S. MANDELBROJT

Les singularités des fonctions analytiques représentées par une série de Taylor

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 54 (1932)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1932__54__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur a la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LIV

Les Singularités des Fonctions Analytiques représentées par une série de Taylor

PAR M. S. MANDELBROJT
Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1932

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LES
SINGULARITÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES
REPRÉSENTÉES PAR UNE SÉRIE DE TAYLOR

Par M. S. MANDELBROJT,
Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

CHAPITRE I.
INTRODUCTION.

1. Définitions et généralités. — Considérons dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$ un domaine connexe D. A chaque point z de ce domaine attachons une quantité complexe

$$f(z) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$$

jouissant des propriétés suivantes :

1° $f(z)$ est continue; ceci s'exprime par le fait que les deux fonctions de deux variables réelles f_1 et f_2 sont continues dans D.

2° $f(z)$ est dérivable : z_0 étant un point quelconque de D, la quantité

$$\lim_{z=z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$$

est déterminée et ne dépend pas du chemin $\mathcal{C}$ que parcourt z en tendant vers z_0 (cette limite ne dépend que de z_0).

Il faut pour ceci qu'on ait dans D

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

3° $f'(z)$ est continue dans D.

Goursat a démontré que 3° résulte de 1° et 2° [22]. Montel a démontré [42, *c*] que, pour que 2° soit vérifié, il suffit que pour un point z_0 quelconque de D la quantité

$$\lim_{z=z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$$

existe et ait la même valeur quand z s'approche de z_0 par les deux droites

$$x = x_0, \qquad y = y_0 \qquad (z_0 = x_0 + iy_0).$$

Il suffit même que (1) *soit vérifié presque partout dans* D (Montel) (¹) [42, *c*] (*voir* aussi [37]).

On doit à Cauchy l'égalité fondamentale :

$$(2) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

quelle que soit la courbe fermée rectifiable C située à l'intérieur d'une partie simplement connexe de D, z étant un point intérieur à cette courbe.

Il résulte de (2) que $f(z)$ admet des dérivées de tout ordre.

$f(z)$ est dite analytique et holomorphe dans D.

2. Le développement en séries de Taylor et le prolongement analytique. — En s'appuyant sur la formule (2) et sur le développement

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha} + \ldots + \frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} + \ldots,$$

valable lorsque

$$\left| \frac{z-\alpha}{\xi - \alpha} \right| < 1,$$

on démontre que la fonction $f(z)$ est développableen série de la forme

$$(3) \qquad f(z) = a_0 + a_1(z-\alpha) + \ldots,$$

où les quantités a_0, a_1, ... sont des constantes complexes; ce développement converge dans tout cercle de centre α, où $f(z)$ est holomorphe.

Réciproquement, il est évident que, dans tout domaine C où la série (3) converge uniformément, elle représente une fonction holomorphe.

(¹) 1° ayant lieu, et f_1 et f_2 possédant des dérivées premières finies dans D.

D'ailleurs si (3) converge en un point z_1 situé sur un cercle C de centre α, elle est absolument convergente à l'intérieur de C et uniformément convergente dans tout domaine fermé intérieur à C.

Si au contraire la série (3) est divergente en un point z_1 elle est aussi divergente en tout point z tel qu'on ait

$$|z-\alpha|>|z_1-\alpha|.$$

Il existe alors un nombre non négatif R (qui peut aussi être égal à ∞) tel que (3) est convergente pour z tel que

$$|z-\alpha|<\mathrm{R}$$

est divergente pour z vérifiant

$$|z-\alpha|>\mathrm{R};$$

R est appelé *rayon de convergence* de la série de Taylor (3).

Soient D et D_1 deux domaines simplement connexes ayant une partie commune constituée par le domaine connexe D'.

A. Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions analytiques, la première holomorphe dans D et la deuxième dans D_1; si les deux fonctions coïncident dans un domaine situé à l'intérieur de D', elles coïncident dans D'. $f_2(z)$ est dite *le prolongement analytique* de $f_1(z)$ dans D_1.

Le prolongement analytique sert de base a la théorie de Méray-Weierstrass.

Un point z' du plan étant donné, considérons une suite de cercles $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n$, le cercle C_1 admettant comme centre le point α, le cercle C_n contenant z' à son intérieur et deux cercles successifs $\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_{i+1}$ $(i=1, 2, \ldots, k-1)$ ayant une partie commune D_i (qui ne se réduit pas à un point). Soient $\alpha_1=\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les centres successifs des cercles $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_k$. Par $f_i(z)$ désignons un développement de la forme

$$(3') \qquad f_i(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)}(z-\alpha_i)^n \qquad (i=1, 2, \ldots, k)$$

convergent dans C_i

Supposons que dans D_i :

$$f_i(z)=f_{i+1}(z) \qquad (i=1, 2, \ldots, k-1),$$
$$f_1(z)=f(z), \qquad a_n^{(1)}=a_n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Considérons maintenant une autre suite de cercles C'_1, C'_2, ..., $C'_{k'}$, — C'_1 admettant encore comme centre le point α et $C'_{k'}$ contenant à son intérieur le point z'. Par D'_i désignons la partie commune de C'_i et C'_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, k'-1$).

Les points $\alpha'_1 = \alpha$, α'_2, ..., $\alpha'_{k'}$ étant les centres des cercles C'_1, C'_2, ..., $C'_{k'}$ désignons par

$$\bar{f}_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)}(z - \alpha'_i)^n$$
$$(i = 1, \ldots, k', \bar{f}_1 = f, b_n^1 = a_n),$$

un développement convergent dans C'_i, et supposons que

$$\bar{f}_i(z) = \bar{f}_{i+1}(z)$$

dans D'_i.

En désignant par $\mathcal{D}$ le domaine formé par la réunion de tous les points intérieurs successivement à C_1, C_2, ..., C_k *et par $\mathcal{D}'$ le domaine formé par la réunion des points intérieurs à* C'_1, C'_2, ..., $C'_{k'}$, *supposons qu'il existe un arc simple* L *intérieur à la fois à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et passant par les points z', α_i et α'_i, les points de l'arc $\alpha_i\alpha_{i+1}$ ($\alpha_i\alpha'_{i+1}$) de* L *appartenant à* C_i *ou* C_{i+1} (C'_i *ou* C'_{i+1}), *l'arc $z'\alpha_k$ ($z'\alpha'_{k'}$) appartenant à* C_k ($C'_{k'}$).

Alors il résulte du fait A *que*

$$f_k(z') = \bar{f}_{k'}(z').$$

B. Donc, un point z' et une courbe L sans point double liant ce point au point α, étant donnés, il résulte d'après ce qui précède que, quelle que soit la suite C_1, C_2, ..., C_k de cercles jouissant des propriétés indiquées, dont les centres sont distribués sur L de la manière indiquée, la valeur $f_k(z')$ est déterminée d'une seule manière; les fonctions $f_i(z)$ étant déterminées comme précédemment.

C. Les valeurs $\bar{f}_{k'}(z')$ et $f_k(z')$ ne peuvent être distinctes que si les domaines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne contiennent pas dans leur intérieur une courbe commune L sans point double liant α à z' et possédant les propriétés indiquées.

On voit donc qu'un développement (3) étant donné on détermine, en considérant tous les points du plan z et toutes les suites possibles C_1, C_2, ..., C_k attachées à chaque point déterminé, une fonction *uniforme* ou *multiforme*, suivant que C se présente ou non, définie pour tous les points z' pour lesquels (en partant d'une suite $C_1, C_2, \ldots, C_k$) les fonctions $f_i(z)$ jouissant des propriétés précédemment indiquées existent.

Le développement (3) définit donc complètement une fonction analytique, holomorphe dans tout *son domaine d'existence*.

Un développement (3) étant donné, on dit qu'un point z_0 est singulier pour la fonction représentée par cette série s'il n'existe aucune suite $C_1, C_2, \ldots, C_k$ à laquelle correspond une suite de fonctions $f_1(z), \ldots, f_k(z)$, ces deux suites jouissant des propriétés indiquées (1).

Pour les fonctions multiformes (2) un tel point est encore appelé point singulier, mais il y a pour ces fonctions des points qui doivent être considérés comme singuliers et pour lesquels la définition telle que nous l'avons donnée n'est pas applicable.

W étant le domaine d'existence d'une fonction uniforme, sa frontière fait partie de l'ensemble des points singuliers de cette fonction; les points extérieurs de W sont aussi, d'après la définition donnée, des points singuliers de cette fonction.

R étant le rayon de convergence de (3) et z_1 un point situé sur la circonférence C de centre α et de rayon R, nous dirons que ce point est *singulier pour la série* (3) s'il n'existe pas de fonction $f_1(z)$ analytique et holomorphe à l'intérieur d'un cercle $\mathcal{C}$ contenant z_1 dans son intérieur, $f_1(z)$ coïncidant avec $f(z)$ dans la partie commune aux cercles C et $\mathcal{C}$.

Par branche du prolongement analytique de $f(z)$ partant de α et aboutissant à un point z_0 nous comprenons une fonction $f_1(z)$ holomorphe dans une bande contenant les points $|z-\alpha|<R$ et entourant une courbe L liant α à z_0, cette fonction coïncidant avec $f(z)$ à l'intérieur de C; les points de la bande autres que les points $|z-\alpha|<R$ sont supposés assez voisins des points de L pour que $f_1(z)$ soit parfaitement déterminée dans cette bande. Si $f_1(z)$ définie dans la bande en question admet le point z_1 comme point singulier, c'est-à-dire s'il n'existe aucun domaine connexe D contenant z_0 et z_1

(1) Dans la suite nous donnons des définitions des singularités particulières, les seules que nous considérons dans cet Ouvrage. Nous ne donnons pas de définitions générales, ce qui serait trop délicat et exigerait plusieurs pages pour les exposer en toute rigueur. Les définitions données dans quelques-uns des traités ne nous semblent pas assez rigoureuses [*voir* à ce sujet l'article de M. Bieberbach (dans l'*Encyclopedie des Sciences mathematiques*) sur les fonctions analytiques (1918)].

(2) *Voir* à ce sujet Zoretti [70].

et tel que dans ce domaine il existe une fonction holomorphe $f_2(z)$ coïncidant avec $f_1(x)$ dans la partie commune de D et de la bande, ce point est dit singulier pour la branche.

3. Singularités spéciales. — La fonction représentée par une série

$$\varphi(z) = \frac{A_1}{z-\alpha_1} + \frac{A_2}{(z-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(z-\alpha_1)^n} + \ldots, \tag{4}$$

supposée convergente partout sauf au point α_1, admet le point α_1 comme point singulier qui est isolé non critique.

Si

$$A_{m+\iota} = 0 \quad (\iota = 1, 2, \ldots), \qquad A_m \neq 0, \tag{5}$$

α_1 est dit pôle de degré m.

Si pour une infinité de m, $A_m \neq 0$, ce point est singulier essentiel.

Si une fonction $\theta(z)$ peut être mise sous la forme

$$\theta(z) = \psi(z) + \varphi(z),$$

où $\psi(z)$ représente une branche holomorphe d'une fonction, partant de α et aboutissant à α_1 et où $\varphi(z)$ est une série de la forme (4), alors α_1 est dit point singulier essentiel de $\theta(z)$ pour la branche correspondante.

Si α_0 est un pôle pour $\varphi(z)$ il est aussi dit pôle de la branche correspondante de $\theta(z)$.

Si l'on peut écrire

$$\Sigma a_n z^n = \varphi(z) + \Sigma b_n z^n,$$

où α_1 est situé sur C, la série $\Sigma b_n z^n$ étant régulière en α_1, α_1 est dit point essentiel ou pôle de la série (3) sur le cercle de convergence.

4. Le problème des singularités. — La série (3) permet de déterminer complètement (dans tout le domaine d'existence et toutes les branches, c'est-à-dire toutes les déterminations en un point z quelconque), du moins théoriquement, la fonction analytique correspondante.

Mais, au fond, *ce fait ne constitue que* ce qu'on peut appeler, comme dans la théorie des equations différentielles, *le théorème d'existence*.

Il s'agit de déterminer d'une manière *effective* la fonction représentée par (3). Donner, par exemple, l'allure de cette fonction dans tout le plan et déterminer toutes ses singularités. C'est ce dernier problème qui va nous occuper dans ce volume.

CHAPITRE II.

THÉORÈMES D'HADAMARD ET LES RECHERCHES QUI S'Y RATTACHENT.

5. **Le rayon de convergence.** — Sur le cercle de convergence, c'est-à-dire sur la circonférence de rayon R, tel que la série (3) converge pour les points z satisfaisant à l'inégalité

$$|z-\alpha| < R$$

et diverge pour les points z tels que

$$|z-\alpha| > R,$$

la série (3) admet au moins un point singulier. Cette série étant donnée il s'agit de déterminer d'abord la quantité R.

En désignant par $\overline{\lim}\, A_n$ la borne supérieure de l'ensemble dérivé de l'ensemble composé par les quantités A_n, on a d'après Cauchy et Hadamard la formule [23, *b*]

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Remarquons que si l'on suppose que la fonction représentée par (3), où l'on suppose $\alpha = 0$, $R = 1$, (ceci ne restreint pas la généralité, la transformation $z \mid Rz + \alpha$ ramenant le cas général à celui-ci) est uniforme et n'admet des singularités que sur le cercle de convergence, la quantité

$$1 - \frac{1}{2}\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|\Delta_n^2 a_1|} = \gamma$$

représente le cosinus de l'argument d'un point singulier [38, *a*].

5 *bis*. Mandelbrojt a démontré que pour la détermination de l'argument d'un point singulier on peut employer des expressions liées

à $f(z)$ et qui sont analogues aux coefficients de la série de Taylor.

Remarquons d'abord que si $R > 1$, $f(1) = f'(1) = 0$ on a, en désignant par C_n le coefficient de la série de Taylor qui représente la fonction $\frac{zf(z)}{(1-z)^2}$,

$$C_n = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, z^{-n}\, \varphi^{-2}\, d\varphi,$$

où φ est l'argument de z; cette dernière quantité variant sur une circonference de rayon *un*.

Les quantités C_n déterminent $f(z)$.

Toutes les lois qui permettent de tirer de la connaissance de la suite a_n l'allure de $f(z)$ sont donc les mêmes s'il s'agit de reconnaître les propriétes de $f(z)$ en partant des quantités C_n.

