ERVAND KOGBETLIANTZ

Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 51 (1931)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1931__51__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LI

Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques

Par M. Ervand KOGBETLIANTZ
Docteur ès sciences (Paris)

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1931

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

SOMMATION

DES

SÉRIES ET INTÉGRALES DIVERGENTES

PAR LES

MOYENNES ARITHMÉTIQUES ET TYPIQUES

Par M. Ervand KOGBETLIANTZ,

Docteur ès sciences (Paris).

INTRODUCTION.

Les séries et intégrales divergentes, expulsées au début du XIX^e siècle des Mathématiques comme entièrement dépourvues de sens, sont à présent réhabilitées et admises à nouveau dans l'Analyse comme instrument utile. Voici un fait incontestable et qui semble prouver l'inconstance des géomètres.

Or, il n'en est rien. L'emploi des expressions divergentes au XVIII^e siècle s'explique par le fait bien connu que l'idée même de convergence ne s'est dégagée nettement qu'au début du XIX^e siècle avec Fourier (1811) et Bolzano (1817). D'autre part, les séries et intégrales divergentes ne sont actuellement employées qu'en tant que *sommables*, c'est-à-dire satisfaisant à des conditions précises. Cette limitation de leur emploi est très importante, car elle permet d'éviter les erreurs et les paradoxes, dont était accompagné si souvent l'emploi des expressions divergentes autrefois [D].

Le problème de sommation des séries et intégrales divergentes ainsi posé a beaucoup de points communs avec celui de prolongement analytique, mais il en diffère nettement. Le Chapitre I délimite le problème de sommation et précise les conditions dites *de régularité*, permettant l'emploi dans l'Analyse des séries et intégrales divergentes sommables. Le Chapitre II est consacré à l'étude des propriétés fondamentales du procédé des moyennes arithmétiques. Les conditions nécessaires et suffisantes de sommabilité par ces moyennes font l'objet du Chapitre III. Le Chapitre suivant traite le rôle des facteurs de sommabilité, l'extension du procédé aux moyennes d'ordre infiniment grand ainsi que la théorie des moyennes typiques introduites par M. Riesz et qui se sont révélées comme très utiles dans la théorie des séries de Dirichlet. Enfin, le dernier Chapitre, consacré aux applications des moyennes arithmétiques et typiques, a pour but de montrer leur utilité dans l'étude des séries trigonométriques de Fourier, des séries de Laplace et des séries ultrasphériques.

Au cours de la dernière décade 1920-1930 l'emploi des moyennes arithmétiques et typiques est devenu extrêmement fréquent et, faute de place, le dernier Chapitre n'en peut donner que quelques exemples. S'ils incitent le lecteur à l'étude de nombreux mémoires, contenant les applications du procédé de sommation par les moyennes et dont la liste se trouve à la fin du fascicule, le but de ce dernier sera atteint.

CHAPITRE I.

Problème de sommation. Conditions de régularité.

1. Une série ou intégrale pour laquelle la limite classique

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lim_{n=\infty} (u_0 + u_1 + \ldots + u_n)$$

ou

$$\lim_{x=\infty} \int_0^x u(t)\,dt$$

n'existe pas est dite divergente. Dans les deux cas il s'agit de la non-existence de $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$, $f(x)$ étant une *fonction à paliers*, constante et égale à s_n pour $n \leqq x < n+1$, dans le cas de la série. La sommation d'une expression divergente conduit à attacher à cette fonction $f(x)$ par un certain procédé P, un nombre parfaitement déterminé qu'on appelle sa limite généralisée — P pour $x \to \infty$. La P — $\lim\limits_{x=x_0}$ gén. $f(x)$ peut coïncider avec $f(x_0)$ et dans ce cas la fonction est P — continue au point $x \mp x_0$. Une fonction peut être P — dérivable au point $x = x_0$ sans y avoir une dérivée ordinaire.

On peut imaginer autant qu'on veut des procédés de sommation, mais seuls les procédés remplissant certaines conditions précisées dans la suite constituent les méthodes *régulières* de sommation. On introduit ces conditions précisément dans le but d'écarter les contradictions et les paradoxes et d'assurer ainsi l'emploi des séries et intégrales divergentes.

La sommation d'une série (intégrale) divergente peut être envisagée de deux points de vue essentiellement différents.

En posant $u_n = a_n x_0^n$ ($x_0 = 1$ par exemple), on peut rattacher la série Σu_n à une fonction analytique et dès lors toutes les méthodes de prolongement analytique, y compris celles de sommabilité analytique, deviennent applicables à la recherche de la valeur de cette fonction pour $x = x_0$. De même pour les intégrales divergentes, où l'on peut poser par exemple $u(t) = \lim\limits_{x=0} e^{-xt}.u(t)$. Ce point de vue est magistralement exposé par M. A. Buhl dans le fascicule VII de ce Mémorial. Par conséquent nous laissons de côté toutes les questions se rattachant à la sommabilité analytique. Au point de vue auquel nous nous plaçons systématiquement dans ce fascicule, une série ou intégrale n'est en réalité qu'une notation conventionnelle pour la limite de $f(x)$ pour $x \to \infty$. A ce second point de vue toute méthode de sommation n'est qu'une extension de la définition de limite, permettant d'attribuer une limite généralisée à des fonctions n'en possédant pas au sens habituel du mot. Une généralisation de la notion de limite n'est admissible que si la limite généralisée coïncide avec la limite ordinaire quand cette dernière existe, d'où une condition de régularité, énoncée pour la première fois par Hardy [a] et dite *condition de permanence : tout procédé de sommation régulier doit attribuer à une série (intégrale) convergente sa somme (valeur) ou bien*

1° $$\mathrm{P} - \lim_{x=\infty} \text{gén.} f(x) = \lim_{x=\infty} f(x).$$

Le phénomène de divergence est dû soit à l'oscillation jamais amortie de $f(x)$, quand x tend vers l'infini, entre $-\infty$ et $+\infty$ dans le cas général, soit à la croissance de $f(x)$ vers $+\infty$ ou à sa décroissance vers $-\infty$, cette allure générale de $f(x)$ pouvant être compliquée par l'oscillation de $f(x)$ entre deux fonctions monotones croissantes vers $+\infty$ ou décroissantes vers $-\infty$. On distingue ainsi la divergence *essentielle* pour laquelle on a $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{x=+\infty} f(x) = -\infty$, tant qu'on reste dans le réel. Rien ne précise mieux la différence profonde qui existe entre les sommabilités arithmétique et analytique que les différentes réponses données par les deux théories à la question de sommabilité des expressions essentiellement divergentes. En vertu de la condition de permanence, un procédé de sommation régulier ne peut attribuer à une série (intégrale) essentiellement divergente que la somme (valeur) infinie donnée par la limite ordinaire : au point de vue de sommabilité arithmétique une expression essentiellement divergente ne se distingue d'une expression convergente que par sa *valeur* (infinie) et la question de sommabilité d'une telle série où intégrale ne se pose même pas.

Au point de vue de sommabilité analytique, au contraire, on doit pouvoir sommer une expression essentiellement divergente puisqu'elle représente une valeur de la fonction analytique associée. Par exemple, la série $\Sigma 3^n$ sommée analytiquement doit avoir une somme généralisée égale à $-\frac{1}{2}$, valeur de la fonction $\frac{1}{1-z}$ pour $z = 3$. Le procédé de sommation défini par

$$\lim_{n=\infty} \text{gén.}\, s_n = \lim_{a=\infty} \left[e^a \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} a^n s_n \right].$$

attribue, en effet, à $\sum\limits_0^\infty z^n$ la somme $\frac{1}{1-z}$ pour $\mathrm{R}z > 1$, car

$$\lim_{n=\infty} \text{gén.}(z^n) = \lim_{a=\infty} e^{a(1-z)} = 0 \qquad (\mathrm{R}z > 1).$$

Ce procédé, admissible au point de vue de sommabilité analytique, n'est pas régulier au point de vue qui nous occupe. En effet, pour z réel et compris entre -1 et $+1$, il attribue à la série *convergente* Σz^n une somme *infinie* et la condition de permanence n'est pas satisfaite.

2. La définition de la divergence essentielle se laisse généraliser au cas complexe (Knopp, [*l*]). Soient $z = x + iy$ et $\zeta = \xi + i\eta$ deux variables complexes et $f(z) = p + iq$ une fonction de la première définie pour $z \neq z_1$. Étudions l'ensemble des valeurs qu'elle prend quand z tend vers z_1 en parcourant l'arc $z_0 z_1$ d'une courbe donnée C. Soient $x = x(t)$, $y = y(t)$ les équations de C, t_0 et t_1 correspondant

aux points z_0 et z_1 et le paramètre t croissant de t_0 à t_1 quand z parcourt l'arc $z_0 z_1$. Désignons par D (τ), $\tau \geqq t_0$ le plus petit domaine convexe contenant les points $f(z) = p + iq$ qui correspondent aux différents points z sur C pour $\tau \leqq t < t_1$.

L'ensemble E des points communs à tous les domaines D(τ), $t_0 \leqq \tau < t_1$, est l'ensemble d'indétermination de $f(z)$ pour $z \to z_1$ sur C. Quand E ne contient qu'un seul point il y a convergence, si ce point est à une distance finie de l'origine, et divergence essentielle s'il est à l'infini. Si E contient plus d'un point la fonction $f(z)$ oscille quand $z \to z_1$ sur C et il y a divergence tout court. Par exemple, $f(z)$ diverge essentiellement vers l'infini si $|f(z)| \to +\infty$ quand $z \to z_1$, tous les points $p + iq$ restant à l'intérieur d'un domaine angulaire d'ouverture inférieure à π. Le cas d'une *suite* complexe $\{s_n\}$, ou $s_n = \sigma_n + it_n$, s'obtient en prenant pour C le demi-axe réel et $f(x) = \sigma_n + it_n$ pour $x_n \leqq x < x_{n+1}$, où $x_n \to +\infty$ pour $n \to \infty$. Tout procédé P qui transforme $f(z)$ envisagée sur la courbe C en une fonction $\varphi(\omega)$ d'une autre variable complexe ω assujettie à parcourir l'arc d'une courbe Γ, dont le point ω_1 correspond au point z_1 de C, est un procédé de sommation puisqu'il remplace la limite de $f(z)$ pour $z \to z_1$ suivant C par celle de $\varphi(\omega)$ pour $\omega \to \omega_1$ suivant Γ. Si cette dernière A existe, $f(z)$ est sommable par le procédé P avec la valeur A et l'on a par définition

$$\mathrm{P} - \lim_{z \to z_1} \text{gén.} f(z) = \mathrm{A} = \lim_{\omega \to \omega_1} \varphi(\omega).$$

La première théorie de sommation due à M. E. Borel [B] a paru il y a trente ans. Elle reliait son procédé de sommation exponentielle à celui des moyennes arithmétiques.

Depuis on a souvent essayé de formuler une théorie générale des différents procédés de sommation qui les engloberait tous en les ramenant à une origine commune. Le développement rapide de cette branche de l'Analyse a constamment dépassé les cadres de ces théories. Le dernier essai fait tout récemment par Knopp, [l], ramène tous les procédés de sommation linéaires à la transformation suivante :

$$(\mathrm{P}_k) \qquad \varphi(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} f(z)\, \mathrm{K}(z, \omega)\, dt,$$

l'intégrale curviligne étant étendue à la courbe C : $z = x(t) + iy(t)$.

En particularisant les courbes C et Γ et le noyau $K(z,\omega)$, on obtient presque tous les procédés de sommation importants, définis et connus jusqu'à ce jour. Si $K(z,\omega)$ est une fonction à paliers par rapport à ω sur Γ, la *fonction* $f(z)$ est transformée en une *suite* $\{\varphi_n\}$. Soit ω réel et positif, par exemple, et $\omega_1=\infty$, $K(z,\omega)=K_n(z)$ pour $n\leqq\omega<n+1$, on a

$$\varphi_n=\int_{t_0}^{t_1} f(z)\,K_n(z)\,dt.$$

Le procédé de Borel transforme, au contraire, une *suite* $\{s_n\}$ en une *fonction* $\varphi(\omega)$. Les courbes C et Γ se réduisent aux demi-axes réels positifs et $K(x,\omega)$ est une fonction à paliers de x :

$$n!\,K(x,\omega)=e^{-\omega}\omega^n \qquad \text{pour } n\leqq x<n+1.$$

Par conséquent

$$\varphi(\omega)=e^{-\omega}\sum_0^\infty \frac{\omega^n}{n!}s_n \qquad (\omega_1=+\infty).$$

Le procédé des moyennes correspond au noyau : $K(x,\omega)=0$ pour $x>\omega$ et $K(x,\omega)=\left(1-\frac{x}{\omega}\right)^\delta$ pour $0\leqq x\leqq\omega$, $\delta>-1$. Ainsi $\varphi(\omega)$ — moyenne d'ordre δ de $f(\omega)$ — s'écrit ainsi :

$$\varphi(\omega)=f^{(\delta)}(\omega)=\int_0^\omega\left(1-\frac{x}{\omega}\right)^\delta f(x)\,dx.$$

3. La notion de méthode de sommation *régulière* ne s'est pas encore définitivement cristallisée, mais on peut néanmoins, nous semble-t-il, essayer de s'en servir, Pour assurer l'application aux séries sommables des opérations les plus élémentaires, il faut poser la condition dite de *distributivité*

$$2^\circ \quad \lim_{x=\infty}\text{gén.}[af(x)+b\,\varphi(x)]=a\lim_{x=\infty}\text{gén.}f(x)+b\lim_{x=\infty}\text{gén.}\,\varphi(x).$$

Les conditions 1° et 2° ne sauraient suffire pour assurer la régularité. Il est évident que la somme généralisée d'une série divergente mais sommable ne doit pas être affectée par l'addition d'un terme nul au début de la série. Or, le procédé suivant (Hurwitz et

Silvermann, [45])

$$Q - \lim_{n=\infty} \text{gén.}\, s_n = \lim_{n=\infty} \frac{1}{p_n} \sum_{1}^{n} \left\{ 1 + \frac{(-1)^k}{\log(k+1)} \right\} s_k$$

$$\left(p_n = \sum_{1}^{n} \left\{ 1 + \frac{(-1)^k}{\log(k+1)} \right\} \right),$$

où $p_n = n + o(1)$, satisfait aux conditions 1° et 2° et pourtant il attribue aux séries $\sum^{\infty}(-1)^n \log[n(n+1)]$ et $o + \sum_{2}^{\infty}(-1)^n \log[n(n+1)]$ les sommes différentes $+1$ et -1, ce qui est inadmissible. Ajoutons que le procédé des moyennes arithmétiques attribue aux deux séries envisagées la même somme généralisée nulle

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (-1)^n \log(n+1) = 0.$$

Il est évident que le procédé Q n'est pas régulier, d'où la nécessité de compléter les conditions de régularité. La suppression ou l'altération des premiers N termes d'une suite s_n ne doit pas détruire la sommabilité de cette suite par un procédé régulier donné ni modifier la valeur de la limite généralisée. On a ainsi la condition

$$3^{\circ} \qquad \lim_{x=\infty} \text{gén.}\, f(x+\xi) = \lim_{x=\infty} \text{gén.}\, f(x) \qquad (\xi \text{ arbitraire fixe}).$$

Cette condition assure la possibilité d'effectuer tous les changements finis dans une série sommable tels que modification de l'ordre relatif des termes en nombre fini, réunion de plusieurs termes en un seul, dilution de la série par des zéros en nombre fini, etc. Elle permet d'écarter certains procédés irréguliers tels que le procédé précédent Q. Considérons (Buhl [C], Levy [57]) un autre procédé :

$$Q_1 - \lim_{n=\infty} \text{gén.}\, s_n = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_p + s_{2p} + \ldots + s_{np}}{n+1} \qquad (p = 2q).$$

En appliquant Q_1 à la série $\Sigma(-1)^n = 1 - 1 + 1 - \ldots$, on trouve lim gén. $s_n = 1$, mais lim gén. $s_{n+1} = 0$. Par conséquent ce procédé est irrégulier, ce qui explique le paradoxe suivant : ajoutons à la série $\Sigma(-1)^n$, sommable avec la somme $+1$ par le procédé Q_1, l'unité; on obtient $1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$, et la somme généralisée de cette nouvelle série, sommable également Q_1, est aussi $+1$ malgré l'addition de l'unité. Tel est aussi l'exemple des deux procédés de sommation définis par Mazur [63]. Ces procédés sont équivalents, toute série sommable par l'un étant sommable aussi par l'autre, et néanmoins les sommes attribuées par ces procédés à une série spéciale sont différentes : zéro et $+1$. L'exemple serait frappant si ces deux procédés étaient réguliers, mais il suffit de réunir les deux premiers termes de la série en question en un seul, ce qui revient à remplacer s_n par s_{n-1} pour *détruire* sa sommabilité par ces procédés.

Pour préciser la portée de la condition 3°, étudions un procédé irrégulier signalé par Lévy [57] :

$$L_\lambda - \lim_{n=\infty} \text{gén.}\, s_n = \lim_{n=\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n} s_k \sin^2(\lambda + \sqrt{k}).$$

La suite divergente $\{\sin^2 \sqrt{n}\}$ sommée par ce procédé possède une limite généralisée fonction du paramètre λ

$$L_\lambda - \text{lim gén. } \sin^2 \sqrt{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos 2\lambda$$

qui peut varier de $\frac{1}{4}$ à $\frac{3}{4}$. Pourtant le procédé L_λ satisfait aux conditions 1°-3°. Ceci nous amène à introduire une nouvelle condition de régularité qui permet d'écarter les procédés irréguliers tels que L_λ. Elle concerne la *multiplication* des séries ou intégrales. Vu le but de l'introduction des conditions de régularité il est naturel de demander que toutes les fois où un procédé de sommation régulier s'applique et aux séries facteurs et à la série-produit, la somme qu'il attribue à la série-produit soit égale au produit des sommes attribuées aux séries-facteurs. Appliquons ce critère au procédé L_λ pris sous la forme continue. Les deux intégrales divergentes

$$s = \int_0^\infty d[\sin^2(\lambda + \sqrt{x})] \qquad \text{et} \qquad \sigma = \int_0^\infty d[\cos^2(\lambda + \sqrt{x})]$$

sont sommables L_λ et ont pour valeurs généralisées — L_λ

$$s = L_\lambda - \int_0^\infty d[\sin^2(\lambda + \sqrt{x})] = \frac{3}{4} - \sin^2\lambda$$

et

$$\sigma = L_\lambda - \int_0^\infty d[\cos^2(\lambda + \sqrt{x})] = \frac{1}{4} - \cos^2\lambda,$$

tandis que le procédé des moyennes arithmétiques donne les sommes généralisées égales respectivement à $s = \frac{1}{2} - \sin^2\lambda$ et $\sigma = \frac{1}{2} - \cos^2\lambda$. Formons l'intégrale-produit de ces deux intégrales s et σ :

$$w = \int_0^\infty w(x)\,dx,$$

où

$$w(x) = -\int_0^x \frac{\sin[2(\lambda + \sqrt{u})]\sin[2(\lambda + \sqrt{x-u})]}{4\sqrt{u}\sqrt{x-u}}\,du.$$

Cette intégrale est également sommable L_λ avec la valeur

$$w = L_\lambda - \int_0^\infty w(x)\,dx = \lim_{T=\infty} \frac{2}{T}\int_0^T \sin^2(\lambda + \sqrt{x})\,dx \int_0^x w(t)\,dt = \frac{1}{4},$$

qui n'est pas égale au produit $s.\sigma = \left(\frac{3}{4} - \sin^2\lambda\right)\left(\frac{1}{4} - \cos^2\lambda\right)$, la différence $16(w - s.\sigma) = 1 + 8\cos^2\lambda + 4\cos^2 2\lambda$ étant positive. On calcule w en intégrant par parties et appliquant la formule approchée

$$4\int_0^x dx \int_0^x w(t)\,dt$$
$$= x - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}x^{\frac{3}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\lambda + 2\sqrt{2x}\right) + \frac{\sin 4\lambda}{2\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} + O(\sqrt[4]{x}).$$

Ce résultat prouve l'irrégularité du procédé L_λ. Observons que la valeur de l'intégrale w donnée par le procédé des moyennes est égale au produit des sommes $s = \frac{1}{2} - \sin^2\lambda$ et $\sigma = -s$ qu'attribue ce procédé aux intégrales facteurs. Ainsi notre critère de régularité nous a permis d'expliquer la contradiction qui consiste dans l'attribution des valeurs différentes à une même intégrale (série) divergente et — ce qui est beaucoup plus important — de choisir entre les deux procédés contradictoires.

Énonçons maintenant sous une forme générale la condition nécessaire de régularité qui nous a permis de faire ce choix :

$$4^\circ \quad \left\{\lim_{x=\infty}\text{gén.} f(x)\right\}\left\{\lim_{x=\infty}\text{gén.}\,\varphi(x)\right\} = \lim_{x=\infty}\text{gén.}\int_0^x \varphi(x-t)\,df(t).$$

Si l'on pose

$$f(x) = \int_0^x u(t)\,dt, \qquad \varphi(x) = \int_0^x v(t)\,dt,$$

on a la multiplication des intégrales $f(\infty)$ et $\varphi(\infty)$. Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions à paliers on a la multiplication la plus générale des séries, dont ces fonctions représentent les sommes partielles. Soient, en effet, $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ deux fonctions indéfiniment croissantes, monotones et positives pour $x \geqq 0$. Leurs valeurs pour les valeurs entières de l'argument $\lambda_n = \lambda(n)$ et $\mu_m = \mu(m)$ forment deux suites $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_m\}$ où $\lambda_0, \mu_0 > 0$ et $\lambda_n, \mu_m \to \infty$ pour $n, m \to \infty$. Supposons que les points $x = \lambda_n$ et $y = \mu_m$ sont les points de discontinuité pour $f(x)$ et $\varphi(y)$ respectivement, ces fonctions étant constantes dans les intervalles $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$ et (μ_m, μ_{m+1}) et désignons leurs sauts pour $x = \lambda_n$ et $y = \mu_m$ par a_n et b_m respectivement

$$f(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n, \qquad \varphi(y) = \sum_{\mu_m < y} b_m.$$

Le produit des deux séries de Dirichlet $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ et $\Sigma b_m e^{-\mu_m s}$ des types λ et μ est une série du type ν, $\Sigma c_p e^{-\nu_p s}$, où $\nu_p = \lambda_n + \mu_m$, et ses coefficients c_p sont donnés par

$$c_p = \sum_{\lambda_n + \mu_m = \nu_p} a_n b_m.$$

La série $\sum_0^\infty c_p$ est dite produit du type (λ, μ) des séries Σa_n et Σb_m.

La règle de Cauchy n'est qu'un cas particulier de cette définition, où $\lambda(x) \equiv \mu(x) \equiv x$. Dans le cas considéré l'intégrale dans le second membre de 4° n'est que la somme partielle de la série-produit Σc_p, à savoir $\sum_{\nu_p < \omega} c_p$.

Les conditions 1°-4° constituent, à notre avis, un ensemble minimum des propriétés dont doit jouir un procédé de sommation pour que l'on puisse le considérer comme régulier. On a souvent proposé d'autres conditions de régularité. On a demandé par exemple que la série-produit de deux séries sommables par un procédé soit nécessairement sommable par ce procédé ou bien encore que tout calcul formel qui aboutit à une série sommable ne donne jamais de résultat différent de la somme généralisée attribuée à cette série par un procédé de sommation régulier (Knopp, [j]). Lévy [57] a proposé également de ne considérer comme réguliers que les procédés qui attribueraient à toute suite bornée sommable par les moyennes arithmétiques la même limite que le procédé des moyennes.

En ce qui concerne la sommabilité du produit de deux séries sommables il suffit d'observer que la série-produit de deux séries *convergentes* en général diverge, ce qui n'a pas empêché l'emploi des séries convergentes dans l'Analyse. Notre condition 4° n'exige pas non plus la sommabilité de la série-produit. Quant à l'idée de poser comme *définition* de sommation régulière l'unicité de la somme généralisée quels que soient les procédés réguliers sommant une série divergente, on ne voit aucune utilité dans ce déplacement de la difficulté essentielle que présente l'étude de l'unicité de la somme généralisée. Il est bien préférable de considérer en lui-même ce problème fondamental et le plus attrayant de la théorie de sommabilité arithmétique et d'écarter les procédés artificiels et irréguliers, en posant les conditions de régularité 1°-4°. La question d'unicité de la somme est le point le plus délicat de toute la théorie : peut-on, en effet, admettre et justifier l'existence de plusieurs sommes généralisées différentes attribuées à une même série ou intégrale divergente par différents procédés de sommation réguliers ? Il semble que non et jusqu'à présent, à notre connaissance, un tel cas n'a pas été signalé : on ne connaît aucune série ou intégrale à laquelle deux procédés réguliers au sens des conditions 1°-4° attribueraient des sommes différentes. L'exemple effectif d'une telle série aurait le plus haut intérêt.

4. La condition de permanence a été étudiée par Tœplitz qui a établi en 1911 [93] les conditions nécessaires et suffisantes de permanence pour les procédés linéaires de la forme suivante :

$$\lim_{n=\infty} \text{gén.}\, s_n = \lim_{n=\infty} \sum_{m=0}^{N(n)} \alpha_{nm} s_m \qquad \begin{bmatrix} N(n) \to \infty \\ n \to \infty \end{bmatrix}.$$

Soient $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_{nm} = \alpha_m$ ainsi que $\lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm} = \alpha$. On trouve, si $s_m \to s$ avec $m \to \infty$,

$$\lim_{n=\infty} \text{gén.}\, s_n = \alpha s + \sum_0^{\infty} \alpha_m (s_m - s).$$

Dans le cas $s = 0$, on a $\lim\limits_{n=\infty} \text{gén.}\, s_n = 0$ pourvu que soient remplies les conditions $\alpha_m = 0$, $m = 0, 1, 2 \ldots, \infty$ sous l'hypothèse de convergence absolue de toutes les séries $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm}$, leurs sommes étant bornées dans leur ensemble. Pour $s \neq 0$ il faut encore $\alpha = 1$ pour assurer la permanence. On a ainsi les conditions suivantes, dites *conditions de Tœplitz* :

1) Existence pour chaque m d'une limite finie $\alpha_m = \lim_{n=\infty} \alpha_{nm}$;

2) Convergence absolue de toutes les séries $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$;

3) Existence d'une limite finie $\alpha = \lim_{n=\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm}$;

4) $\alpha_m = 0$ quel que soit $m = 0, 1, \ldots, \infty$ et $\alpha = 1$.

Les conditions 1)-3) assurent la convergence de la suite transformée, étant donnée celle de la suite $\{s_n\}$ (Kojima [a], Schur [a]) sans assurer la permanence, ce qui a lieu si la condition 4) est satisfaite aussi. Schur a étendu [a] le théorème de Tœplitz au cas général, où $N(n) = \infty$ quel que soit n et les α_{nm} sont complexes.

Les conditions de permanence pour les procédés de sommation linéaires relatives aux séries doubles ont été formulées par Robinson [a, b].

Silverman a transposé [c] les conditions de Tœplitz au cas continu : les conditions nécessaires et suffisantes de permanence du procédé

$$\lim_{x=\infty} \text{gén.} f(x) = \lim_{x=\infty} \int_0^x f(u)\, K(x, u)\, du,$$

où le noyau $K(x, u)$ pour chaque x est intégrable dans $a \leq u \leq x$, sont les suivantes :

1) $\lim_{x=\infty} K(x, u) = 0$ uniformément dans tout intervalle fini $a \leq u \leq b$;

2) $\int_0^x |K(x, u)|\, du < G$;

3) $\lim_{x=\infty} \int_0^x K(x, u)\, du = 1$, pourvu que les zéros isolés de la fonction continue de u, $K(x, u)$, forment, quel que soit x fixe, un ensemble de mesure nulle, $K(x, u)$ pouvant d'ailleurs s'annuler identiquement sur des segments entiers.

Tous ces résultats sont des cas particuliers du théorème suivant dû à Knopp [*l*] :

Théorème de Tœplitz-Knopp. — *La transformation* (P_k) *est permanente si son noyau* $K(z, \omega)$ *satisfait aux trois conditions suffisantes* : 1) *intégrale*

$$\int_{t_2}^{t_3} |K(z, \omega)|\, dt \qquad (t_0 \leqq t_2 < t_3 \leqq t_1),$$

étendue à toute partie (t_2, t_3) *de l'arc* (t_0, t_1) *de* C *existe et tend vers zéro quand* $\omega \to \omega_1$ *sur* Γ;

2) *Quels que soient* z *sur* C *et* ω *sur* Γ *on a*

$$\int_{t_0}^{t_1} |K(z, \omega)|\, dt \leqq G;$$

3) *Quel que soit* ω *sur* Γ

$$\Phi(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} K(z, \omega)\, dt$$

existe et $\lim\limits_{\omega = \omega_1} \Phi(\omega) = 1$, $\omega \to \omega_1$ *sur* Γ.

