N. Saltykow

Méthodes classiques d’intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 50 (1931)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1931__50__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur a la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE L

Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre

Par M. N. SALTYKOW
Professeur à l'Université de Belgrade.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1931

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

MÉTHODES CLASSIQUES D'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

A UNE FONCTION INCONNUE

Par M. N. SALTYKOW,
Professeur à l'Université de Belgrade.

INTRODUCTION.

« ... On doit à Fontaine la manière d'envisager les équations différentielles comme résultat de l'élimination des constantes arbitraires entre une équation primitive et ses différentielles immédiates. Cette remarque contient le germe de la théorie de toutes les espèces d'équations différentielles, ou aux différences, et sert de base à l'élégante théorie des solutions (ou intégrales) particulières donnée en 1774 par Lagrange... » ; ainsi s'exprimait Lacroix en rédigeant la nouvelle édition du Tome III de l'*Histoire des Mathématiques* de I. F. Montucla [1].

Les équations différentielles proviennent, d'autre part, de la mise en équations de différents problèmes. « Tous les problèmes de Géométrie, où l'on considère des surfaces », dit Lagrange [2], sur les équātions aux dérivées partielles, « et tous ceux de Mécanique, où l'on considère des corps ou flexibles ou fluides, dépendent de la théorie de ces équations ».

Euler et Lagrange ont traité les premiers problèmes géométriques sur l'*équivalence* [3] et sur les *trajectoires* [4] des surfaces, conduisant aux équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue. Ensuite, G. Monge et S. Lie [5] ont donné beaucoup d'autres exemples géométriques sur les mêmes équations.

Quant à la théorie d'intégration de ces dernières équations, elle ne date que de 1734 [6]. L'étude des méthodes constituant ladite théorie est fort attrayante, car elles étaient fondées par les plus illustres savants. En relisant leurs travaux, on y voit naître les méthodes que possède la Science d'aujourd'hui.

CHAPITRE I.

ORIGINE DES MÉTHODES D'INTÉGRATION.

1. **Principes posés par Euler et d'Alembert.** — L'idée d'Euler [6] était de ramener l'intégration des équations partielles à celle des équations différentielles ordinaires. Ce principe domine actuellement la théorie des équations partielles, et tout progrès, dans ce domaine, est intimement lié aux succès obtenus dans l'application du principe introduit.

On y réussit aisément, s'il s'agit, par exemple, d'une équation qui ne contienne que la dérivée partielle prise par rapport à l'une des variables indépendantes, les autres ne figurant, dans l'équation, qu'à titre des paramètres constants. Il suffit, alors, d'introduire dans l'intégrale une fonction arbitraire de ces derniers paramètres, au lieu d'y considérer une constante arbitraire.

D'Alembert [7] a réussi à effectuer la réduction mentionnée en passant à une équation aux différentielles ordinaires, par l'intermédiaire de la relation aux différentielles totales qui s'impose dans la théorie des équations partielles.

Considérons, pour fixer les idées, une fonction z des deux variables indépendantes x et y, en désignant par p et q les dérivées partielles du premier ordre de z prises respectivement par rapport à x et y, de manière qu'on ait

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

Il s'ensuit la relation équivalente aux différentielles totales en question

$$dz = p\,dx + q\,dy. \tag{1}$$

Une équation aux dérivées partielles du premier ordre s'exprimera, donc par une relation fonctionnelle entre les cinq quantités variables x, y, z, p et q, à savoir,

$$\mathcal{F}(x, y, z, p, q) = 0. \tag{2}$$

Cela étant, les procédés d'intégration de d'Alembert sont fondés sur les deux principes que nous allons formuler de la manière suivante :

1° La valeur de la dérivée seconde d'une fonction de deux variables est indépendante de l'ordre des différentiations par rapport à ces dernières. (Ce théorème a été donné par Euler; on connaît les conditions complémentaires nécessaires pour l'existence de ce dernier.)

2° Formation d'une différentielle exacte moyennant les deux relations (1) et (2) de sorte que l'intégration de cette dernière donne l'intégrale requise.

En appliquant les deux principes que l'on vient de formuler, d'Alembert avait intégré l'équation différentielle de la corde vibrante [7], et créa une méthode qui se prête à l'intégration de toutes les équations partielles.

Vingt ans après la publication de ce dernier travail, Euler publia, en 1768-1770, ses *Institutiones Calculi Integralis*, dont le troisième volume est consacré aux équations partielles [8].

Pour intégrer ces dernières Euler applique les principes indiqués plus haut. Il réussit à intégrer, de cette manière, un grand nombre d'équations d'une forme particulière.

Il y applique les calculs nécessaires, soit immédiatement, soit en utilisant des transformations des variables, qui peuvent, encore aujourd'hui, nous servir de modèle.

Toutes les intégrales trouvées par Euler impliquent une fonction *arbitraire* [9]. En attribuant à cette dernière des valeurs particulières, Euler obtient les intégrales qu'il dit *particulières* [10].

Il va sans dire que le procédé d'intégration considéré étant artificiel est d'ailleurs très intuitif. Or, il donne une solution, à vrai dire, primitive des deux problèmes qui restent cependant fondamentaux pour la théorie des équations partielles considérées, à savoir :

1° La réduction du problème d'intégration d'une équation partielle à celle aux différentielles ordinaires;

2° La quadrature d'une equation aux différentielles, totales que devient la relation (1), grâce à l'équation donnée (2).

On trouve dans les travaux d'Euler, indépendamment de la méthode citée, encore d'autres idées fécondes pour le progrès de la théorie étudiée. Euler démontre la condition d'intégrabilité d'une équation aux différentielles totales à trois variables. Il écrit, enfin, ladite condition pour l'équation (1), dans l'hypothèse que p et q soient des fonctions des variables x, y et z, sous la forme classique [11]

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p. \tag{3}$$

De suite, Euler donne un procédé pratique pour intégrer une équation aux différentielles totales, sans d'ailleurs le fonder du point de vue théorique. Ce procédé, à présent classique, ne suppose d'abord que la variation de deux variables et, ensuite, exige la variation de la constante arbitraire, s'introduisant par l'intégration de l'équation tronquée. Euler intègre de cette manière maintes équations d'une forme particulière.

2. **Travaux de Lagrange.** — Deux ans après la publication du Traité d'Euler, Lagrange présenta à l'Académie de Berlin, où il séjournait alors, son premier Mémoire sur les équations partielles [12]. Le Traité d'Euler était bien connu de Lagrange, comme il résulte de sa correspondance avec d'Alembert. Aussi les découvertes de Lagrange représentent un important développement des travaux d'Euler.

En définissant, d'abord, la valeur de p, moyennant l'équation donnée (2), Lagrange démontre le théorème inverse de celui d'Euler, à savoir, que l'expression (1) devient une équation aux différentielles totales, dès que la variable q, considérée comme fonction de x, y et z, vérifie la condition eulérienne (3).

Ensuite, est établie rigoureusement la théorie dont se servit Euler pour intégrer une équation aux différentielles totales.

Cela étant, pour intégrer l'équation partielle (2), Lagrange prend comme point de départ la relation (3) qui est linéaire par rapport aux dérivées partielles des fonctions p et q. Il cherche à tirer de l'équation (3) une valeur de q qui ait « toute la généralité que cette équation comporte », pour avoir « par son moyen la valeur complète » de z. (Le mot « *complète* » est employé au lieu de *générale*.)

A cette époque Lagrange n'était pas encore en possession de la théorie d'intégration des équations linéaires partielles, ni de ses notions sur les différentes solutions des équations aux dérivées partielles.

Lagrange recherche pour l'équation (3) une solution quelconque, qui contiendrait une constante arbitraire; en la faisant varier on obtient la solution cherchée impliquant, à la manière d'Euler, une fonction arbitraire. Le succès de Lagrange provient de ce qu'il avait trouvé le moyen, pour effectuer l'intégration requise, de grouper en *neuf cas* déterminés toutes les équations particulières distinctes qu'Euler avait intégrées, par des procédés différents. « Les cas que nous venons d'examiner », dit Lagrange, « renferment d'une manière générale à peu près tout ce que l'on sait sur l'intégration des équations du premier ordre entre trois variables; d'où l'on voit combien peu on est encore avancé dans cette matière. »

Dans un nouveau Mémoire [14] Lagrange donne la théorie classique des intégrales complètes, générales et singulières (qu'il nommait particulières), et intègre encore deux nouveaux types d'équations [15].

Enfin, Lagrange étudie [16] les équations linéaires, dont il formule la théorie dans son Mémoire de 1785. Il s'y exprime ainsi [17] :

« La plupart des recherches analytiques qu'on a faites depuis vingt ans ont eu pour objet l'intégration de ce genre d'équations et elles ont produit différentes méthodes plus ou moins générales et plus ou moins utiles. Une des plus étendues et des plus simples tout à la fois est, je crois, celle que j'ai donnée dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1779 (*Œuvres complètes*, t. IV, p. 585) et qui apprend à intégrer toutes les équations aux différences du premier ordre, dans lesquelles ces différences ne paraissent que sous la forme linéaire. »

En intégrant ses 11 types d'équations citées ainsi que les équations linéaires aux dérivées partielles, Lagrange exprime leurs intégrales sous une forme finie et bien déterminée, moyennant des quadratures ou des intégrales d'équations différentielles ordinaires.

C'est cet état de connaissances créées par Lagrange, dans le domaine étudié, qu'il faut envisager pour bien interpréter certains passages du Mémoire de Lagrange, de 1785, et d'un autre de Monge.

Il s'agit précisément de l'équation des trajectoires obliques d'une famille des surfaces [18] :

$$1 + Xp + Yq = \cos\omega\sqrt{1 + X^2 + Y^2}\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Lagrange écrivait que cette dernière équation « *n'est intégrable, en général, par aucune méthode connue* ».

De même Monge avait dit, en 1784, que l'équation [19]

$$bx^2(z + px - qy)^2 + aby^2(z - px + qy)^2 + az^2(z + px + qy)^2 = 0$$

n'était pas non plus intégrable.

Les deux dernières équations partielles n'entrent pas dans les 11 cas cités; elles n'appartiennent donc point à celles des équations que l'on savait *alors* intégrer. Par conséquent, on ne peut pas partager l'avis de S. Lie [20] « *qu'en traitant le problème sur les trajectoires en question, Lagrange n'avait pas momentanément pensé à sa propre méthode générale* ».

Il est à regretter que ce dernier jugement ait été répété par M. G. Kowalewski [21], à l'occasion de la traduction en allemand du beau Mémoire de Lagrange, et ensuite renouvelé par M. G. Scheffers, dans l'édition allemande du Traité d'Analyse de J.-A. Serret [22].

Lagrange est renommé par l'autorité de ses aperçus historiques d'introduction sur les questions dont il abordait l'étude. Quant au problème des trajectoires de surfaces, Lagrange y est revenu deux fois, en cherchant à étendre ses résultats. Dans son Mémoire de 1779, Lagrange trouve les trajectoires orthogonales de certaines sphères; et il étend *géométriquement* le résultat obtenu, pour les trajectoires obliques d'une autre famille de surfaces sphériques. Le Mémoire de 1785 généralise le problème sur les trajectoires orthogonales d'une famille d'ellipsoïdes.

Contrairement à l'assertion de S. Lie, Lagrange indique dans les lignes citées plus haut qu'il n'y avait alors que « *différentes méthodes plus ou moins générales et plus ou moins utiles* ».

Quant à la méthode générale d'intégration des équations considérées, elle s'est formée, grâce à l'intervention de Charpit.

3. **Mémoire de Charpit.** — La mention de S. Lie, que nous critiquons, peut être expliquée par une autre assertion qu'il avait aussi émise sur le travail de Charpit. S. Lie affirmait [23] que les mérites de Charpit disparaissent devant ceux de Lagrange. Le jugement de S. Lie s'explique aisément parce que le Mémoire de Charpit, présenté, en 1784, à l'Académie des Sciences de Paris, n'a pas été publié. On n'en savait donc que ce qui a été écrit sur son rapport par Lacroix [24].

Peut-être les critiques de S. Lie étaient-elles provoquées par une Note un peu ironique de Jacobi [25]. En citant les indications de Lacroix sur l'œuvre de Charpit, Jacobi ajoute : « ... Quod qui lentum ingenii humani progressum ignorat, facile mirori possit; nam qui utrumque invenit et $A = B$ et $B = C$, ei vindicari posse videtur inventio esse $A = C$. Sed Ill. Lagrange ipse illam affirmare videtur sententiam... », Jacobi néanmoins termine sa Note, en insistant sur ce que le Mémoire de Charpit devrait être retrouvé et publié....

Mais ce n'est que dernièrement, vers la fin de l'année 1928, que l'on a retrouvé, une copie du Mémoire de Charpit. Nous devons cette découverte à M. H. Villat, à M. É. Picard, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de Paris, et à M. P. Gauja, conservateur des Archives de cette Académie. Le document trouvé est d'une grande valeur historique, car il porte des Notes bibliographiques très importantes. On y voit indiqué que le Mémoire en question n'a été communiqué à Lagrange qu'en 1793.

En partant des idées de Lagrange formulées dans son Mémoire de 1772 et de sa théorie des équations linéaires, Charpit a eu, d'abord, la chance de former, le premier, les équations différentielles ordinaires des caractéristiques, que l'on attribue fréquemment à Lagrange. Ensuite, Charpit indique qu'il suffit d'avoir une intégrale quelconque de ce dernier système, à condition qu'elle soit résoluble, ensemble avec l'équation (2), par rapport aux dérivées p et q. Cela étant, Charpit obtient l'intégrale complète de l'équation donnée (2), en intégrant l'équation aux différentielles totales que devient la formule (1).

Comme on le voit c'est la théorie d'intégration classique qui est exposée dans les Cours d'Analyse. L'intuition de Charpit l'avait donc conduit vers la solution générale du problème d'intégration avant son illustre maître.

De plus l'exposé de Charpit fait voir que les 11 cas d'équations intégrées qui représentaient tout le contenu des anciennes méthodes de Lagrange, ne jouent que le rôle d'exemples bons pour expliquer la méthode générale de Charpit.

Les mérites de ce géomètre vont encore plus loin. Il faudrait pour les apprécier revenir à son Mémoire même [26].

Il y a cependant une observation à faire, c'est que Charpit n'avait pas démontré les théorèmes inverses nécessaires pour la rigueur de sa méthode, à savoir :

1° Toute intégrale des caractéristiques définit une solution de l'équation linéaire aux dérivées partielles correspondante;

2° Toute intégrale des caractéristiques vérifie la condition eulérienne (3).

Ces théorèmes n'ont été démontrés que plus tard par Jacobi.

4. **Œuvres didactiques de Lagrange.** — Après son dernier Mémoire sur les équations partielles, de 1785, publié comme les autres à Berlin, Lagrange vint en 1787, s'installer à Paris. Il n'a repris, dès lors, la théorie des équations partielles que dans son enseignement.

Quatre ans après avoir pris connaissance des résultats obtenus par Charpit, Lagrange y est revenu dans sa *Théorie des Fonctions analytiques*, publiée en 1797 [27]. Le Chapitre XVI contient la formation des équations différentielles des caractéristiques; mais cela d'une manière plus compliquée que chez Charpit. Sur la page 178 de sa *Théorie*, Lagrange répète les résultats de Charpit, sans les compléter et sans mentionner le nom de leur auteur.

En 1801, Lagrange publia son second travail : *Leçons sur le Calcul des Fonctions* [28]. Il y revient, dans la XX^e Leçon, sur le problème en question.

Charpit avait remarqué, en exposant sa méthode générale d'intégration, que la solution si élémentaire du problème, qu'il vient de donner, avait échappé à Lagrange. Or, l'illustre géomètre, en passant sur cette remarque audacieuse du jeune savant, constate franchement que le problème en question fut l'objet de ses longues méditations.

Il avoue que la question même l'avait « longtemps tourmenté » [29]. Son but était d'obtenir l'intégrale générale de l'équation donnée (2), moyennant l'intégrale générale des caractéristiques. Lagrange surmonte cette difficulté, dans sa XX^e Leçon, de la manière la plus ingénieuse. Il y démontre la formation des intégrales générales et complètes, pour une équation aux dérivées partielles, par l'intermédiaire de l'intégrale générale des caractéristiques de cette dernière.

Il est encore intéressant de constater que l'exposé de la méthode d'intégration de Lagrange et de Charpit, dans les Traités d'Analyse, est basée tout de même sur le calcul de Charpit et sur l'extension que lui avait donné Jacobi.

Les considérations exposées justifient suffisamment le double nom que porte la théorie étudiée.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS LINÉAIRES.

