouent un rôle essentiel, ce sont les suivantes : le groupe contient la transformation identique, les transformations du groupe sont résolubles, du moins tant qu'elles restent dans le domaine de la transformation identique.

Pour cette raison nous mettrons les transformations des groupes linéaires considérés sous la forme

$$E + A$$

pour M_A suffisamment petit ces transformations seront résolubles; de plus, pour éviter toute difficulté due à la complexité de l'ensemble singulier de A_λ dans le cas général, et pour nous rapprocher le plus possible du cas des espaces à un nombre fini de dimensions, cas dans lequel A_λ est une fonction rationnelle de λ, nous supposerons que A est complètement continue. Dans ces conditions A_λ est indéfiniment méromorphe.

Il est facile de constater que les transformations de cette forme

$$E + A,$$

A étant complètement continue, forment un groupe. En effet le produit de $E + A$ par $E + B$ est

$$E + A + B + AB.$$

Or AB est complètement continue si A et B le sont, donc il en est de même de $A + B + AB$.

Le groupe formé par ces transformations jouera le rôle de groupe linéaire général. Une transformation de ce groupe $E + A$, sera en général résoluble, si -1 n'appartient pas à l'ensemble des pôles de A_λ. Nous considèrerons quelquefois un sous-groupe de ce groupe, sous-groupe qui n'est autre que le groupe de Fredholm.

Remarquons en effet que les transformations de Fredholm de première espèce, définies par la formule

$$z(s) = \int_0^1 K(st) f(t)\, dt,$$

sont des transformations complètement continues particulières. Nous supposons ici que le noyau $K(st)$ est de carré sommable relativement aux deux variables s et t prises séparément. Il en résulte que la théorie de Fredholm [10-11-16] s'applique à ces noyaux, leur premier noyau itéré étant borné, d'après la formule de Schwarz. De plus

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n, \quad \ldots$$

désignant un système orthogonal complet de fonctions coordonnées, le système L correspondant définissant la transformation considérée est donné par

$$\sigma_i(s) = \int_0^1 K(ts)\,\varphi_i(t)\,dt.$$

Les σ_i peuvent donc être considérés comme les coefficients de Fourier d'une fonction de deux variables de carré sommable. La série

$$\sum_i \sigma_i^2(s)$$

est donc convergente quel que soit s, par suite σ_i tend fortement vers zéro, et les transformations de Fredholm de première espèce sont complètement continues. Dès lors les transformations de Fredholm de seconde espèce, de la forme

$$g(s) = f(s) + \int_0^1 K(st)f(t)\,dt,$$

appartiennent au groupe linéaire général. Elles forment d'ailleurs un groupe, sous-groupe de celui-là, que nous appellerons le groupe de Fredholm.

12. Groupe linéaire invariant une forme quadratique fonctionnelle. — Parmi tous les sous-groupes du groupe linéaire à n variables, on sait qu'on doit distinguer particulièrement les groupes suivants :

1° Le groupe linéaire spécial à n^2-1 paramètres, qui invarie l'élément de volume de l'espace;

2° Les groupes invariant une forme quadratique à n variables, ils sont à $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres et ont deux types de structures, suivant que n est pair ou impair;

3° Les groupes invariant un complexe linéaire dans l'espace à n dimensions, ils sont à $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres.

Ces trois groupes donnent quatre types de structure très importants, car ce sont les quatre grands types de structure généraux. Un groupe simple continu fini quelconque est isomorphe à un groupe linéaire de l'une de ces quatre catégories, sauf un petit nombre de cas particuliers. Il paraît donc tout à fait indiqué d'examiner si ces groupes ont leurs correspondants dans le domaine fonctionnel.

Des recherches récentes [9-19-20] ont montré qu'il fallait renoncer à définir, dans les espaces fonctionnels un élément de volume ou de probabilité. Il y a donc peu de chances qu'un groupe analogue au groupe linéaire spécial subsiste dans l'espace de Hilbert. Nous commencerons donc tout de suite par examiner s'il existe des groupes de transformations linéaires fonctionnelles, invariant une forme quadratique fonctionnelle donnée [2-3-4-5].

Soit une fonctionnelle homogène quadratique continue dans l'espace de Hilbert

$$[f.\mathfrak{S}[f]];$$

$\mathfrak{S}[f]$ est une transformation linéaire continue et symétrique que nous supposons quelconque. Nous allons chercher les transformations linéaires invariant cette forme quadratique, soit $\mathcal{L}$ une telle transformation, on aura

$$\Big[\mathcal{L}[f].\mathfrak{S}\big[\mathcal{L}[f]\big]\Big] = [f.\mathfrak{S}[f]]$$

ou

$$[f.(\mathcal{L}.\mathfrak{S}\overline{\mathcal{L}})[f]] = [f.\mathfrak{S}[f]]$$

quelle que soit la fonction f, il est donc nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\mathcal{L}\mathfrak{S}\overline{\mathcal{L}} = \mathfrak{S};$$

mettons $\mathcal{L}$ sous la forme

$$\mathcal{L} = \mathrm{E} + \mathrm{A};$$

nous ne supposons pas pour le moment que A soit complètement continue, mais seulement que -1 ne soit pas une valeur singulière de la résolvante A_λ, nous aurons alors

$$(\mathrm{E} + \mathrm{A})\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathrm{E} + \overline{\mathrm{A}})^{-1}.$$

Notons d'abord que $\mathrm{E} + \lambda\mathrm{A}$ et son associée $\mathrm{E} + \lambda\overline{\mathrm{A}}$ étant résolubles en même temps, et ayant alors pour inverses deux transformations associées, $\overline{\mathrm{A}}$ a pour résolvante l'associée de A_λ; et A_λ et $\overline{\mathrm{A}}_\lambda$ ont même ensemble singulier. On peut donc écrire dans le cas actuel

$$(\mathrm{E} + \mathrm{A})\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathrm{E} - \overline{\mathrm{A}}_{-1}),$$

et en simplifiant

$$A\mathfrak{S} = -\mathfrak{S}\overline{A}_{-1},$$

puis pour λ quelconque

$$(E + \lambda A)\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(E - \lambda\overline{A}_{-1});$$

mais -1 étant une valeur ordinaire pour A_λ, il est toujours possible, puisque l'ensemble des valeurs ordinaires est ouvert, de prendre $\lambda - 1$ assez petit en module pour que $E + \lambda A$ et $E - \lambda\overline{A}_{-1}$ soient résolubles, on peut alors écrire

$$\mathfrak{S}(E - \lambda\overline{A}_{-1})^{-1} = (E + \lambda A)^{-1}\mathfrak{S};$$

