G. TZITZÉICA

Introduction à la géométrie différentielle projective des courbes

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 47 (1931)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1931__47__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COIMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XLVII

Introduction à la géométrie différentielle projective des courbes

Par M. G. TZITZÉICA

Membre de l'Académie roumaine,
Professeur à l'Université de Bucarest

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1931

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

INTRODUCTION

A LA

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE PROJECTIVE

DES COURBES

Par M. G. TZITZÉICA,

Membre de l'Académie roumaine,
Professeur à l'Université de Bucarest,

PRÉFACE.

Malgré la différence du but et des méthodes, la brochure que je prends la permission de soumettre au jugement des géomètres et celle du très regretté C. Guichard, rédigée par M. R. Jacques et parue dernièrement dans cette Collection, ont des analogies manifestes.

C'est d'abord le même fil simple et uni, qui, en partant d'éléments intuitifs, aboutit a des résultats géométriques intéressants. C'est aussi la simplicité relative des calculs, qui traduisent, presque toujours, des relations géométriques et qu'on peut suivre, pour ainsi dire, visuellement.

Dans la géométrie différentielle projective des courbes on travaille actuellement à édifier une métrique projective. On a déjà obtenu, pour les courbes planes et de l'espace à trois dimensions, de beaux résultats. Je crois que pour les approfondir et aller plus loin il faut d'abord étudier de près les propriétés différentielles immediates, celles qui sont intuitives, surtout pour ceux qui entrent pour la première fois dans ce domaine des sciences mathématiques.

C'est dans ce but que j'ai écrit cette *Introduction à la géométrie différentielle projective des courbes*, qui comprend, en partie, les leçons que j'ai eu l'honneur de faire à la Sorbonne en janvier 1926, c'est pour le même motif que je suis entré quelquefois dans certains détails.

INTRODUCTION.

I. — Définitions.

1. Espace euclidien à n dimensions. — Un système de valeurs finies, données à n variables X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) réelles ou complexes, définit un point X. L'ensemble de tous les points constitue l'espace *euclidien* ou, encore mieux, *cartésien* à n dimensions. Cet ensemble n'est pas borné et il est ouvert.

Les coordonnées X_i pouvant prendre aussi des valeurs complexes, on pourrait considérer l'espace comme ayant $2n$ dimensions; c'est une question de convention.

2. Espace de Desargues. — Posons

$$X_i = \frac{\xi_i}{\xi_{n+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous dirons que les quantités ξ_i ($i = 1, 2, \ldots, n+1$), finies et pas toutes nulles, sont les coordonnées homogènes du point $X \equiv \xi$. On peut multiplier ces coordonnées par un même facteur, fini et différent de zéro, sans que le point change. Les points pour lesquels on a

$$\xi_{n+1} = 0$$

seront dits des points à l'infini. Ces points, ajoutés à l'espace cartésien, donnent un ensemble fermé que l'on peut appeler *l'espace de Desargues*.

3. Espace projectif. — Posons

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\xi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

le déterminant des formes linéaires en ξ étant différent de zéro. Nous dirons que les x_i sont des coordonnées projectives du point $x \equiv \xi$. Le système des coordonnées projectives dépend du choix des coefficients a_{ik}. Ces coordonnées sont finies et pas toutes nulles et elles sont définies a un facteur près. Comme les points à l'infini ne se distinguent plus des autres points, nous dirons que les points x constituent un *espace projectif* a n dimensions.

On peut considérer la transformation linéaire

$$\rho x'_i = \sum_k b_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \quad , n+1),$$

à déterminant différent de zéro, sous deux aspects différents : comme un changement du système de coordonnées projectives (le point restant le même), ou comme une transformation ponctuelle de l'espace projectif en lui-même, qui fait correspondre à tout point x de l'espace projectif un point x' du même espace (le système de coordonnées restant le même). Sous ce dernier aspect on a ce qu'on appelle une *transformation projective*. Il est clair que ces transformations forment un groupe.

Toute propriété d'une figure de l'espace projectif, invariable à la suite d'une transformation projective quelconque, sera dite *propriété projective* de la figure.

4. **Espace fonctionnel projectif.** — Soit $x(\alpha)$ une fonction de α, uniforme, continue et bornée dans l'intervalle $0 \leqq \alpha \leqq 1$ et non identiquement nulle. Nous dirons que les valeurs de cette fonction déterminent un point x, chaque valeur de $x(\alpha)$ jouant le rôle d'une coordonnée du point. On suppose encore qu'en multipliant $x(\alpha)$ par un facteur indépendant de α, fini et $\neq 0$, on ne change pas le point. L'ensemble des points x ainsi définis constitue un *espace fonctionnel projectif*.

II. — Variétés linéaires.

5. **Variétés linéaires ponctuelles.** — Tout d'abord nous considérerons un point de l'espace projectif comme une variété linéaire ponctuelle sans dimensions et nous le désignerons par L_0.

Étant donnés deux points x' et x'', considérons l'ensemble des points x, définis par

$$x_i = \lambda' x_i' + \lambda'' x_i'' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

ou encore, par

$$x = \lambda' x' + \lambda'' x'',$$

λ' et λ'' étant des paramètres finis et pas nuls tous les deux. La figure formée par l'ensemble de ces points, lorsque λ' et λ'' varient, est une droite, une variété linéaire ponctuelle à une seule dimension ou brièvement un L_1.