Ainsi si $R > 1$, on a

$$\log R = -\overline{\lim}\, \frac{L\,|C_n|}{n}.$$

Supposons que $f(z)$ est bornée sur une demi-droite issue de l'origine et qui forme un angle θ avec Ox $(O < \theta < 2\pi)$ et considérons les quantités

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, z^{-in}\, \rho'^{-2}\, d\rho',$$

où

$$\rho' = \log z = \log|z| + i\theta, \qquad z^{-in} = e^{-in\log z},$$

z variant sur la demi-droite en question. Les α_n, nous le verrons, jouent par rapport aux arguments des points singuliers de $f(z)$ le même rôle que jouent les a_n ou C_n par rapport au module.

Ainsi, par exemple, en supposant que

$$\psi = \overline{\lim}\, \frac{L\,|\alpha_n|}{n} > 0,$$

le fait que, dans l'angle borné par les droites formant avec Ox respectivement les angles $\theta + \varepsilon$, $\psi - \varepsilon$, la fonction $f(z)$ reste bornée quand on exclut les singularités éventuelles, supposees toutes situées à distance finie et non critiques, par des cercles de rayon η arbitrairement petit (le même pour toutes les singularités) — implique l'existence même de singularites dans cet angle.

Ceci a donc lieu si $f(z)$ est holomorphe à l'infini.

Si cette dernière condition a lieu et si $f(z)$ n'a qu'un nombre fini de points singuliers, ψ représente l'argument d'un point singulier, $f(z)$ restant holomorphe à l'intérieur de l'angle formé par les droites d'argument θ et ψ. Si en plus $f(z)$ n'est pas uniforme autour de l'origine, ψ donnera l'argument d'un point singulier d'une branche, le nombre de tours qu'il faut effectuer (à partir de la droite d'argument Θ) étant égal au nombre de fois que 2π est contenu dans $\psi - \theta$.

Hadamard, Fabry et Pringsheim [23, *b*; 16, *a*; 54, *c*] ont donné des conditions pour qu'un point situé sur le cercle de convergence soit singulier.

Soient $R = 1$, $\alpha = 0$; *pour que le point* $z(|z| = 1)$ *soit singulier il faut et il suffit que*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\sum_{\frac{n}{2}}^{\frac{2n}{3}} C_n^\nu a_\nu z^\nu} = 2.$$

Il en résulte, en particulier, que *si* $a_n \geqq 0$ $(R = 1,\ \alpha = 0)$ *le point d'affixe un est singulier* [54, *c*]. Dienes a généralisé ce dernier fait de la manière suivante : $z = 1$ *est singulier si*

$$0 \leqq \operatorname{Arg} a_n < \frac{\pi}{2} \quad [11, a].$$

Tsuji a démontré qu'*il suffit que la dernière condition ait lieu pour tous les n sauf pour* $n = \lambda_m$ *avec*

$$\lim \frac{\lambda_m}{m} = \infty \quad [26, b].$$

Une généralisation analogue du théorème de Pringsheim $(a_n \geqq 0)$ a été donnée par Szàsz [59] (*voir* aussi la généralisatlon de Kóssler [30, *b*].)

6. **Singularités polaires.** — Un des premiers auteurs qui cherchait à évaluer effectivement les quantités a_n, d'après l'allure de la série (3) sur le cercle de convergence, fut Darboux.

Hadamard, dans sa célèbre Thèse [23, *b*], a été le premier à poser nettement le problème inverse et à élucider les questions les plus importantes qui se rattachent au sujet qui nous intéresse. Supposons que sur C il n'y a que p pôles (s'il y a des pôles multiples, on compte chacun d'eux autant de fois qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité).

Désignons par $D_{m,p}$ le déterminant

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \dots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m+p} & \dots\dots & \dots & a_{m+2p} \end{vmatrix}.$$

Hadamard démontre d'abord que *l'on a*

$$\text{(6)} \qquad \overline{\lim} \sqrt[m]{|D_{m,p}|} = \frac{1}{R^p R'} < \frac{1}{R^{p+1}}$$

(donc $R' > R$).

Le même auteur démontre ensuite que si *pour une série* (3) *on a*

$$\text{(7)} \qquad \overline{\lim} \sqrt[m]{|D_{m,p}|} < \frac{1}{R^{p+1}}$$

et

$$\text{(8)} \qquad \overline{\lim} \sqrt[m]{|D_{m,p-1}|} = \frac{1}{R^p},$$

alors la quantité $\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|}$ *tend régulièrement vers* $\frac{1}{R^p}$, c'est-à-dire

$$\text{(9)} \qquad \lim \sqrt[m]{|D_{m,p-1}|} = \frac{1}{R^p};$$

et (3) *a sur* C *exactement* p *pôles.*

On a par conséquent (9) si (3) a p pôles sur C.

Pólya et Ostrowski ont simplifié un point difficile de la démonstration du théorème d'Hadamard [52, *a*; 49, *g*].

Ces considérations permettent à Hadamard de déterminer le polynome $P(z)$ tel que la série $f(z)P(z)$ soit convergente dans un cercle de rayon $R' > R$.

Des considérations du même genre permettent, d'ailleurs, d'aller plus loin et de trouver les pôles situés au delà de C, tant que ceux-ci sont plus rapprochés de l'origine que toute autre singularité.

Désignons par l_P la quantité

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|D_{m,P}|}$$

en donnant à P des valeurs entières supérieures à p. On peut alors démontrer que [23, *b*] :

$$\frac{l_{P-2}}{l_{P-1}} \leqq \frac{l_{P-1}}{l_P}. \tag{10}$$

Si pour $P = q$ l'inégalité a lieu, c'est-à-dire si l'on a

$$R_1 = \frac{l_{q-1}}{l_q} > \frac{l_{q-2}}{l_{q-1}},$$

alors la série (3) a exactement q pôles dans le cercle de rayon R_1.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ étant ces pôles, leurs affixes vérifient l'égalité

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q = \lim \frac{D_{m,q-1}}{D_{m+1,q-1}}.$$

Une discussion de la croissance de la suite

$$\frac{l_1}{l_2}, \quad \frac{l_2}{l_3}, \quad \ldots, \quad \frac{l_{n-1}}{l_n}$$

permet d'établir le cas où (3) représente une fonction n'ayant que des pôles dans tout le plan, ou le cas contraire où il existe une quantité R telle que dans le cercle de ce rayon $f(z)$ a, au moins, un point singulier qui n'est pas pôle [23, *b*].

7. L'ordre des points singuliers. — On a pu déterminer les pôles du fait que la quantité

$$-\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{L|a_n|}{n} = \log R$$

diminuait dès qu'on multipliait $f(z)$ par $P(z)$.

Si $f(z)$, n'ayant que des pôles sur le cercle de convergence, en a un dont le degré de multiplicité est supérieur à celui de tous les autres et qui est d'affixe z_0, alors en multipliant $f(z)$ par $z - z_0$ on abaisse la quantité

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \frac{L|a_m|}{Lm} = \omega_1. \tag{11}$$

D'ailleurs chaque fois que $f(z)$ peut être mise sous la forme

$$(z - z_0)^{-\lambda}(z - z_1)^{-\lambda_1} \ldots (z - z_n)^{-\lambda_n} f_1(z),$$

où $\lambda > 0$ est supérieur à toutes les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ également positives, où

$$|z_0| = |z_1| = \ldots = |z_n| = R$$

et où $f_1(z)$ désigne une série dont le rayon de convergence autour de α est supérieur à R, — la quantité (11) correspondant à la série $f(z)(z - z_0)$ a une valeur moindre que celle établie en partant de $f(z)$.

Hadamard le démontre par une méthode analogue à celle qui lui sert pour déterminer les singularités polaires.

D'ailleurs sa méthode a une portée beaucoup plus grande, comme nous allons le voir d'après les recherches qui suivent.

La quantité $\omega = \omega_1 + 1$ déterminée d'après la formule (11) est appelée par Hadamard ordre de la série (3) sur le cercle de convergence ($\alpha = 0$, $R = 1$).

Cette quantité jouit des propriétés suivantes :

En désignant par $D_z^{-\alpha} f(z)$ la dérivée généralisée de Riemann-Liouville de $f(z)$ d'ordre α, on a :

1° $D_z^{-\alpha} f(z)$ est finie et continue sur C pour $\alpha > \omega$.

2° Cette expression avec $\alpha > \omega$, est *à écart fini* sur C, c'est-à-dire toutes les intégrales trigonométriques

$$m\int_0^{2\pi} \cos m\theta \, D_z^{-\alpha} f(z)\, d\theta, \quad m\int_0^{2\pi} \sin m\theta \, D_z^{-\alpha} f(z)\, d\theta$$
$$(m = 1, 2, \ldots)$$

(en posant dans $D_z^{-\alpha} f(z)$, $z = e^{i\theta}$), restent inférieures, en valeur absolue, à un nombre fixe I.

3° Une des propriétés précédentes n'a pas lieu pour $\alpha < \omega$.

En exigeant que les conditions 1°, 2° et 3° soient vérifiées sur un arc AB du cercle C on déterminera l'ordre de $f(z)$ sur cet arc.

Remarquons que toute fonction à variation bornée est à l'écart fini. La réciproque n'est pas vraie. (Bray [7]).

De même Hadamard définit l'ordre en un point quelconque de C, en faisant tendre vers ce point les points A et B entre lesquels ce point est situé et en prenant la borne inférieure des ordres successifs sur les arcs AB.

L'ordre de $f(z)$ sur C est la borne supérieure des ordres des différents points de C.

Alors, s'il n'y a qu'un point z_0 dont l'ordre est celui de C

$$\omega = \overline{\lim} \frac{L|a_m|}{Lm} + 1,$$

l'ordre sur C de la série $f(z)(z - z_0)$ est inférieur à ω.

Ce fait permet, comme dans les cas précédents, de déterminer la quantité z_0.

Il est aussi évident que si, au contraire, l'ordre de $f(z)(z - z_0)$ sur C est inférieur à ω le point z_0 est le seul point dont l'ordre soit ω.

Ceci permet dans certains cas de déterminer toutes les singularités de $f(z)$ sur C.

En outre ω' étant une quantité positive supérieure à ω supposé fini, et z_1 un point régulier de $f(z)$ sur C, on a

$$f(z_0) = \lim_{m=\infty} \frac{a_0 G_m^{\omega'} + a_1 z_0 G_{m-1}^{\omega'} + \ldots + a_m z_0^m}{G_m^{\omega'}},$$

où $G_m^{\omega'}$ est le coefficient de z^m dans le développement de $(1 - z)^{\omega'}$.

Fabry a montré que l'ordre de $f(z)$ en un point change en général avec le centre α autour duquel le développement (3) de $f(z)$ a été formé [16, *e*, *f*].

Le même auteur démontre que l'axe de convergence $\sigma = p$, de la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad (s = \sigma + it),$$

satisfait à l'inégalité (¹)

$$\omega - 1 \leqq p \leqq \omega.$$

Cette quantité p, supposée positive, coïncide avec le degré d'infinitude de $f(z)$ au point *un* si ce point est le seul point singulier de cette fonction sur C. C'est-à-dire que p est la borne inférieure des quantités ν telles que

$$\lim_{z \to 1} (z - 1)^{\nu} f(z) = 0.$$

Il faut d'ailleurs supposer que $z \to 1$ le long d'une courbe quelconque, on doit aussi considérer les courbes tangentes à C au point *un*.

(¹) La série donnée converge pour $\sigma > p$ et diverge pour $\sigma < p$.

p reste le même pour tout développement de $f(z)$ en une série de Taylor autour d'un point quelconque α' intérieur à C (les deux cercles, l'un correspondant au développement (3) et l'autre au développement autour du point α' étant tangents au point singulier considéré), si l'on a

$$p > \omega - \frac{1}{2}.$$

D'ailleurs les exemples de Borel, Fabry, Dienes, Toëplitz [5, *b*; 16, *e*; 11, *b*; 61] montrent que le degré d'infinitude au sens commun (c'est-à-dire en excluant les chemins tangents à C) ne coïncide pas avec l'ordre en un point au sens d'Hadamard.

Citons le théorème suivant dû à Hardy [24, *a*, *b*] : *Si*

$$(1 - |z|)^{\omega} |f(z)| < C, \quad \omega > 0,$$

lorsque

$$|z| < 1 \, (R = 1, \alpha = 0),$$

on a, *en posant*

$$g(z) = \Sigma \, |a_n| \, z^n,$$

pour z réel < 1, *l'inégalité*

$$(1 - z)^{\omega + \frac{1}{2}} g(z) < C_1.$$

D'ailleurs, $\omega + \frac{1}{2}$ ne peut être remplacé par un exposant inférieur, comme le montre un exemple de Hardy.

Toëplitz démontre aussi l'inégalité

$$\omega - 1 \leq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \pi_n}{\log n} = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \pi'_n}{\log n} \leq \omega,$$

où

$$\pi_n = \max |P_n(x, y)| = \max |a_0(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n) + a_1(x_1 y_2 + \ldots + x_{n-1} y_n) + \ldots + a_{n-1} x_1 y_n|$$

avec

$$(1) \qquad x_1 \bar{x}_1 + \ldots + x_n \bar{x}_n = 1 \quad (^1),$$

$$(2) \qquad y_1 \bar{y}_1 + \ldots + y_n \bar{y}_n = 1$$

et

$$\pi'_n = \max P_n(x, \bar{x}),$$

les x_i satisfaisant à la condition (1).

(1) $\bar{Z}$ désigne l'imaginaire conjugué du nombre Z.

Les questions concernant l'ordre sont étudiées d'une manière détaillée dans les livres de Norlund [46] et Dienes [11, *b*].

CHAPITRE III.

LES COEFFICIENTS DES SÉRIES DE TAYLOR AYANT UN SEUL POINT SINGULIER ET LES RECHERCHES QUI S'Y RATTACHENT.