Ces conditions sont aussi nécessaires pour la permanence du procédé (P_k), si son noyau $K(z, \omega)$ n'est jamais négatif : $K(z, \omega) \geqq 0$ quels que soient z sur C et ω sur Γ, la condition 2) dans ce cas étant le corollaire de la condition 3). Les procédés à noyau $K(z, \omega)$ non négatif sont permanents au sens large : ils transforment non seulement la convergence en convergence, mais aussi la divergence essentielle en divergence essentielle :

Théorème de Knopp. — *Le domaine d'indétermination de la fonction* $\varphi(\omega)$ *pour* $\omega \to \omega_1$ *sur* Γ *est contenu dans celui de la fonction* $f(z)$ *pour* $z \to z_1$ *sur* C, *si le noyau* $K(z, \omega)$ *est non négatif quels que soient* z *sur* C *et* ω *au voisinage de* ω_1 *et sur* Γ.

Ce théorème est très important et son cas particulier quand $f(z)$ diverge essentiellement, z tendant vers z_1 sur C, caractérise nettement la sommabilité arithmétique.

La condition de distributivité est satisfaite par tous les procédés linéaires. La condition 3° peut s'écrire aussi : $\lim\limits_{n=\infty}$ gén. $s_{n+p} = \lim\limits_{n=\infty}$ gén. s_n

Tout procédé linéaire vérifiant cette condition est *canonique* (beständig) au sens de Perron [73], c'est-à-dire, appliqué à la série $\sum^{\infty} z_n$, il ne peut lui attribuer qu'une somme égale à $\frac{1}{1-z}$.

En effet, on a $(1-z)s_n(z) = 1 - z^{n+1}$; donc la condition

$$\lim_{n=\infty} \text{gén.}[s_{n+p}(z) - s_n(z)] = (1-z^p) \lim_{n=\infty} \text{gén.} \frac{z^{n+1}}{1-z} = 0 \qquad (z \neq 1)$$

entraîne

$$s(z) = \lim_{n=\infty} \text{gén.}\, s_n(z) = \frac{1}{1-z} - \lim_{n=\infty} \text{gén.} \frac{z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

L'importance de la notion du procédé canonique pour la théorie de sommabilité analytique est évidente (Borel [B], § 43 *bis* et 87].

En terminant ce Chapitre observons que la question de l'unicité de somme généralisée est résolue pour les séries ou intégrales sommables par le procédé des moyennes arithmétiques auquel est consacré le présent fascicule. En effet, on doit à Mazur [63] le résultat capital suivant :

Théorème de Mazur. — *Tout procédé plus puissant que le procédé des moyennes arithmétiques* (C, δ) *attribue à une série sommable* (C, δ) *la même somme que celle attribuée par les moyennes arithmétiques pourvu qu'il satisfasse à la condition de permanence* 1°.

CHAPITRE II.

Moyennes arithmétiques.

1. Le germe de la théorie de sommation des séries divergentes se trouve déjà dans les travaux de d'Alembert [1], qui datent de 1768. On y trouve notamment le calcul, pour les valeurs rationnelles de θ de la moyenne ordinaire $s_n^{(1)}$ des sommes partielles de la série divergente $\sum_1^{\infty} \cos n\theta$ et le passage à la limite $\lim_{n=\infty} s_n^{(1)} = -\frac{1}{2}$. Cette même limite $\lim_{n=\infty} s_n^{(1)}(\theta) = 0$ pour la série-noyau

$$0 \sim \frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta + \ldots \qquad (0 < \theta < 2\pi)$$

des développements trigonométriques de Fourier a été retrouvée 132 ans plus tard par Fejér [a] qui l'a prise comme point de départ de ses belles recherches sur la sommation des séries trigonométriques. Ainsi le génie de d'Alembert posa d'une façon absolument nette la question qui ne devait être reprise que plus d'un siècle après.

Cauchy a démontré [14] en 1821 que le procédé des moyennes du premier ordre est permanent. Son résultat

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{n+1} = \lim_{n=\infty} (\sigma_n - \sigma_{n-1})$$

devient

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(1)} = \lim_{n=\infty} s_n$$

si la dernière limite existe, en posant

$$\sigma_n = \sum_0^n s_m.$$

Les moyennes $\{ s_n^{(1)} \}$ ne réapparaissent, après d'Alembert et Cauchy, qu'en 1876 chez Kronecker [53] qui a donné la condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série sommable à l'aide des moyennes $s_n^{(1)}$. Cette condition :

$$u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n = o(n),$$

se rapporte à la suite $\{ nu_n \}$, dont l'importance n'a été mise en lumière que beaucoup plus tard. Frobenius [31] a fait voir en 1879 que l'existence de la limite $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(1)} = s$ entraîne celle de la limite d'Abel

$$\lim_{r=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n = \lim_{n=\infty} s_n^{(1)} = s,$$

même si la suite $\{ s_n \}$ diverge.

Les moyennes itérées $h_n^{(k)}$ d'ordres entiers k ont été introduites en 1882 par Hölder [43] qui a généralisé le résultat de Frobenius : on a

$$(1)\quad \lim_{r=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n = \lim_{n=\infty} h_n^{(k)} = \lim_{n=\infty} \frac{h_0^{(k-1)} + h_1^{(k-1)} + \ldots + h_n^{(k-1)}}{n+1} \qquad (h_n^{(0)} = s_n),$$

$\lim\limits_{n=\infty} h_n^{(k)}$ existant pour une certaine valeur de $k \geqq 1$. Il a montré leur utilité sur l'exemple de la série divergente

$$3\zeta(-1) \sim \sum_{1}^{\infty} (-1)^n n,$$

dont les moyennes du premier ordre $h_n^{(1)} \equiv s_n^{(1)}$ oscillent pour $n \to \infty$ entre o et $-\frac{1}{2}$ sans tendre vers une limite déterminée, tandis que l'on a

$$\frac{1}{3} \lim_{n=\infty} h_n^{(2)} = -\frac{1}{12} = \zeta(-1).$$

Le théorème (1) a été étendu aux séries doubles par Bromwich et Hardy [9] : la sommabilité avec la somme s d'une série double $\Sigma\Sigma u_{mn}$ à l'aide des moyennes $s_{mn}^{(p,q)}$ d'ordres p et q relativement à m et n entraîne, si $p = q$,

$$\lim_{r,\rho \to 1} \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} u_{mn} r^m \rho^n = s = \lim_{m,n=\infty} s_{mn}^{(p,q)},$$

pourvu que l'on ait $s_{mn}^{(p,p)} = O(1)$. Le cas général $p \neq q$ a été étudié récemment par Leja [58].

La définition des moyennes d'ordre entier $\delta = E(\delta)$, donnée en 1890 par Cesàro [a], diffère de celle de Hölder. Cesàro introduit les sommes partielles $\sigma_n^{(\delta)}$ d'ordre δ, en posant $\sigma_n^{(0)} = s_n$ et

$$\sigma_n^{(\delta+1)} = \sigma_0^{(\delta)} + \sigma_1^{(\delta)} + \ldots + \sigma_n^{(\delta)}.$$

L'expression $\sigma_n^{(\delta)}$ est linéaire en s_n et en contient $\binom{n+\delta}{\delta}$. Leur $n^{\text{ième}}$ moyenne d'ordre δ, $s_n^{(\delta)}$, est donc le quotient de $\sigma_n^{(\delta)}$ par $\binom{n+\delta}{\delta}$. Soit $A_n^{(\delta)}$ le coefficient de z^n dans le développement de $1 : (1-z)^{\delta+1}$,

$$(2) \qquad A_n^{(\delta)} = \binom{n+\delta}{\delta} = \frac{\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(n+1)} = \frac{(n+1)^\delta}{\Gamma(\delta+1)}[1+o(1)].$$

On a, d'après Cesàro,

$$(3) \qquad A_n^{(\delta)} s_n^{(\delta)} = \sigma_n^{(\delta)} = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)} u_m = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta-1)} s_m = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta-\gamma-1)} \sigma_m^{(\gamma)}$$

$$(0 \leqq \gamma < \delta).$$

Il est évident qu'à partir du second ordre les moyennes $h_n^{(\delta)}$ et $s_n^{(\delta)}$ sont différentes. Néanmoins on a le théorème suivant :

Théorème I. *L'existence de l'une des deux limites* $\lim\limits_{n=\infty} h_n^{(\delta)}$ *et* $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta)}$ *entraîne celle de l'autre, et ces deux limites sont égales.*

Ce theorème, dit *théorème d'équivalence*, n'est plus valable pour la divergence essentielle. En effet, $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = +\infty$ donne également

$$\lim_{n=\infty} h_n^{(\delta)} = +\infty,$$

mais l'inverse n'est pas exact : $\lim\limits_{n=\infty} h_n^{(\delta)} = +\infty$ n'entraîne pas $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = +\infty$. Voici un exemple. On établit la relation

$$2 h_n^{(2)} = s_n^{(2)} + s_n^{(1)},$$

d'où l'on conclut que $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(2)} = +\infty$ entraîne aussi $\lim\limits_{n=\infty} h_n^{(2)} = +\infty$. Mais pour une suite $\{s_n\}$ telle que $s_{2n}^{(2)} = 0$ et $s_{2n+1}^{(2)} = 16(n+1)$ on a : $h_n^{(2)} = 5n + 7$, si n est impair, et $h_n^{(2)} = n + 1 - \frac{1}{n+1}$ pour n pair. Ainsi $\lim\limits_{n=\infty} h_n^{(2)} = +\infty$, tandis que $s_n^{(2)}$ oscille pour $n \to \infty$ entre zéro et $+\infty$.

Une série est dite *sommable* (C, δ) ou (H, δ) avec la somme s si l'on a pour cette série $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = s$ ou bien $\lim\limits_{n=\infty} h_n^{(\delta)} = s$. Dans la suite on n'emploie que la locution « sommable (C, δ) », justifiée par le théoreme I. La puissance du procédé (C, δ) croît avec δ (Knopp, [a, b]) :

Théorème II. — *Une série sommable* (C, α) *l'est aussi, avec la même somme* (C, δ) *si* $\delta > \alpha > -1$.

Ce théorème, libre des restrictions $\alpha = E(\alpha)$, $\delta = E(\delta)$, concerne également les moyennes d'ordre négatif et supérieur à -1. Les moyennes d'ordre non entier ont éte introduites par Hadamard en 1892, [a]. On les definit, ainsi que les moyennes d'ordre négatif $\delta > -1$, par les formules (2) et (3). Knopp [a, b] et Chapman [a] en ont fait l'étude systématique. La restriction $\delta > -1$ est nécessaire, car le procédé (C, δ) pour $\delta < -1$ peut conduire à des paradoxes. Ainsi, la série essentiellement divergente $\Sigma A_n^{(\varepsilon-1)}$, $\varepsilon > 0$, représente la valeur $+\infty$ de la fonction $(1-z)^{-\varepsilon}$ au point $z = 1$. Par conséquent, toute méthode de sommation régulière doit attribuer à cette série une somme infinie quel que soit le point de vue adopté, sommabilité arithmétique ou sommabilité analytique. Or, le procédé $(C, \delta = -1-\varepsilon)$ attribue à cette série une somme nulle, car $s_n^{(\delta)} = 0$ à partir de $n = 1$, si $\delta = -1-\varepsilon$.

On voit qu'une série sommable $(C, \delta < 0)$ est nécessairement convergente, la sommabilité $(C, 0)$ n'étant autre chose que la convergence, mais la réciproque serait inexacte. Ainsi, pour $-1 < \delta < 0$, le procédé (C, δ) ne satisfait pas à la condition de permanence, mais il est utile puisqu'il permet une classification des séries convergentes et une étude approfondie de leur mode de convergence. On va voir plus loin qu'une série convergente est même sommable $(C, \delta > -1)$ pour tout δ supérieur à -1, si son terme général u_n satisfait à la condition $nu_n = O(1)$. Par consequent la locution « sommable $(C, -1)$ », introduite par Young [*i*] pour désigner la convergence jointe à la condition $nu_n = o(1)$, concorde très bien avec le théorème II. La relation $h_n^{k} = (n+1)h_n^{(k+1)} - nh_{n-1}^{(k+1)}$ donne, pour $k = -1$, la définition : $s_n^{(-1)} = (n+1)s_n - ns_{n-1} = s_n + nu_n$. Si l'on a $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(-1)} = s$ on en déduit $\lim\limits_{n=\infty} s_n = s$ puisque s_n est la moyenne du premier ordre des $s_n^{(-1)}$, donc aussi $\lim\limits_{n=\infty} nu_n = 0$. Inversement, $\lim\limits_{n=\infty} nu_n = 0$ jointe à la convergence entraîne $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(-1)} = \lim\limits_{n=\infty} s_n$, d'où la justification complète de la locution « sommable $(C, -1)$ ».

Revenons au théorème I qui a fait l'objet de très nombreux travaux et dont on connaît plusieurs démonstrations différentes. Son histoire est très instructive. Le fait que la sommabilité (H, δ) entraîne (C, δ) avec la même somme a été démontré en 1907 par Knopp [*c*] pour $\delta = E(\delta)$. L'année suivante Bromwich [8] a déduit $(H, 2)$ de $(C, 2)$. Schnee [*a*] a achevé la démonstration en 1909, en déduisant (H, δ) de (C, δ) pour tout $\delta = E(\delta)$. Enfin Schur [*b*] a simplifié notablement cette démonstration en 1913. Le théorème I a été étendu aux ordres non entiers, ce qui suppose acquise la définition des moyennes $h_n^{(\delta)}$ de Holder pour $\delta \neq E(\delta)$, donnée par Hausdorff [*a*]. Sa définition de $h_n^{(\delta)}$ pour δ quelconque est basée sur une remarque ingénieuse faite en 1917 par Hurwitz et Silverman [45] : les $n^{\text{ièmes}}$ différences $\Delta^n s_0$ et $\Delta^n s_0^{(1)}$ sont liées par la relation

$$A_n^{(1)} \Delta^n s_0^{(1)} = (n+1)\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} s_m^{(1)} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} s_m = \Delta^n s_0.$$

Hausdorff l'a généralisée pour les moyennes de Cesàro $s_n^{(\delta)}$ d'ordre δ, entier ou non, ainsi :

$$A_n^{(\delta)} \Delta^n s_0^{(\delta)} = \Delta^n s_0,$$

tandis que pour les moyennes de Hölder d'ordre *entier* on a

$$(n+1)^\delta \Delta^n h_0^{(\delta)} = \Delta^n s_0|.$$

Il suffit d'y donner à δ les valeurs non entières pour définir les moyennes $h_n^{(\delta)}$ d'ordre $\delta > -1$ quelconque.

Ainsi le théorème d'équivalence est valable quel que soit l'ordre $\delta > -1$ des moyennes $s_n^{(\delta)}$ et $h_n^{(\delta)}$. Parmi ses démonstrations citons celles de Faber [25], Schur [*b*], Knopp [*i*, *j*], Ford [*c*], Ottolenghi [*b*], Watanabe [95], Kogbetliantz [*e*, *k*, *q*], Andersen [*b*, *d*], Hausdorff [*a*], Kienast [49], Dobrowolski [23], Hardy et Littlewood [*g*], Pringsheim [*a*], Hurwitz et Silverman [45], Hahn [*a*], Borel [B] et Landau [L].

2. Le procédé (C, δ) est régulier pour $\delta \geqq 0$. La condition de distribuvité est satisfaite ainsi que celle de permanence (théorème II). Vérifions la condition 3°. Il s'agit de démontrer que l'existence de la limite $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = s$ entraîne celle de $\lim\limits_{n=\infty} T_{n,p} = s$ quel que soit p fixe. Or,

$$T_{n,p} = \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta-1)} s_{m+p} = s_{n+p}^{(\delta)} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

comme on le vérifie facilement, étant donné que

$$A_n^{(\delta)} T_{n,p} = A_{n+p}^{(\delta)} s_{n+p}^{(\delta)} - \sum_{l=0}^{p-1} A_{n+l-l}^{(\delta-1)} s_l.$$

La condition 4° est vérifiée également en vertu du théorème suivant, dû dans le cas des moyennes d'ordre entier à Cesàro [*a*] et dans le cas général à Knopp [*a*], Chapman [*a*] et Ottolenghi [*a*] :

Théorème III. — *Les séries Σu_n et Σv_n étant sommables* *respectivement* (C, α) *et* (C, β), *leur produit* Σw_n *est sommable* $(C, \alpha+\beta+1)$ *et sa somme* w *est le produit des sommes des séries facteurs.*

Ce théorème montre bien la nécessité d'introduire le procédé (C, δ) pour pouvoir calculer le produit de deux séries convergentes $(\alpha=\beta=0)$ ou sommables $(C, 0)$: la série-produit peut diverger malgré la convergence des séries-facteurs, mais elle est sommable $(C, 1)$. Il est important d'observer qu'on ne peut pas améliorer le théorème III : il existe des séries sommables (C, α) et (C, β) dont le produit n'est pas sommable (C, δ) pour $\delta < \alpha+\beta+1$. Il suffit de le faire voir dans le cas $\alpha=\beta=0$. Le terme général w_n de la série qui est le carré de la série convergente

$$\sum_0^\infty (-1)^m [\log(m+2)]^{-1}$$

peut être écrit sous la forme suivante

$$w_n = (-1)^n (n+1)[\log(n+2)]^{-2}\left\{1+o(1)\right\};$$

donc le quotient $n^{-\delta} w_n$ ne tend pas vers zéro quand $n \to \infty$, si $\delta < 1$, ce qui suffit (Chapitre III) pour démontrer que la série Σw_n, sommable $(C, 1)$, ne l'est pas $(C, \delta < 1)$.

Les procédés (C, δ) et (H, δ) appliqués aux intégrales divergentes conduisent à la définition suivante de la limite généralisée de $f(x)$ pour $x \to \infty$. Posons $H^{(0)}(x) = f(x)$ et, pour $\delta = E(\delta)$,

$$H^{(\delta+1)}(x) = \frac{1}{x}\int_a^x H^{(\delta)}(u)\,du = \frac{1}{x\,\Gamma(\delta+1)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{u}\right)^\delta f(u)\,du.$$

On a par definition pour δ quelconque $(\delta > -1)$

$$(4) \qquad (H, \delta) - \lim_{x=\infty} \text{gén}.f(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \lim_{x=\infty} \frac{1}{x}\int_a^x \left(\log\frac{x}{u}\right)^{\delta-1} f(u)\,du,$$

et de même pour (C, δ) :

$$(5) \qquad (C, \delta) - \lim_{x=\infty} \text{gén}.f(x) = \lim_{x=\infty} \delta x^{-\delta}\int_a^x (x-u)^{\delta-1} f(u)\,du.$$

Pour une intégrale divergente $\int_a^\infty u(x)\,dx$ on pose $f(x) = \int_a^x u(t)\,dt$

et alors une intégration par parties donne

$$(C, \delta) - \int_a^\infty u(x)\,dx = \lim_{t=\infty} \int_a^t \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\delta u(t)\,dt.$$

On peut rapprocher la notion de la limite généralisée $-(C, \delta)$ de $f(x)$ pour $x \to \infty$ de celle de l'intégrale d'ordre δ de $f(x)$: la limite $-(C, \delta)$ d'une fonction $f(x)$ pour $x \to \infty$ n'est autre chose que la limite ordinaire de son intégrale d'ordre δ divisée par x^δ et multipliée par $\Gamma(\delta + 1)$. Dans la définition de la lim gén. $-(C, \delta)$ de $f(x)$ on peut remplacer la limite inférieure d'intégration a par un nombre fixe b quelconque. En choisissant $b = 1$ et en posant $x = \frac{1}{\omega}$, $u = \frac{1}{t}$, $f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \varphi(\omega)$, on peut donner la forme suivante à la définition de lim gén. — (C, δ) de $\varphi(\omega)$ pour $\omega \to 0$ par valeurs *positives*

$$(6) \qquad (C, \delta) - \lim_{\omega \to +0} \text{gén.}\, \varphi(\omega) = \lim_{\omega = +0} \delta . \omega \int_\omega^1 \left(1 - \frac{\omega}{t}\right)^{\delta - 1} \varphi(t) \frac{dt}{t^2}.$$

Hardy et Littlewood ont considéré d'autres limites généralisées (C, δ) et (H, δ) de $\varphi(\omega)$ pour $\omega \to 0$:

$$(7) \qquad (C, \delta) - \lim_{\omega \to +0} \text{gén.}\, \varphi(\omega) = \lim_{\omega = +0} \delta \omega^{-\delta} \int_0^\omega (\omega - u)^{\delta - 1} \varphi(u)\,du,$$

$$(8) \qquad (H, \delta) - \lim_{\omega \to +0} \text{gén.}\, \varphi(\omega) = \lim_{\omega = +0} \frac{1}{\omega\,\Gamma(\delta)} \int_0^\omega \left(\log \frac{\omega}{u}\right)^{\delta - 1} \varphi(u)\,du.$$

Le théorème d'équivalence pour les définitions (4) et (5) a été démontré d'abord pour $\delta = E(\delta)$ par Landau [d], Watanabe [95] et Silverman [e]. Dans le cas général, $\delta \neq E(\delta)$, il a été établi par Jacob [a] en 1927. En ce qui concerne les définitions (7) et (8) Hardy et Littlewood [e_1, g] n'ont démontré leur équivalence que pour $\delta = E(\delta)$, mais le résultat doit certainement être valable aussi pour $\delta \neq E(\delta)$ quoique cela reste à vérifier. Ces auteurs ont étudié également la question importante d'équivalence des définitions (6) et (7) et ils ont établi [e_1] leur équivalence pour $\delta = 1$ (résultat retrouvé plus tard par Knopp [i]) ainsi que le fait : *l'existence de la limite* (7) *entraîne celle de la limite* (6) *égale à la première quel que soit* δ *positif*. Le théorème d'équivalence n'a pas lieu pour $\delta > 1$, car l'existence de la limite (6) n'entraîne pas nécessairement (7), le procédé (6) étant ainsi plus puissant que celui défini par (7); Hardy et Littlewood [e_1].

Les théorèmes I-III subsistent sans aucune modification pour les intégrales divergentes sommables (C, δ), l'intégrale-produit n'étant pas, en général, sommable (C, $\delta < \alpha + \beta + 1$). Les théorèmes II et III ont été étendus aux intégrales par Chapman [a].

En divisant le terme général u_n d'une série sommable (C, δ) par n^δ, on la convertit en une série convergente :

Théoreme IV. — *La série Σu_n étant sommable* (C, δ), $\Sigma n^{-\gamma} u_n$ *est sommable* (C, $\delta - \gamma$) *pourvu que l'on ait* $0 \leqq \gamma < \delta + 1$.

On en déduit que $u_n = o(n^\delta)$, si Σu_n est sommable (C, δ). On dit qu'une série est *bornée* (C, δ) si l'on a pour cette série $s_n^{(\delta)} = O(1)$, ce qui entraîne $s_n^{(\beta)} = O(1)$ pour $\beta > \delta$. Pour une série bornée (C, -1) on a donc simultanément $s_n^{-1} = O(1)$ et $s_n = O(1)$, d'où $nu_n = O(1)$. Réciproquement une série est bornée (C, -1), si l'on a $s_n = O(1)$ ainsi que $nu_n = O(1)$. Ces définitions posées, voici le résultat de Hardy et Littlewood [a] généralisant IV :

Théorème IV'. — *La série $\Sigma n^{-s} u_n$ est uniformément sommable* (C, δ) *sur tout segment fini de la droite $s = \sigma$ dans le plan de la variable $s = \sigma + it$ pour $\delta = r - \frac{r+1}{\alpha+1}\sigma$, si la série Σu_n est bornée* (C, r) *et $u_n = o(n^\alpha)$ ou bien si $u_n = O(n^\alpha)$, la série Σu_n étant sommable* (C, r). *Dans les deux cas on doit avoir $r \geqq \alpha > -1$.*

Le théorème IV s'en deduit pour $\alpha = r$. Le théorème IV' joue un rôle important dans la théorie des séries de Dirichlet, exposée par M. G. Valiron dans ce Mémorial (fasc. XVII).

3. Le procédé (C, δ) transforme une *suite* $\{s_n\}$ en celle $\{s_n^{(\delta)}\}$ des moyennes. La suite $\{s_n^{(\delta)}\}$ est celle des sommes partielles de la série $\Sigma u_n^{(\delta)}$ de terme général $u_n^{(\delta)} = s_n^{(\delta)} - s_{n-1}^{(\delta)}$, qu'on peut appeler la *transformée* — (C, δ) de Σu_n. Formons les transformées (C, γ) d'ordres $\gamma < \beta$ d'une série Σu_n sommable (C, β). Qu'est ce qu'on peut dire de leur sommabilité (C, δ)? Le problème de l'itération du procédé (C, δ) a été traité pour la première fois en 1913 par Faber [25] et, indépendamment de lui, par Kogbetliantz (1917, [e, k, q]) et Hausdorff (1921, [a]). On constate l'équivalence com-

plète des procédés $(C, \delta)(C, \gamma)$ et $(C, \delta+\gamma)$ pourvu que δ, γ, $\delta+\gamma$ soient supérieurs à -1 :

THÉORÈME V. — *L'existence de la limite* $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta+\gamma)} = s$ *entraîne celle de la moyenne double* $S_n^{(\delta,\gamma)}$ *d'ordres* γ *et* δ

$$\lim_{n=\infty} S_n^{(\delta,\gamma)} = \lim_{n=\infty} S_n^{(\gamma,\delta)} = \lim_{n=\infty} s_n^{(\delta+\gamma)}$$

et vice versa pourvu que l'on ait δ, γ, $\delta+\gamma > -1$.

