MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

MICHEL PETROVITCH

Intégration qualitative des équations différentielles

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 48 (1931)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1931__48__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XLVIII

Intégration qualitative des équations différentielles

Par M. Michel PETROVITCH
Professeur à l'Université de Belgrade

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1931

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

INTÉGRATION QUALITATIVE

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Par M. Michel PETROVITCH,

Professeur à l'Université de Belgrade.

INTRODUCTION.

Dans la grande généralité de cas on ne peut intégrer les équations différentielles en termes finis, à l'aide des fonctions déjà connues, par exemple à l'aide de combinaisons connues de fonctions élémentaires, ou à l'aide de fonctions définies par les quadratures portant sur de telles fonctions. Si l'on voulait se restreindre aux cas où une telle intégration serait possible, le champ de recherches sur les équations différentielles serait très limité et l'immense majorité des problèmes qui se présentent dans les applications se trouverait condamnée à rester pour toujours en dehors du domaine de nos investigations.

« Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par les équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples, ainsi qu'on a fait pour les fonctions algébriques qu'on avait cherché à ramener à des radicaux et qu'on étudie maintenant directement, ainsi qu'on a fait pour les intégrales de différentielles algébriques, qu'on s'est efforcé longtemps d'exprimer en termes finis ». (H. Poincaré.)

Dans la théorie des équations différentielles on a déjà fait un pas dans cette voie en étudiant directement l'intégrale au voisinage d'un point du plan. Mais dans ces recherches, d'une part, où l'on s'est placé au point de vue de la théorie générale des fonctions, une égale importance se rattache au réel et à l'imaginaire; d'autre part, on se borne à l'étude de l'intégrale au voisinage d'un point considéré. Or, dans une foule de questions importantes d'Analyse, de Géométrie, de Mécanique, de Physique, etc., il importe essentiellement de connaître l'intégrale *dans le champ réel*. Cette étude comporte alors deux parties :

1° Partie *qualitative* ou l'étude de l'allure générale de la courbe intégrale et la délimitation d'une région du plan comprenant la courbe passant par un point donné, en partie ou dans toute sa longueur;

2° Partie *quantitative* ou calcul numérique de l'ordonnée de la courbe correspondant à l'abscisse donnée.

C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder l'étude de la courbe intégrale dans le champ réel. En somme, cette étude se ramène à celle de la forme de la courbe. On cherche à *construire* cette courbe, c'est-à-dire on cherche ses branches fermées, ses branches infinies, ses asymptotes, les points d'intersection avec les axes des coordonnées, ou bien avec des droites ou des courbes fixes; les régions du plan où la courbe devient imaginaire; on examine si la courbe est oscillante, ou bien constamment croissante ou décroissante dans une région (R) du plan; si les oscillations sont amorties ou croissantes; on détermine le nombre et la position des zéros, des maxima et des minima, des points singuliers dans une région (R); la fréquence des oscillations, la rapidité de leur amortissement, etc. On cherche également à *encadrer* la courbe intégrale en partie ou dans toute sa longueur; le problème se ramène à celui de trouver deux courbes fixes entre lesquelles se trouve compris l'arc de la courbe intégrale lorsque l'abscisse ou l'ordonnée varient entre les limites données.

Il est d'ailleurs manifeste qu'une telle étude qualitative, suffisamment avancée, est de la plus grande utilité pour la détermination quantitative même de la courbe intégrale. D'abord, elle facilite la détermination exacte d'un certain nombre de points de la courbe. Par cela même elle facilite aussi le calcul numérique de l'intégrale, car l'on connaît déjà des séries convergentes qui représentent l'intégrale dans une région du plan, et la principale difficulté qui se présente à l'extension du calcul numérique en dehors de cette région, est de trouver un guide facilitant le passage d'une région où la fonction est représentée par une série, à une autre région où elle s'exprime par une série différente. Les considérations de ce genre ont effectivement guidé H. Poincaré dans ces profondes recherches relatives au calcul numérique des intégrales des équations différentielles à l'aide des séries.

Mais l'étude qualitative présente aussi, par elle-même, un intérêt de premier ordre. En effet, dans les applications, certaines particularités telles que les zéros, les infinis, les maxima et les minima, le caractère oscillant, les asymptotes de la courbe qui représentent l'allure d'un phénomène mécanique, physique, etc., est souvent ce qu'il importe le plus de connaître. Dans le problème de trois corps, par exemple, il importe de savoir si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment; si la distance de deux corps augmentera ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites fixes. Dans la question de l'invariabilité des éléments des planètes, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille entre certaines limites. Dans l'étude de la décharge des conducteurs à capacité, résistance et coefficient de self-induction constants ou variables, il importe en premier lieu de savoir si la décharge est continue ou oscillante, de connaître la fréquence des oscillations et le sens dans lequel celle-ci change lorsque ces facteurs varient d'un phénomène à un autre, ou bien au cours d'un même phénomène.

Ce sont là des véritables questions de l'analyse qualitative, n'exigeant pas la connaissance explicite de l'intégrale des équations auxquelles se ramène le problème. L'*intégration qualitative* des équations différentielles, fournissant la solution des questions de cette nature, offre un vaste champ de recherches qu'il est impossible à l'heure actuelle de parcourir dans toute son étendue et qui ne sera pas de sitôt épuisé. Nous nous proposons dans cet Ouvrage d'exposer sommairement un ensemble de résultats actuellement connus, dans la mesure de la place disponible.

L'exposition comporte quatre Parties. Dans les deux premières nous nous occupons des éléments contribuant à connaître *l'allure générale* de la courbe intégrale, fournissant des données pour la *construction* de cette courbe en ses grandes lignes. La troisième Partie a pour objet les *intégrales oscillantes* des équations différentielles dont les géométres se sont particulièrement occupés et dont la théorie contient un grand nombre de résultats acquis. Enfin, dans la quatrième Partie nous indiquerons divers procédés pour *encadrer* une portion ou une branche de la courbe intégrale, en lui assignant comme limites inférieures et supérieures des courbes connues.

PREMIÈRE PARTIE.

ALLURE GÉNÉRALE DES COURBES INTÉGRALES.

CHAPITRE I.

RECHERCHES DE H. POINCARÉ.

Dans ses Mémoires fondamentaux « *Sur les courbes définies par les équations différentielles* » Poincaré étudie les intégrales au point de vue qualitatif et démontre une suite de résultats à l'aide desquels il arrive à déterminer la forme des courbes intégrales.

Poincaré commence ses recherches par les équations du premier ordre et de premier degré. Afin d'éviter les difficultés que présenterait l'étude des branches infinies, il remplace le plan de la courbe par une sphère et considère directement les projections gnomoniques des courbes intégrales sur la sphère. Il aborde ensuite l'étude des équations du premier ordre et de degré supérieur où se présentent des difficultés nouvelles qui lui fournissent l'occasion de montrer le rôle qu'on peut faire jouer à l'*Analysis Situs* dans ce genre de problèmes. Enfin, il passe au cas encore plus complexe des équations d'ordre supérieur au premier où il lui fallait renoncer à des représentations géométriques qui lui avaient utilement servi dans le cas du premier ordre, mais où un grand nombre de résultats trouvés pour le premier ordre n'en subsistent pas moins.

Les résultats principaux de ces recherches seront résumés dans les paragraphes suivants.

1. **Équations du premier ordre et de premier degré** [71, 73]. — Considérons l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \tag{1}$$

X et Y désignant des polynomes en x, y. Le point (x, y) sera considéré, non pas comme point dont l'abscisse et l'ordonnée dans un plan sont x et y, mais comme projection gnomonique de ce point sur la sphère. En joignant un point du plan P des courbes intégrales au centre de la sphère, on a une droite qui rencontre la sphère en deux points. En supposant la sphère partagée en deux hémisphères par un plan diamétral Π parallèle au plan des courbes, l'un de ces points sera situé dans le premier hémisphère, l'autre dans le second. Les points à l'infini du plan P correspondront à la circonférence E, intersection de la sphère et du plan Π; cette circonférence est appelée l'*équateur*.

Par tout point (α, β) de la sphère, sauf pour certains points singuliers, passe une courbe intégrale (ou *caractéristique*) et une seule. On le voit directement sur le développement de y en série ordonnée suivant les puissances de $x - \alpha$ se réduisant à $y = \beta$ pour $x = \alpha$.

Mais pour certains points spéciaux (α, β) (*points singuliers*) le développement de y au voisinage de ce point affecte d'autres formes dépendant de la nature analytique du point (α, β) qui se laisse reconnaître directement sur les polynomes X et Y. La considération de ces formes de développement conduit, par les méthodes classiques, à discerner quatre sortes de points singuliers (sans parler de singularités de nature plus complexe qui ne se présentent que dans certains cas très particuliers et qui peuvent être regardées comme composées de plusieurs points singuliers simples confondus). Poincaré a donné à ces quatre sortes les noms suivants :

1° Les *cols*, par lesquels passent deux courbes intégrales et deux seulement. Ainsi, l'intégrale générale de

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \qquad \text{étant} \qquad xy = \text{const.},$$

les seules caractéristiques qui passent par le point $x = 0, y = 0$ sont les deux grands cercles $x = 0, y = 0$; ce point est un col.

2° Les *nœuds*, où viennent se croiser une infinité de courbes intégrales. Ainsi, l'intégrale de

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} \qquad \text{étant} \qquad \frac{y}{x^2} = \text{const.}$$

représente dans le plan une série de paraboles ayant même axe et ayant leur sommet à l'origine; sur la sphère, cette même équation représentera les intersections de la sphère avec les cônes qui ont le centre de la sphère pour sommet et ces paraboles pour bases.

Toutes ces intersections passent par le point $x = 0$, $y = 0$ qui est un nœud.

3° Les *foyers*, autour desquels ces courbes tournent en s'en rapprochant sans cesse à la façon d'une spirale logarithmique. Ainsi, l'équation

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y}$$

a comme intégrales les courbes ayant pour équation polaire

$$\rho^2 e^{-2\theta} = \text{const.};$$

ceci représente dans le plan des spirales logarithmiques et par conséquent, sur la sphère, des spirales sphériques; le point $x = 0$, $y = 0$ est un foyer.

4° Les *centres*, autour desquels ces courbes se présentent sous la forme de cycles fermés, s'enveloppent mutuellement en enveloppant le centre. L'équation, par exemple,

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$$

a pour intégrale générale la famille des cercles concentriques et $x = 0$, $y = 0$ est un centre (on ne rencontre, d'ailleurs, les centres que dans des cas très particuliers).

Envisageons l'équation

$$\frac{dx}{ax + by + \ldots} = \frac{dy}{a'x + b'y + \ldots}, \tag{2}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs au premier. La nature du point singulier $x = 0$, $y = 0$ dépend essentiellement des racines λ_1 et λ_2 de l'équation

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ a' & b'-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

En nous bornant au cas général, c'est-à-dire sans supposer des relations particulières entre les coefficients, il y a trois cas à distinguer :

1° λ_1 et λ_2 sont réels et de même signe : l'origine est un *nœud;*

2° λ_1 et λ_2 sont réels et de signes contraires : l'origine est un *col;*

3° λ_1 et λ_2 sont imaginaires conjuguées : l'origine est un *foyer*. Le seul cas d'exception est celui où λ_1 et λ_2 sont égaux et de signes contraires : c'est alors un *centre*.

Après la discussion de ces diverses espèces de points singuliers, Poincaré en étudie la distribution sur la sphère et dans le plan. Il montre qu'il y en a toujours (à distance finie ou infinie) et trouve une relation simple entre le nombre des cols, des nœuds et des foyers : le nombre total des nœuds et des foyers est égal au nombre total des cols plus 2. Le nombre total des points singuliers est toujours un multiple de 4 plus 2; si ce nombre se réduit à 2, ces points sont des nœuds et des foyers; ils sont toujours des nœuds s'ils sont sur l'équateur. Sur la courbe $X = 0$, les cols ou les nœuds, et foyers se succèdent alternativement.

L'étude approfondie des points singuliers permet d'aborder la question des formes géométriques que peuvent affecter les caractéristiques sur toute la sphère.

Une première considération, d'une grande importance, est celle du nombre des points où un arc d'une courbe donnée touche une caractéristique, c'est-à-dire du nombre de contacts de cet arc. En étudiant les contacts que peut avoir une courbe algébrique donnée avec les courbes intégrales de (1), Poincaré constate que, dans un très grand nombre de cas, il existe des branches de courbes fermées qui ne touchent en aucun point aucune des courbes intégrales. Il les a appelées *cycles sans contact* [71]. Une courbe intégrale ne peut rencontrer un pareil cycle en plus d'un point. Si donc on imagine un point mobile décrivant une courbe intégrale, dès qu'il sera sorti d'un cycle sans contact, il n'y pourra plus entrer.

Outre ces cycles, il y a un autre genre de courbes fermées qui joue aussi un rôle important dans la théorie de Poincaré : ce sont les *cycles limites*. Ce sont les courbes fermées qui satisfont à l'équation (1) et dont les autres courbes intégrales se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre. Elles sont, en général, des courbes transcendantes difficiles à tracer exactement. Mais on peut souvent tracer deux courbes algébriques fermées, concentriques l'une à l'autre, déterminant une sorte d'anneau, la région annulaire et l'extérieur de l'anneau. Si l'on arrive à démontrer que le cycle limite se trouve dans la région annulaire, on sera certain que, si le point mobile de tout à l'heure est à l'intérieur de l'anneau, il ne pourra jamais passer à l'extérieur de l'anneau.

Poincaré indique ensuite qu'on peut, dans tous les cas, sillonner le plan par une infinité de courbes fermées, s'enveloppant mutuellement et rappelant par leur forme et leur disposition les courbes de niveau d'un plan topographique. Parmi ces courbes fermées, les unes sont des cycles sans contact, les autres sont des cycles limites. A part ces cycles limites, les courbes intégrales de (1) sont des spirales se rapprochant asymptotiquement des points singuliers et des cycles limites.

Le nombre des cycles limites est toujours fini, sauf dans certains cas exceptionnels. Poincaré indique un procédé général pour déterminer ce nombre et pour tracer des régions annulaires dans lesquelles se trouve un cycle limite, et un seul.

Un cas particulier remarquable, qui ne se présente que très exceptionnellement, est celui où toutes les courbes intégrales sont des courbes fermées qui s'enveloppent mutuellement à la façon des courbes de niveau d'un plan topographique. C'est là le seul cas où l'on ne puisse pas sillonner le plan de cycles sans contact [71]. Pour qu'il se présente, il faut une infinité de conditions. Mais le plus souvent il est facile de reconnaître si elles sont remplies. Dans certains cas on démontre *a priori* qu'elles doivent être toutes satisfaites, et, en particulier, quand on a

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

2. Équations du premier ordre et de degré supérieur [71, 73]. — Pour étudier l'équation

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{4}$$

on peut poser

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dY}{dt} = Y, \tag{5}$$

où X et Y sont fonctions de x et y. Regardant alors x et y comme coordonnées d'un point mobile, t comme le temps, on a à rechercher quel est le mouvement d'un point dont on donne la vitesse en fonction de ces coordonnées. Considérons les cinq équations qui suivent et qui donnent des exemples de ce qui se passe dans le cas général.