5. **Considérations bibliographiques.** — La théorie d'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles d'une fonction inconnue, qui nous paraît si élémentaire, avait présenté de grandes difficultés pour les premiers chercheurs.

Euler et, après lui, Lagrange, dans ses premiers Mémoires sur les équations aux dérivées partielles, ne faisaient pas de distinction entre les équations linéaires et celles qui ne le sont pas, en les intégrant, les unes et les autres, par des méthodes artificielles.

Euler avait méconnu la relation entre les équations linéaires et celles aux différentielles ordinaires. Ce fait avait été de nouveau affirmé par M. F. Engel dernièrement, dans sa préface au troisième volume des *Institutiones* d'Euler [30].

Par conséquent, S. Lie n'avait pas raison, dans son esquisse *Sur les anciennes recherches de la théorie des équations partielles* [31], d'attribuer à Euler la découverte du lien entre les problèmes de l'intégration d'un système des deux équations différentielles ordinaires et de celle d'une équation partielle linéaire à trois variables. Il est vrai qu'Euler avait de très près approché cette théorie, en intégrant le problème particulier n° 82 (*Institutiones C. Int.*, t. III, p. 347). Néanmoins, comme l'avait dit encore Jacobi (*Œuvres complètes*, t. IV, p. 238-239), Euler n'a pas réussi à établir la connexion des deux problèmes en question concernant le cas de trois variables.

S. Lie affirme, dans le même article cité, que Lagrange réduisit l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires d'un nombre quelconque de variables à celle d'une équation partielle homogène. Quelques lignes plus bas, S. Lie dit qu'il n'imagine pas ce que pouvait découvrir Jacobi d'essentiellement nouveau dans le domaine considéré.

Or, l'avis de Jacobi [32] sur ce rapport est plus exact. Il dit, en abordant l'étude des équations partielles, que Lagrange n'avait donné que les premières indications générales pour intégrer les équations linéaires en question.

En effet, Lagrange démontra qu'une équation linéaire aux dérivées partielles pouvait être identifiée, grâce aux intégrales des équations différentielles ordinaires correspondantes. Il avait ensuite obtenu, par une méthode très compliquée, l'intégrale générale de l'équation inéaire considérée, en y appliquant l'idée généralisée du procédé d'intégration de d'Alembert et d'Euler.

Mais Lagrange n'avait pas étudié le résultat inverse dont il a été question plus haut (*voir* p. 8).

Cependant les contributions de Jacobi [33], dans le domaine considéré, sont importantes.

Il avait en détail établi les relations qui existent entre les trois problèmes d'intégration, précisément celle d'une équation linéaire aux dérivées partielles homogène, non homogène et un système d'équations différentielles ordinaires; il étudia les différentes solutions d'une équation linéaire, en réduisit l'intégration à un système d'équations différentielles ordinaires; enfin, Jacobi démontra la formation de l'intégrale générale d'une manière bien plus simple que ne l'avait fait Lagrange.

Encore, Jacobi créa la théorie des équations partielles linéaires simultanées.

L'exposé de Jacobi s'est conservé, dans ses grandes lignes, dans l'enseignement jusqu'à présent.

Une nouvelle méthode analytique a été donnée par N. Saltykow [34] pour la formation des équations différentielles ordinaires ou celles aux différentielles totales équivalentes respectivement, soit à une équation linéaire aux dérivées partielles, soit à un système d'équations linéaires simultanées.

6. Équations simultanées. — Considérons un système de m équations linéaires distinctes

$$\sum_{s=1}^{n} P_s^k p_s = P_{n+1}^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m; \qquad m < n+1), \tag{1}$$

les coefficients P_s^k, P_{n+1}^k désignant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, où l'on a posé $x_{n+1} \equiv z$.

Si ces dernières équations sont compatibles, elles sont équivalentes à un système d'équations homogènes, à savoir :

$$P^k(f) \equiv \sum_{s=1}^{n+1} P_s^k \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Les premiers membres des équations obtenues (2), que l'on a désignés par le symbole $P^k(f)$, jouissent de la propriété remarquable suivante :

Les expressions définies par les doubles parenthèses

$$P^k(P^h(f)) - P^h(P^k(f)) \tag{3}$$

sont linéaires et homogènes par rapport aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.

Il y a deux cas à distinguer :

1° Si les parenthèses (3) s'annulent, en vertu des équations (2), leur système ou le système (1) est dit *complet* ou *fermé*. Dans le cas particulier, où les formules (3) s'évanouissent identiquement, le système considéré s'appelle *normal*, et les équations de ce dernier sont dites en *involution;*

2° Si les parenthèses (3) ne s'annulent pas, en les égalant à zéro on obtiendrait de nouvelles équations de la forme (2). En les joignant aux équations primitives (2), on recommence le calcul des parenthèses considérées pour le nouveau système obtenu, et ainsi de suite. Si l'on arrive, en fin de compte, à un système fermé ou normal de plusieurs équations distinctes, dont le nombre est moindre que $n+1$, le système donné (1) est alors intégrable. Dans le cas contraire, les équations données sont incompatibles.

Supposons donc que le système (1) ou (2) soit intégrable. On le mettra alors sous la forme dite *jacobienne*,

$$(4) \qquad p_k + \sum_{r=1}^{n-m} X_r^k p_{m+r} = X_{n-m+1}^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

ou bien

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-m+1} X_r^k \frac{\partial f}{\partial x_{m+r}} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Les $n-m+1$ intégrales distinctes, de chacun de ces deux systèmes, sont définies par l'intégration du système d'équations aux différentielles totales

$$(6) \qquad dx_{m+r} = \sum_{k=1}^{m} X_r^k dx_k \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-m+1).$$

Toute méthode d'intégration de ces dernières équations conduit, inversement, à l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles considérées.

Il est important, d'autre part, d'étudier les procédés d'intégration des équations données (1) et (2) indépendamment du système (6).

7. **Intégration d'un système.** — Considérons, d'abord, un système jacobien (5). Pour l'intégrer, Jacobi part du théorème suivant :

En substituant une intégrale quelconque de l'une des équations du système (5) *dans les premiers membres des autres équations du même système, l'on obtient des intégrales de la première équation considérée.*

En cherchant, ensuite, une fonction des intégrales obtenues, telle qu'elle vérifie identiquement une seconde équation (5), on a l'intégrale commune aux deux premières équations considérées. Appliquant le calcul analogue à une troisième équation, et ainsi de suite, nous trouvons les integrales requises.

La méthode exposée est avantageuse, car elle permet de varier les calculs, en les appliquant à l'une ou à l'autre des équations, à notre choix, et à n'importe laquelle de leurs intégrales afin d'éviter les difficultés qui pourraient se présenter.

Une autre méthode, donnée par Mayer, réduit l'intégration d'un système jacobien à celle d'une seule équation partielle linéaire.

Le théorème de Jacobi, cité plus haut, permet parfois de simplifier l'application de la méthode de Mayer, si la première intégrale que l'on prend n'est pas principale (car cette dernière est commune à toutes les équations du système et elle les vérifie donc identiquement).

Considérons, par exemple, le système jacobien :

$$p_1 - \frac{1}{x_3 x_4} p_3 + \frac{1}{x_3^2} p_4 = 0, \qquad p_2 + \frac{1}{x_4} p_3 - \frac{2}{x_3} p_4 = 0.$$

En posant $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1 y_2$, on a le système transformé

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{1}{x_4}\left(y_2 - \frac{1}{x_3}\right)\frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{1}{x_3}\left(\frac{1}{x_3} - 2y_2\right)\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{y_1}{x_4}\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{2y_1}{x_3}\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0.$$

La première de ces deux dernières équations admet l'intégrale $(1 - y_2 x_3) x_3 x_4$ qui n'est pas principale. Le résultat de la substitution de cette dernière intégrale, dans le premier membre de la seconde équation, produit la seconde intégrale $y_1 + x_3^2 x_4$ de la première équation.

Donc, le système complet des intégrales principales de la première équation, formé au moyen de deux intégrales obtenues, nous donne les deux intégrales requises du système donné.

Passons à présent à l'intégration d'un système quelconque (1) ou (2) par la méthode de Korkine-Lindelöf [35]. Elle a l'avantage de ne pas nécessiter la connaissance préalable du fait que les équations données soient compatibles ou non. Le calcul que l'on va exposer conduit, d'ailleurs, soit à l'intégrale requise, ou bien il démontre que les équations données sont incompatibles.

Supposons, pour fixer les idées, que les μ premières équations (2) (où l'on a $1 \leqq \mu < m$) admettent un système complet des $n - \mu + 1$ intégrales

$$(7) \qquad y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_{n-\mu+1},$$

distinctes par rapport aux variables

$$x_{\mu+1}, \; x_{\mu+2}, \; \ldots, \; x_{n+1}.$$

Introduisons, au lieu de ces dernières variables, les fonctions (7). Le système transformé devient :

$$(8)\qquad \begin{cases} Q^i(f) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, \mu), \\ Q^{\mu+k}(f) \equiv \displaystyle\sum_{r=1}^{n-\mu+1} Q_r^k \dfrac{\partial f}{\partial y_r} = 0 & (k = 1, 2, \ldots, m-\mu), \end{cases}$$

les coefficients Q_r^k désignant, en général, des fonctions de

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\mu, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{n-\mu+1}.$$

Or, si le système donné (4), et par conséquent, le système transformé (8) est intégrable, l'intégrale de ce dernier ne dépend point des variables x_1, x_2, ..., x_μ, comme le démontrent les μ premières équations (8). Par conséquent, on en tire de nouvelles égalités en différentiant les $n-\mu$ dernières equations (8) par rapport aux variables x_1, x_2, ..., x_μ, à savoir :

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q^{\mu+k}}{\partial x_i} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 Q^{\mu+k}}{\partial x_i \partial x_h} = 0, \quad \ldots \\ \dfrac{\partial^\sigma Q^{\mu+k}}{\partial x_i^\lambda \partial x_h^r \ldots \partial x_q^s} = 0, \quad \lambda + r + \ldots + s \equiv \sigma, \quad \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-\mu), \end{cases}$$

les indices i, h, ..., q prenant toutes les valeurs distinctes de 1 jusqu'à μ.

Il est évident que ces dernières équations (9) étant linéaires et homogènes ne contiennent que les dérivées partielles du premier ordre prises par rapport aux variables y_r.

On arrive à l'étude de deux cas qui peuvent se présenter :

Supposons, d'abord, que le nombre d'équations (9) doit être tel que l'ensemble d'équations (2) et (9) se transforme dans un système *du même nombre* d'équations, qui sont cependant indépendantes de variables x_1, x_2, ..., x_μ. Si le système obtenu implique autant d'équations que leur nombre est au moins égal ou surpasse celui de dérivées, le système donné (2) n'est pas intégrable.

Au contraire, si l'on obtient, en seconde hypothèse, le nombre d'équations moindre que celui de dérivées, on doit renouveler, avec le système obtenu, le calcul qu'on avait appliqué aux équations données (2).

En poursuivant les mêmes opérations, le nombre des variables diminuant toujours, on obtient, en définitive, l'intégrale requise, à moins que l'on ne constate que les équations données (2) sont incompatibles.

Si le système (2) est complet, alors il est aisé d'affirmer que la première transformation des variables effectuée conduirait toujours à un système, dont les équations n'impliquent point les anciennes variables. Ce fait résulte immédiatement du théorème sur le nombre des intégrales distinctes d'un système.

Intégrons, par exemple, le système de M. E. Lindelöf,

$$(10)\qquad \begin{cases} 2x_1p_1 + 3x_2p_2 + 4x_3p_3 + 5x_4p_4 = 0, \\ p_1 + 4x_1p_3 + 5x_2p_4 = 0, \qquad x_2p_3 + 2(x_3 - 2x_1^2)p_4 = 0. \end{cases}$$

En résolvant les deux dernières équations (10) par rapport à p_1 et p_3, on obtient un système jacobien à une intégrale unique

$$y \equiv 5x_1x_2 + \frac{(x_3 - 2x_1^2)^2}{x_2} - x_4.$$

Si l'on introduit y comme nouvelle variable au lieu de x_4, le système (10) transformé devient

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \qquad 3x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + 5y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

L'expression $\frac{y^3}{x_2^5}$ représente l'intégrale unique de ce dernier système.

Par conséquent, la transformation inverse des variables donne l'intégrale requise du système donné (10),

$$\frac{1}{x_2^8}[(5x_1x_2 - x_4)x_2 + (x_3 - 2x_1^2)^2]^3.$$

8. **Formes et invariants adjoints.** — Le théorème de Jacobi, dont il s'est servi pour l'intégration d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles (*voir* p. 12, n° 7), est devenu la base de nombreuses recherches dans le domaine considéré. Le calcul d'une intégrale d'un système d'équations étudiées exige, du point de vue formel, d'autant moins d'opérations d'intégration, que plus grand est le nombre des équations du système à intégrer. Par conséquent, il est avantageux,

pour intégrer une équation ou un système donné, de leur adjoindre de nouvelles équations auxiliaires formant avec les anciennes un système complet. Chaque intégrale de ce nouveau système obtenu représente, en même temps, l'une des intégrales requises des équations données.

L'idée exposée a été réalisée dans des différentes théories modernes créées par les géomètres S. Lie, A. Mayer, H. Poincaré, P. Appell, Th. De Donder, E. Goursat, A. Buhl, E. Vessiot et E. Cartan.

Nommons *forme adjointe* [36] le premier membre d'une équation auxiliaire indiquée et disons *invariant adjoint* chaque intégrale de l'une ou de plusieurs de ces dernières équations introduites. Ces nouveaux éléments jouent un rôle bien déterminé par rapport aux méthodes d'intégration exposées dans les numéros précédents. Il est aisé d'approfondir ce lien, en démontrant que les formes adjointes deviennent des intégrales *quadratiques rectangulaires* du système des équations canoniques aux différentielles ordinaires ou totales de Liouville [37].

CHAPITRE III

ÉLÉMENTS INTÉGRAUX RÉGULIERS.

9. **Extension de la méthode de Lagrange et de Charpit.** — Pfaff avait donné, en 1815 [38], la première méthode générale d'intégration d'une équation aux dérivées partielles d'une seule fonction inconnue à un nombre quelconque de variables indépendantes. Cette méthode était une conséquence de la résolution du problème plus général portant son nom.

Cauchy [39], en 1819, et Jacobi [40], en 1836, ont considérablement simplifié le procédé de Pfaff. Ils ont créé une autre méthode spéciale dite respectivement des caractéristiques et la première méthode de Jacobi, qui était intimement liée avec le travail cité de Pfaff.

Mais c'est Jacobi qui donna ensuite la vraie généralisation de la méthode de Lagrange et de Charpit, en surmontant les difficultés qu'avait rencontrées ce dernier géomètre.

D'abord, dans son Mémoire posthume, qui est très peu cité, *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster*

Ordnung zwischen vier variabeln [41], Jacobi avait étendu les considérations classiques de d'Alembert, Euler, Lagrange et Charpit sur une équation à trois variables indépendantes. Ensuite, le second Mémoire posthume de Jacobi, *Nova Methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi* [42], contient sa méthode célèbre d'intégration qui est dite la seconde.

Sans insister sur l'étude détaillée de ces dernières méthodes, nous allons nous placer du point de vue qui a été développé dans nos conférences de Belgique [43]. L'étude immédiate des problèmes de l'intégration en question, sans passer par leurs formes historiques, présente l'avantage de donner une théorie unie des équations étudiées.

10. **Intégrales.** — Cauchy avait étudié, le premier, le problème de l'existence des intégrales des équations considérées. Sa démonstration a été simplifiée par G. Darboux, S. Kowalevskaja, L. Kœnigsberger, E. Goursat et N. Saltykow, et étendue aux systèmes d'équations simultanées par Ch. Riquier, E. Delassus et N. Saltykow.

Enfin, N. Saltykow a étudié l'unicité des intégrales en question.

MM. Severini et Germais ont considéré les problèmes d'existence sous les conditions de Lipschitz.

Jacobi [44] avait complétée la théorie des intégrales de Lagrange, en démontrant que *toute solution, appartenant au domaine d'intégrabilité d'une équation étudiée, s'obtenait toujours à partir de l'intégrale complète.*

Ce résultat fut généralisé par N. Saltykow pour les systèmes d'équations compatibles.

Considérons, par exemple, l'équation

$$pq = xyz, \tag{1}$$

admettant deux intégrales complètes distinctes

$$z = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\left(\frac{y^2}{2} + C_2\right) \tag{2}$$

ou

$$z = \left(\frac{C'}{4}x^2 + \frac{y^2}{4C'} + C''\right)^2, \tag{3}$$

C_1, C_2 et C', C'' désignant des constantes arbitraires distinctes.