A l'aide de trois points on définit un plan ou un L_2 et, en général, à l'aide des p points $x', x'', \ldots, x^{(p)}$, on définit par

$$x = \lambda' x' + \lambda'' x'' + \ldots + \lambda^{(p)} x^{(p)}$$

une variété linéaire ponctuelle à $p-1$ dimensions, un L_{p-1}. Pour $p = n$ on a un L_{p-1} et pour $p = n+1$ le point x peut prendre toute position de l'espace ambiant à n dimensions. On peut donc dire que ce dernier espace est, lui aussi, une variété linéaire ponctuelle à n dimensions, un L_n. Cependant, pour des motifs qu'on verra dans la suite, nous préférons faire une distinction essentielle entre l'espace ambiant E_n et les variétés linéaires ponctuelles L_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ qui y sont contenues

Remarquons enfin que les quantités $\lambda^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ sont les coordonnées projectives du point x dans la variété linéaire L_{p-1} définie par les points $x', x'', \ldots, x^{(p)}$ et qu'elles subissent une transformation linéaire si l'on remplace ces points par d'autres p points de la variété.

6. Variétés linéaires planaires ou tangentielles. — Considérons tout d'abord l'équation

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1} = 0$$

ou

$$\sum a x = 0,$$

où les coefficients a_i sont finis et pas tous nuls. L'ensemble des points x qui satisfont à cette équation forment une configuration linéaire d'une nouvelle sorte, que j'appelle une variété linéaire *planaire* ou *tangentielle* et qui, à ce point de vue, peut être regardée sans dimensions et que je noterai par L_0'. On peut regarder les coefficients a_i ($i = 1, 2, \ldots, n+1$), que l'on peut multiplier par un même facteur fini et $\neq 0$ sans changer la variété, comme les coordonnées du L'_0 correspondant. Il est manifeste qu'on peut faire correspondre à tout L'_0 de coordonnees a_i le L_0, c'est-à-dire le point de mêmes coordonnées. Cette correspondance est une dualité.

Si a', a'' sont deux L'_0 différents, l'ensemble des L'_0 définis par

$$a_i = \lambda' a'_i + \lambda'' a''_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

est une nouvelle variété linéaire planaire, à une seule dimension, un L'_1, qui correspond par dualité à une droite ou à un L_1 et contient les points communs à a' et a''.

On peut continuer et définir ainsi n espèces de variétés linéaires planaires

$$L'_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Il n'existe pas de L'_n. A tout L'_i il correspond, par dualité, un L_i.

7. **Identité des variétés linéaires ponctuelles et planaires.** — Il est évident que tout L'_{n-1} est un L_0, c'est-à dire un point. D'une manière générale soit le L'_{p-1} défini par

$$\sum a' x = 0, \qquad \sum a'' x = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum a^{(p)} x = 0,$$

et soient x', x'', $\ldots$, $x^{(n-p+1)}$ $n-p+1$ points linéairement indépendants de ce L'_{p-1}, c'est-à-dire n'appartenant pas tous à un L'_i avec $i < p-1$. Il est facile de voir qu'un point quelconque x de ce L'_{p-1} est donné par

$$x = \lambda' x' + \lambda'' x'' + \ldots + \lambda^{(n-p+1)} x^{(n-p+1)},$$

ce qui prouve que le L'_{p-1} considéré est identique à un L_{n-p}. La réciproque est vraie.

Il n'y a donc qu'une seule espèce de variétés linéaires contenues dans un espace projectif à n dimensions.

8. **Variétés linéaires dans un espace fonctionnel projectif.** — Comme dans un espace projectif habituel, un point sera une variété linéaire ponctuelle sans dimensions, un L_0.

Si x_1 et x_2 sont deux points de l'espace fonctionnel, l'ensemble des points x déterminés par

$$x(\alpha) = \lambda_1 x_1(\alpha) + \lambda_2 x_2(\alpha) \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1)$$

définit une droite fonctionnelle ou un L_1. On obtient de cette manière un ensemble dénombrable d'espèces de variétés linéaires ponctuelles dans l'espace fonctionnel projectif, à savoir des L_0, des L_1, ..., des L_p, ...

Considérons actuellement l'équation

$$\int_0^1 a(\alpha)\,x(\alpha)\,d\alpha = 0,$$

où $a(\alpha)$ est une fonction continue et bornée dans l'intervalle $0 \leqq \alpha \leqq 1$ et non identiquement nulle. L'ensemble des points x qui vérifient cette équation intégrale forme une variété linéaire d'une autre sorte, une variété planaire ou tangentielle sans dimensions ou un L'_0, ayant pour coordonnées, à un facteur numérique près, les valeurs de $a(\alpha)$ dans l'intervalle considéré. A tout L'_0 correspond, par dualité, le L_0 ayant les mêmes coordonnées.