8. Théorèmes de Leau et Faber. — Si $f(x)$ est de la forme

$$f(z)=\frac{A_1}{z-1}+\frac{A_2}{(z-1)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(z-1)^m}; \tag{12}$$

alors en développant $f(z)$ série de Taylor, on voit qu'il y a un polynome en n, $P(n)$ de degré $m-1$ tel qn'on ait

$$a_n=P(n).$$

Une des premières questions à se poser est la suivante : quelle est la forme des a_n quand $f(z)$ est de la forme

$$f(z)=\frac{A_1}{z-1}+\frac{A_2}{(z-1)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(z-1)^k}+\ldots, \tag{13}$$

$$\lim\sqrt[n]{A_n}=0,$$

c'est-à-dire quand le point d'affixe *un* est le seul point singulier de $f(z)$, d'ailleurs essentiel, $f(z)$ restant holomorphe dans le reste du plan, le point à l'infini compris. D'après ce que nous venons de dire sur le développement de (12) la réponse à la question posée est intuitivement presque évidente.

Le theorème de Faber est le plus important à ce sujet, étant donné qu'il fournit la condition nécessaire et suffisante [15, *b*] :

La condition nécessaire et suffisante pour que (3) ($\alpha=0$) *représente une fonction uniforme et holomorphe dans tout le plan, sauf au point d'affixe un. est qu'on puissse mettre*

$$a_n=g(n) \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

où $g(z)$ est une fonction entière telle que quel que soit $\varepsilon>0$ il existe un r_0 tel que pour $r>r_0$ on ait

$$|g(z)|<e^{\varepsilon r} \qquad (z=re^{i\theta}). \tag{14}$$

Si $g(z)$ n'est pas un polynome le point *un* est un point singulier essentiel.

Les fonctions entières $g_1(z)$ d'ordre inférieur à *un* vérifient évidemment la condition (14), donc les fonctions $\Sigma g_1(n) z^n$ admettent un seul point singulier, qui est d'affixe *un*, dans le plan tout entier.

Ce dernier énoncé est dû à Leau [33, *d*].

Wigert a démontré indépendamment de Faber que les conditions qui interviennent dans le théorème de ce dernier sont suffisantes [68].

9. **Théorèmes de Le Roy, Lindelof.** — En généralisant un théorème de Le Roy, Lindelöf démontre par l'application du calcul des résidus le théorème suivant [36. *c*] :

Si dans (3) ($\alpha = 0$) *on a*

$$a_n = g(n),$$

$g(z)$ *étant une fonction holomorphe dans le demi-plan* $x > a$ ($z = x + iy$) *et satisfaisant dans ce demi-plan à la condition*

$$|g(a + re^{i\theta})| < e^{(\vartheta+\varepsilon)r}$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, *pour* $r > r_\varepsilon$, ϑ *étant fixe et inférieur à* π, *alors la série* (3) *peut être prolongée dans toute la partie du plan*

$$2\pi - \vartheta > \varphi > \vartheta, \qquad 0 \leqq \rho < \infty \qquad (z = \rho e^{i\varphi}).$$

Carlson et V. Bernstein [8, *b*; 4, *a*, *b*] ont généralisé le théorème de Lindelöf et ils ont montré que leur nouvelle généralisation admet une réciproque complète (le théorème de Lindelöf ainsi que celui de Carlson et Bernstein donnent des renseignements sur l'allure de $f(z)$ à l'infini).

En appliquant le théorème de Faber on peut démontrer le fait suivant [38, *f*].

Si $f(z)$ *représente une fonction holomorphe dans tout le plan sauf en un nombre fini de points* $z_1, z_2, \ldots, z_k$, *situés sur le cercle de convergence* ($R = 1$, $\alpha = 0$) *et tels que*

$$|\arg z_1| < \vartheta, \qquad \ldots, \qquad |\arg z_k| < \vartheta,$$

ces points n'étant pas critiques, alors on a

$$a_n = g(n),$$

$g(z)$ étant une fonction entière de la forme

$$|g(z)| < e^{(\vartheta+\varepsilon)r} \qquad (z = r e^{i\theta}).$$

10. Théorèmes de Leau, Fabry, Soula. — Dans un ordre d'idées qui se rapproche des considérations précédentes il faut citer les théorèmes de Leau, Fabry, Soula :

Si $a_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$ où $g(z)$ est une fonction holomorphe à l'origine, alors $f(z)$ n'a qu'un seul point singulier qui est d'affixe un [Leau, 33, *d*].

En supposant que $g(z)$ est holomorphe dans un angle dont le sommet est l'origine et qui contient à son intérieur la droite $(0, +\infty)$ et telle qu'on ait

$$|z|\,\mathrm{L}\,|g(z)| < \varepsilon, \qquad (|z| < r_\varepsilon),$$

quand z est dans cet angle, Fabry démontre que $f(z)$ n'a que le point singulier *un* sur C [16_2 c].

Le théorème de Soula [56, *a*] qui généralise celui de Leau peut s'énoncer de la manière suivante :

Soit (3) $(\alpha = 0)$ *holomorphe dans tout domaine qui ne contient pas la demi-droite* $(y = 0,\ x > 1)$ *ainsi que dans tout domaine qui ne contient pas une demi-droite fixe différente de la précédente et également issue du point un.*

Supposons que dans le voisinage du point un, et pour tout point z situé dans un des domaines précisés on ait

$$|f(z)| < \frac{A}{|z-1|^q} \qquad (q < 1).$$

Alors, $g(z)$ étant holomorphe à l'origine, on peut affirmer que $\Sigma g(a_n) z^n$ admet le point un comme seul point singulier.

La démonstration de Soula est remarquable par le rapprochement des questions qui nous intéressent à la théorie des équations intégrales de Fredholm.

Pour avoir un exemple où les α_n (*voir* p. 8) fournissent des renseignements précis, énonçons le théorème suivant : *si les conditions de la page* 8 *sont conservées et si, en désignant par ζ un affixe* *d'un point singulier quelconque de $f(z)$ dans l'angle* $(\Theta+\varepsilon, \psi-\varepsilon)$ *on sait que* $\operatorname{Arg}\zeta = \psi$ *et que pour tout* ζ *on a*

$$|\zeta| = e^{2k\pi}$$

où k est un entier, alors

$$\alpha_n = e^{n\psi} g(n) + \beta_n,$$

où

$$|g(z)| < e^{\varepsilon|z|} \quad \text{et où} \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|\beta_n|} < e^{\psi}.$$

CHAPITRE IV.

THÉORÈME D'HADAMARD SUR LA MULTIPLICATION DES SINGULARITÉS ET LES RECHERCHES QUI S'Y RATTACHENT.

11. Théorème d'Hadamard. — Une fois établi la dépendance qui existe entre les coefficients a_n et les singularités de la fonction correspondante dans les cas les plus simples, il s'agit de pouvoir passer aux cas plus compliqués par l'intermédiaire des opérations sur les coefficients a_n.

Un théorème permettant un tel passage est dû à Hadamard [23, *b*] :

Soient $f(z) = \Sigma a_n z^n$ et $\varphi(z) = \Sigma b_n z^n$ deux séries entières.

γ étant l'affixe d'un point singulier de la série $\Sigma a_n b_n z^n$, deux cas sont possibles : 1° *il existe une quantité α qui est l'affixe d'un point singulier de la série $f(z)$ et une quantité β qui est l'affixe d'un point singulier de la série $\varphi(z)$ et telles que*

$$\gamma = \alpha . \beta. \tag{15}$$

2° *toute courbe à distance finie, liant γ au point* O *passe par un point de la forme $\alpha.\beta$.*

Remarquons que pour les fonctions multiformes, une branche de la fonction représentée par $\Sigma a_n b_n z^n$ peut admettre le point d'affixe O comme point singulier. La démonstration d'Hadamard se base sur la formule

$$\mathrm{F}(z) = \Sigma a_n b_n z^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} f(x)\,\varphi\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x}, \tag{16}$$

C etant une courbe fermée intérieure au cercle de rayon RR′ où R est le rayon de convergence de $f(z)$ et R′ celui de $\varphi(z)$. La formule (16) montre de plus, dans le cas où les séries $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne représentent pas des fonctions uniformes, quelles sont les branches respectives de $f(z)$, $\varphi(z)$ et $F(z)$ dont les singularités sont liées par la formule (15). Faber a complété en certains points la démonstration d'Hadamard [15, *e*].

12. Recherches de Borel, Faber, Soula, Pólya, Mandelbrojt. — α étant un point singulier de $f(z)$ et β un point singulier de $\varphi(z)$, supposons que ces deux fonctions n'ont pas d'autres points singuliers, — respectivement α' et β' — tels que

$$\alpha'\beta' = \alpha\beta. \tag{17}$$

Borel a indiqué que dans ce cas, l'allure de $F(z)$ autour de $\gamma = \alpha\beta$ ne dépend souvent que de l'allure de $f(z)$ autour de α et de celle de $\varphi(z)$ autour de β.

Ainsi *si α est un pôle de degré k et β un pôle de degré m, γ est un pôle de degré $m+k-1$* [5, *i*].

γ est certainement un point singulier de $F(z)$ *si α et β sont isolés et si au moins un de ces deux points n'est pas critique* [15, *e*].

Les propositions de Borel et Faber (celle-ci pour le cas où ni α ni β ne sont critiques) peuvent être démontrées d'une manière analogue. Pour le premier cas, comme les a_n et les b_n sont des polynomes respectivement de degré $k-1$ et $m-1$ (on peut évidemment supposer $\alpha = \beta = \gamma = 1$), les produits $a_n b_n$ sont aussi des polynomes en n de degré $k+m-2$, et γ est un pôle de degré $m+k-1$ [5, *i*].

Dans le deuxième cas du fait que les a_n et les b_n sont de la forme $g(n)$ avec $|g(z)| < e^{\varepsilon r}$ il résulte que les coefficients $a_n b_n$ jouissent de la même propriété, le produit de deux fonctions entières satisfaisant à cette condition, la vérifie encore. Soula a montré par un exemple que γ n'est pas nécessairement point singulier de $F(z)$ même si (17) n'a pas lieu [56, *a*].

Soula a démontré le théorème suivant : *Si $\varphi(z)$ n'a qu'un point singulier β, pour que γ soit un point singulier de* $F(z)$ *il faut et il suffit que $\underline{\lim}\sqrt[n]{|b_n|}$ soit différent de zéro et que $\sum \frac{z^n}{b_n}$ n'ait que le point singulier $\frac{1}{\beta}$* [56, *a*].

A ce théorème on peut joindre le théorème suivant :

Si $\lim\sqrt[n]{|b_n|} = 1$, *si les b_n sont réels et si $\varphi(z)$ n'a sur le cercle* *de convergence que le point* un *comme point singulier, alors ou la fonction* $\varphi_1(z) = \sum \frac{z^n}{b_n}$ *admet le cercle de convergence comme coupure ou elle n'a que le point* un *comme point singulier* [56, *c*].

Le théorème de Faber a été généralisé par Pólya. Cet auteur appelle un point singulier η situé sur le cercle de convergence, semi-isolé, si dans un cercle autour de η et de rayon assez petit $f(z)$ ne possède des singularités que sur le rayon issu de l'origine et passant par η.

Si α *et* β *sont les seuls points singuliers sur le cercle de convergence respectivement de* $f(z)$ *et* $\varphi(z)$ *si un de ces points est semi-isolé et l'autre isolé* $\gamma = \alpha\beta$ *est nécessairement un point singulier de* $F(z) = \Sigma a_n b_n z^n$ [52, *c*].

Si entre deux points singuliers α *et* α' *situés sur le cercle de convergence il existe un arc* $\alpha\alpha'$ *où* $f(z)$ *est holomorphe et si* β *est isolé non-critique de* $\varphi(z)$ *et est unique sur* $|z| = R'$, *les points* $\alpha\beta$ *et* $\alpha'\beta$ *sont nécessairement singuliers de* $F(z)$ [52, *d*].

Mandelbrojt [38, *o*] a établi des conditions pour qu'un point $\alpha\beta$ soit nécessairement singulier, en partant d'un point de vue différent.

Soit γ un point singulier quelconque de $\Sigma a_n b_n z^n$ et soit ω un multiple d'un nombre quelconque de facteurs dont chacun est une puissance de degré $q \geqq 0$ d'un affixe d'un point singulier quelconque de $f(z)$; désignons par E l'ensemble de tous les points $\gamma\omega$. Soit $\mathcal{E}_{R,E}$ la partie de la la frontière de l'étoile de Mittag-Leffler (¹) formée à partir de l'ensemble $E + E'$ (E' est l'ensemble dérivé de E) qui est à l'intérieur d'un cercle C de rayon R autour de l'origine.

Si $\mathcal{E}_{R,E}$ est composé d'un nombre fini k de segments de longueurs respectives $l_1, l_2, \ldots, l_k$ et d'un nombre fini p de domaines $D_1, D_2, \ldots, D_p$ dont les longueurs de frontières (sans compter les arcs de cercle C qui forment une partie de la frontière de chacun de ces

(¹) On appelle étoile de Mittag-Leffler de l'ensemble A, qui ne contient pas le voisinage de o, le domaine complémentaire à l'ensemble A_1, composé des points des segments $\rho e^{i\varphi}$ $(\rho < \rho_0)$, telles que les points $\rho e^{i\varphi}$ n'appartiennent pas à A, le point $\rho_0 e^{i\varphi}$ lui appartenant.

L'étoile de Mittag-Leffler de $\Sigma a_n z^n$ est l'étoile de l'ensemble B composé des points $\rho_0 e^{i\varphi}$ tels que $\Sigma a_n z^n$ et holomorphe pour $z = \rho e^{i\varphi}$ $(\rho < \rho_0)$, $\rho_0 e^{i\varphi}$ étant un point singulier de la branche de $\Sigma a_n z^n$ correspondant à la droite $\rho e^{i\varphi}$ $(0 \leqq \rho \leqq \rho_0)$.

domaines), sont $l'_1, l_2, \ldots, l'_p$, nous poserons

$$C_{R,E} = 2\sum_1^k l_i + \sum_1^p l'_i.$$

Nous supposerons dans ce qui suit que k et p sont bornés.

Supposons qu'en posant $\theta(z) = f(z) - \frac{z}{(1-z)^2}$ *on ait dans le domaine fermé* D *dont la frontière est composée de* $C_{R,E}$ *et de la circonférence* C, ($|z| = R$)

$$(i) \qquad \frac{(1+R)(C_{R,L}+2\pi R)|\theta(z)|}{2\pi R} < 1.$$

Alors la frontière de l'étoile relative à l'ensemble $E + E'$ *contient tous les points singuliers de* $\varphi(z)$ *situés dans* C.

