ÉDOUARD HUSSON

Les trajectoires de la dynamique

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 55 (1932)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1932__55__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LV

Les trajectoires de la dynamique

PAR M. ÉDOUARD HUSSON
Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1932

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LES

TRAJECTOIRES DE LA DYNAMIQUE

Par M. Édouard HUSSON,

Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

CHAPITRE I.

NOTIONS FONDAMENTALES.

1. Équations de Lagrange. — Nous considérons un système matériel libre ou soumis à des liaisons holonomes sans frottement, et dont la position dépend d'un nombre fini de paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Les forces extérieures agissant sur le système dépendront d'un champ de forces de position.

Les mouvements du système seront généralement définis à l'aide des équations de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Lorsque les liaisons sont indépendantes du temps, la force vive $2T$ est une forme quadratique homogène par rapport aux vitesses,

$$2T = \sum_1^n a_{ik} q'_i q'_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Dans la plupart des questions envisagées nous supposons que le champ des forces extérieures dépend d'une fonction des forces

$U(q_1, \ldots, q_n)$ invariable avec le temps. Les équations du mouvement s'écrivent alors en introduisant la *fonction lagrangienne* L,

$$L = T + U,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour les systèmes dont les liaisons sont indépendantes du temps, ces équations admettent l'intégrale première des forces vives,

$$T - U = \text{const.} = E,$$

la *constante d'énergie* E est l'énergie totale du système, et le système est conservatif.

2. Transformation des équations de la dynamique. Équations canoniques. — Le système des n équations de Lagrange, ou tout système équivalent, apparaît comme un système de n équations linéaires par rapport aux accélérations q'', et le déterminant de ce système linéaire est le discriminant de la forme quadratique $2T$.

Ce discriminant est différent de zéro pour une position arbitraire, mais il est nul pour les positions d'indétermination de la représentation paramétique,

En résolvant les équations par rapport aux accélérations q'', et en prenant comme inconnues auxiliaires les vitesses q', on obtient un système de $2n$ équations du premier ordre résolues par rapport aux dérivations.

Cette résolution, acceptable dans les cas simples, ne met pas en évidence le fait que le système de la dynamique est spécial, et, pour transformer le système du deuxième ordre de la dynamique en système du premier ordre, on adopte les variables auxiliaires cinétiques introduites par Poisson et Hamilton,

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} = \frac{\partial L}{\partial q'_i}.$$

Les variables p_i sont des moments cinétiques dans les exemples simples, elles sont dites *conjuguées* des variables de position q_i et les variables q_i, p_i sont qualifiées de *variables canoniques*.

La fonction H,

$$H = \sum_{1}^{n} p_i q'_i - L$$

est appelée *fonction hamiltonienne* et, en exprimant cette fonction à l'aide des nouvelles variables q_i, p_i, les résultats se présentent sous la forme

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces équations sont désignées sous le nom d'*équations canoniques;* elles indiquent, comme les équations de Lagrange, des discontinuités aux positions d'indétermination de la représentation paramétrique q_i. Ces discontinuités se réduisent à une apparence si l'on peut choisir d'autres paramètres faisant disparaître l'indétermination.

Lorsque les liaisons sont indépendantes du temps, on a

$$H = 2T - L = T - U = E.$$

3. **Représentations géométriques cartésiennes.** — Pour exprimer les résultats d'études de mouvements, il est commode de les présenter à l'aide d'une image géométrique ou physique en regardant dans les cas généraux $q_1, q_2, \ldots, q_n$ comme coordonnées cartésiennes d'un point P dans un espace euclidien à n dimensions, E_n.

Dans le cas d'exemples physiques précisés, les paramètres q_1, $q_2, \ldots, q_n$ auront des significations physiques ou géométriques et il pourra y avoir intérêt, pour la simplicité de l'image, à substituer au système cartésien un système de coordonnées curvilignes. Suivant le choix adopté on obtiendra des images plus suggestives, des faits mécaniques plus frappants.

Il suffit de citer, à ce point de vue, le cas d'un ou plusieurs paramètres de rotation pour lequel la représentation est nécessairement de caractère cylindro-polaire ou polaire.

Un mouvement du système matériel est représenté dans l'espace image par la trajectoire d'un point P de cet espace et l'allure avec laquelle cette trajectoire est décrite dans le temps.

Les études qualitatives de mouvements apparaissent comme des études de forme, d'enroulement, de distribution de trajectoires et de lois de parcours.

Tous les résultats sont rassemblés dans le cadre de la mécanique du point dans un espace à n dimensions.

4. Représentation dans un espace de Riemann. Mécanique d'un espace courbe. — Pour obtenir une représentation du mouvement d'un système à n paramètres, on peut aussi généraliser le mouvement du point matériel mobile sur une surface courbe de l'espace euclidien à 3 dimensions.

Si les coordonnées cartésiennes du point sont exprimées à l'aide de deux paramètres u, v, $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, le calcul de l'élément linéaire de la surface

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2$$

donne la force vive d'un élément matériel de masse unité,

$$2\mathrm{T} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \mathrm{E}\, u'^2 + 2\mathrm{F}\, u' v' + \mathrm{G}\, v'^2,$$

et les équations du mouvement sous la forme de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} = \mathrm{Q}_u = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}.$$

A toute force vive d'un mouvement à deux paramètres u, v on peut faire correspondre une infinité de surfaces définies par leur élément linéaire

$$ds^2 = 2\mathrm{T}\, dt^2$$

et interpréter les mouvements à deux paramètres comme mouvements sur une surface.

Un assemblage à n paramètres $q_1 q_2 \ldots q_n$ caractérisé par sa force vive,

$$2\mathrm{T} = \Sigma\, a_{ik} q'_i q'_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}),$$

apparaît comme une représentation mécanique d'un espace courbe à n dimensions caractérisé par son ds^2,

$$ds^2 = \Sigma\, a_{ik}\, dq_i\, dq_k,$$

et que l'on désigne habituellement sous le nom d'*Espace de Riemann*. Cet espace de Riemann peut être conçu géométriquement, abstraction faite de tout support cartésien, ou être envisagé comme une multiplicité ou variété à n dimensions d'un espace euclidien dont le nombre de dimensions est généralement $\frac{n(n+1)}{2}$.

Un problème de dynamique à n paramètres peut ainsi être interprété comme un problème de la mécanique du point de masse unité dans un espace de Riemann à n dimensions, la loi mécanique dans cet espace étant fournie par les équations de Lagrange.

5. **Représentation des trajectoires et des vitesses. Espace des états de mouvements.** — Pour représenter géométriquement les positions et les vitesses il suffit de regarder les $2n$ variables q_i, q'_i, ou q_i, p_i, comme les coordonnées d'un point P dans un espace cartésien ou dans un espace ponctuel quelconque à $2n$ dimensions E_{2n}.

Les états de mouvement caractérisés par l'ensemble des variables de position et de vitesses sont ainsi représentés par des trajectoires dans cet espace ou multiplicité à $2n$ dimensions des *états de mouvement* E_{2n}. Dans cet espace les études qualitatives se présentent sous l'aspect de l'étude des lignes de courant d'un fluide dont on connaît les vitesses en fonction de la position et peut-être du temps.

La représentation est notamment indiquée pour l'étude des mouvements suivant les conditions initiales, elle est à l'origine des travaux les plus importants de Poincaré sur les équations de la dynamique.

Pour les mouvements à un paramètre, l'aspect de la trajectoire dans le plan E_2 des états de mouvement, l'étude de sa forme et de sa déformation, donnent une image complète et suggestive des mouvements suivant les conditions initiales.

Cette représentation a été utilisée avec le même succès pour l'étude des mouvements à variables séparées dans les recherches récentes relatives à la constitution de l'atome, dans tous les travaux importants de M. Birkhoff, dans les résultats intéressants obtenues par M. Levi-Civita [33] sur les invariants adiabatiques.

6. **Formes variationnelles des équations de la dynamique.** — Une fonction dérivable $f(u, v, \ldots)$ d'un ou plusieurs paramètres est dite *stationnaire* pour la position $P(u, v, \ldots)$ si la partie principale δf de sa variation est nulle, pour tout déplacement infinitésimal $\delta P(\delta u, \delta v, \ldots)$ à partir de la position P.

Une fonction *stationnaire* est soit *maximum*, soit *minimum*, soit *inflexionnelle*, en donnant au qualificatif inflexionnel les caractères physiques marqués dans le cas d'une fonction à une variable.

Si l'on considère une intégrale, ou *fonctionnelle*,

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(q_1, q_2, \ldots, q_n; q'_1, q'_2, \ldots, q'_n; t)\, dt,$$

où f est une fonction dérivable, le long d'une trajectoire de l'espace ponctuel $E_n(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, joignant deux points fixés M_0, M_1 atteints aux temps fixés t_0 et t_1, le calcul classique de la variation δI pour une déformation infinitésimale de la trajectoire joignant M_0 et M_1 montre que les mouvements et les trajectoires rendant la fonctionnelle I stationnaire, vérifient les équations d'Euler

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces équations apparaissent, pour des fonctions f appropriées, comme les équations de Lagrange d'un problème de géodésiques.

D'une façon analogue, pour un système soumis à un champ de forces conservatif, les équations de Lagrange expriment que les trajectoires de la dynamique sont les trajectoires pour lesquelles la fonctionnelle désignée sous le nom d'*action hamiltonienne*

$$V = \int_{t_6}^{t_1} L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$$

est stationnaire entre deux quelconques de leurs points M_0 et M_1, atteints aux temps t_0 et t_1.

Le résultat est souvent désigné sous le nom de *Principe d'Hamilton*, il rend compte de l'invariance importante des équations de Lagrange dans un changement de variables quelconque, puisque le caractère stationnaire est indépendant des variables qui servent à l'exprimer.

Pour les systèmes dont les liaisons sont indépendantes du temps, les trajectoires vérifient l'intégrale première des forces vives,

$$T = U + E.$$

Considérons l'ensemble des trajectoires de l'espace de Riemann $ds^2 = 2T\,dt^2$ correspondant à une valeur choisie de la constante d'énergie E, ou dans l'espace des états de mouvement E_{2n} les trajectoires situées sur une surface intégrale des forces vives choisie et appartenant ainsi à une multiplicité E_{2n-1} de cet espace. Pour ces trajectoires l'action hamiltonienne

$$V = \int_{t_0}^{t_1} (2T - E)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} 2T\, dt - E(t_1 - t_0).$$

En transformant le premier terme du dernier membre on obtient l'*action maupertuisienne*

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2T(U+E)}\, dt = \int_{M_0}^{M_1} \sqrt{U+E}\, ds.$$

Les trajectoires de la dynamique rendent l'action S stationnaire dans les déformations sur la multiplicité précédente E_{2n-1}, mais on constate de suite en écrivant les équations d'Euler que l'action S est également stationnaire pour les déformations sur la multiplicité entière E_{2n}.

On obtient ainsi le *Principe de Maupertuis* ou de *la moindre action*. Des moyens variés ont été utilisés et discutés par divers auteurs pour passer du principe d'Hamilton au principe de la moindre action [1].

Dans la première forme maupertuisienne des équations de la dynamique, le temps t disparaît puisque $\sqrt{2T}$ est homogène et de dimension égale à l'unité par rapport aux vitesses. Cette forme permet donc d'obtenir directement les équations définissant les trajectoires indépendamment de la loi de parcours, la liaison au temps est ensuite fournie par l'équation des forces vives.

La seconde forme de l'action maupertuisienne S montre que, comme dans la mécanique d'un élément matériel dans l'espace euclidien ordinaire, les trajectoires d'un système matériel soustrait à toute influence extérieure ou sous les seules influences des forces d'inertie et des forces de liaisons sont les géodésiques de l'espace de Riemann.

Si l'on fait la représentation des mouvements d'un système matériel correspondant à une valeur fixée de la constante d'énergie E sur un espace de Riemann dont l'élément linéaire est défini par

$$ds_1 = \sqrt{U+E}\, ds = \sqrt{U+E}\, \sqrt{2T\, dt^2},$$

la seconde forme de l'action maupertuisienne S indique que les trajectoires sont des géodésiques.

En adoptant pour représenter les mouvements d'un système matériel à n paramètres l'espace de Riemann ds_1, le progrès réalisé au point de vue formel est amené au maximum, toutes les complications sont concentrées sur l'étude de la distribution et des formes d'enroulement des géodésiques.

7. Intégrales premières et intégration par quadratures. — Pour un système dont les liaisons sont indépendantes du temps, les équations canoniques constituent dans l'espace $E_{2n}(q, p)$ un système de $2n$ équations du premier ordre ne contenant pas explicitement le temps t. Ce système de la dynamique est spécial, *le champ des vecteurs vitesses a une divergence nulle.*

En écrivant ce système sous la forme

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{\partial q_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{dp_n}{-\frac{\partial q_n}{\partial H}} = dt,$$

et en supprimant le dernier terme dt, on obtient le système différentiel d'ordre $(2n - 1)$ définissant les trajectoires dans l'espace E_{2n} des états de mouvements. La propriété de divergence nulle du champ des vecteurs vitesses exprime que ces équations admettent un *multiplicateur* de Jacobi $M = 1$.

Si l'on connaît $(2n - 2)$ intégrales premières indépendantes du temps, en prenant comme nouvelles variables ces intégrales premières, on est ramené à un système réduit à une seule équation admettant un facteur intégrant correspondant au multiplicateur initial $M = 1$. Les trajectoires sont donc obtenues à l'aide d'une quadrature et la liaison au temps est donnée par une nouvelle quadrature.

Lorsque la fonction lagrangienne L ou la fonction hamiltonienne H ne contiennent pas explicitement un des paramètres q_1, les équations de Lagrange admettent l'intégrale première

$$\frac{\partial L}{\partial q'_1} = \frac{\partial T}{\partial q'_1} = \text{const.}$$

Dans les exemples simples le paramètre q_1 est une variable de rotation, l'intégrale a la forme des aires et l'on a qualifié le paramètre q_1 de *variable cyclique* (ignorable coordinate). Comme les équations canoniques ne contiennent pas q_1 il suffit de $(2n - 3)$

intégrales premières pour intégrer par quadrature quand une de ces intégrales est cyclique.

