Nicolas Kryloff

Les méthodes de solution approchée des problèmes de la physique mathématique

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 49 (1931)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1931__49__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE
L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :
Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XLIX

Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique mathématique

PAR M. NICOLAS KRYLOFF
Ingénieur des Mines,
Membre des Académies des Sciences d'Ukraine et de l'U. R. S. S.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1931

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LES

MÉTHODES DE SOLUTION APPROCHÉE

DES

PROBLÈMES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Procédés de l'algorithme variationnel (Méthode de W. Ritz), **des différences finies, etc., justifiés par l'appréciation de l'erreur commise à la** $m^{\text{ième}}$ **approximation.** (Problèmes à une dimension.)

Par M. Nicolas KRYLOFF,

Ingénieur des Mines, Membre des Académies des Sciences d'Ukraine et de l'U. R. S. S.

INTRODUCTION.

Dans la méthode dite fondamentale, de la Physique mathématique, créée par les travaux classiques de Sturm, J. Liouville, H. Schwarz, E. Picard, H. Poincaré, W. Steklov, S. Zaremba, I. Fredholm et aussi d'autres géomètres contemporains, le développement de l'intégrale de l'équation différentielle non homogène procède suivant les fonctions « singulières » correspondant au problème envisagé. Or, ces dernières n'étant pas en général connues numériquement, il en résulte, pour le problème de l'intégration approchée des équations différentielles, des difficultés assez notables sans parler des difficultés inhérentes à la résolution numérique des équations intégrales. Voici à ce propos les mémorables paroles de H. Poincaré [1]$_b$:

« Les problèmes de Physique mathématique se ramènent presque tous à un type commun. » « C'est le mérite de Fredholm d'avoir trouvé une méthode générale et rigoureuse qui leur est applicable à tous. » « La solution se présente ainsi comme le quotient de deux expressions analogues à des déterminants. » « Ces déterminants se présentent eux-mêmes sous la forme de séries. » « Bien que les séries soient extrêmement convergentes, bien que la loi de formation des termes soit élégante et simple, il en résulte pour le calcul numérique des difficultés insurmontables. » « Ainsi la méthode de Fredholm, excellente pour démontrer rigoureusement la possibilité du problème »... « n'a pas été employée pour le calcul numérique, et ne paraît pas devoir l'être sous la forme actuelle. »

Il était donc tout naturel d'essayer de baser la solution approchée des problèmes de la Physique mathématique sur la considération de séries terminées (combinaisons linéaires terminées), construites d'après un procédé assurant leur convergence vers l'intégrale cherchée et présentant un avantage quelconque au point de vue du calcul effectif (procédant par exemple suivant les fonctions « aisément » calculables).

En 1908, l'illustre physicien suisse W. Ritz [1] a proposé une méthode d'intégration approchée qui porte aujourd'hui son nom, et qui, ayant quelques points de contact avec le procédé du calcul utilisé antérieurement par Lord Rayleigh [3], est basée essentiellement sur l'emploi de l'algorithme variationnel, de sorte que l'équation donnée se trouve considérée comme l'équation d'Euler provenant d'un certain problème du Calcul de Variations.

L'intégrale à varier $I(y)$ dans la méthode de Rayleigh-Ritz, remarquons ceci en passant, peut être formée quelquefois directement d'après les données du problème, comme il est bien connu dans la Mécanique appliquée. On pose ensuite le problème de minimum à propos de cette intégrale, et l'on démontre que les fonctions formant une suite minimante tendent vers une certaine fonction limite, continue (la convergence a lieu uniformément), dérivable et vérifiant le système différentiel correspondant au problème envisagé.

Les combinaisons linéaires de la forme

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \psi_i(x)$$

donnent les approximations de la solution cherchée et pour $\psi_i(x)$ dans les recherches de Ritz et de ses successeurs, on a pris un système « complet » (¹) de fonctions aisément calculables, vérifiant les conditions ou frontières du problème (²).

Les coefficients inconnus $a_i^{(m)}$ se déterminent par les règles usuelles

(¹) Pour la notion du système « complet », voir par exemple [9].

(²) A l'aide d'un petit artifice de calcul on peut se débarrasser des conditions frontières imposées à $\psi_i(x)$.

du Calcul Différentiel, d'après la condition de rendre stationnaire l'intégrale

$$\mathrm{I}\left[\sum_{1}^{m} a_i^{(m)} \psi_i(x)\right].$$

Ainsi, pour les équations différentielles linéaires, on aboutit à un système d'équations linéaires toujours résolubles (par rapport aux coefficients cherchés), dans les cas particuliers considérés par W. Ritz lui-même. La possibilité du passage à la limite (pour $m \to \infty$) dans les cas susdits, peut être établi à présent en peu de mots à la lumière des méthodes directes [2], de la théorie moderne du Calcul des Variations et même par la simple application du célèbre théorème d'Arzélà, de sorte que la démonstration de la convergence du procédé devient pour ainsi dire immédiate; or, le vrai mérite du célèbre auteur consiste, ce nous semble, dans la découverte du *procédé de calcul numérique*, qui présente les avantages incontestables au point de vue du calcul effectif de la solution, d'après l'avis unanime des nombreux savants qui l'ont appliqué ces derniers temps aux diverses questions de la Physique mathématique, de la Science d'Ingénieur et de la Mécanique Céleste [15].

Pour estimer la méthode de Ritz à sa juste valeur, il n'y a qu'à se rappeler les paroles de H. Poincaré [1]$_b$: « La méthode de W. Ritz se prête mieux au calcul numérique. » « C'est une méthode d'Ingénieur »... « Les mêmes procédés de démonstrations seraient-ils applicables à tous les problèmes analogues, par exemple aux problèmes de Fourier? Ritz le croyait, je le crois aussi, mais le temps lui a manqué pour le vérifier. »

Cette opinion émise par l'un des plus grands géomètres contemporains, prouve suffisamment toute l'importance du procédé de Ritz et met en relief certains problèmes à investiguer qui en découlent. Les recherches s'y rapportant étaient d'autant plus nécessaires, ce nous semble, que dans certains travaux parus ces derniers temps et visant surtout les buts pratiques, le procédé de l'algorithme variationnel a été appliqué directement au calcul sans étude théorique préalable aux cas importants, où la forme quadratique sous le signe de l'intégrale à varier n'est pas définie positive, c'est-à-dire où ne se trouve pas réalisée la condition qui était essentielle dans les raisonnements de Ritz.

Les problèmes qui en surgirent méritaient donc une attention toute particulière, d'autant plus qu'ils ont été liés à la question du calcul effectif des valeurs « singulières » du paramètre (ainsi que des fonctions « singulières ») en Physique mathématique et que les paroles de H. Poincaré contenaient déjà une allusion à ce sujet.

Ces derniers problèmes exigent des méthodes de démonstration bien différentes de celles qui ont été utilisées par W. Ritz lui-même. Dans quelques travaux [6]$_{x}$, [6]$_{x'}$, [7], [8] s'y rapportant N. Kryloff et J. Tamarkin, en se basant sur les recherches récentes de Helge von Koch (concernant la théorie des déterminants infinis absolument convergents), ont élaboré la démonstration de la convergence de l'algorithme variationnel par une méthode [1] qui aurait pu être dénommée « la méthode des déterminants infinis ».

Le problème de la *convergence* de l'algorithme variationnel a été traité aussi dans des cas très généraux, à la lumière des autres méthodes par M. Plancherel (formes quadratiques à une infinité de variables) [28], L. Lichtenstein (l'équation de « fermeture » [12], L. Tonelli (méthodes directes du Calcul des Variations) [2]$_{a}$.

Dans les travaux récents de N. Kryloff [6], le problème de la solution approchée des équations de la Physique mathématique a été traité à l'aide des considérations brièvement résumées dans la suite.

Quelques remarques s'imposent dès le début, quand on se pose le problème de l'intégration approchée : il ne faut pas perdre de vue qu'il existe là-dessus deux manières de concevoir les choses, dont le désaccord se fait notablement sentir si l'on passe aux applications, c'est-à-dire dans le domaine propre du calcul numérique approché.

Pour le mathématicien pur, les théorèmes d'existence incontestablement ont une importance toute particulière. Il n'en est peut-être pas de même pour le physicien, pour l'ingénieur, pour lesquels les problèmes de l'existence souvent même, ne se posent pas, car l'existence de l'intégrale pour eux quelquefois est assurée suffisamment d'après les considérations d'ordre physique.

Il est donc légitime de poser le problème de la solution approchée comme il suit : *l'existence de l'intégrale unique du système différentiel est assurée, et l'on demande à la calculer avec une erreur*

---

(1) Cette méthode ne se prête pas pourtant aisément, ce semble, à l'estimation de l'erreur commise à la $m^{\text{ième}}$ approximation.

donnée d'avance en cherchant l'expression majorée de cette erreur sous la forme utilisable pratiquement.

Ce point de vue à la rigueur peut contenter même le mathématicien pur, car souvent il suffit de légers changements dans les démonstrations pour convertir en démonstrations de l'existence de la solution certains raisonnements élaborés pour l'appréciation de l'erreur.

Or, pour le praticien, la manière susdite de poser le problème de l'intégration approchée présente de réels avantages, car pour les applications, souvent il importe peu de savoir que le procédé est *convergent*, ou même que l'ordre de l'approximation est « *bon* », car pratiquement *la* « *bonne* » *approximation dépend essentiellement des coefficients numériques* intervenant dans l'expression majorée de l'erreur, et *ces coefficients influent sensiblement pour les petites valeurs de m qui intéressent surtout le praticien*. En effet, en tranchant la question de toute première importance : « quelle valeur de m il faut prendre afin que l'erreur soit plus petite qu'un nombre donné d'avance », on ne doit jamais oublier que les grandes valeurs de m pratiquement sont inutilisables pour le calcul effectif. Ainsi le nombre m des équations à résoudre (pour obtenir les expressions approchées des coefficients de Fourier de la solution cherchée), ne doit pas être grand (dans les calculs on utilise ordinairement $m = 2, 3, 4, 5, 6$) pour que le calcul effectif soit pratiquement réalisable.

En supposant le nombre m relativement petit (par exemple $m \leqq 6$), on doit donc chercher à appliquer une méthode de solution approchée telle que la valeur de l'erreur majorée à la même approximation soit admissible et conforme avec les données du problème. A cet effet doivent être largement utilisées les particularités de la question, car l'expression générale pour la majoration de l'erreur étant valable dans les cas généraux, est par cela même souvent trop majorée pour être pratiquement utilisable dans le cas particulier considéré.

C'est dans cet ordre d'idées qu'a été rédigé le fascicule présent du « Mémorial » dont *le but était de contribuer à l'élaboration* (sur les exemples simples, faciles à généraliser), *à côté de la méthode dite fondamentale dans la Physique mathématique, d'autres méthodes permettant de juger quelle approximation on doit prendre afin que l'erreur commise à cette approximation soit plus petite qu'un nombre donné d'avance.*

Dans ce genre de questions il faut distinguer nettement l'erreur réelle provenant du procédé employé de calcul numérique, laquelle théoriquement reste toujours inconnue et l'erreur majorée qui donne quelquefois une idée assez nette de l'erreur réelle, comme on peut le constater par exemple sur certaines expressions asymptotiques de l'erreur détaillées dans la suite. Il va sans dire que certaines majorations obtenues dans ce fascicule ne présentent qu'un premier pas dans la direction à suivre afin d'élaborer les majorations pratiquement utilisables; or il se trouve déjà toute une série de majorations (comme par exemple celles qui se rapportent à l'évaluation des valeurs singulières du paramètre) qui peuvent servir au calcul telles quelles au moins dans bien des cas rencontrés dans la pratique.

Quoique dans le domaine du calcul effectif le dernier mot doive appartenir aux praticiens ayant à soumettre à l'épreuve les différentes méthodes détaillées dans la suite, néanmoins on peut dire, ce me semble, qu'une œuvre utile aux praticiens serait à faire si à l'aide des méthodes plus loin explicitées on cherche à établir les expressions les moins majorées possibles de l'erreur pour les différents types d'équations, les plus importants dans les Sciences d'applications (1).

Faute de place n'ont pas été exposés dans ce fascicule bien d'autres méthodes (comme par exemple la méthode des moindres carrés et ses différentes généralisations, la méthode de l'analyse harmonique généralisé, etc.) étudiées et érigées en méthodes autonomes de la Physique Mathématique, par exemple dans les travaux de l'auteur de ce fascicule (*voir* [29]). Par les mêmes raisons dans ce fascicule n'ont pas été résumés les travaux relatifs aux problèmes de deux dimensions [29]$_{f,g}$.

---

(1) En terminant cette Introduction, je tiens à exprimer mes remerciements à mon élève M. N. Bogoliouboff, pour son précieux concours dans les longs et parfois assez pénibles calculs servant à l'élaboration de certaines formules de majoration.

Nota. — Dans ce fascicule n'a pu trouver place le résumé des recherches de ces derniers mois relatives aux sujets considérés (*voir* par exemple [29] et les travaux de F. H. Van den Dungen (fascicule IV du *Mémorial des Sciences physiques*), de R. Courant, M. Picone, J. Tamarkin et d'autres géomètres contemporains. C'est pour cette même raison que les indications bibliographiques, placées à la fin du fascicule sont loin d'être complètes.

CHAPITRE I.

1. La méthode de W. Ritz pour l'intégration approchée des équations différentielles. — Dans son Mémoire fondamental [1]$_a$, W. Ritz traite entre autres les équations différentielles aux dérivées ordinaires provenant de l'annulation de la première variation de l'intégrale, sous le signe de laquelle se trouve une forme quadratique [en $y(x)$ et sa première dérivée] définie et positive, donnée à l'avance. Par un raisonnement profond, qui se prête à différentes généralisations, W. Ritz démontre que les fonctions satisfaisant aux conditions frontières imposées au problème et formant une suite « minimante », convergent vers une fonction continue et dérivable, qui vérifie en effet une certaine équation différentielle, dont les coefficients dépendent, bien entendu, de la forme quadratique placée sous le signe de l'intégrale à varier.

A côté de ce problème, conformément à ce qui a été dit dans l'Introduction, une importance toute particulière appartient aussi au problème de l'intégration de l'équation différentielle donnée à l'avance, laquelle en bien des cas peut être considérée comme l'équation, dite d'Euler, provenant de l'annulation de la première variation dans un certain problème du Calcul des Variations. Cette manière d'envisager la question est d'autant plus légitime, que les recherches modernes [2] dans ce domaine ont montré la liaison étroite entre la question concernant l'existence de l'extremum absolu dans un problème de Variations et l'intégration de l'équation d'Euler correspondante.

En se bornant ici, comme d'ailleurs partout dans la suite, aux cas simples faciles à généraliser, considérons du premier abord le système différentiel

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right] + q(x)y = f(x), \\ y(0) = y(1) = 0, \qquad p(x) \geqq p_1 > 0, \qquad q(x) \leqq 0 \end{cases}$$

et esquissons en peu de mots, sauf à de légers changements près, la démonstration de la convergence du procédé de W. Ritz, telle que son célèbre auteur l'a conçue. Au moyen de l'intégration par parties on s'assure, vu les conditions frontières, que l'intégrale à rendre minimum dans le cas actuel est

$$(2)\qquad I[y] = \int_0^1 [py'^2 - qy^2 + 2fy]\,dx.$$

D'après l'idée déjà appliquée au calcul encore par Lord Rayleigh [3], on cherche les fonctions de la suite minimante parmi les combinaisons linéaires

$$y_m = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \psi_i(x) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, \infty),$$

où $\psi_i(x)$ sont les fonctions *aisément* calculables, vérifiant les conditions frontières de (1) et en outre formant un système orthogonal, normal et fermé, c'est-à-dire tel que l'on ait

$$\int_0^1 \psi_m(x)\psi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ 1, & \text{si } m = n \end{cases}$$

et

$$\int_0^1 F^2(x)\,dx = \sum_1^\infty A_i^2, \qquad A_i = \int_0^1 F(x)\psi_i(x)\,dx.$$

pour toute fonction $F(x)$ de carré intégrable (dans le cas considéré on peut prendre par exemple $\psi_i(x) = \sqrt{2}\sin i\pi x$). Les coefficients $a_i^{(m)}$ se déterminent pour chaque valeur de m par la condition de rendre l'intégrale (2) « stationnaire », c'est-à-dire par un système d'équations linéaires par rapport aux $a_i^{(m)}$

$$(3)\qquad \frac{\partial I_m}{\partial a_n^{(m)}} = \int_0^1 [py'_m\psi'_n - qy_m\psi_n + f\psi_n]\,dx = 0,$$

où

$$n \leq m, \qquad I_m = I[y_m];$$

le déterminant du système (3) est différent de zéro comme discriminant d'une forme quadratique définie et positive d'après les suppositions faites; donc le système est résoluble et la solution est unique.

De (3) on tire

$$(4)\qquad \int_0^1 [py'_m\eta'_m - qy_m\eta_m + f\eta_m]\,dx = 0,$$

où

$$\eta_m = \sum_{i=1}^{m} A_i^{(m)} \psi_i(x),$$

les coefficients $A_i^{(m)}$ étant arbitraires; en posant $\eta_{m+n} = y_{m+n} - y_m$, on aura donc

$$(5)\quad \int_0^1 [p(y'_m + \eta'_{m+n})\eta'_{m+n} - q(y_m + \eta_{m+n})\eta_{m+n} + f\eta_{m+n}]\,dx = 0;$$

par conséquent

$$(6)\quad 2[I^0_{m+n} - I^0_m] = -\int_0^1 \{p[y'_{m+n} - y'_m]^2 - q[y_{m+n} - y_m]^2\}\,dx,$$

où l'indice zéro en dessus signifie que les conditions de minimum sont déjà prises en considération. De (6) on voit que les I_i^0 diminuent avec l'augmentation de l'indice i, donc l'existence de la borne inférieure de I étant supposée démontrée, on conclut de (6) la possibilité de trouver un nombre M assez grand tel que pour $m > M$ et pour toute valeur de n

$$(7)\quad |I^0_{m+n} - I^0_m| < \varepsilon,$$

ε étant arbitrairement petit. Or, d'après l'inégalité de Bouniakowski-Schwarz,

$$\left[\int_0^1 F(x)\Phi(x)\,dx\right]^2 \leqq \int_0^1 F^2(x)\,dx \int_0^1 \Phi^2(x)\,dx$$

pour toutes les fonctions $F(x)$, $\Phi(x)$ intégrables et de carré intégrable, conséquence immédiate d'une relation évidente

$$\int_0^1 [\alpha F(x) + \beta\Phi(x)]^2 \geqq 0,$$

on tire de (7), vu le signe de $p(x)$, $q(x)$ et les conditions frontières, que

$$(8)\quad |y_{m+n} - y_m| = \left|\int_0^x (y'_{m+n} - y'_m)\,dx\right| \leqq \sqrt{\int_0^1 (y'_{m+n} - y'_m)^2\,dx} < \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\min p}}$$

et ceci prouve la convergence uniforme de y (pour $m \to \infty$) vers une fonction continue

$$\lim_{m \to \infty} y_m(x) = y(x). \tag{9}$$

L'existence de la borne inférieure de I peut être démontrée par la voie indiquée par W. Ritz lui-même en partant de l'intégrale de l'équation (1) vérifiant les conditions initiales de Cauchy et toujours existante; or il est plus simple au moyen de l'intégration par parties, de s'assurer que le problème de minimum en question est identique à celui posé pour l'intégrale (1)

$$\int_0^1 \left\{ \left[\sqrt{p(x)} \frac{dy}{dx} - \frac{\int_a^x f(x)\,dx}{\sqrt{p(x)}} \right]^2 - q(x) y^2 \right\} dx,$$

où la fonction sous le signe de l'intégrale est positive (*voir* aussi M. Picone [4]).