Si l'on prend deux L'_0 différents a_1 et a_2 et les L'_0

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,$$

on définira un L'_1. Ce L'_1 est formé par l'ensemble des points qui vérifient le système

$$\int_0^1 a_1(\alpha)\,x(\alpha)\,d\alpha = 0,$$
$$\int_0^1 a_2(\alpha)\,x(\alpha)\,d\alpha = 0,$$

et ainsi de suite. On a donc des variétés planaires L'_0, L'_1, L'_2, ..., L'_p, ..., qui correspondent par dualité à des variétés ponctuelles. Cependant dans l'espace fonctionnel projectif, il n'y a pas identité entre les deux sortes de variétés linéaires. On ne peut pas définir un L'_i à l'aide d'un nombre fini de points fonctionnels.

Il se pose alors naturellement le problème de définir ponctuellement un L'_i, c'est-à-dire d'intégrer le système d'équations intégrales correspondant. Prenons d'abord le L'_0 déterminé par

$$\int_0^1 a(\alpha)\,x(\alpha)\,d\alpha = 0. \tag{1}$$

Remarquons que toute droite fonctionnelle ou tout L_1 est contenu ou coupe la variété (1) en un point. Soient x_0 un point extérieur fixe et y un point extérieur arbitraire. Le point x, où la droite $x_0 y$ coupe le L'_0 donné, est un point arbitraire de cette variété, car x étant choisi, on n'a qu'à prendre y sur la droite $x_0 x$. Le point x est défini par

$$x(\alpha) = x_0(\alpha)\int_0^1 a(\alpha) y(\alpha)\, d\alpha - y(\alpha)\int_0^1 a(\alpha) x_0(\alpha)\, d\alpha$$

ou, pour abreger l'écriture,

$$x = x_0\int_0^1 a y\, d\alpha - y\int_0^1 a x\, d\alpha.$$

Cependant, cette solution ne donne pas une représentation propre de la variété (1), car tout point x de (1) est obtenu d'une infinité de manières, en faisant varier y sur la droite $x_0\, x$. On peut obtenir une représentation propre en prenant $y(\alpha)$ de manière qu'elle s'annule pour une valeur particulière α_0 de l'intervalle 0, 1, où $x_0(\alpha)$ ne s'annule pas.

En général, on peut définir un point variable x d'un L'_{p-1} à l'aide d'un L_p passant par p points fixes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et par un point variable y. On a ainsi pour l'intégrale du système

$$\int_0^1 a_1 x\, d\alpha = 0, \qquad \int_0^1 a_2 x\, d\alpha = 0, \qquad \ldots, \qquad \int_0^1 a_p x\, d\alpha = 0,$$

l'expression

$$x = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_p & y \\ \int_0^1 a_1 x_1\, d\alpha & \int_0^1 a_1 x_2\, d\alpha & \ldots & \int_0^1 a_1 x_p\, d\alpha & \int_0^1 a_1 y\, d\alpha \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_0^1 a_p x_1\, d\alpha & \int_0^1 a_p x_2\, d\alpha & \ldots & \int_0^1 a_p x_p\, d\alpha & \int_0^1 a_p y\, d\alpha \end{vmatrix}.$$

III. — VARIÉTÉS QUADRATIQUES.

9. Une équation de la forme

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

définit une variété quadratique à $n-1$ dimensions de l'espace projectif E_n.

A l'aide d'un changement de coordonnées on peut réduire cette équation à la forme

$$\sum_i a_i x_i^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Si tous les coefficients a_i sont $\neq 0$, nous dirons que la variété est *ordinaire*, autrement qu'elle est singulière. Nous ne considérerons, en général, que des variétés quadratiques ordinaires et dans ce cas nous écrirons son équation sous la forme

$$\sum_1^{n+1} x_i^2 = 0$$

Il est manifeste que toute droite coupe la variété en deux points distincts ou confondus (dans ce dernier cas la droite est tangente à la variété) ou bien elle est tracée sur la variété.

Étant donnés deux points x', x'', nous dirons qu'ils sont conjugués par rapport à la variété quadratique

$$\sum x_i^2 = 0,$$

si l'on a

$$\sum x_i' x_i'' = 0$$

On peut considérer aussi des variétés quadratiques dans un espace fonctionnel projectif, définies par des équations de la forme

$$\int_0^1 a(\alpha)\, x^2(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

que l'on peut intégrer aisément à l'aide d'un point fixe pris sur la variété et d'un point variable de l'espace fonctionnel.

10. Comme les coordonnées pluckeriennes d'une droite de l'espace projectif à trois dimensions satisfont à l'équation quadratique

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

les droites de cet espace ont pour images les points d'une variété quadratique à quatre dimensions d'un espace projectif E_5. L'étude des complexes, des congruences et des séries de droites d'un E_3 devient, à l'aide de leur image de E_5, intuitive.

CHAPITRE I.