1° Le système (5) étant de la forme

$$\frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x,$$

les trajectoires sont des courbes fermées : ce sont les cercles concentriques décrits autour de l'origine.

2° Soient, en coordonnées polaires,

$$\frac{d\theta}{dt} = h, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \sqrt{1-(\rho-2)^2},$$

h étant une constante. En coordonnées rectangulaires x et y ce serait un système (5) où X et Y seraient fonctions algébriques de x et y.

Si h est commensurable avec 2π, les trajectoires, définies par l'équation

$$\rho = 2 + \sin\left(\frac{\theta}{h} + C\right),$$

sont des courbes fermées. S'il n'en est pas ainsi, soit M un point de la trajectoire, occupé en un instant par le point mobile. Celui-ci partant de M ne pourra jamais revenir en ce point, mais il reviendra en des points infiniment voisins de M. En second lieu, le point M restera toujours à l'intérieur de la couronne limitée par les deux cercles $\rho = 1$ et $\rho = 3$, mais sa trajectoire remplira entièrement cette couronne sans laisser de lacune.

3° Soient, en coordonnées polaires,

$$\frac{d\rho}{dt} = 1 + \rho^2, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{h}$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}x - \frac{y}{h}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}y + \frac{x}{h}.$$

Les trajectoires sont les courbes

$$\rho = \operatorname{tang}(h\theta + C).$$

Ici encore, si h est incommensurable avec 2π, le point mobile ne peut jamais revenir à son point de départ, mais il peut revenir en des points infiniment voisins. La différence avec le cas précédent, c'est que le point mobile n'est plus assujetti à rester dans une région du plan, et que c'est le plan tout entier que la trajectoire remplit sans lacune.

4° Le système

$$\frac{dx}{dt} = mx - y, \qquad \frac{dy}{dt} = my + x$$

admet comme trajectoire les spirales logarithmiques

$$\rho = C\, e^{m\theta}.$$

Si, autour du point de départ M du point mobile, on décrit un cercle de rayon suffisamment petit, le point mobile, après avoir sorti de ce cercle, ne pourra jamais y rentrer. Les cercles $\rho = \text{const.}$ sont, pour les trajectoires, des cycles sans contact. De plus, tout le plan est sillonné par ces cycles, sans qu'il y ait des cycles limites.

5° Considérons le système (5) correspondant à l'équation en coordonnées polaires

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (\rho - 1)(\rho - 2)$$

et donnant pour trajectoires les courbes

$$\rho = \frac{C\, e^{\theta} - 2}{C\, e^{\theta} - 1}.$$

Les cercles $\rho = \text{const.}$ sont encore des cycles sans contact, excepté les cercles $\rho = 1$ et $\rho = 2$ qui sont des cycles limites. Le point mobile, après être sorti d'un cercle suffisamment petit décrit autour du point de départ, ne pourra plus y entrer. Si le point de départ est à l'intérieur de la couronne limitée par les deux cercles $\rho = 1$ et $\rho = 2$, le point mobile restera toujours à l'intérieur de cette couronne.

Nous pouvons maintenant, en nous référant à ces exemples, donner une définition précise de ce que Poincaré entend par *stabilité* et *instabilité* des trajectoires. On dira que la trajectoire d'un point mobile est *stable*, lorsque, décrivant autour du point de départ un cercle ou une sphère de rayon r, le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, y rentrera une infinité de fois, et cela, quelque petit que soit r. C'est ce qui arrive dans les trois premiers exemples. La trajectoire sera *instable* si, après être sortie de ce cercle ou de cette sphère, le point mobile n'y rentre plus. C'est ce qui arrive dans les deux derniers exemples.

Ceci étant pour étudier plus facilement l'équation

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{6}$$

$\left(F\right.$ désignant un polynome en x, y, $\left.\frac{dy}{dx}\right)$, Poincaré introduit trois variables ξ, η, ζ de telle façon que x, y $\frac{dy}{dx}$ soient des fonctions rationnelles de ξ, η, ζ, et il considère ces trois variables comme les coordonnées d'un point dans l'espace. L'équation (6) signifie alors que ce point est situé sur une certaine surface algébrique. Choisissons ces nouvelles variables de telle façon que cette surface n'ait pas de nappes infinies et se réduise à un certain nombre de nappes fermées. Envisageons en particulier une de ces nappes, que nous appellerons S. Grâce aux conventions faites, par chaque point non singulier de S passera une courbe intégrale de (6) et une seule. Quant aux points singuliers, ils se subdivisent en cols, en foyers, en nœuds et en centres définis précédemment.

Une notion qui joue ici un rôle capital, c'est le *genre* de S. On dira que cette nappe est de genre 0, si elle est convexe à la façon d'une sphère; de genre 1, si elle présente un trou à la façon d'un tore; de genre 2, si elle présente deux trous, etc. Poincaré démontre une relation simple entre le genre de la nappe et le nombre des cols, des foyers et des nœuds qui s'y trouvent. La nappe S est sillonnée d'une infinité de courbes fermées, qui sont des cycles sans contact ou des cycles limites; il y a toutefois une différence essentielle entre le cas des équations (6) de premier degré et celui de degré supérieur. Supposons, par exemple, que S soit un tore et qu'un cercle méridien de ce tore soit un cycle sans contact; contrairement à ce qui se passe dans le cas du premier degré, rien ne s'oppose à ce qu'une courbe fermée, intégrale de (6), vienne couper ce cercle en plusieurs points et même en une infinité de points. Si cela arrive et qu'un point mobile décrive cette courbe en partant d'une position initiale donnée, il finira toujours par revenir dans une position aussi voisine qu'on le voudra de cette position initiale. Le point décrira ainsi une trajectoire stable. Ainsi, la stabilité qui, dans le cas du premier ordre, ne se présente que dans des cas très particuliers, *n'est plus une exception quand il s'agit d'équations du degré supérieur.*

3. Équations d'ordre supérieur [71, 72]. — Considérons l'équation du second ordre écrite sous la forme du système

$$(7) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

X, Y, Z désignant des polynomes en x, y, z et les variables étant regardées comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Par chaque point de l'espace passe une courbe intégrale de (7) et une seule, si toutefois on excepte les points singuliers, c'est-à-dire les points d'intersection des trois surfaces $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. Poincaré montre qu'il y a quatre sortes de tels points (sans parler des points singuliers qui ne se rencontrent que très exceptionnellement, par exemple les centres :

1° Les *nœuds*, où viennent converger toutes celles des courbes intégrales de (7) qui passent assez près du point singulier;

2° Les *cols*, où viennent converger une infinité de ces courbes dont l'ensemble forme une surface et où passe, en outre, une autre courbe satisfaisant à l'équation (7) et non située sur cette surface;

3° Les *foyers*, où passe une courbe intégrale et une seule, pendant que les autres courbes se rapprochent asymptotiquement du point singulier à la façon des spirales;

4° Les *cols-foyers*, par lesquels passe une courbe intégrale et une seule, pendant qu'une infinité d'autres, dont l'ensemble forme une surface, se rapprochent asymptotiquement du point singulier.

Un assez grand nombre de propriétés des équations du premier ordre s'étendent à celles du second. Les *surfaces sans contact* sont tout à fait analogues aux cycles sans contact. Mais, dans le cas du premier ordre, c'est l'étude des points singuliers qui fait connaître les principales propriétés des courbes intégrales de l'équation; au contraire, la théorie des points singuliers des équations du second ordre ne saurait suffire à elle seule pour faire pénétrer assez profondément dans la connaissance de leurs courbes intégrales. Il faut introduire, en outre, une notion nouvelle qui joue, dans une certaine mesure, le même rôle que les points singuliers. Soient C_0 une courbe *fermé* quelconque satisfaisant à (7), et D un domaine comprenant tous les points suffisamment voisins de C_0; on peut étudier la forme et la disposition générale des courbes intégrales de (7) à l'intérieur de ce domaine. On reconnaît ainsi, indépendamment d'un grand nombre de cas moins importants, quatre cas principaux, qui sont les suivants :

1° On peut faire passer par la courbe C_0 deux surfaces que l'on peut sillonner par une infinité de courbes intégrales de (7). Les autres courbes intégrales, après être entrées dans le domaine D et s'être rapprochées de C_0, s'en éloignent ensuite et finissent par sortir du domaine.

2° On peut construire une surface S présentant une forme annulaire analogue à celle du tore, et à l'intérieur de laquelle se trouve la courbe C_0. De plus, cette surface S n'est tangente en aucun point, à aucune des courbes intégrales : c'est une surface sans contact. Un point mobile décrivant une courbe intégrale, dès qu'il sera sorti de la surface S, n'y pourra plus entrer; on a donc l'instabilité qui semble être ici le cas général.

3° On peut construire une surface S analogue à celle du cas 2°; mais elle ne sera pas une surface sans contact, elle sera au contraire sillonnée par une infinité de courbes intégrales. Alors, si le point mobile est situé sur la surface S, il y restera toujours; de plus, s'il part d'une position initiale quelconque, il finira toujours par revenir aussi près que l'on veut de cette position. Sa trajectoire est donc stable.

4° Dans le quatrième cas, le point mobile peut aller aussi près que l'on veut d'un point quelconque du domaine D, et, s'il part d'une position initiale donnée, il finira toujours par revenir aussi près que l'on veut de cette position. Dans ce sens il y a donc stabilité.

Les méthodes de Poincaré ne permettent pas de distinguer le cas 3° du cas 4°, ni, dans ce dernier, de trouver des limites entre lesquelles les coordonnées du point mobile restent comprises. Poincaré insiste sur l'intérêt qu'il y aurait de combler cette lacune.

Les cas 3° et 4° ne se présentent que si X, Y, Z satisfont à une infinité de conditions, de sorte qu'ils semblent d'abord très exceptionnels. Poincaré démontre qu'ils se présentent toujours si le dernier multiplicateur M, défini par l'équation

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x}+\frac{\partial(MY)}{\partial y}+\frac{\partial(MZ)}{\partial z}=0,$$

est uniforme et positif dans le domaine considéré.

Pour étendre les résultats précédents aux équations d'ordre supérieur au second, il faut renoncer à la représentation géométrique commode dans ce dernier cas, à moins d'employer le langage de la géométrie à n dimensions. Les résultats n'en subsistent pas moins, et l'on retrouve les quatre cas indiqués plus haut. Ce qu'il y a de remarquable, c'est que les cas 3° et 4°, c'est-à-dire ceux qui correspondent à la stabilité, se rencontrent précisément dans les équations générales de la Dynamique.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES COURBES INTÉGRALES DANS LE VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER.

4. Recherches de M. J. Bendixson [1, 2]. — M. Bendixson prouve que les théorèmes les plus importants de Poincaré, relatifs à l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \tag{8}$$

s'étendent au cas où X et Y sont des fonctions quelconques, continues dans une région A du plan xOy, ainsi que leurs dérivées prises par rapport à x et y.

L'équation étant écrite sous la forme du système

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \tag{9}$$

il existe, dans ces conditions, un seul système d'intégrales

$$\begin{cases} x = f(t - t_0, x_0, y_0), \\ y = \varphi(t - t_0, x_0, y_0), \end{cases} \tag{10}$$

prenant, pour $t = t_0$, les valeurs $x = x_0$, $y = y_0$ quand (x_0, y_0) est un point quelconque du plan situé à l'intérieur de A, excepté le cas où ce point satisfait à $X = 0$, $Y = 0$. Dans ce cas le point (x_0, y_0) est un point singulier du système (9).

Si (x_0, y_0) n'est pas un point singulier, on peut par les procédés du prolongement analytique effectuer une continuation de la courbe intégrale définie par (10). Il arrive alors ou bien que l'on obtienne des développements en série de x et y pour chaque valeur de t, ou bien qu'il existe des valeurs de t auxquelles on ne peut pas ainsi parvenir.

Soit T la limite supérieure des valeurs de t auxquelles il est possible de parvenir pour une courbe intégrale déterminée (10). Envisageons une région quelconque A' du plan xOy située à l'intérieur de A. On démontre que la courbe intégrale ne peut pas rester à l'intérieur de A' quand t tend vers T en croissant depuis t_0.

Supposons maintenant que l'on puisse étendre le prolongement pour chaque valeur $t > t_0$ et que la courbe intégrale soit située à l'intérieur de A' pour $t > t_0$. Si x et y tendent pour $t = \infty$ vers les limites finies a et b, le point (a, b) est un point singulier de (9). M. Bendixson étudie la *nature des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier isolé*. Celui-ci sera un nœud, col, foyer ou centre (au sens de Poincaré), ou bien il sera traversé par deux courbes intégrales limitant une *région nodale*. M. Bendixson désigne par ce nom (région nodale appartenant à un point singulier P) une région du plan xOy où toutes les courbes intégrales aboutissent à P. Une région nodale est *fermée* si toutes les courbes intégrales sont des courbes fermées aboutissant à P pour $t = +\infty$ et pour $t = -\infty$; si ces courbes n'aboutissent à P que pour $t = +\infty$ (ou $t = -\infty$), la région nodale est dite *ouverte*.

Une autre notion importante pour l'étude des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier est la *courbe intégrale traversant un point singulier*. Soient L et L' deux courbes intégrales aboutissant au point singulier P et telles qu'il n'existe pas de courbe intégrale aboutissant à P qui soit située entre L et L'. Soient Q un point de L, et Q' un point de L'; entourons Q' d'un cercle C' de rayon aussi petit que l'on voudra. On démontre qu'il est possible d'entourer Q d'un cercle C de rayon suffisamment petit pour que chaque courbe intégrale passant par un point de C, situé entre L et L', traverse la partie de C' qui est située entre L et L'. A cause de cette propriété on peut ne pas arrêter la courbe L en P, mais regarder L' comme le prolongement de L, c'est-à-dire regarder L et L' comme une seule courbe. On dira alors qu'une pareille courbe (LL') *traverse le point singulier* P. L'une des courbes L et L' aboutira à P quand t va en croissant, et l'autre quand t va en décroissant.