Pour prouver que la limite des suites minimantes précédemment formées, c'est-à-dire $y(x)$, vérifie l'équation différentielle donnée, W. Ritz propose (2) d'intégrer par parties la relation (4), en choisissant les nombres arbitraires A_i de sorte (3) que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{m \to \infty} \eta_m = \eta, \qquad \lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{d\eta_m}{dx} = \dfrac{d\eta}{dx}, \qquad \lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{d^2\eta_m}{dx^2} = \dfrac{d^2\eta}{dx^2}, \\ \eta(0) = \eta(1) = \left.\dfrac{d\eta}{dx}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{d\eta}{dx}\right|_{x=1} = 0. \end{array} \right. \tag{10}$$

En passant alors à la limite sous le signe de l'intégrale [tiré de (5) en intégrant deux fois par parties], ce qui est permis vu (9) et (10),

(1) Ou si l'on veut pour l'intégrale

$$\int_0^1 \left[p y'^2 + \left(\sqrt{|q|}\,.y + \frac{f}{\sqrt{|q|}} \right)^2 \right] dx.$$

(2) *Voir* [1]$_a$, p. 56, lignes 3-6.

(3) Pour lever une objection qui se présente ici [$\eta''(x)$ ne vérifie pas les conditions imposées aux $\psi_i(x)$], il suffit de remarquer qu'on peut évidemment toujours trouver une suite $\eta_m(x)$, vérifiant les conditions frontières de (1), telle que

$$\eta_m(0) = \eta_m(1) = \eta'_m(0) = \eta'_m(1) = 0,$$

et que η'_m converge en moyenne vers η'' et ceci permettra de démontrer (11).

on obtient

$$(11) \quad \int_0^1 \frac{d^2\eta}{dx^2}\left\{-py+\int_\alpha^x yp'\,dx+\int_\beta^x\int_\gamma^x [f-qy]\,\overline{dx}^2\right\}dx=0.$$

Or si

$$\int_0^1 F(x)\eta''(x)\,dx=0$$

pour toute fonction vérifiant les conditions frontières

$$\eta(0)=\eta(1)=\eta'(0)=\eta'(1)=0,$$

alors on a

$$(12) \quad \int_0^1 [F(x)-Cx-C_1]\eta''(x)\,dx=0 \qquad (C \text{ et } C_1 \text{ sont constantes}).$$

D'autre part, quels que soient C et C_1 on a

$$\int_0^1 (Cx+C_1)\eta''(x)\,dx=0$$

et pour toute valeur m et n, on peut trouver C et C_1 tels que

$$\int_0^1 (mx+n)[F(x)-Cx-C_1]\,dx=0,$$

car en égalant à zéro les coefficients m et n, on obtient un système d'équations linéaires en C et C_1, dont le déterminant

$$\begin{vmatrix} \int_0^1 x\,dx & \int_0^1 x^2\,dx \\ \int_0^1 dx & \int_0^1 x\,dx \end{vmatrix}$$

est différent de zéro en vertu de l'inégalité de Bouniakowski-Schwarz; donc on peut dans (12) poser $\eta''=F-Cx-C_1$, donc $F(x)=Cx+C_1$ et cette généralisation du lemme bien connu (dans le Calcul des Variations) de Du Bois Reymond permet de conclure de (11) que

$$(13) \quad py=\int_\alpha^x yp'\,dx+\int_\beta^x\int_\gamma^x [f-qy]\,\overline{dx}^2+C+C_1x$$

(C et C_1 sont des constantes);

la partie droite de (13) possède une dérivée, donc $y(x)$ est dérivable;

de même on s'assure que $y''(x)$ existe et, en différentiant une seconde fois, on voit que $y(x)$ satisfait à l'équation différentielle donnée (1).

C. Q. F. D.

Remarque. — Si les fonctions $\psi_i(x)$ sont les fonctions « singulières » correspondant au problème où le paramètre λ devant $q(x)$ est introduit (c'est-à-dire sont les solutions de l'équation homogène), les coefficients des approximations de W. Ritz se déterminent individuellement et l'expression générale de ces coefficients sera identique [5], $[6]_a$ à celle qu'on obtient par l'application de la méthode fondamentale [9] de la Physique mathématique; d'ici découle entre autres que la démonstration séparée de la convergence du procédé de Ritz en ce cas-là est superflue.

2. **Quelques remarques sur différentes démonstrations de la convergence du procédé de W. Ritz.** — Parmi ces démonstrations, ont une importance toute particulière celles qui découlent presque immédiatement des recherches de J. Hadamard $[2]_{b,c}$ et de L. Tonelli $[2]_a$, concernant les méthodes soi-disant directes du Calcul des Variations.

Dans le « problème simple » correspondant au cas actuel

$$\int_0^1 F(x, y, y')\,dx = \int_0^1 [py'^2 - qy^2 + 2fy]\,dx,$$

vu la supposition $p(x) > 0$, on a $F''_{y'^2} > 0$, on est donc dans le cas dit « régulier » du Calcul des Variations; d'autre part la condition de « l'unicité »

$$F''_{yy'} - F''_{y^2} F''_{y'^2} \leqq 0$$

est aussi satisfaite, car $q(x) \leqq 0$, d'après l'hypothèse faite. Donc l'existence de l'extremum absolu unique, fourni par l'extrémale, est assurée. On tire de là la démonstration de la convergence de l'algorithme de W. Ritz en vertu du théorème bien connu d'Osgood [2], d'après lequel (1) toute suite minimante — les conditions ci-dessus mentionnées étant remplies —, converge uniformément vers la fonction réalisant l'extremum absolu, c'est-à-dire dans le cas considéré vers l'intégrale unique de l'équation d'Euler correspondante (1).

(1) Il est aisé de voir, en effet, que $\lim_{m \to \infty} I[y_m] = I[y]$.

On pourrait aussi utiliser pour la démonstration de la convergence du procédé de Ritz les recherches de G. Fubini [28] (*voir* N. Kryloff [6]$_b$).

La démonstration de l'existence de la solution du système différentiel (1), même dans les cas les plus généraux de la Physique mathématique (l'existence des valeurs singulières du paramètre, des fonctions singulières, etc.), peut être élaborée à l'aide du théorème d'Arzélà [10] (sans avoir recours aux procédés généraux du Calcul des Variations), ce qui donnera entre autres la démonstration de la convergence du procédé de Ritz.

En se bornant pour le moment au cas déjà considéré du système (1), on a

$$[y_m(x_2)-y_m(x_1)]^2=\left[\int_{x_1}^{x_2} y'_m\,dx\right]^2 \leqq (x_2-x_1)\mathrm{M},$$

où $\mathrm{M}=$ const., indépendante de m; il est clair, en effet, que dans le procédé de l'algorithme variationnel, les intégrales

$$\int_0^1 y'^2_m\,dx \leqq \frac{1}{\min p}\int_0^1 p\,y'^2_m\,dx$$

sont bornées dans leur ensemble, de sorte que les y_m forment une suite de fonctions également continues; il est évident en outre que y_m sont uniformément bornées, donc en vertu du théorème susdit d'Arzélà, on peut en extraire une suite uniformément convergente vers une fonction continue $y(x)$.

Pour montrer que $y(x)$ est dérivable et représente l'intégrale du système différentiel (1), il suffit de transformer les conditions (4) de minimum sous la forme

$$(14)\quad \int_0^1 \left\{ \frac{d\left[p\dfrac{dy_m}{dx}\right]}{dx}\mathrm{K}(x,\varepsilon)-q\,y_m[\mathrm{K}(x,\varepsilon)]_m - f[\mathrm{K}(x,\varepsilon)]_m \right\} dx$$

$$=\int_0^1 \frac{d\left[p\dfrac{dy_m}{dx}\right]}{dx}\left\{\mathrm{K}(x,\varepsilon)-[\mathrm{K}(x,\varepsilon)]_m\right\}dx,$$

où $\mathrm{K}(x,\varepsilon)$ est la fonction de Green, c'est-à-dire la solution (pour $x\neq\varepsilon$) du système différentiel

$$\frac{d\left[p\dfrac{d\mathrm{K}}{dx}\right]}{dx}=0; \qquad \mathrm{K}(0,\varepsilon)=\mathrm{K}(1,\varepsilon)=0,$$

et dont la première dérivée est discontinue

$$\left.\frac{dK}{dx}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{dK}{dx}\right|_{x=\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)};$$

par la notation $[K]_m$ on désigne, comme partout dans la suite, la somme de m premiers termes du développement de $K(x, \varepsilon)$ en série trigonométrique. D'après la propriété de la fonction de Green et l'inégalité de Schwarz, on tire de (14)

$$(15) \quad \left| y_m - \int_0^1 [K(x, \varepsilon)]_m (q y_m - f)\, dx \right| \leqq \sqrt{\int_0^1 \left[p \frac{dy_m}{dx}\right]^2 dx} \sqrt{\int_0^1 \left[\frac{d\{K(x, \varepsilon) - [K(x, \varepsilon)]_m\}}{dx}\right]^2 dx};$$

or, vu les conditions frontières, on a

$$\frac{d[K(x, \varepsilon)]_m}{dx} = \left[\frac{dK(x, \varepsilon)}{dx}\right]_m,$$

donc, en remarquant que l'intégrale $\int_0^1 p y_m'^2\, dx$ est bornée quel que soit m, on aura [en passant à la limite pour $m \to \infty$ dans (15) et en utilisant de nouveau la propriété de la fonction de Green] que la fonction $y(x)$, limite d'une suite extraite d'après le théorème d'Arzélà de la suite minimante de Ritz, vérifie en effet le système différentiel donné (1). Vu que la solution du système (1) est unique, on s'assure aisément par un léger changement du raisonnement que la suite minimante de Ritz elle-même est uniformément convergente et tend pour $m \to \infty$ vers une fonction continue, dérivable et satisfaisant à (1).

Les raisonnements de ce genre basés sur l'emploi du théorème d'Arzélà et la notion de la fonction de Green sont largement utilisés dans les travaux de R. Courant [11] et aussi de L. Lichtenstein [12], qui traitent aussi le cas plus général d'une équation différentielle non linéaire ([1]) (*voir* aussi Hammerstein [13]).

Remarque. — A l'aide de (1) il est aisé de former le système linéaire à une infinité d'inconnues auquel satisfont les coefficients de Fourier de l'intégrale de (1). En effet, on a dans le cas $p(x) = 1$,

([1]) Voir plus loin, § 9.

$\psi_n = \sqrt{2}\sin \pi n x$

$$a_n = \int_0^1 y\psi_n\,dx = -\frac{1}{n^2}\int_0^1 y\psi''_n\,dx = -\frac{1}{n^2}\int_0^1 y''\psi_n\,dx$$
$$= -\frac{1}{n^2}\left\{\int_0^1 f\psi_n dx - \int_0^1 qy\psi_n\,dx\right\},$$

donc le système en question sera

$$n^2 a_n = b_n - \sum_{i\neq n,1}^{\infty} a_i \int_0^1 q\psi_i\psi_n\,dx + a_n\int_0^1 q\psi_n^2\,dx$$
$$(n = 1, 2, \ldots, \infty),$$
$$b_n = \int_0^1 f\psi_n\,dx.$$

De là on conclut que la méthode de W. Ritz n'est en somme que celle des « réduites » appliquée au système ci-dessus; cela se voit immédiatement d'après les conditions de minimum dans la méthode de Ritz, moyennant l'intégration par parties. On voit donc d'un coup tout le profit qu'on peut tirer [14] des recherches modernes dans le domaine des déterminants infinis, permettant de traiter les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues par la méthode des réduites dans le cas où par exemple le déterminant correspondant est « absolument convergent » (*voir* les travaux de H. von Koch [14]), c'est ce qui se vérifie ici aisément d'après les suppositions faites.

On doit cependant observer que cette méthode des déterminants infinis ne se prête pas aisément, ce semble, à l'évaluation plus ou moins précise des erreurs commises à la $m^{\text{ième}}$ approximation.

3. **La démonstration de la convergence de l'algorithme variationnel (procédé de Ritz) par des méthodes permettant d'apprécier l'erreur commise à la $m^{\text{ième}}$ approximation.** — Malgré son incontestable importance la méthode de W. Ritz, tant appliquée ce dernier temps aux divers problèmes de la Physique mathématique et de la Science d'Ingénieur [15], ne donne pas cependant, au moins sous la forme ci-dessus indiquée, le moyen d'apprécier le degré d'exactitude obtenu quand on s'arrête à une approximation comptant un nombre donné de termes.

Dans l'élaboration des méthodes d'intégration approchée, il est d'une importance toute particulière d'avoir des méthodes de démonstration qui permettent non seulement d'*établir la convergence du procédé*, *mais qui donnent aussi le moyen d'évaluer sous une forme explicite*, *nette*, *précise au plus possible*, *le module du maximum de l'erreur commise en s'arrêtant à la $m^{\text{ième}}$ approximation.*

Il est bon de remarquer à ce propos que, dans le domaine de l'intégration approchée, il n'est guère suffisant de constater que le maximum susdit tend vers zéro pour $\lim m \to \infty$, quoique ceci prouve déjà la convergence du procédé. La connaissance de l'ordre de l'approximation est aussi d'une utilité assez restreinte; ce qui importe surtout au point de vue des applications, c'est l'expression explicite de l'erreur commise sous la forme la moins majorée possible et les difficultés les plus graves résident dans l'appréciation commode pour les applications, de l'erreur susdite pour les *petites* valeurs de m. On peut même dire de plus, que dans la pratique les ingénieurs, pour ne pas être encombrés par les calculs peu maniables, n'utilisent ordinairement les approximations que pour les petites valeurs de

$$m(m = 2, 3, 4, 5, 6)$$

et alors les appréciations de l'erreur fournies par les différentes méthodes d'intégration approchée, ainsi que les particularités de la question et le mécanisme même du calcul, permettront de trancher le problème du choix de la méthode qui est à préférer pour l'intégration approchée de l'équation du type considéré, de sorte que sans trop d'exagération, ce semble, on pourrait affirmer qu'au point de vue de la pratique, chaque type d'équations à intégrer possède sa méthode la plus avantageuse d'intégration approchée qui lui est propre.

Dans la suite sera exposée toute une série des méthodes élaborées en vue de l'appréciation explicite de l'erreur susdite dans les cas généraux de la Physique mathématique; en se bornant pour le moment au cas $q(x) < 0$, seul considéré par Ritz dans ses recherches, posons le problème ainsi : *l'existence de la solution du système est assurée*, *il faut la calculer avec une erreur ne surpassant pas une quantité donnée d'avance.* Cette manière de poser la question est d'autant plus légitime que de légers changements de détail du raisonnement suffisent à donner la démonstration de l'existence de la solution; or ceci est inutile pourtant à détailler, vu que par exemple l'application du théorème d'Arzélà (*voir* § 2) en donne déjà la preuve immédiate.

Détaillons ici en premier lieu à titre d'exemple l'appréciation de l'erreur susdite pour le cas $p(x) = 1$ en appliquant la méthode proposée par N. Kryloff [6]$_e$ et dont l'idée revient à faire l'appréciation de $(y - y_m)$ au moyen de $(y - Y_m)$, où y_m et Y_m sont respectivement la $m^{\text{ième}}$ approximation fournie par le procédé de Ritz, et la somme des m premiers termes du développement de l'intégrale $y(x)$ en série de Fourier. L'analyse ci-dessous explicitée s'étend au cas général $p(x) \neq 1$ (les détails s'y rapportant se trouvent dans une monographie, actuellement sous presse, de N. Kryloff [29]$_k$).

En multipliant (3) respectivement par $\varphi_m(x)$ et en faisant la somme, on obtient

$$y''_m + q y_m + [q y_m]_m - q y_m = [f]_m,$$

d'ici, vu l'équation (1) vérifiée par $y(x)$, on tire

$$(16) \qquad \begin{aligned} r''_m + q r_m &= f - [f]_m + [q y_m]_m - q y_m \\ &= f - q y - [f - q y]_m + q r_m - [q r_m]_m, \end{aligned}$$

où $r_m = y - y_m$; donc on a

$$(17) \qquad r''_m + q r_m = y'' - Y''_m + \sum_{m+1}^{\infty} \psi_n(x) \int_0^1 q r_m \psi_n \, dx.$$

En intégrant (17) après avoir multiplié par $K(x, \varepsilon)$, on obtient, d'après la propriété de la fonction de Green et les conditions frontières,

$$(18) \qquad \begin{aligned} & r_m(x) + \int_0^1 K(x, \varepsilon) q(\varepsilon) r_m(\varepsilon) \, d\varepsilon \\ &= \{ y(x) - Y_m(x) \} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi x}{\pi^2 n^2} \int_0^1 q(x) r_m(x) \sin n\pi x \, dx; \end{aligned}$$

donc en multipliant (18) par $r_m(x) q(x)$ et en intégrant on aura, vu que $K(x, \varepsilon)$ est définie négative (¹) (d'après la terminologie des équa-

(¹) C'est-à-dire $K(x, \varepsilon)$ est tel que pour toute fonction $\varphi(x)$ intégrable et de carré intégrable, on a

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi(\varepsilon) \, dx \, d\varepsilon \leq 0;$$

on s'en assure d'après l'expression explicite, bien connue, de

$$K(x, \varepsilon) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\pi x \sin m\pi \varepsilon}{\pi^2 m^2}.$$

tions intégrales), l'inégalité suivante

$$\left|\int_0^1 q r_m^2\,dx\right| < \max|q|^{\frac{1}{2}}\sqrt{\int_0^1 (y-Y_m)^2\,dx}\sqrt{\left|\int_0^1 q r_m^2\,dx\right|}$$
$$+\frac{\max|q|\left|\int_0^1 q r_m^2\,dx\right|}{(m+1)^2\pi^2},$$

d'où

$$\sqrt{\left|\int_0^1 q r_m^2\,dx\right|} < \frac{\max|q|^{\frac{1}{2}}\sqrt{\int_0^1 (y-Y_m)^2\,dx}}{1-\dfrac{\max|q|}{\pi^2(m+1)^2}}.$$

D'autre part

$$\left|\int_0^1 K(x,\xi)q(\xi)r_m(\xi)\,d\xi\right| < \frac{\max|q|^{\frac{1}{2}}}{4}\sqrt{\left|\int_0^1 q r_m^2\,dx\right|},$$

car

$$|K(x,\xi)| \leqq x(1-x) \leqq \frac{1}{4};$$

donc

$$(19)\quad |r_m| = |y-y_m| < |y-Y_m|$$
$$+\frac{\max|q|}{4\left(1-\dfrac{\max q}{(m+1)^2\pi^2}\right)}\left[1+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}(m+1)^{\frac{3}{2}}\pi^2}\right]\sqrt{\int_0^1 (y-Y_m)^2\,dx},$$

car

$$\left|\sum_{m+1}^{\infty}\frac{2\sin n\pi x}{\pi^2 n^2}\int_0^1 q(x)r_m(x)\sin n\pi x\,dx\right|$$
$$\leqq\sqrt{\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{2\sin^2 n\pi x}{\pi^4 n^4}}\sqrt{\int_0^1 q^2 r_m^2\,dx} < \frac{\max|q|^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{3}(m+1)^{\frac{3}{2}}\pi^2}\sqrt{\left|\int_0^1 q r_m^2\,dx\right|}.$$

Cette formule (19) donne l'appréciation de l'erreur cherchée en comparaison avec l'erreur $y-Y_m$, dont la majoration est aisée de calculer (d'après les formules classiques de la théorie des séries trigonométriques) en remarquant que la limitation de $y(x)$ du système (1) en vertu des suppositions faites sera ([1])

$$\max|y(x)| < \frac{\int_0^1 [f(x)]^2\,dx}{\sqrt{2\pi}\min|p(x)|},$$

([1]) Cette remarque fut généralisée récemment par M. Triconi [16] et M. Picone [17] pour certains types d'équations aux dérivées partielles.

ou aussi

$$\sqrt{\int_0^1 (y'')^2\,dx} \leqq \max|q|^{\frac{1}{2}}\sqrt{\int_0^1 \frac{f^2}{|q|}\,dx} \qquad [\text{quand } p(x) = 1].$$