or d'après la formule (2) du chapitre précédent, on a

$$(E - \lambda\overline{A}_{-1})^{-1} = E + \lambda\overline{A}_{\lambda-1};$$

donc, en simplifiant, il vient

$$\mathfrak{S}\overline{A}_{\lambda-1} = -A_{-\lambda}\mathfrak{S}.$$

Supposons encore que $\lambda = -\frac{1}{2}$ ne soit pas une valeur singulière de A_λ, faisant alors dans cette condition, $\lambda = \frac{1}{2}$, on a

$$\mathfrak{S}\overline{A}_{-\frac{1}{2}} + A_{-\frac{1}{2}}\mathfrak{S} = 0.$$

Or la transformation $\mathfrak{S}$ est symétrique, de sorte que $\mathfrak{S}\overline{A}_{-\frac{1}{2}}$ est l'associée de $A_{-\frac{1}{2}}\mathfrak{S}$; on peut donc traduire la relation obtenue en disant que $A_{-\frac{1}{2}}\mathfrak{S}$ doit être une transformation symétrique gauche. On constate sans peine que la condition est suffisante. Remarquant alors que si l'on pose

$$\alpha = A_{-\frac{1}{2}},$$

on a

$$A = A_0 = \alpha_{\frac{1}{2}};$$

on voit qu'on obtient le groupe cherché en prenant

$$\mathfrak{L} = E + \alpha_{\frac{1}{2}},$$

la transformation α étant telle que $\alpha\mathfrak{S}$ soit symétrique gauche, et que $\frac{1}{2}$ soit une valeur ordinaire de α_λ. En particulier, si la transformation $\mathfrak{S}$ est résoluble on a

$$\alpha = h\mathfrak{S}^{-1},$$

en désignant par h une transformation symétrique gauche.

Ajoutons enfin que si l'on suppose A complètement continue, il en est de même de A_λ, et de $A_\lambda \mathfrak{S}$ quelle que soit $\mathfrak{S}$, de sorte que la transformation symétrique gauche

$$h = \alpha\mathfrak{S} = A_{-\frac{1}{2}}\mathfrak{S}$$

doit alors être complètement continue.

On constate facilement que les transformations obtenues forment un groupe. Si en effet $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ satisfont aux conditions

$$\mathcal{L}\mathfrak{S}\overline{\mathcal{L}} = \mathfrak{S}, \qquad \mathcal{M}\mathfrak{S}\overline{\mathcal{M}} = \mathfrak{S},$$

il en est de même de $\mathcal{L}\mathcal{M}$, car

$$\mathcal{L}\mathcal{M}\mathfrak{S}\overline{\mathcal{M}}\,\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\mathfrak{S}\overline{\mathcal{L}} = \mathfrak{S}.$$

Supposons maintenant qu'au lieu de chercher en toute rigueur les transformations $\mathcal{L}$ invariant la forme quadratique $[f.\mathfrak{S}[f]]$, on se borne à chercher les transformations

$$\mathcal{L} = E + A$$

invariant cette forme, en supposant que la transformation A soit infiniment voisine de la transformation o, c'est-à-dire que la borne M_A de cette transformation soit infiniment petite, de telle sorte que la transformation $A\overline{A}$ puisse être considérée comme négligeable. La condition

$$\mathcal{L}\mathfrak{S}\overline{\mathcal{L}} = \mathfrak{S}$$

donne alors

$$\mathfrak{S} + A\mathfrak{S} + \mathfrak{S}\overline{A} + A\mathfrak{S}\overline{A} = \mathfrak{S}.$$

et en négligeant $A\mathfrak{S}\overline{A}$

$$A\mathfrak{S} + \mathfrak{S}\overline{A} = o;$$

on voit que $A\mathfrak{S}$ est symétrique gauche, A est donc une transformation α, et en prenant la résolvante de α pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on obtient les transformations A telles que $E + A$ invarient la forme quadratique considérée. Ceci prouve de plus que les transformations $E + \alpha$ peuvent être considérées comme les transformations du groupe infiniment voisines de la transformation identique. La transformation

$$g = \alpha[f]$$

est donc une transformation infinitésimale du groupe, au sens habituel.

Donnons maintenant quelques exemples intéressants [2-4].

Supposons d'abord que la transformation symétrique $\mathfrak{S}$ se réduise à la transformation identique; la forme quadratique $[f \,.\, \mathfrak{S}[f]]$ devient alors le carré de la norme de la fonction f. Les transformations linéaires et homogènes invariant cette norme, sont donc des rotations invariant l'origine, dans l'espace de Hilbert. Elles méritent donc le nom de « rotations fonctionnelles » et invarient les distances et les angles. Dans ce cas très simple, la transformation α est une transformation symétrique gauche quelconque, et l'on obtient les rotations fonctionnelles de la forme $E + A$ en prenant pour A la résolvante $\alpha_{\frac{1}{2}}$ d'une transformation symétrique gauche. Remarquons que la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{L}$ soit rotation fonctionnelle est

$$(\mathcal{L}\overline{\mathcal{L}}) = E,$$

de sorte que $\overline{\mathcal{L}}$ est alors l'inverse de $\mathcal{L}$. Il est facile d'en déduire que le système L d'une rotation fonctionnelle est un système orthogonal, normal et complet. C'est nécessaire et suffisant. On peut, grâce à l'emploi des rotations fonctionnelles, définir d'une manière complète le groupe des déplacements dans l'espace de Hilbert. Ce groupe est naturellement appelé à jouer un grand rôle dans nombre de recherches de géométrie fonctionnelles. Il est possible, par exemple, de construire une théorie analogue à celle du trièdre mobile, et de chercher à en tirer parti dans certaines recherches de géométrie infinitésimale fonctionnelle.

Prenons maintenant deux transformations linéaires $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$ et supposons que l'on ait

$$\mathcal{L}\overline{\mathcal{L}} = \mathfrak{M}\overline{\mathfrak{M}},$$

et de plus que $\mathcal{L}$ soit résoluble. Posons, quelle que soit f,

$$g = \mathcal{L}[f], \qquad k = \mathfrak{M}[f],$$

on a

$$[g^2] = \left[f.(\mathcal{L}\overline{\mathcal{L}})[f]\right], \qquad [k^2] = \left[f.(\mathcal{M}\overline{\mathcal{M}})[f]\right]$$

et donc

$$[g^2] = [k^2].$$

Mais $\mathcal{L}$ étant supposée résoluble, g peut être considérée comme quelconque, f étant définie par

$$f = \mathcal{L}^{-1}[g].$$

et si l'on pose

$$\mathcal{N} = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M},$$

on a

$$k = \mathcal{N}[g],$$

et comme $[g^2] = [f^2]$ quelle que soit g, la transformation $\mathcal{N}$ est une rotation fonctionnelle. Il en résulte que si les transformations $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont telles que $\mathcal{L}\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{M}\overline{\mathcal{M}}$, on a

$$\mathcal{L} = \mathcal{M}\mathrm{R},$$

en désignant par R une rotation fonctionnelle, pourvu que l'une ou l'autre des transformations $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ soit résoluble.