I. — Courbe réelle

11. Une courbe réelle peut être définie soit en partant de la théorie des ensembles (Cantor), soit en partant de la théorie des fonctions de variable réelle (Jordan). Dans les deux cas il est essentiel, pour la géométrie différentielle, que l'on n'envisage pas la courbe dans sa totalité, mais de la considérer comme une succession de points qui se suivent dans un ordre déterminé. Pour bien se rendre compte de cette idéee, on n'a qu'a prendre une épicycloide pour laquelle le rapport des rayons des deux cercles (fixe et mobile) soit irrationnel

La totalite des points de la courbe couvre une couronne circulaire, dans ce sens que tout point de la couronne est un point limite de l'ensemble formé par les points de la courbe. Dans cet ensemble on ne voit plus la courbe, dont les arcs successifs sont cependant intuitifs.

12. Il est donc naturel d'envisager tout d'abord, dans un espace projectif E_n, une suite des points

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_n,$$

ayant un seul point limite M. Dans ce cas, si les droites MM_1, MM_2, ..., MM_n ont une droite limite MT, nous dirons que la succession admet en M une tangente ou un L_1 osculateur Dans certains cas la droite M_nM_p tend aussi vers MT, lorsque M_n et M_p tendent indépendamment vers M (*voir* pour toute cette partie les travaux de Hjelmslev [19], [20], [21], [22]).

La suite ayant une tangente MT en M, considérons le L_2 variable passant par MT et par le point variable M_i de la suite. Si ce L_2 variable admet un L_2 limite, on dira que c'est le L_2 osculateur à la succession en M; il peut être aussi, dans certains cas, la limite du L_2 variable, défini par les points variables M_i, M_j, M_k de la succession, lorsque ceux-ci tendent d'une maniere arbitraire vers M.

On pourra avoir ainsi, au point limite M de la succession, des variétés linéaires osculatrices de différentes dimensions jusqu'à $n-1$ inclusivement. Nous considérerons aussi le point M lui-même comme une variété linéaire osculatrice sans dimensions. Nous désignerons les variétés osculatrices ainsi définies par

$$\Omega_0, \quad \Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{n-1}.$$

13. Considérons actuellement la figure duale, c'est à-dire une suite

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n, \quad \ldots$$

de L'_0 ou de L_{n-1} de l'espace E_n ayant un seul L'_0 limite P. Nous dirons que P est un L'_0 osculateur de la suite, sans dimensions et nous le désignerons par Ω'_0. Ce L'_0 détermine avec P_i un L'_1 variable, que nous supposons tendre vers une limite lorsque P_i tend vers P. On a alors, dans P, un L'_1 ou L_{n-2} osculateur, qui, dans certains cas, est aussi la limite du L'_1 déterminé par P_i et P_k, lorsque ces L'_0 tendent vers P. On a ainsi un Ω'_1 osculateur. En continuant on a les variétés planaires osculatrices

$$\Omega'_0, \quad \Omega'_1, \quad \Omega'_2, \quad \ldots \quad \Omega'_{n-1}.$$

14. Courbe continue definie ponctuellement. — Supposons que dans l'espace projectif E_n les coordonnees projectives x_i $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ du point x soient des fonctions uniformes et continues du paramètre t pour $a \leqq t \leqq b$. Nous dirons que le point x décrit un *arc continu ponctuel* AB.

Dans le cas où les x_i sont proportionnelles à des constantes a_i

$$x_i = \rho(t) a_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n+1),$$

l'arc se réduit à un point.

Dans le cas général, considérons une valeur c de t, intérieure à l'intervalle ab.

On aura un point C de l'arc AB la séparant en deux parties AC et CB. Prenons sur l'arc antérieur AC une suite de points ayant pour seul point limite C. On pourra avoir en C, pour cette suite, des variétés ponctuelles osculatrices Ω_0, Ω_1, $\ldots$, Ω_{n-1}. Si ces variétés restent les mêmes, lorsqu'on change la suite ayant pour limite C, nous dirons que l'arc AC admet en C des variétés osculatrices. On pourra définir de la même manière des variétés osculatrices en C à l'arc CB. Si ces dernières variétés sont les mêmes que les précédentes, nous dirons que l'arc AB admet en C des variétés osculatrices.

Nous supposerons que l'arc AB admet en chaque point des variétés linéaires osculatrices et il est clair ce que l'on entend par l'existence de ces variétés en A et B.

15. **Courbe continue définie tangentiellement.** — Supposons que dans E_n les coordonnées u_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ d'un L'_0 soient des fonctions uniformes et continues d'un paramètre t dans l'intervalle ab. Nous dirons que ce L'_0, variable avec t, décrit un *arc tangentiel continu* $A'B'$ ou bien engendre une portion continue de développable. Un arc tangentiel correspond par dualité à un arc ponctuel.

Dans le cas où

$$u_i = \rho(t) a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

l'arc tangentiel se réduit à un seul L'_0.

Dans le cas général, prenons une valeur c de t dans ab. On aura un L'_0 de l'arc tangentiel $A'B'$ qui partagera cet arc en deux parties $A'C'$ et $C'B'$. On pourra définir alors, comme plus haut, des variétés tangentielles $\Omega'_0, \Omega'_1, \ldots, \Omega'_{n-1}$ à l'arc $A'C'$ et d'autres à l'arc $C'B'$ en C'. Si ces variétés coïncident respecivement, l'arc tangentiel $A'B'$ admettra, en C', des variétés osculatrices tangentielles. Je suppose qu'il en admet en chaque point, extrémités comprises. Les Ω'_{n-1} qui sont des points forment alors un arc ponctuel admettant les mêmes variétés osculatrices que l'arc tangentiel.