Parmi les divers moyens d'apprécier $|y - Y_m|$, indiquons le suivant. On a, en ayant égard à (1),

$$\sqrt{\int_0^1 (y - Y_m)^2\,dx} \leqq \frac{1}{(m+1)^2\pi^2}\sqrt{\int_0^1 (y'' - Y''_m)^2\,dx}$$
$$< \frac{1}{(m+1)^2\pi^2}\sqrt{\int_0^1 y''^2\,dx}$$
$$< \frac{\max|q|^{\frac{1}{2}}}{\pi^2(m+1)^2}\sqrt{\int_0^1 \frac{f^2}{|q|}\,dx},$$

de même

$$\sqrt{\int_0^1 (y' - Y'_m)^2\,dx} < \frac{\max|q|^{\frac{1}{2}}}{(m+1)\pi}\sqrt{\int_0^1 \frac{f^2}{|q|}\,dx};$$

donc, en vertu de la relation évidente

$$|R_m^2(x) - R_m^2(\varepsilon)| \leqq 2\sqrt{\int_0^1 R_m^2\,dx \int_0^1 R_m'^2\,dx} \qquad (\text{où l'on pose } \varepsilon = 0),$$

on obtient la limitation cherchée

$$|R_m| = |y - Y_m| < \frac{\sqrt{2}\max|q|^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}(m+1)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\int_0^1 \frac{f^2}{|q|}\,dx}.$$

Si $q(x)$ est soumise aux conditions restrictives complémentaires, la limitation susdite change en conséquence. En modifiant alors légèrement l'analyse on arrive aisément, au lieu de (19), à une autre formule asymptotique permettant d'affirmer que, pour $m \to \infty$,

$$\max|y - y_m| : \max|y - Y_m|$$

tend vers 1. En effet, on a

$$\int_0^1 K(x, \varepsilon)q(\varepsilon)R_m(\varepsilon)\,d\varepsilon$$
$$= q(x)\overline{\overline{R}}_m(x) + 2\int_0^1 K'(x, \varepsilon)q'(\varepsilon)\overline{\overline{R}}_m(\varepsilon)\,d\varepsilon + \int_0^1 K(x, \varepsilon)q''(\varepsilon)\overline{\overline{R}}_m(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$\sqrt{\int_0^1 [\overline{\overline{R}}_m]^2\,d\varepsilon} \leqq \frac{1}{(m+1)^2\pi^2}\sqrt{\int_0^1 R_m^2\,d\varepsilon};$$
$$\sqrt{\int_0^1 [\overline{\overline{R}}'_m]^2\,d\varepsilon} \leqq \frac{1}{(m+1)\pi}\sqrt{\int_0^1 R_m^2\,d\varepsilon},$$

où

$$\overline{\overline{R}}_m(x) = \int_0^1 K(x, \varepsilon) R_m(\varepsilon)\, d\varepsilon;$$

c'est-à-dire $\overline{\overline{R}}_m$ est l'intégrale du système différentiel

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R_m(x) : y(0) = y(1) = 0,$$

donc

$$|\overline{\overline{R}}_m| \leqq \frac{\sqrt{2}}{(m+1)^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\int_0^1 R_m^2\, d\varepsilon},$$

et par suite

$$\left|\int_0^1 K(x, \varepsilon) q(\varepsilon) R_m(\varepsilon)\, d\varepsilon\right|$$

$$< \frac{1}{(m+1)^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}} \left[\sqrt{2}\,|\max|q| + \frac{2\sqrt{\int_0^1 q'^2\, dx}}{\sqrt{(m+1)\pi}} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\int_0^1 q''^2\, dx}}{\sqrt{(m+1)\pi}}\right] \sqrt{\int_0^1 R_m^2\, dx}.$$

car $|K(x, \varepsilon)| < \frac{1}{4}$; $|K'(x, \varepsilon)| < 1$. En mettant (18) sous la forme

$$[Y_m - y_m] + \int_0^1 K(x, \varepsilon) q(\varepsilon)(Y_m - y_m)\, d\varepsilon$$

$$= -\int_0^1 K(x, \varepsilon) q(\varepsilon)(y - Y_m)\, d\varepsilon$$

$$-\sum_{m+1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi x}{n^2\pi^2} \int_0^1 q(x) r_m(x) \sin n\pi x\, dx = \varepsilon_m(x),$$

on en tire

$$\int_0^1 |q|\,[Y_m - y_m]^2\, dx \leqq \int_0^1 |q|\,\varepsilon_m^2\, dx,$$

donc

$$|y_m - Y_m| < \left(1 + \frac{\max|q|}{4}\right) \frac{N}{(m+1)^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\int_0^1 (y - Y_m)^2\, dx},$$

où

$$(20)\quad N = \sqrt{2}.\max|q| + \frac{1}{\sqrt{(m+1)\pi}}\left[2\sqrt{\int_0^1 [q'^2]^2\, dx} + \frac{1}{4}\sqrt{\int_0^1 [q'']^2\, dx}\right] + \frac{\sqrt{2}\max|q|}{\sqrt{3}\left[1 - \frac{\max|q|}{(m+1)^2\pi^2}\right]},$$

donc finalement on arrive à la formule en question

$$
\text{(I)}\qquad \boxed{\begin{aligned} |y-y_m| = |y-Y_m| + \theta\left(1+\frac{\max|q|}{4}\right)\frac{N}{(m+1)^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}} \\ \times\sqrt{\int_0^1 (y-Y_m)^2\,dx} \qquad (|\theta|<1),\end{aligned}}
$$

où N a la signification (20). Quand $q(x)$ n'est pas dérivable, on peut obtenir néanmoins la formule asymptotique ([1]) que voici :

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}_1)\quad |y-y_m| = |y-Y_m| + \theta\left(1+\frac{\max|q|}{4}\right) \\
\times\left\{\frac{K}{(m+1)^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4}\omega_1(h)\left[1+\frac{4}{h(m+1)^2\pi^2}\right] + \frac{\omega_2(h)}{4h^2(m+1)^2\pi^2}\right\} \\
\times\sqrt{\int_0^1 (y-Y_m)^2\,dx},
\end{aligned}
$$

où h est un nombre arbitraire qui doit être choisi en fonction de m de manière que

$$
\frac{1}{4}\omega_1(h)\left[1+\frac{4}{h(m+1)^2\pi^2}\right] + \frac{\omega_2(h)}{4h^2(m+1)^2\pi^2}
$$

tende vers zéro pour $m \to \infty$

$$
|\theta|<1, \qquad K = \max|q|\left\{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\left(1-\frac{\max|q|}{(m+1)}\right)}\right\},
$$

$$
\int_0^1 [q(x+h_s) - q(x+h'_s)]^2\,ds \leqq [\omega_1(h)]^2,
$$

$$
\int_0^1 [q(x+2h) - 2q(x+h) + q(x)]^2\,dx = [\omega_2(h)]^2
$$

$$
(0 \leqq h_s,\ h_{s'} \leqq h);
$$

on voit d'un coup que (I_1) se dégénère en (I) quand $q(x)$ est dérivable.

Les formules ci-dessus obtenues et leurs généralisations immédiates $[29]_k$, ainsi que les formules du même genre, qu'il est aisé encore d'établir, donnent réponse à la question non dénuée d'intérêt : *quelle approximation m doit-on prendre dans l'application du*

([1]) Élaborée par mon élève N. Bogolioubоff.

procédé de Ritz au système (1) *afin que l'erreur commise soit plus petite qu'un nombre assigné d'avance et compatible avec la nature du problème posé.* Dans l'élaboration des formules analogues, toute l'attention doit être dirigée de manière à obtenir l'expression de l'erreur sous la forme la moins majorée possible par rapport aux coefficients numériques qui y interviennent, de sorte que le désaccord entre *l'erreur calculée* par les formules élaborées et *l'erreur réelle*, c'est-à-dire non majorée, soit minimum. On reviendra sur cette question plus loin en traitant les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique (calcul des valeurs et des fonctions singulières, l'étude du cas général), mais dès à présent on peut déjà dire que le sujet est loin d'être épuisé, surtout vu le grand nombre des différentes méthodes d'intégration approchée, et ceci peut tenter, ce semble, les efforts des jeunes chercheurs.

L'élaboration des formules approchées majorant $|y - y_m|$ peut être faite de bien des façons aussi dans le cas $p(x) \neq 1$; en voici une : on a évidemment

$$|I(y_m) - I(y)| \leqq I(Y_m) - I(y)|,$$

donc

$$(21)\quad \begin{aligned} &\int_0^1 [p(y'_m - y')^2 - q(y_m - y)]\,dx \\ &\leqq \int_0^1 [p(Y'_m - y')^2] - q(Y_m - y)^2]\,dx \\ &\leqq \left\{ \max p + \frac{\max|q|}{(m+1)^2\pi^2} \right\} \int_0^1 (Y'_m - y')^2\,dx, \end{aligned}$$

par conséquent

$$|y - y_m| < \frac{L}{(m+1)\pi},$$

où

$$L = \sqrt{\max|p| + \frac{\max|q|}{(m+1)^2\pi^2}} \left\{ \frac{\sqrt{\int_0^1 f^2\,dx}}{\min|p|^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1 + \frac{\max|q|}{\pi} + \max|p'|}{\pi \min|p|} \right) \right\},$$

où, bien entendu, on peut de différentes manières améliorer la majoration.

Remarque I. — A l'aide des conditions de minimum (3) et l'équation différentielle (1), on obtient immédiatement l'appréciation de la différence entre les coefficients correspondants de l'approximation de Ritz et les coefficients de Fourier de $y(x)$

$$|a_n^{(m)} - a_n| = \left| \int_0^1 (y_m - y)\psi_n\,dx \right| < \frac{M}{(m+1)^2\pi^2}\sqrt{\int_0^1 [y - Y_m]^2\,dx},$$

où

$$M = \sqrt{\frac{\max|q|}{\min|q|}}\left\{ \max|q| + \sqrt{\int_0^1 q'^2\,dx} + \frac{1}{4}\sqrt{\int_0^1 q''^2\,dx} + \frac{\max|q|}{1 - \dfrac{\max|q|}{(m+1)^2\pi^2}} \right\}$$

$$(1 \leqq n \leqq m),$$

résultat intéressant au point de vue de la pratique.

Remarque II. — De (21), vu le signe de $q(x)$, on tire pour $p(x) = 1$

$$(22) \qquad \int_0^1 (y' - y'_m)^2\,dx < \int_0^1 (y' - Y'_m)^2\,dx \left[1 + \frac{\max|q|}{(m+1)^2\pi^2} \right];$$

d'autre part

$$\int_0^1 (y' - y'_m)^2\,dx \geqq \int_0^1 (y' - Y'_m)^2\,dx,$$

donc

$$\sqrt{\int_0^1 [y' - y'_m]^2\,dx} = \sqrt{\int_0^1 (y' - Y'_m)^2\,dx}\left(1 + \frac{\theta \max|q|}{(m+1)^2\pi^2} \right) \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1);$$

ceci démontre l'asymptotisme de $\sqrt{\int_0^1 |y' - y'_m|^2\,dx}$ par rapport à l'erreur quadratique $\sqrt{\int_0^1 (y' - [Y']_m)^2\,dx}$, car d'après les conditions frontières, on a $Y'_m = [Y']_m$.

De (16) on tire aussi

$$(23) \qquad \begin{aligned} |y'' - y''_m| < |f - [f]_m| &+ |qy - [qy]_m| \\ &+ \sqrt{\int_0^1 q'^2\,dx}\sqrt{\int_0^1 (y - y_m)^2\,dx} \\ &+ \sqrt{\int_0^1 q^2\,dx}\sqrt{\int_0^1 (y' - y'_m)^2\,dx}; \end{aligned}$$

d'autre part

$$| r'^2_m(x) - r'^2_m(\xi) | \overline{\overline{<}} 2 \sqrt{\int_0^1 r'^2_m \, dx} \sqrt{\int_0^1 r''^2_m \, dx}$$

et cela suffit pour prouver la convergence des premières dérivées des approximations de Ritz vers la première dérivée de l'intégrale $y'(x)$ de l'équation donnée (1). Pour établir la convergence des dérivées secondes, remarquons que d'après (22) et (23) on constate le fait, qui vient d'être déjà utilisé, justement que, si $q(x)$ est dérivable, les y''_m convergent en moyenne vers $y''(x)$; pour prouver la convergence ponctuelle, il faut imposer à $f(x)$ et $q(x)$ les conditions restrictives supplémentaires concernant la dérivabilité et pour $f(x)$ aussi la condition de s'annuler aux points frontières, c'est-à-dire

$$f(0) = f(1) = 0;$$

cette dernière condition peut toujours être supposée remplie, car le changement de variables, indiqué par M. Krawtchouk [18],

$$(24) \qquad y(x) = z(x) + \frac{f(1) - f(0)}{6}(x^3 - x) + \frac{f(0)}{2}(x^2 - x),$$

transforme l'équation différentielle (1) en une autre, où au lieu de $f(x)$ on aura une fonction $F(x)$, telle que

$$F(0) = F(1) = 0;$$

ceci permet d'affirmer que l'application de l'algorithme variationnel donne un procédé servant à vérifier approximativement le système différentiel donné (1), avec une erreur qui peut être calculée d'avance en correspondance avec les conditions restrictives imposées aux coefficients de (1) (*voir* aussi N. Kryloff [6]).

4. Quelques remarques sur les fonctions $\psi_i(x)$ dont les combinaisons linéaires servent à former, d'après la méthode de l'algorithme variationnel, les approximations de l'intégrale cherchée. — Les fonctions $\psi_i(x)$ ne sont pas évidemment les seules à utiliser dans le procédé du calcul approximatif de l'intégrale cherchée; ainsi les ingénieurs se servent souvent, dans la pratique, de polynomes vérifiant les conditions frontières, par exemple, du type $\psi_i(x) = x^i(1 - x)$, sans se préoccuper de la convergence des développements obtenus et en affirmant ordinairement que l'erreur commise à la $m^{\text{ième}}$ approximation ne se prête pas à l'appréciation.

On peut cependant remarquer que, d'après la notion du minimum, on a

$$|I(y_m) - I(y)| \leqq |I(Y_m) - I(y)|,$$

c'est-à-dire [cas $p(x) = 1$] (¹)

$$(25) \quad \int_0^1 \{[y'_m - y']^2 - q[y_m - y]^2\}\,dx \leqq \int_0^1 \{[Y'_m - y']^2 - q[Y_m - y]^2\}\,dx,$$

d'où, vu le signe de $q(x)$,

$$\int_0^1 [y'_m - y]^2\,dx \leqq \int_0^1 \{[Y'_m - y']^2 + |q|[Y_m - y]^2\}\,dx.$$

Déterminons à présent les coefficients A_i^{m} dans les combinaisons linéaires

$$Y_m = \sum_1^m A_i^{(m)} \psi_i, \qquad \psi_i = x^i(1-x),$$

de manière à rendre minimum l'intégrale $\int_0^1 [y' - Y'_m]^2\,dx$; il est aisé de voir que, dans le cas considéré, les approximations de l'intégrale cherchée se présentent sous la forme

$$\sum_{i=1}^m B_i \int_0^x P_i(x)\,dx,$$

où $P_i(x)$ sont les polynomes de Legendre et que $\left[\frac{dy}{dx}\right]_m = \frac{dY_m}{dx}\cdot$ Cela étant, on remarque qu'à côté de (25) on a

$$\int_0^1 [y'_m - y']^2\,dx = \int_0^1 \{[Y'_m - y']^2 - [Y'_m - y'_m]^2\}\,dx,$$

donc

$$\int_0^1 [Y'_m - y'_m]^2\,dx \leqq \max|q| \int_0^1 [Y_m - y]^2\,dx,$$

par conséquent

$$|y - y_m| \leqq \max|y - Y_m| + \max|q|^{\frac{1}{2}} \sqrt{\int_0^1 [y - Y_m]^2\,dx}.$$

(¹) Pour le cas $p(x) \neq 1$, *voir* les travaux de N. Kryloff [29].

Or

$$(26) \qquad |y - Y_m| < \sqrt{\int_0^1 [y' - Y'_m]^2\, dx} = \sqrt{\int_0^1 \left[y' - [y']_m\right]^2\, dx},$$

donc la différence $|y - y_m|$ au besoin peut être explicitée, car $[y']_m$ est la somme de m premiers termes du développement de y' en série de polynomes de Legendre.

La notion des « conditions naturelles », introduites par R. Courant [**11**], permet d'autre part de minimiser l'intégrale dans le champ des fonctions $\psi_i(x)$ ne vérifiant aucune condition frontière, en obtenant de la sorte pour $y(x)$ les « conditions frontières naturelles », si, bien entendu, l'intégrale à minimiser est « chargée » convenablement. En prenant par exemple l'intégrale « chargée » du type considéré par R. Courant,

$$(27) \qquad I(y) = \int_0^1 (py'^2 - qy^2 + 2fy)\, dx + y_0^2 t + y_1^2 t_1$$

(t et t_1 étant supposées positives ou nulles) (¹), on s'assure de l'annulation de la première variation pour toute valeur de δy que les conditions « naturelles » en ce cas-là seront

$$(28) \qquad \begin{cases} p(1)y'(1) = -t_1 y(1), \\ p(0)y'(0) = t\, y(0). \end{cases}$$

D'après les conditions de minimum on a, comme toujours,

$$|I(y_m) - I(y)| \leqq |I(Y_m) - I(y)|,$$

c'est-à-dire

$$(29) \qquad \int_0^1 \left\{ p(y'_m - y')^2 - q(y_m - y)^2 \right\} dx + (y_m - y)_0^2 t + (y_m - y)_1^2 t_1$$
$$\leqq \int_0^1 \left\{ p(Y'_m - y')^2 - q(Y_m - y)^2 \right\} dx + (Y_m - y)_0^2 t + (Y_m - y)_1^2 t_1 = \varepsilon_m.$$

La quantité ε_m peut être majorée d'après les méthodes exposées précédemment en fonction des données de la question, et en corres-

---

(¹) Le raisonnement est valable même pour t et t_1 négatives, pourvu que

$$|t| + |t_1| < \frac{1}{k}, \qquad \text{où} \qquad k = \frac{1}{\min|q|} + \frac{1}{\sqrt{\min|q| \cdot \min|p|}},$$

comme il est facile de s'en assurer.

pondance avec les conditions restrictives imposées aux coefficients du système différentiel (1).

De (29) on peut tirer l'estimation de l'erreur $|y - y_m|$ sous une forme explicite ne dépendant que des coefficients numériques. Cette manière d'envisager la question semble plus avantageuse au point de vue du calcul que la recherche de la solution approchée de (1) sous forme de combinaisons linéaires finies de fonctions vérifiant les conditions frontières (28) et qu'il est aisé de former.

Remarquons en passant que pour

$$p(1) = p(0) = 0, \tag{30}$$

les conditions frontières (28) dégénèrent en celles, qui ont été considérées précédemment,

$$y(1) = y(0) = 0;$$

donc, si les conditions (30) sont remplies, on peut utiliser pour la solution approchée du système (1) la méthode de l'algorithme variationnel appliquée à l'intégrale « chargée » (27). L'existence de la solution de (1) en ce cas peut être aisément démontrée par la méthode du paragraphe 1 $\left(\text{pourvu que l'intégrale } \int_0^1 \frac{dx}{p(x)} \text{ ait un sens}\right)$ et la solution approchée peut procéder suivant les fonctions $\psi_i(x)$ ne vérifiant pas les conditions frontières de (1). Cette observation se généralise dans différentes directions permettant de traiter les cas intéressant les sciences d'applications.

Remarque. — La méthode de l'algorithme variationnel (procédé de Ritz) sous la forme précédemment exposée, revient à la recherche des expressions approchées des coefficients de Fourier, de la solution cherchée du système différentiel (1).

Il n'est pas dénué d'intérêt, même au point de vue de la pratique, d'utiliser certaines formules d'interpolation (par exemple d'interpolation trigonométrique), en obtenant par cette voie les expressions approchées des valeurs $y(x)$ de la solution cherchée, ce qui peut être plus commode pour les applications que les valeurs $a_n^{(m)}$ précédemment trouvées. La convergence du procédé peut être aisément démontrée en ce cas [1], et l'estimation de l'erreur commise à la

[1] Car tout revient en somme à la reconstruction d'une même expression servant à l'approximation de l'intégrale.

$m^{\text{ième}}$ approximation s'obtient aussi sous une forme plus ou moins majorée, bien entendu. L'étude systématique des différentes formules d'interpolation (entre autres d'interpolation polynomiale, quand les points d'interpolation sont par exemple les racines des polynomes de Legendre ou de Tchebycheff), s'impose à ce point de vue et pourrait faire le sujet d'une étude spéciale, au moins en ce qui concerne le calcul numérique.