Remarquons encore que quelle que soit la transformation $\mathcal{L}$, la forme quadratique qui correspond à la transformation symétrique $\mathcal{L}\overline{\mathcal{L}}$, est essentiellement positive; c'est bien clair puisque

$$\left[\mathcal{L}[f]\right]^2 = \left[f.(\mathcal{L}\overline{\mathcal{L}})[f]\right].$$

Ceci étant posé, considérons une forme quadratique de seconde espèce, du type de Fredholm,

$$\int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 \mathrm{S}(st)f(s)f(t)\,ds\,dt,$$

le noyau $\mathrm{S}(st)$ étant symétrique. Si -1 n'est pas une valeur singulière du noyau, cette forme n'est jamais nulle, quelle que soit f. Nous supposerons de plus qu'elle est définie positive. Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que les valeurs singulières du noyau $\mathcal{S}$ soient extérieures à l'intervalle $(0, -1)$, comme on le constate sans peine en calculant la valeur de la forme quadratique considérée pour les fonctions fondamentales du noyau $\mathcal{S}$. Cette condition est suffisante; on le montre en prouvant qu'il est alors possible de construire un noyau symétrique $\sigma(st)$, tel que l'on ait

$$2\sigma(st)+\int_0^1 \sigma(su)\sigma(ut)\,du = \mathrm{S}(st).$$

Cette condition revient à écrire que le carré de la norme de la fonction

$$g(s)=f(s)+\int_0^1 \sigma(st)f(t)\,dt$$

a pour valeur

$$[g^2]=\int_0^1 f^2(s)\,ds+\int_0^1\int_0^1 \mathrm{S}(st)f(s)f(t)\,ds\,dt.$$

On peut montrer [4] que, si cette condition est remplie, les deux noyaux $\mathfrak{S}$ et σ ont les mêmes fonctions fondamentales, et que les valeurs singulières λ du premier sont liées aux valeurs singulières μ du second par la relation

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{2}{\mu}+\frac{1}{\mu^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\mu}=-1\pm\sqrt{1+\frac{1}{\lambda}},$$

μ est certainement réelle puisque λ est extérieure à l'intervalle $(0,-1)$. En prenant alors pour les diverses valeurs de μ un nombre fini de signes — devant le radical, de telle sorte que la série $\sum\frac{1}{\mu_i^2}$ converge, comme la série $\sum\frac{1}{\lambda_i^2}$, on constate que le noyau σ est défini par un développement de Fourier convergeant fortement. Il y a une infinité dénombrable de noyaux σ possibles. La condition obtenue pour les valeurs singulières de $\mathfrak{S}$ est donc bien suffisante pour que ce noyau définisse une forme quadratique positive.

Si maintenant on considère un noyau quelconque $\mathrm{K}(st)$, et qu'on désigne par K la transformation du groupe de Fredholm admettant ce noyau, la forme quadratique

$$[f.(\mathrm{K}\bar{\mathrm{K}})[f]]$$

est définie positive. Elle est du type de Fredholm, et il est possible, d'après ce qui précède, de trouver un noyau symétrique $\sigma(st)$ tel que l'on ait

$$[f.(\sigma\bar{\sigma})[f]]=[f.(\mathrm{K}\bar{\mathrm{K}})[f]],$$

si le noyau $K(st)$ est résoluble, on aura donc

$$K = \sigma R,$$

où R est une rotation euclidienne qui appartient évidemment au groupe de Fredholm. Toute transformation de ce groupe, à noyau symétrique, peut être considérée comme une dilatation de l'espace fonctionnel, comme on s'en rend compte en examinant l'effet de cette transformation sur le système orthogonal complet de ses fonctions fondamentales. Le résultat précédent peut donc s'énoncer ainsi : Toute transformation du groupe de Fredholm peut, d'une infinité dénombrable de manières, être considérée comme le produit d'une dilatation fonctionnelle et d'une rotation fonctionnelle appartenant toutes deux au groupe.

Ce théorème s'étend d'ailleurs au groupe linéaire général.

Il n'est pas difficile, en partant des derniers résultats obtenus, de donner une définition directe du sous-groupe du groupe de Fredholm qui invarie la forme quadratique définie positive

$$\int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 S(st)f(s)f(t)\,ds\,dt.$$

Nous ne nous y attarderons pas, nous contentant de renvoyer le lecteur à d'autres travaux [4-5].

Il est possible aussi, en continuant à se laisser guider par l'analogie géométrique, de définir les groupes de la géométrie cayleyenne et de la géométrie conforme dans l'espace de Hilbert [5]. Des considérations tout à fait semblables à celles qui sont classiques dans cet ordre de questions, pour l'espace à n dimensions conduisent à rechercher les transformations linéaires invariant certaines formes quadratiques simples dans des espaces à $\omega + 1$ dimensions ou $\omega + 2$ dimensions, espaces obtenus en adjoignant à chaque fonction de carré sommable, représentée par un point de l'espace de Hilbert, une ou deux quantités numériques jouant le rôle de coordonnées supplémentaires. On obtient ainsi les transformations homographiques fonctionnelles invariant une hyperquadrique donnée, et les transformations circulaires dans l'espace de Hilbert. Nous ne pouvons insister davantage sur ces applications.

Nous allons maintenant, en nous plaçant uniquement dans le groupe de Fredholm, nous occuper des valeurs singulières et des fonctions fondamentales des noyaux des transformations invariant une forme quadratique fonctionnelle donnée. Bon nombre des résultats obtenus pourraient d'ailleurs s'étendre au cas des transformations appartenant au groupe linéaire général.

Soient donc une transformation symétrique continue quelconque, et la fonctionnelle quadratique correspondante

$$\left[f.\mathfrak{S}[f]\right].$$

Soit $E + A$ une transformation du groupe de Fredholm, invariant cette forme quadratique. A est une transformation de Fredholm de première espèce dont on désignera le noyau par $A(st)$. On a

$$A = \alpha_{\frac{1}{2}},$$

$\alpha_{\frac{1}{2}}$ est la résolvante de la transformation α pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et la transformation de première espèce α vérifie la condition que

$$\alpha\mathfrak{S}$$

soit symétrique gauche. Il est à remarquer que, quelle que soit la transformation continue $\mathfrak{S}$, la transformation $\alpha\mathfrak{S}$ est encore une transformation de Fredholm de première espèce. En effet soit σ_i le système L de $\mathfrak{S}$. On a vu que

$$\sum_i [\sigma_i.f]^2$$

converge quelle que soit f, c'est nécessaire et suffisant pour que $\mathfrak{S}$ soit définie et continue. En particulier $\alpha(st)$ étant un noyau quelconque, de carré sommable par rapport à s et à t, on peut toujours définir un autre noyau

$$\beta(st) = \mathfrak{S}[\alpha(st)]$$

par les formules

$$\int_0^1 \beta(st)\,\varphi_i(s)\,ds = \int_0^1 \alpha(st)\,\sigma_i(s)\,ds,$$

en désignant par $\varphi_i(s)$ le système orthogonal auquel est rapporté l'espace.