8. **Méthode d'intégration de Jacobi.** — Les équations canoniques écrites sous forme de rapports sont les équations différentielles des courbes caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, dite de Jacobi,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}, t\right) = 0.$$

Si l'on peut trouver une intégrale complète

$$V(q_1, \ldots, q_n; a_1, \ldots, a_n; t) + \text{const.}$$

de cette équation, avec n constantes arbitraires $a_1 \ldots a_n$ dont aucune n'est additive, l'intégrale des équations canoniques est donnée par

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, & \dfrac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, & \ldots, & \dfrac{\partial V}{\partial a_n} = b_n, \\ p_1 = \dfrac{\partial V}{\partial q_1}, & p_2 = \dfrac{\partial V}{\partial q_2}, & \ldots, & p_n = \dfrac{\partial V}{\partial q_n}, \end{array}$$

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ étant de nouvelles constantes arbitraires.

Lorsque H ne contient pas le temps, il suffit de chercher une intégrale complète de l'équation de Jacobi sous la forme

$$V = S(q_1, \ldots, q_n; a_1, \ldots, a_n; E) - Et,$$

E étant la constante d'énergie.

S vérifie l'équation

$$H\left(q_1, \ldots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) - E = 0,$$

et les mouvements sont définis par [2]

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = b_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial S}{\partial a_n} = b_n, \qquad \frac{\partial S}{\partial E} = t - t_0.$$

Les $(n-1)$ premières équations définissent les trajectoires et font ainsi ressortir la possibilité d'obtenir les trajectoires indépendamment de la loi de parcours.

L'équation de Jacobi groupe les trajectoires en familles correspondant aux diverses intégrales complètes et présente les résultats sous la forme la plus simple. Les relations de cette équation avec l'action hamiltonienne ou maupertuisienne, avec les équations canoniques et leurs propriétés, ont été très étudiées; les recherches profondes de M. E. Cartan [3] sur les invariants intégraux ont éclairé ces questions d'une lumière complète.

9. **Intégration locale des équations de la dynamique.** — Le système des équations de la dynamique, après transformation en système différentiel du premier ordre, se présente sous la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (m = 2n).$$

Nous nous bornons aux résultats d'étude des solutions dans les circonstances ordinaires des applications physiques.

Dans l'espace E_{2n} des états de mouvement nous délimitons la multiplicité ou domaine D_{2n} connexe, à l'intérieur duquel les fonctions X_i sont *réelles*, *déterminées*, *continues*, *et admettent des dérivées partielles premières continues*.

Le domaine D_{2n} est généralement ouvert avec une borne à $2n - 1$ dimensions, et, s'il s'étendait jusqu'à l'infini, on le supposerait borné à distance très grande mais finie.

Théorème d'unicité. — *Le système différentiel du premier ordre admet dans le domaine de continuité* D_{2n} *une solution unique* $x_i(t)$ *satisfaisant à des conditions initiales imposées*

$$x_i(t_0) = x_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

appartenant à ce domaine.

La solution unique peut être arrêtée pour une valeur finie du temps à une borne du domaine de continuité D_{2n}.

Le résultat est en accord avec l'expérience physique : sous l'influence d'un champ de forces, le mouvement d'un système matériel est déterminé d'une façon unique par les conditions initiales.

Pour des conditions initiales situées sur la borne du domaine de continuité D_{2n}, et qualifiées de conditions initiales *singulières* par opposition aux conditions initiales générales dites *régulières*, le théorème d'unicité disparaît; les équations de la Mécanique générale présentent une insuffisance pour décider du choix de la trajectoire physique du système matériel. Dans le cas particulier de la statique cette insuffisance est complétée par le *postulat de la statique;* ce postulat apparaît simplement comme légitime au point de vue physique en raison des résistances négligées.

10. Solutions considérées comme fonctions des conditions initiales. — Lorsque le temps ne figure pas explicitement dans le système différentiel, une translation faite sur t ne change pas les équations; toute solution apparaît comme une fonction de $(t - t_0)$ et des conditions initiales x_i^0.

Si l'on excepte les cas dans lesquels les solutions s'expriment à l'aide de fonctions connues ou déjà étudiées dans tout leur domaine d'existence, les seules indications que l'on possède sur une solution quelconque sont réduites aux indications locales exprimées par le théorème d'unicité.

Les travaux de Poincaré *Sur les courbes définies par les équations différentielles* ont fait ressortir l'insuffisance d'un essai d'étude d'une solution isolée et ont montré que, comme dans le domaine de la résolution des équations algébriques, l'étude d'une solution était inséparable de l'étude qualitative de l'ensemble des solutions. La méthode féconde et encore unique introduite dans la Science par Poincaré est une méthode de variations consistant à étudier les solutions comme fonctions des conditions initiales ou des paramètres dont dépend le système différentiel; elle a conduit l'illustre géomètre aux solutions périodiques, à l'étude qualitative des solutions voisines d'une solution particulière connue, aux propriétés les plus importantes des équations de la dynamique.

L'analyse faite par M. Hadamard de l'œuvre mathématique de Poincaré contient l'exposé le plus lumineux de la pensée de Poincaré [4].

Théorème de continuité. — *Dans le domaine de continuité* D_{2n}, *la solution unique* $x_i(t)$ *correspondant à des conditions initiales imposées* $x_i(t_0) = x_i^0$ *est une fonction continue de* $(t - t_0)$ *et des paramètres* x_i^0 *de conditions initiales.*

Si les fonctions X_i *possèdent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre* $(p+1)$, *les fonctions* $x_i(t)$ *considérées comme fonc-*

tions de $(t-t_0)$, x_i^0, *posséderont des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre* p.

Si les fonctions X_i *sont développables en séries entières convergentes en* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ *(ou sont analytiques), la solution* $x_i(t)$ *est développable en série entière convergente en* $x_1^0, \ldots, x_{2n}^0 (t-t_0)$ *(ou est analytique par rapport à ces variables).*

Les résultats sont établis en Analyse par la méthode des approximations successives de M. Picard [5] ou des variantes de cette méthode en utilisant les conditions dites de Lipschitz, et, dans le cas le plus important des fonctions analytiques, en utilisant la notion de fonction dominante. La solution unique obtenue par pas successifs est prolongée ou étendue dans le domaine de continuité D_{2n} et dans le temps ou arrêtée à une borne de ce domaine.

Les résultats s'étendent aux cas dans lesquels les fonctions X_i dépendent du temps ou de paramètres, $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_m t\lambda)$ soit par démonstration directe, soit en introduisant les variables supplémentaires

$$x_{m+1}=t, \qquad x_{m+2}=\lambda,$$

définies par les équations supplémentaires

$$\frac{dx_{m+1}}{dt}=1, \qquad \frac{dx_{m+2}}{dt}=0,$$

et en se plaçant dans un domaine à $(m+2)$ dimensions $x_1, \ldots, x_{m+2}$ ou en adjoignant des limitations pour t et λ.

Ceci montre la possibilité de développer les solutions d'un système différentiel suivant les puissances d'un paramètre dont il dépend, ou d'un paramètre dont dépendent les conditions initiales pour une variation du temps dont le module peut être assez petit.

C'est dans une extension de ce résultat, avec variation la plus étendue dans le temps dans le cas des solutions voisines d'une solution particulière, que consiste un théorème dont l'importance est considérable dans l'œuvre de Poincaré.

Nous considérons un système du premier ordre

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1, \ldots, x_m, t, \lambda) \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

admettant pour $\lambda=0$ un système particulier d'intégrales continues $\overline{x}_i(t)$ dans l'intervalle $(0, t_1)$. Par la translation $\overline{x}_i$ sur les x_i nous sommes ramenés au cas où la solution particulière est réduite à $\overline{x}_i = 0$, c'est-à-dire au cas où les fonctions X_i s'annulent identiquement quand on fait $x_i = \lambda = 0$.

THÉORÈME DE POINCARÉ. — *Lorsque les seconds membres* $X_i(x_1 \ldots x'_m t\lambda)$ *sont des fonctions continues de* t *nulles pour* $\lambda = 0$, $x_i = 0$, *développables en séries convergentes suivant les puissances de* $x_1 \ldots x_m \lambda$ (*ou sont des fonctions analytiques*) *dans l'intervalle* $(0, t_1)$, *le système différentiel admet dans l'intervalle précédent une solution se réduisant à zero pour* $(t = 0)$ *développable en série convergente suivant les puissances de* λ (*ou analytique*) *pour les valeurs de* λ *de module assez petit.*

Le maximum d'écart λ donné par les démonstrations d'existence [6] est de l'ordre de grandeur de e^{-t_1}, et ce maximum se rapproche rapidement de zéro si l'on applique le théorème dans un intervalle de plus en plus étendu.

Le théorème de Poincaré s'étend à un nombre quelconque de paramètres, il permet le développement suivant les puissances d'un paramètre λ et des conditions initiales x_0 à l'aide de la translation préalable

$$x = x_0 + y,$$

et ceci non seulement dans un intervalle restreint du temps, mais dans l'intervalle le plus étendu sous la condition d'écart λ assez petit.

11. Premiers résultats généraux sur les trajectoires de la dynamique. — Les mouvements d'un système matériel à n paramètres dépendent des $2n$ paramètres de conditions initiales ; les trajectoires dépendent de $(2n - 1)$ paramètres, en général.

D'après le théorème d'unicité il existe une trajectoire unique issue de tout point du domaine D_{2n} de continuité dans l'espace des états de mouvement; cette trajectoire progresse constamment dans le domaine ou vient s'arrêter à une borne, et les trajectoires arrêtées aux bornes sont spéciales.

Il est indiqué d'essayer d'examiner en premier lieu l'étendue dimensionnelle d'une trajectoire.

En se bornant au cas analytique, nous prenons une trajectoire issue d'un point intérieur au domaine de continuité ou point régulier ; cette trajectoire

$$x_i = f_i(x_1^0, \ldots, x_{2n}^0, t - t_0)$$

apparaît comme définie par des fonctions analytiques des conditions initiales. Ces équations admettent dans un domaine suffisamment restreint autour des valeurs de départ x_i^0, t_0, une solution unique donnée par le mouvement inverse

$$x_i^0 = f_i(x_1, \ldots, x_{2n}, t_0 - t).$$

Si l'on excepte la solution particulière réduite à l'équilibre, une au moins des dérivées partielles $\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_0$ est différente de zéro ; on peut donc déterminer $(t - t_0)$ d'une façon unique et par substitution de la valeur valeur de $(t - t_0)$ le mouvement est défini par des intégrales premières analytiques,

$$F_i(x_1, \ldots, x_{2n}) = \text{const.} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n - 1),$$
$$x_1^0 = f_1(x_1, \ldots, x_{2n}, t_0 - t)$$

dont les $(2n - 1)$ premières sont indépendantes du temps et définissent la trajectoire.

En suivant une trajectoire on définira des suites successives de fonctions F_i, chaque suite étant utilisée dans un domaine suffisamment restreint. Il sera exceptionnel qu'en parcourant une trajectoire jusqu'à $t = \infty$, ces suites de fonctions F_i puissent être remplacées par une suite unique de fonctions uniformes ou à un nombre fini de déterminations.

Un résultat marquant de Poincaré indique en effet que les équations de la dynamique n'admettent en général aucune intégrale première uniforme, quelles que soient les conditions initiales, en dehors des intégrales premières classiques, et, l'on n'envisage pas la recherche d'un résultat pour des conditions initiales particularisées.

Il est intuitif qu'une intégrale première non uniforme ne peut indiquer physiquement aucune limitation dimensionnelle à la région couverte par une trajectoire.

S'il existe p intégrales premières uniformes et indépendantes du temps, une trajectoire pourra couvrir d'une façon dense une région à $(2n - p)$ dimensions au plus du domaine de continuité.

Mais elle pourra couvrir une région à moins de $(2n - p)$ dimensions; la trajectoire la plus simple apparaît comme la trajectoire fermée, correspondant nécessairement à un mouvement périodique. Ce fait assure une importance tout à fait spéciale à la recherche des mouvements périodiques.

Nous examinerons d'abord les caractères que l'on peut déceler par l'étude qualitative des mouvements intégrables à l'aide de quadratures portant sur des fonctions uniformes. Les résultats seront d'une simplicité exceptionnelle puisqu'en général les quadratures porteraient sur des fonctions non uniformes à une infinité de déterminations.

D'ailleurs les problèmes de cette catégorie avec un nombre suffisant d'intégrales premières uniformes s'intègrent à l'aide de variables convenables d'après la notion de multiplicateur, par séparation de variables. Un système différentiel de ce type séparable est évidemment exceptionnel, car une variable agit par inertie sur les autres.

Nous examinerons ensuite les résultats les plus simples sur l'étude qualitative des trajectoires générales de la dynamique.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES INTÉGRABLES PAR QUADRATURES DE FONCTIONS UNIFORMES.

1. Mouvements cycliques à deux ou plusieurs paramètres. — Les exemples les plus simples de la mécanique classique à n paramètres sont ceux pour lesquels il existe, en dehors de l'intégrale des forces vives, $(n - 1)$ intégrales cycliques.

Le cas de n paramètres cycliques se ramène au problème géodésique d'un espace euclidien.

On peut citer :

Les problèmes de forces centrales dépendant uniquement de la distance r;

Le mouvement d'un élément matériel sur une sphère ou une surface de révolution à axe vertical z, sous l'influence de la pesanteur ou d'une fonction des forces $U(z)$ ou $U(r)$;

Des mouvements de solides suspendus par un point ou des assemblages de solides, et, en particulier, la toupie pesante et de révolution de Lagrange et ses généralisations $U(z)$.