En particulier :

Si $f(z)$ *n'admet que le point* un *comme point singulier et si* (i) *a lieu* (*cette condition dans ce cas est simple*) *les parties correspondantes des étoiles de Mittag-Leffler des deux fonctions* $\varphi(z)$ *et* $F(z)$, *contenues à l'intérieur de* C *sont les mêmes.*

On peut évidemment construire des fonctions vérifiant (i) et ayant comme singularites des points donnés à l'avance.

CHAPITRE V.

THÉORÈME D'HURWITZ-PINCHERLE ET LES RECHERCHES QUI S'Y RATTACHENT.

13. Théoreme d'Hurwitz-Pincherle. — Par analogie avec le théorème d'Hadamard sur la multiplication des singularités, auquel nous avons consacré le Chapitre précédent, Hurwitz et Pincherle ont démontré le théorème suivant [26, c; 51, a, b] (Hurwitz dans le cas des pôles et Pincherle dans le cas général): γ *étant l'affixe d'un point singulier de la série*

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta_0 + C_m^1 \alpha_{m-1}\beta_1 + \ldots + \beta_m \alpha_0}{z^{m+1}}$$

(*où* C_m^k *désigne le coefficient binomial*), *deux cas sont possibles :*

1° *il existe un point singulier* α *de la série*

$$\psi(z) = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \ldots$$

et un point singulier β *de la série*

$$\xi(z) = \frac{\beta_0}{z} + \frac{\beta_1}{z^2} + \ldots$$

tels que

$$\alpha + \beta = \gamma, \tag{18}$$

2° *toute courbe continue liant* γ *à l'infini passe par un point* $\alpha + \beta$.

On démontre ce théorème en s'appuyant sur l'égalité

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k \alpha_{m-k}\beta_k\right) z^{-m-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \psi(\eta)\xi(z-\eta)\,d\eta, \tag{19}$$

C étant un cercle autour de l'origine de rayon assez grand.

Cette dernière formule permet d'ailleurs, comme nous l'avons vu pour le théorème d'Hadamard, de discerner quelles sont les branches des trois séries dont les singularités sont liées par (18). Remarquons que les séries qui interviennent dans ce chapitre peuvent être considérées comme des séries de Taylor avec $\alpha = \infty$.

Le théorème d'Hurwitz-Pincherle joue un rôle semblable à celui d'Hadamard, en ce sens qu'en connaissant les singularités des séries relativement simples on peut en tirer des renseignements pour les singularités des séries plus compliquées.

14. Théorèmes de Lindelöf et Mandelbrojt. — Mandelbrojt [38, *b*] a fait remarquer que le théorème d'Hurwitz-Pincherle peut être considéré comme une généralisation du procédé qui correspond à la transformation d'Euler effectuée sur la série entière

$$\theta(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots.$$

On sait, en effet, qu'en posant

$$y = \frac{z}{1-z},$$

on a

$$\theta(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-z}\right)^k \frac{\Delta^k \alpha_0}{1-z} = \frac{1}{1-z}\sum_{k=0}^{\infty}\Delta^k \alpha_0 y^k, \tag{20}$$

où $\Delta^k \alpha_0$ désigne la $k^{\text{ième}}$ différence par rapport au coefficient α_0 dans la suite

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire l'égalité suivante a lieu :

$$\Delta^k \alpha_0 = \alpha_k - C_k^1 \alpha_{k-1} + C_k^2 \alpha_{k-2} + \ldots \pm \alpha_0.$$

D'autre part, on voit qu'en posant

$$\xi(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \ldots \tag{21}$$

et, en effectuant sur cette série et la série

$$\frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \ldots$$

l'opération qui intervient dans le théorème d'Hurwitz-Pincherle, on obtient la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m - C_m^1 \alpha_{m-1} + \ldots + \alpha_0}{z^{m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k \alpha_0}{z^{k+1}}.$$

En posant dans cette série et dans (21)

$$z = \frac{1}{\zeta},$$

on voit qu'on arrive ainsi à associer à la série

$$\alpha_0 \zeta + \alpha \zeta^2 + \ldots$$

la série

$$\Delta_0 \alpha_0 \zeta + \Delta^1 \alpha_0 \zeta^2 + \ldots = \zeta(\Delta_0 \alpha_0 + \Delta^1 \alpha_0 \zeta + \ldots)$$

qui est, à la variable et à un facteur près, de la même forme que la série qui constitue le premier terme de la formule (20).

Ces considérations permettent de voir que les résultats obtenus en appliquant le théorème d'Hurwitz-Pincherle seront plus généraux que ceux obtenus en appliquant la transformation d'Euler.

En s'appuyant sur le théorème d'Hurwitz-Pincherle, Mandelbrojt démontre le théorème suivant :

Soit

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots \tag{22}$$

une série de rayon de convergence égal à un. Si F(z) *n'a des points singuliers que sur le cercle de convergence, la quantité*

$$\varphi = \text{arc}\cos\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)$$

avec

$$k = \overline{\lim} \sqrt[n]{|\gamma_n|},$$

où

$$\gamma_m = a_{m+1}\, g(1) - C_m^1 a_m\, g(2) + \ldots \pm a_1 g(m+1),$$

$g(z)$ *étant une fonction entière satisfaisant à la condition*

$$|g(z)| < e^{\varepsilon r} \qquad (z = re^{i\theta}) \quad \text{pour } r > r_\varepsilon \qquad (\varepsilon \textit{ positif quelconque}),$$

représente un argument d'un point singulier de F(z).

(C'est-à-dire qu'un des deux points $e^{\pm i\varphi}$ est un point singulier.)

C'est d'ailleurs le point singulier le plus rapproché du point -1.

Ce même théorème permet de distinguer lequel de ces deux points $e^{i\varphi}$ ou $e^{-i\varphi}$ est singulier.

Ainsi après avoir détermine la quantité $|\varphi|$ il suffit de voir pour laquelle des deux quantités $|\varphi|$ ou $-|\varphi|$ la quantité k définie respectivement pour les deux séries

$$\Sigma a_n e^{in(\pi - |\varphi|)} z^n \quad \text{et} \quad \Sigma a_n e^{in(\pi + |\varphi|)} z^n$$

est égale à 2.

En posant en particulier

$$g(z) = \text{const.} = 1,$$

on a le fait signalé à la page 7.

Remarquons que le critère [avec $g(z) = 1$], qui résulte du théorème général établi et qui sert à distinguer lequel des deux points $e^{\pm i\varphi}$ est singulier, une fois la quantité $|\varphi|$ déterminée, résulte aussi d'un théorème de Lindelof d'après lequel : *La condition nécessaire et suffisante pour que le point* $e^{i\varphi}$ *soit singulier est qu'on ait*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|\Delta_n b_0|} = 2,$$

en posant $b_n = a_n e^{in(\pi - \varphi)}$ [36, *a*]. (Comparer au théorème de Pringshein, page 9.)

Les deux premiers théorèmes de ce numéro permettent de déterminer tous les points singuliers de (22) si F(z) n'a qu'un nombre fini de points singuliers, tous situés sur le cercle de convergence.

CHAPITRE VI.

LES SÉRIES ADMETTANT LE CERCLE DE CONVERGENCE COMME COUPURE ET QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

15. Exemples de Weierstrass et Fredholm. — Il y a un cas qui semble être au premier abord tout à fait particulier et où le problème du prolongement analytique ne se présente plus. C'est le cas où le domaine d'existence de la fonction représentée par une série entière est le cercle de convergence de celle-ci. Tous les points de sa circonférence sont singuliers pour cette série. On dit dans ce cas que le cercle de convergence est une coupure pour la série.

Déjà les premiers auteurs qui ont traité les fonctions analytiques en partant des séries entières ont remarqué de telles séries

Citons l'exemple de Weierstrass [67], à savoir la série

$$\Sigma a^n z^{b^n},$$

où a est positif et où b est entier supérieur à *un*.

Remarquons tout de suite que les puissances b^n de z qui correspondent aux coefficients ne s'annulant pas sont très écartées les unes des autres.

Dans le cas de l'exemple de Weierstrass le fait que le cercle de convergence est une coupure est une conséquence particulièrement simple de la structure arithmétique des quantités b^n (*voir* [23, *b*]). Une autre série, due à Fredholm [19],

$$a z + a^2 z^4 + \ldots + a^n z^{n^2} \ldots,$$

représente également une fonction admettant le cercle de convergence comme coupure; les puissances correspondant aux coefficients non nuls sont encore rares, mais les considérations arithmétiques qui pouvaient servir pour la série de Weierstrass ne s'appliquent plus dans ce cas.

16. Théorème d'Hadamard. Généralisations de Borel et Fabry. — Hadamard a eu l'idée de considérer en général les séries de la forme

$$\Sigma a_i z^{n_i}, \tag{23}$$

où la suite n_i tend vers l'infini très rapidement, et il a démontré un théorème qui généralise de beaucoup l'exemple de Weierstrass.

Voilà l'énoncé du théorème d'Hadamard [23, *b*] : *La série* $\Sigma a_i z^{n_i}$ *admet le cercle de convergence comme coupure si*

$$\varliminf \frac{n_{i+1} - n_i}{n_i} > 0.$$

Borel [5, *l*] a remplacé cette dernière condition par la suivante

$$\varliminf \frac{n_{i+1} - n_i}{\sqrt{n_i}} > 0,$$

et enfin Fabry a démontré [16, *a*] que *le cercle de convergence de* (3) *est une coupure si*, λ *étant une quantité fixe*, $(0 < \lambda < 1)$ *pour une infinité d'entiers* m, *il ne reste entre*

$$m(1 - \lambda) \quad et \quad m(1 + \lambda)$$

que ρ *entiers* n *tels que les* a_n *sont non nuls*, $\dfrac{\rho}{m}$ *et* $\dfrac{\mathrm{L}|a_m|}{m}$ *tendant vers zéro.*

Il résulte des théorèmes de Fabry que (23) *admet le cercle de convergence comme coupure si*

$$\lim_{i=\infty} (n_{i+1} - n_i) = \infty$$

ou si

$$\lim_{i=\infty} \frac{n_i}{i} = \infty \qquad (\textit{voir} [15, c]).$$

Fabry tire son théorème comme conséquence d'un théorème plus général qui lui est également dû [16, *a*] et qui s'énonce de la manière suivante : *soit* $\mathrm{R} = 1$; γ_n *étant un arc qui dépend de* n, *soit* s *le nombre de changements de signe de la partie réelle* a'_q *de* $a_q e^{i\gamma_n}$ *lorsque* q *varie de* $n - \lambda n$ *à* $n + \lambda n$. *Si l'on peut choisir* γ_n *en fonction de* n *de telle manière que, pour une infinité de valeur de* n, *les quantités* $\dfrac{1}{n}\mathrm{L}|a'_n|$ *et* $\dfrac{s}{n}$ *tendent vers zéro, le point* $z = 1$ *est singulier.*

17. Théorèmes de Braïtzeff et Subbotin. — En s'inspirant d'un autre théorème de Fabry [16. *a*, *e*], Braïtzeff démontre le théorème suivant : *Si les autres conditions du théorème précédent ont lieu*, *et si l'on a*

$$\varlimsup \frac{s}{2\lambda n} = \alpha,$$

la fonction $f(z)$ possède un point singulier dont l'argument est compris entre $-\pi\alpha$ et $\pi\alpha$,

Si $f(z)$ n'a qu'un point singulier sur le cercle de convergence, son argument est précisément égal à une des quantités $-\pi\alpha$ ou $\pi\alpha$ [6, *a*, *b*].

On peut, d'ailleurs, déterminer lequel des deux points $e^{\pm i\alpha\pi}$ est effectivement singulier. Si, en désignant par s' le nombre de changements de signe de la partie réelle a''_q de $a_q e^{i\gamma_n + iq\delta}$ où $\delta = \pm \alpha\pi$, lorsque q varie entre $n - \lambda n$ et $n + \lambda n$, — *on voit que pour une infinité de n on a*

$$\lim \frac{1}{n} \mathrm{L}\,|a''_n| = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim \frac{s'}{n} = 0,$$

alors δ est l'argument du point singulier.

Braïtzeff fait correspondre à $f(z)$ la fonction

$$f_\varphi(z) = \sum_0^\infty \Im(ne^{i\varphi})\, z^n,$$

où

$$\Im(ne^{i\varphi}) = \sum_0^\infty \frac{a_s (ne^{i\varphi})^s}{s\,!}$$

(*voir* aussi [5, *j*]) et il remarque que si le rayon de convergence de $f_\varphi(z)$ est supérieur à un et si la droite, issue de l'origine et faisant l'angle φ avec Ox, ne rencontre pas un sommet du polygone de Borel [5, *j*] alors $f_\varphi(z)$ n'a qu'un point singulier sur son cercle de convergence. Le théorème précédent lui permet donc de calculer l'affixe de ce point. Soient $l(\varphi)$ et $\sigma(\varphi)$ respectivement son module et son argument. *Dans ces conditions le point*

$$\zeta = \frac{e^{i\varphi}}{l(\varphi) + i\sigma(\varphi)}$$

est un point singulier de $f(z)$.

Subbotin [58, *a*] a simplifié quelques résultats de Braïtzeff. Ces deux auteurs ont donné une théorie assez complète de la recherche effective des points singuliers d'une série de Taylor.

Revenons aux séries admettant le cercle de convergence comme coupure.

18. **Théorème de Pólya.** — Le théorème suivant dû à Pólya et concernant les séries admettant le cercle de convergence comme coupure montre le rôle général que peuvent jouer les quantités $D_{n,p}$ introduites précédemment :

Si les quantités $\frac{n}{p}$ restent bornées, pour que le cercle de convergence ne soit pas une coupure il faut que

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \, |D_{n,p-1}|^{\frac{1}{(n+p-1)p}} < \frac{1}{R}.$$

Ce théorème n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un autre théorème [52, f] pour l'énoncé duquel il faut introduire quelques nouvelles notions.

Soit E un ensemble borné et fermé.

Soit $T_n(z)$ un polynome qui parmi tous les polynomes de degré n et dont le coefficient du plus haut degré est égal à un s'écarte, dans E, le moins possible de O.