De sorte que tout arc tangentiel admettant en chaque point des variétés osculatrices $\Omega'_0, \Omega'_1, \ldots, \Omega_{n-1}$ conduit à un arc ponctuel et réciproquement.

16. Dans les considérations précédentes le paramètre t joue un rôle auxiliaire.

On peut lui appliquer une transformation uniforme, continue et monotone sans que le caractère de l'arc continu change.

D'autres transformations peuvent introduire des *singularités paramétriques* qui n'appartiennent pas à l'arc géométrique.

Il serait intéressant de trouver pour une courbe continue un paramètre *intrinsèque*, *naturel ou canonique*, ayant le caractère projectif, analogue à celui, de caractère métrique, donné par Fréchet [11].

Il convient de mentionner un autre résultat du même auteur (Fréchet, [10]) suivant lequel toute courbe continue est la limite d'une suite tirée d'un ensemble dénombrable de courbes unicursales de E_n.

17. L'étude des différentes singularités que peuvent présenter les arcs continus, de même que les propriétés intéressantes des arcs continus finis, n'appartiennent pas à la géométrie différentielle proprement dite (*voir* les travaux déjà mentionnés de Hjelmslev, ceux de A. Rosenthal [31], ceux de Juel surtout dans l'exposition suggestive donnée par Montel [30], où l'on trouvera une bibliographie étendue pour ce genre de recherches).

II — Courbe analytique.

18. Supposons que dans E_n les coordonnées projectives

$$x_i (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

du point variable x soient des fonctions analytiques d'un paramètre t, holomorphes dans un même cercle de centre $t = 0$.

On peut toujours par un changement de coordonnées prendre

$$\begin{aligned} x_1 &= t^{m_1} + a_{11} t^{m_1+1} + a_{12} t^{m_1+2} + \ldots, \\ x_2 &= t^{m_2} + a_{21} t^{m_2+1} + a_{22} t^{m_2+2} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= t^{m_n} + a_{n1} t^{m_n+1} + a_{n2} t^{m_n+2} + \ldots, \\ x_{n+1} &= 1, \end{aligned}$$

les $m_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ étant des entiers pour lesquels on a

$$m_1 > m_2 > \ldots > m_n \geqq 1,$$

les coefficients a_{ik} étant réels. Lorsque t varie dans le même sens le long de la portion de l'axe réel intérieur au cercle commun de convergence, nous dirons que le point x décrit un *arc analytique* comprenant le point $O_{n+1}(0, 0, \ldots, 0, 1)$.

Lorsque t varie dans tout le cercle de convergence, on a au fond une variété à deux dimensions, que l'on peut considérer, dans le domaine complexe, comme une courbe à une seule dimension.

19. Considérons la droite $O_{n+1}x$ qui joint le point fixe O_{n+1} et le point variable x de la courbe. On voit aisément que le point

$$\begin{array}{l} t^{m_1}+a_{11}t^{m_1+1}+a_{12}t^{m_1+2}+\ldots, \\ t^{m_2}+a_{21}t^{m_2+1}+a_{22}t^{m_2+2}+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t^{m_n}+a_{n1}t^{m_n+1}+a_{n2}t^{m_n+2}+\ldots, \\ 0 \end{array}$$

où bien

$$\begin{array}{l} t^{m_1-m_n}+a_{11}t^{m_1+m_n+1}+\ldots, \\ t^{m_2-m_n}+a_{21}t^{m_2+m_n+1}+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 1+a_{n1}t+a_{n2}t^2+\ldots, \\ 0 \end{array}$$

appartient à cette droite. Il en résulte que lorsque t tend vers zéro d'une manière arbitraire, la droite $O_{n+1}x$ a pour limite $O_{n+1}O_n$, où $O_n(0, 0, \ldots, 1, 0)$ est déterminé. L'arc analytique a donc une tangente, $O_{n+1}O_n$, en O_{n+1}.

On trouve de la même manière que le plan$O_{n+1}O_nx$ tend, pour $t=0$, vers le plan $O_{n+1}O_nO_{n-1}$ (O_i ayant toutes les coordonnées nulles sauf $x_i=1$), qui est le plan osculateur en O_{n+1} de l'arc.

En général, le L_p variable, déterminé par O_{n+1}, O_n, O_{n-1}, $\ldots$, O_{n-p+2} et le point variable x de l'arc, tend, pour $t=0$, vers le L_p osculateur en O_{n+1}, défini par les points O_{n+1}, O_n, O_{n-1}, $\ldots$, O_{n-p+2}, O_{n-p+1}.

Finalement, les points O_{n+1}, O_n, O_{n-1}, $\ldots$, O_n déterminent le L_{n-1} osculateur au même point O_{n+1} de l'arc.

20. Considérons un L_{n-1} quelconque de l'espace E_n passant par le point O_{n+1} de l'arc analytique précédent, mais ne contenant pas la tangente $O_{n+1}O_n$, soit

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n=0 \qquad (\alpha_n\neq 0),$$

il coupe manifestement l'arc en $m_n>1$ points confondus en O_{n+1}. Si $m_n>1$, O_{n+1} est un point singulier de la courbe analytique, dont l'arc considéré est une branche.