Dans les mouvements à deux paramètres des premières catégories, pour des conditions initiales arbitraires, la variable z ou r est vibratoire, la variable θ de rotation autour du pôle ou de l'axe de la surface est précessionnelle et l'avance de précession pour une période de z n'est pas commensurable avec 2π.

La trajectoire oscille entre deux parallèles limites, elle couvre d'une façon dense la bande de surface comprise entre ces deux parallèles. Les deux parallèles limites peuvent être choisis à volonté sous la condition que le plus petit de ces parallèles corresponde à la plus grande valeur de la fonction des forces $U(z)$.

Si l'avance de précession est commensurable avec 2π la trajectoire est fermée, et il existe ainsi une infinité de mouvements périodiques dépendant d'une seule relation entre les conditions initiales.

Lorsque la surface s'étend à l'infini la trajectoire peut comporter une seule vibration s'étendant jusqu'à l'infini et correspondant ainsi au cas monotone que l'on peut regarder comme limite du cas vibratoire.

Dans le cas où les parallèles limites viennent se confondre, la variable uniforme z ou r est *stationnaire*, le mouvement est *stationnaire* en prenant le qualificatif stationnaire dans un sens restreint, opposé à progressif.

Dans le cas où l'un des parallèles limites devient double, le mouvement est asymptotique à un mouvement stationnaire.

Dans les mouvements du type toupie de Lagrange généralisée avec au moins trois paramètres, par exemple les trois angles d'orientation d'Euler θ, φ, ψ, on a l'intégrale des forces vives et les deux intégrales cycliques relatives à φ et ψ.

La variable θ (ou $z = \cos\theta$) a les caractères de mouvement du cas précédent : vibratoire, monotone ou révolutif, stationnaire, asymptotique à une valeur stationnaire.

Les variables ψ et φ sont précessionnelles et pour des conditions initiales arbitraires les deux avances de précision pour une période de θ sont différentes de zéro, incommensurables entre elles et avec 2π.

On peut représenter les trajectoires dans un espace de Riemann correspondant à la force vive $2T$ ou dans un espace ponctuel.

Si l'on regarde θ et ψ comme coordonnées géographiques du pied P de l'axe de la toupie, sur une sphère dont le centre O est la pointe fixe de cette toupie, il suffit de faire tourner un vecteur, d'intensité constante PM inférieure à OP porté par l'axe de la toupie, dans le plan méridien vertical zOP, d'un angle égal ou proportionnel à la rotation propre φ. Le point M donne une représentation univoque, dans un domaine fini, et adaptée aux types précessionnels des variables de rotation ψ et φ.

Pour des conditions initiales arbitraires, la trajectoire de P couvre une bande de sphère limitée par deux parallèles, dont l'un peut être nul ou couvre la sphère entière. La trajectoire de M remplit d'une façon dense un domaine à trois dimensions du type tore, le point M repasse une infinité de fois dans le voisinage de toute position antérieure, sauf arrêt par une discontinuité de la fonction des forces.

Si l'on choisit des conditions initiales telles que l'avance précessionnelle de ψ soit nulle ou commensurable avec 2π, la trajectoire de P est fermée et la trajectoire de M remplit d'une façon dense un domaine ayant seulement deux dimensions de la forme tore; si en même temps l'avance précessionnelle de φ est nulle ou commensurable avec 2π, la trajectoire de M est fermée et le mouvement est périodique.

Si la variable θ a un mouvement asymptotique, la trajectoire de M est asymptotique à un domaine à une ou deux dimensions.

Enfin, dans les mouvements cycliques, si la vitesse initiale est nulle ou si les conditions initiales rendent nulles les constantes d'intégrales cycliques, les trajectoires sont géodésiques de l'espace de Riemann, et chacune d'elles est parcourue par une infinité de mouvements dépendant du paramètre intensité de la vitesse initiale.

Sur une trajectoire non géodésique la vitesse ne peut s'annuler, la trajectoire progresse constamment.

2. Mouvements multipériodiques. — Nous considérons les mouvements pour lesquels la fonction lagrangienne se présente sous *la forme additive à variables séparées*. On peut toujours ramener à la forme réduite

$$2T = q_1'^2 + \ldots + q_n'^2,$$
$$U = U_1(q_1) + \ldots + U_n(q_n).$$

On rencontre en particulier ces circonstances dans l'étude des petits mouvements dans le voisinage d'une position d'équilibre.

Les diverses variables q_i se calculent d'une façon séparée par des intégrales de force vive

$$q_i'^2 = 2U_i + 2E_i.$$

Chacune des variables est vibratoire, monotone, stationnaire ou asymptotique et la forme de la trajectoire de chacun des couples (q_i, q_i') marque les circonstances de leur mouvement.

Dans le cas où toutes les variables q_i sont périodiques, les périodes T_i sont données par des intégrales définies dont les limites dépendent des conditions initiales, et il n'existe entre les fréquences aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers.

Une trajectoire quelconque tracée dans l'espace cartésien $q_1 \ldots q_n$ remplit d'une façon dense un parallélépipède dont les arêtes sont parallèles aux axes; elle s'enroule d'une façon compliquée dans ce parallélépipède en allant d'une face à une autre, et elle repasse une infinité de fois à un écart infinitésimal imposé de toute position antérieure.

S'il existe entre les fréquences p relations linéaires et homogènes à coefficients entiers, il y a dégénérescence et le domaine rempli par une trajectoire est seulement à $(n-p)$ dimensions.

On peut comparer les vibrations générales aux vibrations simples en utilisant une méthode de calcul indiquée par Weierstrass [7], pour montrer la périodicité de $q_i(t)$. La méthode consiste à exprimer $q_i(t)$ à l'aide de la vibration simple de mêmes bornes, soient a_i et b_i. Si l'on a

$$2U_i + 2E_i = (q_i - a_i)(b_i - q_i) W_i(q_i) \qquad (a_i < b_i),$$

la fonction W_i reste positive et différente de zéro, et en posant

$$w_i = \int_{a_i}^{q_i} \frac{dq_i}{\sqrt{(q_i - a_i)(b_i - q_i)}},$$

on a

$$q_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i) + \frac{1}{2}(a_i - b_i)\cos w_i,$$

$$t = \int_0^{w_i} \frac{dw_i}{+\sqrt{W_i}}.$$

En faisant l'inversion, la vibration générale $q_i(t)$ apparaît comme une vibration simple d'une fonction monotone $w_i(t)$, précessionnelle ou cyclique, finie et infinie avec t et augmentant de 2π quand t augmente de la période T_i.

Enfin, en développant la fonction périodique $q_i(t)$ en série de Fourier, toute vibration apparaît comme la somme d'une vibration simple principale et de ses harmoniques.

3. **Problèmes de Liouville.** — L'étude des équations de la dynamique à l'aide de l'équation de Jacobi a donné les cas les plus étendus intégrables par quadratures.

Liouville a montré que pour des assemblages définis par

$$2T = (A_1 + \ldots + A_n)(B_1 q_1'^2 + \ldots + B_n q_n'^2),$$
$$U = \frac{U_1 + \ldots + U_n}{A_1 + \ldots + A_n},$$

A_i, B_i, U_i étant des fonctions de la seule variable q_i, l'équation de Jacobi admet une intégrale complète se présentant sous *la forme additive à variables séparées*

$$V = -Et + S_1(q_1) + \ldots + S_n(q_n)$$

dont les divers termes et par suite les mouvements se calculent par quadratures [8].

Les mouvements peuvent être définis par les équations

$$\frac{dt}{A_1 + \ldots + A_n} = \frac{\sqrt{B_i}\,dq_i}{\sqrt{2EA_i + 2U_i + 2a_i}} = du,$$

déduites immédiatement des formes habituellement utilisées.

Si l'on introduit le temps auxiliaire u, les variables q_i exprimées à l'aide de u sont données par des quadratures du type rencontré dans le paragraphe précédent. En se bornant aux cas dans lesquels les paramètres $q_1, \ldots, q_n$ restent finis, les trajectoires seront donc les trajectoires multipériodiques.

Dans le domaine du mouvement, la somme $(A_1 + \ldots + A_n)$ reste finie positive et différente de zéro; le temps auxiliaire u est donc une fonction monotone croissante de t, finie et infinie avec t, et les bornes de réalité du système différentiel sont effectivement et multiplement atteintes par les trajectoires. Toutefois le temps auxiliaire $u(t)$ n'a pas de caractère précessionnel simple.

4. Problèmes intégrables à l'aide de l'équation de Jacobi. — P. Stäckel a posé le problème de la recherche des fonctions hamiltoniennes pour lesquelles l'équation aux dérivées partielles de Jacobi admet une intégrale complète sous *la forme additive à variables séparées*, et donné une solution particulière dans le cas d'un nombre quelconque n de paramètres [9].

M. Lévi Civita [10] a présenté les conditions sous une forme mieux adaptée aux recherches et indiqué des solutions; M. Burgatti [11] et M. Dall'Acqua [12] ont résolu ensuite complètement la question.

Le cas de Stäckel apparaît comme l'un des types les plus généraux et des plus caractéristiques, intégrables par quadratures; il se présente comme une généralisation du cas de Liouville avec la seule complication de la forme additive à variables séparées.

En nous bornant au cas de trois paramètres et prenant les notations d'Appell [8], le mouvement est défini par les équations

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\varphi_1\,dq_1}{\sqrt{F_1}} + \frac{\varphi_2\,dq_2}{\sqrt{F_2}} + \frac{\varphi_3\,dq_3}{\sqrt{F_3}}, \\ 0 &= \frac{\psi_1\,dq_1}{\sqrt{F_1}} + \frac{\psi_2\,dq_2}{\sqrt{F_2}} + \frac{\psi_3\,dq_3}{\sqrt{F_3}}, \\ 0 &= \frac{\chi_1\,dq_1}{\sqrt{F_1}} + \frac{\chi_2\,dq_2}{\sqrt{F_2}} + \frac{\chi_3\,dq_3}{\sqrt{F_3}}, \end{aligned}$$

les fonctions φ_i, ψ_i, χ_i, F_i dépendant de la seule variable q_i de même indice.

Si l'on introduit trois temps auxiliaires u_1, u_2, u_3 définis par

$$du_1 = \frac{dq_1}{\sqrt{F_1}}, \qquad du_2 = \frac{dq_2}{\sqrt{F_2}}, \qquad du_3 = \frac{dq_3}{\sqrt{F_3}},$$

les paramètres q_1, q_2, q_3 sont, pour des conditions initiales arbitraires, et lorsque ces grandeurs restent finies, des fonctions périodiques des temps auxiliaires respectifs u_1, u_2, u_3.

Les équations du mouvement sont des équations linéaires en du_1, du_2, du_3 et si l'on désigne par Δ leur déterminant, par Φ_1, Φ_2, Φ_3 les coefficients du développement de ce déterminant par rapport aux éléments φ_1, φ_2, φ_3, on obtient par résolution

$$\frac{du_1}{\Phi_1} = \frac{du_2}{\Phi_2} = \frac{du_3}{\Phi_3} = \frac{dt}{\Delta}.$$

D'après l'expression de la force vive du systeme, les quotients $\frac{\Delta}{\Phi_1}$, $\frac{\Delta}{\Phi_2}$, $\frac{\Delta}{\Phi_3}$ sont finis positifs et différents de zéro; les temps auxiliaires u_1, u_2, u_3 sont donc des fonctions monotones et croissantes du temps t, finies et infinies avec t.

Les trajectoires dans un cas de Stäckel sont donc du *type multi-périodique* et remplissent d'une façon plus ou moins complexe le domaine de réalité du système différentiel.

Les cas de Liouville et Stäckel ont fait l'objet d'études très complètes [13]. Il est indiqué pour préciser les solutions dans le temps d'utiliser avec Staude les variables auxiliaires w_1, w_2, w_3 signalées par Weierstrass et qui présentent les paramètres q_1, q_2, q_3 comme vibrations simples de période 2π. Les temps auxiliaires w_1, w_2, w_3 sont, comme u_1, u_2, u_3, des fonctions croissantes du temps t, finies et infinies avec t; ils sont donnés par la résolution du système précédent intégré

$$\begin{aligned}
t + b_1 &= \int h_{11}(w_1)\,dw_1 + \int h_{12}(w_2)\,dw_2 + \int h_{13}(w_3)\,dw_3 \\
&= H_{11}(w_1) + H_{12}(w_2) + H_{13}(w_3), \\
b_2 &= \int h_{21}(w_1)\,dw_1 + \int h_{22}(w_2)\,dw_2 + \int h_{23}(w_3)\,dw_3 \\
&= H_{21}(w_1) + H_{22}(w_2) + H_{23}(w_3), \\
b_3 &= \int h_{31}(w_1)\,dw_1 + \int h_{32}(w_2)\,dw_2 + \int h_{33}(w_3)\,dw_3 \\
&= H_{31}(w_1) + H_{32}(w_2) + H_{33}(w_3).
\end{aligned}$$

La résolution ou inversion de ce système dont le jacobien est proportionnel au déterminant Δ est présupposée dans les indications données antérieurement, elle est possible, univoque et continue dans toute l'étendue du temps ou des variables w_1, w_2, w_3 en admettant la continuité des h, ainsi que l'a montré très simplement M. Hadamard [14].

L'étude des $w_i(t)$ se déduit de l'étude de ces grandeurs comme fonctions des constantes b_1, b_2, b_3; elle constitue l'étude des trajectoires correspondant à une intégrale complète fixée.

Les fonctions h étant périodiques et de période 2π, les fonctions H sont précessionnelles et quand w_1 par exemple, augmente de 2π, les fonctions H_{11}, H_{21}, H_{31} augmentent de constantes ω_{11}, ω_{21}, ω_{31} données par des intégrales définies en q_1, et réciproquement quand b_1, b_2, b_3 augmentent de ω_{11}, ω_{21}, ω_{31}, w_1 seul augmente de 2π en raison de la correspondance univoque et continue entre les deux groupes $(w_1 w_2 w_3)$, $(b_1 b_2 b_3)$.