On appelle d'après Fekete [18] diamètre transfini de E la quantité $\lim \sqrt[n]{\tau_n}$ où

$$\tau_n = \max |T_n(z)|, \qquad z \text{ variant dans E.}$$

On peut alors démontrer le théorème suivant :

Soit $f(z)$ uniforme; en désignant par τ le diamètre transfini de l'ensemble E des points $\frac{1}{\alpha}$ où α est un point singulier quelconque de $f(z)$ et par σ la distance du point de condensation de E le plus éloigné de l'origine, à tout $\varepsilon > 0$ assez petit et $\omega > 0$ assez grand correspond un K tel que si

$$n < \omega p, \qquad p > K,$$

alors

$$|D_{n,p-1}|^{\frac{1}{(n+p-1)p}} < (\sigma+\varepsilon)^{\frac{n}{n+p-1}}(\tau+\varepsilon)^{\frac{p-1}{n+p-1}} \quad (^1).$$

---

(1) On démontre cette inégalité lorsqu'en conservant les autres notations, on désigne par E un ensemble borné et fermé, la fonction $f\left(\frac{1}{z}\right)$ étant holomorphe dans l'ensemble complémentaire E_1 de E (E_1 étant supposé connexe).

On passe de ce théorème au théorème cité plus haut en remarquant que le diamètre transfini d'un ensemble borné et fermé E, dont l'ensemble complémentaire est connexe, est le rayon du cercle dont l'extérieur peut être représenté conformément sur l'ensemble complémentaire de E, en laissant le point à l'infini et son élément linéaire invariants.

19. **Remarque de Borel-Pringsheim.** — Bien que tous ces théorèmes concernant les fonctions admettant le cercle de convergence comme coupure paraissent avoir un caractère bien particulier, certains raisonnements ont permis à Borel et Pringsheim d'affirmer le fait intuitif, que le cercle de convergence est, en général, une coupure.

Ceci voulant dire, *grosso modo*, qu'on a plus de chance de tomber sur une telle série que sur une série prolongeable au delà du cercle de convergence.

Évidemment, si l'on se rapporte au point de vue de la puissance des ensembles, cette remarque n'a pas de sens si l'on ne borne pas la classe de séries que l'on considère, car la puissance de l'ensemble des séries admettant le cercle de convergence comme coupure, et la puissance de l'ensemble de toutes les autres séries est la même (on considère évidemment les séries ayant le même rayon de convergence) [32, *g*].

Le théorème d'Hadamard et celui de Fatou-Pólya [27] sont significatifs à ce point de vue.

20. **Théorème de Fatou-Pólya.** — L'énoncé du théorème de Fatou-Pólya est le suivant [17; 27] :

Il suffit de changer en (3) *le signe d'une infinité de coefficients, dont les indices sont convenablement choisis* (*ce choix dépend de la série en question*) *pour que le cercle de convergence devienne une coupure.*

Le théorème d'Hadamard peut être traduit de la manière suivante :

On peut fixer les modules des coefficients d'une série (3), de manière que, quels que soient les arguments de ces coefficients, le cercle de convergence soit une coupure.

Le théorème de Fatou-Pólya montre, au contraire, qu'il est impossible de fixer les modules de manière que le cercle de convergence ne soit pas une coupure quels que soient les arguments.

Donc on peut former des classes de séries admettant le cercle de convergence comme coupure en fixant les modules, et l'on ne peut pas, au contraire, former de telles classes pour des séries prolongeables.

21. Recherches de Borel. — Il convient de donner dans ce chapitre une classe de séries, admettant le cercle de convergence comme coupure. due à Borel [5, f, g].

Cet auteur dit que deux séries entières appartiennent à la même classe lorsque les puissances de z, dont les coefficients ne sont pas nuls, sont les mêmes dans les deux séries.

L'ensemble de toutes les séries appartenant à une classe donnée, et dont les modules vérifient certaines inégalités (les arguments restant arbitraires), est appelé sous-classe.

Une sous-classe est dite *impropre* lorsque les inegalités qui la définissent sont telles que toute série de la sous-classe est la somme d'une série appartenant à une classe moins étendue (ayant plus de lacunes) et d'une série ayant un rayon de convergence plus grand. Dans le cas contraire, elle est dite *propre*.

Une classe est dite *singulière* si toutes les séries de cette classe admettent le cercle de convergence comme coupure.

Borel démontre le théorème suivant :

Pour qu'une classe soit singulière, il suffit que cette classe renferme une sous-classe propre S *ayant la propriété suivante : « Une série arbitraire* φ *de cette sous-classe* S *étant donnée, il est possible de former une autre série* ψ *dans laquelle les puissances de la variable figurant effectivement dans la série donnée* φ *ont les mêmes coefficients que celle-ci, les autres coefficients de* ψ *étant quelconques, cette série* ψ *n'ayant sur le cercle de convergence qu'un nombre fini de points singuliers.* »

22. Démonstrations du théorème d'Hadamard-Fabry. Théorème d'Ostrowski. Démonstration du théorème Fatou-Polya. Théorèmes de Fabry et Mandelbrojt. — Pour les théorèmes d'Hadamard et celui de Fabry, remarquons que, outre les démonstrations dues à Hadamard et Fabry eux-mêmes qui consistent à remplacer dans l'étude du prolongement analytique d'une série (3) (en donnant des conditions pour qu'un point sur le cercle de convergence soit singulier), le coefficient

$$(24) \qquad a'_m = a_m + \frac{m+1}{1} a_{m+1}\beta + \ldots + C^p_{m+p} a_{m+n}\beta^p + \ldots$$

correspondant à un point β intérieur au cercle de convergence de (3) ($\alpha = 0$) par une quantité qui ne contient qu'un nombre fini de termes intervenant dans la partie droite de (24), — il existe plusieurs autres démonstrations du théorème d'Hadamard : celle de Faber [15, *bc*] retrouvée par Mordell [43], celle de Szasz [59], celle de Carlson-Landau [9], et enfin celle de M. Ostrowski [49, *b*].

Celle de Faber-Mordell consiste dans l'application de la transformation

$$z \left| \frac{z^p + z^{p+1}}{2} \right. .$$

La démonstration d'Ostrowski s'appuie sur son théorème que voici :

Si dans la série (23), *on a*

$$\frac{n_{i_{m+1}} - n_{m}}{n_{i_m}} > \delta > 0,$$

alors en posant

$$S_{n_i} = a_{n_1} z^{n_1} + \ldots + a_{n_i} z^{n_{i_m}},$$

on peut affirmer que $S_{n_{i_m}}(z)$ *tend uniformément vers* $f(z)$ *dans l'entourage de tout point régulier sur le cercle de convergence* [49, *b*].

Signalons qu'Ostrowski a donné une étude très approfondie des expressions qui ne sont composées que d'un nombre fini de termes et qui jouent le rôle des a'_m de l'égalité (24).

Le théorème de Fatou-Pólya peut être considéré comme conséquence du théorème de Fabry. Cette démonstration générale est due à Pólya [27].

Fatou lui-même [17] a démontré un cas particulier de ce théorème, mais il a prévu sa généralité.

Le théorème de Fatou-Pólya a été généralisé par Mandelbrojt [VI] de la manière suivante :

On peut changer le signe d'une infinité de coefficients d'une *série entière pour que tous les points sur le cercle de convergence soient singuliers du même ordre ω qui est celui de la série sur le cercle de convergence.*

Pour démontrer ce théorème il suffit d'employer la méthode d'Hurwitz [27] (qui lui a servi pour démontrer le théorème de Fatou-Pólya) et de tenir compte du théorème suivant dû à Fabry [16, *f*] : *La série* $\Sigma a_n z^{\lambda_n}$ $(R = 1)$ *admet tous les points du cercle de convergence comme singuliers du même ordre* ω *si*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \alpha \sqrt{\lambda_n L \lambda_n}, \qquad (\alpha > 0).$$

23. Recherches de Pólya. — Les remarques de Borel-Pringsheim sont justifiées par les recherches de Pólya.

Pólya arrive à des résultats remarquables en considérant l'ensemble de toutes les séries de rayon de convergence *un* autour de l'origine comme un ensemble de points à une infinité de dimensions, dont les coordonnées sont les coefficients [52, *g*].

Il a remarqué qu'on peut transporter à ces ensembles différentes définitions de la théorie des ensembles. Soit $\varepsilon_n \geqq 0$. Pólya appelle voisinage $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$ du point $(a_0 \ldots a_n \ldots)$ l'ensemble des points $(u_0, \ldots, u_n, \ldots)$ tel qu'on ait $|u_n - a_n| \leqq \varepsilon_n$.

Si $\overline{\lim}\, \varepsilon_n^{\frac{1}{n}} = 1$ sans que $\underline{\lim}\, \varepsilon_n^{\frac{1}{n}} = 1$ le voisinage est dit d'une direction. Le voisinage est dit proche si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n - a_n|} < 1$.

L'ensemble M est dit partout dense, en toute direction, si dans tout voisinage d'une direction autour de chaque point il existe un point appartenant à M et n'appartenant pas au voisinage proche du point,

Les autres définitions qui interviennent dans la suite sont analogues à celles de la théorie des ensembles ordinaires.

Pólya démontre alors les théorèmes suivants :

L'ensemble des séries entières non prolongeables au delà du cercle de convergence est partout dense en toute direction et ne contient que des points intérieurs.

L'ensemble des séries prolongeables est « jamais dense » et parfait.

24. Théorème de Mandelbrojt. — Un autre fait dans le même ordre d'idées est dû à Mandelbrojt [38, *d*].

Étant données une série

$$\Sigma a_n z^n$$

et une suite d'entiers n_j telle que

$$\lim(n_{j+1} - n_j) = \infty,$$
$$\overline{\lim} \sqrt[n_j]{|a_{n_j}|} = 1$$

($R = 1$), *on peut former une infinité, ayant la puissance du continu, de séries*

$$\Sigma a'_n z^n \qquad (a'_{n_j} = a_{n_j} e^{i\varphi} \text{ et } a'_n = a_n \textit{ si } n \neq n_j),$$

telles que les fonctions correspondantes admettent le cercle de convergence comme coupure et seulement une infinité dénombrable de séries de la même forme prolongeables au delà de ce cercle.

CHAPITRE VII.

SÉRIES LACUNAIRES.

25. Le rôle de lacunes. — Remarquons qu'en se rapportant au point de vue de Méray-Weierstrass, on peut indiquer *a priori* quelques propriétés des coefficients qui pourraient fournir des renseignements sur les singularités des fonctions analytiques.

Une telle propriété doit rester invariante par rapport à l'intégration et la dérivation, étant donné que les singularités ne changent pas considérablement quand on effectue ces deux opérations.

La propriété la plus simple de ce genre est fournie par le fait qu'il y a une infinité de lacunes (c'est-à-dire de coefficients qui sont nuls); la largeur [1] et la distribution de ces lacunes restant invariantes par rapport aux opérations indiquées.

Cette propriété intervient déjà dans le théorème d'Hadamard-

[1] Nous appelons largeur d'une lacune d'ordre n_i le nombre k_i tel qu'on ait

$$a_{n_i+1} = 0, \qquad a_{n_i+2} = 0, \qquad \ldots \qquad a_{n_i+k_i} = 0 \qquad (a_{n_i} \neq 0, \qquad a_{n_i+k_i+1} \neq 0).$$

Les nombres n_i indiquent la distribution des lacunes; par la dérivation ou l'intégration, les lacunes se transportent toutes à la même distance à gauche ou à droite.

Fabry, remarquons aussi que la plupart des autres théorèmes où les lacunes n'interviennent pas explicitement peuvent être considérés comme donnant des renseignements sur les lacunes. Ainsi, par exemple, le théorème de M. Leau.

En effet, l'hypothèse de ce théorème montre entre autres, que si

$$a_{\lambda'_n} = g_1(\lambda'_n) = 0,$$

où $g_1(z)$ est une fonction entière (qui intervient dans ce théorème, *voir* page 16), d'ordre s la série

$$\sum \frac{1}{\lambda_n'^{s+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0)$$

converge pour ε positif quelconque.

Dans le cas où l'on étudie les singularités sur le cercle de convergence de rayon 1, une série $\Sigma b_n z^n$ avec des coefficients b_n, tel qu'il existe une suite λ'_n donnant lieu à l'égalité

$$\overline{\lim} \sqrt[\lambda'_n]{|b_{\lambda'_n}|} = \delta < 1$$

peut être considérée comme une série ayant des lacunes qui correspondent aux indices λ'_n. Les coefficients $b_{\lambda'_n}$ peuvent être considérés comme étant égaux à zéro, et les théorèmes I et II de ce chapitre peuvent être appliqués dans ce cas.

Il sera commode de dire que la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers *un* si le rayon de convergence de (3) est égal à *un* (nous le supposerons d'ailleurs dans la suite).

Pourtant si l'on n'a pas

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

nous dirons que $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers *un irrégulièrement*. Quand la série $\Sigma a_n z^n$ admet des lacunes, la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers *un* irrégulièrement d'une manière manifeste.

D'après les théorèmes qui sont exposés dans ce chapitre, on peut ajouter au théorème de Cauchy-Hadamard que c'est justement la manière dont $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers *un* (régulièrement ou irrégulièrement) qui fournit des renseignements sur les singularités de la série (3) ($R = 1$).

Les théorèmes de ce chapitre peuvent être résumés de la manière suivante :

Si l'irrégularité de la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ (c'est-à-dire l'irrégularité avec laquelle cette suite tend vers 1) caractérisée par une propriété (a) (par exemple, l'hypothèse du théorème I de ce chapitre) ayant lieu, les singularités de la série $\Sigma a_n z^n$ ne peuvent pas être de la nature caractérisée par une certaine propriété (A) (*voir* la conclusion du théorème I), l'irrégularite plus forte de la suite $\sqrt[n]{|c_n|}$ (c'est-à-dire la présence d'un nombre plus grand de lacunes) caractérisee par une propriéte (a') (*voir* l'hypothese du théorème II) entraîne le fait que les singularites de $\Sigma c_n z^n$ ne peuvent pas jouir d'une propriété (A′) (*voir* la conclusion du théoreme II); les propriétés (A) et (A′) étant entre elles dans le rapport suivant : tout ensemble de points singuliers jouissant de la propriété (A) jouit, à plus forte raison, de la propriété (A′); mais il existe, au contraire, des ensembles jouissant de la propriété (A′) sans qu'ils jouissent de la propriété (A).