Prenons maintenant un L_{n-1} passant par la tangente $O_{n+1}O_n$, mais ne contenant pas le plan osculateur $O_{n+1}O_nO_{n-1}$, soit

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1} = 0 \qquad (\alpha_{n-1} \neq 0),$$

il coupe l'arc en $m_{n-1} > m_n$ points confondus en O_{n+1}. Si

$$m_{n-1} - m_n = 1,$$

nous dirons que la tangente $O_{n+1}O_n$ est *ordinaire*, si, au contraire, $m_{n-1} - m_n > 1$, la tangente est *singulière*. On pourra continuer ainsi l'étude de la nature ordinaire ou singulière des différentes variétés osculatrices en O_{n+1} et l'on verra qu'elle est en relation étroite avec les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Tous les résultats précédents supposent que la représentation paramétrique de l'arc est *propre*, c'est-à-dire qu'à chaque point de l'arc il correspond une seule valeur de t. Il est évident qu'une transformation analytique réelle du paramètre, de la forme

$$t = u + a_1 u^2 + a_2 u^3 + \ldots,$$

ou les a_i sont réels, ne change pas le caractère de la représentation de la courbe.

Il est aisé de voir que les raisonnements précédents peuvent être appliqués tout le long de l'arc analytique, qui admet par conséquent, en chacun de ses points, des variétés osculatrices $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$.

Pour un E_3 Study [34] a introduit les nombres *caractéristiques*

$$k_1 = m_3 - 1, \qquad k_1 = m_2 - m_3 - 1, \qquad k_3 = m_1 - m_2 - 1$$

et il a montré les relations qu'il doit y avoir entre ces nombres pour que la courbe analytique soit située sur une quadrique générale. M^lle Stahelin [33], [34] a complété ce résultat pour le cas d'un cône du second ordre. Il serait intéressant de généraliser ces résultats pour E_n.

21. Par dualité on obtient une portion d'une développable analytique ou un arc analytique tangentiel, défini à l'aide d'un L'_0 ou L_{n-1} variable, dépendant analytiquement d'un paramètre t. En étudiant, comme plus haut, les variétés linéaires osculatrices, on retombera sur un arc analytique ponctuel. Ceci suppose qu'on a en chaque point de l'arc les n variétés osculatrices variables avec t.

Il est clair que dans le cas où l'arc est situé dans une variété linéaire fixe L_p à p dimensions de l'espace projectif E_n $(n > p)$, il ne peut y avoir, en chacun de ses points, que les variétés osculatrices Ω_0, Ω_1, ..., Ω_{p-1}. On pourrait alors simplifier la question et considérer ce L_p comme espace projectif ambiant de la courbe, cependant il sera utile quelquefois de garder E_n comme espace dans lequel la courbe est plongée.

CHAPITRE II.

VARIÉTÉS LINÉAIRES OSCULATRICES.

22. Dans tout ce qui suit les coordonnées projectives

$$x_i(t) \ (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

d'un point x qui décrit une courbe sont ou des fonctions réelles du paramètre réel t, uniformes et continues et admettant des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ au moins, ou bien des fonctions analytiques du paramètre complexe t, holomorphes dans un certain domaine commun.

Nous ne ferons pas de distinction entre les deux cas et nous désignerons sous le nom de *courbe* une courbe réelle satisfaisant aux conditions précédentes ou une courbe analytique.

23. Cela étant posé, soit x un point quelconque de la courbe. Il est clair que le point x', ayant pour coordonnées les dérivées $x'_i(t)$ de $x_i(t)$, est, en général, distinct de x et situé sur la tangente en ce dernier point de la courbe. Le point x' se confond avec x et ne détermine par conséquent plus la tangente en x, seulement lorsque celui-ci est un point singulier de la courbe. Si ce fait a lieu pour tous les points de la courbe, c'est-à-dire si l'on a

$$x' + a(t)x = 0,$$

en d'autres termes si les coordonnées x_i vérifient une même équation différentielle, linéaire et homogène, du premier ordre, alors la courbe se réduit manifestement à un point fixe.

Si les points x et x' sont distincts, alors la tangente xx' et le point x'', ayant pour coordonnées les dérivées secondes de $x_i(t)$, déterminent le plan osculateur en x, sauf dans le cas où x'' est situé sur la tangente xx', qui est alors singulière. Si ce fait a lieu pour tous les points de la courbe, on a

$$x''+a_1x'+a_2x=0$$

et la courbe est une ligne droite.

D'une manière générale, les points x, x', x'', ..., $x^{(p)}$, ayant pour coordonnées les dérivées successives de $x_i(t)$, définissent le L_p osculateur Ω_p en x, sauf pour les points où $x^{(p)}$ est situé dans le L_{p-1} osculateur Ω_{p-1}, qui est alors singulier. Si tous les points de la courbe jouissent de cette dernière propriété, on a

$$x^{(p)}+a_1x^{(p-1)}+\ldots+a_{p-1}x'+a_px=0$$

et la courbe est alors située dans un L_{p-1} fixe.