5. Solution approchée des problèmes fondamentaux de la Physique mathématique, traités par l'application de la méthode de l'algorithme variationnel. Calcul des valeurs singulières (dites aussi « caractéristiques », « fondamentales », « critiques ») **du paramètre.** — Les méthodes usuelles [9], sous des hypothèses assez larges, établissent, comme il est bien connu, l'existence des valeurs singulières λ_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, \infty$) formant une suite discrète et telles que pour ces valeurs du paramètre λ il existe une intégrale du système différentiel homogène

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\left[p\dfrac{dy}{dx}\right]}{dx} + \lambda q y + r y = 0 \qquad (q > 0); \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Le raisonnement élaboré par W. Ritz pour la démonstration de la convergence du procédé de l'algorithme variationnel, et exposé dans les paragraphes précédents avec différentes généralisations et modifications, est basée essentiellement sur le fait, que la forme quadratique sous le signe de l'intégrale à varier est définie positive; ce raisonnement ne s'adapte donc pas au cas actuel, et W. Ritz se borne [1_a] à quelques calculs numériques sans entrer dans la discussion de la convergence du procédé.

La méthode des déterminants infinis [$6]_b$, [7] donne la démonstration de la convergence; or, dans l'élaboration des méthodes d'intégration approchée, d'après ce qui a été dit au paragraphe 3, on doit toujours préférer les méthodes qui donnent l'appréciation, sous la forme la moins majorée possible, de l'erreur commise à la $m^{\text{ième}}$ approximation.

En prenant pour abréger le cas simple $p(x) = 1$, $r(x) = 0$, facile à généraliser (les cas plus généraux se trouvent traités dans les travaux [29)], détaillons le raisonnement de la Note de N. Kryloff [$6]_d$ s'y rapportant, en indiquant ensuite sans démonstration quelques formules relatives aux autres cas visant les différentes hypothèses à propos de $q(x)$. Les expressions approchées $\lambda_n^{(m)}$ de la valeur « singulière λ_n » se déterminent par l'équation dite « séculaire », obtenue en égalant à zéro le déterminant des coefficients $a_n^{(m)}$ dans le système linéaire

$$(32)\qquad \frac{\partial \mathrm{I}_m}{\partial a_n^{(m)}} = \int_0^1 [y'_{n,m}\psi'_i - \lambda q y_{n,m}\psi_i]\, dx = 0 \qquad (i \leqq m),$$

où

$$\mathrm{I}_m(a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}) = \int_0^1 \{ y'^2_{n,m} - \lambda q y^2_{n,m} \}\, dx,$$

$$y_{n,m}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \psi_i(x), \qquad \int_0^1 q y^2_{n,m}\, dx = 1$$

et où, d'après (32) même, on a [1]

$$\int_0^1 q y_{n,m} y_{i,m}\, dx = 0 \qquad (i \neq n);$$

$\psi_i(x)$ est un système des fonctions dont on a parlé dans le paragraphe 1, en particulier on peut prendre par exemple

$$\psi_n(x) = \sqrt{2}\sin \pi n x,$$

ou les polynomes vérifiant les conditions frontières

$$\psi_n(x) = x^n(1 - x).$$

En chargeant convenablement l'intégrale à varier $\mathrm{I}(y)$, on peut, d'après la remarque faite à la fin du paragraphe 4, se débarrasser des conditions frontières imposées aux fonctions $\psi_n(x)$ dans le champ desquelles on minimise l'intégrale $\mathrm{I}(y)$. En désignant par

$$\lambda_n^{(m)} \quad (n = 1, 2, \ldots, m)$$

les m racines, évidemment toutes réelles, de l'équation séculaire susdite, on tire de (32)

$$(33)\qquad \int_0^1 \Big[y_{n,m}(x) + \lambda_n^{(m)} \int_0^1 q\, \mathrm{K}(x, \varepsilon) y_{n,m}(\varepsilon)\, d\varepsilon\Big] \psi''_n\, dx = 0,$$

---

(1) Pour la démonstration détaillée, qui est assez compliquée, *voir* par exemple $[29]_{f,g}$, où a été considéré le problème plus général de deux dimensions.

où $K(x, \varepsilon)$ est la fonction de Green

$$K(x, \varepsilon) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x \sin \pi n \varepsilon}{\pi^2 n^2}.$$

Multiplions (33) par $\psi_n(x)$, en faisant la somme on aura

$$(34)\quad \begin{cases} y_{n,m}(x) + \lambda_n^{m} \displaystyle\int_0^1 K_m(x, \varepsilon) q(\varepsilon) y_{n,m}(\varepsilon)\, d\varepsilon = 0, \\ K_m(x, \varepsilon) = -2 \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi\varepsilon}{n^2\pi^2}; \end{cases}$$

on voit donc que λ_n^m et $y_{n,m}$ sont respectivement les valeurs et les fonctions singulières relatives au noyau $K_m(x, \varepsilon)$ représentant la somme des m premiers termes du développement de $K(x, \varepsilon)$ en série de Fourier. D'autre part, on sait que la $n^{\text{ième}}$ fonction singulière $y_n = \varphi_n$ vérifie l'équation intégrale homogène

$$y_n(x) + \lambda_n \int_0^1 K(x, \varepsilon) q(\varepsilon) y_n(\varepsilon)\, d\varepsilon = 0;$$

donc, en utilisant les résultats connus [17], on peut par bien des procédés obtenir les appréciations de

$$|y_n(x) - y(x)|, \qquad |\lambda_n - \lambda_n^m|,$$

car

$$|K(x, \varepsilon) - K_m(x, \varepsilon)| < \varepsilon_m; \qquad \lim \varepsilon_m \to 0,$$

et l'ordre de ε_m peut être apprécié. Or, on peut procéder de la manière que voici : déterminons les constantes a_i dans l'expression

$$F(x) = \sum_{i=1} a_i \varphi_i(x),$$

où $\varphi_i(x) (i = 1, 2, \ldots, n)$ sont les m premières fonctions singulières, dont l'existence est assurée d'après la méthode fondamentale de la Physique mathématique, de manière que

$$(35)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 q(x)[F]_m^2\, dx = 1, \qquad \int_0^1 q(x)[F(x)]_m y_{i,m}\, dx = 0 \\ (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1). \end{cases}$$

où $[F]_m$ est la somme de Fourier (en série de sinus) d'ordre m de $F(x)$; d'autre part il est possible aussi de déterminer les constantes b_i dans

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i y_{i,m}$$

afin que

$$(36)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 q(x)\Phi^2(x)\,dx = 1, \qquad \int_0^1 q(x)\Phi(x)\varphi_i(x)\,dx = 0 \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Alors, d'après (35), (36) et les propriétés de minimum, on a

$$\int_0^1 \Phi'^2(x)\,dx \geqq \lambda_n;$$

or

$$\int_0^1 \Phi'^2(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \lambda_i^{(m)} \leqq \lambda_n^{(m)} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \lambda_n^{(m)} \int_0^1 q(x)\Phi^2(x)\,dx = \lambda_n^{(m)},$$

donc les valeurs approchées de λ_n obtenues par l'application de l'algorithme variationnel, vérifient la relation suivante, importante au point de vue des applications :

$$\lambda_n^{(m)} \geqq \lambda_n.$$

On a aussi

$$\int_0^1 F_m'^2\,dx = \int_0^1 [F(x)]_m'^2\,dx \geqq \lambda_n^{(m)},$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_m'^2\,dx &= \int_0^1 F'^2\,dx + \int_0^1 [F_m'^2 - F'^2]\,dx \\ &\leqq \lambda_n + \lambda_n \int_0^1 q[F^2 - F_m^2]\,dx + \int_0^1 [F_m'^2 - F'^2]\,dx; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(m)} - \lambda_n &= |\lambda_n - \lambda_n^{(m)}| \\ &< \lambda_n \max|q| \sqrt{\int_0^1 [F - F_m]^2\,dx}\sqrt{\int_0^1 [F + F_m]^2\,dx}, \end{aligned}$$

car

$$\int_0^1 [F_m'^2 - F'^2]\,dx = \int_0^1 \{[F']_m^2 - F'^2\}\,dx \leqq 0,$$

par conséquent

$$|\lambda_n - \lambda_n^{(m)}| < \frac{2\lambda_n \max|q|}{\sqrt{\min|q|}} \frac{\sqrt{\int_0^1 F''^2\,dx}}{(m+1)^2\pi^2} \sqrt{\int_0^1 q F^2\,dx}$$
$$< \frac{2\lambda_n^2 \max|q|^{\frac{3}{2}} \int_0^1 q F^2\,dx}{\min|q|^{\frac{1}{2}}(m+1)^2\pi^2};$$

d'autre part

$$\left|\int_0^1 q F^2\,dx - 1\right| < \frac{2\max|q|^{\frac{3}{2}}\lambda_n \int_0^1 q F^2\,dx}{(m+1)^2\pi^2 \min|q|^{\frac{1}{2}}},$$

donc

$$\int_0^1 q F^2\,dx < \frac{1}{1 - \dfrac{2\max|q|^{\frac{3}{2}}\lambda_n}{(m+1)^2\pi^2\min|q|^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\left(\text{si bien entendu } \frac{2\max|q|^{\frac{3}{2}}\lambda_n}{\min|q|^{\frac{1}{2}}(m+1)^2\pi^2} < 1\right);$$

par suite on obtient

$$\text{(II)} \quad \boxed{|\lambda_n - \lambda_n^{(m)}| < \frac{2\lambda_n^2 \max|q|^{\frac{3}{2}}}{\min|q|^{\frac{1}{2}}(m+1)^2\pi^2 - 2\max|q|^{\frac{3}{2}}\lambda_n}, \qquad \lambda_n \leqq \frac{n^2\pi^2}{\min|q|}.}$$

Pour l'estimation de l'erreur $|\lambda_n - \lambda_n^{(m)}|$ on pourrait utiliser la méthode de variations en introduisant le noyau auxiliaire $K(x, t; \alpha)$ dépendant du paramètre α

$$K(x, t; \alpha) = K_m(x, t) + \alpha[K(x, t) - K_m(x, t)].$$

de sorte que

$$K(x, t; 0) = K_m(x, t); \qquad K(x, t; 1) = K(x, t).$$

Soient $\lambda_k(\alpha)$ et $\varphi_k(x; \alpha)$ respectivement les valeurs et les fonctions singulières correspondantes au noyau $K(x, t; \alpha)$, c'est-à-dire

$$(37) \qquad \varphi_k(x; \alpha) + \lambda_k(\alpha)\int_0^1 K(x, t; \alpha) q(t) \varphi_k(t; \alpha)\,dt = 0.$$

En prenant la variation de (37), on a [1]

$$\begin{aligned}\frac{\delta\varphi_k(x;\alpha)}{\delta\alpha} &+ \lambda_k(\alpha)\int_0^1 K(x,t;\alpha)q(t)\frac{\delta\varphi_k}{\delta\alpha}(t;\alpha)\,dt\\ &= -\frac{\delta\lambda_k(\alpha)}{\delta\alpha}\int_0^1 K(x,t;\alpha)q(t)\varphi_k(t;\alpha)\,dt\\ &\quad -\lambda_k(\alpha)\int_0^1\frac{\delta K(x,t;\alpha)}{\delta\alpha}q(t)\varphi_k(t;\alpha)\,dt.\end{aligned}$$

Pour que cette relation puisse avoir lieu, $\lambda_k(\alpha)$ étant une valeur singulière, il faut, d'après le théorème connu de la théorie des équations intégrales, que

$$\frac{\delta\lambda_k(\alpha)}{\delta\alpha}\,\frac{1}{\lambda_k^2(\alpha)} = \int_0^1\int_0^1 q(x)q(t)[K(x,t)-K_m(x,t)]\varphi_k(x;\alpha)\varphi_k(t;\alpha)\,dx\,dt,$$

d'où l'on tire

$$(38)\quad \lambda_k^{(m)}-\lambda_k \leqq \lambda_k\lambda_k^{(m)}\,2\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{\left[\displaystyle\int_0^1\varphi_k(x,\tilde\alpha)q(x)\sin i\pi x\right]^2}{i^2\pi^2} < \frac{\lambda_k\lambda_k^{(m)}\max|q|}{(m+1)^2\pi^2}$$

$$(0<\tilde\alpha<1);$$

or, pour m suffisamment grand, $1 > \dfrac{\lambda_k \max|q|}{(m+1)^2\pi^2}$, donc [2]

$$(\mathrm{III})\quad \boxed{\lambda_k^{(m)}-\lambda_k < \frac{\lambda_k^2\max|q|}{(m+1)^2\pi^2-\lambda_k\max|q|}\qquad\left(\lambda_k\leqq\frac{k^2\pi^2}{\min|q|}\right).}$$

Cette appréciation de l'erreur dans l'application de l'algorithme variationnel peut être utile pratiquement, car des formules de ce genre on peut conclure *quel nombre m doit être pris dans le calcul des valeurs singulières* (au moyen de l'algorithme variationnel) *pour que l'erreur commise ne surpasse pas la valeur assignée d'avance. Si le nombre m ainsi obtenu est trop grand pour que le calcul puisse se faire aisément, on peut avoir recours à la*

---

[1] Pour la démonstration du fait que $\varphi_k(x,\alpha)$ possède la dérivée par rapport à α, *voir* les travaux de N. Kryloff [29].

[2] On peut limiter $\lambda_k^{(m)}$ directement par le calcul.

supposition, pratiquement dans bien des cas admissible, *de la dérivabilité de* $q(x)$; de même dans certains cas peuvent être utiles les appréciations de l'erreur où $q(x)$ n'intervient pas dans le dénominateur, de sorte que *les majorations de l'erreur ainsi obtenues sont valables même quand* $q(x)$ *peut s'annuler*. Voici quelques formules de ce genre récemment obtenues $[6]_e$ qui ne sont pas dénuées d'intérêt :

$$\text{(IV)}\qquad \boxed{\left|\frac{\lambda_k^{(m)}-\lambda_k}{\lambda_k}\right| < \frac{|\lambda_k^{(m)}|}{\pi^4(m+1)^4}\left[|\lambda_k^{(m)}|\max q^2+\max\left|\frac{q'^2}{q}\right|\right].}$$

$$\text{(V)}\qquad \boxed{\left|\frac{\lambda_k^{(m)}-\lambda_k}{\lambda_k}\right| < \frac{[\lambda_k^{(m)}]^2}{\pi^4(m+1)^4}\left\{\max q^2+\frac{\max|q''|}{|\lambda_k^{(m)}|}+\frac{|\lambda_k^{(m)}|}{4}\,\frac{\max|q|^3}{(m+1)^2\pi^2}\right\}.}$$

$$\text{(VI)}\qquad \boxed{\begin{gathered}\left|\frac{\lambda_k^{(m)}-\lambda_k}{\lambda_k}\right| < \frac{[|\lambda_k^{(m)}|]^3}{(m+1)^6\pi^6}\left\{\max|q|^{\frac{3}{2}}+\frac{2\max|q'|}{\sqrt{\lambda_k^{(m)}}}(1+\delta_m)\right.\\ \left.\qquad\qquad+\frac{1}{\lambda_k^{(m)}}\max\left|\frac{q''}{\sqrt{q}}\right|\right\}^2,\\ \text{où}\quad \delta_m=\frac{\max|q|\,|\lambda_k^{(m)}|}{8(m+1)^2\pi^2}.\end{gathered}}$$

$$\text{(VII)}\qquad \boxed{\begin{gathered}\left|\frac{\lambda_k^{(m)}-\lambda_k}{\lambda_k}\right| < \frac{|\lambda_k|\,\mathrm{A}}{\pi^2(m+1)^2-\mathrm{B}\,|\lambda_k|},\\ \text{où}\left\{\begin{aligned}&\mathrm{A}=(\max|q|-\min|q|)\sqrt{\frac{\max|q|}{\min|q|}},\\ &\mathrm{B}=2\max|q|;\ |\lambda_k|<\frac{k^2\pi^2}{\min|q|}.\end{aligned}\right.\end{gathered}}$$

Ces formules donnent les appréciations des majorations des erreurs relatives en correspondance avec les différentes restrictions imposées à la fonction $q(x)$ [entre autres la formule (VII) montre que cette majoration de l'erreur est égale à zéro si $q(x)=\text{const.}$], et il va de soi que, pour choisir la meilleure, il faut utiliser les particularités de la question. Pour obtenir les résultats utiles au praticien, *il faut donc élaborer toute une série de formules de majoration*, *en faisant intervenir les conditions restrictives* (imposées aux coefficients du système différentiel donné) *les plus fréquentes dans la pratique*.

Les formules ci-dessus obtenues prouvent en particulier la convergence du procédé de l'algorithme variationnel (qui en découle comme simple conséquence), et se généralisent immédiatement pour les équations différentielles d'ordre supérieur.

6. **Calcul des fonctions « singulières » (« fondamentales », caractéristiques ») à l'aide de l'algorithme variationnel.** — Considérons l'équation (37), d'où, en prenant la variation par rapport à α, on tire aisément

$$\frac{\delta\bar\varphi_k}{\delta\alpha} + \bar\lambda_k \int_0^1 \{ K_m + \alpha[K - K_m] \} q \frac{\delta\bar\varphi_k}{\delta\alpha}\, dt = \eta,$$

où

$$\eta = \bar\varphi_k \frac{\delta\bar\lambda_k}{\delta\alpha} \frac{1}{\bar\lambda_k} - \bar\lambda_k \int_0^1 [K - K_m] q \bar\varphi_k\, dt, \qquad \bar\varphi_k = \varphi_k(x, \alpha), \qquad \bar\lambda_k = \lambda_k(\alpha).$$

Or, $\bar\lambda_k$ est une valeur singulière pour le noyau $K_m + \alpha(K - K_m)$; donc, en vertu d'un théorème bien connu de la théorie des équations intégrales linéaires $[9]_b$, on a

$$\frac{\delta\bar\varphi_k}{\delta\alpha} = C\bar\varphi_k - \bar\lambda_k \sum_{k \neq l} \frac{\bar\lambda_l \bar\varphi_l}{\bar\lambda_l - \bar\lambda_k} \int_0^1 q\bar\varphi_l \left[\int_0^1 (K - K_m) q \bar\varphi_k\, dt \right] dx,$$

où $C = \text{const.}$; en différentiant $\int_0^1 q\bar\varphi_k^2\, dx = 1$, il en résulte, d'après la formule précédente, en vertu de l'orthogonalité des fonctions $\bar\varphi_l$, que $C = 0$, donc

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 q \left[\frac{\delta\bar\varphi_k}{\delta\alpha} \right]^2 dx \right| &= \sum_{l \neq k} \bar\lambda_k^2 \left| \frac{\bar\lambda_l}{\bar\lambda_l - \bar\lambda_k} \right|^2 \left[\int_0^1 q\bar\varphi_l \left\{ \int_0^1 (K - K_m) q \bar\varphi_k\, dt \right\} dx \right]^2 \\
&< M^2 \bar\lambda_k^2 \max|q| \int_0^1 \left[\int_1 (K - K_m) q \bar\varphi_k\, dt \right]^2 dx \\
&= \bar\lambda_k^2 M^2 \max|q| \, 2 \sum_{m+1}^{\infty} \frac{\left(\int_0^1 q\bar\varphi_k \sin n\pi x\, dx \right)^2}{n^4 \pi^4} \\
&< \frac{\bar\lambda_k^2 M^2 \max|q|}{(m+1)^4 \pi^4} \sum_{m+1}^{\infty} 2 \left(\int_0^1 q\bar\varphi_k \sin n\pi x\, dx \right)^2,
\end{aligned}$$

où

$$M = \max \left| \frac{\bar\lambda_l}{\bar\lambda_l - \bar\lambda_k} \right| = \max \left| \frac{1}{1 - \dfrac{\bar\lambda_k}{\bar\lambda_l}} \right|$$

$$= \text{le plus grand de deux nombres } \left| \frac{\bar\lambda_{k+1}}{\bar\lambda_{k+1} - \bar\lambda_k} \right|, \quad \left| \frac{\bar\lambda_{k-1}}{\bar\lambda_{k-1} - \bar\lambda_k} \right|.$$