D'ailleurs, il serait impossible de donner des renseignemeuts plus précis sur les singularités en ne considérant que les modules des coefficients, ceci résulte du theorème de Fatou-Pólya (*voir* p. 29).

En effet, soient deux suites $\sqrt[n]{|a_n|}$ et $\sqrt[n]{|c_n|}$, la premiere tendant régulièrement vers *un*, la seconde, au contraire, tendant vers *un* irrégulièrement; on pourrait toujours former une serie $\Sigma(-1)^{m_n} a_n z^n$ ayant le cercle de convergence comme coupure, la serie $\Sigma c_n z^n$ pouvant être supposée prolongeable.

Ce dernier fait n'est pourtant pas en contradiction avec la remarque que nous venons de faire : la série $\Sigma(-1)^{m_n} a_n z^n$ peut être considérée comme la somme d'une série n'ayant pas de lacunes $(\Sigma a_n z^n)$ et d'une série lacunaire $\left(-2\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} z^{m_n}\right)$.

Nous commençons par le théorème suivant.

26. Quelques théorèmes sur les séries lacunaires de Mandelbrojt. — I. *Si la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n} \tag{25}$$

est telle que :

1° $$\overline{\lim}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=\infty,$$

elle a sur le cercle de convergence un point singulier au moins qui n'est pas polaire.

Pour le démontrer, on s'appuie sur le lemme suivant [38, *d*] :

Si dans la série (25) *il y a une infinité de λ_{n_i} tels que :*

$$2^{o} \qquad \lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i} > k,$$

où k est un entier positif, cette série admet au moins $k+1$ pôles sur le cercle de convergence, ou bien elle a, sur ce cercle, des points singuliers autres que des pôles.

Ostrowski a remarqué que, dans ces conditions, si $\varphi(z)$ n'a que des pôles sur le cercle de convergence, elle y admet au moins $k+1$ pôles du plus haut degré [49, *c*].

Mandelbrojt a démontré le lemme précédent, en s'appuyant sur le fait que l'expression

$$\begin{vmatrix} b_n & b_{n+1} & \cdots & b_{n+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n+p} & \cdots & \cdots & b_{n+2p} \end{vmatrix}^{\frac{1}{n}}$$

doit tendre régulièrenent vers 1 si la série $\Sigma b_n z^n$ a exactement $p+1$ pôles sur le cercle de convergence et n'y admet pas d'autres points singuliers (*voir* le théorème d'Hadamard, p. 10), *voir* aussi [5, *a*].

Il résulte immédiatement du théorème I que si $(R = 1)$.

$$(26) \qquad \overline{\lim}(\lambda_{n+1} - q\lambda_n) = \infty \qquad (q \text{ entier}),$$

(25) ne peut pas être mise sous la forme $\dfrac{\varphi_1(z)}{[P(z)]^{\frac{1}{q+1}}}$, où $P(z)$ est un polynome et où $\varphi_1(z) = \Sigma c_n z^n$ avec $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} < 1$. [49, *c*.]

27. Théorèmes de Tsuji, Pólya, Obrechkoff, Schimizu, Izumi et Narumi. — Ce théorème a été généralisé de plusieurs manières.

Voici une généralisation de Tsuji :

Si 2^{o} *a lieu,* (25) *admet sur le cercle de convergence au moins $k+1$ points singuliers algébriques ou bien elle a, sur ce cercle, des singularités autres qu'algébriques* [62, *a*]. Schimizu a remplacé dans ce théorème le mot algébrique par le mot « semi-algébrique ». Cet auteur dit : le point ω_i est une singularité semi-algébrique si δ_1, δ_2, δ_3 et ε étant des quantités positives arbitraires on a dans D, défini par

$$\left|1-\frac{z}{\omega_i}\right| < \delta_1, \quad \frac{\pi}{2}-\delta_2 < \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{\omega_i}-1\right) < \frac{3\pi}{2}+\delta_3,$$
$$f(z)=\left(1-\frac{z}{\omega_i}\right)^{\lambda_i}[B+h(z)];$$

$h(z)$ étant holomorphe dans D, et de la forme

$$h(z)=o\left(\left|\frac{z}{\omega_i}-1\right|^{\varepsilon}\right)$$

(B et λ_i réel sont des constantes) [55, *a*]. Citons le théorème suivant de Pólya [52, *b*] (*voir* aussi Tsuji [62, *a*]) :

Si sur le cercle de convergence, qui est de rayon un, $f(z)$ n'a que des points algébrico-logarithmiques, on peut trouver deux entiers non négatifs p et q, un nombre positif a et un nombre réel α tels que

$$\max(|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_{n-p}|) > an^{\alpha}(\log n)^q.$$

Donc, *si* (25) *possède des lacunes de la forme* (1°), *elle ne peut pas posséder sur le cercle de convergence que des points algébrico-logarithmiques.*

Obrechkoff a généralisé le théorème I d'une manière différente [47, *b*]. Izumi et Schimizu ont complété le théorème d'Obrechkoff [28; 55, *a*].

Si $f(z)$ ne possède sur le cercle de convergence ($R=1$) *que k points singuliers*, $\omega_1, \ldots, \omega_k$, *tous semi-algébriques, alors :*

$$A_1 n_{i\nu}^{\alpha} \leq |a_{n_{1\nu}}|+\ldots+|a_{n_{k\nu}}| < A_2 n_{j\nu}^{\alpha}$$

où

$$n_{\mu\nu}=\nu q_{\mu\nu}+\mu-1 \qquad (\nu=0, 1, \ldots; \ \mu=1, 2, \ldots, k)$$

où

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{q_{\mu\nu}}{\sqrt[k]{\nu}}=0,$$

et où

$$\alpha=-1-\min(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \qquad [155\,a].$$

28. Théorème d'Ostrowski. — Le théorème suivant est dû à Ostrowski [49, *a*] :

Si (25) *est telle que*

$$\overline{\lim}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}=\infty,$$

cette série représente une fonction uniforme dans tout le domaine de son existence et la suite

$$S_{\lambda_{n_i}}(z) = a_1 z^{\lambda_1} + a_2 z^{\lambda_2} + \ldots + a_{n_i} z^{\lambda_{n_i}},$$

où

$$(27) \qquad \lim_{i=\infty} \frac{\lambda_{n_i+1}}{\lambda_{n_i}} = \infty$$

tend uniformément vers la fonction dans tout domaine borné et fermé intérieur au domaine d'existence de la fonction; ce domaine étant simplement connexe.

En s'appuyant sur le fait que « si un ensemble fermé et borné E n'est pas un continu et si E_1 est un sous-ensemble fermé de E tel que E ne contient aucun sous-ensemble continu contenant E_1 alors il existe un sous-ensemble de E_1 qui peut être entouré d'une couronne qui ne contient aucun point de E et dont chaque point est aussi peu éloigné d'un point de E_1 que l'on veut » et sur un théorème classique de Weierstrass, Mandelbrojt a tiré du théorème précédent la conclusion suivante :

II. *Si les λ_{n_i} extraits de la suite λ_n satisfont à la condition* (27), *les seules singularités possibles de la fonction représentée par la série* (25) *sont des continues s'étendant à l'infini* [38, *d*].

Un exemple d'Ostrowski [49, *a*] montre l'existence de telles séries prolongeables au delà du cercle de convergence.

29. Autres théorèmes sur les séries lacunaires. — Mandelbrojt a donné un exemple d'une série vérifiant la condition (1°) et n'ayant qu'un seul point singulier dans tout le plan [38, *d*]. Faber a donné un exemple d'une série telle que $\overline{\lim}\, \frac{\lambda_n}{n} = \infty$ et n'ayant qu'un seul point singulier sur le cercle de convergence mais admettant pourtant la lemniscate $|z(z-2)|$ comme coupure [15, *d*]. Popoff et Obrechkoff [53; 47, *a*] ont, au contraire, donné des conditions aux lacunes pour qu'une série les possédant ne puisse pas avoir un seul point singulier dans le plan.

Les théorèmes cités justifient déjà la remarque faite à la page 35, les propriétés (A) et (A′) se rapportant à *la nature des points singuliers;* nous allons énoncer un théorème dont les conclusions éclaircissent encore la remarque en question et où les propriétés (A) et (A') se rapportent au *nombre de points singuliers :*

Une suite d'entiers positifs λ_n étant donnée, nous désignerons par λ'_n la suite *complémentaire*, c'est-à-dire la suite telle que les λ'_n et les λ_n forment l'ensemble de tous les entiers positifs, aucun λ_n n'étant égal à aucun λ'_m.

S'il existe une série $\varphi(z) = \Sigma a_n z^{\lambda_n}$ qui admet un seul point singulier sur le cercle de convergence, aucune série $\Sigma b_n z^{\lambda_n}$ (où les b_n sont quelconques) n'a sur le cercle de convergence des pôles dont la partie principale se réduit a un seul terme $\frac{A}{(z-z_0)^p}$. En particulier, il n'y a pas de pôles simples sur le cercle de convergence [38, *d*].

On peut conclure en partant des recherches de Faber [15, *c*] que *si $\varphi(z)$ n'a qu'un seul point singulier dans le plan tout entier toute série de la forme $\Sigma b_n z^{\lambda'_n}$ admet le cercle de convergence comme coupure* [38, *g*].

On a posé la question [IV] à savoir si l'hypothèse du premier de ces deux derniers théorèmes n'entraînerait pas la conclusion du second. Pólya a donné la généralisation suivante du premier théorème [52, *b*].

Si $\varphi(z)$ n'a qu'un point singulier sur le cercle de convergence, aucune série $\Sigma b_n z^{\lambda'_n}$ ne peut admettre parmi ses points singuliers sur le cercle de convergence ni des points algébrico-logarithmiques ni des points isolés non critiques.

Cet auteur a introduit la notion de densité des coefficients non nuls qui permet de donner un aperçu synthétique de l'influence des lacunes [52, *e*].

30. **Théorèmes de Pòlya.** — Désignons par $N(r)$ le nombre des coefficients non nuls dont l'indice ne surpasse pas r. La quantité

$$\lim \frac{N(r)}{r},$$

si elle existe, est appelée densité des coefficients non nuls. De toute façon les expressions

$$\lim_{\xi=1-0}\ \underline{\lim}_{r=\infty} \frac{N(r)-N(r\xi)}{r-r\xi}, \qquad \underline{\lim}_{r=\infty} \frac{N(r)}{r}, \qquad \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{N(r)}{r},$$

$$\lim_{\xi=1-0}\ \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{N(r)-N(r\xi)}{r-r\xi}$$

ont toujours un sens et on les appelle respectivement :

Densité minima, *densité inférieure*, *densité supérieure*, *densité maxima.*

On démontre alors les théorèmes suivants :

Si la densité inférieure des coefficients non nuls est zéro, $f(z)$ est uniforme et son domaine d'existence est simplement connexe (il n'existe donc pas de points isolés). S'il n'y a qu'un point semi-isolé sur le cercle de convergence la densité supérieure des coefficients non nuls est égale à un [52, *e*].

Il suffit de remarquer que la somme de la densité inférieure d'une suite et de la densité supérieure de la suite complémentaire à la précédente, est égale à *un*, pour voir comment on peut passer des deux derniers théorèmes à un théorème même plus général que celui de la page 39 [52, *e*].

Un théorème important qu'on peut faire remonter au travail de Fabry [16, *d*] peut être énoncé de la manière suivante [15 *b*, 52, *e*] :

Si la densité maxima des coefficients différents de zéro est égale à δ, $f(z)$ admet des points singuliers sur tout arc fermé de longueur $2\pi\delta R$.

31. Propriétés arithmétiques des λ_n. — Nous énonçons le corollaire suivant du théorème de la page 39, dû à Mandelbrojt.

Si la suite λ_n ne contient qu'un nombre fini de multiples de chaque nombre p_i appartenant à une suite quelconque de nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ la série (25) *a, sur le cercle de convergence, un ensemble non réductible de points singuliers* [38, *d*].

Des théorèmes de ce genre ont été généralisés par Ostrowski.

Citons le théorème suivant dû à cet auteur [49, c] :

Si les λ_n sont tels qu'il existe au plus $r+1$ entiers $l(l<q)$ où q est un nombre premier, tels que

$$\lambda_n = l + mq,$$

où m est un entier quelconque, alors la série (25) *admet sur le cercle de convergence au moins $q-r$ points singuliers* et en général : *si α est un point singulier sur le cercle de convergence de $f(z)$ cette fonction admet au moins encore $q-r-1$ points singuliers sur le cercle de convergence qu'on obtient en multipliant α par les racines de degré q de l'unité.*

Citons enfin le théorème suivant dû à Tsuji [62, a] : *Si $f(z)$ a sur le cerle de convergence* ($R=1$) *k points singuliers, tous algébrico-logarithmiques, alors quelle que soit la suite d'entiers*

$$k_0, \quad k_0+1, \quad \ldots, \quad k_0+k,$$

on peut y trouver un entier ρ tel que pour tout entier positif q on ait

$$|a_{\rho+nq}| + |a_{\rho+(n+1)q}| + \ldots + |a_{\rho+(n+k-1)q}| = \Omega(n^r) \quad (^1).$$

32. **Lacunes généralisées.** — Considérons les séries entières dont les modules de coefficients tendent vers l'infini. Parmi ces séries, la série $\Sigma m z^m$ est la plus simple. L'expression $\sqrt[m]{m}$ tend régulièrement vers *un*, et il y a même lieu de la considérer comme une expression tendant vers *un* de la manière la plus régulière possible (parmi les expressions $\sqrt[n]{|a_n|}$, avec $\lim |a_n| = \infty$). Remarquons alors que $g(z)$ étant une fonction entière d'ordre inférieur à un, la série $\Sigma g(m) z^m$ ne peut pas avoir trop de lacunes (*voir* page 34).

Supposons au contraire qu'on ait une série $\Sigma b_m z^m$ dont les coefficients sont les suivants :

$$(28) \qquad b_{m_i} = m_i^{1+\alpha} \qquad (\alpha > 0;\ i = 1, 2, \ldots),$$

la suite m_i étant une suite donnée à l'avance, et pour tous les autres entiers positifs m

$$(29) \qquad b_m = m \qquad (m \neq m_i).$$

La suite $\sqrt[m]{b_m}$, tendant encore vers *un* (régulièrement mais pas de

(1) $A(n) = \Omega[B(n)]$ signifie que $A(n)$ est du même ordre de grandeur que $B(n)$.

la même manière que la suite $\sqrt[m]{m}$), on voit qu'on peut former une fonction entière d'ordre inférieur à *un* et telle que la série $\Sigma g(b_m) z^m$ ait autant de lacunes que l'on veut, pourvu que la suite m_i soit bien choisie.