Le théorème de Jacobi fait voir qu'il est aisé de passer de l'une intégrale (2) à l'autre (3) moyennant les formules de transformation suivantes :

$$C_1 = \frac{C''}{C'} - \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4C'^2}, \qquad C_2 = C'C'' + \frac{C'^2}{4}x^2 - \frac{y^2}{4}.$$

Pour obtenir, moyennant l'intégrale complète (2), l'intégrale de Cauchy de l'équation donnée (1), par exemple celle qui se réduirait à y^k pour $x = x_0$, l'exposant k étant distinct de zéro, écrivons les équations que donnent les formules de Jacobi

$$(4) \qquad \left(\frac{x_0^2}{2} + C_1\right)\left(\frac{y^2}{2} + C_2\right) = y^k, \qquad \frac{x_0^2}{2} + C_1 = ky^{k-2}.$$

Si les deux dernières formules (4) définissent pour C_1 et C_2 des valeurs constantes, on obtient l'intégrale cherchée de Cauchy, en substituant ces dernières valeurs dans l'intégrale complète (2). Cela arrive, par exemple, lorsque $k = 2$; l'intégrale requise devient alors

$$z = \left(\frac{x^2 - x_0^2}{4} + 1\right)y^2.$$

Or, si en éliminant y des formules (4), on obtient une relation entre C_1 et C_2, il en résulte que l'intégrale de Cauchy correspondante dérive de l'intégrale générale. Ce cas se présente toujours pour $k \lessgtr 2$.

Ainsi, en posant $k = 1$, l'on définit l'intégrale de Cauchy moyennant un ensemble des deux équations suivantes :

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\left[y^2 + \frac{1}{\left(\frac{x_0^2}{2} + C_1\right)^2}\right],$$

$$\left(\frac{x_0^2}{2} + C_1\right)^3 y^2 = x^2 - \frac{x_0^2}{2} + C_1,$$

C_1 y désignant un paramètre auxiliaire à éliminer.

Si l'on a $k = 4$, on réussit, en passant toujours par l'intermédiaire d'une intégrale générale, à mettre l'intégrale requise sous la forme d'une équation unique

$$z = \left(\frac{x^2 - x_0^2}{16} + y^2\right)^2.$$

Les considérations exposées démontrent que tous les problèmes d'intégration d'équations étudiées reviennent à la recherche de leur intégrale complète.

11. Définition de l'élément intégral régulier. — Considérons une équation aux dérivées partielles

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{5}$$

où l'on a posé

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s \, dx_s. \tag{6}$$

En introduisant l'hypothèse

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \gtrless 0, \tag{7}$$

écrivons l'intégrale complète de l'équation donnée (5) sous la forme suivante :

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) + C, \tag{8}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, C désignant n constantes arbitraires.

Il est aisé de supposer, sans diminuer la généralité de nos considérations, que le déterminant fonctionnel suivant soit distinct de zéro,

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_2} \dfrac{\partial V}{\partial x_3} \cdots \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{C_1 C_2 \ldots C_{n-1}}\right) \gtrless 0. \tag{9}$$

Cela étant, les équations différentielles qui s'obtiennent par différentiation de l'intégrale (8),

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

engendrent un système d'équations, dont la première est représentée par l'équation donnée (5), les autres équations étant

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = C_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{11}$$

L'ensemble des n équations (5) et (11), d'après leur définition même, jouit de la double propriété que voici :

1° *Ces équations sont résolubles, dans un certain domaine de régularité, par rapport à toutes les variables* $p_1, p_2, \ldots, p_n$;

2° *Les valeurs de ces dernières variables étant définies, moyennant les équations* (5) *et* (11), *en fonction des* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et des* $n-1$ *constantes arbitraires* $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, *représentent, dans le domaine considéré, les dérivées partielles du premier ordre d'une seule et même fonction* V.

Il est aisé de voir que les deux propriétés, que l'on vient de formuler, sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes pour définir l'intégrale complète de l'équation donnée aux dérivées partielles (5).

En effet, nous allons démontrer le théorème suivant :

Si l'ensemble de l'équation donnée (5) *et de* $n-1$ *autres équations quelconques de la forme* (11) *définit les valeurs de* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *comme fonctions des variables indépendantes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et des* $n-1$ *constantes arbitraires* $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ *rendant l'expression* (6) *différentielle exacte, l'intégrale complète de l'équation* (5) *est représentée par la quadrature de cette dernière différentielle.*

Supposons, pour s'en persuader, que la formule (8) représente ladite quadrature. Il va sans dire que les équations dérivées (10), qui en résultent, représentent, dans le domaine considéré, un système de n équations équivalent, du point de vue algébrique, à l'ensemble des équations (5) et (11).

Cela étant, en substituant dans ces dernières équations les valeurs des p_i données par les formules (10), on aura des identités. Celle qui dérive de l'équation (5) donne l'identité suivante :

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Il s'ensuit donc que la formule (8) est une solution de l'équation (5), et évidemment cette solution en est une intégrale complète.

Nous allons nommer *élément intégral régulier* [45] de l'équation (5) l'ensemble des équations (5) et (11) jouissant de propriétés citées.

L'intégrale complète de l'équation (5) résulte donc d'un élément intégral régulier, moyennant une quadrature.

Par conséquent, le problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles revient à la recherche d'un élément intégral régulier de cette dernière équation.

12. **Fonctions jacobiennes.** — Faisons d'abord abstraction de toute hypothèse sur les équations (5) et (11); en les supposant quelconques (qu'elles forment ou non un élément), on obtient immédiatement, par différentiation, les formules suivantes :

$$(F_i, F_k) + \sum_{s=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_s}\frac{\partial F_k}{\partial p_\sigma} D_{\sigma s} = 0, \tag{12}$$

les parenthèses désignant celles de Poisson que l'on va écrire

$$(F_i, F_k) \equiv \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_r}\frac{\partial F_k}{\partial x_r} - \frac{\partial F_i}{\partial x_r}\frac{\partial F_k}{\partial p_r}\right);$$

quant à la notation $D_{\sigma s}$, elle représente le binome

$$D_{\sigma s} \equiv \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma}. \tag{13}$$

Les formules (12) ont lieu pour toutes les valeurs distinctes des indices i et k, de zéro à $n-1$, en posant

$$F_0 \equiv F.$$

Si l'on suppose, à présent, que les équations (5), (11) engendrent un élément intégral régulier, les valeurs des variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ainsi définies, annulent identiquement les binomes (13); les égalités (12) deviennent alors

$$(F_i, F_k) = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{14}$$

Cela étant, les fonctions

$$F, \quad F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_i, \quad \ldots, \quad F_{n-1} \tag{15}$$

sont dites en involution et elles représentent une suite de *fonctions jacobiennes* qui définit l'élément intégral cherché.

Les formules (12) démontrent aisément que la propriété d'involution (14) est non seulement *nécessaire*, mais aussi *suffisante* pour définir un *élément* que nous étudions.

Le premier membre de la suite jacobienne (15) étant donné, il est aisé de calculer tous les autres, l'un après l'autre, de la manière suivante :

Supposons que l'on connaisse les i premières fonctions (15); la fonction à définir F_i doit alors vérifier les conditions

$$(F, F_i) = 0, \quad (F_1, F_i) = 0, \quad (F_2, F_i) = 0, \quad \ldots, \quad (F_{i-1}, F_i) = 0.$$

Ces dernières égalités démontrent que la fonction cherchée F_i représente une solution d'un système de i équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue f :

$$(16) \qquad (F_k, f) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, i-1),$$

les $2n$ variables

$$(17) \qquad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n$$

y étant considérées comme indépendantes.

Jacobi a démontré que les équations aux dérivées partielles (16) sont bien compatibles, en formant un système normal (*voir* p. 11, n° 6), vu les propriétés d'involution (14) que vérifient entre elles les fonctions $F, F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}$. Ensuite, Jacobi a étendu au système (16) sa méthode d'intégration des systèmes que l'on dit *jacobiens*.

Nous allons appeler l'ensemble d'équations simultanées (16) *système de Jacobi*, en distinction du système qui est dit *jacobien*.

Les démonstrations de la théorie considérée se basent sur les propriétés des parenthèses de Poisson.

Ces propriétés s'expriment par les formules suivantes bien connues :

En désignant par f, φ et ψ trois fonctions quelconques des variables (17), l'on a

$$\text{(I)} \qquad (f, \varphi) = -(\varphi, f);$$

$$\text{(II)} \qquad (f, \varphi \pm \psi) = (f, \varphi) \pm (f, \psi)$$

$$\text{(III)} \qquad (f, \varphi.\psi) = (f, \varphi).\psi + (f, \psi).\varphi;$$

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial}{\partial u}(f, \varphi) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \varphi\right) + \left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right),$$

u étant un paramètre quelconque, soit l'une des variables (17);

$$\text{(V)} \qquad \mathrm{I} \equiv (f, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, f)) + (\psi, (f, \varphi)) \equiv 0.$$

Enfin, si les fonctions f et φ dépendent des variables (17), non seulement immédiatement, mais aussi par l'intermédiaire de plusieurs fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ des mêmes variables, on a alors la formule suivante :

$$(\text{VI}) \qquad (f, \varphi) = (f', \varphi') + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \psi_i}(\psi_i, \varphi') + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_j}(f', \psi_j) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \psi_i}\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_j}(\psi_i, \psi_j),$$

où les symboles f' et φ', introduits dans les parenthèses de Poisson, indiquent que dans ces dernières, l'on ne prend les dérivées partielles de f et de φ que par rapport aux variables dont ces fonctions dépendent immédiatement.

Cela posé, la seconde fonction F_1 de la suite (15) représente une solution de l'équation unique

$$(18) \qquad (F, f) = 0.$$

Quant à la fonction F_2, elle s'obtient par l'intégration d'un système de deux équations, et ainsi de suite.

Il est important d'observer que toutes les fonctions jacobiennes (15) représentent des solutions de la même équation (18) qui est la première de chaque système considéré (16). Par conséquent, d'un autre point de vue, *les fonctions jacobiennes* (15) *représentent des intégrales distinctes de l'équation* (18), *ces intégrales étant sujettes aux conditions d'être entre elles en involution.*

13. Calcul de l'élément intégral régulier. — On appelle *ordre* d'un système d'équations différentielles ordinaires ou totales le *nombre* de ces dernières equations, ou bien celui de leurs intégrales distinctes, ces deux nombres étant identiques.

Le calcul d'une intégrale de l'un de ces deux systèmes d'équations s'appelle, en général, *opération d'intégration* du même ordre que l'ordre du système à intégrer pour obtenir précisément cette dernière intégrale requise. Par conséquent, si l'on connaît une ou plusieurs intégrales du système donné, alors l'ordre de l'opération, pour trouver une nouvelle intégrale, est inférieur à celui du système considéré d'autant d'unités que l'on en connaît d'intégrales. Cela résulte de ce fait que toute intégrale connue, d'un système d'équations aux différentielles ordinaires ou totales, permet d'en abaisser l'ordre d'une unité.

Un système quelconque d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue est équivalent à un système jacobien. Par conséquent, les considérations exposées sur l'ordre d'opération d'une intégration s'appliquent de même à ces dernières équations.

Il en résulte, par exemple, que le calcul de la fonction F_1 de la suite (15), qui s'effectue par l'intégration de l'équation (18), est une opération d'intégration de l'ordre de $2n-2$, car l'équation (18) admet une intégrale évidente F. Pour une raison analogue, l'ordre de l'opération, pour calculer la fonction F_i, est égal au nombre $2n-2i$; en effet, le système (16) admet les i intégrales représentées par les i premières fonctions (15) qui précèdent la fonction cherchée F_i.

Le problème de l'intégration des équations différentielles présentant souvent, au point de vue pratique, des difficultés considérables, on est obligé, pour les surmonter, de modifier les calculs. On y parvient en mettant les fonctions jacobiennes sous différents aspects.

Jacobi avait proposé, par exemple, de résoudre, grâce à l'hypothèse (7), l'équation donnée (5) par rapport à la variable p_1, en remplaçant l'équation (5) par la suivante :

$$p_1 - H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_2, p_3, \ldots, p_n) = 0. \tag{19}$$

On obtiendrait alors, au lieu de l'équation (18), l'équation correspondante, comme il suit :

$$(p_1 - H_1, f) = 0, \tag{20}$$

les fonctions H_1 et f n'impliquant point la variable p_1. Donc l'équation linéaire (20) contient une dérivée de moins que l'équation (18). En revanche, l'équation (20) n'admet point d'intégrales connues, car le symbole $(p_1 - H, F)$ n'est plus identiquement nul, mais il s'évanouit, en général, moyennant l'équation (5). Il s'ensuit que l'ordre, dans le cas considéré, de l'opération, pour avoir une intégrale de l'équation (20), est égal à celui correspondant à l'équation (18).

Supposons que l'on ait obtenu une intégrale f_1 de l'équation (20) de sorte qu'on ait l'identité

$$(p_1 - H_1, f_1) \equiv 0. \tag{21}$$

Égalant l'intégrale f_1 à une constante arbitraire C_1, on a l'équation

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_2, p_3, \ldots, p_n) = C_1 \tag{22}$$

que nous allons supposer être résoluble par rapport à la variable p_2. Il est donc possible d'écrire la dernière équation sous la forme

$$p_2 - H_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_3, p_4, \ldots, p_n, C_1) = 0. \tag{23}$$

Cela étant, en substituant la valeur (22) de C_1 dans le premier membre de l'équation (23), on le rend identiquement égal à zéro. Il s'ensuit donc l'identité

$$(p_1 - H_1, p_2 - [H_2]) \equiv 0, \tag{24}$$

$[H_2]$ désignant le résultat de la substitution effectuée.

Or, grâce à la dernière propriété des parenthèses de Poisson citée antérieurement (*voir* p. 23), l'on a

$$(p_1 - H_1, p_2 - [H_2]) = [(p_1 - H_1, p_2 - H'_2)] - \left[\frac{\partial H_2}{\partial C_1}\right](p_1 - H_1, f_1),$$

les crochets ayant la signification indiquée plus haut. Il s'ensuit, grâce aux identités (24) et (21), l'identité nouvelle

$$[(p_1 - H_1, p_2 - H'_2)] = 0,$$

qui est vérifiée indépendamment de la valeur de la fonction f_1. L'identité obtenue aura donc encore lieu, si l'on y remplace f_1 par sa valeur (22). Alors notre identité prend la forme

$$(p_1 - H_1, p_2 - H_2) = 0.$$

Donc, on en conclut que les deux fonctions

$$p_1 - H_1, \quad p_2 - H_2$$

sont en involution.

On parvient de cette manière à établir l'existence de n fonctions jacobiennes, à savoir :

$$p_1 - H_1, \; p_2 - H_2, \quad \ldots, \quad p_n - H_n, \tag{25}$$

où la fonction quelconque H_k ne dépend que des quantités

$$p_{k+1}, \quad p_{k+2}, \quad \ldots, \quad p_n, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_{k-1},$$

les C désignant des constantes arbitraires.

Quant aux opérations nécessaires pour définir les fonctions (25), leur ordre est indiqué, en général, par la suite des nombres successifs

$$2n-2,\quad 2n-3,\quad \ldots,\quad 3,\quad 2.$$

Enfin, il suffit de poser les fonctions (25) égales à zéro pour en tirer l'intégrale complète de l'équation (5), par la quadrature de la différentielle exacte (6).

Enfin, Jacobi avait développé encore une troisième méthode pour former la suite de ses fonctions. En partant de l'intégrale obtenue (22), mettons l'ensemble des deux équations (19) et (22) sous la forme

$$p_1 - H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_3, p_4, \ldots, p_n, C_1) = 0,$$
$$p_2 - H_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_3, p_4, \ldots, p_n, C_1) = 0.$$

D'abord, il est évident que les deux dernières équations sont en involution. Formons ensuite le système linéaire, qui est à présent jacobien,

$$(p_1 - H_1, f) = 0, \qquad (p_2 - H_2, f) = 0,$$

la fonction inconnue f n'impliquant que les variables indépendantes

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n,\quad p_3,\quad p_4,\quad \ldots,\quad p_n.$$

On parvient, en continuant le calcul, à obtenir la suite des fonctions jacobiennes

$$(26) \qquad p_1 - \varphi_1,\quad p_2 - \varphi_2,\quad \ldots,\quad p_k - \varphi_k,\quad \ldots,\quad p_n - \varphi_n,$$

où chaque fonction φ_k ne contient que les quantités

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}.$$

Il va sans dire que des difficultés peuvent s'introduire dans les calculs par la nécessité de résoudre les systèmes d'équations obtenues. Néanmoins l'avantage de cette dernière méthode consiste en ce que le nombre des variables indépendantes diminue d'une unité pour chaque nouveau système d'équations.