D'autre part

$$\eta_m = \sum_{m+1}^{\infty} 2\left[\int_0^1 q\varphi_k \sin n\pi x\,dx\right]^2$$
$$= \sum_1^{\infty} 2\left[\int_0^1 (q\varphi_k - [q\varphi_k]_m)\sin n\pi x\,dx\right]^2 = \int_0^1 (q\varphi_k - [q\varphi_k]_m)^2\,dx,$$

par conséquent

$$\left|\int_0^1 q\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right)^2 dx\right| < \frac{\max|q|\bar{\lambda}_k^2 \mathrm{M}^2\eta_m}{(m+1)^4\pi^4};$$

or

$$\int_0^1 q(y_k - y_{k,m})^2\,dx = \int_0^1 q\left(\int_0^1 \frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\partial x\right)^2 dx < \max\left|\int_0^1 q\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right)^2 dx\right|,$$

donc l'*expression de l'erreur globale* (quadratique moyenne) se présente sous la forme suivante :

$$\text{(VIII)}\quad \boxed{\int_0^1 q(y_k - y_{k,m})^2 dx < \frac{\max|q|\lambda_k^{(m)2}\mathrm{M}^2\eta_m}{(m+1)^4\pi^4}, \qquad \text{car} \quad \lambda_k \leqq \bar{\lambda}_k \leqq \lambda_k^{(m)},}$$

où les limitations pour η_m

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
&\eta_m \leqq \max|q|;\\
&\eta_m \leqq \frac{\lambda_k^{(m)}}{(m+1)^2\pi^2}\left(\max q^2 + \frac{\max|q''|}{\lambda_k^{(m)}} + \frac{1}{4}\,\frac{\lambda_k^{(m)}\max|q'^2|}{(m+1)^2\pi^2}\right);\\
&\eta_m < \frac{\lambda_k^{(m)}}{(m+1)^2\pi^2}\left(\max q^2 + \max\left|\frac{q'^2}{q}\right|\frac{1}{\lambda_k^{(m)}}\right);\\
&\eta_m < \frac{\lambda_k^{(m)}}{(m+1)^4\pi^4}\left(\max q^{\frac{3}{2}} + \frac{2\max|q'|[1+\delta_m]}{\sqrt{\lambda_k^{(m)}}} + \frac{1}{\lambda_k^{(m)}}\max\left|\frac{q''}{\sqrt{q}}\right|\right)^2.
\end{aligned}\right.$$

avec

$$\delta_m = \frac{\max|q||\lambda_k^{(m)}|}{8(m+1)^2\pi^2},$$

s'obtiennent aisément et ont déjà été utilisées pour la déduction des formules (III)-(VII), car, d'après (38), on a

$$\lambda_k^{(m)} - \lambda_k \leqq \frac{\lambda_k\lambda_k^{(m)}}{(m+1)^2\pi^2}\int_0^1 (q\varphi_k - [q\varphi_k]_m)^2\,dx = \frac{\lambda_k\lambda_k^{(m)}\eta_m}{(m+1)^2\pi^2}.$$

La constante M peut être limitée par la formule évidente

$$(40)\qquad M < \frac{|\lambda_{k\pm1}^{(m)}|}{|\lambda_{k\pm1}^{(m)} - \lambda_k^{(m)}| - \varepsilon_{k+\left(\frac{1\pm1}{2}\right)}^{(m)}}$$

$$\left[\text{à la condition } (^1) \text{ que } \varepsilon_{k+\left(\frac{1\pm1}{2}\right)}^{(m)} < |\lambda_{k\pm1}^{(m)} - \lambda_k^{(m)}|\right],$$

à l'aide des valeurs qu'on peut obtenir directement pendant le calcul et de $\varepsilon_l^{(m)}$, c'est-à-dire des majorations ci-dessus obtenues, de l'erreur

$$\varepsilon_l^{(m)} = \lambda_l^{(m)} - \lambda_l.$$

La limitation de M peut être obtenue aussi en fonction des coefficients du système différentiel donné en se basant sur la limitation suivante :

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k > \frac{2k\pi^2\delta}{\max|q|}, \qquad \text{où} \qquad \delta = e^{\int_0^1 \left|\frac{q'}{q}\right| \frac{\operatorname{sign} q' - 1}{2} dx}$$

qu'on obtient (²) à l'aide de considérations liées aux propriétés oscillatoires de l'équation différentielle donnée (théorème de Sturm).

Pour obtenir l'erreur ponctuelle, on peut procéder de bien des manières. En voici une. D'après ce qui précède, on a

$$\int_0^1 (y_{k,m} - [y_k]_m)^2 dx < \int_0^1 (y_{k,m} - y_k)^2 dx < \frac{\max|q|}{\min|q|} \frac{\lambda_k^{(m)2} M^2 \eta_m}{(m+1)^4\pi^4},$$

donc

$$(41)\qquad |y_{k,m} - [y_k]_m| < \sqrt{2m}\sqrt{\int_0^1 (y_{k,m} - [y_k]_m)^2 dx}$$
$$< \sqrt{\frac{\max|q|}{\min|q|}} \frac{(2\eta_m)^{\frac12} M |\lambda_k^{(m)}|}{\pi^2(m+1)^{\frac32}}.$$

D'autre part, au moyen de l'intégration par parties, on s'assure

(¹) Ce qui sûrement aura lieu pour m suffisamment grand, car $\lambda_l^{(m)} - \lambda_l = \varepsilon_l^{(m)}$ tend vers zéro pour $m \to \infty$.

(²) Pour la démonstration, *voir* [29].

que

$$|y_k - [y_k]_m| < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\int_0^1 (y''_k - [y''_k]_m)^2\, dx}}{\pi^2 (m+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= |\lambda_k| \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\int_0^1 (q y_k - [q y_k]_m)^2\, dx}}{\pi^2 (m+1)^{\frac{3}{2}}},$$

par conséquent

$$(42)\quad |y_k - [y_k]_m| < \left\{ \max_{0 \leqq \alpha \leqq 1} \sqrt{\int_0^1 (q\bar{\varphi}_k - [q\bar{\varphi}_k]_m)^2\, dx} \right\} \frac{|\lambda_k| \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi^2 (m+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\, \eta_m |\lambda_k|}{\pi^2 (m+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

D'après (41) et (42), on tire de la relation évidente

$$|y_k - y_{k,m}| < |y_k - [y_k]_m| + |[y_k]_m - y_{k,m}|,$$

la formule donnant la *majoration de l'erreur ponctuelle pour le calcul des fonctions singulières* relatives au cas considéré

$$\text{(IX)}\quad \boxed{|y_k(x) - y_{k,m}(x)| < \frac{|\lambda_k^{(m)}| \sqrt{\frac{2}{3}}\, \eta_m}{(m+1)^{\frac{3}{2}} \pi^2} \left(1 + \mathrm{M} \sqrt{\frac{3 \max |q|}{\min |q|}}\right),}$$

où les majorations pour les constantes η_m et M sont données par les formules (39), (40). L'analyse qui nous a conduit à la formule (IX) s'étend d'elle-même aux systèmes différentiels plus généraux que le système considéré.

7. L'intégration approchée de l'équation différentielle non homogène (cas général) par le procédé de l'algorithme variationnel. — Bornons-nous à titre d'exemple au cas simple du système différentiel

$$(43)\qquad y'' + \lambda q(x) y = f; \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

En substituant dans l'intégrale dont l'équation d'Euler est justement l'équation différentielle donnée, au lieu de $y(x)$, une combinaison linéaire de la forme

$$y_m = \sum_1^m a_i^{(m)} \psi_i(x) \qquad (\text{où par exemple } \varphi_i(x) = \sin i\pi x),$$

on obtient, par la condition de rendre l'intégrale susdite « stationnaire », le système suivant d'équations linéaires

$$\int_0^1 [y'_m \psi'_i - \lambda q y_m \psi_i]\, dx = \int_0^1 f \psi_i \, dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

d'où, en intégrant par parties, il vient

$$\int_0^1 \left[y_m + \lambda \int_0^1 K(x, t) q y_m \, dt \right] \psi''_i \, dx = \int_0^1 \psi''_i \left[\int_0^1 K(x, t) f(t)\, dt \right] dx$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m);$$

de là, par une combinaison évidente, on tire

$$y_m + \lambda \int_0^1 K_m(x, t) q y_m \, dt = \int_0^1 K_m(x, t) f(t)\, dt.$$

Considérons à présent l'équation intégrale suivante :

$$(44) \quad y(x, \alpha) + \lambda \int_0^1 K(x, t; \alpha) q(t) y(x, t; \alpha)\, dt = \int_0^1 K(x, t; \alpha) f(t)\, dt,$$

où

$$K(x, t; \alpha) = K_m(x, t) + \alpha[K(x, t) - K_m(x, t)],$$

de sorte que

$$y(x, 0) = y_m(x); \qquad y(x, 1) = y(x).$$

En prenant la variation de (44) par rapport à α, on obtient

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} + \lambda \int_0^1 K(x, t; \alpha) q(t) \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha}\, dt = \eta,$$

où

$$\eta = \int_0^1 [K - K_m] f \, dt - \lambda \int_0^1 (K - K_m) q y \, dt;$$

donc, en appliquant la formule de Schmidt déjà utilisée, on en tire

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \eta + \lambda \sum_1^\infty \frac{\bar\varphi_i}{\bar\lambda_i - \lambda} \int_0^1 \eta q \bar\varphi_i \, dt,$$

par conséquent

$$(45)\qquad \int_0^1 \left[\frac{\delta y(x,\alpha)}{\delta\alpha}\right]_m^{\prime 2} dx = \lambda^2 \int_0^1 \left[\sum_1^{\infty} \frac{\overline{\varphi}_i'}{\overline{\lambda}_i - \lambda} \int_0^1 \eta\, q\, \overline{\varphi}_i\, dt\right]_m^2 dx$$

$$< \lambda^2 \int_0^1 \left[\sum_1^{\infty} \frac{\overline{\varphi}_i'}{\overline{\lambda}_i - \lambda} \int_0^1 \eta\, q\, \overline{\varphi}_i\, dt\right]^2 dx$$

$$= \lambda^2 \sum_1^{\infty} \frac{\overline{\lambda}_i \left(\int_0^1 \eta\, q\, \overline{\varphi}_i\, dt\right)^2}{(\lambda_i - \lambda)^2}$$

$$= \lambda^2 \sum_1^{\infty} \frac{\lambda_i \left(\int_0^1 \overline{\eta q}\, \varphi_i'\, dt\right)^2}{(\lambda_i - \lambda)^2} < \mathrm{M}^2 \lambda^2 \int_0^1 (\overline{\eta q})^2\, dt,$$

où

$$(46)\qquad \overline{q\eta} = \int_0^1 \mathrm{K}'_x(x,t)\,\eta\, q\, dt, \qquad \mathrm{M} = \max_{i=1,2,\ldots} \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda}\right|,$$

et, en intégrant par parties, on tire de (46)

$$\overline{\eta q} = \int_0^1 \eta\, q\, dt + \overline{\eta}\, q - \int_0^1 \mathrm{K}'_x\, q'\, \overline{\eta}\, dt, \qquad \text{où} \qquad \overline{\eta} = \int_0^1 \mathrm{K}'_x(x,t)\,\eta\, dt,$$

donc

$$\int_0^1 (\overline{\eta q})^2\, dt < \nu^2 \int_0^1 \overline{\eta}^2\, dt < \frac{\nu^2}{(m+1)^2\pi^2} \int_0^1 \eta^2\, dt,$$

où

$$\nu = \sqrt{\int_0^1 q^2\, dt} + \max|q| + \sqrt{\int_0^1 \left[\int_0^1 \mathrm{K}_x'^2\, q'^2\, dt\right] dx};$$

par conséquent, d'après (45), on a

$$\int_0^1 \left[\frac{\delta y(x,\alpha)}{\delta\alpha}\right]_m^{\prime 2} dx < \frac{\lambda^2 \mathrm{M}^2 \nu^2}{(m+1)^2\pi^2} \int_0^1 \eta^2\, dx.$$

Or

$$(47)\qquad |[y(x,1)]_m - [y(x,0)]_m|$$

$$= \left|\left[\int_0^1 \frac{\delta y}{\delta\alpha}\,\delta\alpha\right]_m\right| = \left|\int_0^1 \left[\frac{\delta y}{\delta\alpha}\right]_m \delta\alpha\right|$$

$$< \sqrt{\int_0^1 \left[\frac{\delta y}{\delta\alpha}\right]_m^{\prime 2} dx} < \frac{\lambda\,\mathrm{M}\,\nu}{(m+1)\pi} \sqrt{\int_0^1 \eta^2\, dx};$$

d'autre part, d'après une transformation évidente, on a

$$\eta = y(x, 1) - [y(x, 1)]_m + \lambda \int_0^1 (K - K_m) q [y(t, 1) - y(t, \alpha)]\, dt,$$

donc

$$\sqrt{\int_0^1 \eta^2\, dx} \leqq \sqrt{\int_0^1 (y - Y_m)^2\, dx} + \frac{\lambda \max \left| q^{\frac{1}{2}} \right|}{(m+1)^2 \pi^2} \sqrt{\int_0^1 q [y(t, 1) - y(t, \alpha)]^2\, dt},$$

où

$$Y_m = [y(x, 1)]_m = [y]_m.$$

Remarquons à présent que

$$\sqrt{\int_0^1 q [y(t, 1) - y(t, \alpha)]^2\, dt} < \sqrt{\max \left| \int_0^1 q \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 dt \right|}$$

et

$$\left| \int_0^1 q \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 dt \right| < M^2 \max |q| \int_0^1 \eta^2\, dt,$$

car

$$\int_0^1 q \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 dt = \int_0^1 q \left\{ \sum_1^\infty \frac{\bar\lambda_i \bar\varphi_i}{\bar\lambda_i - \lambda} \int_0^1 \eta q \bar\varphi_i\, dt \right\}^2 dx.$$

Par conséquent

$$\sqrt{\int_0^1 \eta^2\, dt} < \sqrt{\int_0^1 (y - Y_m)^2\, dx} + \frac{\lambda M \max |q|}{(m+1)^2 \pi^2} \sqrt{\int_0^1 \eta^2\, dt};$$

en posant dans (47) $\alpha = 0$, on en tire

$$|Y_m - y_m| < \frac{\lambda M \nu}{(m+1)\pi} \sqrt{\int_0^1 (y - Y_m)^2\, dx}\; \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda M \max |q|}{(m+1)^2 \pi^2}},$$

d'où l'expression de l'erreur ponctuelle sous la forme asymptotique que voici :

$$(\mathrm{X}) \qquad \boxed{\begin{gathered} |y - y_m| = |y - Y_m| + \theta \frac{(m+1)\pi}{\lambda \nu M} \frac{\sqrt{\int_0^1 (y - Y_m)^2\, dx}}{1 - \dfrac{\lambda M \max |q|}{(m+1)^2 \pi^2}} \\ (\text{où } |\theta| < 1). \end{gathered}}$$

La différence $y - Y_m$ qui figure dans cette formule peut être appréciée de différentes façons à la lumière de la théorie moderne des séries trigonométriques.

Par exemple, en intégrant par parties et en utilisant l'équation de fermeture, on a

$$|y - Y_m| < \frac{\sqrt{\frac{2}{3}\int_0^1 y''^2\, dx}}{\pi^2 (m+1)^{\frac{3}{2}}};$$

or, d'après la formule de Schmidt, on obtient aisément

$$\sqrt{\int_0^1 y''^2\, dx} \leqq \sqrt{\int_0^1 f^2\, dx} + \lambda \mathrm{M} \max |q| \sqrt{\int_0^1 \bar{\bar{f}}^2\, dx},$$

où

$$\bar{\bar{f}} = \int_0^1 \mathrm{K}(x, t) f(t)\, dt,$$

donc

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &|y - Y_m| < \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\sqrt{\int_0^1 f^2\, dx} + \lambda \mathrm{M} \max |q| \sqrt{\int_0^1 \bar{\bar{f}}^2\, dx}\right]}{(m+1)^{\frac{3}{2}} \pi^2} \\ &\text{et} \\ &\sqrt{\int_0^1 [y - Y_m]^2\, dx} \\ &\qquad < \frac{1}{(m+1)^2 \pi^2} \left\{\sqrt{\int_0^1 f^2\, dx} + \lambda \mathrm{M} \max |q| \sqrt{\int_0^1 \bar{\bar{f}}^2\, dx}\right\}. \end{aligned}\right.$$

D'une manière analogue on obtient par exemple aussi

$$|y - Y_m| < \frac{|f(1)| + |f(0)|}{(m+1)^2 \pi^3} + \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}}{(m+1)^{\frac{5}{2}} \pi^3}$$
$$\times \left(\sqrt{\int_0^1 f'^2\, dx} + \lambda \mathrm{M} \left\{\frac{\max |q'|}{\pi} + \max |q|\right\} \sqrt{\int_0^1 \bar{\bar{f}}^2\, dx}\right).$$

En substituant dans (X) par exemple les expressions (48), on obtient *l'erreur ponctuelle sous la forme suivante :*

$$
\text{(XI)}\qquad \boxed{|y-y_m| < \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\left\{\sqrt{\int_0^1 f^2\,dx} + \lambda \max|q|\,M\sqrt{\int_0^1 f^2\,dx}\right\}}{(m+1)^{\frac{3}{2}}\pi^2} \times\left[1+\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2(m+1)^3}}\right)}{\pi^2}\,\frac{\lambda\nu M}{\left(1-\frac{\lambda M \max|q|}{(m+1)^2\pi^2}\right)}\right].}
$$

Pour conclure, remarquons qu'au lieu de la formule (X), en modifiant légèrement l'analyse, on peut établir d'autres formules. En voici une (¹) :

$$
|y-y_m| = |y-Y_m| + \frac{\sqrt{2\beta}\,.\,\theta}{1-\frac{\alpha_m}{(m+1)^2\pi^2}}\cdot\frac{\sqrt{\int_0^1 (y-Y_m)^2\,dx}}{(m+1)^{\frac{3}{2}}\pi^2},
$$

où

$$
|\theta| < 1, \qquad \beta = \lambda M\sqrt{\frac{\max|q|}{\min|q|}}\left\{\max|q| + \frac{\max|q'|}{\pi} + \frac{\max|q''|}{\pi^2}\right\},
$$

$$
\alpha_m = \max|q|\left\{1+\frac{\lambda M}{(m+1)^2\pi^2}\left(\max|q| + \frac{\max|q'|}{\pi} + \frac{\max|q''|}{\pi^2}\right)\right\}.
$$

Même remarque que précédemment peut être faite, à propos de la possibilité d'étendre les raisonnements de ce paragraphe, à la considération de systèmes différentiels beaucoup plus généraux que le système considéré (43).

Remarque. — Il faut signaler aussi la méthode d'Enskog [23], qui donne de bons résultats au point de vue du calcul numérique. Il s'agit d'un procédé d'orthogonalisation spécial, élaboré (au moyen de l'équation différentielle donnée) de telle manière qu'on obtient la détermination individuelle des coefficients dans l'expression approchée de l'intégrale cherchée. Ce procédé donne de réels avantages pour le calcul numérique de l'intégrale et revient (par exemple dans le cas considéré dans le paragraphe 1) (*voir* [6]$_e$) à la reconstruction de l'expression de l'approximation obtenue par l'application de l'algorithme variationnel; de sorte que les mêmes majorations de l'erreur

(¹) Obtenue par mon élève M. N. Bogolioubolf.

de la $m^{\text{ième}}$ approximation peuvent servir pour les deux méthodes susdites.

8. Quelques confrontations numériques. — Les appréciations précédemment obtenues ne sont, bien entendu, qu'un premier pas dans la direction à suivre pour obtenir des résultats pratiquement utilisables. Or, quelques confrontations numériques cependant peuvent être déjà faites. Il importe toutefois de remarquer que certaines majorations, « bonnes » dans quelques cas, ne sont pas pratiquement utilisables pour les autres; ainsi par exemple les majorations appropriées pour le cas où les coefficients du système différentiel donné sont lentement variables, deviennent en général moins « bonnes » quand cette dernière circonstance n'a pas lieu.