Le fait qu'une série $\Sigma g(b_m) z^m$ puisse avoir plus de lacunes qu'une autre série $\Sigma g(a_m) z^m$ dépend du fait que la suite $\sqrt[m]{|b_m|}$ tend vers *un* d'une manière moins régulière que la série $\sqrt[m]{|a_m|}$, dans un sens plus précis qu'avant; par exemple si $a_m = m$, et si les b_m sont définis par (28) et (29), une semblable différence de régularité existe entre la suite $\sqrt[n]{|b_n|}$ et $\sqrt[m]{a_m}$, bien que les deux suites tendent vers *un* régulièrement.

Ces remarques intuitives, d'une part, et l'existence d'un rapport intime entre les singularités des fonctions $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma g(a_n) z^n$, d'autre part (*voir* p. 17 un exemple à ce sujet), justifient la définition des « lacunes généralisées » introduites par Mandelbrojt [38, *h*].

Soit $\Sigma a_n z^n$ une série entière (où l'égalité $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ peut avoir lieu, en supposant le rayon de convergence égal à *un*). Si la série $\Sigma g(a_n) z^n$ où $g(z)$ est une fonction entière admet des coefficients d'indice λ'_m comme lacunaires, c'est-à-dire tels que

$$\overline{\lim} \sqrt[\lambda'_m]{|g(a_{\lambda'_m})|} < \frac{1}{R},$$

R étant le rayon de convergence de la série $\Sigma g(a_m) z^m$, supposé fini, on dira que la série $\Sigma a_n z^n$ admet des lacunes généralisées, les coefficients lacunaires étant d'indice λ'_m.

Il est évident qu'une série n'ayant pas de lacunes au sens strict de ce mot, peut en avoir au sens général (lacunes généralisées), ces lacunes étant engendrées par l'emploi d'une fonction entière $g(z)$.

On peut démontrer par un exemple effectif [38, *h*] que des lacunes généralisées (par rapport à une $g(z)$ convenablement choisie) peuvent encore donner des renseignements sur les singularités. Mais il est évident que ces lacunes ne peuvent pas donner autant de renseignements que les lacunes ordinaires, car l'irrégularité de la décroissance de la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ vers *un* est dans le premier cas moins exprimée que dans le dernier.

Gergen [20] a obtenu des résultats généraux en partant de la notion des lacunes généralisées. Il a aussi donné une interprétation intéressante de ces lacunes. Citons le théorème suivant de cet auteur :

Supposons que $f(z) = \Sigma a_n z^n$ *possède sur son cercle de convergence* ($\alpha = 0$, $R = 1$) *un seul point singulier, qui est d'affixe* un. *Soit* λ'_n *une suite d'entiers positifs tels qu'il existe une série*

$$\varphi(z) = \Sigma b_n z^{\lambda'_n}$$

admettant un point algébrico-logarithmique sur son cercle de convergence. Supposons encore qu'il existe une fonction entière

$$g(z) = \Sigma \alpha_m z^m \qquad \text{avec} \quad \sqrt[m]{|\alpha_m|} = O[e^{-2(q+1)m}]$$

et telle que $g(a_{\lambda'_n}) = 0$. *Supposons enfin, que pour un* $\lambda_n \neq 0$ *appartenant à la suite complémentaire de* λ'_n *on ait* $g(a_{\lambda_n}) \neq 0$. *Alors, ou bien* $f(z)$ *possède au moins deux points singuliers dans le plan tout entier (l'infini compris) ou bien le point* un *est un point singulier d'ordre exponentiel supérieur à* q. *C'est-à-dire : la fonction entière* $f\left(\frac{z+1}{z}\right) = F(z)$ *est une fonction entière d'ordre apparent supérieur à* q.

CHAPITRE VIII.

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES COEFFICIENTS.

33. Théorèmes d'Eisenstein et von Koch-Subbotin. — Comme les lacunes, les propriétés arithmétiques des coefficients restent invariantes par rapport à la dérivation (et quelques-unes par rapport à l'intégration). Les propriétés arithmétiques des coefficients doivent donc fournir des renseignements sur les singularités des fonctions analytiques.

Un des théorèmes les plus anciens sur ce sujet est le théorème d'Eisenstein [14].

Si (3) *représente une fonction algébrique, les* a_n *étant rationnels, il existe alors un entier* $\mathcal{K}$ *tel que les quantités*

$$a_n \mathcal{K}^n$$

sont entières.

Ce théorème ainsi que sa démonstration portent un caractère élémentaire.

Il résulte d'après un théorème de von Koch [66] corrigé par Subbotin [58, *b*] *qu'il existe une suite d'entiers*

$$\gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots$$

tels que

$$a_n = \frac{\gamma_\nu}{\gamma^{2\nu-1}}, \qquad \gamma_\nu \equiv \frac{(\nu+1)\ldots(2\nu-2)}{(\nu-1)!}\delta^\nu\varepsilon^{\nu-1} \qquad (\operatorname{mod}\gamma); \quad (\nu = n-k)$$

où k est un entier positif.

Plusieurs auteurs ont pu généraliser ce théorème en remplaçant les fonctions algébriques par les intégrales des équations différentielles algébriques [51, *b*; 66; 44; 60].

Ainsi on doit à von Koch un théorème où le fait que (3) représente une fonction algébrique est remplacé par celui que cette fonction vérifie une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes en z.

34. Théorèmes de Pólya, Carlson, Mandelbrojt, Haussdorf. — Pólya a démontré la réciproque suivante du théorème d'Eisenstein [52, *f*] :

Si (3) *est une série à coefficients rationnels tels que l'on puisse choisir un entier* $\mathcal{K}$ *tel que les quantités*

$$a_n \mathcal{K}^n$$

soient entières et si la fonction représentée par (3) *est uniforme et n'admet qu'un ensemble dénombrable de points singuliers, elle est rationnelle.*

Ajoutons que *si les mêmes propriétés que dans le théorème précédent relatives aux* a_n *ont lieu et si toutes les singularités de* $f(z)$ $(\alpha = 0, \mathrm{R} = 1)$ *sont dans le cercle fermé de rayon* $\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}^2-1}$ *autour du point* $\frac{\mathcal{K}^2}{\mathcal{K}^2-1}$ [*le point* ∞ *étant régulier pour* $f(z)$], $f(z)$ *peut être mise sous la forme suivante*

$$\frac{\mathrm{P}(z)}{(1-z)^h},$$

où $\mathrm{P}(z)$ *est un polynome, et où h est un entier positif* [38, *b*].

Akhyeser [2] a simplifié la démonstration du dernier théorème.

Il résulte du dernier théorème que si l'on désigne par δ la distance du point *un* au point singulier le plus éloigné de celui-là, on peut écrire

$$\mathcal{K} > -1 + \frac{1}{\delta}.$$

Il est évident qu'on ne peut pas songer à donner une réciproque complète du théorème d'Eisenstein, c'est ce qu'on voit en partant du théorème de Fatou-Pólya.

Si dans (3) *les a_n sont entiers et si $f(z)$ n'a que des points isolés, elle est rationnelle* (Pólya [52, f]). Et enfin voici le théorème de Carlson :

Si les a_n étant entiers le rayon de convergence est égal à un ($\alpha = 0$), *alors ou bien le cercle de convergence est une coupure, ou bien $f(z)$ est de la forme*

$$\sum a_n z^n = \frac{P(z)}{(1 - z^p)^q},$$

où $P(z)$ *est un polynome et où p et q sont entiers positifs.*

Si l'on combine ce théorème avec celui de la page 35 on obtient le résultat suivant :

Si dans (25) *les a_n sont entiers, si le rayon de convergence est égal à* un *et si les λ_n vérifient la condition* 1°, *le cercle de convergence est une coupure* [38, j].

Remarquons qu'en partant du théorème de Carlson on démontre facilement (en se basant sur des considératious empruntées à la théorie des ensembles) que *si l'on considère toutes les séries* $\Sigma a_n z^n$ ($R = 1$) *dont les a_n sont entiers, il n'existe qu'un ensemble dénombrable de telles séries prolongeables. L'ensemble de telles séries non prolongeables a la puissance du continu* (*Haussdorf*) [25]. (Comparer ce théorème à la remarque de Borel-Pringsheim du n° 19 et aux n°s 23 et 24).

OUVRAGES A CONSULTER.

I. Borel. — *Leçons sur les fonctions méromorphes* (Gauthier-Villars, Paris, 1903).

II. Dienes. — *Leçons sur les singularités des fonctions analytiques* (Gauthier-Villars, Paris, 1913).

III. Hadamard. — La série de Taylor et son prolongement analytique (*Scientia*, 1901).

IV. Hadamard-Mandelbrojt. — La série de Taylor et son prolongement analytique (*Scientia*, 2e édition, t. I, 1926).

V. Landau. — *Darstellung und Begründung neuren Engebnisse der Funktionentheorie* (Springer, Berlin, 1916).

VI. Mandelbrojt. — *Modern Researches on the Singularities of Funktions defined by Taylor's Series* (The Rice Institute Pamphlet, 1927).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. Abel. — Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$ (*Journal de Crelle*, t. 1, p. 311 et suiv.).

2. Akhyeser. — Ueber eine Anwend. der Eulerschen Transform. (*Bull. de la Classe des Sc. phys. et math. de l'Ac. des Sc. de l'Ukraine*, t. 1, fasc. 4, 1925).

3. Appell. — *a.* Sur les séries divergentes à termes positives (*Archives de Grünert*, 1880).

b. Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable (*C. R. Acad. Sc.*, t. 87, p. 689).

4. Bernstein, Vl. — *a.* (*Rend. Ac. Lincei*, t. 3, 1926, et t. 7, 1928).

b. Généralisation et conséquence d'un théorème de Roy-Lindelöf (*Bull. Sc. math.*, t. 52, 1928).

5. Borel. — *a. Leçons sur les fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1903).

b. Leçons sur les séries à termes positifs (Paris, Gauthier-Villars, 1902).

c. Sur la série de Taylor (*C. R. Acad. Sc.*, 14 décembre 1896).

d. Sur les séries de Taylor (*Acta mathematica*, t. 22, 1897).

e. Sur la recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor (*C. R. Acad. Sc.*, 12 décembre 1898).

f. Sur la détermination de classes singulières de séries de Taylor (*C. R. Acad. Sc.*, 12 novembre 1903).

g. Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions (Paris, Gauthier-Villars, 1922).

h. Sur une application d'un théorème de M. Hadamard (*Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. 18, 1894).

i. Sur les singularités des séries de Taylor (*Soc. math. de France*, t. 26).

j. Leçons sur les séries divergentes (Gauthier-Villars, Paris, nouv. édit., 1928).

k. Sur une propriété des fonctions méromorphes (*C. R. Acad. Sc.*, 11 février 1895).

l. Sur les séries de Taylor qui admettent leur cercle de convergence comme coupure (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. 2, 1896).

6. Braïtzeff. — *a.* Recherches des points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor (*en russe, Moscou*, 1907).

b. Sur les points singuliers des fonctions analytiques (*en russe, Varsovie*, 1915).

7. Bray. — Functions of Ecart fini (*Journal of Mathematics*, vol. 51, n° 1, 1929).

8. Carlson. — *a.* Ueber Petenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten (*Math. Zeitschr.*, t. 9, 1921).

b. Sur une classe de séries de Taylor (*Thèse, Upsal*, 1914).

c. Ueber Potenzreihen (*Matemat. An.*, t. 79, 1919).

9. Carlson et Landau. — Neuer Beweis und Verallgem. des Fabryschen Lückensatzes (*Gott. Nach.*, 1921, p. 184).

10. Darboux. — Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. 4).

11. Dienes (Paul). — *a.* Essai sur les singularités des fonctions analytiques (*Journal de Mathématiques*, 1909, p. 344).

b. Leçons sur les singularités des fonctions analytiques (Paris, Gauthier-Villars, 1913).

12. Dienes-Valerie. — Sur les points critiques logarithmiques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 148, 1909).

13. Dienes (V. et P.). — Recherches nouvelles sur les singularités des fonctions analytiques (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1911, p. 389).

14. Eisenstein. — Allgem. Eigen. der Reihenen. der algeb. Funktionen *Monatshefte der Akad. d. Wiss. zu Berlin*, julllet 1852, p. 441).

15. Faber. — *a.* Ueber die Fortsetzbarkeit gewissen Taylorischen Reihen (*Math. Ann.*, t. 57, p. 369).

b. Ueber Reihenentwickelungen analytischer Funktionen (*Thèse, Munich*, 1903).

c. Ueber die Nicht-Forsetzbarkeit gewisser Potenzreihen (*Sitzungsberichte de l'Ac. de Bavière*, t. 34, 1904).

d. Ueber Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten (*Sitzingsberichte de l'Ac. de Bavière*, t. 36).

e. Bemerkungen zu einem funktionenth. Satze des H. Hadamard (*Jaresbericht des deutsch. Math. Ver.*, t. 16, 1907, p. 285).

16. Fabry. — *a.* Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans les cas très généraux (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 13).

b. Sur les séries de Taylor (*C. R. Acad. Sc.*, 20 décembre 1897).

c. Sur les points singuliers d'une série de Taylor (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. 4, 1898).

d. Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers (*Acta math.*, t. 22, 1899).

e. Ordre des points singuliers de la série de Taylor (*Acta mathematica*, t. 36, p. 69).

f. Ordre des points singuliers d'une série de Taylor (*C. R. Acad. Sc.*, 21 novembre 1910).

17. Fatou. — Séries trigonométriques et séries de Taylor (*Acta mathematica.* t. 30, p. 335).

18. Fekete. — Ueber die Verteil. der Wurzeln bei gew. algeb. gleich. mit ganz. Kœf. (*Math. Zeitsch.*, t. 17, 1923).

19. Fredholm. — *C. R. Acad. Sc.*, mars 1890.

20. Gergen. — On generalized lacunæ (*Americ. Journ. of Math.*, vol. 49, n° 3. 1927).

21. Gergen and Widder. — On Taylor's series admitting the cercle of convergence as a singular curve (*Amer. Journ. of Math.*, vol. 50, n° 1, 1928).