On a d'ailleurs, quelle que soit f,

$$h = (\alpha\mathfrak{S})[f] = \mathfrak{S}\left[\alpha[f]\right] = \mathfrak{S}[g],$$

en posant

$$g(s)=\alpha[f]=\int_0^1 \alpha(st)f(t)\,dt$$

et par suite

$$[k.\varphi_i]=[g.\sigma_i]=\int_0^1\int_0^1 \alpha(st)f(t)\,\sigma_i(s)\,ds\,dt$$

$$=\int_0^1\int_0^1 \beta(st)f(t)\,\varphi_i(s)\,ds\,dt,$$

ce qui prouve que

$$k(s)=\int_0^1 \beta(st)f(t)\,dt;$$

on a donc

$$\alpha\mathfrak{S}=\beta,$$

ce qui démontre notre assertion. Nous voyons donc qu'on peut dire que les noyaux des transformations infinitésimales du groupe considéré sont *symétrisables gauches* par la transformation continue symétrique droite $\mathfrak{S}$. Nous généralisons ici très largement une notion qui fut introduite par Marty [22]. Il est possible, malgré cette généralisation, d'étendre à ces noyaux α les principaux résultats de Marty.

Désignons par h la transformation de première espèce symétrique gauche $\alpha\mathfrak{S}$. Considérons une valeur singulière λ de $\alpha(st)$ et la fondamentale φ correspondante. On a

$$\varphi=\lambda\,\alpha[\varphi],$$

puis successivement, puisque h est symétrique gauche

$$\psi=\mathfrak{S}[\varphi]=\lambda(\alpha\mathfrak{S})[\varphi]=\lambda\,h[\varphi]=-\lambda\,\bar{h}[\varphi]=-\lambda(\mathfrak{S}\bar{\alpha})[\varphi]=-\lambda\,\bar{\alpha}[\psi],$$

ce qui prouve que $\psi=\mathfrak{S}[\varphi]$ est une fonction fondamentale du noyau associé $\bar{\alpha}$, correspondant à la valeur singulière $-\lambda$, pourvu que $\mathfrak{S}[\varphi]$ ne soit pas identiquement nulle. Nous supposerons que la fonctionnelle quadratique

$$\big[f.\mathfrak{S}[f]\big].$$

est définie positive, de telle sorte que, sauf pour f presque partout nulle, $\mathfrak{S}[f]$ n'est jamais nulle. Il résulte alors de ce qui précède que les valeurs singulières de α sont deux à deux égales et opposées. Considérons l'une d'entre elles

$$\lambda=a+ib,$$

à laquelle correspond la fondamentale $u+iv$. α étant réel $a-ib$ est aussi valeur singulière et il lui correspond la fondamentale $u-iv$. $\mathfrak{S}[u-iv]$ est une fondamentale de $\bar{\alpha}$ qui correspond à la valeur singulière $-a+ib$. Si a n'est pas nul, $a+ib$ et $-a+ib$ sont différents, et d'après un théorème classique, les fonctions $u+iv$ et $\mathfrak{S}[u-iv]$ sont orthogonales, on a

$$\big[(u+iv].\mathfrak{S}[u-iv]\big]=\big[u.\mathfrak{S}[u]\big]+\big[v.\mathfrak{S}[v]\big]=0.$$

Or une telle relation est impossible, pour u et v non presque partout nulles, puisque $\big[f.\mathfrak{S}[f]\big]$ est définie positive. Il faut donc que a soit nul, et *les valeurs singulières de α sont imaginaires pures.* μi étant l'une d'elles, non nulle, et $u+iv$ la fondamentale correspondante, $\mathfrak{S}[u+iv]$ est la fondamentale de $\bar{\alpha}$ correspondant à la singulière $-\mu i$; et la relation

$$\big[(u+iv).\mathfrak{S}[u+iv]\big]=0$$

donne

$$\big[u.\mathfrak{S}[u]\big]=\big[v.\mathfrak{S}[v]\big],$$
$$\big[u.\mathfrak{S}[v]\big]=0.$$

En résumé, on peut dresser le tableau suivant :

Singulières de α et $\bar{\alpha}$.	Fondamentales de α.	Fondamentales de $\bar{\alpha}$.
μi	$u+iv$	$\mathfrak{S}[u]-i\mathfrak{S}[v]$
$-\mu i$	$u-iv$	$\mathfrak{S}[u]+i\mathfrak{S}[v]$

et comme

$$\big[(u+iv).\mathfrak{S}[u-iv]\big]=\big[u.\mathfrak{S}[u]\big]+\big[v.\mathfrak{S}[v]\big]>0,$$

les deux fondamentales $u+iv$ de α, et $\mathfrak{S}[u-iv]$ de $\bar{\alpha}$, correspondant à la même valeur singulière μi, ne peuvent être orthogonales, ce qui prouve, d'après une proposition classique de la théorie des équations intégrales, que la déterminante fondamentale du noyau $\alpha(st)$ n'a que des racines simples.

Jusqu'alors nous avons admis l'existence des valeurs singulières de α. Il est aisé de montrer cette existence. Soient α^n les puissances successives positives de la transformation α. Posons

$$h_n=\alpha^n\mathfrak{S}.$$

On a successivement

$$h_n = \alpha^n \mathfrak{S} = \alpha^{n-1}\alpha\mathfrak{S} = \alpha^{n-1} h = -\alpha^{n-1}\bar{h} = -\alpha^{n-1}\mathfrak{S}\bar{\alpha} = +\alpha^{n-2}\mathfrak{S}\bar{\alpha}^2 = \ldots$$

et en général

$$h_n = (-1)^q \alpha^p \mathfrak{S}\bar{\alpha}^q, \qquad \bar{h}_n = (-1)^p \alpha^p \mathfrak{S}\bar{\alpha}^q \qquad (p + q = n)$$

et donc

$$\bar{h}_n = (-1)^n h_n,$$

les transformations h_n sont symétriques gauches pour n impair et symétriques droites pour n pair.