Dans cet énoncé $S_n^{(\delta,\gamma)}$ désigne la moyenne d'ordre δ des sommes partielles $\{s_n^{(\gamma)}\}$ de la transformée $-(C,\gamma)$, c'est-à-dire de $\Sigma u_n^{(\gamma)}$. D'autres démonstrations de ce théorème ont été données aussi par Andersen [S], Zygmund [*g*] et Hardy et Littlewood [*f*]. Ainsi la transformée $-(C, \alpha)$ d'ordre $\alpha < \beta$ d'une série sommable (C, β) est sommable $(C, \beta-\alpha)$, où $\alpha > -1$. Le théorème correspondant pour les intégrales est démontré récemment par Hardy et Littlewood [*f*]. Si l'on convient d'exprimer l'équivalence de deux procédés de sommation par le signe $\sim$ on a

$$(C, \delta+\gamma) \sim (C, \delta)(C, \gamma) \sim (C, \gamma)(C, \delta).$$

On en déduit facilement le théorème d'équivalence I pour les moyennes d'ordre entier : $(C, k) \sim (C, 1)^k$. Dans le même ordre d'idées Zygmund a démontré [*g*] que l'hypothèse $S_n^{(\alpha,\beta)} = o(\rho_n)$ ou $= O(\rho_n)$ entraîne $s_n^{(\alpha+\beta)} = o(\rho_n)$ ou $O(\rho_n)$ respectivement et vice versa, si $\rho_n \to \infty$, la suite $\{\rho_n\}$ étant monotone et α, β, $\alpha+\beta > -1$. La suite de Kronecker $\{nu_n\}$ se transforme comme $\{s_n\}$: sa transformée $-(C, \delta)$, c'est-à-dire la suite des moyennes d'ordre δ des quantités nu_n n'est que la suite de Kronecker pour la série $\Sigma u_n^{(\delta)}$, c'est-à-dire la suite $\{nu_n^{(\delta)}\}$ (Kogbetliantz [*q*]) :

$$A_n^{(\delta)} nu_n^{(\delta)} = \sum_{m=1}^{n} A_{n-m}^{(\delta-1)} mu_m, \tag{9}$$

ce qui explique l'importance de la suite $\{nu_n\}$ dans l'étude des conditions nécessaires et suffisantes de sommabilité (C, δ). Pour en donner un exemple, formons la moyenne ordinaire de deux membres de la relation $s_n^{(-1)} = s_n + nu_n$. On a ainsi $s_n = s_n^{(1)} + \tau_n^{(1)}$, où $\tau_n^{(\delta)}$ désigne la moyenne d'ordre δ des quantités nu_n, donc $\tau_n^{(\delta)} = nu_n^{(\delta)}$. En prenant la moyenne d'ordre δ de deux membres de la relation obtenue

$$s_n = s_n^{(1)} + \tau_n^{(1)},$$

on trouve : $s_n^{(\delta)} = S_n^{(1,\delta)} + T_n^{(1,\delta)}$, où $T_n^{(\alpha,\beta)}$ désigne la moyenne double d'ordres β et α de la suite $\{nu_n\}$. Supposons maintenant qu'une série soit sommable (C, $\delta+1$) et que l'on ait pour sa transformée d'ordre $\delta+1$ la relation $nu_n^{(\delta+1)} = o(1)$, ce qui veut dire que cette transformée non seulement converge, mais aussi est sommable (C, -1). Le théorème V nous permet de conclure que d'une part

$$\lim_{n=\infty} T_n^{(1,\delta)} = \lim_{n=\infty} \tau_n^{(\delta+1)} = \lim_{n=\infty} nu_n^{(\delta+1)} = 0$$

et que d'autre part $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = \lim\limits_{n=\infty} S_n^{(1,\delta)} = \lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta+1)}$, c'est-à-dire la série initiale dans le cas considéré est sommable (C, δ). On a ainsi démontré que la sommabilité (C, $\delta+1$).(C, -1) entraîne (C, δ). Inversement : $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = s$ entraîne évidemment $\lim\limits_{n=\infty} S_n^{(1,\delta)} = s$ donc

$$\lim_{n=\infty} T_n^{(1,\delta)} = 0,$$

ce qui est équivalent à $\lim nu_n^{(\delta+1)} = 0$, c'est-à-dire à la sommabilité (C, -1) de la transformée $-$(C, $\delta+1$). Le résultat obtenu :

$$(C, \delta) \sim (C, \delta+1)(C, -1) \sim (C, \delta)\cdot$$

prouve que le théorème V reste valable aussi pour

$$\delta = -1, \qquad \delta + \gamma > -1.$$

Une série est dite sommable (C), si elle l'est (C, δ_0) pour δ_0 suffisamment grand. Le fait que les moyennes d'un certain ordre α sont bornées permet de préciser l'ordre de sommabilité (C) :

Théorème VI. — *Une série sommable* (C) *et bornée* (C, α), *où* $\alpha \geq -1$, *est sommable* (C, δ) *pour tout* $\delta > \alpha$.

Le cas particulier $\alpha = -1$, où $nu_n = O(1)$, démontré par Hardy [*a*] en 1912, est très important. Le théorème VI est dû à Andersen [S], Zygmund [*i*] et Riesz [*l*]. L'hypothèse que la série est sommable (C) est essentielle : une série peut être bornée (C, α) sans être sommable par le procédé des moyennes arithmétiques. Vu que la transformée — (C, α) d'une série bornée (C, α) est bornée (C, 0) il suffit de ne considérer que ce dernier cas. L'exemple très simple d'une série divergente, dont les sommes partielles sont bornées et qui néanmoins n'est pas sommable (C, δ) quelque grand que soit δ, est dû à Maclagan-Wedderburn [62]. C'est la série

$$1+0-1+0+\ldots+(-1)^n+\overbrace{0+\ldots+0}^{2^n \text{ zéros}}+(-1)^{n+1}+\ldots$$

dont les sommes partielles s_n ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1, l'oscillation entre ces deux valeurs étant ralentie de plus en plus par rapport à la série $\Sigma(-1)^n$, sommable (C, δ) quelque petit que soit $\delta > 0$, par l'insertion des termes nuls. On voit ainsi qu'un procédé de sommation appliquée à une série divergente non essentiellement, peut échouer ou bien parce qu'il n'est pas suffisamment *puissant* pour sommer une série divergeant trop rapidement pour ce procédé ou bien parce qu'il n'est pas assez *fin* pour compenser les oscillations *trop lentes* de la suite des sommes partielles d'une série divergeant *trop faiblement* pour lui.

4. La sommabilité *absolue* (C, δ), bref sommabilité $|C, \delta|$ a été définie en 1914 par Fekete [*c*] ainsi :

Une série Σu_n *dont la transformée* — (C, δ), $\Sigma u_n^{(\delta)}$ *converge absolument est dite sommable* $|C, \delta|$ *ou absolument sommable* (C, δ).

La notion de $|C, \delta|$ est une extension naturelle de la notion de convergence absolue qui n'est que $|C, 0|$. On définit de même $|H, \delta|$. Le théorème d'équivalence, $|C, \delta| \sim |H, \delta|$, est démontré pour $\delta = E(\delta)$ par Fekete [*c*] :

THÉORÈME VII. — *Une série sommable* $|C, \delta|$ *l'est également* $|H, \delta|$ *et vice versa si* $\delta = E(\delta)$.

Il est certain que ce théorème est vrai aussi pour $\delta \neq E(\delta)$, $h_n^{(\delta)}$ étant définie d'après Hausdorff, mais la question reste ouverte aux chercheurs, car la preuve du théorème VII n'est pas faite pour $\delta \neq E(\delta)$.

Les théorèmes VIII-XIII qui suivent montrent que les propriétés de $|C, \delta|$ ne diffèrent guère de celles de (C, δ), sauf dans le cas de la multiplication des séries. Ils sont dus à Kogbetliantz [*p*].

THÉORÈME VIII. — *La sommabilité* $|C, \alpha|$ *entraîne celle* $|C, \delta > \alpha|$

et la somme des modules des termes $\Sigma\,|u_n^{(\delta)}|$ *de la transformée* — (C, δ) *ne peut que décroître quand* δ *augmente.*

THÉORÈME IX. — *Une série dont la transformée* — (C, δ) *est sommable* $|\,C, \gamma\,|$ *est elle-même sommable* $|\,C, \delta+\gamma\,|$.

THÉORÈME X. — *La transformée* — (C, α) *d'ordre* $\alpha < \beta$ *d'une série sommable* $|\,C, \beta\,|$ *est sommable* $|\,C, \beta-\alpha\,|$.

On peut démontrer les théorèmes IX et X à l'aide des développements des moyennes simples suivant les moyennes doubles et des développements inverses (Kogbetliantz, [q]) :

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
s_n^{(\delta+\gamma)} &= \frac{\Gamma(\delta+\gamma+1)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\gamma+1)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(-(\delta+1))} \frac{S_n^{(\delta,m+\gamma)}}{m+\gamma},\\
S_n^{(\delta,\gamma)} &= \delta\gamma \sum_{m=0}^{n} \frac{F(\gamma, \delta, n+\gamma+\delta+1, 1)}{F(\gamma, \delta, m+\gamma+\delta+1, 1)} \frac{s_{n-m}^{(m+\gamma+\delta)}}{(m+\gamma)(m+\delta)}.
\end{aligned}
\right.
$$

On a $S_n^{(\delta,\gamma)} \equiv S_n^{(\gamma,\delta)}$, ce qui n'est nullement évident *a priori*. On peut résumer les théorèmes IX et X ainsi

$$|\,C, \delta+\gamma\,| \sim |\,C, \delta\,|.|\,C, \gamma\,| \sim |\,C, \gamma\,|\,C, \delta\,|,$$

d'où une nouvelle démonstration du théorème VII, vu que

$$|\,H, k\,| = |\,C, 1\,|^k \qquad \text{pour } k = E(k).$$

Le développement (10) de $s_n^{(\delta+\gamma)}$ ne contient pour δ entier qu'un nombre fini de termes

$$s_n^{(\delta+\gamma)} = \gamma A_\delta^{(\gamma)} \sum_{m=0}^{\delta} (-1)^m \binom{\delta}{m} \frac{S_n^{(\delta,m+\gamma)}}{m+\gamma} \qquad [\delta = E(\delta)].$$

Par exemple pour $\gamma = k-1$ et $\delta = 1$, où $k = E(k) \geqq 1$, on a

$$s_n^{(k)} = k S_n^{(k-1,1)} - (k-1) S_n^{(k,1)},$$

et ce cas particulier de (10), retrouvé par Andersen [d], joint à l'identité $S_n^{(k,1)} \equiv S_n^{(1,k)}$ permet d'établir facilement l'équivalence des procédés (C, $k-1$). (C, 1) et (C, k), d'où l'on déduit facilement le théorème I pour les moyennes d'ordre entier. Si l'on compare cette preuve élémentaire aux premières demonstrations du théorème I, on est frappé par sa simplicité, étant donné les efforts considérables qu'a exigé le théorème d'équivalence au début.

En 1912, Hardy et Littlewood ont démontré [a] que le produit d'une série Σu_n sommable (C, δ) par une série convergente Σv_n, sommable d'après III $(C, \delta+1)$, l'est déjà (C, δ), si la série Σv_n converge *absolument* pourvu que $\delta \geqq 0$. Ce résultat analogue au théorème classique de Mertens [65] n'est valable que pour $\delta \geqq 0$. Il devient inexact pour $-1 < \delta < 0$ comme le prouve l'exemple suivant [38, a] : multiplions la série $\sum_0^\infty (-1)^n (n+1)^{-1}$, sommable $(C, \varepsilon - 1)$ pour $\varepsilon > 0$, par la série absolument convergente

$$0 + 1 + 0 + \frac{1}{2^2} + 0 + \ldots + \frac{1}{n^2} + \overbrace{0 + \ldots + 0}^{2^{n-1} \text{ zéros}} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots,$$

où $u_n = \frac{1}{v^2}$ si $n = 2^v - 1$, $v > 0$ et $u_n = 0$ pour $n \neq 2^v - 1$. On trouve pour le produit Σc_m : $c_{2^n-1} > \frac{1}{n^2}$. Par conséquent la série-produit converge, mais elle n'est pas sommable $(C, -\varepsilon)$ quelque petit que soit $\varepsilon > 0$. Cet exemple prouve que, quoique la plupart des propriétés des séries sommables $(C, \delta \geqq 0)$ subsistent pour celles sommables $(C, -1 < \delta < 0)$, mais il en est d'autres qui cessent d'être vraies pour $\delta < 0$.

Kojima a établi [a_2] qu'étant donnée la sommabilité (C, δ) de Σu_n, la convergence *absolue* de Σv_n est une condition non seulement suffisante, mais aussi nécessaire pour la sommabilité (C, δ) de leur série-produit. La comparaison du résultat de Hardy-Littlewood avec le théorème III suggère le théorème général suivant :

THÉORÈME XI. — *La série-produit de deux séries sommables l'une* (C, δ), $\delta \geqq 0$, *et l'autre* $|C, \gamma|$ *est sommable* $(C, \delta + \gamma)$.

Le cas $\gamma = 0$ donne le résultat cité et celui où $\gamma = \delta = 0$ donne le théorème classique de Mertens [65]. On a également la généralisation du théorème de Cauchy :

THÉORÈME XII. — *La série-produit de deux séries sommables respectivement* $|C, \delta|$ *et* $|C, \gamma|$ *est sommable* $|C, \delta + \gamma|$.

La division du terme général d'une série sommable $|C, \delta|$ par n^{γ}, où $0 \leqq \gamma < \delta + 1$, diminue de γ l'ordre de sa sommabilité absolue :

Théorème XIII. — *Σu_n étant sommable* $|C, \delta|$, *la série $\Sigma n^{-\gamma} u_n$, où $0 \leqq \gamma < \delta + 1$, est sommable* $|C, \delta - \gamma|$.

La sommabilité $|C, \delta_0|$ entraîne (C, δ_0), mais en général une série sommable $|C, \delta_0|$ n'est pas sommable (C, δ) pour $\delta < \delta_0$, comme le prouve l'exemple suivant (Kogbetliantz [p])

$$2 - 1 + 1 - \frac{3}{4} + 0 + 0 + \ldots - \frac{2^r - 1}{r^2} + \overbrace{0 + \ldots + 0}^{r-2 \text{ zeros}} + \frac{2^{r+1}}{(r+1)^2} - \frac{2^{r+1} - 1}{(r+1)^2} + \ldots.$$

Cette série n'est pas sommable (C, δ) pour $\delta < 1$ quoiqu'elle l'est $|C, 1|$, donc *a fortiori* $(C, 1)$. En effet, le produit $n^{\varepsilon - 1} u_n$ oscille pour $n \to \infty$ entre $-\infty$ et $+\infty$ quelque petit que soit $\varepsilon > 0$.

Pour donner un exemple, étudions la série

$$(11) \qquad (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} \qquad (s = \sigma + it),$$

qui représente une fonction entière. Elle converge pour $\sigma > 0$ et converge absolument pour $\sigma > 1$. Chapman a fait voir [a] qu'elle est sommable (C, δ) que dans le demi-plan $\sigma > -\delta$. Le théorème XIII nous dit que la convergence absolue de la série $\Sigma n^{-\delta} u_n$ est une condition nécessaire de la sommabilité $|C, \delta|$ de Σu_n. Or, la série de terme général $(-1)^{n-1} n^{-s-\delta}$ ne converge absolument que pour $\sigma > 1 - \delta$. Le demi-plan de sommabilité $|C, \delta|$ de la série (11) est précisément déterminé par la condition $\sigma > 1 - \delta$, comme le montre la formule approchée pour le terme général $u_n^{(\delta)}$ de sa transformée $-(C, \delta)$ (Kogbetliantz [p])

$$u_n^{(\delta)} = \pi^{-\delta} \cos \frac{\pi\delta}{2} \Gamma(\delta + 1) \frac{(-1)^{n-1}}{n^{s+\delta}} [1 + o(1)].$$

Donc la série (11) n'est pas sommable $|C, \delta|$ pour $\sigma \leqq 1 - \delta$.

La sommabilité (C, δ) n'entraîne point la sommabilité absolue d'ordre supérieur. Ainsi, Fekete a indiqué [c] l'existence des séries trigonométriques uniformément convergentes pour $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ et qui néanmoins ne sont pas sommables $|C, \delta|$ au point $\theta = 0$ quelque grand que soit δ.

CHAPITRE III.

Conditions nécessaires et suffisantes de sommabilité (C, δ).

1. Le résultat de Hölder

$$\lim_{r \succ 1} f(r) = \lim_{r \succ 1} \sum_0^\infty u_n r^n = \lim_{n=\infty} h_n^{(\delta)} = \lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)},$$

relatif aux moyennes d'ordre entier et où $x = re^{i\theta}$ tend vers $+1$ suivant le rayon (la notation $r \to 1$ désigne ce chemin particulier), a été étendu par Knopp [a] et Chapman [a] au cas $\delta \neq E(\delta)$, $\delta > -1$. Cette généralisation du théorème d'Abel reste également valable quand x tend vers $+1$ à l'intérieur d'un domaine angulaire (Stolz) d'ouverture inférieure à π. Les chemins tangents au cercle $|x| = 1$ au point $x = +1$ se trouvent exclus et nous désignons les chemins intérieurs au domaine angulaire par la notation $x \to 1$. Au contraire, on écrira $\lim\limits_{x=1}$, si $|x| < 1$ et x tend vers $+1$ n'importe comment, y compris les chemins tangents au cercle. Ainsi la condition

$$\lim_{x \succ 1} f(x) = \lim_{x \succ 1} \sum_0^\infty u_n x^n = A \tag{1}$$

est nécessaire pour la sommabilité (C) avec la somme A de la série Σu_n (Dienes [21], Lasker [55], Pringsheim [c], Knopp [J]).

L'exemple de la série $\Sigma n^{-b} e^{in^a}$, $0 < a < 1$, où $1 - a < b < 1 - \frac{a}{2}$, prouve qu'on ne peut pas dans (1) remplacer $\lim\limits_{x \succ 1}$ par $\lim\limits_{x=1}$. En effet, pour cette série convergente ($b > 1 - a$), $f(x)$ ne tend pas vers une limite déterminée, quand x tend vers $+1$ suivant un chemin tangent au cercle (Hardy [g]). La condition (1) même renforcée à $\lim\limits_{x=1} f(x) = A$ n'assure pas la sommabilité (C). On le voit pour

$$f(x) = (1 + x)^{-1} e^{\frac{1}{1+x}} \qquad \text{(Landau [L])}$$

et

$$f(x) = e^{-\frac{1}{(1-x)^4}} \qquad \text{(Andersen [S])}.$$

Le premier exemple, dû à Bohr, donne Σu_n avec

$$u_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{r} \frac{1}{m!} A_m^{(n)},$$

d'où $|u_n| > cn^k$ quelque grand que soit k. Par conséquent la condition nécessaire de sommabilité (C, δ)

$$(2) \qquad u_n = o(n^\delta) \qquad (\delta \geqq -1)$$

n'est satisfaite pour aucun δ. Signalée pour $\delta = E(\delta)$ déjà par Cesàro sous la forme imparfaite $u_n = O(n^\delta)$, elle a été précisée et étendue à tout ordre $\delta > -1$ par Chapman [a] et Ottolenghi [a]. Vu la définition de (C, -1), (2) est valable aussi pour $\delta = -1$. La condition analogue $u(x) = o(x^\delta)$ pour les intégrales $\int_0^\infty u(x)\,dx$ sommables (C, δ) n'a lieu que si $x^{-\delta} u(x)$ est uniformément continue pour $x \geqq a > 0$.

La sommabilité (C, δ) entraîne $\lim\limits_{n=\infty} \tau_n^{(\delta+1)} = 0$, où $\tau_n^{(\alpha)}$ désigne la moyenne d'ordre α de la suite de Kronecker $\{ nu_n \}$. On a

$$\tau_n^{(\delta+1)} = (\delta + 1)[s_n^{(\delta)} - s_n^{(\delta+1)}] \qquad (\delta > -1).$$

Or, $s_n^{(\delta)} \to s$ entraîne (th. II) $s_n^{(\delta+1)} \to s$ et par conséquent

$$(3) \qquad (C, \delta+1) - \lim_{n=\infty} \text{gén.}\,(nu_n) = \lim_{n=\infty} \tau_n^{(\delta+1)} = 0 \qquad (\delta \geqq -1)$$

est une condition nécessaire de (C, δ) pour $\delta \geqq -1$. Pour $\delta = 0$ on a (C, 1) $- \lim\limits_{n=\infty}$gén. $nu_n = 0$ et cette condition nécessaire de *convergence* est plus générale que toutes celles analogues qu'on peut en déduire, à savoir

$$(4) \qquad (C, \varepsilon) - \lim_{n=\infty} \text{gén.}\, n^\varepsilon u_n = 0 \qquad (1 \geqq \varepsilon \geqq 0),$$

et qui relient les conditions nécessaires $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n=\infty} \tau_n^{(1)} = 0$ qui ne sont que des cas particuliers de (4) pour $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 1$. La condition de *convergence* (4), qui est nouvelle, se laisse démontrer facilement : la (C, 0) de Σu_n entraîne (th. IV) la (C, $\varepsilon - 1$) de $\Sigma n^{\varepsilon-1} u_n$ pour $0 < \varepsilon < 1$, d'où résulte (4) comme corollaire de (3). L'extension de (4) au cas où $\varepsilon > 1$ est exclue puisque pour $\varepsilon > 1$, le produit $n^\varepsilon u_n$ peut tendre vers $+\infty$, malgré la convergence de Σu_n. (4) se laisse généraliser et l'on a les conditions nécessaires analogues de (C, δ)

$$(C, \alpha) - \lim_{n=\infty} \text{gén.} [n^{\alpha-\delta} u_n] = 0 \qquad (0 \leqq \alpha \leqq \delta + 1),$$

les cas extrêmes $\alpha = 0$ et $\alpha = \delta + 1$ donnant (2) et (3), rattachées ainsi l'une à l'autre.

On a aussi $s_n = o(n^\delta)$ comme une condition nécessaire de (C, δ). Cette dernière n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du résultat suivant de Hardy [*a*] : soit $u_n = O(n^\alpha)$, où $\alpha > -1$; *la sommabilité* (C, δ) *de* Σu_n *entraîne*, *pour* $0 \leqq \gamma < \delta$ et $\delta \geqq \alpha > -1$,

$$s_n^{(\gamma)} = o(n^\beta) \qquad \text{où } (1+\delta)\beta = (1+\alpha)(\delta - \gamma).$$

Le paramètre α n'est pas supérieur à δ, si Σu_n est sommable (C, δ) ou même seulement bornée (C, δ) comme le montre la formule

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{[-(\delta+2)]} A_k^{(\delta)} s_k^{(\delta)}.$$

L'expression $\tau_n^{(\alpha)}$ est intimement liée à l'ordre de sommabilité (C) d'une série et, en s'appuyant sur les théorèmes V et VI (cas $\alpha = -1$), on démontre le théorème qui précise un résultat de Hardy [*h*] :

Théorème XIV. — *Une série sommable* (C) *l'est* (C, δ) *pour* $\delta > \alpha - 1$, *si l'on a* $\tau_n^{(\alpha)} = O(1)$, $\alpha \geqq 0$.

Au contraire, l'ordre de grandeur du terme général u_n n'est lié à l'ordre δ de sommabilité (C) d'une série Σu_n que par la condition nécessaire $u_n = o(n^\delta)$. Considérons (Hardy [*g*]) la série de Dirichlet

$$\Sigma a_n n^{-s} \qquad \text{avec } a_n = e^{in^\alpha} \text{ et } 0 < \alpha < 1, \; s = \sigma + it.$$

Elle n'est sommable (C, δ) que si $(\delta + 1)\alpha + \sigma > 1$. L'ordre de grandeur de son terme général $u_n = O(n^{-\sigma})$ est $-\sigma$ et l'on peut choisir $\sigma < 1$ aussi voisin que l'on veut de l'unité. Soit $\varepsilon > 0$ une quantité fixe arbitrairement petite. Déterminons, pour $\sigma = 1 - \varepsilon$ et δ_0 données et fixes ($\delta_0 > -1$, $\sigma < 1$), $\alpha = \alpha_0^{(\delta)}$ par la relation $(\delta_0 + 1)\alpha = \varepsilon$ et l'on aura *quelque grand que soit* δ_0, une série de terme général

$$u_n = O(n^{-\sigma})$$

non sommable (C, δ_0) et sommable (C, δ) pour $\delta > \delta_0$. Pour $\sigma = 1$ on retombe dans le cas $\alpha = 0$ du théorème XIV, c'est-à-dire $nu_n = O(1)$ et alors la série est non seulement convergente, mais aussi sommable (C, δ) pour tout $\delta > -1$.

2. Les résultats relatifs au problème de conditions nécessaires et suffisantes de sommabilité (C) forment trois groupes : les uns ne font intervenir que la sommabilité (C) de certaines séries associées avec la série étudiée ; les autres supposent remplie la condition nécessaire (3) et enfin les derniers font appel à l'ordre de grandeur du terme général u_n.

Le premier résultat dans cette voie, dû à Knopp (1917 [g]) dit que *la condition*

$$\lim_{n=\infty} \rho_n = \lim_{n=\infty} \left[s_n + (n+1)^\alpha \sum_{n+1}^{\infty} \frac{v_m}{(m+1)^\alpha} \right] = s \qquad (\alpha \geqq 1)$$

est nécessaire et suffisante pour la sommabilité (C, 1) *de* $\sum_0^\infty v_n$ *avec la somme* s, *quel que soit* $\alpha \geqq 1$. En y posant, pour $\alpha = 1$, $S_{-1} = 0$

$$S_n = \sum_0^n \frac{v_m}{m+1}, \qquad S = \lim_{n=\infty} S_n = \sum_0^\infty \frac{v_m}{m+1} \quad (\text{th. IV}).$$

on a

$$v_n = (n+1)(S_n - S_{n-1}) = -(n+1)\Delta S_{n-1}$$

ainsi que

$$u_n = \rho_n - \rho_{n-1} = S - S_{n-1}.$$

On voit que la condition nécessaire et suffisante de (C, 1) de $\sum_0^\infty v_n$ consiste dans la *convergence* de la série $\sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty (S - S_{n-1})$ avec la même somme s. On passe de $\sum_0^\infty v_n$ à $\sum_0^\infty u_n$ par la transformation d'Abel (sommation par parties)

$$\sum_0^{N+1} a_m b_m = \sum_0^{N} \left(h + \sum_1^m a_k \right) \Delta b_m + b_{N+1} \left[h + \sum_0^{N+1} a_k \right] - b_0 h,$$

où $\Delta b_m = b_m - b_{m+1}$ et h est une constante arbitraire. On transforme Σv_n en Σu_n, en posant $a_m = \frac{v_m}{m+1}$, $b_m = m+1$, donc $\Delta b_m = -1$, et en choisissant h égal à la somme de la série $\sum_0^\infty \frac{v_k}{k+1}$ changée de signe. La transformation inverse s'obtient en posant $a_m = 1$, $b_m = u_m$ et $h = 0$. Ce calcul suggère qu'une transformation d'Abel doit diminuer ou augmenter d'une unité l'ordre δ de sommabilité (C, δ) d'une série Σc_n suivant que l'on représente c_n soit comme $(n+1)\frac{c_n}{n+1}$, soit comme $c_n . 1$. En effet, cette idée est confirmée par les résultats suivants de Hardy et Littlewood, démontrés par eux [g] pour $\delta = E(\delta) \geqq -1$, mais qui subsistent aussi (Andersen [c]) pour $\delta \neq E(\delta)$, $\delta \geqq -1$:

La sommabilité (C, δ) *de* $\sum_0^\infty u_n$ *avec la somme s entraîne celle* $(C, \delta+1)$ *avec la même somme s de la série*

$$\sum_0^\infty v_n = \sum_0^\infty (n+1)(u_n - u_{n+1}).$$

Inversement, parmi toutes les séries $\sum_0^\infty u_n$, *déterminées à partir de* $\sum_0^\infty v_n$ *par les relations* $\Delta u_n = u_n - u_{n+1} = \frac{v_n}{n+1}$, *il existe une et une seule série* $\sum_0^\infty u_n^*$ *sommable* (C, δ) *avec la somme s, si* $\sum_0^\infty v_n$ *est supposée sommable* $(C, \delta+1)$ *vers s, et l'on a*

$$u_n^* = \sum_{m=n}^\infty \frac{v_m}{m+1} \quad (C, \delta), \tag{5}$$

u_n^* *désignant la somme généralisée* — (C, δ) *de la série au second membre*. Autrement dit on a le théorème :

XV. *Condition nécessaire et suffisante de sommabilité* $(C, \delta+1)$, $\delta \geqq -1$, *de la série* $\sum_0^\infty v_n$ *avec la somme s consiste dans la sommabilité* (C, δ) *avec la même somme s de la série* $\sum_0^\infty u_n^*$, u_n^* *étant déterminé par* (5).

Andersen a généralisé le théorème XV, en démontrant [c] que l'on peut prendre u_n^* sous la forme suivante

$$u_n^* = A_n^{(\rho-1)} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{v_m}{A_m^{(\rho)}} \qquad (\mathrm{C}, \delta+1) \qquad (\rho > 0)$$

quel que soit $\rho > 0$. Cela revient à la sommation par parties de Σv_m, en posant $v_m = a_m b_m$ avec $b_m = A_m^{(\rho)}$.

Hardy et Littlewood ont eté même un peu plus loin, toujours sous la restriction $\delta = \mathrm{E}(\delta)$. En posant $v_n = a_n b_n$, où $a_n = \lambda_n = \lambda(n+1)$ et $\lambda(x)$ designe une fonction du type logarithmique-exponentiel ([1]), bref une fonction L. — E, ils ont démontré [f] qu'on peut donner à u_n^* la forme suivante

$$u_n^* = (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{v_m}{\lambda_m} \qquad (\mathrm{C}, \delta+1) \qquad \begin{pmatrix} n \geqq 0 \\ \lambda_{-1} \equiv 0 \end{pmatrix}$$

pourvu que $\lambda(x)$ satisfasse pour $x \to \infty$ aux conditions $x^e \prec \lambda(x) \prec x^{\mathrm{E}}$, c'est-à-dire $x^e = o[\lambda(x)]$ et $\lambda(x) = o(x^{\mathrm{E}})$, les exposants e, $\mathrm{E}(e < \mathrm{E})$ étant arbitraires, mais fixes, finis et positifs. Les auteurs de ce théorème l'ont démontré aussi pour les intégrales :

Théoreme XVI. — *Condition nécessaire et suffisante de sommabilité* $(\mathrm{C}, \delta+1)$, $\delta = \mathrm{E}(\delta) \geqq -1$, *de l'intégrale*

$$s = \int_0^{\infty} v(x)\,dx \qquad (\mathrm{C}, \delta+1)$$

est la sommabilité (C, δ) *avec la valeur* $s - \mathrm{A}\lambda(0)$ *de l'intégrale*

$$s - \mathrm{A}\,\lambda(0) = \int_0^{\infty} u(x)\,dx \qquad (\mathrm{C}, \delta),$$

où la fonction L. — E. $\lambda(x)$ *satisfait aux conditions* $x^e \prec \lambda \prec x^{\mathrm{E}}$, $0 < e \leqq \mathrm{E} < \infty$, *et*

$$u(x) = \lambda'(x) \int_x^{\infty} \frac{v(t)}{\lambda(t)}\,dt \quad (\mathrm{C}, \delta+1), \qquad \mathrm{A} = \int_0^{\infty} \frac{v(t)}{\lambda(t)}\,dt \quad (\mathrm{C}, \delta+1).$$

Ce théorème ainsi que le résultat correspondant pour les séries doivent subsister aussi pour $\delta \neq \mathrm{E}(\delta)$, mais ce point n'est pas encore

([1]) *Voir* G. H. Hardy, *Orders of Infinity* (*Cambr. Math. Tracts*, n° 12).