L'abaissement des coefficients de majoration en général est une chose très difficile, et une œuvre utile aux praticiens consiste à élaborer des estimations de l'erreur, la moins majorée possible, pour les différents types de systèmes différentiels souvent rencontrés.

On se bornera à traiter quelques exemples se rapportant au calcul de la première valeur singulière en remarquant que les formules (II)-(VII) se généralisent aisément aux autres conditions frontières ainsi qu'à la représentation polynomiale des approximations (*voir* N. Kryloff [29]).

Considérons par exemple le système différentiel suivant :

$$y'' + \lambda x(l - x)y = 0; \qquad y(0) = y'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

qu'on rencontre dans la théorie du flambement des barres [15] et utilisons les majorations

$$\left|\frac{\lambda_k^{(m)} - \lambda_k}{\lambda_k}\right| < \frac{\lambda_k^{(m)2} Q_m}{\left(\frac{2m+1}{l}\pi\right)^4},$$

où

$$Q_m = \max q^2 + \frac{1}{4}\frac{\max|q|^3 |\lambda_k^{(m)}|}{\left(\frac{2m+1}{l}\pi\right)^2} + \frac{\max|q''|}{|\lambda_k^{(m)}|},$$

qui correspondent dans le cas actuel au (V). On obtient, après quelques calculs numériques pour $m = 2$,

$$\left|\frac{\lambda_1^{(2)} - \lambda_1}{\lambda_1}\right| < 0,3 \text{ pour } 100,$$

et pour $m = 3$

$$\left|\frac{\lambda_1^{(3)} - \lambda_1}{\lambda_1}\right| < 0.1 \text{ pour } 100.$$

Pour se faire une idée de l'applicabilité des formules de majoration obtenues, calculons à titre d'exemple la valeur singulière correspondant à l'intégrale

$$y_1(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$$

du système différentiel

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(-1) = y(+1) = 0,$$

en s'arrêtant à la seconde et à la troisième approximation polynomiale

$$y_{1,2} = (1 - x^2)(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} x^2); \qquad y_{1,3}(x) = (1 - x^2)(a_2^{(1)} + a_2^{(2)} x^2 + a_2^{(3)} x^4),$$

qui seront dans le cas actuel respectivement la quatrième et sixième approximation, car ici non seulement $y_1(x)$ mais aussi $y_{1,m}(x)$ sont évidemment symétriques par rapport au point $x = 0$. Le calcul numérique donne, en appliquant la formule (pour la démonstration, *voir* N. Kryloff [29])

$$\left|\frac{\lambda_k^{m} - \lambda_k}{\lambda_k}\right| < \frac{N_2 \lambda_k^{m}}{m^2(m+1)^2(m+2)(m-1)};$$

$$N_2 = \left\{ \max\left|\frac{q''}{q^{\frac{1}{2}}}\right| + 2\max|q'| \sqrt{|\lambda_k^{m}| \frac{\max|q|^{\frac{1}{2}}}{\min|q|^{\frac{1}{2}}}} + \max|q|^{\frac{3}{2}} |\lambda_k^{m}| \right\}^2,$$

les majorations suivantes : pour $m = 2$

$$\left|\frac{\lambda_1^{2} - \lambda_1}{\lambda_1}\right| < 0.2 \text{ pour } 100,$$

et pour $m = 3$

$$\left|\frac{\lambda_1^{3} - \lambda_1}{\lambda_1}\right| < 0.02 \text{ pour } 100.$$

9. L'intégration approchée de certaines équations différentielles non linéaires. — Le problème de l'existence de la solution a été l'objet de bien des travaux de E. Picard [9]$_a$, L. Tonelli [2]$_a$, L. Lichtenstein [12], Hammerstein [13]. Dans une partie de ces recherches, le rôle de premier plan semble être joué par le célèbre théorème d'Arzélà concernant les suites de fonctions également continues.

L'intégration approchée de certaines équations non linéaires a été aussi abordée au point de vue de l'application de l'algorithme variationnel dans les travaux de N. Kryloff [6]$_f$ et de G. Hamel [20].

A titre d'exemple, considérons le système différentiel

$$y''=f(x, y); \qquad y(0)=y(1)=0; \qquad f'_y(x, y)\geqq 0.$$

L'intégrale à minimer dans le cas actuel se présente sous la forme

$$I(y)=\int_0^1\left[\frac{1}{2}y'^2+\Phi(x, y)\right]dx,$$

où

$$\Phi(x, y)=\int_0^y f(x, y)\,dy.$$

Au moyen de simples transformations, on aboutit à l'inégalité suivante :

$$\sqrt{\sum_1^m a_i^2 i^2\pi^2}<\sqrt{\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_m)+\frac{1}{4\pi}\int_0^1 f^2(x, 0)\,dx}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_0^1 f^2(x, 0)\,dx},$$

où

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_m)=I\left[\sum_1^m a_i\psi_i(x)\right], \qquad \psi_i(0)=\psi_i(1)=0$$
$$(i=1, 2, \ldots, m).$$

Ceci prouve que le minimum absolu de $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ se trouve à distance finie et que par conséquent le système d'équations non linéaires par rapport à $a_i^{(m)}$

$$\int_0^1 \{y'_m\psi'_i+f(x, y_m)\psi_i\}\,dx=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

est résoluble. Pour démontrer l'unicité de la solution, supposons le contraire.

On aura alors

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2}F''(\theta) \qquad (0<\theta<1),$$

où

$$F(\alpha)=I[y_m+\alpha(v_m-y_m)] \qquad (0<\alpha<1)$$

(y_m, v_m étant deux solutions distinctes); d'après les conditions de minimum, on a $F'(0)=0$. Donc

$$F(1)>F(0),$$

car

$$F''(\theta)=\int_0^1\{[y'_m-v'_m]^2+\Phi''_{y^2}[y_m-v_m]^2\}\,dx>0.$$

où

$$\tilde{\Phi}''_{y^2} = \overline{\Phi}''_{y^2}[x, y_m + \theta(y_m - y_m)].$$

De même on prouve que $F(0) > F(1)$ et cela ne se peut, donc la solution est unique.

Cela étant, d'après la notion de minimum, on a

$$I(y_m) - I(y) \leqq I(Y_m) - I(y),$$

donc

$$\int_0^1 (y'_m - Y'_m)^2\, dx < M \int_0^1 (Y_m - y)^2\, dx,$$

où

$$M < \max |f'_y(x, z)| \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

$$|z| < |y| + \frac{\max |f(x, y)| [A \log m + B]}{m^2} \quad (1);$$

par conséquent

$$|y_m - Y_m| < \sqrt{M} \sqrt{\int_0^1 (Y_m - y)^2\, dx},$$

de sorte que

$$\text{(XII)} \qquad \boxed{|y_m - y| < |y - Y_m| + \sqrt{M \int_0^1 [y - Y_m]^2\, dx}.}$$

Pour apprécier la différence $|y - Y_m|$ et M qui figurent dans (XII), il suffit de limiter $\max |y|$; à cet effet remarquons que, d'après l'équation elle-même, on a

$$\int_0^1 y'^2\, dx = \int_0^1 [f(x, 0) - f(x, y)] y\, dx - \int_0^1 f(x, 0) y\, dx;$$

or

$$[f(x, 0) - f(x, y)] y \leqq 0,$$

donc

$$|y| \leqq \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^1 y'^2\, dx} < \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^1 f^2(x, 0)\, dx}.$$

Il va de soi que la majoration obtenue n'est qu'un premier pas dans la direction à suivre pour atteindre les limitations pratiquement utilisables.

Pour l'intégration approchée des équations différentielles non linéaires de la Physique mathématique par l'application du procédé

(1) A et B sont certaines constantes numériques intervenant dans la théorie de l'approximation des fonctions par des séries trigonométriques.

de l'algorithme variationnel, quand les équations susdites proviennent d'un problème du calcul des variations, *voir* aussi le travail de N. Kryloff [29]$_c$.

CHAPITRE II.

LES MÉTHODES DES DIFFÉRENCES FINIES.

1. Calcul des valeurs singulières du paramètre par l'application de la méthode usuelle des différences finies. — Le passage du discret au continu dans les théories mécaniques peut être fait de deux manières différentes, à savoir : 1° sur les équations du problème en leur substituant des équations différentielles; 2° sur les solutions de ces équations aux différences finies, et la question se pose si ces deux voies sont équivalentes. Ce *principe de Rayleigh* est fondamental en Physique mathématique (Rayleigh, H. Poincaré); sa justification fut l'objet de bien des recherches [26].

Dans un travail récent [6]$_p$, N. Bogolioubofl et N. Kryloff ont justifié le principe de Rayleigh par l'appréciation de l'ordre de l'erreur commise à la $m^{\text{ième}}$ approximation (*voir* aussi [6]$_q$).

Or, il est de toute nécessité d'essayer d'obtenir l'estimation de l'erreur sous la forme *la moins majorée*, conformément à ce qui a été dit dans l'Introduction et au paragraphe 3 (Chap. I). Dans la suite seront résumées les recherches de N. Bogolioubofl et N. Kryloff [6]$_r$ s'y rapportant, et basées sur la considération d'un problème de minimum.

A titre d'exemple, prenons le système simple aux différences finies

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta^2 y_{k,m}(x_{i-1})}{\Delta x^2} + \lambda_k^m\, q(x_i)\, y_{k,m}(x_i) = 0, \\ y_m(0) = y_m(1) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, m-1), \qquad q(x) > 0, \qquad \Delta x = \dfrac{1}{m}, \end{cases}$$

et le système différentiel correspondant. Les $k^{\text{ièmes}}$ valeurs singulières λ_k^m et λ_k de ces systèmes sont respectivement les minimums intervenant dans les problèmes isopérimétriques suivants :

$$\int_0^1 y'^2\, dx = \min, \qquad \int_0^1 q(x)\, y^2(x)\, dx = 1,$$

$$\int_0^1 q(x)\, y(x)\, y_j(x)\, dx = 0 \qquad [j = 1, 2, 3, \ldots, (k-1)],$$

et

$$\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{\Delta y(x_i)}{\Delta x}\right)^2\Delta x = \min\sum_{i=0}^{m-1} q(x_i)\,y^2(x_i)\,\Delta x = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} q(x_i)\,y(x_i)\,y_{j,m}(x_i)\,\Delta x = 0 \qquad [j = 1, 2, 3, \ldots, (k-1)],$$

où $y_j(x)$ et $y_{j,m}(x_i)$ sont respectivement les $j^{\text{ièmes}}$ solutions singulières des systèmes susdits.

En assujettissant les fonctions

$$F(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j y_j(x), \qquad \Phi(x) = \sum_{j=1}^{k} b_j \varphi_{j,m}(x)$$

[où $\varphi_{j,m}$ est l'expression obtenue par la formule de l'interpolation trigonométrique construite à l'aide des valeurs $y_{j,m}(x_i)$] à vérifier les conditions supplémentaires

$$\sum_{i=1}^{m-1} q(x_i)F^2(x_i)\,\Delta x = 1, \qquad \sum_{i=1}^{m-1} q(x_i)F(x_i)\,y_{j,m}(x_i)\,\Delta x = 0$$

$$[j = 1, 2, 3, \ldots, (k-1)],$$

$$\int_0^1 q(x)\,\Phi^2(x)\,dx = 1, \qquad \int_0^1 q(x)\,\Phi(x)\,y_j(x)\,dx = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k-1),$$

on aura, d'après la définition du minimum,

$$\sum_{i=0}^{m-1}\left[\frac{\Delta F(x_i)}{\Delta x}\right]^2\Delta x \geqq \lambda_k^{(m)}, \qquad \int_0^1 [\Phi'(x)]^2\,dx \geqq \lambda_k.$$

D'autre part

$$\sum_{i=0}^{m-1}\left[\frac{\Delta F(x_i)}{\Delta x}\right]^2\Delta x = \sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{1}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_i+\Delta x} F'(x)\,dx\right)^2\Delta x \leqq \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_i+\Delta x} F'^2\,dx$$

$$= \int_0^1\left(\sum_{j=1}^{k} a_j y'_j\right)^2 dx = \sum_{j=1}^{k} a_j^2\lambda_j \leqq \lambda_k\sum_{j=1}^{k} a_j^2 = \lambda_k\int_0^1 q(x)F^2(x)\,dx,$$

donc

$$\lambda_k^{(m)} - \lambda_k \leqq \lambda_k\left[\int_0^1 q(x)F^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^{m-1} q(x_i)F^2(x_i)\,\Delta x\right].$$

Or, pour toute fonction

$$\Phi(x) = \sqrt{2}\sum_{j=1}^{m} c_j \sin j\pi x,$$

on a

$$\int_0^1 \Phi'^2\, dx - \sum_{i=0}^{m-1}\left[\frac{\Delta\Phi(x_i)}{\Delta x}\right]^2 \Delta x$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c_j^2 j^2\pi^2 - \sum_{i=1}^{m}\left(\sqrt{2}\sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\Delta \sin j\pi x_i}{\Delta x_i}\right)^2 \Delta x = \sum_{j=1}^{m} c_j^2 (j^2\pi^2 - \overline{\lambda}_j),$$

où

$$\overline{\lambda}_j = 2\left(\frac{1-\cos j\pi\Delta}{\Delta^2}\right),$$

car

$$2\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\Delta \sin j\pi x_i}{\Delta x}\,\frac{\Delta \sin l\pi x_i}{\Delta x}\,\Delta x = \begin{cases} \overline{\lambda}_j\,(j = l), \\ 0\,(j \neq l). \end{cases}$$

Par conséquent

$$\left|\int_0^1 \Phi'^2\, dx - \sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta x}\right)^2 \Delta x - \frac{1}{12m^2}\sum_{j=1}^{m}\overline{\lambda}_j c_j^2 - \frac{1}{90m^4}\sum_{j=1}^{m}\overline{\lambda}_j^3 c_j^2\right|$$

$$< \frac{1}{66m^6}\sum_{j=1}^{m}\overline{\lambda}_j^4 c_j^2;$$

on s'en assure d'après l'inégalité suivante :

$$|R_j| = \left|\frac{j^2\pi^2 - \overline{\lambda}_j - \dfrac{\overline{\lambda}_j^2}{12m^2} - \dfrac{\overline{\lambda}_j^3}{90m^4}}{\overline{\lambda}_j^4}\right| < \frac{1}{66m^6} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

qu'on vérifie par un calcul assez long, en remarquant que

$$R_j \equiv \frac{j^2\pi^2 - \overline{\lambda}_j - \dfrac{\overline{\lambda}_j^2}{12m^2} - \dfrac{\overline{\lambda}_j^3}{90m^4}}{\overline{\lambda}_j^4} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2[(\nu+3)!]^2\overline{\lambda}_j^\nu}{(2\nu+8)!\,m^{2(\nu+3)}}$$

D'autre part

$$\sum_{j=1}^{m}\overline{\lambda}_j^2 c_j^2 = \sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{\Delta^2\Phi(x_{i-1})}{\Delta x^2}\right]^2 \Delta x, \qquad \sum_{j=1}^{m}\overline{\lambda}_j^3 c_j^2 = \sum_{i=0}^{m-1}\left[\frac{\Delta^3\Phi(x_{i-1})}{\Delta x^3}\right]^2 \Delta x,$$

$$\sum_{j=1}^{m}\overline{\lambda}_j^4 c_j^2 = \sum_{i=0}^{m-1}\left[\frac{\Delta^4\Phi(x_{i-2})}{\Delta x^4}\right]^2 \Delta x;$$

donc

$$\left|\int_0^1 \Phi'^2\,dx - \sum_{i=0}^{m-1}\left[\frac{\Delta\Phi(x_i)}{\Delta x}\right]^2\Delta x - \frac{1}{12m^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left[\frac{\Delta^2\Phi(x_{i-1})}{\Delta x^2}\right]^2\Delta x - \frac{1}{90m^4}\sum_{i=0}^{m-1}\left[\frac{\Delta^3\Phi(x_{i-1})}{\Delta x^3}\right]^2\Delta x\right| < \frac{1}{66m^6}\sum_{i=0}^{m-1}\left[\frac{\Delta^4\Phi(x_{i-2})}{\Delta x^4}\right]^2\Delta x;$$

or

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{\Delta^2\Phi(x_{i-1})}{\Delta x^2}\right]^2\Delta x < \max q\,\lambda_k^{(m)2}\sum_{i=1}^{m-1} q(x_i)\,\Phi^2(x_i)\,\Delta x,$$

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{\Delta^3\Phi(x_{i-1})}{\Delta x^3}\right]^2\Delta x < \lambda_k^{(m)3} A B, \qquad A = \left[\max q + \frac{\max|q'|}{\sqrt{\lambda_k^{(m)}}\,\min q}\right]^2,$$

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{\Delta^4\Phi(x_{i-2})}{\Delta x^4}\right]^2\Delta x < \lambda_k^{(m)4} C B,$$

$$C = \left[\max q^{\frac{3}{2}} + \frac{2\max|q'|}{\sqrt{\lambda_k^{(m)}}} + \frac{\max|q''|}{\lambda_k^{(m)}\min q^{\frac{1}{2}}}\right]^2, \qquad B = \sum_{i=1}^{m} q(x_i)\,\Phi^2(x_i)\,\Delta x;$$

par conséquent

$$\lambda_k - \lambda_k^{(m)} < \left[\frac{\max q\,\lambda_k^{(m)2}}{12m^2} - \frac{A\lambda_k^{(m)3}}{90m^4} + \frac{C\lambda_k^{(m)4}}{66m^6}\right]B + \lambda_k^{(m)}\left\{\sum_{i=1}^{m-1} q_i\Phi_i^2\,\Delta x - \int_0^1 q\,\Phi^2\,dx\right\}.$$

Pour améliorer l'appréciation de l'approximation obtenue, on remarque que

$$\lambda_k - \lambda_k^{(m)} < \left[\frac{\max q\,\lambda_k^{(m)2}}{12m^2} + \frac{A\lambda_k^{(m)3}}{90m^4} + \frac{C\lambda_k^{(m)4}}{66m^6}\right]B + \lambda_k^{(m)}\left\{\sum_{i=1}^{m-1} \overline{q}_i\Phi_i^2\,\Delta x - \int_0^1 \overline{q}\,\Phi^2\,dx\right\},$$

où

$$\overline{q} = q - \frac{\max q + \min q}{2},$$

car on a identiquement

$$\int_0^1 \Phi^2(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m-1}\Phi^2(x_i)\,\Delta x.$$

D'autre part, d'après les conditions frontières, on a, après quelques calculs,

$$\left|\int_0^1 q\,F^2\,dx - \sum_{i=1}^{m-1} q(x_i)\,F^2(x_i)\,\Delta x\right| < \frac{1}{360\,m^4}\int_0^1 \left|\frac{d^4 q\,F^2}{dx^4}\right| dx,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{m-1} \overline{q}(x_i)\,\Phi^2(x_i)\,\Delta x - \int_0^1 \overline{q}\,\Phi^2\,dx\right| < \frac{1}{360\,m^4}\int_0^1 \left|\frac{d^4(\overline{q}\,\Phi^2)}{dx^4}\right| dx$$

et

$$\int_0^1 \left|\frac{d^4(q\,F^2)}{dx^4}\right| dx < 16\,N\,\lambda_k^2 \int_0^1 q\,F^2\,dx,$$

$$\int_0^1 \left|\frac{d^4(\overline{q}\,\Phi^2)}{dx^4}\right| dx < \frac{\pi^4}{16}\,\lambda_k^{(m)^2}\,N_1 \sum_{i=1}^{m-1} q_i\,\Phi_i^2\,\Delta x,$$

où

$$N = \max q^2 + \frac{22}{8\sqrt{\lambda_k}} \max\left|q'\sqrt{q}\right| + \frac{13}{8}\,\frac{\max|q''|}{\lambda_k} + \frac{1}{2\lambda_k}\max\left|\frac{q'^2}{q}\right| + \frac{1}{2\lambda_k^{\frac{3}{2}}}\max\left|\frac{q'''}{\sqrt{q}}\right| + \frac{1}{16\lambda_k^2}\max\left|\frac{q^{\text{IV}}}{q}\right|,$$

$$\begin{aligned}N_1 = (\max q - \min q)\left[\sqrt{\frac{C}{\min q}} - 3\max q + 4\sqrt{A}\right] &+ \frac{16}{\pi}\,\frac{\max|q'|}{\sqrt{\lambda_k^{(m)}}}\left[3\max q^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{A}{\min q}}\right]\\ &+ \frac{48}{\pi^2}\,\frac{\max q''}{\lambda_k^{(m)}}\left[1 + \sqrt{\frac{\max q}{\min q}}\right] + \frac{64\max q'''}{\pi^3\lambda_k^{(m)^3}\sqrt{\min q}} + \frac{16\max\left|\frac{q^{\text{IV}}}{q}\right|}{\pi^4\lambda_k^{(m)^2}}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(2)\qquad \boxed{\begin{aligned}\lambda_k - \lambda_k^{(m)} < \left\{\frac{\max q\,\lambda_k^{(m)^2}}{12\,m^2} + \frac{A\,\lambda_k^{(m)^3}}{90\,m^4} + \frac{C\,\lambda_k^{(m)^4}}{66\,m^6}\right\}\frac{1}{1 - \dfrac{\pi^4\lambda_k^{(m)^2}N_1}{5760\,m^4}}\\ + \frac{\lambda_k^{(m)^3}\pi^4 N_1}{5760\,m^4}\left\{\frac{1}{1 - \dfrac{\pi^4\lambda_k^{(m)^2}N_1}{5760\,m^4}}\right\}\end{aligned}}$$

et

$$(3)\qquad \boxed{\lambda_k^{(m)} - \lambda_k < \frac{\lambda_k^2 N}{22{,}5\,m^4}\left(\frac{1}{1 - \dfrac{\lambda_k^2 N}{22{,}5}}\right)\cdot}$$

Pour apprécier l'erreur $|\lambda_k - \lambda_k^{(m)}|$ d'après ce qui précède, il faut prendre la plus grande des valeurs se trouvant dans les parties droites des formules (2) et (3).