Supposons X et Y holomorphes dans le voisinage de chaque point de la région A et qu'elles ne possèdent pas de diviseurs communs; chaque point singulier sera un point singulier isolé. Supposons que le point $x = 0$, $y = 0$ soit le point singulier qu'on se propose d'étudier. On peut toujours, à l'aide d'une substitution linéaire, écrire le système (9) sous la forme

$$(11) \qquad \frac{dx}{dt} = X_m + X_{m+1}, \qquad \frac{dy}{dt} = Y_m + Y_{m+1},$$

où X_m et Y_m désignent des polynomes homogènes en x et y d'un certain degré m, et X_{m+1}, Y_{m+1} étant des séries de puissances ne contenant que des termes de degré plus grand que m, convergentes par exemple pour $|x| \leqq \delta$, $|y| \leqq \delta$. Supposons en outre que δ soit suffisamment petit pour que le point $x = 0, y = 0$ soit le seul point singulier du système situé à l'intérieur du cercle C ayant l'origine comme centre et δ comme rayon. On démontre que le système (11) *possède au plus* $2m$ *régions nodales fermées appartenant à l'origine*. Et aussi : le système (11) *possède au plus* $2m+2$ *courbes intégrales traversant l'origine*. Il existe des cas où le nombre des courbes intégrales traversant l'origine est égal à $2m+2$; il en est, par exemple, ainsi lorsque l'origine est un col.

Une région nodale fermée appartenant au point singulier P est toujours limitée par une courbe intégrale L qui traverse un point singulier. On démontre aussi qu'une courbe intégrale, limitant une région nodale ouverte appartenant à P, traverse toujours un point singulier. Quant à la forme de la courbe intégrale aboutissant à l'origine, elle sera une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine, ou bien elle aura à l'origine une tangente déterminée satisfaisant à l'équation

$$(12) \qquad xY_m - yX_m = 0.$$

Dans le cas où le premier membre de (12) s'annule identiquement, à chaque demi-droite tirée de l'origine correspond en général une et une seule courbe intégrale qui parvient à l'origine de telle manière qu'elle y est tangente à cette demi-droite.

M. Bendixson montre qu'on peut ramener l'étude d'un point singulier quelconque d'un système (11) à celle de diverses équations de la forme

$$(13) \qquad x^m \frac{dy}{dx} = ax + by + \varphi(x, y),$$

φ désignant une série de puissances ne contenant que des termes d'un degré $\geqq 2$, et a étant une constante différente de zéro.

La manière dont se comportent les courbes intégrales de (13) dans le voisinage de l'origine a été complètement élucidée par MM. Bendixson et Horn [1, 2, 43]. Ils déterminent, par l'application de la méthode généralisée de M. Picard, toutes les courbes intégrales passant par l'origine. Leur nombre est illimité, sauf le cas où m est impair et $b < 0$; dans ce cas, outre l'axe $x = 0$, il n'y a qu'une courbe intégrale passant à l'origine à droite de cet axe, et une à gauche de cet axe. Dans ce dernier cas ces courbes recouvrent complètement un certain voisinage de l'origine; si m est pair, elles sont situées d'un même côté de l'axe $x = 0$.

L'équation

$$(14) \qquad x^m \frac{dy}{dx} = x(a + \ldots) + y^{q+1}(b + \ldots) \equiv f(x, y) \qquad (b \neq 0)$$

a été l'objet de l'étude qualitative approfondie de MM. Bendixson et Horn. Le nombre des courbes intégrales passant par l'origine et leur distribution dans le voisinage de ce point dépendent de la parité de m et de q, ainsi que du signe de b, et correspondent à ce qui se présente pour l'équation

$$x^m \frac{dy}{dx} = b y^{q+1}.$$

La méthode qualitative employée n'exige pas que $f(x, y)$ soit holomorphe pour $x = 0$, $y = 0$; elle ne suppose que les conditions de Lipschitz.

5. **Autres recherches.** — M. E. Picard a complété les recherches de Poincaré en plusieurs points, en traitant d'une manière rigoureuse les cas où ces recherches avaient laissé des lacunes [70].

Ainsi, lorsque les racines λ_1 et λ_2 de l'équation quadratique (3) sont réelles et de signes contraires, il résulte immédiatement des théorèmes de Briot et Bouquet qu'il y a deux courbes intégrales passant par l'origine. M. Picard établit que ces courbes *sont les seules* qui passent à l'origine ou s'en rapprochent indéfiniment.

Dans le cas de l'équation du second degré

$$(ax + by + \ldots)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (a_1 x + b_1 y + \ldots)\frac{dy}{dx} + (a_2 x + b_2 y + \ldots) = 0,$$

M. Picard montre que (dans le cas général) toutes les courbes intégrales passant par l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment arrivent en ce point avec une tangente déterminée. Le cas d'exception est celui où les coefficients a_1, b_1, ... satisfont à certaines égalités. Suivant les circonstances, les courbes intégrales touchent à l'origine une droite déterminée, ou bien trois droites différentes.

Les recherches de M. H. Dulac se rapportent aux diverses circonstances qui peuvent se présenter dans la disposition des courbes intégrales dans le voisinage d'un point, ainsi qu'au nombre et à la position des cycles limites. Les résultats principaux supposent que les courbes intégrales soient situées dans une région telle que, dans le voisinage de tout point de cette région, X et Y soient holomorphes en x et y [23, 24, 25].

M. O. Perron, dans ses recherches sur la forme des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier, a considérablement élargi les hypothèses impliquées dans les résultats de Poincaré [59]. Pour arriver à ces résultats dans le cas de l'équation

$$(15) \qquad [kx + ly + f(x, y)]\, dy = [mx + ny + \varphi(x, y)]\, dx,$$

on suppose que f et φ soient des séries entières en x et y. Mais comme il ne s'agit que de la forme des courbes intégrales réelles, on conçoit que cette hypothèse est de trop et qu'il serait naturel d'étudier l'existence et la forme des courbes intégrales en ne supposant que le fait suivant : les valeurs de f et φ sont négligeables par rapport aux termes du premier degré. Se plaçant à ce point de vue, M. Perron suppose : 1° que les fonctions f et φ pour les points (x, y) suffisamment rapprochés de l'origine (sans compter celui-ci) soient continues; 2° que les deux rapports

$$\frac{f(x, y)}{|x| + |y|} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(x, y)}{|x| + |y|}$$

tendent vers zéro pour $x = 0$, $y = 0$; 3° que les deux rapports

$$\frac{f(x_1, y) - f(x_2, y)}{x_1 - x_2} \quad \text{et} \quad \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2},$$
$$\frac{\varphi(x_1, y) - \varphi(x_2, y)}{x_1 - x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)}{y_1 - y_2}$$

soient bornés. Il étudie aussi le cas où les conditions suivantes sont remplies : 1° f et φ sont continues au voisinage de l'origine, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre; 2° il existe un nombre positif δ tel que le rapport

$$\frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|}{(|x|+|y|)^{\delta}}$$

tend vers zéro pour $x=0$, $y=0$.

La nature du point singulier $x=0$, $y=0$ dépend des signes de

$$(k-n)^2+4lm, \quad kn-lm, \quad k+n,$$

et l'on retrouve les résultats de Poincaré; mais dans le cas où

$$(k-n)^2+4lm<0, \qquad k+n=0$$

se présente un type nouveau : il peut y avoir une infinité des courbes intégrales fermées, et en même temps des courbes intégrales qui tournent indéfiniment autour de l'origine, ayant deux courbes intégrales fermées comme lignes asymptotiques.

Certains résultats de M. Perron, avec des hypothèses aussi larges, avaient déjà été trouvés par M. L. E. I. Brouwer dans ses études topologiques et géométriques générales, par des méthodes tout à fait différentes [11].

M. P. Kuhn [50] a traité l'équation (15) en supposant que les rapports

$$\frac{f(x,y)}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(x,y)}{x^2+y^2}$$

tendent, pour $x=0$, $y=0$, vers des limites finies. Il détermine la forme des courbes intégrales en les comparant à celles de certaines équations majorantes et minorantes.

M. M. Frommer a donné un procédé géométrique direct pour l'étude des courbes intégrales de (15) dans le voisinage de l'origine, conduisant toujours au but. Le procédé applique une certaine transformation générale à l'équation differentielle et utilise une methode géométrique proposée par Dehn (Methode der Randsingularitäten). Les hypothèses ne sont pas plus resserrées que celles de M. Perron [35].

DEUXIÈME PARTIE.

DIVERS ÉLÉMENTS D'ALLURE DE LA COURBE INTÉGRALE.

CHAPITRE III.

CONDITIONS D'INVARIABILITÉ AVEC LES CONSTANTES D'INTÉGRATION.

6. **Invariabilité des zéros et des infinis de l'intégrale.** — Lorsque dans l'intégrale générale y d'une équation différentielle on fait varier les constantes d'intégration $C_1, C_2, \ldots$, les valeurs de x qui annulent ou rendent infinie y varient généralement avec ces constantes. Les conditions de leur invariabilité ont été l'objet des recherches de M. M. Petrovitch qui a donné la solution complète du problème dans le cas des équations différentielles algébriques du premier ordre. Les conditions se trouvent exprimées par les théorèmes suivants [60] :

Écrivons l'équation sous la forme

$$(16) \qquad \sum_{k=0}^{k=m} f_k(x, y) y'^{m-k} = 0,$$

où les f_k sont des polynomes en y à coefficients fonctions quelconques de x.

La condition nécessaire et suffisante pour que les zéros de y ne varient pas avec la constante d'intégration est qu'après avoir supprimé les facteurs communs aux f_k, chaque f_k, sauf f_0, contient en facteur y^h où $h \geqq k$. Cette condition étant remplie, les zéros finis de y coïncident avec les zéros de $f_0(x, 0)$, ou bien avec les infinis des autres fonctions $f_k(x, 0)$.

On peut donner à cette condition une forme géométrique. Écrivons l'équation sous la forme

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i} = 0,$$

où les m_i et n_i sont des entiers positifs tels qu'on n'ait pas à la fois

$m_i = m_j$, $n_i = n_j$ pour $i \neq j$ (les φ_i étant des fonctions quelconques de x). Formons les $2s$ nombres entiers positifs

$$M_i = m_i + n_i, \qquad N_i = n_i.$$

Traçons dans le plan deux axes, ceux des M_i et des N_i, et marquons les points (M_i, N_i) ayant soin d'inscrire à côté de chacun d'eux son index i. Construisons le contour polygonal Π concave vers OM, fermé par l'axe OM et par deux droites parallèles à ON, et contenant dans son intérieur, en ses sommets et sur ces côtés tous les points (M_i, N_i).

Pour que les zéros de y ne varient pas avec la constante d'intégration, il faut et il suffit que le contour Π *n'ait aucun côté à coefficient angulaire positif.* Les zéros coïncident alors avec des zéros ou des infinis des φ_i.

Le même contour fournit les conditions d'invariabilité des infinis de y :

Pour que les infinis de y ne varient pas avec la constante d'intégration, il faut et il suffit que le contour Π *n'ait aucun côté à coefficient angulaire négatif.* Les infinis coïncident alors avec les zéros ou des infinis des φ_i.

L'équation étant écrite sous la forme (16), en désignant par ν_i le degré de f_i en y, cette dernière condition devient

$$\nu_i - \nu_0 \leqq i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Ces théorèmes embrassent à la fois les zéros et les infinis réels et imaginaires. En les combinant avec des règles élémentaires de la théorie des équations algébriques, on arrive à divers résultats concernant les zéros et les infinis *réels* des courbes intégrales. Ainsi [62] :

Supposons que le contour Π rattaché à $F = 0$ n'ait aucun côté à coefficient angulaire compris entre 0 et 1, et désignons par $\Phi(x, y')$ l'ensemble des termes dans F ne contenant pas y. *Dans tout intervalle réel (a, b), dans lequel la courbe $\Phi(x, y) = 0$ n'a aucune branche réelle, les zéros de y sont fixes.*

Il en est de même si, la même condition du contour Π étant remplie, et l'équation $F = 0$ étant de degré pair en y' et mise sous la forme (16), tous les $f_k(x, 0)$ ayant les indices d'une certaine parité sont nuls et tous les autres, de parité contraire, différents de zéro et de même signe lorsque x varie dans l'intervalle (a, b).

Il en est aussi de même pour les équations

$$P(x, y)y'^2 + Q(x, y)y' + S(x, y) = 0$$

satisfaisant aux conditions suivantes : 1° en désignant par m, n, p les plus petits exposants de y dans les polynomes P, Q, S on a $p \leqq n \leqq m$; 2° l'intervalle (a, b) est compris dans la région négative de la courbe $Q^2 - 4PS = 0$ [62].

7. **Invariabilité d'autres éléments.** — Par des changements de variables appropriés, en y appliquant les conditions précédemment indiquées, on obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour l'invariabilité d'autres éléments d'allure de la courbe intégrale. Tels seraient par exemple : *les points d'intersection de* y *avec une courbe* C *donnée; les directions asymptotiques et les asymptotes de* y; *les maxima*, *les minima*, *les points d'inflexion*, etc.

Ainsi, le changement $x = \frac{1}{\xi}$ ramènerait les conditions d'invariabilité des valeurs asymptotiques de y à celles des zéros de l'équation ainsi obtenue. Dans le cas, par exemple, où l'équation donnée est algébrique en x, y, y', écrivons l'équation en ξ sous la forme

$$\sum_{k=0}^{k=m} \varphi_k(y, \xi)\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^{m-k} = 0,$$

où les φ_k sont des polynomes en ξ à coefficients algebriques en x. *Pour que les valeurs asymptotiques de* y *soient fixes, il faut et il suffit qu'après avoir supprimé les facteurs communs aux* φ_k, *chaque* φ_k (*sauf* φ_0) *contient en facteur* ξ^h *où* $h \geqq k$. Cette condition étant remplie, toutes les fois que ces valeurs soit finies et déterminées, elles sont racines de l'équation algébrique $\varphi_0(y, 0) = 0$ [61].

Dans certains cas où les coefficients de y et y' sont des fonctions quelconques, algébriques ou transcendantes, on reconnaît l'invariabilité des valeurs asymptotiques par d'autres procédés. Dans le cas, par exemple, de l'équation de Riccati, écrite sous la forme

$$y' + y^2 + f_1 y + f_2 = 0,$$

où les fonctions f_1 et f_2 tendent vers des limites finies et déterminées a_1 et a_2 pour x tendant vers l'infini par des valeurs positives croissantes, on a à distinguer les trois cas suivants [74] :

1° Si $a_1^2 - 4a_2 > 0$, y tend, en général, vers la plus petite de deux valeurs

$$-\frac{1}{2}\left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right) \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}\left(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right),$$

mais pour une intégrale particulière la limite peut être la plus grande de ces deux valeurs.

2° Si $a_1^2 - 4a_2 = 0$, y tend vers la limite $-\frac{a_1}{2}$.

3° Si $a_1^2 - 4a_2 < 0$, y ne tend vers aucune limite finie et déterminée; toute intégrale y oscille une infinité de fois entre $-\infty$ et $+\infty$, avec passage brusque de $-\infty$ à $+\infty$, à la façon de $-\tan x$.