étudié. Ajoutons que la condition cesse d'être suffisante, en restant nécessaire, si $1 \prec \lambda(x) \prec x^e$, e étant aussi petit qu'on veut mais positif, par exemple pour $\lambda(x) = \log x$, et qu'elle est au contraire suffisante sans être nécessaire, si $\lambda(x) \succ x^{\mathrm{L}}$ quelque grand que soit E par exemple pour $\lambda(x) = e^x$. Dans le cas particulier ou $\delta = 0$, le théorème XVI donne pour les séries une généralisation du résultat de Knopp, dont nous sommes partis :

La condition nécessaire et suffisante de sommabilité (C, 1) *de* Σv_n *avec la somme* s *se réduit à*

$$\lim_{n=\infty}\left(s_n + \lambda_n \sum_{n+1}^{\infty} \frac{v_m}{\lambda_m}\right) = s.$$

La série qui figure au premier membre converge si $\lambda(x) \succeq x$ et diverge pour $\lambda(x) \prec x$, en restant toujours sommable (C, 1) puisque $\lambda(x) \to \infty$ pour $x \to \infty$. Dans le cas $\lambda(x) \equiv x^\alpha$ elle est sommable $(\mathrm{C}, 1-\alpha)$ et l'on retrouve le théorème de Knopp étendu aussi au cas ou $\alpha < 1$.

L'application répétée du théorème XVI conduit au critère suivant de sommabilité $(\mathrm{C}, r+\delta)$, $r = \mathrm{E}(r) \geqq 0$:

THÉOREME XVII. — *Condition nécessaire et suffisante de* $(\mathrm{C}, r+\delta)$, $\delta \geqq 0$, $r = \mathrm{E}(r) \geqq 0$, *de* $\sum\limits_0^\infty v_n$ *avec la somme* s *est la sommabilité* $(\mathrm{C}, \delta - 1)$ *de* $\sum\limits_0^\infty u_n^*$ *avec la somme* s, *les* u_n^* *se déduisant des* v_n *de proche en proche, ainsi :* $u_n^* = v_n^{(r+1)}$, *où* $v_n^{(0)} \equiv v_n$ *et*

$$v_n^{(k)} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{v_m^{(k-1)}}{m+1} \qquad (\mathrm{C}, r-k+\delta) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r, r+1),$$

toutes les séries $\sum\limits_0^\infty v_n^{(k)}$ *étant sommables respectivement* $(\mathrm{C}, r-k+\delta)$, *avec la même somme* s *pour* $r+1 \geqq k \geqq 1$.

Pour $\delta = 0$ cette condition se réduit à la convergence de la série $\sum\limits_0^\infty u_n^*$ jointe à $nu_n^* = o(1)$. Dans ce cas particulier le théorème XVII a été démontré par Hardy et Littlewood [*f*]. Une autre forme a été donnée au théorème XVII par Andersen qui introduit la transformation d'Abel d'ordre $r = \mathrm{E}(r)$

$$\sum_{m=0}^{n} a_m b_m = \sum_{m=0}^{n-r} \sigma_m^{(r-1)} \Delta^r b_m + \sum_{n-r+1}^{n} \sigma_m^{(r-1)} \Delta_n^r b_m.$$

Dans cette transformation $\sigma_m^{(\alpha)}$ désigne les sommes partielles de Cesàro d'ordre α formées à partir de $\sigma_m^{(0)} = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$ et $\Delta_n^r b_m$ est le symbole de $\Delta^r b_m$, où manquent les termes contenant b_k avec $k > n$. Le résultat (Andersen [c]) peut être formulé ainsi :

Théorème XVII'. — $\sum_0^\infty u_n$ *étant sommable* (C, δ), $\sum_0^\infty v_n$, *où*

$$v_n = \mathrm{A}_n^{(r)} \Delta^r u_n,$$

est sommable (C, $\delta + r$), $r = \mathrm{E}(r)$, *avec la même somme. Inversement, la sommabilité* (C, $\delta + r$) *de* Σv_n *entraîne celle* (C, δ) *de* Σu_n^*, *où* u_n^* *est une solution bien déterminée de l'équation*

$$\mathrm{A}_n^{(r)} \Delta^r u_n = v_n,$$

à savoir celle

$$u_n^* = \sum_{m_r=n}^{\infty} \sum_{m_{r-1}=m_r}^{\infty} \cdots \sum_{m_1=m_2}^{\infty} \frac{v_{m_1}}{\mathrm{A}_{m_1}^{(r)}} \quad (\mathrm{C}, \delta). \tag{6}$$

Les sommes de ces r séries sont à calculer par le procédé (C, δ).

Pour $\delta = -1$ et $r = k + 1$ on a le critère de sommabilité (C, k) de Σv_n qui se réduit à celle (C, -1) de Σu_n^*, où u_n^* est donné par (6) avec $r = k + 1$, toutes les séries dans (6) étant sommables (C, -1). Plusieurs propriétés importantes des séries sommables (C, δ) peuvent être démontrées à l'aide de XVII et XVII' comme l'ont fait voir Hardy et Littlewood [f]. Ferrar a exprimé [a] les conditions nécessaires et suffisantes de (C, k) de Σv_n avec la somme s sous la forme suivante

$$\lim_{n=\infty} b_n^{(k)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n=\infty} [s_n^{(k-1)} + (n+k) b_{n+1}^{(k)}] = k\, s,$$

où $b_n^{(k)}$ est défini à l'aide des sommes partielles d'ordre $k - 2$, $\sigma_m^{(k-2)}$, de la série Σv_n, ainsi

$$b_n^{(k)} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\sigma_m^{(k-2)}}{(m+k)\,\mathrm{A}_m^{(k-1)}}.$$

3. Plusieurs propriétés des séries sommables (C) subsistent quand

on remplace l'hypothèse de sommabilité (C) par celle plus large de l'existence de la limite d'Abel de $f(x) = \Sigma u_n x^n$ pour x tendant vers $+1$. Ainsi on a, par exemple :

THÉORÈME VI'. — *Une série bornée* (C, α), $\alpha \geqq -1$, *est sommable* (C, $\delta > \alpha$) *avec la somme* s, *si l'on a* $\lim\limits_{x \to 1} \Sigma u_n x^n = s$.

Littlewood a démontré [59] ce théorème avec $\delta = \alpha + 1$, d'où découle VI' grâce à VI.

Mais on peut considérer la limite d'Abel pour la série $\Sigma u_n^{(\delta)}$, transformée — (C, δ) de Σu_n, c'est-à-dire la limite pour $x \to 1$ de la fonction $f^{(\delta)}(x)$ (Kogbetliantz [q]) suivante

$$(7)\qquad f^{(\delta)}(x) = \sum_0^\infty u_n^{(\delta)} x^{n+\delta} = \Phi_\delta(f) = \delta(1-x)\int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{\delta-1}}{(1-t)^{\delta+1}}\,dt,$$

où $f(t) \equiv f^{(0)}(t)$ et grâce aux développements

$$(8)\quad \begin{cases} \Phi_{\delta,\gamma}^{(2)} = \Phi_\delta[\Phi_\gamma(f)] = \delta\gamma \displaystyle\sum_0^\infty \frac{\Gamma(m+\delta)\Gamma(m+\gamma)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\delta+\gamma+1)}\Phi_{m+\delta+\gamma}(f), \\ \Phi_{\delta+\gamma}(f) = \dfrac{\Gamma(\delta+\gamma+1)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\gamma)} \displaystyle\sum_0^\infty A_n^{[-(\delta+1)]} \frac{\Phi_{n+\gamma,\delta}^{(2)}(f)}{n+\gamma}, \end{cases}$$

on démontre l'existence de la limite de $f^{(\delta)}(x)$ pour $\delta > \delta_0$, si elle existe pour $\delta = \delta_0$, ainsi que le *théorème d'équivalence*

$$(9)\qquad \Phi_{\delta,\gamma}^{(2)}(f) \sim \Phi_{\delta+\gamma}(f) \sim \Phi_{\gamma,\delta}^{(2)}(f) \qquad (x \to 1).$$

D'autre part, le théorème XVII montre toute l'importance de la sommation par parties qui transforme une série divergente sommable (C, δ) en une autre sommable (C, $\delta - 1$). L'opération fonctionnelle correspondante transformant $\Sigma u_n x^n$ en $\Sigma v_n^{(k)} x^n$ (théorème XVII) est

$$\mathrm{H}_k(f) \equiv \mathrm{H}_1[\mathrm{H}_{k-1}] \equiv \frac{1}{(1-x)\Gamma(k)}\int_x^1 \left(\log\frac{1-x}{1-t}\right)^{k-1} f(t)\,dt,$$

ce qui est l'opération (8) du Chapitre II, où l'on a posé $\delta = k$, $\omega = 1 - x$ et $u = 1 - t$, $\varphi(1-t) = f(t)$. Cette opération est équivalente à $\mathrm{L}_k(f)$ où [*voir* (7), Chap. II]

$$(10)\qquad f_\delta(x) = \mathrm{L}_\delta(f) \equiv \delta(1-x)^{-\delta}\int_x^1 (t-x)^{\delta-1} f(t)\,dt,$$

et nous pouvons considérer la limite de $f_\delta(x)$ pour $x \to 1$ comme la limite d'Abel pour la série $\Sigma v_n^{(\delta)}$ du théorème XVII. Pour $L_\delta(f)$ on a les mêmes développements (8) et l'on en déduit pour $x \to 1$ le *théorème d'équivalence*

$$(11) \qquad L_{\delta,\gamma}^{(2)}(f) \equiv L_\delta[L_\gamma(f)] \sim L_{\delta+\gamma}(f) \sim L_{\gamma,\delta}^{(2)}(f) \qquad (x \to 1).$$

La définition (7) de $f^{(\delta)}(x)$ est la même que (6) dans le Chapitre II. Donc, d'après le résultat de Hardy et Littlewood [e], *l'existence de la limite* $\lim\limits_{x \to 1} f_\delta(x) = A$ *entraîne* a fortiori *celle de la limite* $\lim\limits_{x \to 1} f^{(\delta)}(x)$, *égale à la précédente* : $\lim\limits_{x \to 1} f^{(\delta)}(x) = A$.

Après ces préliminaires passons aux critères de sommabilité (C, δ) basés sur l'existence de la limite d'Abel. Ni l'une ni l'autre des deux conditions nécessaires

$$f(x) = s + o(1) \quad (x \to 1) \qquad \text{et} \qquad \tau_n^{(\delta+1)} = n u_n^{(\delta+1)} = o(1) \quad (n \to \infty).$$

considérée séparément, ne suffit pour assurer la sommabilité (C, δ), mais réunies ensemble elles deviennent suffisantes :

THÉORÈME XVIII. — *Les conditions*

$$1^\circ \qquad \lim_{x \to 1} f_q(x) = s,$$

et

$$2^\circ \qquad \lim_{n = \infty} \tau_n^{(\delta+1)} = 0,$$

où $q \geqq 0$ *et* $\delta \geqq -1$ *sont nécessaires et suffisantes pour la sommabilité* (C, δ), $\delta \geqq -1$, *de la série* Σu_n *avec la somme* s *quelle que soit la valeur du nombre positif ou nul* q.

En effet, pour $q < \delta$, la condition 1° entraîne *a fortiori*

$$\lim_{x \to 1} f_\delta(x) = s.$$

Par conséquent pour la série $\Sigma u_n^{(\delta)}$ la limite d'Abel existe,

$$f^{(\delta)}(x) \to s \qquad \text{et} \qquad n u_n^{(\delta+1)} = \tau_n^{(\delta+1)} \to 0,$$

d'où

$$(C, 1) - \lim_{n = \infty} \text{gén. } n u_n^{(\delta)} = 0.$$

D'après le théorème de Tauber [92] on en déduit la convergence de $\Sigma u_n^{(\delta)}$ c'est-à-dire la sommabilité (C, δ) de Σu_n. Si $q \geqq \delta$, on a *a fortiori* $\lim\limits_{n=\infty} \tau_n^{q+1} = 0$ et $\Sigma u_n^{(q)}$ converge, c'est-à-dire Σu_n est sommable (C, q), ce qui entraîne $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = s$ et grâce à cela la sommabilité (C, δ) de Σu_n si $\delta \geqq 0$. Soit enfin $0 > \delta > -1$, donc $q \geqq 0 > \delta$. On a $f(x) \to s$ et de $\tau_n^{(\delta+1)} \to 0$, on déduit *a fortiori* $\tau_n^{(1)} \to 0$. Donc Σu_n converge et elle est *a fortiori* sommable (C, $\delta + 1$).

Mais on a $\tau_n^{(\delta+1)} = (\delta+1)[s_n^{\delta} - s_n^{(\delta+1)}]$ et les conditions $s_n^{(\delta+1)} \to s$, $\tau_n^{(\delta+1)} \to 0$ entraînent $s_n^{(\delta)} \to s$, ce qui achève la preuve du théorème XVIII. Il est evident que la condition 1° $f_q(x) \to s$ de ce théorème est d'autant plus large qu'on choisit q plus grand. Le théorème de Tauber correspond au cas particulier $q = 0$, $\delta = 0$. Pour $q = 0$, le théorème XVIII a éte démontré pour la première fois par Ottolenghi [a] sous la restriction $\delta = E(\delta)$. La condition 1° est remplie par toute série sommable (C). Dans ce cas la série est sommable (C, δ) pour toute valeur de δ qui vérifie la seconde condition. Le premier théorème de ce type remonte à Kronecker [53] qui a fait voir en 1876 qu'*une série sommable* (C, 1) *converge, si l'on a* $\lim\limits_{n=\infty} \tau_n^{1} = 0$, la réciproque étant évidente. Knopp l'a étendu en 1907 ainsi [d] : *une série sommable* (C, k), $k = E(k)$ *converge, si* $\tau_n^{(1)} \to 0$. Hardy y a remplacé [f] la condition $\tau_n^{1} = o(1)$ par $nu_n = O(1)$ et Landau (*voir* aussi Pringsheim [b]) l'a démontré [b] avec une limitation unilatérale pour nu_n : $nu_n < k$ ou bien $nu_n > -k$, $k > 0$ étant fixe et les u_n réels. L'extension de ce résultat aux séries à termes complexes a été obtenue par Lukács [c]. Ce qui est beaucoup plus important. Littlewood [59] et Hardy et Littlewood [b] ont réussi à remplacer dans le théorème de Tauber la condition $\tau_n^{1} \to 0$ par $nu_n = O(1)$ d'abord et $nu_n > -k (< k)$ ensuite. Le théorème de Tauber a pris ainsi pour les séries réelles la forme suivante (*voir* aussi Landau [L]) :

Une série réelle Σu_n *converge, si l'on a* $\tau_n^{0} = nu_n < k$ *et* $f(r) \to s$ *pour* $r \to 1$.

Le même raisonnement que celui qui nous a permis de démontrer le théorème XVIII nous donne l'extension suivante, dont le cas particulier pour $\delta = 1$ a été démontre par Szász [a] :

THÉORÈME XIX. — *Une série réelle* Σu_n *est sommable* (C, δ), $\delta \geqq 0$, *avec la somme* s, *si l'on a* $f_q(r) \to s$ *pour* $r \to 1$ *et* $\tau_n^{(\delta)} < k$, *quelle que soit la valeur de* q, $q \geqq 0$.

Il serait intéressant de rechercher si le théorème XIX reste valable pour $-1 < \delta \leq 0$, ce qui est probable. Il semble en outre que la condition $\tau_n^{(\alpha)} < k$, $\alpha \geq 0$, devrait assurer, ensemble avec la condition $f_q(r) \to s$, la sommabilité (C, δ) non seulement pour $\delta = \alpha$, mais déjà pour $\delta > \alpha - 1$. On a d'ailleurs ce résultat si l'on renforce la condition $\tau_n^{(\alpha)} < k$ en la remplaçant par $\tau_n^{(\alpha)} = O(1)$:

Théorème XX. — *Une série réelle* Σu_n *est sommable* (C, δ) *pour* $\delta > \alpha - 1$, $\alpha \geq 0$, *avec la somme* s, *si l'on a* $\tau_n^{(\alpha)} = O(1)$ *et* $f_q(r) \to s$ *pour* $r \to 1$, *quelle que soit la valeur de* q, $q \geq 0$.

Le théorème XIV dit qu'une série sommable (C), l'est (C, $\delta > \alpha - 1$), si $\tau_n^{(\alpha)} = O(1)$, donc il suffit de démontrer que les conditions du théorème XX entraînent la sommabilité (C) en général. Si $q \geq \alpha$, on a $\tau_n^{(q)} = O(1)$ et $\Sigma u_n^{(q)}$ converge d'après le théorème de Tauber, car $f_q(r) \to s$ entraîne $f^{(q)}(r) \to s$. Si $\alpha > q$, $f_q(r) \to s$ entraîne $f^{(\alpha)}(r) \to s$ et $\Sigma u_n^{(\alpha)}$ converge, ce qui achève la preuve de XX. La relation

$$\tau_n^{(\alpha)} = \alpha \left[s_n^{(\alpha-1)} - s_n^{(\alpha)} \right]$$

montre que l'inégalité $\tau_n^{(\alpha)} < k$ entraîne pour les séries sommables (C, α) cette autre inégalité $s_n^{(\alpha-1)} < k'$. Inversement, le théorème suivant :

Théorème XXI. — *Une série réelle* Σu_n *est sommable* (C, $\delta + 1$), $\delta \geq 0$, *si* $s_n^{(\delta)} < k$ *et* $f_q(r) \to s$ *pour* $r \to 1$ ($q \geq 0$),

dont le cas particulier $q = \delta = 0$ est dû à Littlewood et celui $q = 0$, $\delta \geq 0$ à Zygmund [g], permet de démontrer que l'inégalité $s_n^{(\delta)} < k$ entraîne $\tau_n^{(\delta+1)} < k'$ si la série est sommable (C, $\delta + 1$). Doetsch [22], a établi le théorème XXI dans l'hypothèse de sommabilité (C) de Σu_n. On prouve le théorème XXI en le ramenant au cas $q = 0$, $\delta = 0$: pour $q \leq \delta$, on a $f_\delta(r) \to s$ et $s_n^{(\delta)} < k$, donc $\Sigma u_n^{(\delta)}$ est sommable (C, 1) et Σu_n l'est (C, $\delta + 1$); pour $q > \delta$ on a $s_n^{(q)} < k$ et Σu_n est sommable (C, $q + 1$), donc $f(r) \to s$, ce qui nous ramène dans le cas précédent $q < \delta$.

Le cas particulier $q = 0$, $\alpha = 0$ du théorème XX dit qu'une série avec $f(r) \to s$ et $nu_n = O(1)$ est sommable (C, $\varepsilon - 1$) pour tout $\varepsilon > 0$. La condition $nu_n = O(1)$ est la meilleure possible, car quelque lente que soit la croissance de $\varphi(n)$, tendant vers $+\infty$ avec n, on peut toujours (Littlewood [59]) construire une série *divergente* pour laquelle $nu_n = O[\varphi(n)]$ et $f(r) \to A$ pour $r \to 1$. On en déduit par exemple que les conditions $u_n = o(n^{\varepsilon-1})$ et $f(r) \to s$ n'assurent point la convergence de Σu_n quelque petit que soit $\varepsilon > 0$.

Fejér a indiqué [j] qu'une série sommable (C, 1) converge si l'on a $\sum_1^\infty nu_n^2 < \infty$. Ce résultat a suscité beaucoup d'intérêt. Fejér l'a amélioré [i] en remplaçant l'hypothèse de sommabilité (C, 1) par celle de l'existence de $\lim_{r \to 1} f(r)$. Il serait très intéressant d'étudier le cas plus général où $f_\delta(r) \to s$, $r \to 1$ et $\sum_1^\infty n[u_n^{(\delta)}]^2$ converge. L'énoncé de Féjèr a été étendu par Landau (L) à tout point $x = e^{i\varphi}$ du cercle $|x| = 1$ pour lequel $f(re^{i\varphi}) \to A(\varphi)$, $r \to 1$. Les conditions de Fejér — convergence de la série Σnu_n^2 et existence de la limite de $f(r)$ pour $r \to 1$ — assurent (Hardy et Littlewood [i]) non seulement (C, 0), mais aussi $\left(C, \delta > -\frac{1}{2}\right)$ de la série Σu_n (*voir* aussi Zygmund [f]). Dans ces conditions on a en outre $s_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = o\left(\sqrt{\log n}\right)$, ce qui entraîne la sommabilité $\left(C, -\frac{1}{2}\right)$ de la série $\Sigma u_n (\log n)^{-\frac{1}{2}}$. Enfin les derniers résultats dans cette voie sont les suivants (Hardy et Littlewood [i, k]) :

Une série Σu_n, sommable (C), est sommable (C, δ) pour $\delta > -\frac{\alpha}{\alpha+1}$, $\alpha \geqq 0$, si $\Sigma n^\alpha |u_n|^{\alpha+1}$ converge ou bien si

$$\sum_1^n m^{\alpha+1} |u_m|^{\alpha+1} = O(n).$$

4. Le théorème XVII permet de démontrer (Hardy et Littlewood [g]), un théorème général que voici :

Théorème XXII. — *Pour la sommabilité* (C) *de la série Σu_n avec la somme s, il faut et il suffit que :* 1° $f(x) = \Sigma u_n x^n$, *holomorphe pour* $|x| < 1$, *soit d'un ordre fini $p \geqq 0$ à l'intérieur du cercle pour* $|x| \to 1$, *c'est-à-dire* $(1 - |x|)^p f(x) = O(1)$; 2° *Un entier k existe tel que l'on ait* $\lim_{x=1} f_k(x) = s$.

On voit que dans 2° x peut tendre vers $+1$, suivant un chemin quelconque intérieur au cercle $|x| = 1$, tandis que dans le théorème XVIII $x \to 1$ signifie un chemin restant à l'intérieur d'un domaine angulaire de Stolz. La première condition est équivalente à $u_n = O(n^q)$ parce que le fait que u_n est d'un ordre fini q en n entraîne $f(x) = O[(1 - |x|)^{-q-1}]$, et qu'inversement de 1° on déduit facilement $u_n = O(n^p)$. Or, dire que $u_n = O(n^q)$ revient à supposer réalisée la condition nécessaire $u_n = o(n^\delta)$ pour $\delta = q + \varepsilon > q$ relative à l'ordre de grandeur du terme général. Ainsi, le théorème XXII prouve qu'en réunissant les conditions nécessaires (1) et (2), on obtient les conditions suffisantes de (C). On voit, en outre, que, sous l'hypothèse $u_n = O(n^q)$, l'existence de la limite

$$(C) - \lim_{n=\infty} \text{gén.} \sum_0^n u_m$$

est rattachée à celle de la limite

$$(C) - \lim_{x=1} \text{gén.} f(x),$$

ces deux limites étant égales. La restriction imposée dans l'énoncé du théorème XXII à k qui doit être entier n'est due qu'à la méthode de démonstration basée sur le théorème XVII. Le cas $k \neq E(k)$ est très intéressant au point de vue de la loi *précise* donnant l'ordre δ de sommabilité (C, δ) en fonction de p et k, entiers ou non. Il est probable que l'expression de cette loi serait l'inégalité $\delta > p + k - 1$, mais ce côté quantitatif du théorème XXII reste encore à étudier. Le théorème suivant (Andersen, [S]; Hardy et Littlewood, [g]) :

Théoreme XXIII. — *Si* $f(x) = O(1)$ *pour* $|x| < 1$, *la série* Σu_n *est ou bien sommable* (C, ε), *quelque petit que soit* ε *positif, ou bien non sommable* (C). *L'existence de la limite*

$$(C, 1) - \lim_{x \to 1} \text{gén.} f(x) = \lim_{x \to 1} f_1(x) = s$$

est une condition nécessaire et suffisante de (C, ε) *avec la somme* s.

semble corroborer l'énoncé probable $\delta > p + k - 1$ de la loi en question.

Revenons aux théorèmes XVIII et XXII. Leur comparaison suggère la considération dans l'énoncé du théorème XVIII des chemins tangents au cercle $|x| = 1$ au point $x = +1$. En effet, en renforçant ainsi la condition 1° dans le théorème XVIII, on peut exiger moins de $\tau_n^{(\delta+1)}$ en ne lui imposant que la condition $\tau_n^{(\delta+1)} = O(1)$ au lieu de $o(1)$ comme dans 2°. On obtient ainsi l'énoncé suivant :

THÉORÈME XXIV. — *Soit* $\tau_n^{(\alpha+1)} = O(1)$, $\alpha \geqq -1$. *Pour la sommabilite* (C, δ) *de* Σu_n *avec la somme* s, *où* $\delta > \alpha$, *il faut et il suffit que l'on ait pour une valeur de* q,

$$\lim_{v=1} f_{q+1}(r) = s \qquad (q \geqq 0).$$

Pour le démontrer, observons d'abord que $f_{q+1}(x) \to s$ équivaut à $F_1(x) \to s$, où $F(x) = \Sigma u_n^{(q)} x^n$. Le cas particulier du théorème XXIV correspondant à $q = 0$, $\alpha = -1$ a été démontré par Hardy et Littlewood [e_2]. Leur résultat — la convergence de Σu_n pour $\alpha = -1$, $q = 0$, — associé au théorème XIV, donne XXIV dans ce cas. Vu ce théorème XIV, il suffit de démontrer la sommabilité (C) dans le cas général. Soit $q \geqq \alpha + 1$. Envisageons la transformée (C, q), c'est-à-dire $\Sigma u_n^{(q)}$. Pour cette série,

$$F_1(x) \to s \qquad \text{et} \qquad n u_n^{(q)} = O(1)$$

a fortiori. Donc elle converge et Σu_n est sommable (C, q). Si $q < \alpha + 1$, nous envisageons $\Sigma u_n^{(\alpha+1)}$ pour laquelle, de même,

$$n u_n^{(\alpha+1)} = \tau_n^{(\alpha+1)} = O(1) \qquad \text{et} \qquad F_1(x) \to s,$$

car $f_{q+1} \to s$ entraîne $f_{\alpha+2} \to s$. Donc, $\Sigma u_n^{(\alpha+1)}$ converge et Σu_n est sommable $(C, \alpha+1)$. Dans les deux cas, le théorème XIV donne la sommabilité $(C, \delta > \alpha)$. Le théorème démontré généralise les théorèmes XIV et XX, mais on remarque bien que l'introduction des chemins tangents au cercle au point $x = +1$ a nécessité le remplacement de $f_q(x)$ par $f_{q+1}(x)$ comparativement au théorème XX.