Contrairement à ce qui se passe pour la méthode de l'algorithme variationnel (où $\lambda_k^{(m)} - \lambda_k > 0$) dans la méthode des différences finies on aura, comme on peut s'en assurer,

$$\lambda_k - \lambda_k^{(m)} > 0,$$

au moins à partir des valeurs de m suffisamment grandes, remarque non sans intérêt du point de vue des applications.

Remarquons aussi en passant que la majoration de l'erreur (2) se confond jusqu'aux termes du quatrième ordre en $\frac{1}{m}$ avec l'erreur réelle dans le cas des coefficients constants.

Il va sans dire que les majorations obtenues (2), (3) sont loin d'être définitives et peuvent être aisément abaissées en introduisant différentes hypothèses concernant la dérivabilité des coefficients.

Le procédé usuel des différences finies s'applique aussi, comme cela résulte des recherches mentionnées au début de ce paragraphe, pour le calcul des fonctions singulières ainsi que pour l'intégration approchée de l'équation différentielle non homogène dans les cas distincts de ceux de résonance, bien entendu.

2. La méthode des « différences supérieures ». — Cette méthode proposée par N. Bogolioubolf et N. Kryloff [6], revient (par exemple pour le calcul de la première valeur singulière du paramètre) à considérer le problème de rendre minimum l'expression

$$\sum_{i=0}^{m-1}\left[\frac{\Delta y(x_i)}{\Delta x}\right]^2 + \frac{1}{12m^2}\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{\Delta^2 y(x_{i-1})}{\Delta x^2}\right]^2 \Delta x = \min,$$

sous la condition

$$\sum_{i=1}^{m-1} q(x_i)y^2(x_i)\,\Delta x = 1,$$

et il est aisé de voir, d'après ce qui précède, que les parties gauches des expressions ci-dessus écrites représentent respectivement les intégrales $\int_0^1 y'^2\,dx$, $\int_0^1 qy^2\,dx$ à des quantités de l'ordre $\frac{1}{m^4}$ près.

En prenant les variations, on obtient le système (¹) d'équations aux différences finies que voici :

$$y(x_0) = y(x_m) = 0;$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta^2 y(x_{i-1})}{\Delta x^2} - \dfrac{\Delta^2}{12}\,\dfrac{\Delta^4 y(x_{i-2})}{\Delta x^4} + \lambda q(x_i) y(x_i) = 0 \qquad (m-2 \geq i \geq 2), \\ \dfrac{\Delta^2 y(x_0)}{\Delta x^2} - \dfrac{1}{12}\left[-2\,\dfrac{\Delta^2 y(x_0)}{\Delta x^2} + \dfrac{\Delta^2 y(x_1)}{\Delta x^2}\right] + \lambda q(x_1) y(x_1) = 0, \\ \dfrac{\Delta^2 y(x_{m-2})}{\Delta x^2} - \dfrac{1}{12}\left[-2\,\dfrac{\Delta^2 y(x_{m-2})}{\Delta x^2} + \dfrac{\Delta^2 y(x_{m-3})}{\Delta x^2}\right] \\ \qquad\qquad + \lambda q(x_{m-1}) y(x_{m-1}) = 0; \end{cases}$$

et dont la solution donne la réponse au problème de minimum posé. Le déterminant du système (4) étant égal à zéro, fournit l'équation pour l'évaluation approchée de λ.

Cette méthode est, jusqu'à un certain point, analogue à celle de Störmer-Adams (pour l'intégration approchée des équations différentielles avec les conditions initiales de Cauchy), en ce sens qu'on a recours aussi aux différences d'ordre supérieur. Ceci permet d'améliorer l'ordre de l'approximation, et en effet on peut aisément établir que la méthode des « différences supérieures » donne l'erreur de l'ordre de $\frac{1}{m^4}$, tandis que l'erreur de la méthode usuelle des différences finies est de l'ordre de $\frac{1}{m^2}$.

Par des raisonnements analogues à ceux du paragraphe 1, on peut obtenir aussi les différentes majorations de l'erreur commise à la $m^{\text{ième}}$ approximation dans le calcul des valeurs singulières par l'application de la méthode des « différences supérieures ».

3. L'application de la méthode des différences aux quelques cas du problème de minimum « chargé ». — En se basant sur l'application raisonnée du théorème d'Arzélà (concernant la possibilité d'extraire des suites uniformément convergentes d'une suite de fonctions également continues et uniformément bornées), M. Courant établit [11]$_a$ l'existence des valeurs singulières λ_i du paramètre et des

(¹) Ce système diffère de celui de la Note citée [6]$_e$, ce qui est dû au fait, que pour la déduction du (4) a été prise la formule d'Euler-Maclaurin au lieu de la formule de Laplace.

fonctions singulières $\varphi_i(x)$, relatives au système différentiel

$$(5)\qquad \begin{cases} (pu')' = -\lambda ru + qu & (p < 0), \\ p(0)u'(0) = tu(0), & p(1)u'(1) = -t'u(1). \end{cases}$$

Pour cela, M. Courant utilise la méthode des différences en partant du problème de minimum lié (posé pour l'intégrale « chargée »)

$$D[\varphi] = \int_0^1 (p\varphi'^2 + q\varphi^2)\,dx + t\varphi(0)^2 + t'\varphi(1)^2,$$

respectivement sous les conditions

$$H[\varphi] = \int_0^1 r\varphi^2\,dx = 1, \qquad H[\varphi, \varphi_i] = \int_0^1 r\varphi\varphi_i\,dx = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, k-1).$$

Dans une Note de N. Kryloff [6]$_s$ se trouve exposé un procédé de démonstration valable aussi pour établir les théorèmes d'existence et qui permet d'apprécier l'erreur commise à la $m^{\text{ième}}$ approximation dans le calcul des valeurs singulières. On se bornera ici à reproduire presque textuellement la Note susdite dont le raisonnement s'étend aussi aux problèmes plus compliqués, par exemple à l'évaluation approchée des fonctions singulières correspondantes par l'application de la méthode des différences finies.

« Posons donc le problème d'apprécier la différence $\lambda_k - \lambda_k^{(m)}$ de la $k^{\text{ième}}$ valeur singulière et de sa $m^{\text{ième}}$ approximation pour laquelle on prendra ici, à l'exemple de M. Courant, la valeur de minimum lié, posé pour la somme « chargée »

$$D_m[\varphi, \varphi] = \Delta\sum_{\nu=0}^{m-1} p_\nu \left[\frac{\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu}{\Delta}\right]^2 + \Delta\sum_{\nu=1}^{m-1} q_\nu\varphi_\nu^2 + t\varphi_0^2 + t'\varphi_m^2$$
$$[\text{où } \varphi_\nu = \varphi(x_\nu)]$$

sous les conditions

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} r_\nu\varphi_\nu^2\Delta = H_m[\varphi] = 1, \qquad \sum_{\nu=1}^{m-1} r_\nu\varphi_\nu\varphi_{\nu,i}\Delta = H_m(\varphi, \varphi_i^{(m)}) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

ce qui aura lieu pour les valeurs $\varphi_{\nu,k}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, m$) qu'on prendra pour les sommets d'une ligne polygonale désignée par $\varphi_k^{(m)}(x)$ dans la suite.

« Cela étant, considérons deux fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ ainsi formées

$$(6)\qquad \begin{cases} F_1(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} A_i \varphi_i(x), \\ F_2(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} B_i \varphi_i^{(m)}(x), \end{cases}$$

et choisissons les constantes A_i, B_i de sorte que

$$(6)_1\qquad \begin{cases} H_m[F_1] = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{m-1} r_\nu F_{1,\nu}^2 \Delta = 1, \qquad H_m[F_1, \varphi_i^{(m)}] = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{m-1} r_\nu F_{1,\nu} \varphi_i^{(m)}(x_\nu)\Delta = 0 \\ \qquad [i = 1, 2, 3, \ldots, k-1;\ F_{1,\nu} = F_1(x_\nu)], \\ H[F_2] = \displaystyle\int_0^1 r F_2^2\, dx = 1, \qquad H[F_2, \varphi_i] = \displaystyle\int r F_2 \varphi_i\, dx = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1). \end{cases}$$

» Alors, en vertu même de la notion de minimum, on a

$$D_m[F_1, F_1] \geqq \lambda_k^{(m)},$$
$$D[F_2] \geqq \lambda_k$$

ou, ce qui est identique,

$$D[F_1] + \{ D_m[F_1, F_1] - D[F_1] \} \geqq \lambda_k^{(m)},$$
$$D_m[F_2, F_2] + \{ D[F_2] - D_m[F_2, F_2] \} \geqq \lambda_k.$$

» Or

$$D[F_1] = \sum_{i=1}^{k} A_i^2 \lambda_i < \lambda_k H[F_1] = \lambda_k \{ 1 + (H[F_1] - H_m[F_1]) \},$$

$$D_m[F_2, F_2] = \sum_{i=1}^{k} B_i^2 \lambda_i^{(m)} < \lambda_k^{(m)} H_m[F_2] = \lambda_k^{(m)} \{ 1 + (H_m[F_2] - H[F_2]) \}.$$

car il est bien évident que

$$(7)\qquad \int_0^1 [p \varphi_i' \varphi_j' + q \varphi_i \varphi_j]\, dx + t \varphi_i(0) \varphi_j(0) - t' \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ \lambda_i, & \text{si } i = j, \end{cases}$$

et

$$\sum_{v=0}^{m-1} p_v \frac{\Delta\varphi_{v,i}^{m}}{\Delta}\frac{\Delta\varphi_{v,j}^{m}}{\Delta}\Delta + \sum_{v=1}^{m-1} q_v \varphi_{v,i}^{m}\varphi_{v,j}^{m}\Delta + t\varphi_{0,i}^{m}\varphi_{0,j}^{m}$$
$$+ t'\varphi_{m,i}^{m}\varphi_{m,j}^{m} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ \lambda_i^{m}, & \text{si } i = j; \end{cases}$$

donc

$$\lambda_k \{1 + (H[F_1] - H_m[F_1])\} + (D_m[F_1, F_1] - D[F_1]) \geqq \lambda_k^{m};$$
$$\lambda_k^{m} \{1 + (H_m[F_2] - H[F_2]\} + (D[F_2] - D_m[F_2, F_2]) \geqq \lambda_k.$$

» Or, d'après le théorème des accroissements finis, on a

$$(8)\quad |H_m[F_1] - H[F_1]| \leqq \Delta\int_0^1 \left|\frac{d(rF_1^2)}{dx}\right| dx \leqq \int_0^1 \frac{\{|r'|F_1^2 + |2rF_1||F_1'|\}\,dx}{m};$$

d'autre part, on a évidemment

$$(9)\quad \int_0^1 \varphi_i^2\,dx < \frac{1}{\min r}\left(\text{car} \int_0^1 r\varphi_i^2\,dx = 1\right) \text{ et } \int_0^1 p\varphi_i'^2\,dx > (\min p)\int_0^1 \varphi_i'^2\,dx;$$

par conséquent, de la relation évidente

$$\varphi^2(x) = \varphi^2(\xi) + 2\int_\xi^x \varphi(x)\varphi'(x)\,dx,$$

on tire, vu les formules (7) et (9),

$$\int_0^1 \varphi_i'^2\,dx < \frac{\lambda_i}{\min p} + \frac{[|t| + |t'|]}{\min p}$$
$$\times\left[\left(\frac{1}{\min r}\right) + 2\sqrt{\int_0^1 \varphi_i'^2\,dx}\,\frac{1}{\sqrt{\min r}}\right] + \frac{\max|q|}{\min r \min p};$$

donc

$$(10)\quad \int_0^1 \varphi_i'^2\,dx < \left[\frac{|t| + |t'|}{\min p\sqrt{\min r}} + \sqrt{\left\{\frac{\lambda_i}{\min p} + \frac{|t| + |t'| + \max|q|}{\min p \min r}\right\} + \left\{\frac{|t| + |t'|}{\min p\sqrt{\min r}}\right\}^2}\,\right]^2 = C_1,$$

par conséquent

$$(11)\qquad \int_0^1 F_1'^2\,dx \leqq \sum_{i=1}^{k} A_i^2 \int_0^1 \sum_{i=1}^{k} \varphi_i'^2\,dx < kC_1 H[F_1].$$

car

$$\int_0^1 r\varphi_i\varphi_j\,dx = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

» Donc de la formule (8) on tire, au moyen de l'inégalité de Schwarz,

$$|H_m[F_1] - H[F_1]| < \frac{1}{m}\left[\frac{\max|r'|}{\min|r|} + 2\max|\sqrt{r}|\sqrt{kC_1}\right]H[F_1] = \frac{C_2 H[F_1]}{m},$$

c'est-à-dire, vu $(6)_1$,

$$(12) \qquad |H[F_1]| < \frac{1}{1 - \frac{C_2}{m}};$$

donc

$$|H_m[F_1] - H[F_1]| < \frac{\frac{C_2}{m}}{1 - \frac{C_2}{m}} = \frac{C_2}{m - C_2}$$

et

$$\int_0^1 F_1'^2\,dx < \frac{kC_1}{1 - \frac{C_2}{m}} = C_3.$$

» D'une manière analogue on trouve

$$|H_m[F_2] - H[F_2]| < \frac{C_4}{m - C_4} \qquad (\text{où } C_4 = \text{const.}).$$

» Cela étant, observons que

$$(13) \quad |D_m[F_1, F_1] - D[F_1]| \leqq \frac{1}{m}\left[|p'|\int_0^1 F_1'^2\,dx + 2|p|\int_0^1 |F_1F_1''|\,dx \right.$$
$$\left. + \int_0^1 |q'|F_1^2\,dx + \int_0^1 2|qF_1F_1'|\,dx\right]$$

d'autre part

$$\int_0^1 F''^2\,dx \leqq \sum_{i=1}^{k} \Lambda_i^2 \sum_{i=1}^{k} \int_0^1 \varphi_i''^2\,dx < H[F_1]k\left[\max\int_0^1 \varphi_i''^2\,dx\right]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

» Or, d'après l'équation différentielle vérifiée par φ_k et d'après l'inégalité (10), on a

$$(14) \qquad \int_0^1 \varphi_i''^2\,dx < 2\left\{\max\left[\frac{\lambda_i r - q}{p\sqrt{r}}\right]^2 - \max\left|\frac{p'}{p}\right|^2 C_1\right\} = C_5(\lambda_i);$$

donc de l'inégalité (13) on tire, vu les inégalités (10), (12), (13),

$$
\begin{aligned}
&|D_m[F_1, F_1] - D[F_1]| \\
&\quad < \frac{1}{m}\Bigg[\max|p'|\,kC_1 + 2\max\left|\frac{q}{\sqrt{r}}\right|\sqrt{kC_1} \\
&\qquad\qquad - \max\left|\frac{q'}{r}\right| + 2\max|p|\sqrt{kC_1}\sqrt{kC_5(\lambda_k)}\Bigg] H[F_1] < \frac{C_6}{m},
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
C_6 = \Bigg[&\max|p'|\,kC_1 + 2\max\left|\frac{q}{\sqrt{r}}\right| + 2\max|p|\sqrt{kC_5(\lambda_5)}\sqrt{kC_1} \\
&+ \max\left|\frac{q}{r}\right|\Bigg]\frac{1}{1-\dfrac{C_2}{m}}.
\end{aligned}
$$

» D'une manière analogue, on trouve

$$|D[F_2] - D_m[F_2, F_2]| < \frac{C_7}{m}, \qquad \text{où} \qquad C_7 = \text{const.}$$

» Ceci étant établi, on tire, d'après ce qui précède,

$$(15) \qquad |\lambda_k - \lambda_k^{(m)}| < \lambda_k^{(m)}\left[\frac{C_2}{m - C_2} + \frac{C_4}{m - C_4}\right] + \frac{C_6}{m} + \frac{C_7}{m}.$$

» Cette formule (15) fournit une limitation de l'erreur obtenue à la $m^{\text{ième}}$ approximation pour la différence

$$|\lambda_k - \lambda_k^{(m)}|$$

sous une forme explicite, où figurent les constantes C_2, C_4, C_6, C_7, qu'on détermine d'après les formules précédemment établies en vertu des données du problème.

» Il va sans dire qu'il est aisé d'obtenir, dans la formule (15), les limitations plus serrées, si l'on fait sur les fonctions $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ des hypothèses correspondantes.

» La démonstration précédente, bien entendu, peut être érigée en celle de l'existence des valeurs et des fonctions singulières, comme on l'a déjà précédemment remarqué; mais ceci est superflu, étant donné que la démonstration basée sur l'emploi du théorème d'Arzélà, comme par exemple celle de M. Courant, est plus courte. La démonstration de la formule (15) peut être aisément généralisée pour traiter des cas plus généraux, comme par exemple « les problèmes généraux » de M. Courant, mais les formules ainsi obtenues sont par trop longues pour trouver place ici. »

4. La méthode des « tronçons ». — Cette méthode, qui pourrait être surnommée aussi celle des « coefficients constants », consiste à diviser l'intervalle de l'intégration de l'équation différentielle donnée en m parties égales en considérant dans chacune d'elles les coefficients de l'équation comme constants.

Cette méthode a été utilisée jusqu'à présent, à ce qu'il semble, seulement comme le procédé du calcul [27]; or il est possible non seulement d'établir sa convergence, mais encore d'apprécier l'erreur commise à la $m^{\text{ième}}$ approximation, en augmentant l'ordre de l'erreur par l'emploi raisonné des différentes méthodes de quadratures.

A titre d'exemple, considérons le problème de la recherche de la $k^{\text{ième}}$ valeur singulière λ_k de l'équation différentielle (5) avec les conditions frontières $u(0) = u(1) = 0$, en observant que ce problème est équivalent à celui de rendre minimum l'intégrale

$$D[u] = \int_0^1 [pu'^2 - qu^2]\, dx \tag{16}$$

sous les conditions complémentaires

$$H[u] = \int_0^1 ru^2\, dx = 1, \qquad H[u, \varphi_i] = \int_0^1 ru\varphi_i\, dx = 0 \tag{17}$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, k-1),$$

où $\varphi_i (i = 1, 2, \ldots, k-1)$ sont les $k - 1$ premières fonctions singulières relatives au système considéré.