Envisageons, dans ce même ordre d'idées, le problème : *reconnaître si pour une équation différentielle algébrique du premier ordre donnée* $F = 0$ *il existe dans le plan* (x, y) *des courbes fixes* Γ *que les courbes intégrales de* $F = 0$ *ne rencontrent qu'en des points fixes, et trouver ces courbes dans le cas où elles existent.* La solution en est fournie par le théorème suivant [65] :

Soit $F = 0$ l'équation donnée, où F est un polynome irréductible en y, y' à coefficients fonctions quelconques de x, et désignons par n le plus haut exposant de F par rapport à y'.

Pour que $F = 0$ *admette des courbes* Γ, *il faut et il suffit que toutes les équations*

$$\frac{\partial^{m_i+n_i} F}{\partial y^{m_i} \partial y'^{n_i}} = 0$$

(où m_i et n_i sont les entiers positifs tels que $m_i + n_i < n$) aient au moins une solution commune. Si $y = u(x)$ est une telle solution, elle représentera une courbe Γ *cherchée.* Les points de rencontre de cette courbe avec les courbes intégrales de $F = 0$ ne peuvent être que : 1° soit les infinis des coefficients de $F = 0$; 2° soit les zéros de $f[x, u(x)]$, où $f(x, y)$ désigne le coefficient de y'^n dans F.

D'ailleurs, l'existence des courbes Γ pour une équation différentielle donnée en facilite considérablement l'étude des courbes intégrales. Dans certains cas elle simplifie la détermination des intégrales particulières d'une nature analytique donnée. Toute équation algébrique du premier ordre à points critiques fixes, admettant des courbes Γ, s'intègre soit algébriquement, soit par une ou deux quadratures [65].

Il y a lieu de remarquer que les conditions précédentes d'invariabilité des éléments d'allure ne s'étendent pas aux équations algébriques d'ordre supérieur. La raison principale en est dans le fait que pour ces équations les singularités transcendantes de l'intégrale peuvent varier avec les constantes d'intégration; l'intégrale, ainsi que ses dérivées, peuvent être indéterminées pour les valeurs quelconques de x, ce qui n'arrive pas dans le cas du premier ordre.

CHAPITRE IV.

ÉLÉMENTS VARIANT AVEC LES CONSTANTES D'INTÉGRATION.

8. **Équations du premier ordre.** — Si les conditions d'invariabilité, indiquées dans ce qui précède, ne sont pas remplies, les éléments correspondants de la courbe intégrale varient avec la constante d'intégration.

Ainsi, *pour que les zéros de l'intégrale y de* $F = 0$ *varient avec la constante, il faut et il suffit que le contour* Π *rattaché à* F *ait au moins un côté à coefficient angulaire positif.* La valeur de ce coefficient représente alors l'ordre d'un zéro mobile, et à chaque côté du contour à coefficient angulaire positif correspond un tel zéro d'ordre égal à ce coefficient.

De même, *pour que les infinis de y varient avec la constante, il faut et il suffit que le contour* Π *ait au moins un côté à coefficient angulaire négatif.* A chaque côté à coefficient angulaire négatif correspond un tel infini d'ordre égal à coefficient [60].

On ramène, par le changement de variables, à ces théorèmes le cas de variabilité d'autres éléments de la courbe intégrale.

En combinant ces théorèmes avec des règles élémentaires de la théorie des équations algébriques, on arrive à diverses propositions sur les zéros et les infinis *réels mobiles* de la courbe intégrale y dans tout intervalle (a, b) dans lequel y est une fonction *uniforme* de x [62].

Ainsi, l'équation différentielle étant écrite sous la forme (16), si dans (a, b) toutes les fonctions $f_i(x, 0)$ non nulles et dont les indices sont d'une même parité ont constamment un même signe, avec $f_m(x, 0) \neq 0$, *deux zéros consécutifs d'une intégrale particulière quelconque y comprennent au moins un pôle de la même intégrale;* une intégrale holomorphe dans (a, b) *ne peut s'annuler plus d'une fois dans cet intervalle.*

Supposons que, ces mêmes conditions étant remplies, le contour Π n'ait aucun côté à coefficient angulaire entier négatif; les infinis $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de y seront alors fixes et connus à l'avance. En désignant alors par k le nombre des valeurs réelles a_i compris dans (a, b), *l'intégrale y ne peut s'annuler plus de $k+1$ fois dans* (a, b).

Dans le cas, par exemple, de l'équation

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

(où P et Q sont deux polynomes en x et y de degrés respectifs m et n en y), la condition pour que Π n'ait pas de côtés à coefficient angulaire entier négatif est que $m \neq n+2$. Supposons, pour fixer les idées, que $m > n+2$. Les zéros simples de y sont alors mobiles, mais les zéros multiples β_i sont fixes et se trouvent parmi les zéros α_i de $P(x, 0)$, qui ne peut être identiquement nulle. Soit (a, b) un intervalle ne contenant aucune valeur α_i et β_i (fixes et connues), et tel que la fonction rationnelle $\frac{P(x, 0)}{Q(x, 0)}$ garde un signe invariable lorsque x varie de a à b. *Aucune intégrale y, uniforme dans (a, b), ne peut s'annuler plus d'une fois entre a et b.* Si (a, b) comprend k valeurs α_i, sans comprendre aucune valeur β_i et sans changer de signe entre a et b, *y s'annule au plus $k+1$ fois dans* (a, b) [62].

L'équation de Riccati

$$(18) \qquad y' + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0,$$

par sa forme spéciale et par ses rapports étroits avec les équations linéaires homogènes du second ordre, permet une étude plus approfondie des zéros et des infinis réels de ses courbes intégrales. Supposons les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ méromorphes dans l'intervalle (a, b);

formons les deux fonctions

$$\varpi = \varphi_1 \varphi_3 - \frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1'^2}{2\varphi_1}\right) - \left(\frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1'^2}{2\varphi_1}\right)^2,$$

$$\chi(x) = \frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1}{2}.$$

Soit (a, b) un intervalle de x dans lequel $\bar{\omega}(x)$ reste constamment positive et $\chi(x)$ constamment décroissante. Les zéros et les infinis de y, compris dans (a, b), se séparent mutuellement : *l'intégrale s'annule et devient infinie alternativement pour les valeurs croissantes de x*. De plus, si φ_1 est constamment positive dans (a, b), la courbe intégrale oscille entre $+\infty$ et $-\infty$ en décroissant toujours et avec passage brusque de $-\infty$ à $+\infty$; si φ_1 est négative, la courbe oscille de $+\infty$ à $-\infty$ en croissant constamment et avec passage brusque de $+\infty$ à $-\infty$.

D'ailleurs, quels que soient le signe de $\bar{\omega}(x)$ et le sens de variation de $\chi(x)$ dans (a, b), *deux infinis consécutifs quelconques de y compris dans (a, b), comprennent au moins un, et en général un nombre impair de zéros de y.*

Parmi les infinis de y, il peut y en avoir de fixes : ils coïncident soit avec les zéros de φ_1, soit avec les infinis de φ_1, φ_2, φ_3. Les infinis mobiles sont les zéros de l'intégrale u de l'équation

$$u'' + \varpi(x) u = 0$$

qui seront l'objet du Chapitre V. Fait analogue pour les zéros de y qui sont les infinis des intégrales de l'équation en $z = \frac{1}{y}$.

9. **Équations d'ordre supérieur.** — Dans le cas des équations d'ordre supérieur, il est possible d'avoir des conditions *suffisantes* pour l'existence de zéros ou des infinis de la courbe intégrale, *variables avec les constantes d'intégration et d'un ordre réel fixe*. Ces conditions sont plus complexes que pour le cas du premier ordre, mais il est toujours possible de vérifier sur l'équation différentielle $F = 0$ elle-même si elles sont remplies ou non. Cette vérification se réduit à la construction d'un certain contour polygonal Π, analogue à celui du cas du premier ordre et à la détermination des racines d'une équation algébrique rattachée à F. Les coefficients

angulaires des côtés de Π et certaines racines de cette équation algébrique représentent les seuls ordres possibles des zéros et des infinis mobiles de l'intégrale (toutefois, on ne sait pas alors en général s'il n'existe pas des points x mobiles où y s'annule, y' étant indéterminée) [60].

Dans des cas généraux des équations de tout ordre, il est possible d'étudier de près les zéros mobiles des courbes intégrales, l'effet de variation des coefficients ou des paramètres sur leur déplacement le long de l'axe de la variable indépendante, leur nombre et leur distribution dans un intervalle réel donné, etc.

De tels cas seront considérés dans le Chapitre qui suit.

TROISIÈME PARTIE.

INTÉGRALES OSCILLANTES.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS LINÉAIRES HOMOGÈNES DU SECOND ORDRE.

10. Recherches de Sturm et Liouville [52, 83, 84, 88]. — Les équations

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = 0, \tag{19}$$

où A, B, C sont des fonctions réelles de la variable réelle x, jouissent de propriétés curieuses qui ont été révélées pour la première fois par Sturm dans son célèbre Mémoire sur les équations linéaires du second ordre. Ces propriétés découlent de certaines relations entre l'intégrale générale y et une intégrale particulière y_1 de l'équation, dont les principales sont les suivantes :

Soient y_1 une intégrale particulière de (19), (a, b) un intervalle de x dans lequel la fonction $\frac{B}{A}$ reste finie ; on aura d'abord

$$y\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy}{dx} = e^{-\int \frac{B}{A}dx}.$$

Il en résulte immédiatement que : 1° dans (a, b) les zéros de toute intégrale réelle *sont simples;* 2° avec les restrictions concernant la continuité des fonctions A, B, C et des integrales, *deux intégrales réelles indépendantes y_1 et y_2 ne peuvent pas s'annuler en même temps, et leurs zéros se séparent mutuellement.*

En posant

$$K = e^{\int \frac{B}{A} dx}, \qquad G = -\frac{C}{A} e^{\int \frac{B}{A} dx},$$

l'équation (19) se ramène à la forme dite *canonique*

$$\frac{d}{dx}(Ku') - Gu = 0, \qquad u = y, \qquad y' = \frac{du}{dx}. \tag{20}$$

Considérons, dans le cas de l'équation (20), des fonctions de la forme

$$\Phi = \varphi_1 u - \varphi_2 K u',$$

φ_1, φ_2 étant deux fonctions réelles données de x telles que la fonction

$$\{\varphi_1 \varphi_2\} = \varphi_1' \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2' + \frac{\varphi_1'^2}{K} - G\varphi_2^2$$

ne soit pas identiquement nulle dans (a, b). Prenons deux telles fonctions Φ_1 et Φ_2 formées, la première avec une solution réelle u_1, la deuxième avec une solution réelle u_2 indépendante de u_1. La proposition 2° s'étend aux zéros réels de Φ_1 et Φ_2 : *entre deux zéros consécutifs de Φ_1, il y en a un et un seul de Φ_2 et réciproquement.*

De même, prenons quatre fonctions réelles φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 de l'espèce précédente telles que $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ ne soit pas identiquement nulle dans (a, b) et formons

$$\Phi = \varphi_1 u - \varphi_2 K u', \qquad \Psi = \psi_1 u - \psi_2 K u'.$$

Entre deux zéros consécutifs de Φ il y a un zéro et un seul de Ψ et réciproquement.

Ces propositions, bien entendu, n'ont pas de sens si ni Φ_1, ni Φ_2 (resp. ni Φ, ni Ψ) ont plus d'un zéro. Cette circonstance se présente pour Φ et Ψ lorsque, aux conditions

$$\{\varphi_1 \varphi_2\} \neq 0, \qquad \{\psi_1 \psi_2\} \neq 0, \qquad \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 \neq 0,$$

on ajoute la condition que $\{\varphi_1 \varphi_2\}$ et $\{\psi_1 \psi_2\}$ soient de signes contraires : dans ces conditions, ni Φ, ni Ψ ne peuvent s'annuler plus d'une fois dans (a, b), et de plus, si l'une de ces fonctions s'annule une fois, l'autre ne s'annule pas. On en conclut que *le produit* $\Phi\Psi$ *n'a qu'un zéro dans* (a, b).

Si l'on prend $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 0$, on a $\Psi = u$, et la proposition précédente conduit à celle-ci : si dans (a, b), on a $K > 0$, et si l'on prend pour φ une fonction à dérivée continue telle que

$$\varphi' - \frac{\varphi^2}{K} - G < 0 \qquad \text{dans } (a, b),$$

toute solution u de (20), ainsi que la fonction $\varphi u - K u'$, a au plus un zéro dans (a, b). L'équation (20) est alors dite *non oscillatoire*.

En donnant à φ des formes particulières, on a diverses conditions suffisantes pour qu'une équation (20) soit non oscillatoire. Citons, par exemple, la condition $G > 0$ qu'on obtient en faisant $\varphi = 0$.

Étudions l'effet que produit sur les zéros un changement des fonctions G ou K. Soient u_1 une solution de

$$\frac{d}{dx}(K u_1') - G_1 u_1 = 0, \tag{21}$$

et u_2 une solution de

$$\frac{d}{dx}(K u_2') - G_2 u_2 = 0, \tag{22}$$

où $G_2 < G_1$. De ces deux formules, on tire la formule

$$[K(u_2 u_1' - u_1 u_2')]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (G_2 - G_1) u_1 u_2 \, dx, \tag{23}$$

donnée par Sturm et qui peut être considérée comme un cas particulier de la formule de Green. On en conclut ce qui suit.

Supposons que u_1 ait plusieurs zéros dans (a, b), et soient x_1 et x_2 deux de ces zéros consécutifs. Dire que u_2 *oscille plus vite que* u_1, c'est dire que toute intégrale u_2 de (22) a au moins un zéro entre x_1 et x_2, distinct de x_1, x_2. Effectivement, u_2 *oscille plus vite que* u_1 ; *si l'on considère une solution* u_1 *de* (21) *et une solution de* u_2 *de* (22), *qui s'annulent toutes les deux en* x, *le zéro de* u_2 *qui suit* x *se présentera avant le zéro suivant de* u_1, en sorte que la demi-oscillation de u_2 est plus rapide que celle de u_1.

Supposons maintenant que K et G changent à la fois. Considérons les deux équations

$$(24) \qquad \frac{d}{dx}(K_1 u'_1) - G_1 u_1 = 0, \qquad \frac{d}{dx}(K_2 u'_2) - G_2 u_2 = 0,$$

où nous supposerons

$$G_1 < G_2, \qquad K_1 < K_2.$$

En combinant les deux équations (24), on arrive d'abord à une formule de Sturm modifiée par M. Picone. La formule de Sturm est

$$(25) \qquad \frac{d}{dx}(K_1 u_2 u'_1 - K_2 u_1 u'_2) = (G_1 - G_2) u_1 u_2 + (K_1 - K_2) u'_1 u'_2,$$

et elle généralise la formule (23) pour $K_1 = K_2$. M. Picone a établi l'identité

$$(26) \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{u_1}{u_2}(K_1 u_2 u'_1 - K_2 u_1 u'_2)\right] = (G_1 - G_2) u_1^2 + (K_1 - K_2) u'^2_1 + K_2\left(u'_1 - u'_2 \frac{u_1}{u_2}\right)^2,$$

applicable en tout point où $u_2 \neq 0$, et encore si u_2 s'annule en x_1 et x_2 (qui sont deux zéros consécutifs de u_1) sous la condition qu'en un tel point u_1 s'annule aussi. La formule s'étend aussi au cas où l'on a

$$G_2 \leqq G_1, \qquad K_2 \leqq K_1,$$

à condition que l'égalité n'ait pas lieu en tous les points de l'intervalle (x_1, x_2), et que l'identité $G_1 \equiv G_2 \equiv 0$ ne soit vérifiée dans aucune partie de l'intervalle considéré.