Dans certains cas, l'ordre δ de sommabilité (C, δ) est déterminé par l'ordre de grandeur du terme général u_n. Ainsi, dans sa thèse [a], Hadamard a démontré la sommabilité $(C, \delta > \alpha)$, $\alpha \geqq 0$, d'une série de Taylor $\Sigma u_n x^n$ en tout point *régulier* sur son cercle de convergence $|x| = 1$ pourvu que l'on ait $u_n = o(n^\alpha)$. Fatou a fait voir [26] que, pour $\alpha = 0$, on a même la convergence, c'est-à-dire $(C, 0)$. Riesz [e, k] a établi enfin le résultat général que voici :

THÉORÈME XXV. — *La condition* $u_n = o(n^\delta)$ *est nécessaire et* *suffisante pour la sommabilité* (C, δ), $\delta \geqq 0$ *de la série* $\Sigma u_n x^n$ *en tout point régulier sur son cercle de convergence* $|x| = 1$, *cette sommabilité étant uniforme sur tout arc régulier.*

Apres avoir etendu ce théorème aux points d'ordre négatif $\omega < 0$, Dienes a eu l'idée d'associer à la condition $u_n = o(n^\delta)$ l'hypothèse de l'existence de la limite de $f(x)$ pour x tendant vers $+1$ suivant un chemin quelconque intérieur au cercle, y compris les chemins tangents au point $x = +1$. Il a obtenu ainsi (E, p. 19) pour $\delta \geqq 1$, le theorème suivant, valable aussi pour $0 < \delta < 1$:

Théorème XXVI. — *La série* Σu_n *est sommable* (C, δ), $\delta > 0$, *avec la somme* s, *si l'on a* $u_n = o(n^\delta)$ *et*

$$\lim_{x=1} \sum_0^\infty a_n x^n = s. \tag{12}$$

Insistons qu'il n'est pas possible d'exclure les chemins tangents dans cet énonce en remplaçant (12) par la condition moins restrictive $\lim\limits_{x \to} \Sigma u_n x^n = s$. Envisageons, en effet, avec Fejér [e] la fonction

$$\sqrt{\pi e}(1-x)^{-\left(\frac{1}{2}+\rho\right)} e^{\frac{1}{x-1}} = \sum_0^\infty \gamma_n x^n \qquad (\rho \gtreqless 0),$$

où ρ est un nombre réel. Fejér a donné la formule approchée

$$\gamma_n = n^{\frac{\rho-1}{2}} [\cos\theta_n + o(1)] \qquad \left(\theta_n = 2\sqrt{n} - \frac{\rho\pi}{2}\right),$$

où $\theta_n = 2\sqrt{n} - \frac{\rho\pi}{2}$. On a les formules analogues pour les moyennes $\tau_n^{(\delta+1)}$ de la suite de Kronecker $\{n\gamma_n\}$ et celles $s_n^{(\delta)}$ des sommes partielles de la série $\Sigma\gamma_n$

$$s_n^{(\delta)} = n^{\frac{\rho-\delta}{2}} \left[(\delta+1)\sin\left(\theta_n - \frac{\delta\pi}{2}\right) + o(1)\right],$$
$$\tau_n^{(\delta+1)} = -n^{\frac{\rho-\delta}{2}} \left[\Gamma(\delta+2)\sin\left(\theta_n - \frac{\delta\pi}{2}\right) + o(1)\right].$$

Pour cette série $\Sigma\gamma_n$, on a, quel que soit ρ, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, les chemins tangents étant exclus et x tendant vers $+1$ à l'intérieur du domaine angulaire de Stolz. Sur le cercle $|x| = 1$, on a

$$|f(e^{2i\varphi})| = \sqrt{\pi}\,|2\sin\varphi|^{-\left(\frac{1}{2}+\rho\right)}$$

et $\lim\limits_{\varphi=0} f(e^{i\varphi})$ n'existe point si $\rho > -\frac{1}{2}$, étant nulle si $\rho < -\frac{1}{2}$. De même, sur un chemin intérieur au cercle $x = 1 - \varepsilon e^{i\psi}$, $\varepsilon \to 0$, où $|\psi| < \frac{\pi}{2}$ et $\varepsilon^{-1}.\cos\psi \to \frac{1}{2}$ quand $\varepsilon \to 0$, on a

$$f(x) = \sqrt{\pi}\,\varepsilon^{-\left(\frac{1}{2}+\rho\right)}[e^{i\omega(\varepsilon)} + o(1)] \qquad \left[\omega(\varepsilon) = \frac{\sin\psi}{\varepsilon} - \left(\rho + \frac{1}{2}\right)\psi\right].$$

Ainsi, les chemins tangents étant admis, on voit que $f(x)$ oscille de $-\infty$ à $+\infty$ quand x tend vers $+1$ pourvu que $\rho > -\frac{1}{2}$, et la condition (12) n'est pas vérifiée, celle $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = s$ étant vérifiée avec $s = 0$.

Les formules approchées donnent $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = s$ pour $\delta > \rho$, ce qui concorde très bien avec le théorème XVIII, étant donné que $\lim\limits_{n=\infty} \tau_n^{(\delta+1)} = 0$ pour $\delta > \rho$. Par contre, le théorème XXVI ne s'applique pas, et l'on constate que malgré le fait que $\gamma_n = o(n^\alpha)$ pour $\alpha > \frac{\rho-1}{2}$, la série $\Sigma\gamma_n$ n'est pas sommable (C, α) pour $\rho \geqq \alpha > \frac{\rho-1}{2}$, ce qui prouve l'importance des chemins tangents pour la validité du théorème XXVI.

Les conditions du théorème XXVI, suffisantes pour assurer (C, δ) si $\delta > 0$, cessent de l'être pour $\delta = 0$ comme l'ont montré Fejér [g], Littlewood [59] et Lusin [61].

La restriction $\delta \geqq 1$ de Dienes est à remplacer par $\delta > 0$, car tout son raisonnement, basé sur la sommabilité $(C, 1)$ des séries trigonométriques de Fourier aux points de continuité de la fonction développée, subsiste aussi pour $0 < \delta < 1$, ces séries y étant sommables (C, δ) pour tout $\delta > 0$.

L'impossibilité d'etendre le theorème XXVI au cas $\delta = 0$ s'explique par le fait bien connu, que la continuité d'une fonction ne suffit point pour assurer la convergence de sa série trigonométrique.

CHAPITRE IV.

Facteurs de sommabilité (C, δ). Moyennes typiques.

1. Si l'on se représente l'ensemble des séries convergentes comme compris à l'intérieur de celui des séries divergentes, sommables et non sommables, on s'aperçoit, en comparant entre eux les résultats exposés dans le Chapitre précédent, que les uns limitent le champ d'application du procédé des moyennes arithmétiques (C, δ) d'ordre positif $\delta > 0$ extérieurement, les autres, intérieurement. Ainsi, pour être sommable (C), une série ne doit pas diverger trop rapidement : sa somme partielle s_n et son terme général u_n doivent être en valeur absolue à croissance finie en n, c'est-à-dire satisfaire à la condition $u_n = O(n^k)$, k étant fini. Au contraire, le cas particulier $\delta = 0$ du théorème XIX fait voir qu'une série divergente, mais qui diverge trop lentement à cause de la relation $nu_n > -k$ ne peut être sommable (C, δ) quelque grand que soit δ. Il y a lieu, par conséquent, de distinguer, entre la *puissance* d'un procédé de sommation et sa *finesse*. La classe des séries *divergentes*, sommables par un procédé régulier, s'approche d'autant plus près de celle des séries *convergentes*, que le procédé est plus fin, mais quel que soit le procédé de sommation, on peut construire une série divergente et qui diverge trop lentement pour être sommable par ce procédé sans être convergente. Pour le procédé (C), citons les séries divergentes

$$\sum_1^\infty \frac{\sin^2 n\theta}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left[\frac{2\pi n \log n}{\log 2} + n\theta\right],$$

dont la première n'est sommable (C) presque nulle part, et la seconde nulle part dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ (Hardy et Littlewood [j, k]. Quant à la limitation de (C) en puissance, toute série de Taylor à l'extérieur de son cercle de convergence présente l'exemple d'une série divergeant trop rapidement pour être sommable (C).

On doit cependant à Obrechkoff [a] un procédé de sommation régulier, déduit de (C, δ) pour $\delta \to \infty$ et qui permet de sommer les séries de Taylor à l'extérieur du cercle de convergence. La définition (3) et la formule approchée (2) pour $A_n^{(\delta)}$ (Chap. II) permettent de démontrer qu'en posant dans $s_n^{(\delta)}$, $\delta = n$, et passant à la limite pour $n = \infty$, on a pour une série convergente Σu_n,

$$\lim_{n=\infty} s_n^n = \sum_0^\infty 2^{-m} u_m$$

d'où la définition du procedé de sommation (C, ∞),

$$(C, \infty) - \lim_{n=\infty} \text{gén.} \sum_0^n u_m = \lim_{n=\infty} \frac{1}{A_n^{(n)}} \sum_{m=0}^n A_{n-m}^{(n)} 2^m u_m = \lim_{n=\infty} S_n.$$

Σu_n est sommable (C, ∞) avec la somme s, si $\lim\limits_{n=\infty} S_n = s$. Ce procédé est régulier et plus puissant que (C, δ) quelque grand que soit δ fixe, sans être pour cela moins fin. Il est très important au point de vue de sommabilite analytique, car il permet de prolonger la serie de Taylor au delà de son cercle de convergence. La progression géométrique Σz^n est sommable (C, ∞) avec la somme $(1 - z)^{-1}$ partout à l'intérieur de la branche extérieure $|z| > 1$ du limaçon de Pascal $|z|^2 = |2z - 1|$. On a, en général :

Le polygone curviligne de sommabilité (C, ∞) *de la série de Taylor de* $f(z)$ *est formé par les arcs des grands boucles des différents limaçons de Pascal correspondant aux sommets de l'étoile de Mittag-Leffler de* $f(z)$.

La suite $s_n^{(\delta)}$ pour $\delta = \delta(n) \to \infty$ avec n a été considérée en 1911 par Hardy et Chapman [17]. Ils ont étudié la limite double

$$\lim_{\theta=0} \lim_{n=\infty} s_n^{(\theta n)} = \lim_{\theta=0} \sum_0^\infty u_m (1+\theta)^{-m} = \lim_{r \to 1} \sum_0 u_m r^m \qquad \left(r = \frac{1}{1+\theta}\right),$$

mais ils n'ont pas envisagé $s_n^{(\theta n)}$ de la série transformée $\sum\limits_0^\infty u_m (1+\theta)^{-m}$ comme l'a fait Obrechkoff pour $\theta = 1$. En variant θ, on obtient à peu près le même résultat pour Σz^n qu'avec $\theta = 1$. Le polygone de sommabilité, limité par la courbe $\theta^\theta |z|^{1+\theta} = |(1+\theta)z - 1|^\theta$, comprend le cercle de convergence à son intérieur et reste toujours fini. Pour

$\theta = 1, 6. \ldots$, il atteint son maximum, et dans ce cas, Σz^n est sommable (C, ∞) au point $z = -7,67. \ldots$.

2. Passons au problème de sommabilité (C) de $\Sigma \varepsilon_n u_n$, Σu_n étant supposée sommable (C). Ce problème a été posé en 1906 par Hardy qui a étendu [b] aux séries sommables $(C, 1)$ les résultats classiques de Dedekind [20] et de du Bois-Reymond [24], datant de 1871 et relatifs aux séries convergentes. Le théorème correspondant pour (C, k), $k = E(k)$, démontré par Hardy deux années plus tard [e], s'énonce ainsi :

$\sum_0^\infty u_n$ étant sommable (C, k), la série $\sum_0^\infty \varepsilon_n u_n$ l'est aussi, pourvu que l'on ait $\varepsilon_n = o(1)$ pour $n \to \infty$ et $\sum_0^\infty n^k |\Delta^{k+1} \varepsilon_n| < \infty$. La somme de $\Sigma \varepsilon_n u_n$ est égale à celle de la série absolument convergente $\sum_0^\infty \sigma_n^{(k)} \Delta^{k+1} \varepsilon_n$, où $\sigma_n^{(k)} = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(k)} u_m$.

En 1909, Bohr a démontré [a] que ce théorème subsiste si l'on suppose Σu_n seulement *bornée* (C, k), ce qui était une généralisation complète du cas classique $k = 0$. Andersen a étendu [S] ces résultats aux moyennes d'ordre positif $k \neq E(k)$, en y ajoutant que toutes les séries $\Sigma \sigma_n^{(\delta)} \Delta^{\delta+1} \varepsilon_n$ avec $k - 1 \leqq \delta \leqq k$ convergent et ont la même somme, la série $\Sigma \sigma_n^{(k)} \Delta^{k+1} \varepsilon_n$ étant absolument convergente. Il a, en outre, indiqué qu'on peut remplacer la condition $\varepsilon_n = o(1)$ par celle plus large $\varepsilon_n = O(1)$, qui entraîne en vertu de la seconde condition l'existence de la limite $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = \varepsilon$. Si $\varepsilon \neq 0$, la série $\Sigma \varepsilon_n u_n$ n'est sommable (C, k) que si Σu_n a été supposée *sommable* (C, k), et l'hypothèse que Σu_n est seulement *bornée* (C, k) ne permet d'en déduire que le même fait pour $\Sigma \varepsilon_n u_n$. Au contraire, si l'on impose à la suite $\{\varepsilon_n\}$ des conditions plus restrictives que celles énoncées plus haut, on réussit à déduire la sommabilité (C, k) de $\Sigma \varepsilon_n u_n$ sans exiger que Σu_n soit sommable ou bornée (C, k). Il suffit, par exemple, que les moyennes $s_n^{(k)}$ d'ordre k de Σu_n soient à croissance finie en $n : s_n^{(k)} = O(n^\alpha)$, $\alpha \geqq 0$. On obtient ainsi le théorème suivant (Andersen [c], Zygmund [g]) :

THÉORÈME XXVII. — *Si la suite $\{\varepsilon_n\}$ et les moyennes $s_n^{(\delta)}$ de Σu_n*

vérifient pour $\delta \geqq 0$ *les conditions*

1° $\quad \varepsilon_n = o(n^{-\alpha})$ $\qquad\qquad$ 1° $\quad \varepsilon_n = O(n^{\alpha})$

ou bien

2° $\quad s_n^{(\delta)} = O(n^{\alpha})$ $\qquad\qquad$ 2° $\left\{\begin{array}{ll} s_n^{(\delta)} = o(n^{\alpha}) & \textit{pour } \alpha > 0, \\ s_n^{(\delta)} = s + o(1) & \textit{pour } \alpha = 0, \end{array}\right.$

3° $$\sum_{1}^{\infty} n^{\delta+\alpha} \,|\, \Delta^{\delta+1} \varepsilon_n \,| < \infty \qquad (\alpha \geqq 0),$$

auxquelles il faut ajouter dans le cas $-1 < \delta < 0$ *la condition supplémentaire* $n^{\alpha+1} \Delta^{\delta+1} \varepsilon_n = O(1)$, *la suite* $\{\varepsilon_n\}$ *converge même pour* $\alpha = 0$, $\varepsilon_n \to \varepsilon$ *et toutes les transformées abéliennes d'ordres* ρ, $0 \leqq \rho \leqq \delta + 1$, *de la série* $\Sigma \varepsilon_n u_n$, *c'est-à-dire toutes les séries* $\Sigma \sigma_n^{(\rho-1)} . \Delta^{\rho} \varepsilon_n$ *sont sommables* $(C, \delta - \rho)$ *pour* $\rho \leqq \delta$ *et sont convergentes si* $\delta \leqq \rho \leqq \delta + 1$, *cette convergence étant absolue pour* $\rho = \delta + 1$. *Leurs sommes sont toutes égales entre elles, sauf la série* $\Sigma \varepsilon_n u_n (\rho = 0)$ *qui est sommable* (C, δ) *avec la somme*

$$s\varepsilon + \sum_{0}^{\infty} \sigma_n^{(\delta)} \Delta^{\delta+1} \varepsilon_n,$$

où $\varepsilon = 0$ *pour* $\alpha > 0$.

Dans ce théorème, il reste à étudier la sommabilité $(C, \delta - \rho)$ des séries $\Sigma \sigma_n^{(\rho-1)} \Delta^{\rho} \varepsilon_n$ pour $\rho > \delta$, car il est extrêmement probable que ces séries convergentes sont sommables $(C, \delta - \rho < 0)$. La condition $s_n^{(\delta)} = o(n^{\alpha})$ est satisfaite en particulier, si Σu_n est sommable $(C, \delta + \alpha)$. De même, on a $s_n^{(\delta)} = O(n^{\alpha})$, si Σu_n est bornée $(C, \delta + \alpha)$. On obtient ainsi le théorème :

Théorème XXVIII. — *La série* $\Sigma \varepsilon_n u_n$ *est sommable* (C, β), $\beta \leqq \delta$, *si* $\varepsilon_n = O(n^{\beta-\delta})$ *et* $\Sigma n^{\delta} \,|\, \Delta^{\beta+1} \varepsilon_n \,| < \infty$, *la série* Σu_n *étant sommable* (C, δ). *Si* Σu_n *est bornée* (C, δ), *on doit remplacer la condition* $\varepsilon_n = O(n^{\beta-\delta})$ *par* $\varepsilon_n = o(n^{\beta-\delta})$.

Ainsi, la sommabilité (C, δ) de Σu_n entraîne la convergence de $\Sigma \varepsilon_n u_n$, si $n^{\delta} . \varepsilon_n = O(1)$ et $\Sigma n^{\delta} . \,|\, \Delta^1 \varepsilon_n \,| < \infty$. Dans le cas $\delta = 0$ la nécessité de la condition $\Sigma \,|\, \Delta^1 \varepsilon_n \,| < \infty$ a été démontrée en 1903 par Hadamard [*b*]. Dans le cas particulier $\delta = E(\delta)$ et $\beta = E(\beta)$ du théorème XXVIII, Schur a établi [a] que les conditions suffisantes sont aussi nécessaires :

THÉORÈME XXIX. — *Les conditions nécessaires et suffisantes de sommabilité* (C, l) *de* $\Sigma\varepsilon_n u_n$ *sont pour* $l = \mathrm{E}(l)$, $k = \mathrm{E}(k) \geqq l$:

1°	$n^{k-l}\varepsilon_n = \mathrm{O}(1)$	1°	$n^{k-l}\varepsilon_n = \mathrm{o}(1)$

ou bien

2°	$s_n^{(k)} = s + \mathrm{o}(1)$,	2°	$s_n^{k} = \mathrm{O}(1)$

3° $$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\Delta^{k+1}\varepsilon_n| < \infty,$$

où $s_n^{(k)}$ *désigne la moyenne de* Σu_n. *Pour* $l > k$ *les conditions sont les mêmes que pour* $l = k$.

Il est probable que le théorème XXIX subsiste aussi pour $k \neq \mathrm{E}(k)$, $l \neq \mathrm{E}(l)$ et cette question mérite d'être étudiée. Pour $l = 0$ on a les conditions de *convergence* de $\Sigma\varepsilon_n u_n$ et 1° prend alors la forme $n^k\varepsilon_n = \mathrm{O}(1)$ et même $= \mathrm{o}(1)$, si Σu_n est supposée *sommable* (C, k).

Ces questions ont fait l'objet de nombreux travaux. Citons entre autres ceux de Carlson [12], Fekete [d], Carmichael [b], Kojima [a]. Ferrar a étudié le cas où $\varepsilon_n = f_n(x)$ et il a fait voir [b], que la sommabilité (C, δ) de $\Sigma u_n f_n(x)$ dans le théorème XXVII est *uniforme* en x, si les conditions 1° et 3° sont remplies par la suite $\{f_n(x)\}$ uniformément en x. Si $f_n(x) \to 0$ pour $n \to \infty$, alors on doit supposer en outre que $f_n(x) \to 0$ *uniformément* si l'on ne demande à Σu_n que d'être *bornee* (C, δ). Les séries intermédiaires $\Sigma\sigma_n^{(\rho-1)}\Delta^\rho f_n(x)$ sont toutes uniformément sommables (C, $\delta - \rho$) pour $\rho \leqq \delta$ et uniformément convergentes pour $\delta \leqq \rho \leqq \delta + 1$.

Les énoncés des théorèmes XXVII-XXIX peuvent être adaptés aux intégrales divergentes et sommables ou bornées (C), les conditions concernant alors une *fonction* $\varepsilon(x)$ qui remplace la suite $\{\varepsilon_n\}$.

La question étudiée est liée à celle posée par Fejér et qui concerne la limite $\lim\limits_{x=0} \Sigma u_n \varepsilon_n(x)$, où Σu_n est supposée sommable (C) et $\varepsilon_n(x) \to 1$ pour $x \to 0$ quel que soit n. Fejér a démontré [c] sous certaines conditions imposées à la suite $\{\varepsilon_n(x)\}$ que l'on a pour $\delta = 1$

$$\lim_{x=0} \sum u_n \varepsilon_n(x) = \lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)}$$

et son résultat a suscité un grand intérêt. Mais tous les résultats obtenus dans cette voie, voir entre autres ceux de Hardy [c], Moore [a], Chapman [a], Bromwich [8], Hurwitz [44], Kogbetliantz [r], se laissent déduire à présent des théorèmes précédents. Ainsi, par exemple, le théorème de Bromwich qui généralise les résultats de Fejér, Hardy, Moore et Chapman n'est qu'un cas particulier du théorème XXIX pour $l = 0$ avec cette condition supplémentaire que pour $x \to 0$ les $\varepsilon_n(x)$ doivent tendre vers l'unité *uniformément en n* et que les conditions 1° et 3° du théorème sont remplies uniformément en x. L'extension aux intégrales est immédiate quoiqu'elle n'a été publiée que pour (C, 1) par Moore et Bromwich. Les travaux cités ne se rapportent qu'aux moyennes d'ordres entiers, sauf celui de Kogbetliantz. En reprenant ses raisonnements [r] et en s'appuyant sur les théorèmes d'Andersen [S] relatifs aux différences d'ordre quelconque, on parvient à l'extension complète du théorème de Bromwich aux moyennes d'ordre positif δ quelconque :

THÉORÈME XXX. — *La série Σu_n étant sommable* (C, δ), $\delta \geqq 0$, *avec la somme* S, *la série $\Sigma u_n \varepsilon_n(x)$ converge pour $x > 0$ et sa somme tend vers* S *pour $x \to 0$, si sont remplies les conditions :*

1° $\quad n^\delta \varepsilon_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} 0$; $\qquad$ 2° $\quad \varepsilon_n(x) \underset{x \to 0}{\to} 1$;

3° $$\sum_1^\infty n^\delta |\Delta^{\delta+1} \varepsilon_n(x)| < G,$$

G *étant indépendant de x et* 1° *et* 2° *étant remplies uniformément par rapport à x et n respectivement.* Soit $\varepsilon_n = \varphi(nx)$, $\varphi(x)$ étant continue et bornée. Ces conditions se transforment en

$$x^\delta \varphi(x) \underset{x \to \infty}{\to} 0 \,; \qquad \varphi(0) = 1 \,; \qquad \int_0^\infty t^\delta |\varphi^{(\delta+1)}(t)| \, dt < G,$$

dont la dernière est valable *a fortiori* pour $\delta < \delta_0$, si elle l'est pour $\delta = \delta_0$. En posant $\varphi(x) = x^{-p} \sin^p x$, $p = \mathrm{E}(p)$, on voit que ces conditions sont remplies pour $\delta < p - 1$ et l'on a le résultat (Kogbetliantz [r]) :

— *Σu_n étant sommable* (C, δ) *avec la somme s, on a pour* $p = \mathrm{E}(p) > \delta + 1$

$$\lim_{v=0} \sum_{n=0}^\infty u_n \left(\frac{\sin nx}{nx}\right)^p = \lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = s.$$

Rajchman et Zygmund ont montré [80] que ce résultat subsiste aussi pour $p = \delta + 1$ ($\delta = \mathrm{E}[\delta]$), pourvu que le paramètre x reste dans un certain ensemble de points $\mathcal{E}$, pour lequel le point $x = 0$ est un point de densité, c'est-à-dire mes $\mathcal{E}_\alpha = \alpha + o(\alpha)$ pour $\alpha \to 0$, $\mathcal{E}_\alpha$ désignant la partie de $\mathcal{E}$ située dans l'intervalle $(0, \alpha)$.

3. En 1901, Woronoj a fait voir [97] que pour les suites s_n à croissance finie le procédé (C, δ) est équivalent à tout procédé (Φ, δ) défini par

$$(\Phi, \delta) - \lim_{n=\infty} \text{gén.}\, s_n = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\Phi(n)} \sum_0^n \Phi(n-m)\, u_m = \lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)},$$

$\Phi(x)$ étant positive et monotone, $\Phi(x) \to \infty$ pour $x \to \infty$, pourvu que la limite $\lim\limits_{n=\infty} n^{-(\delta+1)} \sum\limits_0^n \Phi(m)$ existe et soit finie. Dans ces conditions la somme généralisée — (Φ, s) est indépendante de la fonction particulière $\Phi(x)$ employée. Pour $\Phi(x) = x^\delta$ on a la suite $\{C_n^{(\delta)}\}$, où

$$C_n^{(\delta)} = \sum_{m<n} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^\delta u_m$$

et $\lim\limits_{n=\infty} C_n^{(\delta)} = \lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta)}$, si l'un des deux membres existe. Le procédé (x^δ, δ) est un des procédés de Riesz [e], connus sous le nom des *moyennes typiques* et définis par rapport à une suite réelle, positive et monotone $\{\lambda_n\}$, telle que $\lambda_n \to \infty$ pour $n \to \infty$. La moyenne typique de Riesz du type λ et de l'ordre δ — $C_\lambda^{(\delta)}(\omega)$ — est une fonction de la variable *continue* ω. Elle est définie ainsi

$$C_\lambda^{(\delta)}(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\omega}\right)^\delta u_n$$

et Σu_n est dite sommable (R, λ, δ) avec la somme s, si l'on a

$$\lim_{\omega=\infty} C_\lambda^{(\delta)}(\omega) = s.$$

Les moyennes arithmétiques correspondent au type $\lambda_n \equiv n$ et les procédés (C, δ) et (R, n, δ) sont équivalents, ce qui est le résultat de Woronoj, retrouvé par Riesz [g]. Grâce à l'introduction de la variable continue ω les moyennes typiques sont plus maniables que les moyennes ordinaires. On a par exemple l'expression intégrale (Riesz [f]) suivante

$$C_l^{(\delta)}(\omega) = \omega^{-\delta}\,\Gamma(\delta+1)\,D^{-\delta}[C_\lambda(\omega)] = \delta.\omega^{-\delta}\int_0^\omega (\omega-u)^{\delta-1}\,C_l(x)\,du,$$

où la fonction $C_l(u)$ est une fonction à paliers définie par $C_\lambda(u) = s_n$ pour $\lambda_n \leqq u < \lambda_{n+1}$ et $C_\lambda(u) = 0$ pour $u < \lambda_0$. Ces définitions rattachent les moyennes du type λ aux séries de Dirichlet du même type $\Sigma a_n e^{-l_n s}$, celles du type $\lambda_n \equiv n$, par exemple, étant apparentées aux séries entières en $x = e^{-s}$. C'est pourquoi les moyennes typiques sont très utiles dans la theorie des séries de Dirichlet. Cette application des procédés (R, λ, δ) est exposée dans le fascicule XVII de ce Mémorial, rédigé par M. G. Valiron, ainsi que dans le fascicule N 18 des *Cambridge Tracts* par G. H. Hardy et M. Riesz, cité dans ce qui suit comme [H.-R.]. Nous nous bornerons par conséquent à la théorie du procédé (R, λ, δ). Cette théorie pour un type λ fixe est en tous points analogue à celle du procédé (C, δ), sauf en ceci que le cas de δ négatif, $-1 < \delta < 0$, n'a pas encore été étudié.

Le procedé (R, λ, δ) est régulier si la suite λ_n croît assez régulièrement (H.-R.). Tel est le cas $\lambda_n = \lambda(n)$, $\lambda(x)$ étant une fonction L.-E., c'est-à-dire une combinaison d'exponentielles et logarithmes en nombre fini. Sa puissance augmente avec δ. Le développement de la moyenne simple d'ordre $\delta + \gamma$ suivant les moyennes doubles d'ordres (δ, γ) est identique à celui (10), Chapitre II, pour (C, δ). Le développement inverse n'en diffère que très peu (Kogbetliantz [e, q]) :

$$C_l^{(\delta,\gamma)}(\omega) = \delta\gamma\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\delta)\,\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\delta+\gamma+1)}\,C_l^{(\delta+\gamma+n)}(\omega).$$

On en tire la conclusion que le procédé itéré est équivalent au procédé simple : (R, λ, δ). $(R, \lambda, \gamma) \sim (R, \lambda, \delta+\gamma)$ et en particulier $(R, \lambda, 1)^k \sim (R, \lambda, k)$, ce qui est une généralisation du théorème d'équivalence Holder-Cesaro.