On peut toujours faire sur $b_1 b_2 b_3$ une transformation linéaire telle que la variable s_i remplaçant b_i augmente *seule* d'une constante choisie à volonté quand w_i augmente de 2π. Si l'on impose l'augmentation uniforme de 2π, cette transformation est

$$\begin{aligned} 2\pi(t+b_1) &= \omega_{11}s_1+\omega_{12}s_2+\omega_{13}s_3, \\ 2\pi b_2 &= \omega_{21}s_1+\omega_{22}s_2+\omega_{23}s_3, \\ 2\pi b_3 &= \omega_{31}s_1+\omega_{32}s_2+\omega_{33}s_3, \end{aligned}$$

ce choix uniforme de 2π n'étant possible que si le déterminant des ω_{ik} est différent de zéro.

Les w_i apparaissent comme des fonctions univoques continues et précessionnelles des arguments s_1, s_2, s_3; elles augmentent de 2π quand un de ces arguments augmente de 2π et par suite si l'on fixe une trajectoire, c'est-à-dire b_1, b_2, b_3, les fonctions $q_i(t)$ sont des fonctions des trois arguments

$$s_1=\nu_1 t+\alpha_1, \qquad s_2=\nu_2 t+\alpha_2, \qquad s_3=\nu_3 t+\alpha_3,$$

périodiques séparément par rapport à chacun de ces arguments, et de périodes respectives $\frac{2\pi}{\nu_1}$, $\frac{2\pi}{\nu_2}$, $\frac{2\pi}{\nu_3}$ en t, ou de fréquences proportionnelles à ν_1, ν_2, ν_3 dépendant des conditions initiales.

Nous désignerons de telles fonctions de plusieurs arguments, périodiques séparément pour chacun d'eux, sous le nom de fonctions multipériodiques. Weierstrass a étendu à ces fonctions le développement en série trigonométrique de Fourier à l'aide d'une série multiple.

Si dans un problème de Stäckel ou Liouville, on prend comme nouvelles variables s_1, s_2, s_3 et les variables canoniques conjuguées, on sera ramené à un problème dans lequel les paramètres s_1, s_2, s_3 regardés comme paramètres de position sont tous cycliques. On pourra donc intégrer un problème de Stäckel ou Liouville en cherchant les changements de variables canoniques qui ramènent à un problème dans lequel toutes les variables sont cycliques. L'intégration, à ce point de vue, des problèmes à variables séparables ou conduisant à des fonctions multipériodiques, a donné lieu d'une façon récente aux études complètes qui ont servi de base à la Mécanique quantique ou à la Mécanique de l'atome [15].

5. **Résultats qualitatifs généraux.** — Les études des problèmes principaux intégrables à l'aide de quadratures portant sur des fonctions uniformes et représentables dans *un domaine ponctuel fini*, font ressortir les résultats qualitatifs suivants :

Les paramètres $q_1, \ldots, q_n$ définissant la position du système sont des fonctions périodiques, précessionnelles ou multipériodiques du temps t.

Les fonctions périodiques et multipériodiques peuvent s'exprimer comme vibrations simples d'arguments précessionnels ou multiprécessionnels.

Les trajectoires remplissent d'une façon dense, soit un domaine à n dimensions, soit un domaine à $(n-p)$ dimensions dans les cas de dégénérescences où il existe p relations entre les fréquences; elles repassent une infinité de fois à un écart inférieur à une limite imposée de toute position antérieure ou de tout point du domaine. Nous dirons, en adoptant la définition de M. Esclangon [16], que les fonctions q_i ou les trajectoires sont *quasi-périodiques*.

La démonstration élémentaire de quasi-périodicité donnée par Kronecker dans le cas du rectangle et de deux vibrations simples s'applique aux cas les plus généraux.

Les trajectoires sont périodiques, cycliques, multipériodiques ou du type multipériodique; elles sont quasi-périodiques sauf le cas exceptionnel de mouvement asymptotique à un mouvement stationnaire qui apparaît comme cas limite d'une ou plusieurs fréquences nulles.

Lorsque le domaine du mouvement a une étendue infinie, la quasi-périodicité disparaît; il n'y a intérêt à faire la représentation de ce domaine sur un domaine fini que dans les cas où le système mécanique jouit de la propriété de quasi-périodicité, et il suffit qu'à deux positions voisines du système correspondent deux points voisins du nouveau domaine fini comme dans les exemples cités de variables cycliques.

CHAPITRE III.

ÉTUDE QUALITATIVE D'UNE TRAJECTOIRE RÉELLE.

1. Équations différentielles des trajectoires et loi de description. — Les recherches sont presque entièrement dues à M. Painlevé [17] et M. Hadamard [18].

Nous exposerons les résultats principaux en nous plaçant dans l'Espace de Riemann, nous adopterons les qualificatifs introduits par M. Painlevé et nous admettrons dans toute leur généralité les théorèmes d'unicité et de continuité pour l'intégration des systèmes différentiels.

L'idée essentielle de départ de M. Painlevé est la séparation de l'étude des trajectoires et de l'étude du mouvement sur ces trajectoires.

Nous formons, d'après les équations de Lagrange, en éliminant le temps, les équations différentielles des trajectoires à l'aide d'un paramètre u qui pourra être, soit l'un des paramètres de position q_1 (M. Painlevé), soit l'arc s de la trajectoire dans sa représentation sur un espace de Riemann, soit une grandeur de caractère imposé ou choisi en fonction finie ou différentielle de la position.

En posant

$$q(t) = q(u), \qquad \frac{dq}{du} = \overline{q}', \qquad \frac{dq}{dt} = \overline{q}' \frac{du}{dt}, \qquad f(q, \overline{q}') = \overline{f},$$

les équations de Lagrange s'écrivent, d'après l'homogénéité de T en q'_i,

$$(1) \qquad \frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \overline{q}'_i} \frac{d^2 u}{dt^2} + \left[\frac{d}{du} \left(\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \overline{q}'_i} \right) - \frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial q_i} \right] \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = \mathrm{Q}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

elles constituent n équations déterminant les $q_i(u)$ et $u(t)$ quand on les complète par l'équation de définition de u.

En multipliant par $dq_1, \ldots, dq_n$ et ajoutant, on forme la combinaison des forces vives

$$d\mathrm{T} = d\left[\overline{\mathrm{T}} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right] = \mathrm{Q}_1 \, dq_1 + \ldots + \mathrm{Q}_n \, dq_n,$$

qui permet de calculer $\frac{d^2 u}{dt^2}$ en fonction de $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ et en portant dans les équations précédentes, on obtient les n équations

$$2\overline{T}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{2\overline{T}\, Q_i - \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{q}'_i}(Q_1 \overline{q}'_1 + \ldots + Q_n \overline{q}'_n)}{\sqrt{2\overline{T}}\, \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{2\overline{T}}}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{q}'_i}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i}} = \frac{R_i}{S_i},$$

qui se réduisent formellement à $(n-1)$.

On peut ainsi présenter le système des équations du mouvement sous la forme

$$(2)\quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\overline{T}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{R_1}{S_1} = \ldots = \frac{R_n}{S_n} = 2\int Q_1\, dq_1 + \ldots + Q_n\, dq_n + 2E,$$

en désignant par s l'arc de trajectoire dans l'espace de Riemann.

Les $(n-1)$ égalités formées entre les rapports $\frac{R_i}{S_i}$ se réduisent formellement à $(n-2)$ d'après leur origine.

L'intégration notée dans le dernier terme est purement formelle ou doit être faite sur la trajectoire; l'équation apportée par ce dernier terme doit être différentiée, c'est l'équation ordinaire des forces vives sous forme différentielle, sauf dans le cas où il existe une fonction U des forces.

Les $(n-1)$ équations formées par les $(n+1)$ derniers termes de (2)

$$(3)\quad \frac{R_1}{S_1} = \ldots = \frac{R_n}{S_n} = 2\int Q_1\, dq_1 + \ldots + Q_n\, dq_n + 2E \qquad (= 2U + 2E),$$

auxquelles on adjoint une équation de choix pour u, constituent les n équations des trajectoires. La loi de description est ensuite fournie à l'aide de $u(t)$ donné par le second terme de l'équation (2), c'est-à-dire par l'équation des forces vives sur la trajectoire ou une autre équation nécessairement identique.

Des équations du type (2) ont été formées par divers auteurs [19] parfois à l'aide de moyens variationnels complexes.

Lorsque le champ de forces dépend d'une fonction des forces U, les équations des trajectoires peuvent être obtenues à l'aide de l'action maupertuisienne,

$$S = \int_{u_0}^{u} \sqrt{2\overline{T}(U+E)}\,du.$$

Les conditions exprimant que cette action est stationnaire, s'écrivent en les résolvant en $(U+E)$

$$\frac{2\overline{T}\dfrac{\partial U}{\partial q_i} - \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{q}'_i}\dfrac{dU}{du}}{\sqrt{2\overline{T}}\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\overline{T}}}\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{q}'_i}\right) - \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial q_i}} = 2U + 2E.$$

Ce calcul indique l'aspect le plus simple à adopter dans le calcul antérieur et il suffit d'y ajouter l'équation des forces vives pour retrouver les équations (2).

Parmi les choix de paramètre u on note : l'un des paramètres q_i en écartant les mouvements réduits à l'équilibre, et l'arc s de l'espace de Riemann.

Cet arc s correspond à la condition du premier ordre $2\overline{T} = 1$, et conduit aux équations les plus simples

$$(4)\quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{Q_i - \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{q}'_i}(Q_1\overline{q}'_1 + \ldots + Q_n\overline{q}'_n)}{\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{q}'_i}\right) - \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial q_i}} = 2\int Q_1 dq_1 + \ldots + Q_n dq_n + 2E.$$

On obtient ainsi comme équations différentielles des trajectoires $(n-2)$ équations du deuxième ordre $\left(\text{rapports } \dfrac{R_i}{S_i}\right)$, une équation du troisième ordre (terme du travail), et une équation du premier ordre.

On retrouve le fait que les trajectoires dépendent de $(2n-1)$ paramètres.

Il y a exception cependant dans le cas d'un problème de géodésiques. Un tel problème est solutionné par les équations

$$S_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad S_n = 0, \qquad 2^{T} = 1,$$

dont les n premières, du second ordre, se réduisent à $(n-1)$. Ces géodésiques ne dépendent que de $(2n-2)$ paramètres et sont parcourues par une infinité de mouvements dont la vitesse constante est arbitraire.

2. **Domaine de continuité.** — Nous supposons que les positions réelles du système soient définies à l'aide de paramètres réels.

Nous résolvons les équations de Lagrange par rapport aux accélérations q'' et nous obtenons un système de $2n$ équations du premier ordre en q, q'.

Dans l'espace des états de mouvements nous prenons comme bornes du domaine de continuité D_{2n} ou comme points singuliers les points q de discontinuité du champ de forces, des coefficients de la force vive $2T$, et de leurs dérivées premières et secondes, et, accidentellement, les zéros du discriminant Δ de la forme quadratique $2T$. La singularité d'un zéro de Δ peut se réduire à une apparence, toutefois nous ne traverserons pas ce zéro. Il n'y a pas de borne en q'.

Le domaine D_{2n} peut s'étendre à l'infini et ceci notamment par rapport aux vitesses q'; nous bornons ce domaine à distance très grande en q' et s'il y a lieu en q.

Pour passer au domaine de continuité D_n dans l'espace de Riemann, il suffit de prendre comme bornes les points singuliers précédents et de compléter par l'étude des vitesses infiniment grandes atteintes au bout d'un temps fini.

Si le système tend au bout d'un temps fini vers une position régulière à distance finie, les vitesses tendent vers des limites finies et l'arc de trajectoire riemannienne parcouru est fini.

Cette propriété importante a été démontrée directement par M. Painlevé en utilisant l'élément d'intégrale aboutissant au temps limite.

Le résultat est intuitif quand il existe une fonction des forces d'après l'intégrale des forces vives.

Le mouvement se poursuit donc d'une façon régulière et l'arc de trajectoire parcouru au temps t est donné par

$$(5)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\int Q_1 dq_1 + \ldots + Q_n dq_n + 2E = \Phi(t),$$

l'intégrale étant calculée sur la trajectoire, et $\Phi(t)$ nécessairement positif ou nul étant continu ainsi que ses dérivées première et seconde.

En prenant comme sens positif sur la trajectoire le sens du mouvement initial

$$s(t) = \int_0^t + \sqrt{\Phi(t)}\,dt,$$

jusqu'au premier zéro de la vitesse.

La fonction $s(t)$ est monotone, continue ainsi que ses dérivées première et seconde, et sa dérivée première est différente de zéro; donc la fonction inverse $t(s)$ est monotone, continue ainsi que ses dérivées première et seconde, dans l'intervalle limité par le premier zéro de la vitesse. En substituant $t(s)$ dans les fonctions $q_i(t)$ on obtient le résultat suivant :

Les domaines de continuité pour le système différentiel en t du mouvement et pour le système différentiel en s des trajectoires riemanniennes sont identiques, les bornes du domaine commun sont réduites aux bornes positionnelles, les vitesses ne peuvent être discontinues ou infinies qu'en ces bornes.

Toutefois il sera nécessaire d'examiner pour les trajectoires riemanniennes le passage aux points de vitesse nulle ou tendant vers zéro; la question se résoudra d'elle-même et on peut l'examiner d'avance d'après $2\overline{T} = 1$ qui indique que les $\overline{q}'$ restent finis.

3. **Les diverses catégories de trajectoires. Trajectoires de type général.** — Dans le domaine de continuité riemannien on aperçoit diverses catégories de trajectoires :

1° Les trajectoires restant dans un domaine fini sans atteindre une borne;

2° Les trajectoires allant à l'infini, dans le cas d'un domaine infini;

3° Les trajectoires particulières sur lesquelles la vitesse s'annule ou tend vers zéro;

4° Les trajectoires particulières allant aux bornes du domaine.