Quant aux opérations d'intégration successives, pour calculer les fonctions (26), elles sont respectivement du même ordre que dans la première méthode basée sur la considération de systèmes de Jacobi (16).

Égalant les fonctions (26) à zéro, on obtient immédiatement l'intégrale complète requise par une quadrature.

Ce dernier procédé d'intégration s'appelle souvent méthode de Jacobi-Mayer.

Il faut, cependant, constater que la méthode en question a été établie par Jacobi dans tous les détails (Jacobi, *Gesam. Werke*, t. V, § 11, p. 15 et suiv.; Imschenetsky, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Paris 1869, n° 42, p. 60-62). Mayer n'avait que modifié la démonstration *de l'invariance de l'involution des systèmes transformés* (*Math. Ann.*, t. 4, Leipzig, 1871, p. 93).

14. Cas particulier d'intégration. — Il est aisé d'indiquer plusieurs cas, où l'on est en état de former immédiatement les suites de fonctions jacobiennes. Le cas classique est celui où chaque fonction F_i de la suite (15) ne dépend que d'une paire des variables conjuguées correspondantes x_{i+1} et p_{i+1}. On dit alors que les variables sont *séparées* dans l'équation donnée (5). Dans ce cas chacune des équations (5) et (11) définit la valeur de l'une des variables p_s comme fonction de la variable conjuguée correspondante x_s. Par conséquent, l'égalité (6) devient immédiatement une différentielle exacte.

Les premières équations ont été intégrées d'après la méthode de séparation des variables par Euler et Lagrange.

Ensuite Jacobi avait appliqué ce procédé pour résoudre plusieurs problèmes du domaine de mécanique et de géométrie. Il suffit, par exemple, de citer le mouvement d'un point attiré par deux centres fixes d'après la loi de Newton, la rotation d'un corps rigide autour d'un point fixe, les problèmes de la mécanique céleste et, enfin, la recherche classique des géodésiques sur la surface d'un ellipsoïde à axes inégaux.

Il faut citer encore les surfaces de Liouville, dont les géodésiques s'obtiennent par une quadrature. Darboux avait consacré à l'étude de ces dernières surfaces de nombreuses pages de sa *Théorie des surfaces*. Les surfaces de révolution et les quadriques sont des surfaces de Liouville. Donc les géodésiques des surfaces du second ordre s'obtiennent moyennant la méthode d'intégration par séparation de variables.

Cette dernière méthode a provoqué beaucoup de recherches de la part de Morera, Staeckel, T. Levi-Civita, Del'Aqua et N. Saltykow qui ont étudié la forme des équations intégrables par séparation des variables.

D'autres cas particuliers interviennent, où l'ordre et le nombre des opérations d'intégration nécessaires pour achever l'intégration peuvent être diminués. Enfin, les efforts que les géomètres ont exercés pour intégrer les équations différentielles du problème des trois corps ont conduit Jacobi à poser un nouveau problème important pour le développement des théories que nous étudions.

15. **Problème de Jacobi.** — Supposons qu'au lieu des intégrales exigées par la théorie de Jacobi l'on connaisse d'autres intégrales quelconques de l'équation linéaire (18) ou du système (16). Jacobi avait alors posé la question d'utiliser les intégrales obtenues afin d'en tirer profit pour achever l'intégration de l'équation proposée.

Pour en donner une idée, considérons, par exemple, l'équation aux dérivées partielles

$$F \equiv (p_1 + x_2)(p_2 + x_3)(p_3 + x_1) - a = 0,$$

a désignant une quantité constante quelconque.

Il en résulte immédiatement que l'équation linéaire (18) admet, dans notre cas, les trois intégrales

$$f_1 \equiv p_1 + x_2, \qquad f_2 \equiv p_2 + x_1, \qquad f_3 \equiv p_3 + x_2.$$

Ces dernières intégrales vérifient les conditions suivantes :

$$(f_1, f_2) \equiv 1, \qquad (f_1, f_3) \equiv -1, \qquad (f_2, f_3) \equiv 1.$$

Or, la somme des deux premières égalités,

$$(f_1, f_2) + (f_1, f_3) \equiv 0,$$

démontre que l'on a, en vertu de la seconde propriété des parenthèses de Poisson,

$$(f_1, f_2 + f_3) \equiv 0.$$

On a, par conséquent, la suite des trois fonctions jacobiennes :

$$F, \quad f_1, \quad f_2 + f_3.$$

Égalons les deux dernières fonctions respectivement à deux constantes arbitraires C_1 et C_2. L'ensemble des deux équations obtenues et de l'équation donnée définit l'intégrale complète de cette dernière équation par une quadrature, à savoir :

$$z = C_1 x_1 + \left(C_2 - \frac{1}{2} x_2\right) x_2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_3 - C_2)^2 - x_1 x_3 \pm \int R\, d(x_2 - x_3) + C,$$

en posant

$$R \equiv \sqrt{\frac{(x_2 - x_3 - C_2)^2}{4} - \frac{a}{C_1 + x_2 - x_3}},$$

C désignant la constante arbitraire additive.

La structure de fonctions jacobiennes saute aux yeux dans l'exemple traité. Mais Jacobi [46], pour aborder son problème général, se sert de l'idée dont il avait profité pour intégrer les équations linéaires simultanées. Il cherche précisément une ou plusieurs fonctions d'intégrales connues telles qu'elles doivent vérifier les conditions imposées d'involution. Deux différentes solutions du problème général de Jacobi ont été données l'une par S. Lie [47] et l'autre par N. Saltykow [48] (1).

16. Équations contenant explicitement la variable fonctionnelle. — Considérons pour fixer les idées, l'équation

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0. \tag{27}$$

On transforme souvent cette dernière équation en une nouvelle qui ne contient plus explicitement la fonction inconnue; mais, en revanche, on introduit dans l'équation obtenue une variable indépendante et une dérivée de plus que dans l'équation donnée (27).

Cependant, il est aisé d'étendre, en conservant les anciennes variables, la théorie jacobienne à l'équation (27).

Le problème revient, en effet, à la recherche des $n-1$ équations

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{28}$$

les C_i étant des constantes arbitraires, définissant ensemble, avec l'équation donnée (27), les valeurs des variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$ qui

(1) Ce problème sera exposé avec détail par l'auteur dans un fascicule spécial du *Mémorial : Méthodes modernes d'intégration des équations partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue.*

rendent la relation (6) une équation aux différentielles totales; l'intégration de cette dernière donne l'intégrale complète requise.

Il est possible, d'une autre manière, de chercher, au lieu de $n-1$, les n équations de la forme (28) qui définiraient, avec l'équation donnée (27), les valeurs de z, p_1, p_2, ..., p_n vérifiant identiquement l'égalité (6). L'intégrale requise s'en obtient alors par l'élimination des variables p_s.

La théorie en question a été étudiée par Weiler [49], S. Lie [50], A. Mayer [51], D. Grave [52], E. Delassus [53] et N. Saltykow [54].

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS CANONIQUES. SYSTÈMES DE JACOBI ET LEUR GÉNÉRALISATION. THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES.

17. Équations canoniques. — Le sujet du présent chapitre concerne l'étude du lien intime qui existe entre les intégrales des équations aux dérivées partielles et celles des équations linéaires partielles (uniques et simultanées) ou aux différentielles ordinaires et totales qui leur correspondent.

Considérons, d'abord, une équation qui se présente sous la forme résolue par rapport à l'une des dérivées, soit, par exemple,

$$p + H(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_2, p_3, \ldots, p_n) = 0, \tag{1}$$

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s. \tag{2}$$

L'équation linéaire correspondant aux dérivées partielles pour une fonction inconnue f des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_2, p_3, \ldots, p_n$,

$$(p_1 + H, f) = 0 \tag{3}$$

engendre le système canonique des équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_{k+1}}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_{k+1}}, \quad \frac{dp_{k+1}}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_{k+}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4}$$

Les variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$ s'appellent canoniques de la *première classe;* quant aux $p_2, p_3, \ldots, p_n$, ces dernières variables appartiennent à la *seconde classe*. Enfin, les variables de différentes classes mais de mêmes indices sont dites *conjuguées.*

L'étude de l'intégrale générale d'un système canonique a été faite d'abord par Hamilton dans son travail : *On a general method in dynamics* [55], et dans la lettre de Jacobi : *Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problème des trois corps* [56]. Hamilton avait exprimé l'intégrale générale du système (4) moyennant l'intégrale définie

$$V = \int_{x_1^0}^{x_1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial H}{\partial x_{k+1}} p_{k+1} - H \right) dx_1, \tag{5}$$

en étudiant la variation de cette dernière formule.

Il est évident que l'expression qui se trouve sous le signe de l'intégrale (5) représente la valeur que prend la différentielle (2), moyennant les $n-1$ premières équations (4) et en vertu de l'équation (1), toutes les variables x_{k+1} et p_{k+1} étant considérées comme des fonctions de la variable indépendante x_1. Quant à Jacobi, il est parti, dans sa lettre mentionnée, de l'élément intégral régulier formé par l'ensemble des deux intégrales des problèmes qu'il avait étudiés.

Ensuite Jacobi avait généralisé le point de vue d'Hamilton, en introduisant un système quelconque de constantes arbitraires au lieu des valeurs initiales des variables et en simplifiant la démonstration d'Hamilton [57].

Les démonstrations d'Hamilton et de Jacobi, fondées sur le calcul des variations, sont sujettes à des objections, qui limitent la généralité de la *fonction caractéristique* H du système canonique considéré (4). A. Mayer [58], J. Bertrand [59] et G. Darboux [60] ont introduit les additions nécessaires. L'étude de l'intégrale générale des caractéristiques, qui va être exposée plus bas, aux n^{os} 22-23, permet d'élucider complètement la question dont il s'agit. D'autre part, le point délicat de la théorie considérée, concernant la forme de la fonction H, a été étudié en détail par MM. T. Levi-Civita et U. Amaldi [61].

Il faut bien constater que la restriction indiquée n'est point propre au problème en question et ne provient que de la méthode de démonstration fondée sur le calcul des variations.

La formation de l'intégrale générale d'un système canonique (4) joue un rôle très important dans les théories d'intégration étudiées. Plusieurs géomètres des plus éminents, parmi eux H. Poincaré, E. Cartan [62] et Th. De Donder [63], ont donné différentes démonstrations des formules requises, en les liant à d'autres théories analytiques. La démonstration qui est immédiate [64] va être exposée dans les lignes suivantes.

Il résulte, des considérations indiquées au n° 11, d'abord que l'ensemble des $n-1$ intégrales en involution du système canonique (4) forme avec l'équation (1) un *élément intégral régulier* de cette dernière équation; d'autre part, l'*intégrale complète* de la même équation représente un second élément équivalent, au point de vue de l'intégration de l'équation (1).

Considérons donc, pour fixer les idées, une intégrale complète de l'équation (1)

$$z = \mathrm{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{n-1}) + \mathrm{C}, \tag{6}$$

à n constantes arbitraires $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{n-1}, \mathrm{C}$ vérifiant l'inégalité

$$\mathrm{D}\left(\frac{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_n}}{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{n-1}}\right) \neq 0. \tag{7}$$

Cela étant, les formules

$$p'_{k+1} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_{k+}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{8}$$

définissent évidemment les $n-1$ équations intégrales du système canonique (4).

D'autre part, l'identité

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} + \mathrm{H}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_n}\right) = 0$$

engendre les identités nouvelles

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_1 \partial \mathrm{C}_i} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_{k+1} \partial \mathrm{C}_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si l'on remplace dans ces dernières identités les expressions des dérivées $\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_{k+1}}$ tirées des $n-1$ premières équations différentielles (4), on va les transformer dans les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial V}{\partial C_i}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

L'intégration immédiate de ces dernières équations nous donne les autres $n-1$ équations intégrales du système (4)

$$(9) \qquad \frac{\partial V}{\partial C_i} = C'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

les C'_i désignant les $n-1$ nouvelles constantes arbitraires.

Les équations obtenues (9) sont résolubles, en vertu de l'inégalité (7), par rapport aux variables canoniques de la première classe.

Les formules (8) et (9) définissent donc l'intégrale générale requise du système canonique (4).

Le système complet des intégrales distinctes de l'équation linéaire (3) s'obtient en résolvant les équations (8) et (9) par rapport aux constantes arbitraires.

Les résultats exposés s'étendent d'eux-mêmes à une équation de la forme générale

$$(10) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

en y posant

$$\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0.$$

L'équation linéaire correspondant aux dérivées partielles de la fonction inconnue f de toutes les variables x et p,

$$(11) \qquad (F, f) = 0,$$

fournit le système d'équations différentielles ordinaires

$$(12) \qquad \frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}.$$

Ce dernier système admet une intégrale évidente que l'on obtient en égalant le premier membre de l'équation donnée (10) à une constante arbitraire, à savoir :

$$(13) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a.$$

a désignant une constante arbitraire.

Supposons que l'intégrale complète de cette dernière équation (13), considérée comme une équation aux dérivées partielles, soit

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) + C,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ et C désignant des constantes arbitraires. S'il existe l'inégalité

$$D\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}}{C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}}\right) \neq 0,$$

alors les formules suivantes :

$$(14) \qquad p_{k+1} = \frac{\partial V}{\partial x_{k+1}}, \qquad \frac{\partial V}{\partial C_k} = C'_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

où les C'_k désignent $n-1$ nouvelles constantes arbitraires, définissent, avec l'intégrale (13), l'intégrale générale du système (12).

On obtiendra en résolvant cette dernière intégrale par rapport aux constantes arbitraires, le système complet des intégrales distinctes de l'équation linéaire (11).

La démonstration du résultat obtenu se fait d'une manière analogue à la précédente [65].

18. Système canonique aux différentielles totales. — Considérons, à présent, le système des m équations aux dérivées partielles en involution

$$(15) \quad p_k + H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

Le système jacobien correspondant

$$(16) \qquad (p_k + H_k, f) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

de la fonction inconnue f, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$, équivaut à un système d'équations aux différentielles totales

$$(17) \qquad \left\{\begin{aligned} dx_{m+r} &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+r}} dx_k, \\ dp_{m+r} &= -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+r}} dx_k \\ & (r = 1, 2, \ldots, n-m), \end{aligned}\right.$$

qui est dit aussi canonique. Les variables x_{m+r} sont dites de la première classe et les p_{m+r} appartiennent à la seconde classe.

Le système obtenu a été étudié pour la première fois par G. Morera, en partant de la méthode de Pfaff [66]. Ensuite N. Saltykow [65] a généralisé ses démonstrations précédentes pour les équations considérées.

Soit l'intégrale complète du système (15) donnée par la formule

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}) + C, \tag{18}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}$, C désignant $n-m+1$ constantes arbitraires. Si l'on a

$$D\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}}{C_1, \quad C_2, \quad \ldots, C_{n-m}}\right) \neq 0, \tag{19}$$

l'intégrale générale du système (17) est définie par l'ensemble des formules

$$p_{m+r} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+r}}, \qquad \frac{\partial V}{\partial C_r} = C'_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-m), \tag{20}$$

les C'_r désignant $n-m$ nouvelles constantes arbitraires.

Il va sans dire que grâce à l'inégalité (19) les $n-m$ dernières équations (20) sont résolubles par rapport aux variables canoniques de la première classe.

Enfin, l'on obtient le système complet des intégrales distinctes du systèmes jacobien (16) en résolvant les équations intégrales (20) par rapport à toutes les $2(n-m)$ constantes arbitraires C_r et C'_r.

Sans entrer dans plus de détails, nous passerons à l'étude du cas le plus général.