La finesse du procédé (R, λ, δ) est caractérisée par le théorème suivant (Hardy [f, j] ; Rau K. Ananda [a]) :

THÉOREME XXXI. — *Une série Σu_n avec $\lambda_n u_n = O(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ ne peut être sommable* (R, λ) *sans être convergente.*

Pour $\lambda_n \equiv n$ on a $nu_n = O(1)$ et (C, δ). Ainsi la série $\sum_1^\infty n^{-1-it}$, $t \neq 0$, n'est pas sommable (C), mais elle est sommable (R, $\log n$, ε) quelque petit que soit $\varepsilon > 0$. A son tour (R, $\log n$) n'est pas assez fin pour compenser les oscillations de la suite des sommes partielles de $\Sigma n^{-1}(\log n)^{-1-it}$, $t \neq 0$, qui est du type $\lambda_n u_n = O(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ avec $\lambda_n = \log n$ et $n \log n\, u_n = O(1)$, donc non sommable (R, $\log n$). Néanmoins cette série est sommable (R, $\log\log n$, ε) pour tout $\varepsilon > 0$ et ainsi de suite (Hardy [f]). La finesse et la puissance du procédé (R, λ) augmentent avec la diminution de la rapidité de croissance de la suite $\{\lambda_n\}$.

La sommabilité (R, λ) de Σu_n n'entraîne pas en général l'existence de la limite d'Abel correspondante $\lim\limits_{s \to 0} \Sigma u_n e^{-\lambda_n s}$, car l'abscisse de sommabilité (R, λ, δ) d'une série de Dirichlet — désignons cette abscisse par σ_δ — est une fonction *décroissante* de δ et la sommabilité (R, λ) de Σu_n n'entraîne pas la convergence de $\Sigma u_n e^{-\lambda_n s}$ pour $\sigma > 0$ $(s = \sigma + it)$. Mais dans le cas particulier $\lambda_n \equiv n + 1$ (séries entières) tous les demi-plans de sommabilité (R, λ, δ) coïncident quel que soit δ. Tout ce qu'on peut dire dans le cas général, c'est que la sommabilité (R, λ, δ) de $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s_0}$ avec la somme A entraîne celle de $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ pour $\sigma > \sigma_0$ et que la somme généralisée —(R, λ, δ) de la dernière série tend vers A, si $s \to s_0$ dans le domaine angulaire $|s - s_0| \leqq H|\sigma - \sigma_0|$, H étant une constante arbitraire fixe. Quant à la sommabilité sur la droite $\sigma = \sigma_\delta$ elle-même, le meilleur résultat connu est celui de Walficz [94] : $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ est sommable (R, λ, δ) au point $s_0 = \sigma_\delta + it_0$ de la droite $\sigma = \sigma_\delta$, si $f(s)$ satisfait au voisinage de s_0 à la condition (Lipschitz) : $f(s) = f(s_0) + O[|s - s_0|^\varepsilon]$ quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, la sommabitité étant uniforme sur tout segment fini de la droite $\sigma = \sigma_\delta$, si cette condition y est remplie uniformément en t.

Dans le cas particulier où $\{\lambda_n\}$ satisfait à la condition

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = o(\lambda_n)$$

Littlewood a démontré [59] (*voir* aussi Landau [c]) qu'une série Σu_n converge si la limite d'Abel $\lim\limits_{s \to 0} \Sigma u_n e^{-\lambda_n s}$ existe et si l'on a

$$\lambda_n u_n = O(\lambda_n - \lambda_{n-1}).$$

L'hypothèse $\lambda_n u_n = o(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ jointe à $\lim\limits_{s \to 0} \Sigma u_n e^{-\lambda_n s}$ donne la même conclusion quel que soit la suite $\{\lambda_n\}$, (Landau [a]). Enfin Schnee a établi [b] le théorème :

Théorème XXXII. — *Les conditions nécessaires et suffisantes de convergence de Σa_n sont :*

$$1^\circ \quad \lim_{s \to 0} \sum a_n e^{-\lambda_n s} = A \qquad et \qquad 2^\circ \quad \sum_0^n \lambda_m a_m = o(\lambda_n),$$

quel que soit la suite monotone $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \to \infty$.

Tout récemment Rau K. Amanda a prouvé [b] que la condition $\lambda_n - \lambda_{n-1} = o(\lambda_n)$ dans le théorème de Littlewood est superflue et que le théorème XXXII subsiste, quand on remplace 2° par

$$\lambda_m a_m = O(\lambda_m - \lambda_{m-1}).$$

La sommabilité (R, λ, δ) de Σu_n avec la somme s entraîne

$$s_n - s = o\left[\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\right)^\delta\right],$$

d'où l'on déduit la condition nécessaire : $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^\delta u_n = o(\lambda_{n+1}^\delta)$ qui généralise évidemment celle $u_n = o(n^\delta)$ de sommabilité (C, δ). Le procédé (R, λ) devient moins puissant quand la rapidité de croissance de la suite $\{\lambda_n\}$ augmente et pour $\lambda_{n+1} = O(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ le procédé (R, λ) cesse d'être effectivement un procédé de sommation puisque alors toute série sommable (R, λ) converge nécessairement. En effet, on a (H.-R.) pour une série sommable (R, λ, δ) avec la somme s et $0 \leqq \gamma \leqq \delta$:

$$C_\lambda^{(\gamma)}(\omega) - s = o\left[\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\right)^{\delta - \gamma}\right], \quad (\lambda_n < \omega \leqq \lambda_{n+1}),$$

d'où en particulier pour $\omega = \lambda_{n+1}$, $\lambda_{n+1} = O(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ et $\gamma = 0$: $s_n = s + o(1)$, c'est-à-dire $s_n \to s$ pour $n \to \infty$. Ainsi, par exemple, si l'on a

$$\lim_{n = \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = k > 1$$

alors $\lambda_{n+1} = O(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ et le procédé (R, λ) ne peut sommer que les séries convergentes. Tel est le cas de $\lambda_n = e^n$. Citons encore un théorème dû à Riesz [l] et analogue au théorème VI :

Théorème XXXIII. — *Une série sommable* (R, λ) *et bornée* (R, λ, α), $\alpha \geqq 0$, *est sommable* (R, λ, δ) *pour tout* $\delta > \sigma$.

4. La multiplication de deux séries de Dirichlet $\Sigma a_m e^{-\lambda_m s}$ et $\Sigma b_n e^{-\mu_n s}$ de types λ et μ conduit à une série $\Sigma c_p e^{-\nu_p s}$ d'un type nouveau ν défini par la suite $\{\nu_p\}$, les $\nu_p = \lambda_m + \mu_n$ étant rangés par ordre croissant. Par conséquent la somme $\Sigma a_m b_n = c_p$ est étendue a toutes les valeurs de m, n compatibles avec la condition $\lambda_m + \mu_n = \nu_p$. En posant $s = 0$, on definit ainsi la serie-produit Σc_p du type (λ, μ) des Σa_m et Σb_n. La multiplication ordinaire correspond au type $\lambda_m \equiv m$ et $\mu_n \equiv n$. Un autre cas particulier important est $\lambda_m = \log m$, $\mu_n = \log n$, donnant aussi $\nu_p = \log p$. La convergence des séries facteurs n'assure pas celle de la série-produit Σc_p, mais elle est toujours sommable $(R, \nu, 1)$. On a le théorème général suivant :

Théorème XXXIV. — *Les séries* Σa_m *et* Σb_n *étant sommables avec les sommes* A, B *respectivement* (R, λ, α) *et* (R, μ, β), *leur produit du type* (λ, μ) Σc_p *est sommable* $(R, \nu, \alpha + \beta + 1)$ *avec la somme* AB.

Si l'on veut assurer la convergence de Σc_p étant donnée celle des séries-facteurs, il suffit de supposer que l'on a $\lambda_m a_m = O(\lambda_m - \lambda_{m-1})$ et $\mu_n b_n = O(\mu_n - \mu_{n-1})$ (*voir* Hardy [d, h] et Rosenblatt [84]). Il semble que ces conditions sont surabondantes et qu'elles doivent assurer non seulement la convergence de Σc_p mais aussi sa sommabilité $(R, \nu, \varepsilon - 1)$ pour tout $\varepsilon > 0$, mais la question n'a pas été étudiée. Si l'on n'impose aucune restriction aux séries-facteurs sauf qu'elles sont convergentes, on conclut la convergence de $\Sigma c_p e^{-\nu_p s}$ pour $\sigma \geqq \sigma_0 > 0$ suffisamment grand. Ainsi Stieltjes a démontré [89] que les séries Σa_m et Σb_n étant convergentes la serie $\Sigma c_p . e^{-s \log p}$, ou Σc_p est leur produit du type $(\log n, \log n)$, converge uniformement sur tout segment fini de la droite $s = \frac{1}{2} + it$. Ce resultat se laisse généraliser.

Supposons Σa_m et Σb_n sommables (C, α) et (C, β). Alors $\Sigma a_m m^{-\frac{1}{2}}$ et $\Sigma b_n n^{-\frac{1}{2}}$ sont sommables $\left(C, \alpha - \frac{1}{2}\right)$ et $\left(C, \beta - \frac{1}{2}\right)$, donc *a fortiori* sommables $\left(R, \log n, \alpha - \frac{1}{2}\right)$ et $\left(R, \log n, \beta - \frac{1}{2}\right)$ puisque $(R, \log n) \succ (R, n)$ et que $(R, n) \sim (C)$. Le produit de ces deux dernières séries, produit du type $(\log n, \log n)$, est la série $\Sigma c_p p^{-\frac{1}{2}}$, où $c_p = \Sigma a_d b_d$ la sommation étant étendue à tous les diviseurs d du nombre $p = dd'$. D'après le théorème XXXIV $\Sigma c_p p^{-\frac{1}{2}}$ est sommable $(R, \log n, \alpha + \beta)$. Or, on a le théorème [H.-R] :

THÉORÈME XXXV. — *La série* Σu_n *étant sommable* (R, λ, δ), *la série* $\Sigma u_n \lambda_n^{-\delta}$ *est sommable* (R, e^λ, δ).

Ce théorème généralise le résultat bien connu que $\Sigma u_n n^{-\delta}$ converge, si Σu_n est sommable (C, δ), car pour $\lambda_n \equiv n$ d'une part (R, e^n, δ) est équivalent à la convergence et d'autre part

$$(R, n, \delta) \sim (C, \delta)$$

En appliquant le théorème XXXV à la série $\Sigma c_p p^{-\frac{1}{2}}$, sommable $(R, \log n, \alpha + \beta)$, on déduit la sommabilité $(C, \alpha + \beta)$ de la série $\Sigma c_p p^{-\frac{1}{2}} (\log p)^{-\alpha-\beta}$, ce qui se réduit pour $\alpha = \beta = 0$ au résultat de Stieltjes. On en conclut encore la convergence de la série $\Sigma c_p p^{-\frac{1}{2}} (p \log p)^{-\alpha-\beta}$, etant données les sommabilités (C, α) et (C, β) de Σa_m et Σb_n. Si l'on forme le produit ordinaire de Σa_m et Σb_n à savoir Σw_n, ou $w_n = \sum_0^n a_k b_{n-k}$, on trouve qu'il est sommable $(C, \alpha + \beta + 1)$, donc la série $\Sigma w_n n^{-\alpha-\beta-1}$ converge. En comparant ce résultat avec le résultat précédent, on s'aperçoit que les mêmes hypothèses sur les séries-facteurs, sommables (C, α) et (C, β), entraînent des conséquences différentes suivant le type de la série-produit. Dans le cas considéré par exemple, on doit diviser le terme général de la série-produit soit par $n^{\alpha+\beta+1}$, soit par $n^{\alpha+\beta+\frac{1}{2}} (\log n)^{\alpha+\beta}$ pour la convertir en une série convergente, suivant le type de la multiplication employée.

La sommabilité absolue $|R, \lambda, \delta|$ est définie ainsi (Obrechkoff, [c]) : — Σu_n *est sommable* $|R, \lambda, \delta|$, *si l'intégrale*

$$\int_h^\infty \left| \frac{d}{d\omega} \left[C_\lambda^{(\delta)}(\omega) \right] \right| d\omega = \int_h^\infty \left| \tau_\lambda^{(\delta)}(\omega) \right| \frac{d\omega}{\omega}$$

est convergente, où $\tau_\lambda^{(\delta)}(\omega)$ est la moyenne typique d'ordre δ de la suite de Kronecker $\{\lambda_n u_n\}$, formée relativement à la suite $\{\lambda_n\}$. On a (Obrechkoff [d]) un théorème analogue au théorème XI :

THÉORÈME XXXVI. — *La série-produit du type* (λ, μ) *des séries* Σa_m *et* Σb_n, *sommables* (R, λ, α) *et* $|R, \mu, \beta|$ *respectivement, est sommable* $(R, \nu, \alpha+\beta)$, *si l'une de deux séries-facteurs est absolument sommable.*

Nous avons démontré un autre théorème sur la multiplication des séries absolument sommables (R, λ), analogue au théorème XI :

THÉOREME XXXVII. — *Le produit* Σc_p *du type* (λ, μ) *des séries* Σa_m *et* Σb_n *est sommable* $|R, \nu, \alpha+\beta|$, *si les séries-facteurs sont sommables* $|R, \lambda, \alpha|$ *et* $|R, \mu, \beta|$ *respectivement.*

La démonstration est basée sur la relation suivante

$$C_\lambda^{(\delta-1)}(\omega) = C_\lambda^{(\delta)}(\omega) + \frac{\omega}{\delta}\,\frac{d\,C_\lambda^{(\delta)}(\omega)}{d\omega},$$

et elle se réduit, en fin de compte, à l'existence de l'intégrale

$$\int_h^\infty \frac{d\omega}{\omega^{\alpha+\beta}} \int_h^\omega (\omega-\tau)^\alpha \tau^\beta |f(\omega-\tau)|\,|\varphi(\tau)|\,d\tau \qquad \begin{pmatrix}\alpha \geqq 0\\ \beta \geqq 0\end{pmatrix},$$

étant donné celle des intégrales

$$\int_h^\infty |f(\tau)|\,d\tau \quad \text{et} \quad \int_h^\infty |\varphi(\tau)|\,d\tau.$$

Soient σ_δ et $\overline{\sigma}_\delta$ les abscisses de sommabilités (R, λ, δ) et $|R, \lambda, \delta|$ d'une série de Dirichlet $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$. On a, comme on sait, $f(s) = o(|t|^{\delta+1})$ pour $\sigma \geqq \sigma_\delta + \varepsilon > \sigma_\delta$ tandis que pour $\sigma \geqq \overline{\sigma}_\delta + \varepsilon > \overline{\sigma}_\delta$ on a $f(s) = O(|t|^\delta)$. Les abscisses σ_δ et $\overline{\sigma}_\delta$ sont données, si elles sont positives, par les formules

$$\sigma_\delta = \overline{\lim_{\omega=\infty}}\, \frac{1}{\omega} \log|A_\lambda^{(\delta)}(\omega)| \qquad \text{et} \qquad \overline{\sigma}_\delta = \overline{\lim_{\omega=\infty}}\, \frac{1}{\omega} \log \int_h^\omega |\tau_\lambda^{(\delta)}(\omega)|\,\frac{d\omega}{\omega},$$

où $A_\lambda^{(\delta)}(\omega)$ et $\tau_\lambda^{(\delta)}(\omega)$ désignent les moyennes d'ordre δ de la *série* Σa_n et de la *suite* $\{\lambda_n a_n\}$ respectivement.

Sans insister davantage sur les analogies entre (R, λ, δ) et (C, δ) passons à l'étude des propriétés de (R, λ) relatives à la croissance de la suite $\{\lambda_n\}$. Hardy a démontré [k] que (R, λ, δ) entraîne (R, μ, δ) du même ordre $\delta\,(\delta \geqq 0)$ et d'un autre type μ, si $\mu(\lambda)$ est une fonction L.-E. de $\lambda(x)$ croissant indéfiniment avec λ et satisfaisant à la condition $\mu(\lambda) = o(\lambda^\Delta)$, où $\Delta > 0$ est quelconque mais fixe. On a évidemment $\lambda_n = \lambda(n)$ et $\mu_n = \mu(n)$. Si non seulement $\mu = o(\lambda^\Delta)$ mais aussi $\lambda^d = o(\mu)$, d étant fixe et positif ($d < \Delta$), les procédés (R, λ, δ) et (R, μ, δ) sont équivalents. Si l'on veut que (R, μ, δ) soit effectivement plus puissant que (R, λ, δ), $\mu(\lambda)$ doit satisfaire à la condition $\mu = o(\lambda^\varepsilon)$ pour tout ε positif.

Cette importante propriété des moyennes typiques, signalée en 1909 par Hardy [f] dans le cas $\delta = 1$, a été étudiée de plus près par Zygmund. Il a établi [e] que sous l'hypothèse $1 \prec \mu(\lambda) \prec \lambda^\varepsilon$, ce qui veut dire que la fonction $\mu(\lambda)$ tend vers $+\infty$ avec $\lambda \to \infty$, mais $\mu = o(\lambda^\varepsilon)$, la sommabilité (R, λ, δ) n'est point nécessaire pour assurer celle (R, μ, δ) de Σu_n :

Théorème XXXVIII. — *Une série sommable* (R, λ) *et bornée* (R, λ, δ) *est sommable* (R, μ, δ) *pourvu que* $\mu(\lambda)$ *vérifie la condition* $1 \prec \mu \prec \lambda^\varepsilon$ *quelque petit que soit* Σ *positif.*

La sommabilité (R, μ, δ) subsiste même si la moyenne $C_\lambda^{(\delta)}(\omega)$ ne reste pas bornée pourvu qu'elle ne croisse pas trop vite en valeur absolue. Le choix de la fonction sommatrice $\mu(x)$ est déterminé dans ce cas par la loi de croissance de la moyenne $C_\lambda^{(\delta)}(\omega)$. Si $f(\omega)$ est une fonction positive L.-E. croissante indéfiniment avec ω, on a le théorème suivant (Zygmund [e]) :

Théorème XXXIX. — *Une série sommable* (R, λ) *et dont la moyenne d'ordre* δ *vérifie la condition* $C_\lambda^{(\delta)}(\omega) = o[(\psi(\omega))^\delta]$ *est sommable* (R, μ, δ), *la suite* $\{\mu_n\}$ *étant* $\mu_n = \mu(n)$, *où*

$$\log \mu(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{u\,\psi(u)}. \tag{15}$$

La rapidité de croissance de $\psi(u)$ est limitée par la condition : $\log \mu(x) \to \infty$ avec $x \to \infty$. Ainsi, le cas $\psi(u) = \log u . \log_2 u \ldots . \log_m u$ étant admissible, on a (Zygmund [i]) :

Une série sommable (R, λ) *est sommable* (R, $\log_m \lambda$, δ) *si l'on a*

$$C_\lambda^{(\delta)}(\omega) = o(\log^\delta \omega \log_2^\delta \omega \ldots \log_m^\delta \omega).$$

Pour $\lambda_n = n$ et $m = 1$ on a en particulier : *une série sommable* (C) *est sommable* (R, $\log n$, δ), *si* $S_n^{(\delta)} = o(\log^\delta n)$.

Au contraire, une série sommable (R, λ, δ), dont la moyenne typique tend trop rapidement vers sa limite S, peut être sommée par un procédé (R, μ, δ) moins puissant que (R, λ, δ) (Zygmund [e]) :

Théorème XL. — *Soit* $\psi(x)$ *une fonction* L.-E. *décroissante*, $\psi(x) \to 0$ *pour* $\psi \to \infty$. *Si pour une série sommable* (R, λ, δ) *avec la somme* s *on a*

$$C_\lambda^{(\delta)}(\omega) = s + o[\psi^\delta(\omega)],$$

cette série est sommable (R, μ, δ), *où* $\mu(x)$ *est donnée par la formule* (15), *pourvu que* $x\psi(x) \to \infty$ *avec* $x \to \infty$, *si* $0 < \delta \leq 1$ et $\sqrt[\delta]{x}\psi(x) \to \infty$, *si* $\delta > 1$.

Ces résultats permettent de faire correspondre à toute condition $a_n = o[\chi(n)]$, où $\chi(n)$ est une fonction L.-E., un procédé de sommation par les moyennes typiques (R, μ, δ) tel que la série $\Sigma a_n z^n$ soit sommable (R, μ, δ) en tout point régulier de son cercle de convergence $|z| = 1$. Plus précisément (Zygmund [h]) :

Théorème XLI. — *La condition nécessaire et suffisante de sommabilité* (R, μ, α) *de* $\Sigma a_n z^n$ *aux points réguliers du cercle de convergence* $|z| = 1$, $\mu(x)$ *étant donnée par* (15), *est*

$$a_n = o[n^\alpha \psi^\alpha(n)],$$

où $\psi(x)$ *est une fonction* L.-E. *Si* $\psi(x) \to \infty$, *l'intégrale dans* (15) *doit diverger; si* $\psi(x) \to 0$, *avec* $x \to \infty$, *le produit* $x\psi(x)$ *ou* $\sqrt[\alpha]{x}\psi(x)$, *suivant que* $\alpha \leq 1$ *ou* $\alpha > 1$, *doit tendre vers* $+\infty$.

On peut attacher à une série de Dirichlet $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ non seulement les moyennes du type $\{\lambda_n\}$ mais aussi celles du type $\{e^{\lambda_n}\}$. On les désigne quelquefois comme moyennes typiques du deuxième genre. Pour les séries entières ($\lambda_n \equiv n$) ces moyennes (R, e^n) sont équivalentes, quel que soit leur ordre δ, aux sommes partielles, le procédé (R, e^n) étant équivalent à la convergence, tandis que les moyennes typiques du premier genre sont celles de Cesàro. Ainsi pour $\lambda_n = n$ les demi-plans de sommabilités (R, e^n) et (R, n) coïncident. C'est un cas particulier du théorème général suivant [H.-R.] :

Théorème XLII. — *Pour une série de Dirichlet les demi-plans* *de sommabilité par les moyennes de premier et de deuxième genre sont les mêmes, pourvu qu'elles soient du même ordre.*

Il est évident qu'ils sont les mêmes aussi pour toutes les moyennes (R, μ) des types intermédiaires, la fonction L.-E. $\mu(\lambda)$ satisfaisant aux conditions $e^\lambda \succ \mu(\lambda) \succ \lambda$. Il serait intéressant d'étudier les demi-plans de sommabilité (R, μ) pour $\mu \prec \lambda$ et pour $\mu \succ e^\lambda$. Sur la frontière $\sigma = \sigma_\delta$ du demi-plan de sommabilité (R, λ) ou (R, e^λ) d'ordre δ le procédé (R, λ) l'emporte sur celui (R, e^λ), ce qui a été signalé déjà en 1909 par Riesz [e]. Ainsi, envisageons la série Σu_n avec

$$u_n = (-1)^n n^\alpha e^{-i\log\log n} \qquad (\alpha > 0).$$

sommable $(R, \log\log n, \delta)$ partout pour $\delta > \alpha$ et non sommable nulle part $(R, \log\log n, \delta)$, si $\delta < \alpha$. Ainsi $\sigma_\delta = +\infty$ pour $\delta < \alpha$ et $\sigma_\delta = -\infty$ pour $\delta > \alpha$. Or, pour $\delta = \alpha$ la série possède un demi-plan de sommabilité $(R, \log\log n, \alpha)$ puisque $\sigma_\alpha = -\alpha$. Cela veut dire qu'elle est sommable $(R, \log\log n, \alpha)$ ainsi que $(R, \log n, \alpha)$ pour $\sigma > -\alpha$ et non sommable pour $\sigma < -\alpha$. Sur la ligne $\sigma = \sigma_\alpha = -\alpha$ elle-même, la série se réduit à ΣV_n avec

$$V_n = (-1)^n n^\alpha \log^{-\alpha} n . e^{-it\log\log n}$$

et elle n'y est plus sommable $(R, \log n, \alpha)$ par les moyennes du deuxième genre, tout en étant sommable $(R, \log\log n, \alpha)$ par celles de premier genre [H.-R.]. Mais il suffit de diviser son terme général par $\lambda_n^\alpha = (\log\log n)^\alpha$ pour la convertir (th. XXXV) en une série sommable $(R, \log n, \alpha)$.

L'extension du procédé (R, λ) aux intégrales est immédiate (Riesz [f], Hardy [g]). Ainsi

$$(R, \lambda, \delta) - \lim_{\omega=\infty} \text{gén.} \int_a^\omega f(x)\,dx$$
$$= \lim_{\omega=\infty} \int_a^\omega f(t)\left[1 - \frac{\lambda(t)}{\lambda(\omega)}\right]^\delta dt = \lim_{\omega=\infty} \frac{\delta}{\omega^\delta} \int_a^\omega (\omega - t)^{\delta-1} F[\gamma(t)]\,dt,$$

où $u = \gamma(t)$ est la fonction inverse de $t = \lambda(u)$ et $F(x)$ est l'intégrale définie de $f(t)$ prise de a à x. Pour donner un exemple, considérons l'intégrale divergente correspondant à

$$f(x) = ix^{-1-i\alpha} \qquad (\alpha \neq 0),$$

où $a = 1$. Le procédé (C, δ) conduit à étudiér la limite pour $\log\omega = T \to \infty$ de l'expression

$$\int_1^{\omega} \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^{\delta} \frac{dx}{x^{1+i\alpha}} = \int_0^{1} e^{-i\alpha u}\left(1 - \frac{e^u}{e^T}\right)^{\delta} du.$$

Or, l'intégrale de $e^{-i\alpha u}du$ prise de zéro à l'infini étant divergente, le second membre ne peut pas tendre vers une limite déterminée puisque (R, e^n) ne peut sommer que les intégrales convergentes. Par conséquent, l'integrale proposée n'est pas sommable (C). Appliquons $(R, \log n)$, donc $t = \log u$ et $u = \gamma(t) = e^t$. Ainsi

$$(R, \log n, \delta) \to \int_1^{\infty} \frac{i\, dx}{x^{1+i\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{\omega=\infty} \frac{\delta}{\omega^{\delta}} \int_0^{\omega} (\omega - t)^{\delta - 1}(1 - e^{-i\alpha t})\, dt = \frac{1}{\alpha},$$

car la limite généralisée (C, δ) de la fonction $e^{-i\alpha t}$, $\alpha \neq 0$, pour $t \to \infty$ est nulle quel que soit $\delta > 0$.

CHAPITRE V.

Applications des moyennes arithmétiques et typiques.

1. Soit une famille (F) des fonctions holomorphes et bornées pour $|x| < 1 : |f(x)| \leqq 1$. Le fait que $f(x)$ appartient a (F) ne suffit pas pour que les sommes partielles $s_n(x)$ de sa série de Taylor soient bornées sur le cercle $x = e^{i\varphi}$ (Fejér, [g]). La borne supérieure pour $|s_n(e^{i\varphi})|$, donnée par Landau [f], est atteinte pour une fonction $f_n(x)$ de la famille (F), définie par $S_n(x) f_n(x) = x^n\, S_n\left(\frac{1}{x}\right)$, ou $S_n(x)$ est la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Taylor de $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$. Cette borne G_n croît avec n comme $\log n$: $\pi G_n = \log n + o(\log n)$. Au contraire, Andersen a montre [S] que quelque petit que soit δ positif la condition $s_n^{\delta}(e^{i\varphi}) = O(1)$ est nécessaire et suffisante pour avoir $f(x) = O(1)$ pour $|x| < 1$. La borne supérieure $h(\delta)$ pour $|s_n^{\delta}(e^{i\varphi})|$ existe, si $f(x) = O(1)$ pour $|x| < 1$, mais dans l'inégalité

$$|s_n^{(\delta)}(e^{i\varphi})| \leqq h(\delta)$$

la fonction positive $k(\delta)$ augmente indéfiniment quand δ tend vers zéro. Si $\delta = 1$, l'inégalité $|s_n^{1}(e^{i\varphi})| \leqq 1$ est une condition nécessaire et suffisante (Landau [L]) pour que $f(x)$ appartienne à (F), sa borne étant l'unité : $|f(x)| \leqq 1$, pour $|x| < 1$. *A fortiori* $|s_n^{(\delta)}(e^{i\varphi})| \leqq 1$ est une condition suffisante de $|f(x)| \leqq 1$ quelque petit que soit $\delta > 0$. Il serait intéressant d'étudier si le fait que $f(x)$ est de classe (F) entraîne $|s_n^{(\delta)}(e^{i\varphi})| \leqq 1$ dès que $\delta > \delta_0$, δ_0 étant inférieur à un. L'existence du phénomène de Gibbs pour $0 < \delta < \delta_1 = 0,43955\ldots$ (Gronwall [*f*]), ce phénomène disparaissant pour $\delta > \delta_1$, paraît indiquer que peut-être $\delta_0 = \delta_1$.