Soit une trajectoire, partant d'un point M_0 régulier, calculée par intégration du système (4); les fonctions $\overline{q}(s)$ sont continues ainsi que $\overline{q}'$, $\overline{q}''$, obtenues par pas successifs et formées par une infinité de suites de prolongements.

En substituant cette solution dans (4) on obtient la loi de description par l'équation

$$(6) \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{B_t}{S_t} = 2\int Q_1\,dq_1 + \ldots + Q_n\,dq_n + 2E = \Phi(s),$$

la fonction $\Phi(s)$, calculée d'après le terme intégral, étant continue ainsi que ses dérivées première et seconde et ayant le même caractère complexe que les fonctions $q(s)$.

Les deux valeurs de la vitesse montrent que *toute trajectoire est parcourue par un mouvement et le mouvement inverse* ou à vitesses opposées en chaque point.

Ce fait élémentaire provient de ce que les équations de Lagrange sont paires en t.

Si l'un au moins des rapports $\frac{R_i}{S_i}$ est déterminé, il en est de même de la constante E, la trajectoire et les deux mouvements inverses correspondent à une valeur unique de E, et le temps pour l'un de ces mouvements est donné par l'intégrale

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{+\sqrt{\Phi(s)}}. \tag{7}$$

Pour qu'une courbe solution du système différentiel des trajectoires soit trajectoire de mouvement réel ou *trajectoire vraie*, il faut qu'en quelque région de cette courbe, dans laquelle on prend s_0, la fonction $\Phi(s)$ soit positive. Les courbes ou portions de courbes sur lesquelles $\Phi(s)$ est négative sont trajectoires vraies dans le champ de forces opposé, ou dans le changement de t en it, elles sont dites *trajectoires conjuguées*.

Nous nous bornons aux trajectoires vraies.

Sur la trajectoire de type général, la vitesse riemannienne est finie et ne peut s'annuler; le mouvement est monotone, la trajectoire progresse constamment et sa longueur est généralement infinie; à la limite pour le temps infini, la vitesse peut tendre vers une intensité nulle, finie, infinie, ou ne tendre vers aucune limite numérique ou vectorielle, la trajectoire peut tendre ou non vers une limite.

La trajectoire unique serait en effet dans le cas contraire engendrée à l'aide du mouvement inverse, soit à partir d'un arrêt régulier par des vitesses q' toutes nulles, soit à partir d'un point singulier; elle ne dépendrait que de n paramètres au plus, tandis qu'elle dépend de $(2n - 1)$ paramètres.

Si à la limite infinie du temps la vitesse riemannienne ne tend pas vers zéro, cette vitesse admet un minimum et la trajectoire a une longueur infinie.

La continuité de la fonction $\Phi(s)$ permet de discerner les types de mouvements possibles. L'existence de ces types n'est pas conséquence de la continuité, et notamment *le fait important que la trajectoire de type général est monotone est imposé par la dépendance paramétrique*.

Les trajectoires à vitesse très grande, ou à constante d'énergie très grande, satisfont sensiblement aux équations

$$S_1 = 0, \quad \ldots, \quad S_n = 0;$$

elles tendent vers des géodésiques de l'espace de Riemann.

4. **Trajectoires mixtes.** — Les trajectoires particulières sur lesquelles il existe un point régulier M de vitesse nulle dépendent de n paramètres et en ce point la tangente à la trajectoire est la ligne de forces du champ de forces.

Le point M de vitesse nulle est un zéro de $\Phi(s)$; ce zéro sera multiple si

$$d\Phi = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \ldots + Q_n dq_n = 0,$$

c'est-à-dire dans le seul cas d'une position d'équilibre.

Un point régulier M distinct d'une position d'équilibre est atteint dans un temps fini d'après l'intégrale (7) et le mouvement d'arrivée est continué par le mouvement inverse. Le point M est de rétrogradation, la trajectoire est dite *mixte*.

Mais la nature fonctionnelle complexe de $\Phi(s)$ ne permet pas de séparer les trajectoires mixtes ni de situer leurs rétrogradations.

Si la borne de rétrogradation M d'une trajectoire mixte tend vers une position régulière d'équilibre, le mouvement d'après l'intégrale (7) est *asymptotique* à cette position d'équilibre nécessairement instable d'après le mouvement inverse. La tangente à la trajectoire peut tendre vers une position limite ou être indéterminée. Les trajectoires dans le voisinage d'une position d'équilibre instable donnent des exemples.

Une trajectoire mixte admet en général un point unique de rétrogradation et le mouvement après la rétrogradation est du type général ou arrêté à une borne du domaine de continuité.

Il existe des trajectoires mixtes ayant plusieurs points de rétrogradation, le mouvement entre deux points consécutifs est périodique.

M. Painlevé a étudié le cas d'un nombre fini ou infini de rétrogradations et indiqué un exemple simple du cas exceptionnel d'une infinité de points de rétrogradations ayant comme limite une position d'équilibre.

5. **Trajectoires remarquables.** — Si pour une trajectoire les rapports $\frac{R_i}{S_i}$ dans les équations (4) se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, la constante d'énergie E ne peut être calculée qu'en intégrant l'équation des forces vives sur la trajectoire, cette constante E est arbitraire. La trajectoire est capable d'une infinité de mouvements correspondants, on la qualifie de *trajectoire remarquable*.

Les trajectoires remarquables sont les solutions communes aux deux systèmes différentiels

$$R_i = 0, \qquad S_i = 0,$$

et la condition est suffisante; le mouvement est ensuite donné par l'équation des forces vives.

Les trajectoires remarquables, si elles existent, sont donc les géodésiques solutions du système R_i,

$$\frac{\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{q}'_1}}{Q_1} = \ldots = \frac{\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{q}'_n}}{Q_n} = \frac{2\overline{T}}{Q_1 \overline{q}'_1 + \ldots + Q_n \overline{q}'_n}.$$

Le dernier rapport est conséquence des premiers et la condition exprime que *les trajectoires remarquables sont les géodésiques de l'espace de Riemann qui sont en même temps lignes de forces.*

Les trajectoires remarquables sont donc des trajectoires isolées ou dépendant au plus de $(n-1)$ paramètres.

La plupart des problèmes intégrables par quadratures admettent cette dernière particularité.

Les trajectoires remarquables sont mixtes pour chacun de leurs points, et par suite, si leur famille est à $(n-1)$ paramètres, elle constitue l'ensemble des trajectoires mixtes.

Lorsque le mouvement sur une trajectoire remarquable est une oscillation, les bornes d'oscillation étant deux zéros de $\Phi(s)$ comprennent un maximum de vitesse. En ce maximum de vitesse le travail élémentaire est nul d'après l'équation (6), et comme la trajectoire remarquable est ligne de force, la force est nulle, l'oscillation traverse une position d'équilibre.

En un résumé succinct, on peut noter que par un point M arbitraire et régulier passent une infinité de trajectoires des types général, mixte ou remarquable. Une trajectoire progresse sans limite dans le domaine de continuité, ou est périodique, ou vient passer asymptotiquement par une position d'équilibre, ou vient s'enrouler asymptotiquement autour d'une position d'équilibre, ou s'arrête à une borné finie ou infinie du domaine.

Pour un point M régulier d'équilibre, il peut exister en outre des trajectoires exceptionnelles de singularités plus accentuées étudiées par M. Painlevé.

On peut se demander quelles sont les propriétés spéciales aux trajectoires de la dynamique.

Le fait le plus marquant est la limitation de la vitesse qui assure des bornes uniquement positionnelles au domaine de continuité et contribue à imposer la simplicité de la trajectoire de type général.

Les trajectoires mixtes proviennent de la parité en t du système différentiel et l'existence des trajectoires asymptotiques aux *seules* positions d'équilibre est imposée par l'existence de la combinaison des forces vives ou d'une combinaison de même nature.

6. **Propriétés de forme ou de situation des trajectoires réelles dans le domaine des états de mouvements.** — M. Hadamard [18] a cherché l'extension des propriétés rencontrées dans les problèmes intégrables par quadratures en étudiant une fonction positionnelle ou cinétique $V(q, q')$ le long d'une trajectoire générale de la dynamique.

Les résultats obtenus permettent d'assigner une région que la trajectoire doit traverser (sauf un cas exceptionnel) une infinité de fois et apportent des précisions intéressantes sur des points variés de l'étude complexe des trajectoires de la dynamique.

Soit

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_{2n}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n)$$

le système du premier ordre des équations du mouvement et dans l'espace des états de mouvement D_{2n} le domaine de continuité dans lequel les fonctions X_i et leurs dérivées partielles des premier et second ordre sont continues. Désignons par $V(x_1 \ldots x_{2n})$ une fonction univoque finie et admettant des dérivées partielles finies des premier, deuxième et troisième ordres dans le domaine D_{2n}.

En suivant une trajectoire régulière, c'est-à-dire se prolongeant jusqu'au temps infini, la fonction $V(t)$ sera continue ainsi que ses dérivées première et seconde.

Ou bien la fonction $V(t)$ présente une infinité de maximum et minimum successifs, ou bien à partir d'une valeur finie de t cette fonction est monotone.

Dans le premier cas les maximum et minimum vérifient l'équation

$$\frac{dV}{dt} = X(V) = X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + X_{2n} \frac{\partial V}{\partial x_{2n}} = 0 \tag{8}$$

qui représente un continu à $(2n - 1)$ dimensions du domaine D_{2n} et les maximum ou minimum vérifient l'une ou l'autre des inégalités

$$\frac{d^2V}{dt^2} = X[X(V)] \leqq 0, \tag{9}$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = X[X(V)] \geqq 0. \tag{10}$$

La trajectoire traverse donc une infinité de fois la surface (8) et cela successivement dans chacune des deux régions de cette surface déterminées respectivement par les inégalités (9) et (10). La limite des deux régions est le continu à $(2n - 2)$ dimensions défini par les égalités (9), (10) et se compose des points où la trajectoire est tangente à la surface (8).

Dans le second cas $V(t)$, après avoir traversé un nombre fini de maximum ou minimum, est monotone. Si l'on suppose V croissante, par exemple, cette fonction augmente indéfiniment avec t ou tend vers une limite finie.

Théorème de M. Hadamard. — *Si, lorsque la variable t augmente indéfiniment, la fonction $V(t)$ tend vers une limite et que ses $(n+1)$ premières dérivées existent et restent finies, les n premières d'entre elles tendent vers zéro.*

Il suffit de se borner à la dérivée première. Le théorème est intuitif si cette dérivée a une limite et M. Hadamard en donne une démonstration générale très simple.

D'après le choix de la fonction V, les fonctions V, $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d^2V}{dt^2}$, $\frac{d^3V}{dt^3}$, restent finies et par suite dans le cas monotone $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{d^2V}{dt^2}$ tendent vers zéro.

Lorsque la fonction $V(x_1 \ldots x_{2n})$ *et ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre restent finies, la trajectoire régulière traverse une infinité de fois chacune des régions de la surface* (8) *définies respectivement par les inégalités* (9) *et* (10)*; ou sinon elle est asymptotique à la section du continu à* $(2n-2)$ *dimensions qui sert de limite commune à ces deux régions par la surface* $V = V_1$, en désignant par V_1 la limite de V pour t infini.

Le théorème de M. Hadamard fait ainsi pressentir l'existence de solutions asymptotiques très générales; ces solutions sont d'ailleurs exceptionnelles comme le montrent d'autres recherches.

7. Propriétés de forme des trajectoires dans un domaine ponctuel. — Nous représentons les trajectoires dans le domaine ponctuel $q_1 \ldots q_n$ ou dans l'espace de Riemann correspondant, et nous nous bornons aux trajectoires régulières restant dans une région finie du domaine de continuité D_n.

Nous prenons une fonction $V(q_1 \ldots q_n)$ finie ainsi que ses dérivées partielles des trois premiers ordres dans la région contenant la trajectoire. Pour t fini, V; $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d^2V}{dt^2}$, $\frac{d^3V}{dt^3}$ restent finis, mais pour t infini les vitesses et par suite les dérivées peuvent augmenter indéfiniment. Cependant, s'il existe une fonction des forces, la vitesse riemannienne et par suite toutes les vitesses restent finies. Nous écarterons dans un cas plus général les trajectoires exceptionnelles sur lesquelles la vitesse augmente indéfiniment pour t infini.

Si la fonction V *est monotone*, lorsque t tend vers l'infini, V tend vers une limite V_1 et, d'après le théorème de M. Hadamard, $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{d^2V}{dt^2}$ tendent vers zéro. *La trajectoire est donc asymptotique à la surface limite* $V = V_1$ le long d'un continu de dimensions non précisé; cette trajectoire est donc exceptionnelle.

Le long d'une trajectoire régulière de type général, la fonction $V(q_1 \ldots q_n)$ *présente une infinité de maximum et minimum successifs, la trajectoire serpente indéfiniment entre les surfaces successives correspondantes,*

$$V = V_1, \qquad V = V_2, \qquad \ldots, \qquad V = V_k, \qquad \ldots;$$

elle présente une forme généralisée des trajectoires cycliques ou multipériodiques, elle se rapproche des formes imprévues que l'on peut réaliser en guidant à volonté cette trajectoire dans un domaine fini.

Sur une trajectoire choisie, il existe des fonctions positionnelles monotones augmentant indéfiniment avec t. L'arc riemannien s est de ce type, toutefois cet arc n'est pas une fonction uniforme de la position pour les diverses trajectoires d'un domaine.

Si l'on applique à cette fonction $s(t)$ le théorème de M. Hadamard, on voit que *si l'arc $s(t)$ ainsi que la vitesse $\frac{ds}{dt}$ restent finis quand t augmente indéfiniment, $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d^2 s}{dt^2}$ tendent vers zéro, la trajectoire supposée régulière est asymptotique à une position d'équilibre.*

8. Propriétés de situation des trajectoires dans un domaine ponctuel. — M. Hadamard a cherché à préciser les régions dans lesquelles se trouvent les maximums d'une fonction $V(q_1 \ldots q_n)$ en étudiant le système

$$\frac{dV}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2V}{dt^2} \leqq 0,$$

en supposant qu'il existe une fonction U des forces.