22. Goursat. — *Transact. of the American math. Society*, t. 1, 1900).

23. Hadamard. — *a.* Sur le rayon de convergence des séries ordonnées. suivant les puissances d'une variable (*C. R. Acad. Sc.*, 23 janvier 1888).

b. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. 8, 1892).

c. Sur la recherche des discontinuités polaires (*C. R. Acad. Sc.*, 8 avril 1889).

d. Théorème sur les séries entières (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, 8 mars 1827).

e. Théorème sur les séries entières (*Acta math.*, t. 22, 1898).

24. Hardy. — *a.* A theorem concerning Taylor's series (*Quarterly Journal of Math.*, vol. 44, 1913).

b. Note in addition to a paper on Taylor's series (*Ibid., vol.* 45, 1914).

25. Hausdorff. — Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen (*Mathematiche Zeitschrift*, 1918, Bd 4).

26. Hurwitz. — *a.* Ueber die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit (*Comptes rendus des séances du Congrès international de Zurich*, 1898).

b. Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 6, 1880).

c. Sur un théorème de M. Hadamard (*C. R. Acad. Sc.*; février 1899).

27. HURWITZ et PÓLYA. — Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes (*Acta mathematica*, t. 40, p. 180).

28. IZUMI. — *Japanese Journal of Math.*, t. 4, 1927.

29. KÖNIG. — Ueber eine Eingenschaft der Potezreihen (*Math. Annalen*, t. 23, p. 447-449).

30. KÖSSLER. — *a.* Nouveaux théorèmes sur les singularités des séries entières (*Lincei*, 1923, p. 26 et 83).

b. Proceedings of the Intern. Math. Congr. Toronto, 1924, p. 439.

31. LANDAU. — *a. Darstellung und Begründung einiger neueren Ergebnisse der Funktionentheorie* (Springer, Berlin, 1916).

b. Ueber einen Satz von Tschebyschef (*Math. Ann.*, t. 61, p. 527).

32. LECORNU. — Sur les séries entières (*C. R. Acad. Sc.*, t. 104, 1887, p. 349).

33. LEAU. — *a.* Sur les points singuliers, situés sur le cercle de convergence et sur la sommation des séries divergentes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 127, 1898, p. 607).

b. Sur les cercles de convergence des séries (*Ibid.*, 1898, p. 711).

c. Sur les fonctions définies par un développement de Taylor (*Ibid.*, t. 128, 27 mars 1899).

d. Recherches des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. 5, 1899).

34. LE ROY. — *a.* Sur les points singuliers d'une fonction définie par un développement de Taylor (*C. R. Acad. Sc.*. 5 décembre 1898).

b. Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. 2, 1900, p. 341).

c. Valeurs asymptotiques de certaines séries procédant suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle (*Bull. des Sc. math.*, t. 24, 1900).

35. LERCH. — *a.* Contribution à la théorie des fonctions (*Sitzungsberichte de l'Ac. de Bohême*, 15 octobre 1886).

b. Addition au Mémoire présenté dans la séance du 15 octobre 1886 (*Ibid.*, 1887).

c. Un théorème de la théorie des séries (*Acta math.*, t. 10, 1887, p. 87).

d. Ueber Funktionen mit beschränkter Existenzbereiche (*Mém. de l'Ac. de Bohême*. 7e série, t. 2, 1888).

e. Ueber die Nichtdifferentierbarkeit gewisser Funktionen (*Journal de Crelle*, t. 103, 1888).

36. LINDELÖF. — *a. Sur la transformation d'Euler et la détermination des points singuliers d'une fonctiom définie par son développement de Taylor* (28 février 1898).

b. Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques (*Acta societatis Fennicæ*, t. 24, nº 7, Helsingfors, 1898).

c. Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions (Paris, Gauthier-Villars, 1905).

37. LOOMAN. — Ueber Cauchy-Riem. Differentialg. (*Nachrichte d. K. Ges. der Wiss. zu Gottingen*, 1923, p. 97).

38. MANDELBROJT. — *a.* Sur la détermination effective des points singuliers

d'une fonction analytique donnée par son développement en série des puissances (*C. R. Acad. Sc.*, 15 février 1926).

b. La recherche des points singuliers d'une fonction analytique représentée par une série entière (*Journal de Liouville*, 1926).

c. Sur les séries de Taylor qui admettent des lacunes (*C. R. Acad. Sc.*, mars et avril 1923).

d. Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. 40. 1923).

e. Quelques généralisations des théorèmes sur les séries de Taylor qui admettent des lacunes (*C. R. Acad. Sc.*, janvier 1926).

f. Sur les points singuliers d'une série de Taylor situés sur le cercle de convergence (*Journal de Mathématique*, 1927).

g. Sur les séries de Taylor prolongeables (*C. R. Acad. Sc.*, juin 1927).

h. Sur les séries de Taylor qui ont des lacunes généralisées (*Société mathématique de France*, 1926).

i. Quelques théorèmes sur le nombre des points singuliers d'une série entière (*C. R. Acad. Sc.*, juillet 1925).

j. Quelques théorèmes sur les séries entières (*C. R. Acad. Sc.*, décembre 1923).

k. Sur la définition des fonctions analytiques (*Acta mathematica* t. 45, 1924).

l. Recherches modernes sur la série de Taylor (*Rendiconti delle Sedute dell'ano*, 1924-1925, Seminario matematico. Universita di Roma).

m. Sur les séries d'Eisenstein (*C. R. Acad. Sc.*, mars 1924).

n. Remarque sur une Note de M. Mordouchay-Boltowskoy (*C. R. Acad. Sc.*, avril 1924).

o. Sur la recherche des points singuliers d'une série de Dirichlet (*Soc. Mat. France*, 1929).

39. MÉRAY. — Sur l'impossibilité de franchir par la formule de Taylor les cercles de convergence de certaines séries entières (*Bull. des Sciences mathémat.*, t. 12, 1888).

40. MITTAG-LEFFLER. — *a.* Sur une transcendante remarquable découverte par M. Fredholm (*C. R. Acad. Sc.*, 24 mars 1890).

b. Sur une formule de M. Fredholm (*C. R. Acad. Sc.*, 25 mars 1901).

41. MINETTI. — Sur le rayon de convergence et sur les singularités d'une classe de fonctions analytiques définies par le développement de Taylor (*C. R. Acad. Sc.*, 28 juin 1926).

42. MONTEL. — *a.* Remarque sur les séries de Taylor lacunaires (*Comptes rendus des séances de la Société mathématique de France*, 27 mai 1924).

b. Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe (Paris, Gauthier-Villars, 1910).

c. Sur les différentielles totales et les fonctions monogènes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 156, 1913).

43. MORDELL. — On power series with the cercle of convergence as a line of essential singularities (*London Math Society*, vol. 2, part. 3).

44. Mordouhay-Boltowskoy. — *C. R. Acad. Sc.*, mars 1924.

45. Narumi. — *Tohoku Math. Journal*, t. 30, 1928.

46. Nörlund. — *Leçons sur les séries d'interpolation* (Gauthier-Villars, Paris 1926).

47. Obrechkoff. — *a.* Sur la sommation des séries divergentes et le prolongement d'une série de Taylor (*C. R. Acad. Sc.*, 1er février 1926).

b. Sur les singularités des séries de Taylor (*C. R. Acad. Sc.*, février 1927).

48. Osgood. — Selected topics in the general theory of Functions, IVe et Ve Leçons (*Bull. de la Société mathématique américaine*, 2e série, t. 5, 1898).

49. Ostrowski. — *a.* Ueber volständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen (*Abhandlungen aus dem Math. Seminär der Hamburgischen Universität*, t. 36, 1906).

b. Ueber eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koefficienten (*Sitzungsb. de l'Ac. de Berlin*, t. 34, 1921, p. 557).

c. Ueber singularitäten gewisser mit Lücken behateten Potenzreihen (*Jahresbericht des Deut. Math.-Vereinigung*, t. 35, 1926).

d. On representation of anal. funct. by power series (*Journal of London Math. Society*, t. 1, 1926, p. 251).

e. Ueber die Darstellung anal. Funk. durch Potenzreihen (*Jahr. Deut. Math. verein*, vol. 34, 1925).

f. On Hadamard's test for singular points (*Journ. of London Math. Society*, t. 1, 1926).

g. Ueber einen Satz von Herrn Hadamard (*Jahr. Deut. Math. ver.*, t. 35, 1926).

50. Picard. — Sur la théorie des fonctions analytiques et sur quelques fonctions spéciales (*Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 30 avril 1900).

51. Pincherle. — *a.* A proposito di un recente teorema del Sig. Hadamard (*Rendiconti de l'Ac. du Sc. de Bologna*, 19 février 1899).

b. Sulla singolarità di una funzione chi dipenda da due funz. data (*Rend. delle Ac. dei Lincei*, 1899).

c. Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles (*Journal de Crelle*, t. 103, 1888, p. 84-86).

52. Pólya. — *a.* Sur l'existence d'une limite considérée par M. Hadamard (*L'Enseignement math.*, 1924-1925).

b. Sur les singularités des séries lacunaires (*C. R. Acad. Sc.*, février 1927).

c. Sur un théorème de M. Hadamard relatif à la multiplication des singularités (*C. R. Acad. Sc.*, 7 mars 1927).

d. Eine Verallgemeinung des Fabryschen Lückensatzes (*Nachricht. d. Gesel. d. Wiss. zu Göttingen*, 1927).

e. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen (*Math. Zeitschr.*, 1929).

f. Ueber gewisse notw. Determinantenkriterien für die Forset. einer Pot. (*Math. An.*, 1928).

g. Ueber Potenzreihen deren Konvergenzkreis natürl. grenze ist (*Acta math.*, t. 41, p. 99).

h. Sur la recherche des points singuliers de la série de Taylor (*Atti dagli Cong. Intern. dei Math. Bologna*, t. 6, 1918).

53. Popoff. — Sur les lacunes que peut présenter une série de Taylor qui, etc. (*C. R. Acad. Sc.*, 8 février 1926).

54. Pringsheim. — *a.* Zur theorie der Taylorischen Reihe und der analyti. Funkt. mit beschränktem Exist. bereiche (*Sitzunsb. der Münch. Akadem*, 7 mai 1892).

b. Ueber das Verhalt. gewiss. Potenzreihen an dem convergenzkreis (*Math. An.*, t. 25, p. 419).

c. Ueber einige funktionenth. Anwend. der Eul. Reinent. (*Sitzungs. der Kgl. Bayr, Ak.*, 1912).

55. Shimizu. — *a.* On a extension of Mandelbrojt's theorem (*Proceeding of. the Phys. Math. Society of Japan.*, vol. 2, 1929).

b. On some power series and their sections (*Japanese Journal of Math.*, vol. 4, 1927).

c. A remark on Hadamard's theorem about the multiplication of singularities (*Proceedings of Phys. Math. Society*, vol. 10, nº 9).

56. Soula. — *a.* Sur la recherche des points singuliers de certaines fonctions définies par leur développement de Taylor (*Thèse, Journal de Liouville*, 1921).

b. Sur les points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor et sur certaines propriétés des fonctions analytiques au voisinage d'un point singulier (*Annales de l'École Normale supérieure*, avril 1927).

c. Sur les points singuliers des deux fonctions $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{z_n}{a_n}$ (*Bull. de la Société math. de France*, 1928).

d. Sur les séries de Taylor (*Bull. des Sciences math.*, t. 53, 1929).

57. Stone. — On the ordre of an analytic function at a singular point (*Annales of Math.*, vol. 26, 1924, p. 145).

58. Subbotin. — *a.* Sur la détermination des points singuliers d'une fonction analytique (*en russe, Recueil Math. de la Société math. de Moscou*, t. XXX, 1915, p. 402).

b. Sur la forme des coefficients d'une fonction algébrique (*en russe, Izvestia Donsk. Polyt. Inst.*, 1919, t. 7, fasc. 2).

59. Szász. — Ueber Sing. von Potenz. und Dirichl. am Rande des Konvergenzb (*Math. Ann.*, t. 85, 1922).

60. Teixera. — Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 2, 1885, p. 321).

61. Toeplitz. — Ueber das Wachstum der Potenzreihen in ihrem Konvergenzkreise (*Math. Zeit.*, t. 12, 1922, p. 189).

62. Tsuji. — On power series having only logarithmic algebrical singularities on the circle of convergence (*Japanese Journal of Math.*, t III, IV et V, 1926-1927-1928).

63. Valiron. — *C. R. Acad. Sci.*, t. 185, 1927.

64 VIJAYARAGHAVAN — Some configurations of points on a circle (*The Journal of the Indian Math Society*, vol 17, 1927)

65 VIVANTI GUTZMER — *Theorie der eindeutigen analytischen Funk* (Leipzig, 1906)

66 VON KOCH — *Arkiv for Math Astronomi och Fysik*, Bd I

67 WEIERSTRASS — *Gesammelte mathematische Abhandlungen* t 2, p 241

68 WIGERT — Sur les fonctions entieres (*Oversigt of Svenska Vetenskap Forhand*, 1900)

69 WORPITZKY — Beitrage zur Funktionenth (*Osterprogramm des Friedrich-Werder schen Gymnasium*, Berlin, 1870)

70 ZORETTI — *Leçons sur le prolongement analytique* (Paris, Gauthier-Villars, 1911)

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Introduction.

CHAPITRE II.

Théorèmes d'Hadamard et les recherches qui s'y rattachent.

CHAPITRE III.

Les coefficients des séries de Taylor ayant un seul point singulier et les recherches qui s'y rattachent.

CHAPITRE IV.

Théorème d'Hadamard sur la multiplication des singularités et les recherches qui s'y rattachent.

CHAPITRE V.

Théorème d'Hurwitz-Pincherle et les recherches qui s'y rattachent.

CHAPITRE VI.

Les séries admettant le cercle de convergence comme coupure et quelques théorèmes généraux.

CHAPITRE VII.

Séries lacunaires.

CHAPITRE VIII.

Propriétés arithmétiques des coefficients.

92653 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et C^{ie}, 55, quai des Grands-Augustins.