19. Système de Jacobi. — Considérons le système des m équations aux dérivées partielles en involution

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{21}$$

vérifiant la condition

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{p_1, p_2, \ldots, p_m}\right) \neq 0. \tag{22}$$

Le système correspondant d'équations linéaires aux dérivées partielles d'une seule fonction inconnue f devient

$$(F_k, f) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{23}$$

Il est aisé de construire de différentes manières les équations aux différentielles totales [67] pour définir les $2n - m$ intégrales du système (23) qui soient distinctes, grâce à l'inégalité (22), par rapport aux variables paramétriques

$$x_{m+1}, \quad x_{m+2}, \quad \ldots, \quad x_n, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n.$$

On a l'avantage de mettre les équations requises sous la forme d'équations aux dérivées partielles de ces dernières variables prises par rapport aux variables principales, qui ont été données par N. Saltykow, à savoir [68] :

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_i} = \frac{\partial F_k}{\partial p_{m+r}}, & (r = 1, 2, \ldots, n-m) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{\partial p_s}{\partial x_i} = -\frac{\partial F_k}{\partial x_s}, & (s = 1, 2, \ldots, n) \\ (k = 1, 2, \ldots, m). & \end{array}\right. \tag{24}$$

Il va sans dire que ce dernier système admet m intégrales que l'on obtient en égalant à des constantes arbitraires a_k les premiers membres des équations (21)

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{25}$$

En considérant ces dernières équations (25) comme aux dérivées partielles, formons leur intégrale complète

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m \; C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}) + C, \tag{26}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}$, C désignant $n - m + 1$ nouvelles constantes arbitraires distinctes, de sorte que l'on ait

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{C_1, \quad C_2, \quad \ldots, C_{n-m}}\right) \neq 0. \tag{27}$$

Il est évident, d'abord, que les équations

$$p_s = \frac{\partial V}{\partial x_s} \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{28}$$

dont les m premières sont équivalentes aux (25) forment un élément intégral régulier, et définissent n équations intégrales du système (24). Pour obtenir les $n-m$ autres qui manquent, prenons les identités que donnent les équations (25), en vertu de leur intégrale (26),

$$F_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = a_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m).$$

On en tire les identités nouvelles

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_s} \frac{\partial^2 V}{\partial x_s \partial C_r} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, n-m).$$

En y substituant les valeurs des dérivées $\dfrac{\partial F_k}{\partial p_{m+r}}$ tirées des équations de la première ligne du système (24), on obtient des équations différentielles qui deviennent

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial V}{\partial C_r}\right) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Les équations obtenues se réduisent, grâce à l'inégalité (22), à la forme plus simple

$$\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial V}{\partial C_r}\right) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, n-m).$$

L'intégration immédiate de ces dernières équations nous donne les autres $n-m$ équations intégrales cherchées

$$\text{(29)} \qquad \frac{\partial V}{\partial C_r} = C'_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-m),$$

les C'_r désignant les $n-m$ constantes arbitraires.

Par conséquent, les formules (28) et (29) définissent l'intégrale générale du système (24) et, en même temps, le système complet des intégrales distinctes du système de Jacobi correspondant (23).

20. Intégrales canoniques. — Les intégrales que l'on vient d'obtenir jouissent des propriétés dites *canoniques* que Jacobi avait étudiées [69] dans le cas d'une équation partielle et du système canonique aux différentielles ordinaires correspondant. Nous allons étendre ces propriétés pour le cas le plus général du système (23).

Supposons qu'en résolvant les $n-m$ dernières équations intégrales (28) et les (29) on obtienne, grâce aux intégrales (25), les intégrales suivantes :

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{c} \varphi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = C_r, \\ \psi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = C'_r \\ (r = 1, 2, \ldots, n-m). \end{array}\right.$$

Les intégrales de la première ligne (30) sont en involution, faisant partie de l'élément intégral régulier mentionné plus haut. On a donc les formules

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0$$

pour toutes les valeurs distinctes des indices i et k, à partir de 1 jusqu'à $n-m$.

Comme on a, d'autre part, les identités que produisent les équations de la première ligne (30), en vertu des formules (28), il en résulte immédiatement les identités suivantes

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} (\varphi_i, \psi_k) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & (i \gtrless k), \\ 0 & (i = k), \end{array}\right. \\ (\psi_i, \psi_k) = 0 \end{array}\right.$$

pour les valeurs distinctes des i et des k, à partir de 1 jusqu'à $n-m$.

Substituons, enfin, dans la formule (26) les valeurs des a_k et des C_r qui sont définies par les équations (25) et (30). L'équation résultante se présente sous la forme

$$z - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = C,$$

et jouit de propriétés qui s'expriment de la manière suivante :

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{c} [z-\varphi, F_k] = 0, \qquad [z-\varphi, \varphi_r] = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, m; \qquad r = 1, 2, \ldots, n-m), \\ [z-\varphi, \psi_r] = -\psi_r \\ (r = 1, 2, \ldots, n-m). \end{array}\right.$$

21. Équations contenant explicitement la fonction inconnue. —

Considérons un système complet d'équations

$$(33)\qquad p_k + H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m),$$

vérifiant les conditions de compatibilité écrites sous la forme

$$\frac{\partial H_k}{\partial x_i} - \frac{\partial H_k}{\partial z} H_i - \frac{\partial H_i}{\partial x_k} + \frac{\partial H_i}{\partial z} H_k + \sum_{r=1}^{n-m} \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}} \frac{dH_k}{dx_{m+r}} - \frac{dH_i}{dx_{m+r}} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+r}} \right) = 0$$

pour toutes les valeurs distinctes des indices k, i de 1 à m et où l'on a posé [54_2]

$$\frac{dH_k}{dx_{m+r}} \equiv \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+r}} + \frac{\partial H_k}{\partial z} p_{m+r},$$

Soit l'intégrale complète du système (33) donnée sous la forme

$$(34)\qquad z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, C, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}),$$

$C, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}$ désignant $n - m + 1$ constantes arbitraires vérifiant l'inégalité

$$(35)\qquad D\left(\frac{V, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{C, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}} \right) \neq 0.$$

Le système d'équations aux différentielles totales correspondant au système (33) prend la forme

$$(36)\qquad \begin{cases} dx_{m+r} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+r}} dx_k, \\ dp_{m+r} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{dH_k}{dx_{m+r}} dx_k, \\ dz = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+r}} p_{m+r} - H_k \right) dx_k \\ (r = 1, 2, \ldots, n-m). \end{cases}$$

Il va sans dire que l'ensemble de l'intégrale (34) et des $n - m$ premières équations dérivées du premier ordre de cette dernière intégrale, prises respectivement par rapport aux variables x_{m+1},

$x_{m+2}, \ldots, x_n$, représente $n-m+1$ équations intégrales du système (36). Pour avoir les $n-m$ autres intégrales, formons les identités obtenues par la substitution dans les équations (33) de leur intégrale (34). On en tire les identités nouvelles suivantes :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial C} + \frac{\partial H_k}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial C} + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+r}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+r} \partial C} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial C_i} + \frac{\partial H_k}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial C_i} + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+r}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+r} \partial C_i} = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m, \; i = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Il est aisé de supposer, sans diminuer la généralité, que la dérivée $\frac{\partial V}{\partial C}$ est distincte de zéro, dans le domaine que l'on considère. Cela posé, on a, en éliminant les dérivées $\frac{\partial H_k}{\partial z}$ des identités précédentes, les identités nouvelles

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial C_i}}{\frac{\partial V}{\partial C}}\right) + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+r}} \frac{\partial}{\partial x_{m+r}}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial C_i}}{\frac{\partial V}{\partial C}}\right) = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m; \; i = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Les identités obtenues nous donnent $n-m$ équations différentielles, moyennant les $n-m$ premières équations du système (36), sous cette forme nouvelle

$$d\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial C_i}}{\frac{\partial V}{\partial C}}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m).$$

En intégrant ces dernières équations, on obtient les intégrales requises

$$(37) \qquad \frac{\frac{\partial V}{\partial C_i}}{\frac{\partial V}{\partial C}} = C'_i, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial V}{\partial C_i} - C'_i \frac{\partial V}{\partial C} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-m),$$

C'_i désignant de nouvelles constantes arbitraires.

Il va sans dire que ces dernières équations sont résolubles par rapport aux variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$. En effet, le déterminant fonctionnel, formé, par rapport à ces dernières, des premiers membres des $n-m$ dernières équations (37), devient, en leur vertu, égal au quotient du déterminant (35) par la dérivée $\frac{\partial V}{\partial C}$.

Enfin, les résultats développés s'étendent aisément à un système de m équations en involution

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{38}$$

vérifiant la condition (22) et le système correspondant d'équations linéaires aux dérivées partielles totales

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_i} = \frac{\partial F_k}{\partial p_{m+r}} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-m),\\
&\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{\partial p_s}{\partial x_i} = -\frac{dF_k}{dx_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),\\
&\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_s} p_s.
\end{aligned}\right. \tag{39}$$
$$(k = 1, 2, \ldots m).$$

Pour la démonstration, *voir* le travail de Saltykow : *Sur la Théorie des équations aux d. p. du premier ordre d'une seule fonction inconnue* (*Mémoires de l'Académie Royale de Belgique*, classe des Sciences, col. 4°, 2e série, t. VI, fasc. 4, chap. V, p. 138).

22. Théorie des caractéristiques. — Le but de cette théorie était de former les intégrales dites de Cauchy. Cet illustre géomètre réussit à résoudre le problème par une ingénieuse introduction de variables auxiliaires. Comme, à présent, toute intégrale d'une équation aux dérivées partielles s'obtient à partir de leurs intégrales complètes, l'intérêt principal de la théorie considérée est de donner la solution du problème inverse à celui qui vient d'être étudié en détail. Il s'agit donc de former l'intégrale complète d'une équation (1) ou d'un systeme le plus général (38), lorsque l'on connaît respectivement l'intégrale générale du système correspondant (4) ou (39).

Quant à la formation des équations différentielles des caractéristiques, elle peut être effectuée indépendamment des considérations de Lagrange et de Charpit et de la théorie exposée des éléments intégraux réguliers. Il suffit d'invoquer, pour cela, les propriétés de certains systèmes d'équations à plusieurs fonctions inconnues que l'on disait de Jacobi, mais auxquelles on doit maintenant attribuer le nom de Charpit, d'après [26, 54_2, 34_2] la copie de son Mémoire inédit retrouvé dernièrement.

Cela posé, considérons, pour fixer les idées, une équation

$$(40) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p_1} \gtrless 0,$$

et le système correspondant des équations différentielles ordinaires

$$(41) \quad \frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_s} p_s} = -\frac{dp_1}{\frac{dF}{dx_1}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{dF}{dx_n}}.$$

On prend pour point de départ *l'intégrale générale des caractéristiques* représentant l'intégrale particulière du système (41). Cette dernière est caractérisée par ce fait que pour la première intégrale de ce dernier système est prise l'équation (40), indépendante de la constante arbitraire. Le nombre des constantes arbitraires dans l'intégrale considérée se réduisant à $2n - 1$, elle devient

$$(42) \qquad x_{k+1} = \varphi_k(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{2n-1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1);$$

$$(43) \qquad z = \varphi(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{2n-1});$$

$$(44) \qquad p_s = \psi_s(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{2n-1}) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Il est d'abord évident que l'on a l'identité suivante :

$$(45) \qquad F(x_1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0.$$

Supposons, à présent, que les équations (42) soient résolubles par rapport aux $n - 1$ constantes

$$(46) \qquad C_{n+1}, \quad C_{n+2}, \quad \ldots, \quad C_{2n-1},$$

le déterminant fonctionnel qui leur correspond satisfaisant à l'inégalité suivante :

$$(47) \qquad D\left(\frac{\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}}{C_{n+1}, \; C_{n+2}, \; \ldots, \; C_{2n-1}}\right) \neq 0.$$

En substituant les valeurs obtenues des quantités (46) dans les formules (43) et (44), désignons les résultats obtenus par

$$(48)\quad \begin{cases} z = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ p_s = \Psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

En faisant la même substitution des valeurs (46) dans l'identité (45), on y remplace les fonctions φ_k par les valeurs x_{k+1}, grâce aux relations (42); et l'identité (45) prend, moyennant les formules (48), la forme suivante :

$$(49)\qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Phi, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n) = 0.$$

On voit donc que le problème posé de l'intégration serait effectué si les formules (48) vérifiaient les relations requises

$$(50)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = \Psi_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Par conséquent, le problème étudié revient à la recherche des valeurs (46), dont l'élimination produirait le résultat cherché.

Il est d'abord évident que la relation

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s$$

est identiquement satisfaite par les formules (42)-(44), car elle est une conséquence algébrique des équations (41). On en tire donc l'identité

$$\psi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \sum_{k=1}^{n-1} \psi_{k+1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1},$$

et, d'autre part, on a la seconde identité provenant de la définition de la première relation (48), à savoir :

$$\varphi(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{2n-1}) = \Phi(x_1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

On en conclut immédiatement que la première des conditions (50) est une conséquence des $n-1$ autres égalités (50).

23. **Fonctions caractéristiques.** — Introduisons, pour vérifier les

conditions (50), les $2n-1$ fonctions U_σ définies, par les formules

$$(51)\qquad \begin{cases} U_\sigma \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_\sigma} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \psi_{k+1} \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial C_\sigma} \\ (\sigma = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n-1). \end{cases}$$

Ces dernières fonctions jouissent des propriétés suivantes :

1° *Il existe, parmi les* $2n-1$ *fonctions* (51), *au moins une qui soit distincte de zéro.*

En effet, les $2n-1$ équations du système (42)-(44) étant nécessairement résolubles, par rapport à $2n-1$ constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_{2n-1}$, il est aisé de supposer, en vertu de l'inégalité (40), que l'on ait

$$(52)\qquad D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n}{C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, \ldots, C_{2n-1}}\right) \neq 0.$$

Il en résulte immédiatement l'inégalité suivante :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial C_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial C} & U_1 & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial C_1} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial C_1} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial C_2} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial C_2} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial C_2} & U_2 & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial C_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial C_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial C_{2n-1}} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial C_{2n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial C_{2n-1}} & U_{2n-1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial C_{2n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial C_{2n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

qui démontre notre assertion.

2° *Le déterminant* (47) *étant distinct de zéro, les conditions*

$$(53)\qquad \begin{cases} U_k \gtrless 0, & U_{n+r} = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, n, & r = 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes pour que l'intégrale complète de l'équation donnée (40) *s'obtienne par l'élimination des constantes* (46) *entre les équations* (42) *et* (43).

3° *Introduisons dans l'intégrale particulière* (42)-(44), *au lieu des constantes arbitraires* C_σ, *respectivement les valeurs* *initiales des variables*

$$x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad p_2, \quad p_3, \quad \ldots, \quad p_n; \tag{54}$$

en désignant U_σ^0 *la valeur initiale correspondante de la fonction* U_σ, *supposons que les deux quantités* U_n *et* U_n^0 *soient distinctes de zéro, dans le domaine d'intégrabilité de l'équation considérée* (49). *On a, abstraction faite des conditions* (53), *les égalités suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{U_i}{U_n} = \dfrac{U_i^0}{U_n^0} \\ (i = 1, 2, \ldots, n-1, n+1, \ldots, 2n-1). \end{array} \right. \tag{55}$$

4° *Il existe toujours, dans le domaine considéré, des valeurs initiales, d'ailleurs arbitraires, des variables* (54) *qui vérifient les conditions* (53), *grâce aux relations* (55) [70].

La dernière propriété formulée s'applique aisément dans trois cas qui peuvent se présenter dans la théorie exposée des caractéristiques. Nous renverrons le lecteur à un travail consacré à cette question [71].

La théorie étudiée se prête à des applications très importantes et à des généralisations dont il sera question dans les chapitres suivants.

CHAPITRE V.

ÉLÉMENTS INTÉGRAUX GÉNÉRAUX ET PARTICULIERS.

24. Méthode générale de Liouville. — Le Mémoire cité antérieurement de Jacobi [72], qui est à la base de la théorie sur les éléments intégraux réguliers, n'a été publié que très tard après sa mort. Pendant l'intervalle de temps qui s'est écoulé jusqu'à cette publication, J. Liouville avait donné, dans son travail : *Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique, présentée au Bureau des Longitudes le* 29 *juin* 1853 (*Journal de Liouville*, t. XX, 1855, p. 137), une nouvelle démonstration sur la formation de l'intégrale générale d'un système canonique d'équations différentielles ordinaires. Il l'avait fait suivre des considérations très importantes que l'on va immédiatement étudier.

Prenons, pour fixer les idées, l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad p_1 + H(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_2, p_3, \ldots, p_n) = 0$$

et le système canonique correspondant

$$(2) \qquad \frac{dx_{k+1}}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_{k+1}}, \qquad \frac{dp_{k+1}}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_{k+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Supposons que les $n-1$ intégrales en involution du système (2) soient représentées par les équations

$$(3) \quad F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_2, p_3, \ldots, p_n) = C_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

En donnant ses formules pour l'intégrale générale du système (2) relatives aux intégrales (3), résolubles par rapport à $p_2, p_3, \ldots, p_n$, J. Liouville annonce que dans ses leçons au *Collège de France*, il a donné de longs développements sur la même question pour le cas où la dernière condition n'était pas satisfaite. Ce point fort important est en détail étudié dans la Thèse d'un élève de Liouville, A. Lafon : *Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique*, Paris, 1854 [73].