Ajoutons, d'après une remarque faite plus haut, que le noyau de la transformation h_n, peut s'écrire

$$h_n(st) = \mathfrak{S}\left[\alpha^n(st)\right],$$

formule, dans laquelle, en appliquant la transformation $\mathfrak{S}$ au noyau $\alpha^n(st)$, on le considère comme fonction de s seul. On peut donc écrire d'après cela

$$h_{2p}(st) = (-1)^p \int_0^1 \alpha^p(us)\, \mathfrak{S}[\alpha^p(ut)]\, du$$

et

$$h_{2p}(ss) = (-1)^p \int_0^1 \alpha^p(us)\, \mathfrak{S}[\alpha^p(us)]\, du.$$

Nous allons d'abord montrer que la suite des noyaux h_n est illimitée, sauf si le premier $h_1(st) = h(st)$ est identiquement nul. Si $h_{2p-1}(st)$ était nul identiquement, il en serait de même de $h_{2p}(st)$ car

$$h_{2p}(st) = -\int_0^1 \alpha(us)\, \mathfrak{S}[\alpha^{2p-1}(ut)]\, du;$$

donc si $h_{2p-1}(st)$ ou $h_{2p}(st)$ est nul, on a

$$h_{2p}(ss) = 0$$

et

$$\int_0^1 \alpha^p(us)\, \mathfrak{S}[\alpha^p(us)]\, du = 0.$$

La fonctionnelle quadratique $[f.\mathfrak{S}[f]]$ étant définie positive, on a, d'après la formule de Schwarz,

$$[f.\mathfrak{S}[g]]^2 \leqq [f.\mathfrak{S}[f]]\,[g.\mathfrak{S}[g]]$$

et en particulier, quelle que soit f,

$$\left[\int_0^1 f(u)\,\mathfrak{S}[\alpha^p(us)]\,du\right]^2 \leqq \left[f.\mathfrak{S}[f]\right]\left[\int_0^1 \alpha^p(us)\,\mathfrak{S}[\alpha^p(us)]\,du\right] = 0,$$

on aurait donc

$$\int_0^1 f(u)\,\mathfrak{S}[\alpha^p(us)]\,du = 0$$

et $\mathfrak{S}[\alpha^p(us)]$ serait presque partout nul, donc aussi

$$h_p(st),\quad h_{p+1}(st),\quad \ldots,\quad h_{2p-1}(st)$$

en raisonnant de proche en proche on voit que $h_1(st)$ serait aussi presque partout nul.

Montrons maintenant que $\alpha(st)$ a au moins une valeur singulière. Il suffit de faire voir que

$$\alpha_\lambda(st) = \alpha(st) + \lambda\,\alpha^2(st) + \ldots + \lambda^{n-1}\,\alpha^n(st) + \ldots$$

n'est pas une fonction entière de λ, ou encore que

$$\mathfrak{S}[\alpha_\lambda(st)] = h(st) + \lambda\,h_2(st) + \ldots + \lambda^{n-1}\,h_n(st) + \ldots$$

et aussi

$$h(ss) + \lambda\,h_2(ss) + \ldots + \lambda^{n-1}\,h_n(ss) + \ldots$$

ne sont pas des fonctions entières de λ. Or on a

$$h_{2p}(ss) = (-1)^{p-1}\int_0^1 \alpha^{p-1}(us)\,\mathfrak{S}[\alpha^{p+1}(us)]\,du,$$

et d'après la formule de Schwarz

$$\begin{aligned}[h_{2p}(ss)]^2 \leqq &\left[\int_0^1 \alpha^{p-1}(us)\,\mathfrak{S}[\alpha^{p-1}(us)]\,du\right]\\ &\times\left[\int_0^1 \alpha^{p+1}(us)\,\mathfrak{S}[\alpha^{p+1}(us)]\,du\right], \quad \ldots\end{aligned}$$

ou

$$[h_{2p}(ss)]^2 \leqq h_{2p-2}(ss)\,h_{2p+2}(ss),$$

cette inégalité suffit à prouver, en employant une méthode classique, que la série

$$\sum_n \lambda^{n-1}\,h_n(ss)$$

a un rayon de convergence fini. Le noyau $\alpha(st)$ a donc au moins une valeur singulière.

On démontre, dans la théorie des équations intégrales, qu'une condition nécessaire pour que $\alpha[f]$ soit nul est que la fonction f soit orthogonale à toutes les fonctions fondamentales de la transformation de première espèce associée $\bar{\alpha}$. Cette condition est suffisante si la transformation de première espèce α est symétrique. Nous allons montrer qu'elle l'est aussi dans le cas présent. On sait en effet que si la condition est remplie,

$$\alpha_\lambda[f]$$

est une fonction entière de λ. ainsi que

$$(\alpha_\lambda \mathfrak{S})[f] \quad \text{et} \quad \Big[f.\mathfrak{S}\big[\alpha_\lambda[f]\big]\Big].$$

Or, les formules déjà plusieurs fois employées montrent que

$$(\alpha_\lambda \mathfrak{S})[f] = h[f] + \lambda\, h_2[f] + \ldots + \lambda^{n-1}\, h_n[f] + \ldots$$

et que

$$\Big[f, \mathfrak{S}\big[\alpha_\lambda[f]\big]\Big] = A_1 + \lambda A_2 + \ldots + \lambda^{n-1} A_n + \ldots$$

avec

$$A_n = \int_0^1 \int_0^1 h_n(st) f(s) f(t)\, ds\, d$$

Posant alors

$$f_p = \alpha^p[f],$$

et tenant compte de

$$h_n(st) = (-1)^q \int_0^1 \alpha^q(us)\, \mathfrak{S}[\alpha^p(ut)]\, du \qquad (p + q = n),$$

on a

$$A_n = (-1)^q \big[f_q . \mathfrak{S}[f_p]\big] \qquad (p + q = n),$$

puis par la formule de Schwarz

$$A_{2p}^2 \leqq A_{2p-2} A_{2p+2}.$$

La fonction $\sum_n \lambda^{n-1} A_n$ ne peut alors être une fonction entière de λ que si $A_n = 0$ pour $n \geqq 4$. $A_4 = 0$ donne d'ailleurs $f_2 = 0$ puisque $[f.\mathfrak{S}[f]]$ est une forme définie positive; f_2 étant nulle il en résulte $\alpha^2[f] = 0$, puis $h_2[f] = (\alpha^2 \mathfrak{S})[f] = 0$ et $A_2 = 0$; donc $f_1 = 0$, ce qu'il fallait prouver.