2. On sait que la série trigonométrique de Fourier d'une fonction $f(x)$ sommable ($\mathcal{L}$)

(1) $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\left[\pi(a_n + ib_n) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, e^{int}\, dt\right]$$

diverge en général, même si $f(x)$ est continue dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Posons, pour x fixe, $\varphi(t) = f(x+t) - 2A + f(x-t)$, A étant une fonction de x égale à $f(x)$ aux points de continuité de $f(x)$. On a formulé de différentes conditions suffisantes de sommabilité (C, δ) de la série (1) en un point fixe x avec la somme A.

La première concerne la sommabilité (C, δ) de $\varphi(t)$ au point $t = 0$. Elle s'énonce $\varphi_\alpha(h) = o(1)$ pour $h \to 0$, où

$$\varphi_\alpha(h) = \alpha h^{-\alpha} \int_0^h \varphi(t)(h-t)^{\alpha-1}\, dt \qquad (\alpha > 0)$$

et $\varphi_0(h) \equiv \varphi(h)$. On dit que $\varphi(t)$ est continue en moyenne (mean continuity) d'ordre α au point $t = 0$, si $\varphi_\alpha(t) \to \varphi(+0)$ avec $t \to 0$. Le résultat fondamental de Fejér (1900, [*a*]) : $\varphi_0(h) = o(1)$ entraîne (C, 1) de la série (1) avec la somme A, a suscité un nombre considérable de travaux. Ayant démontré en 1905 que $\varphi_1(h) = o(1)$ entraîne (C, 2) de (1), Lebesgue [*a*, *b*] introduit une nouvelle condition

$$\Phi^*(h) = \frac{1}{h} \int_0^h |\varphi(t)|\, dt = o(1) \qquad (h \to 0)$$

plus large que $\varphi(h) = o(1)$ et qui assure néanmoins (C, 1) de (1) et cela presque partout dans $(0, 2\pi)$ car $\Phi^*(h) = o(1)$ presque partout si $f(x)$ est intégrable ($\mathcal{L}$). Signalons une démonstration vraiment élégante de ce théorème, due à Fejér [k]. Or, la série-noyau de (1)

$$(2)\qquad 0 \sim \frac{1}{2} + \cos\gamma + \cos 2\gamma + \ldots + \cos n\gamma + \ldots \qquad (0 < \gamma < 2\pi),$$

dont les moyennes de premier ordre ne sont jamais négatives (Féjer), est sommable (C, δ) avec une somme nulle pour $\gamma \neq 0, 2\pi$ pour tout $\delta > 0$, ce qui permet à Chapman [c], Riesz [l], Gronwall [a] et Young [b] de démontrer presque simultanément en 1911 que $\varphi_0(h) = o(1)$ assure (C, δ) de (1) déjà pour $\delta > 0$. De même (Hardy [o]) $\Phi^*(h) = o(1)$ entraîne (C, δ) de (1) pour $\delta > 0$. En 1913 Noaillon remplace [68] cette condition par celle $\Phi^*(h) = O(1)$ et prouve que $\varphi_1(h) = o(1)$ associée à $\Phi^*(h) = O(1)$ assure $(C, 1)$ de (1), tandis que d'après Young [d] $\varphi_1(h) = o(1)$ à elle seule n'assure que $(C, \delta > 1)$ sans assurer $(C, 1)$, comme l'a fait voir sur un exemple Hahn [b]. Si l'on a $m \leqq f(x) \leqq M$, les inégalités de Fejér $m \leqq s_n^{(\delta)}(x) \leqq M$ valables pour $\delta \geqq 1$ cessent d'être vraies pour $\delta < 1$, mais de $f(x) = O(1)$ on déduit $s_n^{(\delta)}(x) = O(1)$ pour $\delta > 0$. En 1918 Hardy et Littlewood montrent que $(C, \delta > 0)$ de (1) et $\varphi_0(h) = O(1)$ entraînent $\varphi_0(h) = o(1)$, en donnant le premier exemple d'une condition nécessaire de $(C, \delta > 0)$ de (1). En 1926 ils améliorent [l] ce résultat : $\varphi_1(h) = o(1)$ et $\Phi^*(h) = O(1)$ entraînent $(C, \delta > 0)$ de (1) et inversement $(C, \delta > 0)$ de (1) et $\Phi^*(h) = O(1)$ assurent $\varphi_1(h) = o(1)$. Auparavant en 1924 les mêmes auteurs ont montré que (C, r) de (1), où $r = E(r)$, assure $\varphi_{r+2}(h) = o(1)$, tandis que $\varphi_r(h) = o(1)$ entraîne $(C, r+1)$ de (1) (H. et L. [g]). Ainsi, la sommabilité (C) de $\varphi(t)$ au point $t = 0$ apparaît comme condition nécessaire et suffisante de celle de la série de Fourier (1). Ils ont précisé ce théorème dans le cas $0 < \alpha < 1$ d'ordre non entier (1927, [m]) en démontrant que $\varphi_\alpha(h) = o(1)$ suffit pour assurer (C, δ) de (1) avec $\delta > \alpha$. En 1928 Wiener [a] a fait voir que $\varphi_\alpha(h) = o(1)$ n'assure pas $(C, \delta = \alpha)$ de (1), si $\alpha \geqq 0$. Enfin, Bosanquet [7] en 1930 a réussi de préciser complètement le théorème de Hardy-Littlewood : $\varphi_\alpha(h) = o(1)$ entraîne $(C, \delta > \alpha)$ de (1) et (C, α) de (1) assure $\varphi_\delta(h) = o(1)$ pour $\delta > \alpha + 1$ *quel que soit* $\alpha \geqq 0$. Il reste à examiner si la condition (C, α) de (1) est suffisante pour avoir $\varphi_{\alpha+1}(h) = o(1)$, ce qui paraît peu probable.

Le résultat de Noaillon a été généralisé pour $\delta = E(\delta) = r$ par Pollard [a] qui a établi en 1926 que $\varphi_{r+1}(h) = o(1)$ entraîne $(C, r+1)$ de (1) si l'on associe à cette condition cette autre $\Phi_r^*(h) = O(1)$, où

$$\Phi_\alpha^*(h) = \frac{1}{h}\int_0^h |\varphi_\alpha(t)|\,dt.$$

Etant donnés les résultats de Hardy et Littlewood [l] il est très probable que, quel que soit l'ordre α, $=$ ou $\neq E(\alpha)$, les conditions $\varphi_{\alpha+1}(h) = o(1)$ et $\Phi_\alpha^*(h) = O(1)$ doivent assurer $(C, \delta > \alpha)$ de (1) sans assurer celle $(C, \delta = \alpha)$. Cet enoncé est à démontrer. Dans le même travail Pollard a généralisé égalementle résultat de Lebesgue : $\Phi_r^*(h) = o(1)$ est une condition suffisante de $(C, r+1)$ de (1) pour $r = E(r)$. D'après Hardy [o], $\Phi_0^*(h) = o(1)$ assure $(C, \delta > 0)$ de (1) et il est très probable que $\Phi_\alpha^*(h) = o(1)$ entraîne $(C, \delta > \alpha)$ de (1) pour $\alpha \geqq 0$. Cette question mérite d'être étudiée. Il reste également à prouver que par contre $\Phi_\alpha^*(h) = o(1)$ est insuffisant pour (C, α) de (1). Il y a lieu aussi d'etudier si la sommabilité $(C, \delta > \alpha)$ de (1) associée à $\Phi_\alpha^*(h) = O(1)$ entraîne $\varphi_{\alpha+1}(h) = o(1)$, ce qui paraît très probable, et démontrer qu'on ne peut pas remplacer dans cet énoncé $(C, \delta > \alpha)$ de (1) par (C, α).

En renforçant la condition $\Phi^*(h) = o(1)$ qui assure $(C, \delta > 0)$, de (1) on peut préciser la rapidité de convergence des moyennes $s_n^{(\delta)}(x)$ vers $A = f(x)$. Ainsi, soit par exemple $\Phi^*(h) = O(h^\alpha)$ pour $1 \geqq \alpha > 0$. On établit (Alexits, [a]) que dans ce cas la différence $s_n^{(\delta)}(x) - f(x)$ est $O(n^{-\alpha})$ pour $\delta > \alpha$ et $O(n^{-\alpha}.\log n)$ pour $\delta = \alpha$. Si $\Phi^*(h) = O(h^\alpha)$ a lieu uniformément sur un ensemble E dans $(0, 2\pi)$, le résultat est aussi uniformément valable sur E. La condition $\Phi^*(h) = O(h^\alpha)$ est satisfaite *a fortiori*, si $f(x+h) - f(x) = O(h^\alpha)$ pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$ et le résultat d'Alexits généralise un théorème de Bernstein [5] relatif au cas où $\delta = 1$. Dans ce cas, $\delta = 1$, on connaît les limites

$$l_\alpha = \lim_{n=\infty} n^\alpha [s_n^{(1)}(x) - f(x)]$$

et

$$l_1 = \lim_{n=\infty} \frac{n}{\log n}[s_n^{(1)}(x) - f(x)]$$

correspondant aux hypothèses

$$(C, 1) - |\varphi(h) - s_\alpha h^\alpha| = o(h^\alpha) \qquad (0 < \alpha < 1)$$

et

$$(C, 1) - |\varphi(h) - s_1 h| = o(h)$$

respectivement et l'on a (Szácz, [b]) :

$$2^\alpha(1-\alpha)l_\alpha = s_\alpha \Gamma(\alpha) \sin\frac{\pi\alpha}{2}, \qquad 2\pi l_1 = s_1.$$

Jacob [c] a montré que, pour $0 < \alpha < 1, o(h^\alpha)$ peut être remplacé par $O(h^\alpha)$ à condition d'ajouter encore la condition

$$(C, 1) - [\varphi(h) - s_\alpha h^\alpha) = o(h^\alpha)$$

On voit que pour $\delta \geqq 0$ la sommabilité (C, δ) de (1) en un point $x = x_0$ est un phénomène *local* qui ne dépend que de l'allure de la fonction développée autour du point $x = x_0$. Il en est tout autrement pour $\delta < 0$ et la sommabilité ou non-sommabilité $(C, \delta < 0)$ de la série de Fourier (1) en un point de l'intervalle $(0, 2\pi)$ dépend de la manière dont se comporte $f(x)$ dans *tout* l'intervalle $(0, 2\pi)$. En effet, Kogbetliantz a fait voir [f, m] que la serie (1) d'une fonction $f(x)$ à variation bornée dans $(0, \xi - \varepsilon)$ et $(\xi + \varepsilon, 2\pi)$ et qui devient infinie d'ordre $\alpha (0 < \alpha < 1)$ au point $x = \xi$ de manière que $f(x) = C_0 |x - \xi|^{-\alpha} + \varphi(x)$, n'est *nulle part* sommable (C, δ) pour $\delta \leqq \alpha - 1$. Les moyennes $s_n^{(\delta)}(x)$ oscillent pour $n \to \infty$ entre $-\infty$ et $+\infty$, si $\delta < \alpha - 1$, et entre des bornes finies, si $\delta = \alpha - 1$. Au contraire, pour $\delta > \alpha - 1$,

$$s_n^{(\delta)}(x) \to \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

partout, sauf $x = \xi$, si $\varphi(x)$ est à variation bornée. Rappelons que les coefficients a_n et b_n de (1) sont $O(n^{\alpha-1})$ dans ce cas. Ceci est d'autant plus intéressant que pour une fonction $f(x)$ à variation bornée dans $(0, 2\pi)$ la série (1) est partout sommable $(C, \delta > -1)$, na_n et nb_n étant $O(1)$. Il est à observer que la série (1) d'une fonction à variation bornée, sauf autour des points ξ, où elle est de la forme

$$f(x) = C \log |x - \xi| + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant à variation bornée, est sommable (C, δ) pour $\delta > -1$ partout, sauf les points ξ (Kogbetliantz [m]).

Signalons encore le cas où $f(x)$ vérifie partout dans $(0, 2\pi)$ les conditions de Lipschitz d'ordre $\alpha \leqq 1$ et dont la série (1) est par conséquent uniformément convergente dans $(0, 2\pi)$. Nous dirons que $f(x)$

est de classe $L(\alpha)$ ou $l(\alpha)$, si l'on a $f(x+h)-f(x)=O(h^\alpha)$ et $o(h^\alpha)$ respectivement pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$, $0<\alpha\leqq 1$. Si $f(x)$ est de classe $L(\alpha)$ ou $l(\alpha)$, a_n et b_n sont $O(n^{-\alpha})$ ou $o(n^{-\alpha})$ respectivement et la série (1) est uniformément sommable $(C, \delta > -\alpha)$ ou $(C, \delta = -\alpha)$ respectivement dans $(0, 2\pi)$ avec la somme $f(x)$. Ce résultat, dû à Zygmund [d], a été généralisé par Hardy-Littlewood [h] ainsi. Soit $f(x)$ de classe $L(\alpha, p)$ ou $l(\alpha, p)$ suivant que l'on a pour $h \to 0$

$$\left\{\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x+h)-f(x)|^p \, dx\right\}^{\frac{1}{p}} = O(h^\alpha) \text{ ou } o(h^\alpha).$$

La série (1) est uniformément sommable $(C, \delta > -\alpha)$, $0<\alpha\leqq 1$, si $f(x)$ est de classe $L(\alpha, p)$ avec $p>\frac{1}{\alpha}$ et même $(C, \delta = -\alpha)$, si $f(x)$ est de classe $l(\alpha, p)$ avec $p>\frac{1}{\alpha}$. Le fait que $f(x)$ est de classe $L\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$ ou $l\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$ n'assure point la sommabilité (C) de (1), mais dans ce cas la condition $\Phi(h) = o(h)$ suffit pour assurer (C, δ) avec $\delta > -\alpha$ (classe L) ou avec $\delta = -\alpha$ (classe l).

3. Les résultats exposés au paragraphe précédent appliqués à des cas particuliers donnent souvent des corollaires interessants. C'est ainsi que la série de Parseval

$$(3)\quad \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,g(x+t)\,dt \\ &\sim \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_1^\infty \left\{(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)\cos nx + (a_n\beta_n - \alpha_n b_n)\sin nx\right\}, \end{aligned}$$

étudiée au point de vue de sa sommabilité (C) par Young [a, c, f], est la série de Fourier de $F(x)$ donc toute hypothèse faite sur $f(x)$ et $g(x)$ permet de conclure à l'allure de ses moyennes $F_n^{(\delta)}(x)$. Ainsi, par exemple, (3) est uniformément sommable $(C, -\alpha)$, si $f(x)$ est sommable (L) et $g(x)$ est de classe $l(\alpha)$.

Plusieurs résultats démontrés pour la série (1) subsistent aussi pour la série conjuguée

$$(4)\quad \sum_1^\infty (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \qquad \left(a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{int}\,dt\right)$$

dont la somme généralisée s'exprime par l'intégrale

$$(5)\quad \lim_{\varepsilon=0}\chi(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x-t)-f(x+t)]\cot\frac{t}{2}\,dt.$$

La sommabilité (C, 2) presque partout dans $(0, 2\pi)$ de la série (4) d'une fonction $f(x)$ sommable ($\mathcal{L}$) a été établie en 1917 par Priwaloff [c]. Plessner [a] a prouvé (C, 1) et Hardy et Littlewood ont démontré en 1923 que (4) est sommable (C, δ) avec la somme (5) presque partout, pourvu que l'on ait $\delta > 0$ [e] (*voir* aussi Zygmund [a]). On a en général la condition nécessaire et suffisante de sommabilité (C) de la série (4) avec la somme A sous la forme suivante : $(C, r)-\lim_{\varepsilon=0}\chi(\varepsilon)=A$. Si $f(x)$ est de classe $L(\alpha)$ ou $l(\alpha)$ la somme $\bar{f}(x)$ de (4) est aussi de même classe (Priwaloff [a]), donc (4) est uniformément sommable (C, δ) avec $\delta > -\alpha$ (classe L) ou $\delta = -\alpha$ (classe l).

La série (1) d'une fonction à variation bornée, dérivée terme à terme une fois, est sommable (C, δ) pour tout $\delta > 0$ presque partout dans $(0, 2\pi)$ et ses sommes partielles sont presque partout $o(\log n)$, (Young [h, i], Plessner [b]). Gronwall a étudié la sommabilité (C) de (1) dérivée terme à terme k fois et il a établi [e] qu'elle est sommable $(C, k+1)$ avec une somme égale à la k^{ieme} dérivée généralisée de $f(x)$. Pour $k=1, 2$ Priwaloff a remplacé [b]$(C, k+1)$ par $(C, \delta > k)$. Zygmund a fait voir que ce résultat subsiste pour tout $k=E(k)$ et que l'on peut remplacer les moyennes d'ordre $\delta > k$ par celles d'ordre $\delta = k$. si l'on emploie le procédé $(R, \log n, k)$ (Zygmund [b, c]). Pour $k=1$ la condition de Priwaloff

$$\psi(t)=\frac{1}{t}[f(x+t)-f(x-t)]-s=o(1)$$

a été élargie par Izumi [46] en $\psi_1(h)=o(1)$ avec $\Psi^*(h)=O(1)$.

Les moyennes logarithmiques ont été introduites dans la théorie des séries de Fourier pour la première fois par Lucàcz (1920 [b]) qui a donné l'expression du saut $D_0(\xi)$ de $f(x)$ au point $x=\xi$ à l'aide de la limite généralisée —$(R, \log n, 1)$ de la suite

$$n(b_n\cos n\xi-a_n\sin n\xi)=(a_n\cos n\xi+b_n\sin n\xi)':$$

$$D_0(\xi)=f(\xi+0)-f(\xi-0)=\pi\lim_{n=\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}(b_k\cos k\xi-a_k\sin k\xi).$$

Cette question a été résolue par Fejér en 1914 [*h*] pour les fonctions à variation bornée ainsi :

$$\frac{1}{\pi} D_0(\xi) = (C, 1) - \lim_{n=\infty} [(a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi)'].$$

Szidon a fait voir [83] qu'on a en général

$$\frac{1}{\pi} D_0(\xi) = (C, 2) - \lim_{n=\infty} [(a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi)'].$$

On doit à Zygmund [*c*] le résultat général que voici :

Soit $D_k(\xi)$ le saut de la $k^{\text{ième}}$ dérivée généralisée de $f(x)$ au point $x = \xi$. On a pour $\delta > k+1$

$$\frac{1}{\pi} D_k(\xi) = (C, \delta) - \lim_{n=\infty} [(a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi)^{(k+1)}] \qquad (\delta > k+1),$$

ainsi que pour $\delta = k+1$

$$\frac{1}{\pi} D_k(\xi) = (R, \log n, \delta) - \lim_{n=\infty} [(a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi)^{(k+1)}] \qquad (\delta = k+1).$$

Le phénomène de Gibbs qui n'a lieu que pour $\delta < \delta_1 < 0,5$ existe aussi pour $\delta < 0$ et la longueur $l = l(\delta)$ du segment carcatéristique de Gibbs est une fonction décroissante de δ :

$$l(\delta) = \frac{|f(x_0 - 0) - f(x_0 - 0)|}{\pi} \left[\int_0^1 (1-u)^\delta \frac{\sin \beta^* u}{u} \, dx - \frac{\pi}{2} \right],$$

où $\beta^* = \beta^*(\delta)$ est la valeur de β qui rend maximum l'intégrale considérée comme fonction de β. Le phénomène de Gibbs n'a lieu que si $l(\delta) > 0$. On établit que $\lim_{\delta=-1} (\delta+1).\, l(\delta) = \frac{1}{2} |D_0(x_0)|$. Ainsi le segment de Gibbs diminue de ∞ à zéro quand δ augmente de -1 à $\delta = \delta_1 = 0,43955\ldots$ (Gronwall [*f*], Cramer [18], Carlslaw [11]).

Les théorèmes classiques de Cantor et de du Bois-Reymond sur l'unicité des séries trigonométriques se laissent généraliser aux séries divergentes mais sommables $(C, \delta < 1)$. On a les résultats (Kogbetliantz [*r*]) suivants : si la série

$$(6) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx + \ldots$$

est sommable $(C, \delta < 1)$ avec la somme $f(x)$ partout dans $(0, 2\pi)$ sauf sur un ensemble réductible $\mathcal{E}$ de points ξ, où elle oscille sans être sommable (C, $\delta < 1$) ou bien n'a pas pour somme $f(x)$ ou enfin diverge essentiellement avec $s_n(\xi) = o(n)$, elle est la série de Fourier de sa somme pourvu que $f(x)$ soit sommable (L) dans $(0, 2\pi)$, tous ses coefficients étant nuls si $f(x)$ s'annule identiquement dans $(0, 2\pi)$, sauf l'ensemble $\mathcal{E}$. L'existence des séries (6) divergentes et sommables (C, $\delta > 0$) avec la somme zéro pour $x \neq \xi$ avec $\alpha_n = \cos n\xi$ et $\beta_n = \sin n\xi$, $0 \leqq \xi \leqq 2\pi$, explique la nécessité de l'hypothèse que (6) *oscille* aux points $x = \xi$ de l'ensemble $\mathcal{E}$ ou bien que, si elle y diverge essentiellement, $s_n(\xi) = o(n)$. Ces résultats généralisent ceux de Riesz [j] qui suppose (6) sommable (C, $\delta < 1$) partout dans $(0, 2\pi)$ sans exception.

4. La divergence *partout* sur la sphère S de la série de Laplace

$$(7) \qquad F(\theta, \varphi) \sim \frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty (2n+1) \int_S \int F(\theta', \varphi') P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, d\sigma'$$

de $F(\theta, \varphi)$, si en un seul point M_0 la fonction $F(\theta, \varphi)$ devient infinie d'ordre $s \geqq \frac{3}{2}$, a été signalée déjà en 1874 par Darboux [19]. La fonction $F(\theta, \varphi)$ est sommable (L), donc $s < 2$ et l'on voit que la convergence de (7) en un point M de S n'est pas un phénomène local. Par contre sa sommabilité (C, δ) ne dépend, pour $\delta \geqq 1$, que de l'allure de $F(\theta, \varphi)$ au voisinage immédiat de M. L. Fejér l'a établi en 1908 [d, f] pour $\delta = 2$ comme corollaire du fait que les moyennes $s_n^{(2)}(\gamma)$ de la série-noyau de (7)

$$(8) \quad O \sim 1 + 3\,P_n(\cos\gamma) + \ldots + (2n+1)\,P_n(\cos\gamma) + \ldots \qquad (0 < \gamma \leqq \pi)$$

ne sont jamais négatives dans $(0, \pi)$ et de plus $\lim_{n=\infty} s_n^{(2)}(\gamma) = 0$ pour $\gamma \neq 0$. On en conclut que les moyennes $F_n^{(2)}$ de (7) d'une fonction bornée, $m \leqq F(\theta, \varphi) \leqq M$, sur la sphère sont comprises quel que soit le point (θ, φ) entre les bornes de la fonction développée : $m \leqq F_n^{(2)}(\theta, \varphi) \leqq M$. La série de Legendre est un cas particulier de (7) et en 1910 Haar [b] a démontré sa sommabilité (C, 1) partout à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$. En étudiant de plus près la série (8), Chapman a établi [c, d] en 1912 sa sommabilité avec la somme zéro $\left(C,\ \delta > \frac{1}{2}\right)$ pour $0 < \gamma < \pi$ et (C, $\delta > 1$) pour $\gamma = \pi$, ce qui lui a permis de démontrer (C, δ) de (7) pour $\delta > 1$. L'année suivante

Gronwall [b] a prouvé la sommabilité (C, 1) de (7) en s'appuyant sur le fait que les constantes de Lebesgue $\rho_n^{(\delta)}$ d'ordre δ de la série de Laplace sont bornées pour $\delta > \frac{1}{2}$, tandis quelles tendent vers l'infini avec n comme $\log n$ pour $\delta = \frac{1}{2}$ et comme $n^{\frac{1}{2}-\delta}$ pour $\delta < \frac{1}{2}$. D'après Haar [a] cette circonstance assure l'existence des fonctions continues partout sur S à série (7) non sommable $\left(C, \delta \leqq \frac{1}{2}\right)$. Un tel exemple a été construit effectivement par Gronwall [d]. Il restait à étudier l'influence des infinitudes de $F(\theta, \varphi)$ sur la sommabilité (C, δ) de sa série (7) pour $1 > \delta > \frac{1}{2}$ dans le cas général et pour $\frac{1}{2} \geqq \delta > -\frac{1}{2}$ dans le cas où $F(\theta, \varphi)$ est à variation bornée partout sur S sauf les voisinages des points, où elle devient infinie. La série (7) d'une fonction à variation bornée partout sur S est uniformément sommable (C, δ) pour tout $\delta > -\frac{1}{2}$ (Kogbetliantz [m]) et il serait très intéressant de constater l'existence des fonctions à variation bornée partout sur S et dont la série (7) n'est pas sommable $\left(C, \delta = -\frac{1}{2}\right)$, ce qui paraît probable. Gronwall a démontré [c] que la sommabilité $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ de (7) ne dépend que de l'allure de $F(\theta, \varphi)$ au point $M(\theta, \varphi)$, où l'on considère la série (7), et à son antipode $W(\pi - \theta, \varphi + \pi)$. Mais il n'a pas précisé la loi de l'influence de l'antipode, ce qui a été fait par Kogbetliantz [g, l] : *le fait que* $F(\theta, \varphi)$ *devient infinie d'ordre s à l'antipode ne détruit que la sommabilité* $(C, \delta \leqq s - 1)$ *de tout ordre δ non supérieur à $s - 1$*. Les moyennes $F_n^{(\delta)}$ de (7) oscillent entre $-\infty$ et $+\infty$ pour $\delta < s - 1$ et entre des bornes finies pour $\delta = s - 1$. On voit que cette loi est la même pour (7) que pour la série de Fourier (1). Ceci s'explique par le fait que les séries (1) et (7) ne sont que deux cas particuliers pour $\lambda \to 0$ et $\lambda = \frac{1}{2}$ de la série ultrasphérique suivante :

$$(9) \qquad F(\theta, \varphi) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{0}^{\infty} (n + \lambda) \int\!\!\int_S \frac{F(\theta', \varphi') P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, d\sigma'}{[\sin^2\theta' . \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}},$$

dont la série-noyau

$$(10) \quad 0 \sim \lambda + (1 + \lambda) P_1^{(\lambda)}(\cos\gamma) + \ldots + (n + \lambda) P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) + \ldots \quad (0 < \gamma \leqq \pi)$$

se réduit aux séries (2) et (8), si $\lambda \to 0$ et $\lambda = \frac{1}{2}$. Les polynomes $P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)$ définis par

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\lambda} = \sum_0^\infty z^n P_n^{(\lambda)}(x)$$

généralisent les polynomes de Legendre $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ et les fonctions trigonométriques ($\lambda \to 0$). La sommabilité (C, δ) de la série (9) en un point M de S n'est qu'un phénomène local pour $\delta \geqq 2\lambda$ et elle dépend en outre pour $\delta < 2\lambda$ de l'allure de $F(\theta, \varphi)$ au voisinage de l'antipode W. On a les résultats suivants (Kogbetliantz [*o*]) :

La série (9) est sommable (C, 2λ) partout où existe la valeur moyenne A de $F(\theta, \varphi)$ et a pour somme A. De plus pour $\delta = 2\lambda + 1$ les moyennes de (9), $F_n^{(2\lambda+1)}$, sont comprises, si $F(\theta, \varphi)$ est bornée, $m \leqq F(\theta, \varphi) \leqq M$, entre les bornes de $F(\theta, \varphi)$: $m \leqq F_n^{(2\lambda+1)} \leqq M$, car les moyennes $s_n^{(\delta)}(\gamma)$ de la série-noyau (10) ne sont jamais négatives pour $\delta \geqq 2\lambda + 1$. Si le produit $\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta-1} |F(\theta, \varphi)|$ est intégrable autour de l'antipode W, la série (9) est sommable (C, δ), où $\lambda < \delta < 2\lambda$, ce qui se réalise en particulier pour $\delta > s - 1$, où s est l'ordre d'infinitude de $F(\theta, \varphi)$ à l'antipode W. Il existe des fonctions continues partout sur S et dont les séries (9) ne sont pas sommables (C, $\delta \leqq \lambda$). Néanmoins la série (9) d'une telle fonction est uniformément sommable (C, δ) sur toute la sphère S quel que soit $\delta > \lambda$. Pour $\delta = \lambda$ les conditions de sommabilité (C, λ) sont les mêmes que celles de convergence des séries trigonométriques de Fourier, mais pour $\delta < \lambda$ apparaît l'influence des infinitudes autres que celle à l'antipode et le phénomène de sommabilité (C, δ) cesse d'être local ($\delta \geqq 2\lambda$) ou semi-local (influence de l'antipode seul pour $\lambda \leqq \delta < 2\lambda$).