De ces formules, on tire directement le résultat suivant : *la diminution de* G *et de* K *dans l'équation* (20) *a pour effet d'augmenter la rapidité d'oscillations de u.*

Ce théorème permet de comparer les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre, dont les coefficients ont entre eux des relations simples. En particulier, on peut en déduire des conditions pour qu'une équation soit *non oscillatoire*.

Soit, en effet, l'équation (20) où l'on supposera $K > 0$ dans (a, b). Posons

$$B = \min K, \qquad N = \min G,$$

dans l'intervalle fermé (a, b), et considérons l'équation

$$(27) \qquad \frac{d}{dx}(B u') - N u = 0 \qquad \text{ou} \qquad u'' - \frac{N}{B} u = 0.$$

Si $N > 0$, l'équation admet comme solution $u = e^{x\sqrt{\frac{N}{B}}}$; donc l'équation (20) n'a pas des solutions s'annulant deux fois. Il en est de même si $N = 0$, car alors (27) a une solution linéaire en x. *Si donc* $G \geqq 0$ *dans* (a, b), *l'équation* (20) *est non oscillatoire dans cet intervalle.*

Si $N < 0$, on a les deux solutions de (27)

$$u = \sin x\sqrt{-\frac{N}{B}}, \qquad u = \cos x\sqrt{-\frac{N}{B}}.$$

Elles oscillent, mais on peut former une solution de (27) qui soit différente de zéro dans un intervalle (a', b') compris dans (a, b), à condition que (a', b') soit inférieur à

$$\pi\sqrt{-\frac{B}{N}}.$$

Si donc, on a

$$-\frac{N}{B} < \left(\frac{\pi}{b' - a'}\right)^2,$$

l'équation (20) *est non oscillatoire dans* (a', b').

On a, d'une manière analogue, une *condition suffisante d'oscillation dans* (a', b') : si l'on pose

$$A = \max K, \qquad M = \max G$$

dans l'intervalle fermé (a, b), cette condition s'écrit

$$-\frac{M}{A} \geqq \left(\frac{\pi}{b' - a'}\right)^2,$$

et elle peut même s'étendre : *si*

$$-\frac{M}{A} \geqq \left(\frac{k\pi}{b' - a'}\right)^2,$$

toute solution u de (20) *a au moins k zéros dans l'intervalle fermé* (a', b').

Signalons un cas spécial étudié par Sturm et Liouville : c'est celui de l'équation (20) où

$$G = l - \lambda g,$$

K, g, l étant des fonctions de x continues dans (a, b), avec la condition $K > 0$, $g > 0$, $l > 0$ et λ étant un paramètre. Cette équation se rencontre dans l'étude de la propagation de la chaleur dans une barre hétérogène ou des vibrations simples des cordes hétérogènes. Si λ varie, K reste invariable, mais G varie; si λ augmente, G diminue, les intégrales u oscillent plus rapidement.

Un autre cas étudié depuis Sturm et Liouville par divers géomètres et par des méthodes différentes, est celui où $K > 0$, $l \geqq 0$, mais où g change de signe dans (a', b'). La conclusion est la même que dans le cas précédent.

11. Théorèmes de comparaison de Sturm et leurs conséquences [52, 83, 84, 88]. — Les résultats généraux qui précèdent conduisent, avec l'aide de la formule de M. Picone, aux *théorèmes de comparaison de Sturm* se rattachant au problème : *Étudier comment varient les zéros de l'intégrale u de l'équation* (20) *quand* K *et* G *changent*. Considérons les deux équations

$$(28) \qquad \frac{d}{dx}(K_1 u') - G_1 u = 0 \qquad \text{avec les conditions} \begin{cases} u(a) = \alpha_1, \\ u'(a) = \alpha'_1; \end{cases}$$

$$(29) \qquad \frac{d}{dx}(K_2 u') - G_2 u = 0 \qquad \text{avec les conditions} \begin{cases} u(a) = \alpha_2, \\ u'(a) = \alpha'_2, \end{cases}$$

où nous supposerons $K_1 \geqq K_2$, $G_2 \geqq G_1$; afin que leurs solutions ne soient pas identiquement nulles, nous supposerons

$$|\alpha_1| + |\alpha'_1| \neq 0, \qquad |\alpha_2| + |\alpha'_2| \neq 0.$$

De plus, l'égalité $K_1 = K_2$, $G_1 = G_2$ n'a pas lieu en tout point d'une partie de l'intervalle (a, b) et l'identité $G_1 \equiv G_2 \equiv 0$ ne doit avoir lieu dans aucune partie de cet intervalle. Enfin, sur les α et α', on fera l'hypothèse suivante : si $\alpha_1 \neq 0$, alors α_2 devra être $\neq 0$ et tel que

$$\frac{\alpha'_1}{\alpha_1} K_1(a) \geqq \frac{\alpha'_2}{\alpha_2} K_2(a),$$

c'est-à-dire que $\frac{\alpha'}{\alpha} K(a)$ diminue en passant de l'équation (28) à (29).

Sous ces hypothèses, on établit les deux *théorèmes de comparaison* qui suivent.

Premier théorème. — *Si la solution u_1 de* (28) *a un certain* *nombre de zéros distincts de a dans l'intervalle* (a, b), *la solution* u_2 *de* (29) *aura au moins autant de zéros dans cet intervalle et en numérotant* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *les zéros de* u_1 *dans l'ordre de grandeur croissante*, $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$ *ceux de* u_2, *on aura* $x'_k < x_k$ *pour toute valeur de k correspondant à un zéro de* u_1 *et* u_2.

SECOND THÉORÈME. — *Dans le cas où les solutions* u_1 *et* u_2 *ont le même nombre de zéros dans* (a, b) *et si* $u_1(b) \neq 0$, $u_2(b) \neq 0$, *on aura*

$$\frac{u'_1(b)}{u_1(b)} K_1(b) > \frac{u'_2(b)}{u_2(b)} K_2(b).$$

Nous indiquerons quelques conséquences importantes de ces théorèmes.

Considérons l'équation

$$(30) \qquad \frac{d}{dx}(Ku') - Gu = 0 \quad \text{avec les conditions} \begin{cases} u(a) = \alpha, \\ u'(\alpha) = \alpha', \\ |\alpha| + |\alpha'| \neq 0. \end{cases}$$

Supposons que λ variant dans un intervalle (c_1, c_2), où l'on peut avoir $c_1 = -\infty$, $c_2 = +\infty$), K et G soient des fonctions continues de x et de λ. Alors la solution u de (30) et sa dérivée u' sont des fonctions continues de x et λ. *Les zéros de u seront aussi des fonctions continues de* λ, *sauf peut-être ceux qui se trouvent à l'une ou l'autre extrémité de* (a, b).

Supposons, de plus, que λ croissant de c_1 à c_2, K et G décroissent ou restent constants pour chaque valeur de x. Supposons aussi que α est, ou bien identiquement zéro, ou bien qu'il ne s'évanouit nulle part dans (c_1, c_2) et, dans ce dernier cas, que $\frac{\alpha'}{\alpha}K$ décroît ou reste constant pour chaque valeur de λ.

On déduit alors des théorèmes de comparaison que *les zéros de* $u(x)$ *vont en décroissant et, d'autre part, que* $\frac{u'(b)}{u(b)}K(b)$ *va en décroissant tant que le nombre de zéros dans* (a, b) *restera constant.*

Si l'on ajoute aux hypothèses précédentes la suivante :

$$\lim\left(-\frac{M}{A}\right) = +\infty \qquad \text{pour } \lambda = c_2,$$

les faits suivants se présenteront. Nous avons vu que si

$$-\frac{M}{A} \geqq \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2$$

pour une certaine valeur de λ (M et A dépendent de λ), l'intégrale u a au moins k zéros dans (a, b). Il s'ensuit que si λ est assez voisin de c_2, la solution aura autant de zéros qu'on voudra dans (a, b). Faisons alors varier λ de c_1 à c_2. Si λ part de c_1 [ou si (c_1, c_2) est un intervalle ouvert, d'une valeur arbitrairement voisine de c_1], u aura un nombre m de zéros entre a et b, les extrémités a et b étant exclues. Si λ croît jusqu'a c_2, ce nombre doit augmenter indéfiniment; donc, pour une certaine valeur μ_m de λ la solution u acquiert un nouveau zéro en b, zéro qui entrera dans (a, b) pour $\lambda > u_m$; un nouveau zéro se présentera en b pour une valeur $\mu_{m+1} > \mu_m$ de λ, et ainsi de suite. Nous aurons ainsi une suite de valeurs $\mu_m, \mu_{m+1}, \ldots$ ayant c_2 comme point limite; λ étant entre μ_m et μ_{m+1}, u aura $m+1$ zéros dans (a, b); elle en aura $m+2$ si λ est entre μ_{m+1} et μ_{m+2}, et ainsi de suite.

De plus, lorsque λ varie entre μ_i et μ_{i+1}, le rapport $\frac{u'(b)}{u(b)}K(b)$, qui est toujours décroissant, doit nécessairement décroître de $+\infty$ à $-\infty$, puisque, en μ_i et μ_{i+1} on a $u(b) = 0$ sans que $u'(b) = 0$.

Ceci étant, considérons l'équation

$$(31)\quad \frac{d}{dx}(Ku') - Gu = 0 \qquad \text{avec les conditions} \left\{ \begin{array}{l} \alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0, \\ \beta' u(b) + \beta u'(b) = 0, \end{array} \right.$$

où β et β' sont des fonctions de λ telles que : ou bien $\beta \neq 0$, ou bien β ne s'évanouit nulle part et $\frac{\beta'}{\beta}K(b)$ est une fonction décroissante de x. Appelons *nombres caractéristiques* les valeurs de λ pour lesquelles les trois équations (31) sont compatibles. On aura le résultat suivant :

Il y a une infinité de nombres caractéristiques dans l'intervalle (c_1, c_2); *le premier de ces nombres peut être entre* c_1 *et* μ_m, *mais on peut certainement affirmer qu'il y en a un exactement dans chaque intervalle*

$$(\mu_m, \mu_{m+1}), \quad (\mu_{m+1}, \mu_{m+2}), \quad \ldots.$$

D'une manière générale, désignons par λ_{m+1} la valeur caractéristique comprise entre μ_m et μ_{m+1}; par λ_{m+2}, la valeur caractéristique comprise entre μ_{m+1} et μ_{m+2}, ..., et s'il y a une valeur caractéris-

-tique entre c_1 et μ_m, nous la désignerons par λ_m. De même, désignons par u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, ... l'intégrale de (31) pour les valeurs caractéristiques λ_m, λ_{m+1}, ...; nous appellerons les u_i *fonctions caractéristiques* de (31). Ces fonctions diffèrent par le nombre de leurs zéros dans (a, b). L'intégrale u_m, si elle existe, aura exactement m zéros dans (a, b), u_{m+1} en aura $m+1$, et ainsi de suite. Ce résultat constitue un des *théorèmes d'oscillation de Sturm* qu'on peut énoncer ainsi :

THÉORÈME. — *Étant donné un entier quelconque $k > m$, il existe une valeur de λ et une seule pour laquelle l'équation* (31) *admet une intégrale u ayant exactement k zéros dans l'intervalle (a, b).*

On peut aller plus loin avec des hypothèses plus précises sur K et G. Ainsi, si aux hypothèses déjà faites, on ajoute la suivante

$$\lim\left(-\frac{N}{B}\right) = -\infty \qquad \text{pour } \lambda = c_1,$$

les théorèmes de comparaison de Sturm conduisent à la conclusion que :

Il y a, pour l'équation (31) *et l'ensemble d'hypothèses faites, une infinité de nombres caractéristiques dans (c_1, c_2). Si λ_0, λ_1, λ_2, ... sont ces nombres rangés par ordre de grandeur croissante, les fonctions caractéristiques correspondantes u_0, u_1, u_2, ... ont dans (a, b) un nombre de zéros exactement égal à leur indice.*

Existe-t-il des caractéristiques imaginaires? Pour cela, il serait indispensable de supposer que les coefficients de l'équation (31) soient définis pour les valeurs imaginaires de λ. Nous nous bornerons ici au cas étudié par Sturm et par Poisson : c'est le cas où la fonction G est de la forme $\lambda g - l$ et où les fonctions K, g, l, α, α', β, β' sont indépendantes du paramètre λ, avec les conditions $|\alpha| + |\alpha'| \neq 0$, $|\beta| + |\beta'| \neq 0$. La réponse à la question posée est négative : *toutes les valeurs caractéristiques sont réelles.*

12. Applications [83, 67, 68]. — Nous dirons qu'une fonction y est *régulière* dans l'intervalle (a, b), si dans cet intervalle elle et ses deux premières dérivées sont réelles, finies et continues. Les propositions précédentes s'appliquent habituellement aux intégrales régulières de l'équation

$$y'' - f(x)y = 0 \tag{32}$$

(f étant aussi régulière) sous la forme de règles suivantes.

Première règle. — Supposons que $f(x)$ soit dans (a, b) *inférieurement limitée* par une fonction $\lambda(x)$ finie et continue dans cet intervalle; soit u une intégrale quelconque de l'équation

$$u'' - \lambda(x)u = 0. \tag{33}$$

Deux zéros simples consécutifs de u, compris dans (a, b), comprennent au plus un zéro de y; deux zéros simples consécutifs de y comprennent au moins un zéro de u. Lorsque y et u ont un zéro commun $x = \alpha$, la variable x, en croissant à partir de α, atteindra d'abord un zéro de u, et ensuite un zéro de y.

Deuxième règle. — Supposons que $f(x)$ soit dans (a, b) *supérieurement limitée* par une fonction $\mu(x)$ finie et continue dans cet intervalle; soit v une intégrale quelconque de l'équation

$$v'' - \mu(x)v = 0. \tag{34}$$

Deux zéros simples consécutifs de v, compris dans (a, b), comprennent au moins un zéro de y; deux zéros simples consécutifs de y comprennent au plus un zéro de v. Lorsque y et v ont un zéro commun $x = \alpha$, la variable x, en croissant à partir de α, atteindra d'abord un zéro de y, et ensuite un zéro de v.