En résolvant les équations de Lagrange par rapport aux accélérations q'', le système précédent s'écrit

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial q_1} q'_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial q_n} q'_n = 0, \tag{11}$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{1}{\Delta} \sum_1^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)} + \Phi(q'_1, \ldots, q'_n) \leqq 0, \tag{12}$$

Δ étant le discriminant de la forme quadratique $2T$, F la forme adjointe, et Φ une forme quadratique en q' dont les coefficients dépendent des q.

Les résultats sont les plus précis pour les systèmes à deux paramètres.

Dans ce cas l'égalité (11) et l'intégrale des forces vives permettent en effet l'élimination des variables q' de la forme Φ.

Pour les maximum ou minimum de V ou de U, on a ainsi

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = \Delta(U, V) + 2\,\frac{U+E}{\Delta V}\,I_V,$$
$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \Delta U + 2\,\frac{U+E}{\Delta U}\,I_U,$$

$\Delta(U, V)$ ΔU, I_V étant des grandeurs positionnelles rencontrées par Darboux [20] dans la *Théorie des surfaces*, et ΔU étant positif.

Pour tout maximum de U on a $I_U \leqq 0$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $\Delta U = 0$, c'est-à-dire en une position d'équilibre.

Par un point quelconque de la région précédente il passe une trajectoire admettant en ce point un maximum de U. Il suffit en effet de choisir une vitesse de passage annulant $\frac{dU}{dt}$ pour rendre Φ négatif, et ensuite de prendre une intensité de vitesse assez grande pour que $-\Phi$ surpasse ΔU.

Divisons la surface sur laquelle nous représentons le mouvement en deux régions, l'une où I_U est négatif, l'autre où I_U est positif. Toute trajectoire générale passera une infinité de fois dans la première région qui sera qualifiée *d'attractive*, tandis qu'elle ne pourra rester constamment dans la seconde qui sera qualifiée de *répulsive*.

On arrive ainsi au résultat simple suivant :

Lorsque, sur une surface régulière et où U *est partout régulier, il n'y a qu'un nombre fini de positions d'équilibre, toute trajectoire qui ne passe pas une infinité de fois dans la région attractive est asymptotique à l'une de ces positions.*

Dans le cas d'une surface de révolution et d'une fonction des forces $U(r)$, la région mise en évidence par l'intégration à l'aide de quadratures et pour laquelle $\frac{dU}{dr}$ est négatif se confond avec la région attractive précédente.

Si l'on prend une fonction V quelconque et si l'on se limite aux trajectoires correspondant à une valeur choisie de la constante d'énergie E, les inégalités

$$\Delta(U, V) + 2\,\frac{U+E}{\Delta V}\,I_V \leqq 0,$$
$$\Delta(U, V) + 2\,\frac{U+E}{\Delta V}\,I_V \geqq 0$$

séparent la surface en deux régions, la première contenant les maximums de V, la seconde les minimums, et l'on a la conclusion suivante :

Toute trajectoire sur laquelle V *et ses dérivées partielles des trois premiers ordres restent finies, traverse successivement et une infinité de fois chacune des deux régions précédentes, à moins qu'elle ne soit asymptotique à une position d'équilibre instable ou à une trajectoire fermée définie par l'équation limite* $V = V_1$.

Les résultats obtenus par M. Hadamard l'ont conduit naturellement à une démonstration simple de la réciproque du théorème de Dirichlet :

Une position d'équilibre où la fonction des forces n'est pas maxima est instable.

CHAPITRE IV.

SOLUTIONS PARTICULIÈRES ET SOLUTIONS VOISINES.

1. **Introduction de paramètre.** — Certains systèmes différentiels contiennent des grandeurs constantes que l'on peut regarder comme paramètre λ arbitrairement petit.

On peut citer pour le problème des trois corps le rapport d'une ou deux des masses à la troisième quand ce rapport est petit; pour le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe, le produit supposé petit du poids par la distance du centre de gravité au point de suspension.

Lorsque l'on connaît une solution particulière $\overline{x}_i$ du système différentiel en faisant le changement de variables

$$x_i = \overline{x}_i + \lambda y_i \qquad (\text{ou} \quad \lambda^{r_i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

le système transformé est divisible par λ et est généralement développable suivant les puissances de λ dans le domaine de $\lambda = 0$.

On peut obtenir des solutions particulières en cherchant les solutions pour lesquelles quelques-unes des variables ou toutes les variables sont équilibrées, en cherchant des solutions à groupes de variables séparées ou périodiques ou trigonométriques.

Lorsque l'on prend comme départ une solution périodique, le système transformé dépend explicitement du temps et est périodique en t.

Lorsque l'on prend comme départ une position d'équilibre, le système transformé, si l'on utilise les équations de Lagrange résolues, se présente généralement sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dq'_i}{dt} = a_{i1}q_1 + \ldots + a_{in}q_n + \lambda X_{i2} + \lambda^2 X_{i3} + \ldots, \\ \dfrac{dq_i}{dt} = q'_i. \end{cases}$$

Si l'on utilise les équations canoniques, la fonction hamiltonienne dépendra du paramètre λ et pourra être présentée comme développée suivant les puissances de λ dans le domaine de $\lambda = 0$.

2. Solutions voisines. Méthode des perturbations. — Nous supposons vérifiées, pour un système différentiel dépendant d'un paramètre λ, les conditions d'application du théorème de Poincaré (Chap. I, 10), et nous développons le système différentiel ou la fonction hamiltonienne suivant les puissances de λ.

Nous admettons que pour $\lambda = 0$ nous ayons trouvé soit une solution particulière, soit une solution correspondant à des conditions initiales choisies ou imposées, soit la solution générale d'une façon finie, à l'aide de quadratures, par exemple.

Nous cherchons, pour λ petit, la solution correspondante, soit aux mêmes conditions initiales, soit à des conditions initiales voisines. Cette solution, d'après le théorème de Poincaré, existe dans le même intervalle du temps pour λ assez petit et est une fonction continue des conditions initiales et du paramètre λ.

Lorsqu'on impose les mêmes conditions initiales en cherchant la solution sous la forme

$$x_i = x_i^0 + \lambda x_i^1 + \lambda^2 x_i^2 + \ldots,$$

les termes successifs se calculent par quadratures en fonction des termes précédents; on peut considérer qu'ils proviennent des termes de même ordre en λ du système différentiel ou de la fonction hamiltonienne qui apparaît comme fonction perturbatrice de la solution particulière. On obtient la méthode de calcul dite des perturbations pour la recherche des solutions ou des solutions approchées.

La méthode des intégrales voisines, le développement des solutions suivant les puissances d'un paramètre λ, la substitution à une trajectoire du domaine de cette trajectoire ou de l'ensemble des trajectoires voisines, ont une importance exceptionnelle dans l'œuvre de Poincaré.

Ce sont ces méthodes qui ont permis à Poincaré, en utilisant les propriétés de continuité, de montrer l'existence des solutions périodiques ; en utilisant les solutions périodiques, de progresser dans l'étude des solutions des équations de la dynamique et du problème des trois corps, de « pénétrer dans une place réputée inabordable ».

3. Solutions périodiques de systèmes différentiels contenant le temps t [21]. — Soit un système différentiel

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t, \lambda)$$

dans lequel les X_i sont périodiques en t et de période 2π, et, admettant pour $\lambda = 0$ une solution périodique de période 2π,

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Pour λ assez petit le système admet une solution prenant pour $t = 0$ la valeur $\varphi_i(0) + \beta_i$ et pour $t = 2\pi$ une valeur $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$.

Les conditions de périodicité sont

$$\psi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \psi_n = 0, \tag{2}$$

et d'après le théorème de Poincaré les fonctions ψ_i sont pour λ assez petit des fonctions continues de λ et β_i, s'annulant pour $\lambda = \beta_i = 0$.

Si pour $\lambda = 0$ les conditions (2) admettent $\beta_i = 0$ comme solution simple, leur jacobien est différent de zéro, et elles admettent pour λ assez petit une solution unique développable en λ et s'annulant pour $\lambda = 0$.

On obtiendra donc une solution périodique de période 2π correspondant à des conditions initiales voisines $\beta_i = \theta_i(\lambda)$.

4. Solutions périodiques de systèmes différentiels indépendants du temps [21]. — Nous supposons qu'il existe pour $\lambda = 0$ une solution périodique de période T, soit $x_i = \varphi_i(t)$.

Le cas d'une seule solution périodique ne se présente pas, car toutes les solutions $\varphi_i(t+h)$ sont de période T.

Nous cherchons une solution périodique de période voisine $(T+\tau)$ correspondant aux conditions initiales $\varphi_i(0)+\beta_i$ et prenant pour $t=T+\tau$ la valeur $\varphi_i(0)+\beta_i+\psi_i$.

Les conditions de périodicité sont les conditions (2) dans lesquelles les fonctions ψ_i sont continues en λ, β_i, τ, et s'annulent avec ces variables.

On peut choisir la valeur de β_n, poser $\beta_n=0$, et résoudre en $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\tau$.

Dans le cas général il existe une solution périodique de période voisine $T+\tau$; mais s'il existe une intégrale première uniforme on pourra trouver pour λ assez petit une solution périodique de période T.

En répétant le calcul pour la période $kT+\tau$, k entier, on trouvera des solutions périodiques de période peu différente de kT, distinctes des précédentes, mais se confondant avec elles pour $\lambda=0$.

5. **Solutions périodiques voisines d'une position d'équilibre.** — En transportant l'origine à la position d'équilibre, les équations du mouvement se présentent généralement sous la forme (1) signalée.

Ces équations admettent quel que soit λ la solution $x_i=0$ que l'on peut regarder comme périodique et de période quelconque T.

Si les conditions (2) de périodicité admettent la solution $\beta_i=0$ comme solution simple, ou si le jacobien est différent de zéro, ces conditions (2) admettent, pour λ petit, une solution unique et se réduisant à l'équilibre pour $\lambda=0$. Cette solution est la solution connue réduite à l'équilibre.

Lorsque le jacobien est nul, l'étude de catégories nouvelles de solutions périodiques, pour λ petit, a été faite par Poincaré.

D'autre part, pour $\lambda=0$ le système (1) admet des solutions périodiques de période T, distinctes de l'équilibre, et correspondant aux variables principales stables, en supposant qu'il existe au moins une variable principale stable.

Les résultats du paragraphe 4 sont alors applicables et il existera, pour λ assez petit, des solutions périodiques de période peu différente de T ou kT, et, si le système possède une intégrale première uniforme, des solutions périodiques de période T.

6. Équations aux variations. Exposants caractéristiques [21.] — Soit pour le système différentiel

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{3}$$

une solution $x_i \doteq \varphi_i(t)$ dite *solution génératrice.*

On obtiendra sensiblement les solutions infiniment voisines,

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i,$$

en négligeant les carrés des ξ_i ou leurs produits, par les équations

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial X_i}{\partial x_1}\xi_1 + \ldots + \frac{\partial X_i}{\partial x_n}\xi_n, \tag{4}$$

que Poincaré a qualifiées d'*équations aux variations* du système (3), en envisageant que dans (4) on ait remplacé les x_i par les $\varphi_i(t)$.

Nous supposons que la solution génératrice soit périodique de période T, et que le système (3) admette en t la même période T lorsqu'il contient explicitement le temps t.

Les équations (4) sont alors des équations linéaires à coefficients périodiques et s'intégrant à l'aide de n intégrales particulières

$$\xi_i = e^{\alpha_1 t} S_{i1}, \qquad \xi_i = e^{\alpha_2 t} S_{i2}, \qquad \ldots, \qquad \xi_i = e^{\alpha_n t} S_{in},$$

les fonctions $S_{i,k}$ étant périodiques et de période T, les exposants généralement distincts α_i étant les *exposants caractéristiques.*

Si l'on forme la solution périodique voisine de φ_i, l'équation en S correspondant au jacobien des conditions de périodicité $\psi_i = 0$ admet comme racines les nombres $(e^{\alpha_i T} - 1)$.

Cette liaison permet de présenter sous d'autres formes équivalentes les résultats relatifs aux solutions périodiques.

Si le temps ne figure pas explicitement dans les équations (3) l'un des exposants caractéristiques est nul, et, dans le cas des équations de la dynamique les exposants caractéristiques sont opposés deux à deux.

7. Solution générale. Solutions asymptotiques [21]. — En partant d'une solution périodique génératrice et des solutions des équations aux variations, nous effectuons, pour progresser dans l'approximation, le changement de variables,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= y_1 S_{11} + y_2 S_{21} + \ldots + y_n S_{n1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_n &= y_1 S_{1n} + y_2 S_{2n} + \ldots + y_n S_{nn}. \end{aligned}$$

Le système (3) s'écrit alors, en développant en séries entières,

$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha_i y_i + H_{i2} + \ldots + H_{in} + \ldots,$$

en supposant que dans le système initial les X_i soient développables en séries entières dans le voisinage de la solution génératrice; les H_{in} représentant l'ensemble des termes de degré n en y et étant périodiques de période T en t.

Pour former progressivement la solution générale, on peut faire le changement $y_i = \lambda z_i$, d'où

$$\frac{dz_i}{dt} = \alpha_i z_i + \lambda H_{i2} + \ldots,$$

et chercher la solution sous forme de série entière en λ.

Chaque terme du développement se calcule à l'aide des précédents par une équation différentielle linéaire ou par quadrature portant sur un produit d'exponentielle et de fonction périodique ou en définitive d'exponentielle.

Si l'on écarte le cas dans lequel il s'introduirait des termes séculaires en t, et qui ne se présente pas en général, la *solution générale du système* (3) *se présente comme une série développée suivant les puissances de* $A_1 e^{\alpha_1 t}, \ldots, A_n e^{\alpha_n t}$, *et dont les coefficients sont des fonctions périodiques de* t, $A_1, \ldots, A_n$ étant les valeurs initiales de la première approximation des y_i.