Sans entrer dans les détails et renvoyant pour cela à d'autres travaux [74], remarquons ici que les équations canoniques (2) ainsi que les parenthèses de Poisson, formées pour deux fonctions quelconques des variables canoniques, jouissent de remarquables propriétés. Les équations canoniques maintiennent leur forme canonique; quant aux parenthèses elles conservent leurs valeurs non seulement pour la *répartition* des variables en deux classes canoniques (*voir* p. 31) considérées jusqu'à présent et que nous dirons *régulières*, mais aussi par rapport à une nouvelle *répartition* quelconque des variables, en deux nouvelles classes des variables canoniques, donnée par ce tableau :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{llllllll} x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, & x_{n-\rho}, & -p_{n-\rho+1}, & -p_{n-\rho+2}, & \ldots, & -p_n, \\ p_1, & p_2, & p_3, & \ldots, & p_{n-\rho}, & x_{n-\rho+1}, & x_{n-\rho+2}, & \ldots, & x_n. \end{array} \right.$$

Appelons *générale* cette dernière *répartition* des variables en deux nouvelles classes.

D'après ce que l'on vient de dire, les équations (3) forment de même un système d'intégrales en involution, par rapport au système canonique correspondant à la *répartition générale* (4) des variables. Dans ce cas la relation

$$dz' = \sum_{k=1}^{n-\rho} p_k\, dx_k - \sum_{i=1}^{\rho} x_{n-\rho+i}\, dp_{n-\rho+i} \tag{5}$$

devient une différentielle exacte, en vertu des équations (1) et (3), z' désignant la nouvelle fonction inconnue que l'on introduit comme une variable auxiliaire.

Supposons que l'intégrale de la différentielle exacte (5) s'exprime par une quadrature de la manière suivante :

$$z' = \mathrm{U}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, p_{n-\rho+1}, \ldots, p_n, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{n-1}) + \mathrm{C}', \tag{6}$$

C′ désignant une constante arbitraire et le déterminant fonctionnel

$$\mathrm{D}\left(\frac{\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_2}, \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_3}, \ldots, \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_{n-\rho}}, \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial p_{n-\rho+1}}, \ldots, \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial p_n}}{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{n-\rho-1}, \mathrm{C}_{n-\rho}, \ldots, \mathrm{C}_{n-1}}\right) \tag{7}$$

ne s'annulant pas.

Cela étant, l'intégrale générale du système (2), que l'on peut écrire sous chacune de ses formes canoniques, est définie, pour la répartition (4) des variables, par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} p_k = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_k}, \qquad x_{n-\rho+i} = -\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial p_{n-\rho+i}} \\ (k = 2, 3, \ldots, n-\rho;\ i = 1, 2, \ldots, \rho), \\ \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{C}_s} = \mathrm{C}'_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1), \end{array}\right. \tag{8}$$

C'_s désignant $n-1$ nouvelles constantes arbitraires.

La théorie développée présente l'avantage de donner l'intégrale générale d'un système canonique sous une forme tout à fait générale, en s'affranchissant de certaines restrictions relatives aux intégrales en involution (3). En effet, nous avons, dès à présent, le choix des variables p_α, p_β, ..., x_γ, x_δ, ... des différents indices α, β, ..., γ, δ, ... par rapport auxquels il serait le plus avantageux de résoudre les équations (3), afin d'éviter les difficultés qui peuvent s'y présenter. On obtient donc toute la liberté désirable pour effectuer le calcul nécessaire.

25. Perfectionnement de la méthode de Jacobi. — Les idées générales de Liouville, en résolvant le problème de l'intégration d'un système canonique d'équations différentielles ordinaires, contribuent, en même temps, à l'évolution de la théorie des équations aux dérivées partielles. Le premier résultat qui s'ensuit, c'est que le nouvel élément intégral, introduit par Liouville, peut se former au moyen d'intégrales des caractéristiques indépendantes des variables p_s. On a par conséquent la possibilité d'utiliser ces dernières intégrales, que Jacobi devait bannir de ses calculs.

Néanmoins les modifications qui s'introduisent, grâce aux nouvelles idées de Liouville, ne troublent point la symétrie dans le calcul d'un élément intégral. Considérons, par exemple, un système de m équations que l'on ait obtenu comme résultat de plusieurs opérations d'intégration successives; supposons, de plus, que ce système soit réductible à la forme suivante :

$$\begin{gathered}
p_i \quad + H_i(x_1, \ldots, x_k, -p_{k+1}, \ldots, -p_m, x_{m+1}, \ldots, x_n; p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0, \\
x_{k+j} + L_j(x_1, \ldots, x_k, -p_{k+1}, \ldots, -p_m, x_{m+1}, \ldots, x_n; p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0 \\
(i = 1, 2, \ldots, k; \; j = 1, 2, \ldots, m-k).
\end{gathered}$$

La nouvelle opération d'intégration à effectuer exige l'intégration d'un système de $2(n-m)$ équations aux différentielles totales qui se présente encore sous la forme canonique, à savoir :

$$\begin{gathered}
dx_{m+r} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}} dx_i + \sum_{j=1}^{m-k} \frac{\partial L_j}{\partial p_{m+r}} d(-p_{k+j}), \\
dp_{m+r} = -\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+r}} dx_i - \sum_{j=1}^{m-k} \frac{\partial L_j}{\partial x_{m+r}} d(-p_{k+j}) \\
(r = 1, 2, \ldots, n-m).
\end{gathered}$$

On trouvera un exemple sur l'application de cette dernière méthode dans les *Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici*, Rome, 1909 [75].

Le second point important de la théorie considérée concerne la formation de l'intégrale complète de l'équation (1). Il est aisé d'obtenir cette dernière intégrale de différentes manières, comme on va le voir de suite.

Vingt ans après Liouville, la question fut reprise par S. Lie et A. Mayer, qui ont cherché à résoudre le problème posé, sur la formation de l'intégrale complète, à l'aide de transformations tangentielles.

N. Saltykow avait indiqué en 1899 [76] que la solution du problème en question ne pouvait être obtenue que grâce à la théorie des caractéristiques et en avait donné des exemples.

Ensuite la théorie a subi des simplifications considérables, vu l'introduction des fonctions caractéristiques U_σ [formule (51) du Chapitre IV] et en vertu de la forme spéciale de l'intégrale générale (8). D'abord, il est à remarquer que l'on obtient, moyennant la formule (6), sans faire une nouvelle quadrature, l'intégrale de la différentielle régulière

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s \, dx_s, \tag{9}$$

sous la forme suivante

$$z = U(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, p_{n-\rho+1}, \ldots, p_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) + \sum_{j=1}^{\rho} x_{n-\rho+j} \, p_{n-\rho+j} + C,$$

C désignant une constante arbitraire.

Cela posé, l'intégrale générale des caractéristiques de l'équation (1) devient, grâce à l'hypothèse faite sur le déterminant (7),

$$x_{k+1} = \varphi_k(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C'_1, C'_2, \ldots, C'_{n-1}) \quad (x = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{10}$$

$$z = \varphi.(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C'_1, C'_2, \ldots, C'_{n-1}) + C, \tag{11}$$

$$p_s = \psi_s(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C'_1, C'_2, \ldots, C'_{n-1}) \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Il en résulte, moyennant les propriétés des fonctions caractéristiques exposées au chapitre précédent, les théorèmes suivants :

I. *L'intégrale complète de l'équation* (1) *s'obtient en éliminant les valeurs* $C'_1, C'_2, \ldots, C'_{n-1}$ *des équations* (10) et (11), *si l'on a la condition*

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}}{C'_1, C'_2, \ldots, C'_{n-1}}\right) \neq 0.$$

II. *L'intégrale complète cherchée s'obtient par l'élimination des* *valeurs* $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ *du système* (10)-(11), *s'il existe l'inégalité*

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}}{C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}}\right) \neq 0,$$

à condition que la constante C, *dans la formule* (11), *soit remplacée par l'expression*

$$C = C'' - \sum_{k=1}^{n-1} C_k C'_k,$$

C'' *désignant une nouvelle constante arbitraire.*

III. *Si l'on a la condition*

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu, \varphi_{\mu+1}, \ldots, \varphi_{n-1}}{C'_1, C'_2, \ldots, C'_\mu, C_{\mu+1}, \ldots, C_{n-1}}\right) \neq 0,$$

μ *désignant un nombre entier quelconque, compris entre les limites* 1 *et* $n-1$, *substituons dans la formule* (11) *l'expression*

$$C = C''' - \sum_{i=1}^{n-\mu-1} C_{\mu+i} C'_{\mu+i},$$

où C''' *est une nouvelle constante arbitraire. L'intégrale complète de l'équation* (1) *s'obtient, dans l'hypothèse introduite, par l'élimination des* $n-1$ *valeurs,*

$$C'_1, \quad C'_2, \quad \ldots, \quad C'_\mu, \quad C_{\mu+1}, \quad \ldots, \quad C_{n-1},$$

entre les équations (10) *et* (11).

Pour la démonstration des théorèmes cités nous renvoyons au Traité de N. Saltykow, page 55 [43].

Il est évident qu'au moins l'un des trois théorèmes donnés doit nécessairement avoir lieu, puisque les équations (10), faisant partie de l'intégrale générale des caractéristiques de l'équation (1), sont résolubles par rapport à $n-1$ constantes arbitraires quelconques. Il est donc toujours possible de calculer l'intégrale complète requise, sans introduire dans l'intégrale générale des caractéristiques (10)-(12), les valeurs initiales des variables au lieu des constantes arbitraires.

26. Notions de S. Lie. — S. Lie avait repris [77], en 1873, la théorie de Liouville, mais d'un point de vue tout à fait original.

En considérant l'ensemble des $2n+1$ variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n$$

liées par la relation différentielle (9), S. Lie représente les différentes solutions de cette dernière, vérifiant la relation (9), sous la forme

$$(13')\qquad \left\{\begin{array}{l} z \qquad\quad = \varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ x_{n-\rho+i} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho), \end{array}\right.$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} p_k = \psi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-\rho), \\ \psi_k \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \displaystyle\sum_{i=1}^{\rho} p_{n-\rho+i}\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}, \end{array}\right.$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ désignant n constantes arbitraires *distinctes*, ρ étant un nombre entier quelconque $< n$.

Cela étant, supposons que le système formé par les équations (13) et les $n-\rho-1$ dernières équations (14) soit résoluble par rapport à toutes les constantes C_i, de sorte que l'on ait

$$(15)\qquad D\left(\frac{\varphi, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots, \ \varphi_\rho, \ \psi_2, \ \psi_3, \ \ldots, \ \psi_{n-\rho}}{C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{\rho+1}, C_{\rho+2}, C_{\rho+3}, \ldots, C_n}\right) \neq 0.$$

Par conséquent, dans un certain domaine de la variation de toutes les quantités considérées, l'ensemble des équations (13) et (14) est équivalent à celui-ci :

$$(16)\qquad p_1 + H(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_2, p_3, \ldots, p_n) = 0,$$
$$(17)\qquad F_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_2, p_3, \ldots, p_n) = C_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Il va sans dire que dans l'hypothèse unique où $\rho = 0$, les formules données correspondent à la théorie des équations aux dérivées partielles. Dans tous les autres cas les formules (14) définissent une opération nouvelle que l'on pourrait dire *dérivation à la S. Lie;* et l'on pourrait appeler les formules (16) et (17) des *équations dérivées à la S. Lie* (¹).

(¹) Remarquons que, si le nombre des constantes arbitraires dans les formules (13) était $n-m$, moindre que n, on obtiendrait, au lieu d'une équation (16), un système de m équations *dérivées à la S. Lie.*

Néanmoins, ces dernières équations s'adaptent aisément à la théorie des équations aux dérivées partielles, parce que les unes et les autres jouissent de propriétés analogues.

Écrivons, en effet, les équations (13)-(14) de la manière suivante :

$$(18) \qquad z-\varphi=0, \qquad x_{n-\rho+i}-\varphi_i=0, \qquad p_k-\psi_k=0$$
$$(i=1, 2, \ldots, \rho; \qquad k=1, 2, \ldots, n-\rho).$$

Ces dernières équations jouissent des propriétés remarquables que voici :

1° *Les équations* (18) *forment un système complet, c'est-à-dire que les crochets de Weiler, formés de leurs premiers membres deux à deux, s'annulent, en vertu des équations* (18) *elles-mêmes;*

2° *Tout système d'équations, obtenu moyennant une transformation quelconque des équations* (18), *est encore complet.*

Il en résulte immédiatement que les premiers membres F_s des équations (17) représentent n intégrales en involution de l'équation linéaire aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue f des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_2, p_3, \ldots, p_m$, à savoir

$$(19) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}-\mathrm{H}\frac{\partial f}{\partial z}+|\mathrm{H}, f|=0.$$

Les équations (17) sont donc les intégrales d'un système canonique généralisé correspondant à l'équation aux dérivées partielles (16). En d'autres termes, l'ensemble des équations (16)-(17) définit un *élément intégral* de l'équation (16), mais ce dernier jouit d'un caractère tout particulier, en comparaison avec un élément considéré par Liouville. Par conséquent, il est naturel, en conservant à ce dernier le nom d'*élément général*, d'appeler celui de S. Lie *particulier* ou *irrégulier*.

Il est intéressant, du point de vue historique, de noter les *multiplicités* que S. Lie employait pour interpréter les intégrales. Les biographes de S. Lie ont bien remarqué le caractère abstrait de son intuition créatrice. « Das concrete Bild », écrivait Nœther [78], « einer Gesammt-Mannigfaltigkeit in ihrer Gestalt, d. h. in ihren endlichen Formenbeziehungen, deren Wechsel bei variabeln Parametern, die

Realitätsfragen überhaupt, haben Lie nie interessirt. In jenem Gebiet aber, das in den geometrischen Elementen und Operationen nur eine Versinnlichung, eine Zusammenfassung von ganz abstracten Begriffsbildungen, oft von den complicirtesten, sieht, war Lie Meister ».

La condition imposée aux équations (17), d'être irrésolubles par rapport aux variables p_s, fait prévoir le caractère particulier de l'équation (16) admettant les intégrales de S. Lie [79].

27. **La forme particulière des équations admettant les intégrales de S. Lie.** — Considérons, d'abord, une équation non linéaire dans l'espace à trois dimensions [80]. Il existe, d'après S. Lie, trois espèces de multiplicités d'éléments de contact, qui sont associés, soit sur une surface (intégrale classique), soit le long d'une courbe, ou, enfin, autour d'un point. Eh bien, une équation qui n'est pas linéaire ne peut posséder que les intégrales classiques. Pour avoir les solutions des deux autres espèces, dans l'espace considéré, l'équation doit être ou bien linéaire, ou *fonctionnelle*.

En nous reportant aux formules (13), le nombre ρ va définir la *classe* de l'intégrale considérée.

Si les équations (17) *engendrent* ρ *relations indépendantes des variables* z *et* p_s, *le déterminant fonctionnel*

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_n}{z, p_2, \ldots, p_n}\right) \tag{20}$$

doit s'annuler ainsi que tous ses mineurs depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre $\rho - 1$ *inclusivement.*

Cette dernière propriété ainsi que la condition trouvée plus haut, que les fonctions F_s soient des intégrales en involution de l'équation (19), sont non seulement nécessaires mais aussi suffisantes pour définir la forme de l'équation (16) admettant une intégrale complète de S. Lie (13) de la classe ρ.

Supposons, pour fixer les idées, que le premier mineur d'ordre ρ du déterminant (20), distinct de zéro, soit

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_{n-\rho-1}}{p_2, p_3, \ldots, p_{n-\rho}}\right).$$

Les intégrales requises F_s vérifient alors les conditions suivantes :

$$F_{n-\rho+i}=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, F_1, F_2, \ldots, F_{n-\rho-1}) \qquad (21)$$
$$(i=0, 1, 2, \ldots, \rho),$$

f_i désignant des fonctions arbitraires.

Cela posé, on démontre le résultat suivant :

L'équation (16) *doit se présenter sous la forme*

$$p_1+\sum_{i=1}^{\rho}\psi_i p_{n-\rho+i}=\psi, \qquad (22)$$

pour avoir l'intégrale en question, les fonctions ψ_i *et* ψ *dépendant des quantités*

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n,\quad z,\quad F_1,\quad F_2,\quad \ldots,\quad F_{n-\rho-1} \qquad (23)$$

et vérifiant les conditions pour que le système linéaire

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\sum_{i=1}^{\rho}\psi_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-\rho+i}}+\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial x_{r+1}}+\sum_{i=1}^{\rho}\varphi_{ri}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-\rho+i}}+\varphi_r\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0\\ &\qquad (r=1, 2, \ldots, n-\rho-1)\end{aligned}\right. \qquad (24)$$

soit jacobien; les coefficients φ_{ri} *et* φ_r *sont encore des fonctions arbitraires des quantités* (23).