C'est ce fait fondamental qui explique le phénomène de Darboux en le précisant. Soient s'_k et s''_k les ordres d'infinitude de $F(\theta, \varphi)$ aux différents points M'_k et M''_k de S, dont ceux M'_k se trouvent sur le même grand cercle C_M que le point $M(\theta, \varphi)$, où l'on étudie la sommabilité de (9), tandis que M''_k sont en dehors de C_M. Si s' et s'' désignent les plus grands parmi les nombres s'_k et s''_k, on a $s' < 2\lambda + 1$ et $s'' < 2$, car autrement les intégrales qui représentent les termes de la série (9) n'existent pas. Soit δ_0 le plus grand des deux nombres $s' - \lambda - 1$ et $s'' + \lambda - 2$. On a $\delta_0 < \lambda$ et les moyennes $F_n^{(\delta)}$ de (9) oscillent entre $-\infty$ et $+\infty$ pour $\delta < \delta_0$ et entre des bornes finies pour $\delta = \delta_0$

$n \to \infty$ (Kogbetliantz [*o*]). La série (9) est sommable (C, $\delta < \lambda$) pour $\delta > \delta_0$, si l'ordre s d'infinitude à l'antipode W est inférieur à $\delta + 1$, $s < \delta + 1$, $F(\theta, \varphi)$ étant à variation bornée sur S sauf les voisinages des points M_k. Pour la série de Laplace $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ on a ainsi la condition nécessaire de sommabilité (C, δ) : $\delta > \delta_0$, où δ_0 est le plus grand parmi les nombres $s_k - \frac{3}{2}$. Ceci explique le fait remarqué par Darboux : si $F(\theta, \varphi)$ est infinie d'ordre $s_0 = \frac{3}{2}$ en un seul point M_0 de S, on a $\delta_0 = 0$ et la série de Laplace *diverge* partout sur S, étant sommable (C, δ) partout, sauf l'antipode W_0 de M_0, pour $\delta > 0$. A l'antipode elle n'est sommable (C, δ) que pour $\delta > \frac{1}{2}$ car $s_0 - 1 = \frac{1}{2}$. On voit ainsi que la sommabilité (C, δ) de la série de Laplace dépend de l'allure de $F(\theta, \varphi)$ sur toute la sphère pour $\delta < \frac{1}{2}$ et de la manière dont $F(\theta, \varphi)$ se comporte à l'antipode pour $\frac{1}{2} \leqq \delta < 1$ (Kogbetliantz, [*m*]). Si le produit $\left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} |F(\theta, \varphi)|$ est intégrable sur la sphère S, la série de Laplace est sommable $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ avec la somme A non seulement aux points, où existe la valeur moyenne $\lim\limits_{\gamma=0} F(\gamma) = A$ prise sur le cercle de centre (θ, φ) et de rayon sphérique γ, mais aussi là où l'on a $(C, 1) - \lim\limits_{\gamma=0} |F(\gamma| - A| = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} |F(\gamma) - A| \, d\gamma = 0.$$

Ce résultat, dû à Fejér [*l*], est analogue au théorème de Hardy [*o*] relatif à la sommabilité (C, $\delta > 0$) de la série trigonométrique de Fourier si $\Phi^*(h) = o(h)$. Il est hors de doute que tous les résultats obtenus dans la théorie de sommabilité (C, δ) des séries trigonométriques seront retrouvés *mutatis mutandis* dans celle des séries sphériques et ultrasphériques.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

(au 1er janvier 1930).

ABRÉVIATIONS UTILISÉES.

A. M.......	Acta Mathematica.
B. S. M. F.	Bulletin de la Soc. Math. de France.
C. J........	Crelle Journal (Journ. f. die Math.).
C. R........	Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris).
J. L........	Journal de Liouville.
J. L. M. S.	Journal of the London Math. Soc.
M. A.......	Mathematische Annalen.
M. Z.......	Mathematische Zeitschrift.
P. L. M. S.	Proceedings of the London Math. Soc.
P. R.......	Palermo Rendiconti.

1. D'Alembert (J.). — Opusc. Math., t. 4, 1768, n° 25, p. 151-160.
2. Alexits (G.). — *a.* *M. A.*, t. 100, 1929, p. 264-277.
   b. Acta Univ. Hung., t. 3, 1927, p. 32-37.
3. Andersen (A. F.). — *a.* Videns. Sel. Math.-fys. Medd. (*D. K. D.*, t. 1, 1918).
   b. Mat. Tidskr. B., 1923, p. 1-6 et 1925, p. 84-94.
   c. *P. L. M. S.*, t. 27, 1928, p. 39-71.
   d. *M. Z.*, t. 28, 1928, p. 355-359.
4. Appell (P.). — *a.* *C. R.*, t. 87, 1878, p. 689.
   b. Archiv d. Math. und Ph., t. 64, 1879, p. 391.
5. Bernstein (S.). — Mém. Acad. R. Belg., t. 4, 1912, p. 1-104.
6. Bohr (H.). — *a.* *C. R.*, t. 148, 1909, p. 75 et Thèse, Copenhague, 1910.
   b. Gött. Nachr., 1909, p. 247-262.
   c. Wiener Ber., t. 119, 1910, p. 1391-1397.
7. Bosanquet (L. S.). — *P. L. M. S.*, t. 31, 1930, p. 144-164.
8. Bromwich (T.). — *M. A.*, t. 65, 1908, p. 350-369.
9. Bromwich (T.) et Hardy (G. G.). — *P. L. M. S.*, t. 2, 1904, p. 161-189.
10. Buhl (A.). — *a.* *J. L.*, t. 4, 1908, p. 39-78.
    b. *Ibid.*, p. 367-377.
11. Carlslaw (H. E.). — *J. L. M. S.*, t. 1, 1926, p. 201-204.
12. Carlson (F.). — Nyt. Tidskr. for Math., t. 28, 1917, p. 81-88.
13. Carmichael (R. D.). — *a.* Bull. Am. Math. Soc., t. 25, 1918, p. 97-131.
    b. Tohôku Math. Journ., t. 11, 1917, p. 191-199.
14. Cauchy (A.). — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, t. 1; Anal. Alg., p. 5, 27, Paris, 1821.

15. Cesaro (E.). — *a*. Bull. des Scienc. Math. (2), t. **14**, 1890, p. 114-120.
b. Mathesis (2), t. 3, 1893, p. 241-243.

16. Chapman (S.). — *a*. *P. L. M. S.*, t. 9, 1910, p. 369-409.
b. Bull. Am. Math. Soc., t. 18, 1911, p. 111-115.
c. Quarterly Journ., t. 43, 1912, p. 1-53.
d. *M. A.*, t. 72, 1912, p. 211-227.
e. Quarterly Journ., t. **44**, 1913, p. 219-233.
f. *Ibid.*, t. 47, 1916, p. 16 32.

17. Chapman (S.) et Hardy (G. H.). — Quart. Journ., t. **42**, 1911, p. 181-215.

18. Cramer (H.). — Arkiv. for Math., t. 13, 1919, n° 20, p. 1-21.

19. Darboux (G.). — *J. L.* (2), t. 19, 1874, p. 12-16.

20. Dedekind (R.) et Lejeune-Dirichlet (G.). — Vorlesung. uber die Zahlen-Theorie Braunschweig, 1871.

21. Dienes (P.). — *C. R.*, t. 153, 1911, p. 802 et Ann. de l'Éc. Norm. (3), t. 28, 1911, p. 389-457.

22. Doetsch (G.). — *M. Z.*, t. 11, 1921, p. 161-179.

23. Dobrowolski (S.). — Bull. Acad. Polon. A., 1925, p. 259-264 (Cracovie).

24. Du Bois-Reymond (P.). — Antritts-Programm. Freiburg, 1871, p. 10.

25. Faber (G.). — Munch. Berichte, t. 43, 1913, p. 519-531.

26. Fatou (P.). — *A. M.*, t. 30, 1906, p. 335-400.

27. Fejér (L.). — *a*. *C. R.*, t. 131, 1900, p. 984.
b. Math. phys. Lapok., t. **14**, 1902, p. 49 et 97.
c. *M. A.*, t. 58, 1903, p. 51-69.
d. *C. R.*, t. 146, 1908, p. 224.
e. *C. R.*, t. 147, 1908, p. 1040.
f. *M. A.*, t. 67, 1908, p. 76-109.
g. Munch. Ber., 1910, n° 3, p. 1-17.
h. *C. J.*, t. 142, 1914, p. 165-188.
i. Festschrift fur H. A. Schwarz, 1914, p. 42-53.
j. *C. R.*, t. 156, 1913, p. 46.
k. Gott. Nachr., 1925.
l. *M. Z.*, t. 24, 1925, p. 267-284.

28. Fekete (M.). — *a*. *C. R.*, t. 150, 1910, p. 1033; t. 151, 1910, p. 497; t. 157, 1913, p. 574.
b. Math. ès termes ért., t. 19, 1910, p. 367-391; t. 29, 1911, p. 719-726.
c. Math. ès termes ért., t. 32, 1914, p. 389-425.
d. Math. ès termes ért., t. 35, 1917, p. 309-324.

29. Ferrar (W. L.). — *a*. *J. L. M. S.*, t. 1, 1926, p. 175-179.
b. *P. L. M. S.*, t. 27, 1928, p. 541-548.

30. Ford (W. B.). — *a*. Bull. Am. Math. S., t. 15, 1909, p. 439-444.
b. *Ibid.*, t. 25, 1919, p. 1-15.
c. Am. Journ. of Math., t. 32, 1910, p. 315-326.

31. Frobenius (G.). — *C. J.*, t. 89, 1880, p. 262-264.

32. Grimshaw (M. E.). — Proc. Cambr. Phil. Soc., t. 23, 1927, p. 755-767.

33. Gronwall (T. H.). — *a.* Bull. Am. Math. S., t. 20, 1913, p. 139 et 299.
b. *M. A.*, t. 74, 1913, p. 213-270.
c. *M. A.*, t. 75, 1914, p. 321-375.
d. *C. R.*, t. 158, 1914, p. 1488.
e. *C. J.*, t. 147, 1917, p. 16-35.
f. Bull. Am. Math. Soc., t. 32, 1926, p. 316.
34. Haar (A.). — *a.* *M. A.*, t. 69, 1910, p. 331-371.
b. *P. R.*, t. 32, 1910, p. 132-142.
35. Hadamard (H.). — *a.* *J. L.* (4), t. 8, 1892, p. 101-186.
b. *A. M.*, t. 27, 1903, p. 177-183.
36. Hahn (H.). — *a.* Monatshef. f. Math.-Ph., t. 33, 1923, p. 135-143.
b. Jah.-Ber. d. Deut. Math.-Ver., t. 25, 1917, p. 359-366.
c. Wiener Denkschr., t. 93, p. 585-692.
37. Hardy (G. H.). — *a.* Transact. Cambr. Ph. Soc., t. 19, 1903, p. 297-321.
b. *P. L. M. S.*, t. 4, 1906, p. 247-265.
c. *M. A.*, t. 64, 1907, p. 77-94.
d. *P. L. M. S.*, t. 6, 1908, p. 410-423.
e. *Ibid.*, t. 6, 1908, p. 255-264.
f. *Ibid.*, t. 8, 1909, p. 301-320.
g. *Ibid.*, t. 9, 1910, p. 126-144.
h. *Ibid.*, t. 10, 1911, p. 396-405.
i. Messenger of Math., t. 40, 1911, p. 108-112.
j. *P. L. M. S.*, t. 12, 1912, p. 174-180.
k. *Ibid.*, t. 15, 1915, p. 72-88.
l. Proc. Cambr. Ph. S., t. 20, 1921, p. 304-307.
m. Transact. Cambr. Ph. Soc., t. 21, 1908, p. 427-451.
n. Quarterly Journ., t. 38, 1907, p. 269-288.
o. *P. L. M. S.*, t. 12, p. 365-372.
p. Messenger of Math., t. 47, 1918, p. 81-88 et 178-184.
38. Hardy et Littlewood. — *a.* *P. L. M. S.*, t. 11, 1912, p. 411-478.
b. *Ibid.*, t. 13, 1913, p. 174-191.
c. *Ibid.*, t. 17, 1918, p. XIII-XV.
d. *Ibid.*, t. 18, 1918, p. 205-235.
e. *Ibid.*, t. 22, 1923, p. XL-XLIII, 254-269, XLIII-XLIV.
f. *Ibid.*, t. 27, 1928, p. 327-348.
g. *M. Z.*, t. 19, 1923, p. 67-96.
h. *M. Z.*, t. 28, 1928, p. 612-633.
i. Mess. of Math., t. 43, 1914, p. 134-147.
j. *A. M.*, t. 37, 1914, p. 193-238.
k. Proc. Nat. Acad. of Sc. *U. S. A.*, t. 2, 1916, p. 583-586.
l. *J. L. M. S.*, t. 1, 1926, p. 134-138, et 19-25.
m. Pr. Cambr. Ph. Soc., t. 23, 1927, p. 681-684.
39. Hart (W. L.). — Bull. Am. Math. Soc., t. 28, 1922, p. 171-178.
40. Hausdorff (F.). — *a.* *M. Z.*, t. 9, 1921, p. 74-109.
b. *M. Z.*, t. 31, 1929, p. 186-196.

41. HILB (E.). — *a*. *M. Z.*, t. 5, 1919, p. 17-25.
b. *M. Z.*, t. 8, 1920, p. 79-90.
42. HOBSON (E. W.). — *a*. *P. L. M. S.*, t. 14, 1915, p. 428-439.
b. *Ibid.*, t. 22, 1923, p. 420-424.
43. HÖLDER (O.). — *M. A.*, t. 20, 1882, p, 535-549.
44. HURWITZ (W. A.). — Bull. Am. Math. S., t. 28, 1922, p. 17-36 et 156.
45. HURWITZ (W. A.) et SILVERMAN (L. L.). — Transact. Amer. Math. Soc., t. 18, 1917, p. 1-20.
46. IZUMI (S.). — Tohôku Math. J., t. 31, 1929, p. 68-72.
47. JACOB (M.). — *a*. *M. Z.*, t. 26, 1927, p. 672-682.
b. Jahr. ber. d. D. Math.-Ver., t. 36, 1927, p. 223-227.
c. *J. L. M. S.*, t. 3, 1928, p. 124-129.
48. KACZMARZ (S.). — *a*. *M. Z.*, t. 26, 1927, p. 99-105.
b. *M. A.*, t. 96, 1926, p. 148.
49. KIENAST (A.). — Proc. Cambr. Ph. Soc., t. 19, 1919, p. 74-82.
50. KNOPP (K.). — *a*. Thèse Berlin, 1907.
b. Berl. Ber., t. 7, 1907, p. 1-12.
c. Archiv. der Math.-Ph. (3), t. 12, 1907.
d. *P. R.*, t. 25, 1907, p. 237-252.
e. *P. R.*, t. 32, 1910, p. 95-110.
f. *M. A.*, t. 74, 1913, p. 458-461.
g. Berl. Ber., t. 16, 1917, p. 45-50.
h. *M. Z.*, t. 18, 1923, p. 125-156.
i. *M. Z.*, t. 19, 1923, p. 97-113.
j. Jahr. ber. d. D. Math.-Ver., t. 32, 1923, p. 43-67.
k. *M. Z.*, t. 6, 1920, p. 118-123.
l. *M. Z.*, t. 31, 1929, p. 97-127 et 276-305.
51. KOGBETLIANTZ (E.). — *a*. *C. R.*, t. 162, 1916, p. 673.
b. *C. R.*, t. 163, 1916, p. 601.
c. *C. R.*, t. 164, 1917, p. 510, 626, 778.
d. *C. R.*, t. 168, 1919, p. 992.
e. *Ibid.*, p. 1090.
f. *C. R.*, t. 168, 1919, p. 1193.
g. *C. R.*, t. 169, 1919, p. 54.
h. *Ibid.*, p. 226, 493, 769.
i. *Ibid.*, p. 322.
k. *C. R.*, t. 176, 1923, p. 224.
l. *M. Z.*, t. 14, 1922, p. 99-109.
m. Ann. de l'Éc. Norm. (3) (Thèse), t. 40, 1923, p. 261-323.
n. *B. S. M. F.*, t. 51, 1923, p. 244-295.
o. *J. L.*, t. 3, 1924, p. 107-187.
p. Bull. des Sc. Math. (2), t. 49, août 1925.
q. Ann. de l'Éc. Norm. (3), t. 42, 1925, p. 193-216.
r. *J. L.*, t. 5, 1926, p. 125-196.
s. Bull. des Sc. Math. (2), t. 49, janvier 1925.

t. *P. R.*, t. 46, 1922, p. 1-19.

u. *C. R.*, t. 192, 1931, p. 662 et 1696.

52. Kojima (T.). — *a.* Tohôku Math. Journ., t. 12, 1917, p. 177-180 et 291-326.

b. *Ibid.*, t. 21, 1922, p 3-14.

53. Kronecker (L.). — *C. R.*, t. 103, 1876, p. 980-987.

54. Landau (E.). — *a.* Monatshef. f. Math., t. 18, 1907, p. 8-28.

b. Prace Mat.-fiz., t. 21, 1910, p. 97-177.

c. *P. R.*, t. 35, 1913, p. 265-276.

d. Leipz. Ber., t. 65, 1913, p. 131-138.

e. Archiv. der Math. und Ph., t. 21, 1913, p. 42-50 et 250-255.

f. *Ibid.*, t. 25, 1916, p. 250-260.

55. Lasker (E.). — Phil. Transact. of London, t. 196-A, 1901, p. 431-477.

56. Lebesgue (H.). — *a.* *M. A.*, t. 61, 1905, p. 251-280.

b. Annales de Toulouse (3), t. 1, 1910, p. 25-117.

57. Lévy (P.). — *B. S. M. F.*, t. 54, 1926, p. 1-25.

58. Leja (M.). — *B. S. M. F.*, t. 57, 1929, p. 72-77.

59. Littlewood (J. E.). — *P. L. S. M.*, t. 9, 1910, p. 434-448.

60. Lukacs (F.), — *a.* *M. Z.*, t. 14, 1922, p. 250-262.

b. *C. J.*, t. 150, 1920, p. 107-112.

c. Archiv. der Math. und Ph. (3), t. 23, 1915, p. 367-368.

61. Lusin (N.). — *P. R.*, t. 32, 1911, p. 386-390.

62. Maclagan-Wedderburn. — Quarterly Journ., t. 38, 1907, p. 276-277.

63. Mazur (S.). — *M. Z.*, t. 28, 1928, p. 599-611.

64. Mazurkiewicz (S.). — Warsch. Ber., t. 8, 1915, p. 639-655.

65. Mertens (F.). — *C. J.*, t. 79, 1875, p. 182-184.

66. Mollerup (J.). — Videns. Sel. Math.-fys. Medd. *D. K. D.*, t. 3, 1920.

67. Moore (C. N.). — *a.* Transact. Am. Math. S., t. 8, 1907, p. 299-330.

b. *Ibid.*, t. 10, 1909, p. 391-435.

c. *Ibid.*, t. 14, 1913, p. 73-104.

d. *M. A.*, t. 74, 1913, p. 555-572.

e. Bull. Am. Math. S., t. 25, 1919, p. 258-276.

f. Transact. Am. Math. S., t. 21, 1920, p. 107-156.

g. *Ibid.*, t. 24, 1922, p. 79-88.

68. Noaillon (P.). — Bull. Acad. de Belgique, 1913, p. 524-541.

69. Norlund (N. E.). — *a.* *C. R.*, t. 158, 1914, p. 1325.

b. *A. M.*, t. 37, 1914, p. 327-387.

c. *A. M.*, t. 44, 1922, p. 71-212.

70. Obrechkoff (N.). — *a.* *C. R.*, t. 182, 1926, p. 309.

b. *C. R.*, t. 186, 1928, p. 356.

c. *C. R.*, t. 186, 1928, p. 215.

d. *M. Z.*, t. 30, 1929, p. 375-386.

71. Ogura (K.). — Tohôku Math. Journ., t. 1, 1911, p. 136-139.

72. Ottolenghi (B.). — *a.* Giorn. di Matem., t. 49, 1911, p. 233-279.

b. « Coexistenza dei limiti di Holder e di Cesaro » (Padova), 1911.

73. Perron (O.). — *M. Z.*, t. 6, 1920, p. 286-310.

74. Plancherel (M.). — *M. A.*, t. 76, 1915, p. 315-326.
75. Plessner (A.). — *a.* Giessen (Thèse), 1922
b. Mitteil. d. Math. Seminar, Giessen, t. 1, 1923, p. 1-36.
76. Pollard (S.). — *a.* *J. L. M. S.*, t. 1, 1926, p. 233-235.
b. *Ibid.*, t. 2, 1927, p. 255-262.
c. Proc. Cambr. Ph. Soc., t. 23, 1927, p. 373-382.
d. *P. L. M. S.*, t. 27, 1928, p. 209-222.
77. Pringsheim (A.). — *a.* Munch. Ber., 1916, p. 209-224 et 1918, p. 89-93.
b. *Ibid.*, 1920, p. 275-284.
c. *A. M.*, t. 28, 1904, p. 1-30.
78. Priwaloff (J.). — *a.* *B. S. M. F.*, t. 44, 1916, p. 100-103.
b. Thèse (en russe) Saratoff, 1918.
c. *C. R.*, t. 165, 1917, p. 96.
79. Rademacher (H.). — *M. A.*, t. 87, 1922, p. 112-138.
80. Rajchmann (A.) et Zygmund (A.). — Bull. Acad. Pol., A., 1925, p. 69-80.
81. Rau K. Ananda. — *a.* *P. L. M. S.*, t. 17, 1918, p. 334-336.
b. *J. L. M. S.*, t. 3, 1928, p. 200-205.
82. Riesz (M.). — *a.* Thèse, Budapest 1908.
b. Math. ès termes ért., t. 26, 1908, p. 221-229.
c. Math. ès phys. Lapok, 17, 1908, p. 96-108.
d. *C. R.*, t. 148. 1909, p. 1658.
e. *C. R.*, t. 149, 1909, p. 18.
f. *Ibid.*, p. 909.
g. *C. R.*, t. 152, 1911, p. 1651.
h. *C. J.*, t. 140, 1911, p. 89-99.
i. Math. ès termes ért., t. 29, 1911, p. 283-301.
j. *M. A.*, t. 71, 1911, p. 54-76.
k. Arkiv for Math. Astr. och Fys., t. 11, 1916, nº 12.
l. Acta Univ. Hung. F.-J., t. 1, 1923, p. 104-113.
m. *P. L. M. S.*, t. 22, 1923, p. 412-419.
83. Robinson (G. M.). — *a.* Cornell Thesis, 1918, *U. S. A.*
b. Transact. Amer. Math. Soc., t. 28, 1926, p. 50-73.
84. Rosenblatt (A.). — Jahr.-Ber. d. Deut. Math.-Ver., t. 23, 1914, p. 80-84.
85. Sayers (K.). — *P. L. M. S.*, t. 31, 1930, p. 29-40.
86. Schnee (W.). — *a.* *M. A.*, t. 67, 1909, p. 110-125.
b. *P. R.*, t. 27, 1909, p. 87-116.
87. Schur (J.). — *a.* *C. J.*, t. 151, 1921, p. 79-111.
b. *M. A.*, t. 74, 1913, p. 447-458.
c. *M. Z.*, t. 31, 1929, p. 391-407.
88. Silverman (L. L.). — *a.* Univ. of Missouri Studies, t. 1, 1913, p. 1-96.
b. Bull. Amer. Math. Soc., t. 22, 1915-1916, p. 459-461.
c. Transact. Amer. Math. Soc., t. 17, 1916, p. 282-294.
d. Annales of Math., t. 21, 1919, p. 128-140.
e. Transact. Amer. Math. Soc., t. 26, 1924, p. 101-112.
89. Stieltjes (T. J.). — Nouvelles Annales (3), t. 6, 1887, p. 210-215.

90. Szacz (O.). — *a*. *J. L. M. S.*, t. 3, 1928, p. 254-262.
b. *A. M.*, t. 48, 1926, p. 355-362.
c. Acta Univ. Hung. F.-J., t. 3, 1927, p. 38-48.
91. Szidon (S.). — Math. ès termes ért., t. 27, 1918, p. 309-311.
92. Tauber (A.). — Monatshef. f. Math. Ph., t. 8, 1897, p. 273-277.
93. Toeplitz (O.). — Prace mat.-fiz., t. 22, 1911, p. 113-119.
94. Walficz (A.). — *M. A.*, t. 93, 1925, p. 130-148.
95. Watanabe (M.). — Tohôku Math. Journ., t. 5, 1914, p. 21-28.
96. Wiener (N.). — *a*. Journ. Math. Phys. Mass. Inst. of Techn., t. 7, 1928. p. 161-184.
b. *P. L. M. S.*, t. 30, 1929, p. 1-8.
97. Woronoj (G.). — Tageblatt d. XI Vers. Russ. Naturforscher, 1901, p. 60-61.
98. Young (W. H.). — *a*. Lond. Royal. Soc. Proc. A., t. 85, 1911, p. 401-414.
b. Leipz. Ber., t. 63, 1911, p. 369-387.
c. *P. L. M. S.*, t. 9, 1911, p. 449-462.
d. *Ibid.*, t. 11, 1912, p. 43-95 et 133-184.
e. *Ibid.*, t. 10, 1912. p. 254-272.
f. Lond. Royal. Soc. Proc., A., t. 88, 1913, p. 561-568.
g. Quarterly Journ., t. 44, 1913, p. 49-88.
h. *C. R.*, t. 163, 1916, p. 427.
i. *P. L. M. S.*, t. 17, 1916, p. 195-236.
99. Zygmund (A.). — Bull. Acad. Polon. (Cracovie) A
a. 1924, p. 251-258.
b. 1924, p. 243-249.
c. 1925, p. 208-217.
d. 1925, p. 1-9.
e. 1925, p. 267-287.
f. 1926, p. 185-191.
g. 1927, p. 309-331.
h. *C. R.*, t. 181, 1925, p. 1122.
i. *M. Z.*, t. 25, 1926, p. 291-296.

Ouvrages à consulter.

S. A. F. Andersen, *Studier over Cesaro's Summabilitetsmetode.* Copenhague, J. Gjellerup, 1921.

A. L. Bieberbach, *Neuere Untersuchungen etc. Encykl. Math. Wissenschaften.* Bd. II 3, Heft 4; B. G. Teubner, 1920.

B. E Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

C. A. Buhl, *Séries analytiques. Sommabilité.* (*Mémorial des Sciences mathématiques.* Fasc. VII, Paris, Gauthier-Villars, 1925).

D. A. Burhardt, *Trigonometrische Reihen und Integrale* (*Encykl. Math. Wiss.*, Bd. II 1, Hefte 7,8. B. G. Teubner, 1914).

E. P. Dienes, *Leçons sur les singularités des fonctions analytiques.* Paris, Gauthier-Villars, 1913.

F. W. B. FORD, *Studies on Divergent series and Summability*. New-York, Macmillan, 1916.

H.-R. G. H. HARDY et M. RIESZ, *The general Theory of Dirichlet's series*. Cambridge Tracts, n° 18, 1915.

G. E. HILB et M. RIESZ, *Neuere Untersuch. über die Fourierische Reiben* (*Encykl. Math. Wiss.*, Bd. II 3, Heft 8, B. G. Teubner, 1924).

J. K. KNOPP, *Théorie und Anwendung unendlicher Reihen*. Berlin, 1924.

K. E. KOGBETLIANTZ, *Sur le rôle de l'antipode dans la théorie des séries de Laplace* (*Bull. des Scienc. Math.* (2), t. 49, janvier 1925).

L. E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*. Berlin, 1916.

M. M. PLANCHEREL, *Le développement de la théorie des séries trigonométriques* (*L'Enseignement math.*, t. 24, 1925, p. 19 58).

N. L. L. SMAIL, *Theory of summable infinite Processes. Univ. of Oregon. Univ. Press.*, 1925.

O. G. VALIRON, *Théorie générale des séries de Dirichlet* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, Fasc. XVII, Paris, Gauthier-Villars, 1926).

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE V.

Applications des moyennes arithmétiques et typiques.

91740 31 — Paris, Imp Gauthier Villars et , 55, quai des Grands-Augustins (6e).