Les conditions de convergence sont étudiées facilement par Poincaré et elles sont vérifiées lorsque les α_i ont leurs parties réelles de même signe.

Si en particulier on annule les constantes A_i correspondant aux α_i dont la partie réelle est positive ou nulle, on obtient lorsque le temps t augmente indéfiniment une *solution asymptotique* à la solution périodique génératrice.

Si le système différentiel provient d'équations de la dynamique, les exposants caractéristiques étant deux à deux opposés, on aura k exposants à partie réelle positive, k exposants à partie réelle négative, $(n - 2k)$ exposants à partie réelle nulle.

Par suite, pour *une classe de solutions périodiques de caractère instable, il existe deux familles de solutions à k paramètres asymptotiques à la solution périodique génératrice, l'une pour* $t = +\infty$, *l'autre pour* $t = -\infty$.

8. **Intégrales premières uniformes ou algébriques.** — Envisageons un système d'équations de la dynamique, indépendantes de t, et dépendant d'un paramètre λ introduit de telle sorte que pour $\lambda = 0$ on sache former les solutions d'une façon finie, par quadratures ou à l'aide de fonctions périodiques.

En exprimant qu'une intégrale première uniforme, développée suivant les puissances de λ, vérifie le système quel que soit λ supposé assez petit, on obtient les conditions nécessaires à vérifier par les termes successifs du développement.

L'étude des deux premières conditions a suffi à Poincaré pour montrer que *les équations canoniques n'admettent généralement d'autre intégrale première uniforme que l'intégrale des forces vives*, et qu'en particulier le *Problème des trois corps n'admet pas d'autre intégrale première uniforme que celles des forces vives et des aires pour les valeurs suffisamment petites des masses*.

Poincaré a appliqué la méthode, sous la forme canonique, au problème du mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe, en prenant comme paramètre λ supposé très petit le produit du poids par la distance du centre de gravité au point de suspension. La première approximation pour $\lambda = 0$ est alors un mouvement à la Poinsot, et Poincaré a montré que *pour qu'il existe une intégrale algébrique nouvelle, distincte des intégrales classiques des forces vives et des aires, il est nécessaire que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension soit de révolution*.

La même méthode des intégrales voisines, ou de développement à l'aide d'un paramètre λ et qui consiste à exprimer l'existence pour $\lambda = 0$ et, ensuite pour les valeurs infiniment petites de λ, a été appliquée à la recherche d'intégrales algébriques sans s'astreindre à l'utilisation de la forme canonique ou à des conditions de masses et de dimensions assez petites, et en partant d'une première approximation convenable.

C'est sous cet aspect qu'apparaissent les recherches de Bruns [22] et leur généralisation de M. Painlevé [23] pour montrer *dans le Problème des trois corps la non-existence d'intégrales algébriques distinctes des intégrales classiques*, en prenant comme première approximation les mouvements à grandes vitesses ou rectilignes.

La même méthode a permis, pour le mouvement du solide pesant suspendu par un de ses points, d'étendre le résultat de Poincaré et de montrer que, pour des conditions initiales arbitraires, *toute intégrale première algébrique est une combinaison des intégrales classiques sauf dans les cas d'Euler, de Lagrange et de Kovalevsky* [24].

CHAPITRE V.

DISTRIBUTION ET QUASI-PÉRIODICITÉ DES TRAJECTOIRES DYNAMIQUES.

1. **Notion d'invariant intégral en hydrodynamique.** — Les équations du mouvement d'un fluide incompressible à l'état de mouvement permanent sont

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt, \tag{1}$$

en désignant par u, v, w, les composantes, dépendant de x, y, z seulement de la vitesse de l'élément du fluide qui, à l'instant t, a pour coordonnées x, y, z.

La condition de continuité ou de non-cavitation s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

et exprime que le champ des vecteurs vitesses a une divergence nulle.

L'intégration des équations (1) donne la position de l'élément fluide, à partir d'une position initiale $x_0 y_0 z_0$, au bout d'un intervalle t du temps,

$$(T_t) \quad x = f_1(x_0, y_0, z_0, t), \qquad y = f_2(x_0, y_0, z_0, t), \qquad z = f_3(x_0, y_0, z_0, t).$$

Les équations précédentes définissent une famille de transformations ponctuelles T_t, à un paramètre t, formant un groupe, et en appliquant cette transformation on passe de la position d'un ensemble d'éléments au temps t_0 à la position des mêmes éléments au temps $t_0 + t$.

Si ces éléments remplissent au temps t_0 un volume V_0, au bout du temps t ils rempliront un volume V. Les masses enfermées par les volumes V_0 et V sont égales et par suite aussi les volumes d'après l'incompressibilité et l'équation de continuité,

$$(2) \qquad \iiint_V dx\,dy\,dz = \iiint_{V_0} dx_0\,dy_0\,dz_0.$$

L'intégrale volume, premier membre de (2), a été qualifiée par Poincaré [26] d'*invariant intégral* à 3 dimensions du système différentiel (1), et la transformation T_t qui réalise l'égalité est telle que son jacobien

$$\frac{D(xyz)}{D(x_0\,y_0\,z_0)} = 1.$$

2. Notion d'invariant intégral pour un système différentiel permanent. — Soit le système différentiel

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les solutions du système définies par les conditions initiales x_i^0 définissent, comme dans l'exemple de l'hydrodynamique, un groupe de transformations ponctuelles T_t à un paramètre t. La grandeur

$$I = \underbrace{\int\int\cdots\int_D}_{n} M(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

est un invariant intégral d'ordre n, si elle conserve la même valeur pour tout domaine D arbitrairement choisi et pour le domaine déduit de D par le mouvement ou par la transformation ponctuelle correspondante T_t et pour toute valeur du temps t. La dérivée de I donne la condition définissant le multiplicateur M

$$(\mathrm{M}) \qquad \frac{\partial}{\partial x_1}(MX_1) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}(MX_n) = 0.$$

Lorsque la divergence du champ des vecteurs vitesses X_i est nulle,

$M = 1$ est un multiplicateur du système différentiel. Cette condition est en particulier vérifiée pour les équations de la dynamique présentées sous la forme canonique d'Hamilton dans le domaine des états de mouvements.

Dans ce cas de divergence nulle, les équations canoniques peuvent être interprétées comme les équations du mouvement permanent d'un fluide incompressible dans l'espace à $2n$ dimensions et ce mouvement permanent conserve le volume ou admet l'invariant intégral volume à $2n$ dimensions.

Dans les cas généraux, et lorsque le multiplicateur M est positif, on peut interpréter les équations comme celles du mouvement permanent d'un fluide compressible de densité M et l'existence de l'invariant intégral d'ordre maximum correspond à la conservation de la masse.

D'après l'équation (M) les multiplicateurs d'invariants intégraux sont aussi les multiplicateurs de Jacobi, et l'introduction des multiplicateurs par les invariants intégraux [25] donne leurs propriétés de la façon la plus intuitive.

Dans un changement de variables le multiplicateur est multiplié par le jacobien de la transformation.

Le quotient de deux invariants intégraux est une intégrale première et inversement.

Poincaré [26] a étudié complètement les invariants intégraux des divers ordres et les moyens de passage d'une catégorie aux autres catégories.

3. Application aux trajectoires dynamiques. Stabilité à la Poisson. — Poincaré, sous le nom de *stabilité à la Poisson* [26], a obtenu à l'aide de l'invariant intégral volume les résultats les plus marquants dans l'étude de la forme ou de la distribution des trajectoires de la dynamique dans l'espace des états de mouvements.

Nous nous bornons aux trajectoires régulières restant, quel que soit le temps, dans un domaine fini que l'on peut qualifier de domaine de Poincaré.

S'il existe une intégrale première uniforme $F = \text{const.}$, on peut constituer un tel domaine en prenant les conditions initiales qui vérifient les inégalités

$$h < F < h',$$

où h et h' sont deux constantes fixées, aussi rapprochées qu'on le voudra.

Dans le cas des variables canoniques, nous prenons l'interprétation hydrodynamique, et nous pouvons nous borner pour l'exposition à trois dimensions et aux équations (1).

Dans le cas d'autres variables nous nous bornons aux multiplicateurs M positifs, et, en remplaçant la notion de volume par la notion de masse dans l'interprétation hydrodynamique, toutes les déductions seront applicables.

Nous appelons, avec Poincaré, *conséquents* d'un point M_0 les positions $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, que vient occuper ce point au bout des temps τ, 2τ, $\ldots$, $n\tau$, $\ldots$, τ étant un nombre positif choisi à volonté.

Soient V le volume fini du domaine du mouvement ou du fluide, U_0 un volume du domaine et $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ses n premiers conséquents successifs dont les volumes sont égaux.

Si $V < (n+1)U_0$, deux au moins de ces conséquents, soient U_α et U_β, ont une partie commune. Il en sera nécessairement de même de U_0 et $U_{\beta-\alpha}$.

Si U'_0 désigne cette dernière partie commune, la même opération appliquée à partir de U'_0 donnera U''_0, ensuite U'''_0, ...

La suite décroissante U_0, U'_0, U''_0, ... tend vers un volume ou ensemble limite, qui peut se réduire à des points, et l'on voit *qu'il y a une infinité d'éléments fluides ou de trajectoires qui traversent une infinité de fois le volume* U_0, *si petit que soit ce volume* U_0.

Poincaré a montré ensuite à l'aide de la notion de probabilité que les trajectoires qui ne traversent U_0 qu'un nombre fini de fois sont exceptionnelles. M. Hadamard [18] a complété le résultat en démontrant très simplement que *les origines de ces trajectoires exceptionnelles peuvent être enfermées dans un volume aussi petit qu'on le veut.*

M. Caratheodory [27] a présenté le résultat en utilisant la notion due à M. Lebesgue d'étendue d'un ensemble et montré que *les origines des trajectoires exceptionnelles sont contenues dans un ensemble de mesure nulle.*

Ainsi, *toute trajectoire non exceptionnelle repasse une infinité de fois aussi près que l'on veut de l'un quelconque de ses points;*

cette propriété est qualifiée par Poincaré de *stabilité à la Poisson*, et il semble naturel de la qualifier de *quasi-périodicité*.

Les trajectoires exceptionnelles existent et comprennent les trajectoires asymptotiques.

4. **Domaine d'une trajectoire et quasi-périodicité.** — Une trajectoire non exceptionnelle coupe le volume U_0 en une infinité de points distincts, sauf dans le cas d'une trajectoire fermée correspondant à un mouvement périodique.

Cet ensemble de points admet au moins un point d'accumulation dans le voisinage duquel la trajectoire passe une infinité de fois.

Lorsqu'on déplace le volume U_0 de toutes les façons possibles, les points d'accumulation engendrent le *domaine de la trajectoire*, et la trajectoire passe par une infinité de fois dans le voisinage de tout point du domaine, *elle possède la propriété de quasi-périodicité.*

Le domaine d'une trajectoire non exceptionnelle donne des indications de forme ou de déformation de cette trajectoire avec le temps, mais les précisions manquent sur ce domaine et sur son *analysis situs*. Pour un système à n paramètres, l'étendue dimensionnelle est $2n - p$ au plus lorsqu'il existe p intégrales premières uniformes.

Les trajectoires exceptionnelles peuvent être isolées ou remplir des domaines.

Nous avons vu que les trajectoires asymptotiques à une solution périodique de caractère instable dépendent de k constantes paramétriques A et de t. Si l'on fait varier ces constantes A, ces trajectoires engendrent *des surfaces ou domaines asymptotiques* à $k+1$ dimensions, et ces surfaces viennent passer par la trajectoire périodique quand on prend les constantes A toutes nulles.

En adjoignant à une trajectoire les trajectoires voisines, on définit un *domaine étendu* de cette trajectoire; ce domaine étendu est engendré par les déformations du petit volume constant U_0 supposé entraîné dans le temps.

La conservation du petit volume U_0 ne donne aucune indication sur l'écart dans le temps de trajectoires voisines au départ en raison des déformations inconnues de U_0.

Le domaine étendu est nécessairement le domaine physique en raison des perturbations accidentelles ou momentanées ou en raison de l'approximation expérimentale. Les notions de continuité ne peuvent être envisagées que pour le domaine étendu, et, à ce point de vue de continuité comme au point de vue voisinage jusqu'au temps infini, une trajectoire est inséparable de son domaine étendu.

M. Émile Borel [35] a donné les premières études de la déformation du petit volume constant U_0. Il a montré sur quelques exemples simples que ce volume se déforme considérablement, en s'étendant et s'amincissant de façon à devenir une sorte de feuillet de très faible épaisseur qui encombre des portions de plus en plus étendues de l'espace. Ce feuilletage de l'espace, « dont la finesse dépasse ce que l'imagination peut concevoir», est un résultat qualitatif expressif dont l'intérêt est important pour la définition de la probabilité en Mécanique statistique, et dont les conséquences sont essentielles dans l'étude des questions de continuité, de stabilité ou d'approximation.

5. **Les diverses recherches de solutions périodiques. Dernier théorème de Poincaré.** — La connaissance d'une solution périodique permet de rattacher à cette solution celles qui en sont suffisamment voisines. Il pourrait donc être possible d'arriver dans cette voie à une intégration complète de tout problème dynamique, soit pour un temps fini, soit pour un temps infini dans les cas de stabilité d'écart.

Une telle perspective devait amener Poincaré à la recherche la plus étendue des solutions périodiques.

Les équations de la dynamique dans le voisinage d'une position d'équilibre, ou sous la forme canonique adaptée au problème des trois corps et dépendant d'un paramètre λ, admettent pour $\lambda = 0$ une solution périodique multiple ou une infinité de solutions.

Poincaré a réussi a déterminer, pour λ voisin de zéro, toutes les familles de solutions périodiques, de périodes T et kT ou voisines de T et kT, dépendant analytiquement du paramètre λ, de caractère stable ou instable, avec les solutions asymptotiques correspondantes. Ces familles forment en raison de l'entier k un réseau extrêmement compliqué et dont la période s'allonge de plus en plus.