13. Groupe de transformations linéaires invariant une forme grassmannienne du second degré. — Nous avons rappelé que dans l'espace euclidien à n dimensions, un autre grand type de groupes de transformations linéaires, était formé des groupes laissant invariant un complexe linéaire. Il revient au même de dire que ces groupes invarient une forme quadratique extérieure à n variables,

$$\sum_{ij} a_{ij}(x_i y_j - x_j y_i)$$

avec

$$a_{ij} + a_{ji} = 0.$$

Dans l'espace de Hilbert on définira de même des formes fonctionnelles extérieures. Une forme fonctionnelle quadratique extérieure sera du type suivant :

$$\int_0^1 \int_0^1 h(st)\left[f(s)\,g(t) - f(t)\,g(s)\right] ds\,dt,$$

où $h(st)$ est un noyau symétrique gauche. Plus généralement, une telle forme sera

$$[f.\mathcal{H}[g]],$$

où $\mathcal{H}$ désigne une transformation fonctionnelle linéaire continue, symétrique gauche. Déterminer le groupe des transformations linéaires $\mathcal{L}$ invariant une telle forme, revient, comme on le constate sans peine, à chercher toutes les transformations vérifiant la condition

$$\mathcal{L}\mathcal{H}\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{H}.$$

Cette détermination se fait par la même analyse que dans le cas des formes quadratiques ordinaires. Mettant $\mathcal{L}$ sous la forme $\mathcal{L} = \mathrm{E} + \mathrm{A}$, et supposant que A_{-1} et $\mathrm{A}_{-\frac{1}{2}}$ existent, on a

$$\mathrm{A} = \alpha_{\frac{1}{2}},$$

la transformation α étant telle que $\alpha\mathcal{H}$ soit une transformation *symétrique droite*.

Bornons-nous ici à indiquer les propriétés des transformations α quand on les suppose de Fredholm et de première espèce, au point de vue des valeurs singulières et des fonctions fondamentales.

Les propriétés si simples que nous avons rencontrées dans le cas des transformations invariant une forme quadratique définie positive disparaissent presque complètement. Le seul résultat qui subsiste est le suivant : Si φ est une fondamentale du noyau α correspondant à la valeur singulière λ, $\mathcal{H}[\varphi]$ est une fondamentale du noyau de la transformation associée $\bar{\alpha}$ correspondant à la valeur singulière $-\lambda$, pourvu que $\mathcal{H}[\varphi]$ ne soit pas nulle. Si donc la transformation symétrique gauche $\mathcal{H}$ est telle que $\mathcal{H}[f]$ ne soit nulle que pour f nulle, on peut affirmer que les valeurs singulières de α, si elles existent, sont deux à deux égales et opposées.

14. Structure des groupes linéaires obtenus. — Nous allons examiner comment se présente la notion de structure pour les groupes à une infinité de paramètres dont nous venons de donner quelques exemples.

Nous avons remarqué que, pour le groupe des transformations linéaires invariant la forme quadratique fonctionnelle

$$[f.\mathcal{S}[f]],$$

les transformations jouant le rôle de transformations infinitésimales étaient les transformations α telles que

$$\alpha\mathcal{S}$$

soit symétrique gauche. De la même manière, les transformations infinitésimales du groupe invariant la forme grassmannienne

$$[f.\mathcal{H}[g]]$$

sont les transformations α telles que

$$\alpha\mathcal{H}$$

soit symétrique droit.

Si donc α est une transformation infinitésimale d'un de ces groupes, transformation dont on peut supposer la borne infiniment petite, l'inverse de la transformation $E+\alpha$, infiniment voisine de l'identité, est $E-\alpha$; et la transformée de $E+\beta$ par $E+\alpha$, en supposant aussi que β est de borne infiniment petite, est

$$(E+\alpha)(E+\beta)(E-\alpha) = E+\beta+\alpha\beta-\beta\alpha+\ldots.$$

La transformation $\alpha\beta-\beta\alpha$ dont a varié $E+\beta$, quand on l'a transformée par $E + \alpha$, s'appelle le crochet de α et de β. Nous la désignerons par la notation

$$[\alpha\beta] = \alpha\beta - \beta\alpha.$$

Voyons ce qu'on peut dire sur ces crochets. Plaçons-nous dans le cas du groupe invariant la forme quadratique $[f.\mathfrak{S}[f]]$. Le résultat serait le même pour le groupe invariant une forme grassmannienne. Alors

$$\alpha\mathfrak{S} + \mathfrak{S}\bar{\alpha} = 0, \qquad \beta\mathfrak{S} + \mathfrak{S}\bar{\beta} = 0;$$

puis

$$\mathfrak{S}\bar{\alpha}\bar{\beta} = -\alpha\mathfrak{S}\bar{\beta} = \alpha\beta\mathfrak{S}, \qquad \mathfrak{S}\bar{\beta}\bar{\alpha} = -\beta\mathfrak{S}\bar{\alpha} = \beta\alpha\mathfrak{S}$$

de sorte que

$$(\alpha\beta - \beta\alpha)\mathfrak{S} + \mathfrak{S}(\bar{\beta}\bar{\alpha} - \bar{\alpha}\bar{\beta}) = 0.$$

Le crochet $[\alpha\beta]$ est donc aussi une transformation infinitésimale du groupe considéré. Nous arrivons ainsi à la notion de structure infinie de transformations linéaires. On dira qu'un ensemble de transformations linéaires forme une structure, quand la somme de deux transformations de l'ensemble appartient à l'ensemble, et quand le crochet de deux transformations de l'ensemble appartient à l'ensemble. Un tel ensemble pourra avoir la puissance du continu; cas qui correspond aux groupes linéaires fonctionnels à un nombre fini de paramètres, ou une puissance supérieure; on dira alors que la structure est infinie. Nous sommes donc en possession, à l'heure actuelle, de deux exemples généraux de structures infinies, correspondant au cas d'un groupe invariant une fonctionnelle quadratique continue quelconque, et au cas d'un groupe invariant une fonctionnelle quadratique extérieure quelconque.

On pourra aussi, plus particulièrement, considérer des structures infinies de noyaux; la plus simple d'entre elles est la structure infinie des noyaux symétriques gauches, qui correspond au groupe formé par les rotations fonctionnelles appartenant au groupe de Fredholm.

Il est à remarquer que dans cette notion de structure infinie, rien ne joue le rôle des constantes de structure de la théorie de Lie. On pourrait d'ailleurs combler cette lacune, mais sans grand avantage pour le moment, semble-t-il.

Comme dans la théorie de Lie, la recherche des sous-groupes à deux paramètres du groupe infini considéré, pose le problème de la détermination des valeurs caractéristiques d'une transformation infinitésimale α dans une structure donnée. Il s'agit de trouver les nombres μ et les transformations infinitésimales β de la structure, tels que l'on ait

$$[\alpha\beta] = \mu\beta.$$

Cette question conduit, dans la théorie des groupes finis, à la formation de l'équation de Killing qui joue, comme on sait, un rôle fondamental. Ici, il n'y a rien d'analogue. Plaçons-nous dans un cas particulier. Supposons que la structure infinie considérée soit une structure de noyaux. Nous allons d'abord chercher, étant donnés le noyau $\alpha(st)$, tous les nombres μ et tous les noyaux $\beta(st)$ tels que l'on ait

$$[\alpha\beta] = \mu\beta.$$

Nous supposerons que α et β ont des valeurs singulières et des fonctions fondamentales.