Dans le cas général, où la courbe de E_n n'appartient pas à un L_p, $p<n$, elle admet en chaque point des variétés linéaires osculatrices Ω_0, Ω_1, ..., Ω_{n-1}, définies chacune, Ω_i par exemple, par les points distincts x, x', x'', ..., $x^{(i)}$. D'ailleurs, les coordonnées $x_i(t)$ de x sont des solutions linéairement indépendantes d'une équation de la forme

$$x^{(n+1)}+a_1x^{(n)}+\ldots+a_nx'+a_{n+1}x=0.$$

Cette équation définit la courbe à une transformation projective près et la courbe, ainsi que ses transformées projectives, ne change pas si l'on applique à l'équation précédente la transformation

$$x=\lambda(t)\bar{x},$$
$$t=\varphi(\bar{t}).$$

Les propriétés projectives de la courbe sont les propriétés de l'équation différentielle linéaire, invariantes à la suite de la transformation générale précédente. C'est le point de vue de Halphen [15], [16], [17], [18], et de Wilczynski [39] pour trouver les propriétés différentielles projectives des courbes planes et des courbes gauches.

24. On peut étudier de la même manière la question duale. Étant donné un $L'_0\equiv L_{n-1}$ variable u, dont les coordonnées $u_i(t)$ sont des fonctions de t, on a une développable ou un arc tangentiel admettant u comme L'_0 osculateur sans dimensions au point de vue tangentiel.

Si l'on prend u et le L'_0 ayant pour coordonnées $u_i(t)$ et que nous notons par u', on obtient un $L'_1 \equiv L_{n-2}$ osculateur, sauf si u et u' sont confondus. Dans ce dernier cas le L'_0 correspondant de la développable est singulier. Si tous les L'_0 de l'arc tangentiel sont singuliers, celui-ci se réduit à un L'_0 fixe.

On peut continuer et considérer le $L'_2 \equiv L_{n-3}$ osculateur, défini par trois L'_0 de l'arc infiniment voisins ou par u, u' et u'', sauf dans le cas où u'' contient le L'_1 osculateur déterminé par u et u'. Alors L'_1 est singulier. Si tous les L'_1 de l'arc tangentiel sont singuliers, ils sont tous confondus en un L'_1 fixe, par lequel passent tous les L'_0 osculateurs de l'arc tangentiel, et ainsi de suite.

25. Dans le cas où l'arc ponctuel est contenu dans E_n, sans être tracé sur une variété linéaire à moins de n dimensions, il peut être aussi défini tangentiellement par ses $L'_0 \equiv L_{n-1}$ osculateurs. Il conduit donc à un arc tangentiel qui a les mêmes variétés linéaires osculatrices que l'arc ponctuel. Si

$$x^{(n+1)} + a_1 x^{(n)} + a_2 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x' + a_{n+1} x = 0$$

est l'équation différentielle vérifiée par les coordonnées $x_i(t)$ du point x de l'arc ponctuel, alors, en remarquant que pour le L_{n-1} osculateur u on a

$$\sum u x = 0, \qquad \sum u x' = 0, \qquad \sum u x^{(n-1)} = 0$$

et que l'on peut poser

$$\sum u x^{(n)} = 1,$$

il résulte que les coordonnées $u_i(t)$ de u satisfont à l'équation

$$u^{(n+1)} - (a_1 u)^n + (a_2 u)^{n-1} - \ldots + (-1)^n (a_n u)' + (-1)^{n+1} a_{n+1} u = 0,$$

adjointe de la précédente.

Dans ce cas nous serons souvent conduits à envisager tantôt l'arc ponctuel, tantôt l'arc tangentiel correspondant, c'est-à-dire que nous définirons la courbe ou par ses points $\Omega_0 \equiv \Omega'_{n-1}$ ou bien par ces $L_{n-1} = L'_0$ osculateurs $\Omega'_0 \equiv \Omega_{n-1}$.

26. Dans le cas où l'arc ponctuel, contenu dans E_n, est tracé sur un L_p, où $p < n$, nous aurons des résultats différents que nous allons étudier.

Prenons d'abord le cas $p = 0$, c'est-à dire où l'arc est réduit à un seul point. Il n'admet ponctuellement qu'une seule variété osculatrice Ω , ce point même, qu'on peut considérer défini par une équation différentielle de la forme

$$x' + ax = 0 \tag{1}$$

On peut adjoindre à cette équation la suivante :

$$u^{(n)} + \alpha_1 u^{(n-1)} + . \quad + \alpha_{n-1} u' + \alpha_n u = 0, \tag{2}$$

dont nous prendrons $n+1$ solutions $u_i(t)$, qui sont liées par conséquent par une relation lineaire et homogène à coefficients constants. On peut supposer que cette relation exprime que le L'_0 u passe par le point défini par (1). Ce L'_0 engendre un arc tangentiel qui admet des varietés osculatrices $\Omega'_0, \Omega'_1, \ldots, \Omega'_{n-1}$, la dernière étant le point fixe, par lequel passent, d'ailleurs, toutes les autres. Cet arc tangentiel est la généralisation pour E_n d'un cône.