Les fonctions f_i (21) *doivent représenter les* $\rho+1$ *intégrales en involution de ce dernier système* (24).

Enfin, les $n-\rho-1$ *dernières fonctions* (23) *sont définies par les formules*

$$F_\sigma=T_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, v_1, v_2, \ldots, v_{n-\rho-1}) \qquad (25)$$
$$(\sigma=1, 2, \ldots, n-\rho-1),$$

en posant

$$v_k\equiv p_{k+1}+\sum_{i=1}^{\rho}\varphi_{ki}p_{n-\rho+i},$$

T_σ *désignant des fonctions arbitraires, satisfaisant aux conditions d'involution.*

Le théorème formulé définit non seulement l'équation cherchée (22) mais, en même temps, l'intégrale complète de classe ρ de cette dernière, moyennant les formules (21) et (25).

L'équation obtenue (22), impliquant des fonctions arbitraires, se présente néanmoins sous une forme très particulière. En effet, ces dernières fonctions arbitraires doivent vérifier les conditions d'involution; et, d'autre part, le système formé par l'équation (22) et les équations que l'on obtient en égalant à des constantes les fonctions (25) se réduit à un système linéaire par rapport aux variables p_s.

Ce résultat, ainsi que la forme générale des systèmes d'équations simultanées admettant les intégrales de S. Lie, ont été trouvés par N. Saltykow, en 1905 [81].

28. Relations entre les intégrales complètes de S. Lie et celles de Lagrange. — S. Lie se contentait de son intégrale complète, en la considérant comme suffisante pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles en question. Mais on est alors dans le même cas d'exception de l'ancienne théorie des caractéristiques de Cauchy, qui était inapte de donner une intégrale complète de Lagrange dans des cas pareils à celui de S. Lie.

L'étude des éléments intégraux, qui vient d'être développée, démontre que l'intégrale de S. Lie est comprise, comme cas particulier, dans un élément intégral de Liouville. Dès lors, on n'a qu'à appliquer l'une des quatre méthodes indiquées au n° 25, dont les trois dernières sont exposées pour l'équation (1), où la variable z ne figure pas explicitement. Il est aisé de donner, dans la même hypothèse, une cinquième méthode qui est fondée sur les propriétés particulières de l'élément considéré de S. Lie [82]. Cette méthode [83] peut être formulée comme il suit :

Le déterminant (7) *étant distinct de zéro, supposons que l'on ait* (¹)

$$(26)\quad D\left(\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}, \dfrac{\partial U}{\partial x_3}, \ldots, \dfrac{\partial U}{\partial x_{n-\rho}}}{C_1, C_2, \ldots, C_{n-\rho-1}}\right) \neq 0, \qquad D\left(\frac{\dfrac{\partial U}{\partial p_{n-\rho+1}}, \dfrac{\partial U}{\partial p_{n-\rho+2}}, \ldots, \dfrac{\partial U}{\partial p_n}}{C_{n-\rho}, C_{n-\rho+1}, \ldots, C_{n-1}}\right) \neq 0,$$

(¹) L'hypothèse faite ne diminue point la généralité de nos considérations.

la fonction U *étant définie, dans notre hypothèse, par la formule*

$$U \equiv \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) - \sum_{i=1}^{\rho} \varphi_i p_{n-\rho+i},$$

où les valeurs φ_i *sont prises dans les équations*

$$(27) \quad x_{n-\rho+i} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

qui définissent l'élément intégral de S. Lie et où la fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-\rho-1}, C_{n-\rho}, \ldots, C_{n-1})$ *est engendrée par la quadrature*

$$d\varphi = \sum_{k=1}^{n-\rho} A_k\, dx_k,$$

dont les coefficients sont donnés par les $n - \rho$ *autres équations de l'élément considéré, à savoir :*

$$p_k = A_k - \sum_{i=1}^{\rho} p_{n-\rho+i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - \rho).$$

Cela posé, l'intégrale complète de Lagrange requise se présente sous la forme suivante :

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-\rho-1}, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\rho) - \sum_{i=1}^{\rho} C'_{n-\rho+i-1}\, \theta_i + C^{IV},$$

où les fonctions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\rho$ *s'obtiennent en résolvant, par rapport à* $C_{n-\rho}, C_{n-\rho+1}, \ldots, C_{n-1}$, *les équations* (27), *grâce à la seconde inégalité* (26), $C_1, C_2, \ldots, C_{n-\rho-1}, C'_{n-\rho}, C'_{n-\rho+1}, \ldots, C'_{n-1}, C^{IV}$ *désignant n constantes arbitraires.*

CHAPITRE VI.

SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

29. Conditions de compatibilité. — L'intégration d'une équation aux dérivées partielles étudiée revient, comme on le sait, à intégrer un système d'équations de la même forme que l'on obtient de manière qu'elles soient compatibles. Par conséquent, le problème d'intégration d'un système d'équations compatibles présente, en général, d'autant moins de difficultés qu'il y a plus d'équations données.

Il s'agit donc, tout d'abord, de savoir si les équations d'un système que l'on veut étudier sont compatibles ou non.

Pour le faire voir on n'a qu'à calculer les parenthèses de Poisson ou bien les crochets de Weiler (si les équations indiquées impliquent la fonction inconnue elle-même) des premiers membres des équations considérées. Si toutes ces dernières expressions s'annulaient identiquement ou en vertu des équations données, alors, ces dernières étant compatibles, leur système est intégrable. Mais s'il arrivait que cette dernière condition ne fût pas satisfaite, en égalant à zéro les parenthèses ou les crochets obtenus, on devrait voir si ces nouvelles équations, étant adjointes au système primitif, ne pourraient pas rendre ce dernier intégrable.

Le problème serait impossible, si le nombre total d'équations distinctes obtenues surpassait le nombre de toutes les variables, ou bien si ces deux derniers nombres étant égaux, la valeur qui s'en déduirait de la fonction inconnue ne vérifiait point les équations données.

30. Théorie générale des caractéristiques. — S. Lie avait donné une extension de la théorie en question pour un système d'équations compatibles [84]. Or, puisqu'il est resté dans l'hypothèse de son élément intégral qu'il considérait comme général, il était nécessaire de compléter la théorie de S. Lie afin d'étendre la théorie classique pour un système d'équations.

Considérons donc m équations en involution

$$(1)\qquad F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

le déterminant fonctionnel

$$(2)\qquad D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{p_1, p_2, \ldots, p_m}\right)$$

ne s'annulant pas.

Le plus avantageux est de mettre les équations différentielles des caractéristiques sous la forme suivante d'équations aux dérivées partielles [85] :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_i}\frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_i} = \frac{\partial F_k}{\partial p_{m+r}} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-m);\\
&\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_i}\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_s} p_s,\\
&\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_i}\frac{\partial p_s}{\partial x_i} = -\frac{dF_k}{dx_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n);\\
&\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, m).
\end{aligned}
\right.
$$

Prenons l'intégrale générale des caractéristiques, obtenue par l'intégration du système (3), sous la forme suivante :

$$
(4)\qquad x_{m+j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_m, C_1, C_2, \ldots, C_{2n-2m+1}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n-m),
$$

$$
(5)\qquad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, C_1, C_2, \ldots, C_{2n-2m+1}),
$$

$$
(6)\qquad p_s = \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_m, C_1, C_2, \ldots, C_{2n-2m+1}) \quad (s = 1, 2, \ldots, n).
$$

Cela posé, introduisons les fonctions caractéristiques

$$
(7)\qquad U_\sigma \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial C_\sigma} - \sum_{k=1}^{n-m} \psi_{m+j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial C_\sigma}
$$

$$
(\sigma = 1, 2, \ldots, n-m, n-m+1, n-m+2, \ldots, 2n-2m+1).
$$

Il est aisé d'étendre à ces dernières fonctions les propriétés analogues pour le cas d'une seule équation :

1° *L'une au moins des fonctions* (7) *est toujours différente de zéro.*

2° *En supposant le déterminant fonctionnel*

$$
D\left(\frac{\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-m}}{C_{n-m+2}, C_{n-m+3}, \ldots, C_{2n-2m+1}}\right)
$$

distinct de zéro, les conditions

$$
(8)\qquad U_k \gtrless 0, \qquad U_{n+r} = 0
$$

$$
(k = 1, 2, \ldots, n-m+1, \quad r = 1, 2, \ldots, n-m)
$$

sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes pour que l'intégrale complète du système (1) *s'obtienne par l'élimination des constantes*

$$C_{n-m+2},\ C_{n-m+3},\ \ldots,\ C_{2n-2m+1}$$

entre les équations (4) *et* (5).

3° *Introduisons dans l'intégrale* (4)-(6), *au lieu des constantes arbitraires* C_σ, *respectivement les valeurs initiales des variables*

$$(9) \qquad x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots,\ x_n,\ z,\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_n;$$

en désignant par U_σ^0 *la valeur initiale correspondante de la fonction* U_σ, *supposons que les deux quantités* U_{n-m+1} *et* U_{n-m+1}^0 *soient distinctes de zéro, dans le domaine d'intégrabilité du système considéré* (1). *On a, abstraction faite des conditions* (8), *les égalités suivantes :*

$$(10) \qquad \frac{U_i}{U_{n-m+1}} = \frac{U_i^0}{U_{n-m+1}^0}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-m, n-m+2, \ldots, 2n-2m+1).$$

4° *Il existe toujours, dans le domaine considéré, des valeurs initiales, d'ailleurs arbitraires, des variables* (9) *qui vérifient les conditions* (8) *grâce aux relations* (10).

On constate aisément les trois cas où cette dernière propriété permet de calculer les intégrales complètes de notre système (1).

31. Éléments intégraux. — La théorie des éléments intégraux faite pour toutes leurs trois espèces, dans les chapitres précédents, s'étend aisément aux systèmes d'équations aux dérivées partielles avec les modifications nécessaires. Quant à la théorie générale des caractéristiques du n° 30, elle fournit le moyen de perfectionner les méthodes classiques d'intégration des systèmes d'équations étudiées.

Considérons donc, pour fixer les idées, un système de m équations en involution :

$$(11)\ p_i + H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Supposons que l'ensemble de ces dernières équations et des équations

$$(12)\ F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = C_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-m)$$

forme un élément intégral général, de sorte que l'intégrale de la différentielle exacte auxiliaire

$$dz' = \sum_{k=1}^{n-\rho} p_k\, dx_k - \sum_{i=1}^{\rho} x_{n-\rho+i}\, dp_{n-\rho+i}$$

est donnée sous la forme

$$z' = \mathrm{U}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, p_{n-\rho+1}, \ldots, p_n, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{n-m}) + \mathrm{C}',$$

C' désignant une constante arbitraire, avec

$$(13)\qquad \mathrm{D}\left(\frac{\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_{n-\rho}}, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p_{n-\rho-1}}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p_n}}{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{n-\rho-m}, \mathrm{C}_{n-\rho-m+1}, \ldots, \mathrm{C}_{n-m}}\right) \neq 0.$$

Par conséquent, l'intégrale générale du système canonique aux différentielles totales correspondant au système en involution (11) se présente de la manière suivante :

$$p_k = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_k}, \qquad x_{n-\rho+i} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p_{n-\rho+i}}$$

$$(k = m+1, m+2, \ldots, n-\rho; \qquad i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{C}_s} = \mathrm{C}'_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-m),$$

C'_s désignant $n-m$ nouvelles constantes arbitraires.

Si l'élément intégral (11)-(12) offre des difficultés pour être considéré comme régulier, du point de vue pratique ou théorique, on n'a qu'à appliquer la théorie des caractéristiques, en prenant pour base l'intégrale générale que l'on vient d'écrire.

On en tire l'intégrale générale des caractéristiques du système donné (11), sous fa forme

$$(14)\quad x_{m+r} = \varphi_r(x_1, x_2, \ldots, x_m, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{n-m}, \mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_{n-m})$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n-m),$$

$$(15)\quad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{n-m}, \mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_{n-m}) + \mathrm{C},$$

$$p_s = \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_m, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{n-m}, \mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_{n-m})$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

C désignant une nouvelle constante arbitraire.

Si l'on veut, on introduira les valeurs initiales des variables, au lieu des constantes arbitraires dans ces dernières formules. L'élimination va nous donner l'intégrale complète du système (11), d'après les règles du numéro précédent.

Mais, en profitant, d'un autre point de vue, des propriétés canoniques des constantes C_s et C'_s, on a les théorèmes suivants [83] :

I. *L'intégrale complète du système* (11) *s'obtient, en éliminant les valeurs* C'_s *des équations* (14) *et* (15), *s'il existe la condition*

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-m}}{C'_1, C'_2, \ldots, C'_{n-m}}\right) \neq 0.$$

II. *L'intégrale complète du système* (11) *s'obtient en éliminant les valeurs* C_s *des équations* (14) *et* (15), *si*

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-m}}{C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}}\right) \neq 0,$$

à condition que la constante C *soit remplacée, dans l'équation* (15), *par la formule*

$$C = C'' - \sum_{\kappa=1}^{n-m} C_k C'_k,$$

C″ *désignant une nouvelle constante arbitraire.*

III. *Si l'on a la condition*

$$D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu, \varphi_{\mu+1}, \ldots, \varphi_{n-m}}{C'_1, C'_2, \ldots, C'_\mu, C_{\mu+1}, \ldots, C_{n-m}}\right) \neq 0,$$

μ *étant un nombre entier quelconque, compris entre les limites* 1 *et* $n-m$, *substituons à* C *dans la formule* (15) *l'expression*

$$C = C''' - \sum_{i=1}^{n-m-\mu} C_{\mu+i} C'_{\mu+1},$$

C‴ *étant une nouvelle constante arbitraire.*

L'intégrale complète du système (11) *s'obtient, dans l'hypothèse faite, par l'élimination des* $n-m$ *valeurs*

$$C'_1, C'_2, \ldots, C'_\mu, C_{\mu+1}, \ldots, C_{n-m}$$

entre les équations (14) *et* (15).

IV. *Si l'élément intégral* (11)-(12) *est irrégulier* (*de S. Lie*), *supposons que l'hypothèse faite sur le déterminant* (13) *entraîne les deux conditions*

$$(16)\quad \mathrm{D}\left(\frac{\frac{\partial U}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial U}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_{n-\rho}}}{C_1, \quad C_2, \quad \ldots, C_{n-m-\rho}}\right) \neq 0, \qquad \mathrm{D}\left(\frac{\frac{\partial U}{\partial p_{n-\rho+1}}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial p_n}}{C_{n-m-\rho+1}, \ldots, C_{n-m}}\right) \neq 0,$$

la fonction U *étant définie par la formule*

$$U \equiv \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}) - \sum_{i=1}^{\rho} \varphi_i p_{n-\rho+i},$$

où les valeurs φ_i *sont tirées des équations*

$$(17)\quad x_{n-\rho+i} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

qui définissent l'élément intégral de S. Lie; quant à la fonction

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m-\rho}, C_{n-m-\rho+1}, \ldots, C_{n+m}),$$

elle est engendrée par la quadrature

$$d\varphi = \sum_{k=1}^{n-\rho} A_k\, dx_k,$$

dont les coefficients sont donnés par les autres $n-\rho$, *équations de l'élément considéré, à savoir :*

$$p_k = A_k - \sum_{i=1}^{\rho} p_{n-\rho+i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-\rho).$$

Cela étant, l'intégrale complète cherchée est représentée par la formule

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m-\rho}, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\rho)$$
$$- \sum_{i=1}^{\rho} C'_{n-m-\rho+i}\theta_i + C^{\text{IV}},$$

où les fonctions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\rho$ *s'obtiennent en résolvant les équations* (17) *par rapport à* $C_{n-m-\rho+1}, C_{n-m-\rho+2}, \ldots, C_{n-m}$, *grâce à* *la seconde inégalité* (16), *et* C_1, C_2, ..., $C_{n-m-\rho}$, $C'_{n-m-\rho+1}$, ..., C'_{n-m}, C^{IV} *désignant* $n - m + 1$ *constantes arbitraires.*

32. **Réduction à une équation.** — S. Lie avait donné une méthode de réduction d'un système d'équations, à une équation [86], Il fallait cependant la rendre générale, en l'affranchissant de l'idée limitative qui s'y était introduite avec l'élément intégral de S. Lie. Le problème revient au fond à appliquer la transformation de A. Mayer (*voir* p. 13) du système correspondant d'équations aux différentielles totales [*voir* le système (36) du Chapitre IV] en celui aux différentielles ordinaires. La correction nécessaire avait été faite par A. Mayer [87] et G. Morera [88]. Cela étant, l'idée de S. Lie s'applique à l'intégration d'une équation ou d'un système d'équations de la manière suivante : chaque couple d'équations ou système de plusieurs équations obtenues, au cours des calculs d'intégration, est immédiatement remplacé par une équation unique.