Si φ est une fondamentale de α, nous dirons que ρ est une valeur spectrale de α, si $\alpha[\varphi] = \rho\varphi$; cette valeur spectrale est donc liée à la valeur singulière correspondant à la fondamentale φ, par la formule $\rho = \frac{1}{\lambda}$, en désignant par λ cette valeur singulière. A une valeur spectrale différente de o, correspondent, pour α comme pour $\bar{\alpha}$, un nombre fini de fondamentales linéairement indépendantes. A la valeur spectrale nulle, si elle existe, peuvent correspondre, pour α comme pour $\bar{\alpha}$, une infinité de fondamentales linéairement indépendantes.

Soient f une fondamentale de α, et g une fondamentale de $\bar{\alpha}$, correspondant à la même valeur spectrale ρ. On a

$$\alpha[f] = \rho f, \qquad \bar{\alpha}[g] = \rho g.$$

Posons

$$\beta[f] = h, \qquad \bar{\beta}[g] = k.$$

Il vient alors

$$[\alpha\beta][f] = \beta\big[\alpha[f]\big] - \alpha\big[\beta[f]\big] = \rho h - \alpha[k],$$
$$[\bar{\alpha}\bar{\beta}][g] = \bar{\beta}\big[\bar{\alpha}[g]\big] - \bar{\alpha}\big[\bar{\beta}[g]\big] = \rho k - \bar{\alpha}[k];$$

or

$$[\alpha\beta] = \mu\beta, \qquad [\bar{\alpha}\bar{\beta}] = -\mu\bar{\beta};$$

par suite

$$[\alpha\beta][f] = \mu h, \qquad [\bar{\alpha}\bar{\beta}][g] = -\mu k;$$

d'où les deux équations en h et k,

$$\alpha[h] - (\rho + \mu)h = 0, \qquad \bar{\alpha}[k] - (\rho - \mu)k = 0;$$

Suivant les valeurs de ρ et de μ, elles peuvent être des équations de Fredholm de première ou de seconde espèce, mais elles sont toujours homogènes et admettent toujours les solutions

$$h = 0, \qquad k = 0.$$

Ces solutions seront, ou ne seront pas, uniques, suivant que $\rho + \mu$, et $\rho - \mu$, seront, ou ne seront pas, valeurs spectrales de α.

Nous dirons que le nombre μ est une *raison spectrale* pour le noyau $\alpha(st)$, s'il existe au moins un couple de valeurs spectrales de α, dont la différence soit égale à μ.

Si donc, dans le cas actuel, μ n'est pas une raison spectrale pour $\alpha(st)$, ρ étant spectrale, on peut affirmer que $\rho + \mu$ et $\rho - \mu$ ne le sont pas ; de telle sorte que $h = 0$ et $k = 0$ sont les seules solutions du système précédent. Il en résulte que pour toute fondamentale f de α, et pour toute fondamentale g de $\bar{\alpha}$, on a

$$\beta[f] = 0, \qquad \bar{\beta}[g] = 0.$$

Les noyaux $\beta(st)$, s'ils existent, correspondant à une telle valeur caractéristique μ, sont donc orthogonaux à gauche aux fondamentales de α, et orthogonaux à droite aux fondamentales de $\bar{\alpha}$. Dans cet énoncé, on a étendu la dénomination de fondamentales de α et de $\bar{\alpha}$, aux fonctions orthogonales à $\alpha(st)$ et à $\alpha(ts)$. $\beta(st)$ est donc orthogonal, à droite et à gauche à tous les noyaux principaux de $\alpha(st)$. On peut en conclure que les transformations $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ sont nulles, quand les fondamentales de α et de $\bar{\alpha}$ forment un système complet dans l'espace de Hilbert. On dit alors que $\alpha(st)$ est symétroïde [4-5]. Ce cas, très important, se présente quand α est symétrique, symétrique gauche, et plus généralement, quand $\alpha(st)$ est le noyau d'une transformation infinitésimale d'un groupe invariant une fonctionnelle quadratique définie positive.

Supposons donc $\alpha(st)$ symétroïde. On voit que si μ n'est pas raison spectrale de α, le crochet de α et de β est certainement nul. Il faut donc prendre, ou $\beta(st) = 0$, ou $\mu = 0$, $\beta(st)$ étant orthogonal à droite et à gauche à $\alpha(st)$. Les valeurs caractéristiques ne donnant pas ces solutions banales de l'équation

$$[\alpha\beta] = \mu\beta$$

appartiennent donc à l'ensemble des raisons spectrales de α.

Dans tout ce qui précède nous n'avons nullement fait intervenir le fait que $\beta(st)$ doit faire partie de la structure donnée, à laquelle appartient $\alpha(st)$. Il est temps de tenir compte de cette condition. Nous ne pouvons le faire, ici, que dans un cas très simple, celui de la structure infinie des noyaux symétriques gauches.

Soit un tel noyau $\alpha(st)$. Ses valeurs spectrales sont imaginaires pures et deux à deux opposées. Nous supposerons que ce noyau ne présente pas de singularités spectrales. Voici ce que nous entendons par là : Les raisons spectrales μ d'un tel noyau le sont en général de deux manières différentes; si en effet ρ et ρ' sont deux valeurs spectrales du noyau, il en est de même de $-\rho$ et $-\rho'$, et

$$\mu = \rho' - \rho = (-\rho) - (-\rho').$$

Nous dirons qu'il n'y a pas singularité spectrale si toutes les raisons spectrales du noyau sont raisons spectrales de deux manières seulement. Cherchons, dans ces conditions, les noyaux symétriques gauches $\beta(st)$ tels que l'on ait

$$[\alpha\beta] = \mu\beta,$$

μ étant une raison spectrale :

$$\mu = \rho' - \rho.$$

Supposons encore, pour avoir le maximum de simplicité, qu'à chacune des valeurs spectrales ρ et ρ' correspondent une seule fondamentale pour α, et une seule fondamentale pour $\bar{\alpha}$. Désignons par $f; f'; f_0; f'_0$ ces fondamentales. f et f_0 sont imaginaires conjuguées, ainsi que f' et f'_0. D'après les propriétés des noyaux symétriques gauches, on a

$$\begin{array}{llll}
\alpha[f] = \rho f, & \alpha[f'] = \rho' f', & \bar{\alpha}[f_0] = \rho f_0, & \bar{\alpha}[f'_0] = \rho' f'_0, \\
\alpha[f_0] = -\rho f_0, & \alpha[f'_0] = -\rho' f'_0, & \alpha[f] = -\rho f, & \bar{\alpha}[f'] = -\rho' f',
\end{array}$$
$$[f^2] = [f'^2] = [f_0^2] = [f_0'^2] = [f\cdot f'] = [f_0\cdot f'_0] = [f\cdot f'_0] = [f'\cdot f_0] = 0;$$