Poincaré a repris, d'autre part, la recherche directe des solutions périodiques, sans se borner aux valeurs de λ au voisinage d'un cas d'intégration, par les méthodes du Calcul des variations et en utilisant les formes variationnelles des équations de la dynamique.

Il suffit de se borner aux problèmes de géodésiques en faisant la représentation sur un espace de Riemann convenable. Quand on peut faire cette représentation dans un espace à connexion linéaire multiple, et dont le type est le tore ou une surface à trous de l'espace à trois dimensions, il existe des cycles tracés sur la surface et non réductibles à zéro.

Si l'on déforme un de ces cycles, *sa longueur totale a un minimum absolu, dont la position est une géodésique fermée* [28].

L'idée simple précédente a été complétée par M. Birkhoff [29] sous le nom de *méthode minimax*. Sur une surface du type tore, par exemple, avec au moins une variable angulaire de position θ, on part d'une géodésique fermée de longueur minimum l. Déformons cette courbe fermée à partir de la position l et de façon que θ augmente de $2k\pi$ quand elle vient de nouveau coïncider avec la position de départ. Dans cette déformation, la *courbe fermée passe par une position de longueur maximum qui donne une nouvelle géodésique fermée*.

Les notions simples des méthodes minimum et minimax ont été perfectionnées et étendues par divers auteurs, et Poincaré a traité la question pour les géodésiques des surfaces convexes [30] par les méthodes d'extrémum lié du Calcul des variations.

Enfin, Poincaré, dans son dernier Mémoire [31], reprend la question sous la forme hydrodynamique des transformations à l'aide d'un théorème de géométrie pour un domaine constitué par un anneau circulaire :

Si une transformation continue biunivoque, conservant les aires, transforme un anneau en lui-même en réalisant deux rotations de sens inverses pour les deux circonférences bornes de l'anneau, il existe toujours à l'intérieur de l'anneau deux points qui ne sont pas altérés par la transformation.

Poincaré a indiqué l'intérêt du théorème pour la recherche des solutions périodiques des problèmes de dynamique à deux paramètres et donné des indications de démonstration. M. Birkhoff [29] a démontré le théorème et donné des applications complètes avec comparaisons à la méthode minimax au problème de la boule sur un billard convexe et aux problèmes de géodésiques des surfaces convexes.

6. **Distribution et classification des trajectoires dynamiques.** —

Les solutions périodiques ou trajectoires fermées ont un rôle prépondérant, et, dans les études faites, elles ont servi de repères pour la détermination et le classement des trajectoires.

En mettant à part la recherche des géodésiques des surfaces convexes, l'étude la plus complète de trajectoires dynamiques est l'étude remarquable faite par M. Hadamard [32] des géodésiques des surfaces à courbure négative.

Les surfaces sont à nappes infinies et connexion multiple, et les géodésiques se classent en plusieurs catégories :

1° Les géodésiques fermées dont la détermination sert de base à l'étude et leurs asymptotiques. Ces géodésiques forment une suite infinie dénombrable quand l'ordre de connexion dépasse 2;

2° Les géodésiques allant à l'infini;

3° Les géodésiques restant dans un domaine fini.

Toute géodésique voisine d'une géodésique allant à l'infini est de la même catégorie, et la continuité présente ainsi dans cette catégorie le caractère le plus simple.

Si la surface est simplement connexe, toutes les géodésiques sont de la deuxième catégorie, leur distribution est celle d'un plan non euclidien.

Si la surface est d'ordre de connexion 2, il existe un seul cycle, une seule géodésique fermée qui est le cycle de longueur minimum; toutes les autres géodésiques, en dehors des asymptotiques à la géodésique fermée, sont de la deuxième catégorie. La distribution est celle des géodésiques de la surface gauche de révolution.

Si l'ordre de connexion dépasse 2, il existe des géodésiques de la troisième catégorie, et ces géodésiques forment un ensemble nulle part continu. Toute trajectoire de cette catégorie s'approche successivement des géodésiques fermées d'une suite infinie, et tout changement, si minime qu'il soit, apporté à sa direction, suffit pour amener une variation absolument quelconque dans l'allure finale; la géodésique troublée peut affecter n'importe laquelle des formes énumérées.

Ces résultats montrent de la façon la plus intructive la complexité possible des trajectoires de la dynamique et de leur distribution; ils font ressortir le rôle fondamental de l'*analysis situs* et, en apportant des exemples dont les solutions périodiques sont toutes de caractère instable, des ensembles de trajectoires complètement instables, ils appellent l'attention sur les notions physiques de continuité et de stabilité pour une variation indéfinie du temps.

M. Birkhoff [29] a consacré de nombreux travaux à l'étude générale des trajectoires dynamiques, soit d'une façon directe, soit à l'aide de l'idée de transformation, et il a donné une étude qualitative complète de leur distribution dans le cas de deux paramètres et d'un domaine fini sans singularités. Ses recherches ont montré la nécessité d'élargir le champ des trajectoires fermées et d'adjoindre aux mouvements périodiques une classe de mouvements qualifiés de *récurrents*, formant dans leur ensemble un flux fermé ou doués d'une propriété de récurrence régionnelle.

A l'aide de cette adjonction, l'ensemble des trajectoires d'un système dynamique peut être caractérisé de la façon la plus nette :

L'ensemble des trajectoires d'un système dynamique contient une suite fermée de mouvements récurrents comprenant les mouvements périodiques, et toutes les autres trajectoires du système tendent asymptotiquement vers cette suite récurrente.

L'application faite par M. Birkhoff aux géodésiques d'une surface à courbure négative et à connexion multiple marque nettement l'intérêt des mouvements récurrents dans un exemple d'une grande complication.

Les travaux de M. Birkhoff ont éclairé les résultats de Poincaré et de M. Hadamard, et ils ont mis en lumière la possibilité d'une approximation indéfinie dans la recherche des trajectoires dynamiques.

La quasi-périodicité apparaît comme une propriété fondamentale des trajectoires dynamiques dans un domaine fini ; dans le cas des trajectoires multipériodiques, en substituant au rapport de deux périodes une valeur approchée rationnelle, elle permet d'obtenir une approximation indéfinie à l'aide d'une trajectoire fermée dont la période s'allonge avec l'approximation, et, dans les exemples simples, à l'aide de la somme d'une vibration principale et de ses harmoniques [34].

On peut estimer que l'étude approfondie de la quasi-périodicité ou du domaine étendu d'une trajectoire doit permettre d'arriver, au moins pour des classes assez générales, suivant les vues de Poincaré, à une approximatiom indéfinie à l'aide de trajectoires fermées à période plus ou moins longue.

Un tel résultat justifierait et expliquerait le succès étonnant de la Mécanique de l'Atome, dont la base a été l'étude de problèmes à variables séparables, intégrables à l'aide des trajectoires du type multipériodique.

A ce point de vue de l'approximation, les problèmes que l'on peut regarder actuellement comme *intégrables* sont ceux conduisant à des représentations du type Poincaré, à l'aide de développements trigonométriques convergents ou divergents sommables.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. DARBOUX. — *Leçons sur la théorie des surfaces*, 2^e édition, t. 2, p. 515.
   APPELL. — *Traité de Mécanique rationnelle*, 4^e édition, t. 2, p. 451.
   PAINLEVÉ. — *Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique et applications*, p. 237.
   POINCARÉ. — *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 3, p. 251.
   CHAZY. — *La théorie de la relativité et la Mécanique céleste*, t. 1, p. 31.
   BOULIGAND — *Précis de Mécanique rationnelle*, t 1, p. 123.
   LEVI-CIVITA et AMALDI. — *Lezioni di meccanica razionale*, t. 2 (2), p. 481.
   BIRKHOFF. — *Dynamical Systems*, p. 36.
   WHITTAKER. — *Analytical Dynamics*, 3^e édition, p. 245.
2. APPELL. — *Traité de Mécanique rationnelle*, 4^e édition, t. 2, p. 459.
   PAINLEVÉ. — *Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique et applications*, p. 164.
3. CARTAN (E.). — *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, 1922).
4. HADAMARD. — L'œuvre mathématique de Poincaré (*Acta mathematica*, t. 38).
5. PICARD. — *Traité d'Analyse*, 2^e édition, t. 2.
   GOURSAT. — *Cours d'Analyse mathématique*, 3^e édition, t. 2, p. 374; t. 3, p. 1.
   BIRKHOFF. — *Dynamical Systems*, p. 1-10.
   COTTON. — Approximations successives et équations différentielles (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 28) (avec bibliographie étendue).
6. POINCARÉ. — *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 1, p. 58.
   GOURSAT. — *Cours d'Analyse mathématique*, 3^e édition, t. 3, p. 20.
7. WEIERSTRASS. — *Monatsberichte der Berliner Akademie* (1866).
8. APPELL. — *Traité de Mécanique rationnelle*, 4^e édition, t. 2, p. 431 et 433.

PAINLEVÉ. — *Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique et applications*, p. 109 et 201.

9. STACKEL (P.). — *Habilitationsschrift* (Halle, 1891) et *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1893 et 1895.

10. LEVI-CIVITA (T.). — Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili (*Math. Annalen*, t. 59, 1904).

11. BURGATTI (P.). — Determinazione dell' equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili (*Rend. della Accad. Lincei*, Roma, t. 20, 1911).

12. DALL 'ACQUA. — Le equazioni di Hamilton-Jacobi che si integrano per separazione di variabili (*Rend. Circolo mat. Palermo*, t. 33, 1912).

13. STAUDE. — *Math. Annalen*, t. 29 et 41; *Journal de Crelle*, t. 105.

STACKEL. — *Math. Annalen*, t. 42; *Journ. de Crelle*, t. 128 et 130.

CHARLIER. — *Die Mechanik des Himmels*, t. 1 (Leipzig, 1902).

14. HADAMARD. — Sur les trajectoires de Liouville (*Bull. des Sc. math.*, 2[e] série, t. 35, 1911, p. 106).

15. BOLL et SALOMON. — *Introduction à la théorie des quanta* (Paris, 1928).

BORN. — *Vorlesungen über Atommechanik* (Berlin).

16. ESCLANGON. — Les fonctions quasi-périodiques (*Thèse*, Paris, 1904).

17. PAINLEVÉ. — Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 22, 1894).

PAINLEVÉ. — *Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique et applications* (aut.) (Paris, 1895).

18. HADAMARD. — Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique (*Journ. de Math. pures et appliquées*, 5[e] série, t. 3, 1897).

19. WRIGHT (J. E.). — *Invariants of quadratic differentiel forms* (Cambridge, 1908).

BERWALD (L.) et FRANK (Ph.). — Ueber eine kovariante Gestalt der Differentielgleichungen der Bahncurven allgemeiner mechanischer Systeme (*Math. Zeitschrift*, t. 21, 1924).

FRANK (Ph.). — Die geometrische Deutung von Painlevé's Theorie der reellen Bahncurven allgemeiner mechanischer Systeme (*Proceedings first intern. Congress for applied Mechanics*, Delft, 1924).

20. DARBOUX. — *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. 3, Livre VII, Chap. I.

21. POINCARÉ. — *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 1 (Paris, 1892).

22. BRUNS. — Problème des trois corps (*Acta mathematica*, t. 11).

23. PAINLEVÉ. — Mémoire sur les intégrales premières du problème des *n* corps (*Bulletin astronomique*, t. 15, 1898).

24. HUSSON (Ed.). — Sur un théorème de Poincaré (*Acta mathematica*, t. 31, 1907).

HUSSON (Ed.). — Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe (*Thèse*, Paris, 1905, et *Ann. de Toulouse*, 2[e] série, t. 8, 1906).

BURGATTI (P.). — Dimostrazione della non esistenza d'integrali algebrici nel problema del moto d'un corpo pesante intorno a punto fisso (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 29, 1910).

25. Hadamard. — *Cours d'Analyse*, t. 2, p. 329-345 (Paris, 1930).
26. Poincaré. — *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 3 (Paris, 1899).
27. Caratheodory. — Ueber den Viederkersatz von Poincaré (*Sitz. preuss. Akademie der Wiss. Berlin*, 1919, p. 580-584).
28. Poincaré. — *Congrès international des Math.* (Paris, 1900).
29. Birkhoff (G. D.). — Dynamical Systems (New-York, *American mathematical Society*, 1927, avec références aux travaux de l'auteur).
30. Poincaré. — Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes (*Trans. Amer. math. Society*, 1905).
31. Poincaré. — Sur un théorème de géométrie (*Rend. del Circ. matem. Palermo*, t. 33, 1912).
32. Hadamard. — Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques (*Journ. de Math. pures et appliquées*, 5e série, t. 4, 1898).
Bouligand. — *Précis de Mécanique rationnelle*, t. 1, p. 267 277, Paris, 1925.
33. Levi-Civita (T.). — Drei Vorlesungen über adiabatische Invarianten (*Abhandl. mathem. Seminar der hamburgischen Universität*, t. 6, 1928).
Levi-Civita (T.). — Applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici (*Atti del congresso internationale del matematici*, t. 5, Bologna 1928).
34. Husson (Ed.). — La quasi périodicité et l'approximation des trajectoires dynamiques (*Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, Nancy 1931).
35. Borel (Em.). — *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications* Fasc. III, *Mécanique statistique classique*. Paris, 1925.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

NOTIONS FONDAMENTALES.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES INTÉGRABLES PAR QUADRATURES DE FONCTIONS UNIFORMES.

CHAPITRE III.

ÉTUDE QUALITATIVE D'UNE TRAJECTOIRE RÉELLE.

CHAPITRE IV.

SOLUTIONS PARTICULIÈRES ET SOLUTIONS VOISINES.

CHAPITRE V.

DISTRIBUTION ET QUASI-PÉRIODICITÉ DES TRAJECTOIRES DYNAMIQUES.