33. **Méthode de Korkine.** — Cette méthode, publiée en 1867, est bien importante sous plusieurs rapports [89]. L'auteur l'avait inventée pour résoudre des questions spéciales qui exigent de trouver certaines intégrales et les conditions de leur existence [90]. La méthode considérée permet donc d'établir simultanément la compatibilité des équations données et leurs intégrales correspondantes.

Enfin, la méthode de Korkine représente un modèle classique d'usage des transformations tangentielles restreintes [89_4] (Chap. XII).

34. **Introduction des transformations tangentielles.** — Les transformations en question ont été, depuis Euler, continuellement appliquées avec succès pour intégrer les équations différentielles. Jacobi et S. Lie, en développant leur théorie, ont démontré l'existence des transformations tangentielles (de contact) de différentes classes, correspondant aux nombres distincts des relations qui relient les anciennes et nouvelles variables indépendantes.

C'est dans cette théorie que les notions de S. Lie (*voir* n° 32) jouent un rôle important. Elles permettent d'établir d'une manière immédiate, les formules fondamentales de la théorie [91].

Mais, d'autre part, on se heurte à des difficultés inattendues, vu l'impossibilité de prévoir la classe qui s'obtiendrait au moyen de la transformation inverse des variables dans une intégrale obtenue [92]. Le fait constaté explique l'échec subi par la méthode ancienne de perfectionnement, dont il a été question antérieurement [76].

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. J. E. Montucla. — Histoire des Mathématiques, 2e édition, Paris, an X (mai 1802). Note de Lacroix, p. 344.
2. Lagrange. — *Œuvres complètes*, t. 5, p. 543.
3. Euler. — Evolution insignis paradoxi circa æqualitatem superficierum (*N. C. P.*, t. 14, Pars I, 1769, p. 104).
4. Lagrange. — *Œuvres complètes*, t. 4, p. 628, nº 5; t. 5, p. 555, nºs 10-16.
   Euler. — De Problemate Trajectoriarum ad superficies translato (*M. P.* t. 7, p. 33-60).
5. Monge, G. — *Application de l'Analyse à la Géométrie*, 5e édition, Paris, 1850.
   S. Lie, G. Scheffers. — *Geometrie der Berührungs transformationen*, Leipzig, 1896.
6. Euler. — De infinitis curvis ejusdem gradis... [*Com. Ac. Sc. Petrop.*, t. 7 (1734-1735), 1740, p. 174, 184].
7. D'Alembert. — Sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration (*Histoire de l'Académie de Berlin*, 1747, t. 3, p. 14-49).
8. On citera dans les pages suivantes, la quatrième édition du tome 3, publié en 1914 dans les *Œuvres complètes d'Euler* (séries prima, t. 13).
9. Euler. — *Inst. Cal. Int.*, t. 3, p. 35-39, conf.
10. Euler. — *Inst. Cal. Int.*, t. 3, p. 39.
11. Euler. — *Inst. Cal. Int.*, t. 3, p. 87.
12. Lagrange. — Sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre (*Œuvres complètes*, t. 3, p. 547. Lagrange dit *différence partielle* au lieu de *dérivée partielle*).
13. Lagrange. — *Œuvres complètes*, t. 3, p. 570, nº 9.
14. Lagrange. — Sur les intégrales particulières des équations différentielles (*Œuvres complètes*, t. 4, p. 3, nºs 39, 40, 47).
15. Lagrange. — *Œuvres complètes*, t. 4, p. 3, nºs 53, 54.
16. Lagrange. — *Œuvres complètes*, t. 4, p. 82, nº 52; t. 4, p. 624, Article V, nºs 1-4; t. 5, p. 543.
17. Lagrange. — *Œuvres complètes*, t. 5, p. 543.
18. Lagrange. — *Œuvres complètes*, t. 5, p. 560, nº 15.
19. Monge, G. — Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles (*Histoire de l'Académie des Sciences*, 1784, p. 527).

20. S. Lie-G. Scheffers. — *Geometrie der Berührungstransformationen*, Leipzig, 1896, p. 518.

21. — Zwei Abhandlungen zur Theorie der Partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von Lagrange und Cauchy (*Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Nr. 113; *Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben v. Dr. G. Kowalewski*, Leipzig, 1900, Anmerkungen, p. 48).

22. J.-A. Serret. — *Lehrbach der Diflerential — und Integral — Rechnung, Vierte u. Fünfte Auflage bearbeitet v. G. Scheffers*, Bd III, Leipzig, 1914, p. 717, n° 874.

23. S. Lie-G. Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, Leipzig, 1896, p. 518.

24. Lacroix. — *Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, 2e édition, t. 2, Paris, 1814, p. 548.

J. E. Montucla. — *Histoire des mathématiques*, 2e édition, Paris, an X (mai 1802), p. 349.

25. Jacobi. — *Gesammelte Werke*, Bd IV, p. 151.

26. N. Saltykow. — Étude bibliographique sur le Mémoire inédit de Charpit (*Bul. des Sciences math.*, 1930).

27. Lagrange. — *Œuvres Complètes*, t. 9, Paris, édition 1881, p. 177, n° 93.

28. Lagrange. — *Œuvres Complètes*, t. 10, Paris, édition 1884, p. 354-363.

29. Lagrange. — *Œuvres Complètes*, t. 10, Paris, édition 1884, p. 354.

30. Euler. — *Inst. Cal. Int.*, t. 3, p. ix.

31. S. Lie-G. Scheffers. — *Geometrie der Berührungstransformationen*, Leipzig, 1896, p. 514, paragraphe 5.

32. Jacobi. — *Gesammelte Werke*, Bd IV, p. 3.

33. Jacobi. — Dilucidationes de æquationum differentialium vulgarium systematis earumqæ connexione cum æquationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis (*Gesam. Werke*, Bd IV, p. 147).

34. N. Saltykow. — Sur la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. 18, Paris, 1899, p. 534).

N. Saltykow. — Étude sur les intégrales d'un système des équations, différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues (*Journ. de Math. pures et appliquées*, 5e série, t. 3, p. 423).

35. Korkinf. — *Sur les équations simultanées*, Saint-Pétersbourg, 1867 (en russe).

E. Lindelöf. — *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. 20, n° 1.

36. A. Buhl. — *Sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe*, Paris, 1901.

A. Buhl. — *Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis* Paris, 1928.

37. N. Saltykow. — Étude sur les transformations infinitésimales (*Journ. de math. pures et appliquées*, Paris, 1905).

N. Saltykow. — Sur les transformations infinitésimales et les fonctions adjointes (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 16 décembre 1907).

38. Pfaff. — Allgemeine Methode partielle Differentialgleichungen und

gewöhnliche Differentialgleichungen, beide von erster Ordnung, in beliebig vielen Veränderlichen, vollständig zu integriren (*Abh. d. Kgl. Ak. d. Wis. in Berlin*, 1814-1815, et n° 129, *Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften*).

39. CAUCHY. - *Bulletin de la Société Philomathique de France*, Paris, 1819, p. 10.

CAUCHY. — *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, Paris, 1841, p. 238.

CAUCHY. — *Œuvres complètes*, 2e série, t. 12, p. 272.

40. JACOBI. — Ueber die Reduction der Integration der patiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (*Gesam. Werke*, Bd IV, p. 59).

41. JACOBI. — *Gesammelte Werke*, Bd V, p. 465.

42. JACOBI. — *Gesammelte Werke*, Bd V, p. 1.

43. N. SALTYKOW. — *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue* (*Mém. de l'Acad. Royale de Belgique*, classe de Sc,, col. 4°, 2e série, t. VI, fasc. 4, 1925).

44. JACOBI. — Ueber die Vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (*Gesam. Werke*, Bd V, p. 413).

45. N. SALTYKOW. — Sur l'évolution de la théorie des équations partielles du premier ordre d'une fonction inconnue (*Mémoires de l'Ac. Imp. des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 8e série, t. 25, n° 10, p. 16) (en russe).

46. JACOBI. — *Gesammelte Werke*, Bd V, p. 153, n° 64; Bd IV, p. 295, 315.

47. S. LIE. — *Mathematische Annalen*, Bd VIII, p. 215; Bd XI, p. 464.

48. N. SALTYKOW. — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue*, Kharkow, 1899, Chapitre VII (en russe).

— Sur le problème de S. Lie (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 24 août 1903).

— *Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue*, Kharkow, 1905, Chapitre VIII (en russe).

— *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 30 août et 13 septembre 1909; 6 et 13 juin 1910; 7 octobre 1912; 12 novembre 1926.

— Sur l'évolution de la théorie des équations partielles du premier ordre d'une fonction inconnue (*Mémoires de l'Ac. Imp. des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 8e série, t. 25, n° 10, Chapitres II et IV) (en russe).

— La théorie des caractéristiques et les applications de cette dernière (*Bul. de l'Ac. Imp. des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 1911, Chapitre III) (en russe).

— *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, Cambridge, 1913, t. 1, p. 59.

— Sur le développement de la théorie des équations partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue (*Bul. de la Clas. des Sc. de l'Ac. Royale de Belgique*, 1922, p. 592).

— *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue* [43].

— Application des éléments intégrables à l'intégration des équations différentielles (*Bul. de la Clas. des Sc. de l'Ac. Royale de Belgique*, 1926).

49. — *Zeitschrift für Math. und Phys.*, Bd VIII, p. 264; Bd XX, p. 271; *Cf.* A. Mayer. — *Math. An.*, Bd IX, p. 370.

50. S. Lie. — *Mathematische Annalen*, Bd IX, p. 245.

51. A. Mayer. — *Mathematische Annalen*, Bd IX, p. 370.

52. D. Gravé. — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Saint-Pétersbourg, 1889 (en russe).

53. E. Delassus. — *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 14.

54. N. Saltykow. — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue*, Kharkow, 1899, Chapitre III, IV (en russe).

N. Saltykow. — Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (*Journ. de Math. pures et appliquées*, 1899, p. 435).

55. Hamilton. — *Philosophical Transactions*, 1834-1835.

56. Jacobi. — *Gesammelte Werke*, Bd IV, p. 33.

57. Jacobi. — *Gesammelte Werke*, Bd IV, p. 57.

58. A. Mayer. — *Mathematische Annalen*, Bd III, p. 435.

59. Bertrand. — *C. R. Acad. Sc.*, t. 82, p. 641.

60. Darboux. — *C. R. Acad. Sc.*, t. 79, p. 1488; t. 80, p. 160; *Bul. des Sciences math. et astr.*, 1re série, t. 78, p. 249.

61. T. Levi-Civita et U. Amaldi. — *Rend. della R. Accademia dei Lincei*, Classe di Sc. fis., mat. e natur., t. 31, p. 272.

62. H. Poincaré. — *Nouvelles Méthodes de la Mécanique céleste.*

E. Cartan. — *Leçons sur les invariants intégraux.*

63. Th. De Donder. — *Théorie des invariants intégraux*, Paris, 1902, p. 121, 2e édition, Paris, 1927, p. 132.

Th. De Donder. — Sur les transformations de contact spéciales et le théorème de Jacobi (*Rend. della R. Ac. dei Lincei*, Classe di Scienze fis. mat. e nat., t. 20, série 5e, p. 400).

Th. De Donder. — Théorie invariative du Calcul des variations, Paris, 1930, Chapitre VII, p. 81.

64. N. Saltykow. — Généralisation de la première méthode de Jacobi d'intégration des équations aux dérivées partielles d'une fonction inconnue (*Communications de la Soc. Math. de Karkow*, 1898) (en russe).

N. Saltykow. — Sur les théorèmes de Jacobi et Liouville (*Bul. des Sciences math. et astron.*, 1903).

65. N. Saltykow. — *Sur la théorie des équations* ... [43], Chapitre II.

66. G. Morera. — Il metodo di Pfaff per l'integrazione delle equazioni a derivata parzioli del 1° ordine (*Rend. del R. Istituto Lombardo*, Serie II, t. 16, 1883).

67. N. Saltykow. — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles (*C. R. Acad. Sc.*, 24 juillet 1899).

N. Saltykow. — *Bull. de la Soc. math. de France*, t. 29, 1901, p. 86.

68. N. Saltykow. — *C. R. Acad. Sc.*, 9 août 1909.

69. Jacobi. — *Vorlesungen Ueber Dynamik*, p. 217.

70. N. Saltykow. — *Sur la théorie des équations* ... [43], Chapitre VIII.

71. N. Saltykow. — *Journal de Math. pures et appliquées*, 1899.

72. Jacobi. — *Voir* [49].

73. *Voir aussi* Lafon. — Mémoire sur le mouvement d'un corps solide (*Mémoires de l'Académie de Stanislas*, Nancy, t. 1, 1860).

74. N. Saltykow. — Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville (*C. R. Acad. Sc.*, t. 137, p. 403).

75. N. Saltykow. — *Sur l'existence des intégrales de S. Lie et le perfectionnement de la méthode de Jacobi dans la théorie des équations partielles*, t. 2, p. 77.

76. N. Saltykow. — Considérations sur les travaux de S. Lie et A. Mayer (*C. R. Acad. Sc.*, 26 juin et 3 juillet 1899).

77. S. Lie. — Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine classification derselben (*Nachrichten v. d. K. Gesel. der Wis. u. D. G. A. Univ. Göttingen*, 1873, p. 473).

S. Lie. — Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (*Math. An.*, Bd IX, p. 250).

78. Noether. — *Mathematische Annalen*, Bd 53, p. 15.

79. N. Saltykow. — Sur les intégrales de S. Lie (*C. R. Acad. Sc.*, 3 août 1903).

N. Saltykow. — *Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue*, Kharkow, 1905, Chapitres I et II (en russe).

80. N. Saltykow. — Sur le développement de la théorie des équations partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue (*Bul. de la Cl. d. Sc. Acad. Royale de Belgique*, 1922, p. 606-613).

81. N. Saltykow. — *Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue*, Kharkow, 1905, Chapitre IV (en russe).

N. Saltykow. — Sur l'existence des intégrales de S. Lie (*Atti del. IV Cong. internaz. dei Mat.*, t. 2, 1909, p. 77).

82. N. Saltykow. — Sur les relations entre les intégrales complètes de S. Lie et de Lagrange (*C. R. Acad. Sc.*, 10 août 1903).

83. N. Saltykow. — *Sur la théorie des équations*, ... [43], Chap. IV.

84. S. Lie. — *Math. Annalen*, Bd IX, p. 250.

85. N. Saltykow. — *Sur la théorie des équations*, ... [43], Chap. X.

86. S. Lie. — *Math. Annalen*, Bd IX, p. 250.

87. A. Mayer. — Directe Ableitung der Lie'schen Fundamentaltheorems durch die Methode von Cauchy (*Mathem. Annalen*, Bd VI, p. 192).

88. G. Morera. — Il metodo di Pfaff per l'integrazione delle equazioni a derivate parzioli del 1° ordine (*Rendiconti d. R. I. Lombardo*, Sér. 2, t. 16, 1883).

89. Korkine. — *Sur les équations simultanées*, Saint-Pétersbourg, 1867 (en russe).

Korkine. — *C. R. Acad. Sc.*, t. 68, p. 1460.

N. Saltykow. — *Recherches sur la théorie...*, Kharkow, 1905, Chapitre V (en russe).

N. Saltykow. — *Sur la théorie des équations*, Paris-Bruxelles, 1925, Chap. XII.

90. Korkine. — Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel (*Math. Ann.*, Bd II, 1869, p. 13).

N. Saltykow. — *Recherches des intégrales, communes aux problèmes sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible* (Comm. de la Soc. math. de Kharkow, t. 6, 1898) (en russe).

N. Saltykow. — Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible (*Nouv. Ann. de Math.*, 1897).

91. N. Saltykow. — *Sur la théorie des équations...*, Paris-Bruxelles, 1925, Chapitre XI.

92. N. Saltykow. — *Sur la théorie des équations...*, Paris-Bruxelles, 1925, Chapitre XI, nos 103, 106, 107, 108.

TABLE DES MATIÈRES.

90964 Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.