En prenant pour équations de comparaison (33) et (34) diverses équations dont on connaît la distribution des zéros dans un intervalle (a, b), on aura diverses propositions concernant la distribution des zéros des intégrales y de (32) dans (a, b). Ainsi, par exemple :

1° l'équation (33) où

$$\lambda = \text{const. posit.} = r^2, \qquad u = e^{rx}$$

conduit à la proposition : *si $f(x)$ est dans (a, b) inférieurement limitée par une constante positive, y ne s'annule pas plus d'une fois dans cet intervalle.*

2° L'équation (34) où

$$\mu(x) = \text{const. négat.} = -r^2, \qquad v = \sin rx$$

conduit à la proposition : *si $f(x)$ est dans (a, b) supérieurement limitée par une constante négative, y s'annule dans cet intervalle au moins autant de fois qu'il y a d'unités entières dans le nombre* $\frac{(b-a)r}{\pi}$.

3° La même équation (34) que dans 2° conduit aussi à la proposition : *si $f(x)$ est dans (a, b) supérieurement limitée par une constante négative $-r^2$, y s'annule dans cet intervalle au plus autant de fois qu'il y a d'unités entières dans le nombre*

$$1 + \frac{(b-a)r}{\pi}.$$

4° Les équations (33) et (34) où, p et p' étant deux constantes positives plus grandes que $\frac{1}{4}$, on prendrait

$$\lambda(x) = -\frac{p}{x^2}, \qquad u = \sqrt{x}\sin\left(\sqrt{4p-1}\log x\right),$$

$$\mu(x) = -\frac{p'}{x^2}, \qquad u = \sqrt{x}\sin\left(\sqrt{4p'-1}\log x\right)$$

conduiraient à la proposition : *si $f(x)$ est, dans (a, b), limitée supérieurement par $-\frac{p}{x^2}$ et inférieurement par $-\frac{p'}{x^2}$, le nombre des zéros de y dans (a, b) est compris entre les deux nombres*

$$\frac{\sqrt{4p-1}}{2\pi}\log\frac{b}{a} \qquad \textit{et} \qquad 1 + \frac{\sqrt{4p'-1}}{2\pi}\log\frac{b}{a}.$$

M. Kneser [49] à appliqué de telles règles de comparaison à l'étude des intégrales y de (32) *pour les grandes valeurs de x*. Si $f(x)$, supposée finie et continue pour les grandes valeurs de x, tend pour $x = +\infty$ vers une limite *positive*, toute y est oscillante. Si $f(x)$ reste négative et tend vers une limite *négative*, l'équation n'a aucune intégrale oscillante.

Supposons que $f(x)$ tend vers zéro pour $x = +\infty$, et posons

$$\rho = \lim[x^2 f(x)] \qquad \text{pour } x = \infty.$$

Alors : 1° *si $\rho > \frac{1}{4}$, toute intégrale y est oscillante;* 2° *si $\rho < \frac{1}{4}$,* *il n'y à aucune intégrale y oscillante;* 3° *si* $\rho = \frac{1}{4}$ *mais* $f(x) < \frac{1}{4x^2}$ *pour les grandes valeurs de* x, *il n'y a aucune intégrale oscillante pour ces valeurs de* x.

Ces propositions permettent aussi d'étudier la manière dont se comporte une intégrale y au voisinage d'un point singulier réel $x = x_0$ de $f(x)$. Si l'on introduit la nouvelle variable $\pm t = \frac{1}{x - x_0}$, il suffit d'appliquer ces propositions aux grandes valeurs de t [49].

13. **Théorème d'oscillation de Klein** [47, 48, 88]. — Diverses extensions des résultats precédents ont été faites par l'étude de problèmes dépassant ceux de Sturm. Nous en indiquerons sommairement celle due à Klein.

Étudiant les travaux de Lamé sur la distribution de la chaleur dans un ellipsoïde, Klein a été conduit à étendre le problème de Sturm de la manière suivante.

Dans ce qui précède nous avons envisagé l'équation

$$(35)\quad \frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0 \qquad \text{avec les conditions} \left\{ \begin{array}{l} \alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0, \\ \beta' u(b) - \beta u'(b) = 0, \end{array} \right.$$

où K ne contient que la variable x, G dépend de x et d'un paramètre λ; α, α', β, β' sont des fonctions de λ. Supposons que α, α', β, β' soient des constantes indépendantes de λ et envisageons, au lieu d'un intervalle (a, b) de variation de x, un nombre quelconque de tels intervalles (a_0, b_0), (a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) se suivant sur l'axe des x dans l'ordre des indices croissants et n'ayant aucun point commun deux à deux (pas même les extrémités). Considérons en outre $n + 1$ paramètres λ_0, λ_1, ..., λ_n dont dépendra la fonction G, chaque paramètre variant dans un intervalle qui lui est propre. Pour chaque segment (a_i, b_i) imposons des conditions telles que

$$(36)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'_i u(a_i) - \alpha_i u'(a_i) = 0 \\ \beta'_i u(b_i) - \beta_i\, u(b_i) = 0 \end{array} \right. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Le problème de Klein est le suivant : Peut-on déterminer λ_0, λ_1, ..., λ_n de façon que l'équation (30) admette $n + 1$ solutions u_0, u_1, ..., u_n telles que u_i vérifie les conditions (36) pour toutes les valeurs $i = 0, 1, 2, \ldots, n$?

Considérons avec Klein le cas où G est de la forme

$$G = l(x) - g(x)[\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n],$$

les paramètres $\lambda_0 \ldots, \lambda_n$ variant de $-\infty$ à $+\infty$. Supposons que g ne s'annule dans aucun des intervalles (a_i, b_i), son signe pouvant être différent dans deux intervalles différents. Les fonctions K, l, g seront supposées continues dans chacun des intervalles fermés (a_i, b_i). On a alors le théorème d'oscillation suivant dû à Klein :

Il existe une infinité de systèmes $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *réels pour lesquels les fonctions cherchées* $u_0, u_1, \ldots u_n$ *existent sans être identiquement nulles. Ces systèmes de nombres caractéristiques se différentient les uns des autres par le nombre de zéros que les fonctions caractéristiques* $u_0, u_1, \ldots, u_n$ *possèdent respectivement dans* $(a_0, b_0), \ldots, (a_n, b_n)$. *Si l'on se donne à l'avance* $n+1$ *nombres positifs ou nuls* $m_0, m_1, \ldots, m_n$, *on peut trouver un système* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ *et un seul, pour lequel les fonctions* u_0, $u_1, \ldots, u_n$ *ont respectivement* $m_0, m_1, \ldots, m_n$ *zéros dans chacun des intervalles* $(a_0, b_0), \ldots, (a_n, b_n)$.

Pour $n = 0$ on a le théorème correspondant de Sturm. Pour interpréter physiquement celui-ci dans un cas particulier déterminé, on peut dire qu'une corde hétérogène étant donnée, on peut lui faire exécuter des vibrations simples pour lesquelles la corde présentera un nombre de nœuds fixé à l'avance. On peut interpréter physiquement le théorème de Klein en disant qu'une membrane homogène limitée par deux arcs d'ellipses et deux arcs d'hyperboles homofocales étant donnée, on peut la faire vibrer de telle sorte qu'elle présente un nombre m_0 d'ellipses homofocales nodales, et un nombre m_1 d'hyperboles homofocales nodales, m_0 et m_1 étant arbitrairement donnés à l'avance.

Ajoutons que, comme dans le cas du problème plus particulier de Sturm, il n'y a pas de valeurs imaginaires caractéristiques pour les λ.

CHAPITRE VI.

ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR ET SYSTÈMES.

14. Équations linéaires. — Divers géomètres (Liouville, Lord Rayleigh, Kneser, Davidoglou, Birkhoff, Haugt, etc.) ont étudié les critériums pour que les intégrales d'une équation linéaire homogène d'un ordre supérieur à 2 soit oscillante ou non oscillante.

Ainsi, Liouville a donné un théorème d'oscillations pour les équations d'un ordre quelconque

$$\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}\,dy}{dx^n} + \lambda y = 0,$$

où K, L, ..., M, N sont $n-1$ fonctions positives de x, ne dépendant pas du paramètre λ [52].

Le problème des vibrations harmoniques d'une verge élastique se ramène à l'équation du quatrième ordre

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\mathrm{K}\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \lambda g y = 0,$$

où K et g sont des fonctions positives ne dépendant pas de λ. Il s'agit de déterminer le paramètre λ de manière qu'aux deux bouts a et b de la verge l'une des trois conditions aux limites soit remplie

$$\begin{cases} y = 0, \\ y' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ y'' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ y''' = 0. \end{cases}$$

Lord Rayleigh a établi quelques résultats qui présentent des grandes analogies avec le cas de Sturm [75].

Le problème a été repris par M. A. Davidoglou pour le cas $\mathrm{K} = $ const., à l'aide des méthodes d'approximations successives de M. Picard. La même méthode, appliquée à l'équation du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0,$$

a conduit M. Davidoglou à déterminer une limite supérieure de la distance de deux zéros consécutifs d'une intégralle réelle de cette équation dans le cas où il y a lieu d'en chercher une [19].

Citons encore l'équation binome du n^{ieme} ordre

$$(37) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} + f(x)y = 0,$$

où $f(x)$, l'intégrale y et ses n dérivées sont régulières pour les grandes valeurs de x. M. Kneser à établi les résultats suivants :

1° $f(x)$ étant *positive* pour de telles valeurs de x, et donc $f(x) > 0$, si n est *pair*, l'intégrale y est *oscillante* et a des zéros plus grands que tout nombre positif; si n est *impair*, y est *non oscillante;* pour les grandes valeurs de x les fonctions y, y', ..., $y^{(n)}$ sont alternativement constamment positives et constamment négatives, et tendent vers zéro pour $x = +\infty$.

2° $f(x)$ étant, pour les grandes valeurs de x, *positive* et telle que le produit $x^{\alpha} f(x)$ tend vers une limite finie et positive, et que l'on ait $n \geqq 2\alpha > \sigma$, si n est *pair*, toute intégrale y est *oscillante* et s'annule pour une infinité de valeurs de x dépassant toute limite; si n est *impair*, toute intégrale y non oscillante, ainsi que ses dérivées d'ordre 1, 2, ..., n, tendent vers zéro pour $x = +\infty$ [49].

M. Davidoglou a, entre autres résultats, montré que, $f(x)$ étant constamment *positive* et n étant *impair*, toute intégrale y qui a un des éléments y, y', ..., $y^{(n)}$ nul en un point de l'axe des x, est *oscillante*. Si $f(x)$ garde, pour les valeurs positives de x, constamment le même signe, les seules équations (37) pouvant admettre des solutions *périodiques* sont celles de la forme

$$\frac{d^{2m} y}{dx^{2m}} \mp (-1)^m f(x) y = 0,$$

où l'on prendra dans le second membre le signe — ou + suivant que $f(x)$ est positive ou négative. Ainsi, si $f(x)$ est constamment positive, les plus simples équations binomes à solutions périodiques sont de la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) y = 0, \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} - f(x) y = 0.$$

Plusieurs géomètres (MM. Mason, Bôcher, etc) se sont particulièrement occupés de l'équation

$$l_n \frac{d^n u}{dx^n} + \ldots + l_1 \frac{du}{dx} + (\lambda g - l) u = 0$$

avec n conditions de la forme $U_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), λ étant un paramètre dont les fonctions g, l, l_1, ..., l_n sont indépendantes, ainsi que les coefficients constants qui entrent dans les U_i. Les notions des nombres caractéristiques λ_1, ..., λ_n et des fonctions caractéristiques u_1, ..., u_n s'étendent à ce cas, et avec des restrictions nécessaires on a mis en évidence la réalité des λ_i et leur rôle dans la détermination des zéros de u dans un intervalle donné.

15. **Équations non linéaires et systèmes** [68]. — Étant donné un

système d'équations différentielles (E) d'un ordre quelconque, définissant n fonctions inconnues $y_1, \ldots, y_n$ comme fonctions d'une variable indépendante x, il arrive qu'une combinaison déterminée Φ, dépendant de x, des y_k et de leurs dérivées, égale en vertu des équations (E) même à l'une des expressions

$$\Delta(y_k) = \frac{1}{y_k}\frac{d^2 y_k}{dx^2}$$

soit, pour les valeurs de x comprises dans un intervalle (a, b) :

1° ou bien *inférieurement limitée* par une fonction connue $\lambda(x)$ [ne s'annulant pas dans (a, b)] en ce sens que la valeur de Φ reste supérieure à $\lambda(x)$ pour toutes les valeurs réelles $y_1, \ldots, y_n$;

2° ou bien *supérieurement limitée* par une fonction connue $\mu(x)$ en ce sens que la valeur de Φ reste inférieure à $\mu(x)$ pour toutes les valeurs réelles $y_1, \ldots, y_n$;

3° ou bien 1° et 2° à la fois.

Cela arrive, par exemple, dans le cas de l'équation du premier ordre

$$y' = f(x, y)$$

lorsque l'expression $\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ est inférieurement ou supérieurement limitée par une fonction $\lambda(x)$ resp. $\mu(x)$.

Les équations d'un ordre quelconque, de la forme

$$y'' + y\,\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

où Φ est l'une des expressions précédentes, et dont l'équation linéaire

$$y'' + f(x)y = 0$$

n'est qu'un cas particulier, appartiennent au même type. Tel est, par exemple, le cas de l'équation

$$y'' + my^3 + ny = 0$$

(où m, n sont des constantes de même signe) s'intégrant par des fonctions elliptiques.

Le système

$$\begin{gathered} y'_1 = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y'_n = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{gathered}$$

forme un système (E) toutes les fois qu'au moins l'une des expressions

$$\frac{1}{y_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x} + \Sigma f_i \frac{\partial f_k}{\partial y_i}\right)$$

est une fonction Φ inférieurement ou supérieurement limitée. Un tel cas se présente pour le système

$$y'_1 = my_2y_3, \qquad y'_2 = ny_1y_3, \qquad y'_3 = py_1y_2$$

qui s'intègre par des fonctions elliptiques.

Dans le cas de problèmes de la Dynamique, il arrive que l'équation des forces vives fournisse des conditions d'inégalités, en vertu desquelles l'une ou plusieurs des coordonnées q_i ont leur $\Delta(q_i)$ inférieurement ou supérieurement limitées, de sorte que le caractère oscillant de q_i apparaît directement sur les équations elles-mêmes du problème.

Les résultats et les règles indiquées dans le Chapitre V s'étendent, avec les restrictions nécessaires, aux équations et aux systèmes (E). A. Hurwitz a étendu directement, quelques-uns de ces résultats aux systèmes d'équations linéaires [45].

QUATRIÈME PARTIE.

ENCADREMENT DES COURBES INTÉGRALES.

CHAPITRE VII.

THÉORÈMES DE LA MOYENNE.

16. Un procédé d'extension du théorème classique de la moyenne aux équations du premier ordre. — Le problème *d'encadrement* de la courbe intégrale réelle considérée y, dans un intervalle donné (a, b) de la variable indépendante x, consiste à chercher des courbes limites entre lesquelles y se trouve constamment comprise lorsque x varie de a à b.