on peut supposer de plus

$$[f\cdot f_0] = [f'\cdot f'_0] = 2.$$

On détermine le noyau $\beta(st)$ en se servant des équations intégrales homogènes obtenues plus haut. Nous nous bornerons ici à vérifier que le noyau symétrique gauche

$$\beta(st) = \frac{A}{2}[f'(s)f_0(t) - f_0(s)f'(t)]$$

satisfait bien à la condition. On a en effet

$$\alpha\beta = \frac{A}{2}\Big[\alpha[f'(s)].f_0(t) - \alpha[f_0(s)]f'(t)\Big]$$

$$= \frac{A}{2}[\rho' f'(s) .f_0(t) + \rho f_0(s) f'(t)],$$

puis

$$\beta\alpha = \frac{A}{2}\Big[f'(s)\bar{\alpha}[f_0(t)] - f_0(s)\bar{\alpha}[f'(t)]\Big]$$

$$= \frac{A}{2}[\rho f'(s)f_0(t) + \rho' f_0(s)f'(t)]$$

et donc

$$[\alpha\beta] = (\rho' - \rho)\beta = \mu\beta.$$

Ce calcul suppose qu'aucune des valeurs spectrales ρ, ρ' n'est nulle. Dans le cas où l'une d'entre elles est nulle, on a une solution de forme un peu différente. On démontre d'ailleurs que ces solutions sont uniques à la constante multiplicative A près.

Nous voyons donc que, dans ce cas très simple, toutes les raisons spectrales sont des valeurs caractéristiques de la transformation infinitésimale α. Jusqu'à quel point ce résultat est-il général ? C'est une question sur laquelle il faudrait revenir. Remarquons seulement que les valeurs caractéristiques forment un ensemble dénombrable, mais qu'on n'aperçoit pas de fonction entière simple, jouant le rôle du premier membre de l'équation de Killing. De plus, la série double

$$\Sigma(\rho' - \rho)^2$$

est en général divergente. La forme quadratique des paramètres d'une transformation infinitésimale, égale à la somme des racines de l'équation de Killing de cette transformation, forme quadratique qui joue un si grand rôle dans la théorie des groupes finis, n'existe plus, semble-t-il, dans le cas des structures infinies. Mais on peut remarquer que c'est surtout le signe de cette forme quadratique qu'il est utile de considérer; et observer que toutes les valeurs caractéristiques sont purement imaginaires, c'est le cas dans l'exemple qu'on vient de traiter, revient à dire que cette forme, quand elle existe, est définie négative.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. CARTAN. — Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Vuibert et Nony, Paris, 1894).
2. DELSARTE. — Les rotations fonctionnelles (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1928).
3. DELSARTE. — Les groupes finis de rotations fonctionnelles (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 53, 1929).
4. DELSARTE. — Les sous groupes du groupe de Fredholm (*Annales de la Société polonaise de Mathématiques*, t. 8, 1929).
5. DELSARTE. — Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1928-1929-1930).
6. ENGEL. — Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationgruppen (*Leipziger Berichte*, 1886, p. 83 94; 1887, p. 89-99).
7. FISCHER. — Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 144, 1907, p. 1022.
8. FRÉCHET. — Sur les opérations linéaires (*Transactions of the American Mathematical Society*, t. 5, 1904, p. 493 499; t. 6, 1905, p. 134 140).
9. FRÉCHET. — Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à des ensembles abstraits (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 43, 1915).
10. GOURSAT. — Traité d'Analyse, t. III, Chap. XXX et suiv. (Gauthier-Villars, Paris, 1922).
11. HEYWOOD et FRÉCHET. — L'équation de Fredholm (Hermann, Paris, 1912).
12. HELLINGER et TOEPLITZ. — Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen (*Mathematische Annalen*, t. 69, p. 289-330).
13. HILB. — Ueber die Auflösung von Gleichungen mit unendlichen vielen Unbenkannten (*Sitzungsberichte d. phys. med. Sozietät.*, Erlangen, 1908, p. 84 89).
14. HILBERT. — Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (*Nachrichten der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen*, 1906).
15. KILLING. — Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationgruppen (*Math. Annalen*, t. 31, 33, 34, 36, 1888-1890).
16. LALESCO. — Introduction à la théorie des équations intégrales (Hermann, Paris, 1912).
17. LANDAU. — Ueber einen Konvergensatz (*Nachrichten Gesellschaft Wissenschaften Göttingen*, 1907).
18. LEBESGUE. — Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives (Gauthier Villars, Paris, 1912).
19. LÉVY. — Leçons d'Analyse fonctionnelle (Gauthier-Villars, Paris, 1922).
20. LÉVY. — Sur les lois de probabilité dans les ensembles abstraits (*Revue de Métaphysique et de Morale*, t. 33, 1925, p. 149-174).

21. Lie. — Theorie der Transformationgruppen (Teubner, Leipzig, 1888-1893).

22. Marty. — Sur les noyaux symétrisables (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 6 juin 1910).

23. Pérès. — Sur certaines transformations fonctionnelles et leur application aux fonctions permutables (*Annales de l'École Normale*, 1919, p. 37).

24. Plancherel. — Sur le théorème de Fischer-Riesz (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1910, p. 29?).

25. Riesz. — Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (Gauthier-Villars, Paris, 1913).

26. Riesz. — Sur la convergence en moyenne (*Göttinger Nachrichten*, 1907).

27. Schmidt. — Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit abzählbar unendlich vielen Unbekannten (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 25, 1908, p. 53 77).

28. Toeplitz. — Die Jacobische Transformation der quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen (*Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften*, 1907, p. 101-109).

29. Volterra. — Leçons sur les fonctions de lignes (Gauthier Villars, Paris, 1913).

30. Volterra. — Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles (Gauthier-Villars, Paris, 1913).

31. Volterra. — Leçons sur la composition et les fonctions permutables (Gauthier-Villars, Paris, 1924).

32. Vitali. — Geometria nello spazio Hilbertiano (*Atti del R. instituto Veneto di Szienze, Lettere e Arti*, 1927-1928, t. 87, parte seconda).

33. Weil. — Sul Calcolo funzionale lineare (*Rendiconti della R. Academia Nazionale dei Lincei*, 15 Maggio 1927).

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

LA NOTION DE LIMITE DANS L'ESPACE DE HILBERT.

CHAPITRE II.

LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES CONTINUES DANS E.

CHAPITRE III.

SUITES ET SÉRIES DE TRANSFORMATIONS LINÉAIRES.

CHAPITRE IV.

LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS LINÉAIRES.