En calculant les intégrales (16) et (17) par la méthode des quadratures due à M. Signorini [15]$_f$ on obtient pour le problème du minimum, au lieu de (16) et (17), les expressions suivantes :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &D_m[u] = \int_0^1 [p_m u'^2 - q_m u^2]\, dx, \\ &H_m[u] = \int_0^1 r_m u^2\, dx = 1, \qquad H_m[u, \varphi_i^m] = \int_0^1 r_m u \varphi_i^m\, dx = 0 \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1), \end{aligned}\right.$$

où

$$p_m(x) = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_i+h} p(x)\, dx \quad \text{dans} \quad (x_i \leqq x \leqq x_{i+1}), \quad h = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{m},$$

$$q_m(x) = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_i+h} q(x)\, dx \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»}$$

$$r_m(x) = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_i+h} r(x)\, dx \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»}$$

Comme conditions de minimum on obtient des équations à coefficients constants, qui donnent les approximations des solutions (du problème du minimum susdit) sous la forme suivante :

$$(19)\quad \begin{cases} p_m(x_i)u''_m + [\lambda r_m(x_i) + q(x_i)]u_m = 0 \\ \quad [\text{dans chaque intervalle } (x_i,\ x_{i+1})], \\ p_m(x_i - 0)u'_m(x_i - 0) = p_m(x_i + 0)u'_m(x_i + 0) \\ \quad (\text{aux points de séparation des intervalles susdits}), \\ u_m(0) = u_m(1) = 0. \end{cases}$$

En se servant de ce système (19) on obtient après quelques calculs le système récurrent suivant, système des « tronçons », dont l'application donne l'algorithme pour le calcul approché des valeurs singulières du paramètre

$$(20)\qquad u_{i+1} = \left[\frac{\beta_i \alpha_i}{\gamma_i \alpha_{i-1}} + \beta_i\right] u_i - \frac{\alpha_i}{\gamma_i \alpha_{i-1}} u_{i-1},$$

où

$$u_0 = u_m = 0,$$

$$\gamma_i = \frac{p_m(x_i)}{p_m(x_{i-1})}, \qquad \alpha_i = \frac{\sin A_i \Delta}{A_i}, \qquad \beta_i = \cos A_i \Delta,$$

$$A_i^2 = \frac{\lambda r_m(x_i) + q_m(x_i)}{p_m(x_i)}, \qquad u_i = u_m(x_i), \qquad \Delta = \frac{1}{m}.$$

En égalant à zéro le déterminant de (20), on obtient l'équation transcendante pour la détermination approchée des valeurs de λ_k.

En utilisant le problème de minimum correspondant au système (18) et sa relation avec le problème de minimum pour (16) sous les conditions (17), N. Bogoliouboff et N. Kryloff ont obtenu $[6]_t$ la limitation suivante

$$(21)\qquad |\lambda_k^{(m)} - \lambda_k| < \frac{B + \lambda_k A}{m^2},$$

où

$$A < \frac{2\,|r'|\,CDm^2}{12m^2 \min p - 2\,|r'|\,CD}, \qquad B < \frac{C_m[\,|p'|\,F_m + |q'|\,D_m]}{6 \min |p|},$$

$$C^2 = 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda_k^2 + \left|\frac{q^2}{r}\right|}\sqrt{\lambda_k + \left|\frac{q}{r}\right|}, \qquad D^2 = \frac{\sqrt{\lambda_k + \left|\frac{q}{r}\right|}}{\min p \min r},$$

$$C_m = CL, \qquad D_m = DL, \qquad L = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{|r'|\,2CD}{12m^2 \min p}}},$$

$$F_m = \frac{LE}{\min p} + \frac{|p'|\,CL}{[\min p]^2}, \qquad E = \frac{[\lambda_k |r| + |q|\,]^{\frac{3}{2}}\sqrt{k}}{\sqrt{\min r \min p}}.$$

L'utilisation des formules de quadratures de M. Signorini donne ainsi dans la méthode des tronçons la limitation (21) de l'ordre de $\frac{1}{m^2}$. La série des constantes à calculer A, B, C, D, L, F est assez compliquée et les expressions des constantes sont trop majorées. Il est hors de doute cependant que, par les différentes variantes de la méthode des tronçons, de bonnes approximations peuvent être obtenues non seulement pour les valeurs singulières du paramètre, mais aussi pour les fonctions singulières, pour l'intégrale de l'équation différentielle non homogène, et ceci pourrait tenter avec fruit les efforts d'un jeune chercheur.

Bornons-nous ici à indiquer que l'application de la méthode ordinaire des tronçons [où aussi est valable le système (20), mais où l'on prend, bien entendu, d'autres valeurs moyennes pour p, q, r] conduit à l'estimation de l'erreur, dont l'expression est de beaucoup plus simple

$$(22)\quad |\lambda_k^{(m)} - \lambda_k| < \frac{1}{m}\left\{\left[\frac{\max|q'|}{\min|r|} + \frac{\max|p'|\max|q|}{\min|r|\min|p|}\right] + \left[\frac{\max|r'|}{\min|r|} + \frac{\max|p'|}{\min|p|}\right]\lambda_k\right\},$$

quoique l'ordre de grandeur de cette appréciation soit moindre que celui de (21).

Remarquons pourtant que dans le cas de l'existence des dérivées secondes de $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, on peut obtenir, au lieu de (22), une limitation aussi de l'ordre de $\frac{1}{m^2}$, comme il est facile de s'en assurer.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. Ritz (W.). — *a.* Ueber eine neue Methode zur Losung gewisser Variations probleme der math. Physik (*J. C.*, Bd 135, 1908).
b. Œuvres complètes de W. Ritz, avec une Préface de H. Poincaré (Paris, Gauthier-Villars, 1911).

2. *a.* Tonelli (L.). — Fondamenti di Calcolo delle Variazione, vol. I, II (Bologna, Zanichelli).
b. Hadamard (J.). — Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées (*M. I. F.*, t. 33, n° 4).

c. HADAMARD (J.). — Leçons sur le calcul de variations, t. I (Paris, Hermann, 1910).

3. RAYLEIGH (J.). — *Ph. Mag.*, série 6, vol. 22.

4. PICONE (M.). — Compiuta ricerca degli estremi assoluti di un particolare integrale semplici, etc. (*E. M.*, t. II).

5. BLONDEL. — Sur la théorie des marées dans un canal. Application à la mer Rouge (*A. T.*, 1912).

6. KRYLOFF (N.). — *a.* Sur l'application de la méthode de W. Ritz au problème des oscillations contraintes (*C. S. M. Kh.*, 1914).

b. Sur différents procédés de solution approchée des équations en physique mathématique : Chapitre I (Équations différentielles et intégro-différentielles (*A. T.*, 1926) ; Chapitre II (Solution approchée des équations intégrales) (*A. T.*, 1927).

c. Sur l'estimation de l'erreur commise dans l'application de la méthode de W. Ritz pour l'intégration approchée des équations différentielles (*C. R.*, t. 180, p. 1316).

d. Sur l'algorithme variationnel et le problème fondamental de la physique mathématique (*C. R.*, t. 186, p. 298).

e. Sur quelques recherches récentes dans le domaine de la solution approchée des problèmes de la physique mathématique (*Atti del VI Congresso Intern. dei Matematici*, Bologna; sous presse).

f. Sur l'intégration dans certains cas des équations différentielles non linéaires de la physique mathématique (*T. M. J.*, t. 28, n° 1).

g. Sur un procédé de Boussinesq (*C. R.*, t. 161, p. 558).

h. Sur une méthode, basée sur le principe de minimum pour l'intégration approchée des équations différentielles (*Ibid.*, t. 181, p. 86).

i. Sur les méthodes de moindres degrés et de l'algorithme variationnel pour la solution approchée des problèmes de la physique mathématique (*B. A. S. U.*, t. III, fasc. II, 1928).

j. Sur une méthode d'intégration approchée contenant comme cas particuliers la méthode de W. Ritz, ainsi que celle des moindres carrés (*C. R.*, t. 182, p. 676).

k. Sopra il metodo delle minime potenze per l'integrazione approssimata delle equazoni della Fisica matematica (*R. A. S. N.*, série 3, t. 33, 1926).

l. Sur le calcul approché des solutions périodiques des systèmes différentiels (*J. Ph. A.*, 1929).

m. Sur la méthode des réduites pour la solution approchée des problèmes de la physique mathématique (*C. R.*, t. 187, p. 415).

n. Sopra un nuovo metodo per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della Fisica matematica. Sunto di una conferenza tenuta all'Istituto Matematico della R. Universita di Bologna il 17-XII-1926 (*B. U. M. I.*, anno VI, n° 1).

o. On the approximate solution of the integro-differential équations of mathematical Physics (*Ans. M.*, t. 27, n° 4, p. 537-540).

p. (En collaboration avec N. Bogoliouboff). Sur la justification du principe de Rayleigh par l'ordre de l'erreur commise à la $n^{\text{ième}}$ approximation (*C. R.*, t. 183, p. 476).

q. (In collaboration with N. Bogoliouboff). On Rayleigh's Principle in the Theory of Differential Equations of Mathematical Physics and on Euler's method in Calculus of Variations (*Ans. M.*, 1928).

r. (En collaboration avec N. Bogoliouboff). Sur les méthodes des différences finies pour la résolution approchée des problèmes fondamentaux de la physique mathématique (*C. R.*, t. 186, p. 422).

s. Sur l'application du principe de minimum à la théorie des oscillations propres des systèmes (extrait d'une lettre adressée au professeur Dr. Norlund) (*A. M.*, t. 52).

t. (En collaboration avec N. Bogoliouboff). Sopra il metodo dei coefficienti costanti (metodo dei tronconi) per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della Fisica Matematica (*B. U. M. I.*, anno VII nº 2).

u. Sôbre alguns novos métodos da integração aproximada das equações diferenciais da Fisica Matematica (exposição sucinta da conferência feita em 26-IV-1927, de introdução dum curso realizado a convite da Faculdade de Sciências da Universidade de Coîmbra) (*O. I.*, t. 74, nº 4).

v. Approximate solutions of a System of Differential Equations. Mathematical Physics by Least Squares (*B. A. M. S.*, t. 32, nº 4).

w. Application of the Method of W. Ritz to a System of Differential Equations (*B. A. S. R.*, 1916).

x. Sur différentes généralisations de la méthode de W. Ritz (*C. R.*, t. 164, p. 953).

y. Sur quelques nouvelles méthodes de la solution approchée des problèmes de la physique mathématique (extrait du livre *In memorium N. I. Lobacevski*, vol. II, 1926), édité par la Société physico-mathématique de Kasan à l'occasion du centenaire de la découverte de la Géométrie non euclidienne par N. I. Lobacevski.

z. *Voir* aussi ses travaux publiés dans *B. A. S. U.* et *M. A. S. U.* (à partir 1924), dans *S. M. N. S. S. G.* (1926), dans *M. L. T. U.* (1918).

7. Kryloff (N.) et Tamarkin (J.). — Sur la méthode de W. Ritz pour la solution approchée des problèmes de la physique mathématique (*B. A. S. R.*, 1918).

8. Tamarkin (J.). — Complément à l'article précédent (*voir* aussi 6).

9. *a*. Picard. — Traité d'analyse, t. III.

b. Goursat. — Cours d'analyse, t. III.

c. Stekloff. — Les problèmes fondamentaux de la physique mathématique, t. I (en russe).

10. Montel (P.). — Sur les suites infinies des fonctions (Thèse) (*A. E. N.*).

11. Courant (R.). — *a*. Ueber die Anwendung der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und ueber neue Klassen von Funktionalgleichungen (*A. M.*, Bd 49).

b. Ueber directe Methoden bei Variations und Randwertproblemen (*J. D. M. V.*, Bd 34, Heft 5-8).

12. Lichtenstein. — Ueber einige Existenzprobleme der Variationsrechnung. Methode der unendlichvielen Variabeln (*J. C.*, Bd 145).

13. Hammerstein (A.). — Nichtlineare Integralgleichungen und directe Methoden der Variationsrechnung (*S. B. M. G.*, XXVI Jahrgang).

14. Riesz (F.). — Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnus (Paris, Gauthier-Villars, 1913).

15. *a.* Timoshenko (S.). — *Voir* ses nombreux travaux dans *Z. M. P.*, *A. I. P. K.*, *A. I. P. P.*

b. Pöschl und Terzaghi. — Berechnung von Behaltern nach neueren analytischen und graphischen Methoden (Berlin, Springer, 1913).

c. Love. — *Pr. M. C.*, Cambridge, 1912.

16. Tricomi (F.). — *a.* Limitazione delle soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali (*R. A. L.*, 6e série, t. V, 1er semestre, 2e fascicule).

b. Sulla risoluzine numerica delle equazioni integrali di Fredholm (*R. A. L.*, t. XXXIII, 1er semestre, 12e fascicule; 2e semestre, 1er et 2e fascicules).

17. Picone (M.). — *a.* Maggiorazione degli integrali delle equazioni lineari ellitico paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine (*R. A. L.*, 6-II-1927).

b. Nuovo metodo d'approssimazione per la soluzione del problema di Dirichlet (*R. A. L.*, 5e série, t. XXXI, 1er semestre, 9e fascicule).

c. Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza e calcolo di una soluzione periodica per il piu generale sistema di equazioni differenziali ordinarie, 5e série, t. XXXIII, 1er semestre, 9e fascicule).

d. Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi della Fisica-matematica (*R. C. M. P.*, t. III, 1928).

Voir aussi ses travaux dans ***M. L.*** et ***B. U. M. I.***

18. Krawtchouk (M.). — *a.* Sur la méthode de N. Kryloff pour l'intégration approchée des équations de la physique mathématique (*C. R.*, t. 183, p. 474).

b. Sur la méthode de N. Kryloff pour la solution approchée des équations de la physique mathématique (*M. A. S. U.*).

Voir aussi ses travaux dans ***B. A. S. U.***

19. Weyl (H.). — Das asymptotische Verteilungs gesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (*M. A.*, t. 71).

20. Hamel (G.). — Ueber erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden (*M. A.*, t. 86).

21. Paschoud. — Sur l'application de la méthode de W. Ritz à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque carrée mince (Thèse) (Gauthier-Villars, 1914).

22. *a.* Jackson (D.). — *Voir* ses nombreux Mémoires dans *T. A. M. S.*

b. Polya. — *C. R.*, 1910.

23. Bernstein (S.). — Sur la meilleure approximation des fonctions continues à l'aide des polynomes de degré donné (en russe) (Kharkoff, 1912).

— Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle (Paris, Gauthier-Villars).

24. STABLEIN (F. u. W.). — Stationare erzwungene Schwingungen in Schwings kreisen, etc. (*A. E.*, t. XVIII, H. 2).

25. HECKE. — Ueber die Integralgleichungen der kinetischen Gastheorie (*M. Z.*, 1922, p. 284-286).

ENSKOG (D.). — *a.* Eine allgemeine Methode zur Auflösung von linearen Integralgleichungen (*M. Z.*, Bd 24, H. 4).

b. Zur Begründung der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen (*M. Z.*, Bd 25, H. 2).

BRILLOUIN (M.). — La méthode des moindres carrés et les équations aux dérivées partielles (*A. Ph.* 1914).

26. *a.* PLANCHEREL (M.). — Sur la méthode d'intégration de Ritz (*B. Sc. M.*, t. XLVII-XLVIII).

b. ROBBINS (R.). — A Method in Calculus of Variations (*A. J.*, 1917).

c. RICHARDSON (R.). — A new Method in boundary Problems for Differential Equations (*T. A. M. S.*, t. XVIII, N. 4).

d. CARMICHAEL (R.). — Boundary Value and Expansion Problems (*A. I.*, t. XLIII, N. 2, 4).

e. BÔCHER (M.). — Leçons sur les méthodes de Sturm, etc. (Paris, Gauthier-Villars, 1917).

27. VAN DEN DUNGEN (F. H.). — Cours de technique des vibrations (1er et 2e fascicules, Bruxelles, 1926).

28. FUBINI (G.). Alcuni nuovi problemi di calcolo di variazioni (*An. M.*, t XX, s. III.

29. KRYLOFF (N.). — *a.* Sur la solution approchée des problèmes fondamentaux de la Physique mathématique à l'aide des méthodes permettant d'apprécier l'erreur commise à la $m^{\text{ième}}$ approximation (*B. A. S. U. R.*, 1929).

b. Sur la résolution approchée des équations différentielles linéaires (*B. A. S. U. R.*, 1930).

c. Sur quelques idées de P. Tchebycheff qui peuvent être rattachées à la solution approchée des problèmes du calcul des variations (*B. A. S. U.R.*, 1930).

d. (En collaboration avec N. Bogolioubof). Sur le calcul des racines de la transcendante de Fredholm les plus voisines d'un nombre donné par les méthodes des moindres carrés et de l'algorithme variationnel (*B. A. S. U. R.*, 1929).

e. (En collaboration avec N. Bogolioubof). La solution approchée du problème de Dirichlet (*C. R. A. S. U.*, 1929).

f. (En collaboration avec N. Bogolioubof). Application de la méthode de l'algorithme variationnel à la solution approchée des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique (*B. A. S. U. R.*, 1930).

g. (En collaboration avec N. Bogolioubof). Application de la méthode des réduites à la solution approchée des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique (*V. G. A.*, 1929).

h. Sur quelques travaux récents de la Chaire de la Physique Mathématique de l'Académie des Sciences d'Ukraine (*B. A. S. U.*, 1930).

i. Sur la solution approchée des problèmes de la Physique Mathématique et de la Science d'Ingénieur (*B. A. S. U. R.*, sous presse).

j. Solution approchée des problèmes fondamentaux de la Physique Mathématique (Monographie en langue ukrainienne, sous presse).

k. Les problèmes fondamentaux de la Physique Mathématique et de la Science d'Ingénieur (Monographie en langue ukrainienne, sous presse).

Abréviations utilisées.

A. E.	Archiv für Electrotechnik.
A. I. P. K.	Annales de l'Institut Polytechnique de Kieff.
A. I. P. P.	Annales de l'Institut Polytechnique de Saint-Pétersbourg.
A. J.	American Journal of Mathematics.
A. M.	Acta Mathematica.
An. M.	Annali di Matematica.
A. Ph.	Annales de Physique.
As. M.	Annals of Mathematics.
A. T.	Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.
B. A. M. S.	Bulletin of the American Mathematical Society.
B. A. S. R.	Bulletin de l'Académie des Sciences de Russie.
B. A. S. U.	Bulletin de l'Académie des Sciences d'Ukraine.
B. A. S. U. R.	Bulletin de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.
B. Sc. M.	Bulletin des Sciences Mathématiques.
B. U. M. I.	Bolletino della Unione Matematica Italiana.
C. R.	Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris.
C. R. A. S. U.	Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.
C. S. M. Kh.	Communications de la Société Mathématique de Kharkoff.
E. M.	Esercizie Matematiche di Catania.
I. O.	O Instituto.
J. C.	Journal für die reine und angewandte Mathematik.
J. D. M. V.	Jahrsbericht der Deutschen Mathem. Vereinigung.
J. E. P.	Journal de l'École Polytechnique..
J. M.	Journal de Mathématiques pures et appliquées.
J. Ph.	Journal de Physique appliquée (Moscou).
M. A.	Mathematische Annalen.
M. A. S. U.	Mémoires de l'Académie des Sciences d'Ukraine.
M. I. F.	Mémoires présentés à l'Institut de France.
M. Z.	Mathematische Zeitschrift.
Ph. M.	Philosophical Magazine.
P. M. L. T. U.	Proceedings of the Mathematical Laboratory of the Tauric University.

Pr. M. C.........	Proceedings of the Mathematical Congress (Toronto, 1924).
R. A. S. N......	Rendiconti della R. Accademia di Scienze di Napoli.
R. C. M. P......	Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
S. B. M. G	Sitzungberichte der Berliner Mathem. Gesellschaft.
S. M. N. S. S. G.	Sammelschrift der Math. — Naturwissen. Sektion der Sevčenko-Gesellschaft in Lemberg.
T. A. M. S......	Transactions of the American Mathematical Society.
T. M. J..........	Tohôku Mathematical Journal.
Z. M. P........	Zeitschrift für Mathem. und Physik.

TABLE DES MATIÈRES.