Pour les équations du premier ordre $F = 0$, M. M. Petrovitch a indiqué le procédé suivant d'extension du théorème classique de la moyenne [66].

On peut mettre l'équation donnée, et cela de diverses manières, sous la forme

$$y' = F(x, y, f), \tag{38}$$

où f est un coefficient en x figurant dans F, sur lequel on portera particulièrement l'attention. Soit (x_0, y_0) le point initial de l'intégrale pour lequel la fonction F et sa dérivée $\frac{\partial F}{\partial f}$ soient déterminées, finies, continues, ne changeant pas de détermination, et pour lequel cette dérivée partielle ne s'annule pas (les points ne remplissant pas ces conditions appartiennent à certaines courbes fixes dans le plan xOy que l'on connaîtra d'avance, ou bien sont isolés et fixes).

On peut toujours choisir, et cela d'une infinité de manières, deux fonctions $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Que ces fonctions soient déterminées, finies et continues dans un intervalle suffisamment petit de $x = x_0 - a_1$ à $x = x_0 + a_2$ (a_1 et a_2 étant deux constantes positives);

2° Qu'on ait dans cet intervalle $\lambda(x) < f(x) < \mu(x)$;

3° Qu'en désignant par u et v les intégrales respectives des équations

$$u' = F(x, u, \lambda), \qquad v' = F(x, v, \mu), \tag{39}$$

prenant pour $x = x_0$ la valeur $u_0 = v_0 = y_0$, les fonctions u et v soient déterminées, finies et continues dans un intervalle suffisamment petit de $x = x_0 - b_1$ à $x = x_0 + b_2$ (b_1 et b_2 étant deux constantes positives).

Les deux intervalles $(x_0 - a_1, x_0 + a_2)$ et $(x_0 - b_1, x_0 + b_2)$ ont toujours une partie commune $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ d'étendue non nulle, pour lequel on démontre le *théorème de la moyenne* suivant pour les équations du premier ordre :

Pour toute valeur de x, comprise dans l'intervalle $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$, l'intégrale y de (38), *prenant pour $x = x_0$ la valeur $y = y_0$, est déterminée, finie, continue et comprise entre les valeurs correspondantes des intégrales u et v des équations* (39) *qui, pour $x = x_0$, prennent la valeur $u_0 = v_0 = y_0$.*

A toute équation du premier ordre et à chaque couple (x_0, y_0) de valeurs initiales (mettant à part les couples exceptionnels indiqués précédemment), correspond un tel intervalle $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ dont l'étendue *n'est jamais nulle*.

On peut en faire des applications analogues à celui du théorème classique de la moyenne, relatif aux intégrales définies. On cherchera pour un type donné d'équations, écrites sous la forme (38), deux fonctions λ et μ qui, dans le voisinage de $x = x_0$, comprennent la fonction f, en diffèrent le moins possible et sont telles que les deux équations (39) qui leur correspondent soient intégrables. On remplacera, par exemple, l'arc considéré de $f(x)$ par des droites, arcs de paraboles, etc., qui le comprennent, et les intégrales u et v de (39) représenteront les limites entre lesquelles variera la courbe intégrale y de (38) dans $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$.

En appliquant le théorème, par exemple aux équations

$$y' = y^2 + f(x), \qquad y'^2 + y^2 = f(x), \qquad y'^2 - y^2 = f(x)$$

et en y remplaçant $f(x)$ par deux constantes M et N entre lesquelles f est compris dans l'intervalle de x considéré, on trouve pour la première équation les limites u et v sous la forme d'une combinaison rationnelle de la fonction $\operatorname{tang}(ax + b)$ ou bien de e^{ax}, suivant que f est positive ou négative dans cette intervalle; pour la deuxième et la troisième équation ces limites seront de la forme

$$A \sin(ax + b)$$

ou bien

$$A\, e^{ax} + B\, e^{-ax}.$$

Considérons maintenant [69 *bis*] une équation du premier ordre écrite sous la forme

$$y' = F(x, f_1, f_2, \ldots, f_n), \tag{40}$$

où F est une fonction algébrique ou transcendante de x et des f_i (les f_i étant des fonctions données de y) et supposons que les conditions suivantes soient remplies :

1° Toutes les fonctions f_i et leurs dérivées premières sont des fonctions réelles, continues et limitées de y, restant finies pour toute valeur réelle, finie ou infinie, de y. Nous désignerons par M_i et N_i la plus grande et la plus petite valeur de $f_i(y)$ lorsque y varie de $-\infty$ à $+\infty$;

2° La fonction F et ses dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial f_i}$ sont réelles, finies et continues pour toute valeur de x comprise dans un certain intervalle S et pour toute valeur des $f_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ comprise entre M_i et N_i.

3° La fonction F et ses dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial f_i}$ gardent un signe invariable pour toute valeur de x comprise dans un certain intervalle de $x = x_0 - \gamma$ à $x = x_0 + \gamma$ (compris dans δ) quelles que soient les valeurs des f_i comprises entre M_i et N_i.

4° En désignant par $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des constantes quelconques telles que $M_i < k_i < N_i$, l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, k_1, \ldots, k_n)\, dx$$

n'a pour chaque valeur de x_1 et x_2, comprise dans l'intervalle $(x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$ qu'une seule valeur réelle, finie et déterminée (tout en pouvant avoir aussi des valeurs imaginaires).

Ceci étant, soient $i = 1, 2, \ldots, h$ les indices des dérivées $\frac{\partial F}{\partial f_i}$ positives, et $i = h+1, h+2, \ldots, n$ celles des dérivées négatives. Posons

$$(40\,bis)\quad \begin{cases} \lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} F(x, M_1, \ldots, M_h;\ N_{h+1}, \ldots, N_n)\, dx, \\ \mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} F(x, N_1, \ldots, N_h;\ M_{h+1}, \ldots, M_n)\, dx. \end{cases}$$

M. Petrovitch démontre le résultat suivant [69 *bis*] :

L'intégrale y de (40), qui pour $x = x_0$ prend la valeur $y = y_0$, reste finie et continue lorsque x varie dans $(x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$, y varie constamment dans un même sens et est comprise entre les deux fonctions λ et μ.

17. **Autres procédés d'encadrement des courbes intégrales.** — Nous indiquerons encore un autre procédé d'encadrement de la courbe intégrale de l'équation de Riccati, basé sur la remarque suivante :

écrivons l'équation sous la forme

$$y' = \varphi(y - f_1)(y - f_2) \tag{41}$$

et supposons que les trois fonctions φ, f_1, f_2 de x soient positives dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = \alpha$, les fonctions f_1 et f_2 n'étant pas décroissantes dans cet intervalle et les deux courbes $y = f_1$ et $y = f_2$ n'étant pas tangentes toutes les deux à la fois à l'axe Ox en O. Supposons encore, pour fixer les idées, qu'on ait $f_1 < f_2$ dans cet intervalle. Soient

$$\left\{\begin{aligned} Y'_1 &= \varphi(Y_1 - F_1)(Y_1 - F_2), \\ Y'_2 &= \varphi(Y_2 - \Phi_1)(Y_2 - \Phi_2) \end{aligned}\right. \tag{42}$$

deux équations qu'on sait intégrer et telles que, dans l'intervalle (o, α), on ait constamment

$$F_1 \leqq f_1, \qquad F_2 \leqq f_2, \qquad \Phi_1 \geqq f_1, \qquad \Phi_2 \geqq f_2.$$

Dans l'intervalle (o, α) *on aura constamment* $Y_1 < y < Y_2$, où Y_1, Y_2, y désignent les intégrales respectives de (41) et (42) s'annulant pour $x = 0$ [63].

Le même procédé s'applique aux équations

$$y' = \varphi(y - f_1)(y - f_2)\ldots(y - f_n), \tag{43}$$

ainsi qu'à l'équation linéaire du second ordre

$$y'' + f(x)y' + \varphi(x)y = 0, \tag{44}$$

où le rôle des fonctions f_1 et f_2 est joué par les deux racines en r de l'équation du second degré

$$r^2 + f(x)r + \varphi(x) = 0. \tag{45}$$

La remarque suivante, combinée avec le procédé précédent, fournit diverses règles concernant les courbes limites entre lesquelles varie l'intégrale y de (44) : toutes les fois qu'on sait intégrer une équation

$$v'' + \overline{\omega}(x)v = 0,$$

on peut en déduire une autre équation linéaire homogène du second ordre pour laquelle les racines de l'équation quadratique (45) auront leur différence constante et que l'on saura intégrer : *cette nouvelle* *équation fournit les éléments de comparaison dans le procédé précédent* [64].

On peut aussi baser des procédés d'encadrement sur diverses inégalités algébriques. Ainsi, le fait que, les x_i étant positifs ou nuls, la valeur du rapport

$$\frac{(x_1+\ldots+x_n)^p}{x_1^p+\ldots+x_n^p} \qquad (p \text{ réel})$$

est toujours comprise entre 1 et n^{p-1} (ces limites pouvant être atteintes), conduit à un procédé pour mettre l'intégrale de diverses classes d'équations différentielles sous la forme

$$y = \varphi_1(x) + \theta\, \varphi_2(x),$$

où φ_2 et φ_2 seront connues, θ étant un facteur compris entre deux valeurs numériques *fixes et connues*.

Appliqué, par exemple, à l'équation

$$y'^2 + y^2 = f(x), \tag{46}$$

le procédé conduit aux conclusions suivantes. Prenons d'abord pour φ la détermination positive de $\sqrt{f(x)}$, supposée réelle, finie et continue dans un intervalle (a, b) de x et considérons une intégrale réelle y prenant pour $x = x_0$ la valeur $y = y_0$. Supposons, pour fixer les idées, que le point $M_0(x_0, y_0)$ se trouve au-dessus de l'axe des x; ce point se trouve nécessairement dans la région D comprise entre la courbe $y = \sqrt{f(x)}$ et l'axe des x. Par M_0 passent deux branches de la courbe intégrale, l'une positive croissante Y_1, l'autre positive décroissante Y_2. La branche Y_1 se trouve, dans (a, b), constamment comprise entre les deux courbes

$$(47)\qquad \begin{cases} y = y_0\, e^{-(x-x_0)} + \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^x \sqrt{f(x)}\, dx, \\ y \pm y_0\, e^{-(x-x_0)} + e^{-x}\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^x \sqrt{f(x)}\, dx \end{cases}$$

et la branche Y_2 entre les deux courbes (47) où $\sqrt{f(x)}$ est changée en $-\sqrt{f(x)}$.

Par le point $M'_0(x_0, -y_0)$, symétrique à M_0 par rapport à Ox, passent également deux branches de la courbe intégrale, symétriques aux branches Y_1 et Y_2 par rapport à l'axe Ox.

Nous indiquerons, en terminant, un résultat de même genre relatif à l'équation

$$(48) \qquad y'' = f(x) y,$$

où $f(x)$ est une fonction réelle, finie et continue dans un intervalle (a, b) de x.

Toute courbe intégrale y dont la dérivée première s'annule en un point x_0 compris dans l'intervalle (a, b) où f est *positive*, est dans cet intervalle *comprise entre les deux courbes*

$$y = \frac{y_0}{2}(e^{X_1} + e^{-X_1}) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{y_0}{2}(e^{X_2} + e^{-X_2}),$$

où

$$X_1 = (x - x_0)\sqrt{N}, \qquad X_2 = (x - x_0)\sqrt{M},$$

N et M désignent une limite inférieure et une limite supérieure de $f(\xi)$ pour les valeurs ξ comprises entre x_0 et x.

Si f est *négative* dans (a, b) supposé suffisamment étendu, la courbe y est oscillante, se composant de demi-ondes alternativement positives et négatives. Chaque demi-onde, soit positive, soit négative, est *comprise entre les deux courbes*

$$y = y_0 \cos X_1 \qquad \text{et} \qquad y = y_0 \cos X_2,$$

N et M ayant des significations précédentes relatives à $-f(x)$ [69].

18. Encadrement des valeurs asymptotiques de l'intégrale. — Dans le paragraphe 7 se trouvent indiqués des cas où les valeurs asymptotiques de l'intégrale sont fixes et connues sans l'intégration préalable de l'équation.

Les procédés d'encadrement de la courbe intégrale permettent, dans un grand nombre de cas, d'encadrer aussi ses valeurs asymptotiques. Ceci arrive, par exemple, dans le cas où l'équation (40) du paragraphe 16, lorsque l'intervalle $(x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$ s'étend à toutes les valeurs réelles de x. La valeur asymptotique de y pour $x = \pm\infty$ sera finie ou infinie suivant que les deux intégrales $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ figurant dans le second membre des formules (41) tendent vers des limites finies ou infinies pour $x = \pm\infty$. Quand elle est finie, elle est comprise entre $y_0 + \lim \mathcal{J}_1$ et $y_0 + \lim \mathcal{J}_2$. Par exemple, pour l'équation

$$y' = \alpha x^2 + \beta e^{-ky^2} \qquad (\alpha, \beta, k = \text{const. positives}),$$

les valeurs asymptotiques sont infinies. Pour l'équation [69 *bis*]

$$y' = \frac{e^{-rx^2}}{1 - \alpha e^{-kx^2} - \beta e^{-kx^2 - py^2}}$$

(α, β, k, p, r = const. positives, $\alpha + \beta < 1$) y est compris entre

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - \alpha e^{-kx^2}} dx \quad \text{et} \quad y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - (\alpha + \beta) e^{-kx^2}} dx.$$

Les valeurs asymptotiques sont finies et déterminées; en designant par a la valeur de y pour $x = 0$, sa valeur asymptotique pour $x = \infty$ sera comprise entre

$$a + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \theta(\alpha) \quad \text{et} \quad a + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \theta(\alpha + \beta),$$

où $\theta(z)$ désigne la transcendante

$$\theta(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-rx^2}}{1 - z e^{-kx^2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{r + kn}},$$

de même, la valeur asymptotique pour $x = -\infty$ est comprise entre

$$a - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \theta(\alpha) \quad \text{et} \quad a - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \theta(\alpha + \beta).$$

Dans les cas où la valeur asymptotique de y est infinie, il y a lieu de chercher une fonction continue et croissante $\varpi(x)$ telle que, pour les x dépassant une certaine limite, on ait, à partir d'une certaine valeur de x,

$$|y| < \varpi(x).$$

Supposons le cas d'une équation $F(x, y, y') = 0$ algébrique en x, y, y'. M. Lindelof a montré [51] que *pour une intégrale quelconque y qui reste continue pour x dépassant une certaine limite, on peut prendre*

$$\varpi(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \tau(x)\, dx},$$

où $\tau(x)$ désigne une fonction quelconque positive croissante de x, telle que, quelque grand que soit l'entier positif n, on ait $\lim \frac{\tau(x)}{x^n} = \infty$ pour $x = \infty$. Telles seraient, par exemple, es fonctions e^x (cas indiqué par M. Borel), $x^{\log x}$, $x^{\log \log x}$, etc.

Le théorème est tout à fait général. Si l'on se donne une équation $F = 0$ déterminée, on pourra resserrer considérablement les limites qu'il fournit. Ainsi, M. Lindelöf a démontré le théorème : Si l'équation $F = 0$ est de degré m par rapport à x, et si elle admet une intégrale y qui reste continue pour x dépassant une certaine limite, *on aura à partir d'une certaine valeur de x*

$$|y| < e^{Cx^{m+1}}, \tag{49}$$

C désignant une constante positive suffisamment grande [51].

Voici d'ailleurs comment on détermine la valeur C qu'il convient d'adopter. Après avoir substitué dans $F = 0$, $y = e^{Cx^{m+1}}$, séparons-y les termes qui contiennent en facteur la puissance la plus élevée de l'exponentielle. Parmi ces termes, choisissons ceux qui contiennent x au plus haut degré, et égalons à zéro leur somme; nous aurons ainsi une équation algébrique en C, et l'on pourra adopter pour C, dans (49) une valeur positive quelconque égale ou supérieure à la plus grande racine réelle de cette équation.

Le théorème de M. Lindelöf fournit une limite de $|y|$ bien précise, puisqu'elle peut être réellement atteinte, et qu'elle l'est effectivement pour l'équation $F = 0$ ayant pour l'intégrale le second membre de (49). Il s'applique aussi au cas où $m = 0$, c'est-à-dire où l'équation F ne renferme pas x. On aura alors, sous les mêmes conditions que ci-dessus

$$|y| < e^{Cx},$$

C étant une constante positive suffisamment grande [51].

Enfin, MM. Borel et Lindelöf ont précisé encore davantage la nature des intégrales y qui restent continues lorsque x tend vers ∞, en démontrant le théorème suivant : *y est ou bien du type exponentiel e^{x^ρ}, ou bien reste comprise, à partir d'une certaine valeur de x, dans l'intervalle de $-e^{x^\varepsilon}$ à $+e^{x^\varepsilon}$, quelque petit que soit ε.* Les valeurs possibles de ρ se déterminent par la construction d'un polygone de Newton.

Les intégrales de la première catégorie (du type exponentiel), ainsi que toutes leurs dérivées, sont des *fonctions croissantes.* Les intégrales de la seconde catégorie pourront, au contraire, *présenter des oscillations*, comme le montre la fonction

$$y = x^m \sin x + x^n,$$

laquelle, pour m et n rationnels, vérifié bien une équation différentielle algébrique du premier ordre [51].

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. BENDIXSON (J.). — Sur les points singuliers des équations différentielles (*Ofv. af Kongl. Svenska Ves. Akademiens Förhandlingar*, Stockholm, 1898).
2. — Sur les courbes définies par les équations différentielles (*Acta math.*, t. 24, 1901).
3. BIRKHOFF (G. D.). — Boundary value and expansion problems of ordinary linear diff. équat. (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 9, 1908).
4. — On the solutions of ordinary linear homogeneous diff. equat. of the third order (*Annals of Math.*, 2e série, t. 12, 1911).
5. BÔCHER (M.). — An elementary proof of a theorem of Sturm (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 2).
6. — Non oscillatory linear diff. equat. of the second order (*Bull. Amer. math. Soc.*, 2e série, t. 7).
7. — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre à solution périodique (*C. R. Acad. Sc.*, t. 140, 1905).
8. — Note supplementary to the paper « On certain pairs of transcendental functions whose roots separate each other » (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 18).
9. BOREL (E.). — Sur les séries divergentes (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 1899).
10. BOUTROUX (P.). — Sur la croissance des intégrales des équations différentielles du premier ordre (*C. R. Acad. Sc.*, t. 144, 1907).
11. BROUWER (L. E. J.). — On continuous vector distribution on surfaces (*Verhandl. d. Koninkl. Akad. van Wetenschappen to Amsterdam*, t. 11_2, 1909, et 12_2, 1910).
12. BUCHEL (W.). — Ueber die durch gewöhnliche Differentialgleichungen definierten Kurven (*Programmabhandlung d. Realsch. Hamburg*, n° 915, 1906).
13. — Zur Topologie der durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades definierten Kurvenschar (*Mitteil. d. math. Ges. Hamburg*, t. 4).
14. — Die physikalische Bedeutungen der durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}$$

definierten Kurvenschar (*Mitteil. d. math. Ges. Hamburg*, t. 4).

15. CARMICHAEL (R. D.). — Comparaison theorems for homog. linear diff. eq. of general order (*Annals of Math.*, 2e série, t. 19).

16. CHAZY (J.). — Sur les courbes définies par les équations différentielles du second ordre (*Journ. de Math. pures et appl.*, t. 45, 1921).

17. — Sur le problème rectiligne des trois corps (*Bul. Soc. math. de France*, t. 55, 1927).

18. COTTON (E.). — Sur l'intégration approchée des équations différentielles (*Acta math.*, t. 24, 1901).

19. DAVIDOGLOU (A.). — Sur les zéros des intégrales des équations linéaires du troisième ordre (*C. R. Acad. Sc.*, t. 130, 1900).

20. — Sur une application de la méthode des approximations successives (*C. R. Acad. Sc.*, t. 130, 1900) (deux Notes).

21. — Étude d'une équation différentielle du quatrième ordre (*Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 17, 1900, et 22, 1905).

22. DELASSUS (E.). — Sur les courbes intégrales (*Bull. des Sciences math.*, t. 22, 1898).

23. DULAC (H.). — Recherches sur les points singuliers des équations différentielles (*Journ. de l'École Polyt.*, 2e série, t. 9, 1904).

24. — Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage de conditions initiales singulières quelconques (*Ann. de l'Univ. de Grenoble*, t. 17, 1905).

25. — Sur les cycles limites (*Bull. Soc. math. de France*, t. 51, 1923).

26. DUNOYER (L.). — Sur les courbes de poursuite d'un cercle (*Nouv. Ann.*, 4e série, t. 6, 1906).

27. DYCK (W. v.). — Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung definierten Kurvensysteme (*Ber. d. Kgl. Baier. Akad. d. Wissensch. zu München.*, t. 21, 1891).

28. — Ueber den Verlauf der Integralkurven einer homogenen Differentialgleichung erster Ordnung definierten Kurvensysteme (*Ber. d. Kgl. Baier. Akad. d. Wissensch. zu München*, t. 39).

29. Ueber die singulären Stellen eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung (*Ber. d. Kgl. Akad. d. Wissench. zu München.* t. 39).

30. FALKENHAGEN (I. H. M.). — Ueber das Verhalten der Integrale einer Riccatischen Diff. Gleichung (*Nieuw Archief*, 2e série. t. 6, 1904).

31. FITE (M. B.). — Note on linear homog. diff. equations of the second order (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 22, 1916).

32. — The relation between the zeros of a solution of a linear homog. diff. equat. and those of its derivatifs (*Bul. Amer. math. Soc.*, t. 23, 1917; *Annals of Math.*, t. 18, 1917).

33. — Concerning the zeros of the solutions of certains diff. equations (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 24; *Trans. of the Amer. math. Soc.*, t. 19, 1918).

34. FORT (T.). — Some theorems of comparaison and oscillation (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 24, 1917-1918).

35. FROMMER (M.). — Die Integralkurven einer gewöhnlicher Differential-

gleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen (*Math. Ann.*, t. 99, 1928).

36. HAUPT (O.). — Bemerkungen über Oszillationstheoreme (*Nachr. von d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1910).

37. — Untersuchungen über Oszillationstheoreme (*Dissert.* Wurzburg, B. G. Teubner, Leipzig, 1911).

38. — Ueber eine Methode zum Beweise von Oszillationstheoremen (*Math. Ann*, t. 76, 1915).

39. HILB (E.). — Eine Erweiterung des Kleinschen Oszillationstheorems (*Jahresber. d. deutsch. Math. Ver.*, t. 16, 1907).

40. HILLE (E.). — On the zeros of Sturm Liouville functions (*Arkiv för mat. astron. fysik utg. af K. Svenska Vet. Acad.*, t. 16, 1922).

41. — Convex distribution of the zeros of Sturm-Liouville functions (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 28, 1922).

42. — A correction (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 29, 1922).

43. HORN (J.). — Untersuchung der Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung vermittelst successiver Annüherung (*Math. Ann.*, t. 51, 1899).

44. — Ueber die Differentialgleichung erster Ordnung (*Math. Ann.*, t. 51, 1899).

45. HURWITZ (A.). — An expansion theorem for a system of linear diff. equations of the first order (*Trans. amer. math. Soc.*, t. 22, 1921).

46. JANCZEWSKI (S. A.). — Les théorèmes d'oscillation des problèmes réguliers de Sturm pour les équations linéaires du quatrième ordre (*C. R. Acad. Sc.*, t. 184, 1927).

47. KLEIN (F.). — Zur theorie d. Lamé'schen Funktionen (*Nachr. von d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1890).

48. — Ueber lineare Differentialgleichung der zweiter Ordnung (autogr. Vorlesungsheft, Göttingen, 1894).

49. KNESER (A.). — Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen (*Math. Ann.*, t. 42, 1893).

50. KUHN (P.). — Ueber die Gestalt der Integralkurven einer gewöhnlicher Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung gewisser singulärer Punkte (*Dissert.*, Frankfurth-a.-M., 1923).

51. LINDELÖF (E.). — Sur la croissance des intégrales des équations différentielles algébriques du premier ordre (*Bull. Soc. math. de France*, t. 27, 1899).

52. LIOUVILLE (J.). — Mémoires (*Journ. de Math. pures et appl.*, t. I, 1836; t. II, 1837; t. III, 1838).

53. MASON (M.). — On the boundary value problems of linear diff. equations of second order (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 7, 1906).

54. MISES (R. v.). — Beitrag zum Oszillationsproblem (*Weber-Festschrift*, 1912).

55. OISHI (K.). — On the nature of the integral of a certain linear diff. equation (*The Tôhoku math. Journ.*, t. 17, 1920).

56. — On the separation for the integrals of the diff. equation of the third order (*The Tôhoku math. Journ.*, t. 18, 1920).

57. Okada (Y.). — On the relations between the roots of certains two transcendental functions (*The Tôhoku math. Journ.*, t. 16, 1919).

58. Osgood (W. F.). — On a theorem of oscillation (*Bul. Amer. math. Soc.*, t. 25, 1919).

59. Perron (O.). — Ueber die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes (*Maht. Zeitschr.*, t. 15, 1922).

60. Petrovitch (M.). — Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques (*Thèse*, Gauthier-Villars, Paris, 1894).

61. — Sur les valeurs asymptotiques des intégrales des équations différentielles du premier ordre (*Glas. srp. Kral. Akad. à Belgrade*, t. 50, 1895) (en serbe).

62. — Remarques algébriques sur les fonctions définies par les équations différentielles algébriques du premier ordre (*Bull. Soc. math. de France*, 1896).

63. — Sur l'équation différentielle de Riccati (*Ber. d. kgl. böhm. Ges. d. Wiss.* Prag., 1896).

64. — Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre (*Bull. Soc. math. de France*, 1897).

65. — Contribution à la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre (*Math. Ann.*, 1896).

66. — Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre (*Math. Ann.*, t. 54, 1899).

67. — Théorie de la décharge des conducteurs à capacité, résistance et coefficient de self induction variables (*Éclairage électrique*, 22 avril et 13 mai 1899).

68. — Fonctions implicites oscillantes (*Proc. of the fifth Congress of Math.*, Cambridge, 1912).

69. — Sur les intégrales réelles de l'équation différentielle linéaire du second ordre (*Bull. Soc. math. de France*, t. 53, 1926).

69 *bis*. — Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre (*Rendiconti del Circ. matem. di Palermo*, t. 14, 1910).

70. Picard (E.). — Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre (*Math. Ann.*, t. 46, 1895).

71. Poincaré (H.). — Sur les courbes définies par les équations différentielles (*Journ. de Math. pures et appl.*, 3e série, t. 7, 1881 ; t. 8, 1882 ; 4e série, t. 1, 1885 ; t. 2, 1886. *Œuvres*, t. I).

72. — Sur les points singuliers des équations différentielles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 94, 1882).

73. — Sur les courbes définies par les équations différentielles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 90, 1880 ; t. 93, 1881 ; t. 98, 1884).

74. — Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différentielles finies (*Amer. Journal of Math.*, t. 7, 1885).

75. Rayleigh (Lord). — *Theory of Sound* (London, 1877 ; 2e édition 1894).

76. Rémoundos (G.). — Sur les courbes intégrales des équations différentielles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 145, 1907).

77. — Sur quelques transformations des équations différentielles, du premier ordre (*Journal für Math.*, t. 134).

78. Reynolds (C. N. jr.). — On the zeros of solutions of homog. linear diff. equations (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 22, 1921).

79. Richardson (R. G. D.). — Theorems of oscillation for two linear diff. equations of the second order with two parameter (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 13, 1912).

80. — Contribution to the study of oscillation properties of the solution of linear diff. eq. of the second order (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 24, 1917; *Amer. Journ. of Math.*, t. 40, 1918).

81. — Ueber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen eines Kleins Oszillationstheorems (*Math. Ann.*, t. 73, 1913).

82. Smith (M. G.). — On the zeros of functions defined by linear homog. diff. eq. containing a parameter (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 24, 1918).

83. Sturm (C.). — Mémoire sur les équations linéaires du second ordre (*Journ. de Math. pures et appl.*, t. 1, 1836).

84. Sturm et Liouville. — Extrait d'un Mémoire sur le développement des fonctions, etc. (*Journ. de Math. pures et appl.*, t. II, 1837).

85. Weigel (J.). — Gestaltiche Verhältnisse der Integralkurven in der Nähe eines Doppelpunktes der Diskriminantenkurve (*Dissert.* München, 1911; Halle, 1912).

86. Wiman (A.). — Ueber die rellen Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (*Arkiv för mat. astr. fysik, utg. af k. Svenska Vetenskaps-Akad.*, t. 12, 1917).

OUVRAGES A CONSULTER.

87. Bieberbach (L.). — *Theorie der Differentialgleichungen* (*Die Grundlehren der math. Wiss.* Bd VI, J. Springer, Berlin, 1923).

88. Bocher (M.). — *Leçons sur les méthodes de Sturm* (Collection de monographies de M. Borel; Gauthier-Villars, Paris, 1917).

89. Horn (J.). — *Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung* (Leipzig, 1905).

90. Liebmann (H.). — *Encycl. der math. Wissenschaften*, Band III_3. Heft 4, 1915).

91. Painlevé (P.). — *Encycl. des sciences mathém.*, t. II, vol. 3, 1910.

92. Picard (E.). — *Traité d'Analyse*, t. III (Gauthier-Villars, Paris).

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME PARTIE.

ENCADREMENT DES COURBES INTÉGRALES.