Passons au cas général. L'arc ponctuel est défini par $n+1$ solutions de

$$x^{(p+1)} + a_1 x^{(p)} + . \quad + a_p x' + a_{p+1} x = 0 \tag{3}$$

et il admet ponctuellement des variétés osculatrices $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_p$, cette dernière étant fixe et contenant l'arc tout entier.

Associons, d'une maniere arbitraire, à l'équation (3) l'équation

$$u^{(n-p)} + \alpha_1 u^{(n-p-1)} + .. \quad + \alpha_{n-p-1} u' + \alpha_{n-p} u = 0, \tag{4}$$

dont nous prenons $n+1$ solutions, qui sont donc liées par $p+1$ relations linéaires et homogènes. On pourra choisir celles-ci de manière qu'elles définissent le $L_p \equiv L'_{n-p-1}$ qui contient l'arc ponctuel donné. Les solutions $u_i(t)$ déterminent un arc tangentiel que nous associons ainsi à l'arc ponctuel. On a alors deux sortes de variétés osculatrices, celles de l'arc ponctuel $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_p$, celui-ci étant fixe et puis celles de l'arc tangentiel associé $\Omega'_0, \Omega'_1, \ldots, \Omega'_{n-p-1} \equiv \Omega_p$.

Cette configuration, formée par l'association d'un arc ponctuel et d'un arc tangentiel, a l'avantage d'être transformée, par une dualité, en une figure de même espèce.

CHAPITRE III.

I — Courbes dérivées.

27. Dérivées ponctuelles. — Étant donnée une courbe d'un espace projectif E_n à n dimensions, que nous supposons non contenue dans un L_p, $p < n$, nous allons en déduire, de deux manières différentes, des courbes que nous appelons des *courbes dérivées* ou simplement des *dérivées* de la courbe donnée.

Considérons tout d'abord la courbe comme un arc ponctuel décrit par le point x et prenons sur la tangente en x le point $x' + \lambda x$ de coordonnées

$$x'_i(t) + \lambda\, x_i(t) \qquad (i = 1, 2, \quad n+1),$$

où $x'_i(t)$ est la dérivée de $x_i(t)$ et λ une fonction arbitraire de t. Lorsque x décrit l'arc donné, le point $x' + \lambda x$ décrit un arc que nous appelons une *dérivée ponctuelle du premier ordre* ou une D_1 de la courbe donnée.

Une dérivée du premier ordre d'une D_1 sera pour l'arc initial, que nous notons par D_0, une *dérivée du second ordre* ou une D_2; elle dépend manifestement de deux fonctions arbitraires et elle est décrite par le point

$$x'' + \lambda_1 x' + \lambda_2 x.$$

On définit ainsi une suite de dérivées

$$D_1, \quad D_2, \quad \ldots, \quad D_{n-1},$$

dépendant respectivement de $1, 2, \ldots, n-1$ fonctions arbitraires. Ce sont les *dérivées ponctuelles* de la courbe donnée D_0.

28. Étant donnée une D_r de la courbe D_0 et en supposant $r + s \leqq n - 1$, il est presque évident que ses $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_s$ osculateurs sont situés respectivement dans les $\Omega_r, \Omega_{r+1}, \ldots, \Omega_{r+s}$ osculateurs correspondants de D_0, car un point p de D_r est défini par

$$y = x^{(r)} + \lambda_1 x^{(r-1)} + \ldots + \lambda_{r-1} x' + \lambda_r x$$

et il est visible que le point y' est situé dans le Ω_{r+1}, y'' dans le Ω_{r+2}, ..., $y^{(s)}$ dans le Ω_{r+s} de D_0 en x.

On a aussi la propriété suivante : *La dérivée d'ordre s d'une dérivée d'ordre r de* D_0 *est une dérivée d'ordre* $r+s \leqq n-1$ *de cette courbe, ce que l'on peut écrire sous la forme*

$$D_s(D_r) = D_{r+s}.$$

29. Dérivées tangentielles. — L'arc ponctuel D_0 de E_n n'étant pas situé dans un L_p, $p < n$, on peut lui adjoindre un arc tangentiel D'_0, engendré par les $\Omega'_0 \equiv \Omega_{n-1}$ ($L'_0 \equiv L_{n-1}$ osculateurs) de l'arc.

Désignons par u ce Ω'_0 de D'_0, que l'on obtiendra aisement par des différentiations à partir du point x de l'arc ponctuel D_0.

Menons par le Ω'_1 (L'_1 osculateur) de D'_0, défini par u et par le Ω'_0 infiniment voisin, ou bien, ce qui est la même chose, par u et u', un L'_0 arbitraire $u'+\lambda u$, dépendant d'une fonction arbitraire λ. Ce L'_0 engendre, lorsque t varie, un arc tangentiel que nous appelons une *dérivée tangentielle du premier ordre* ou une D'_1 de l'arc tangentiel donné D'_0.

Une dérivée tangentielle du premier ordre d'une D'_1 sera dite une *dérivée tangentielle du second ordre* ou une D'_2 de D'_0 et ainsi de suite. On aura la suite D'_1, D'_2, ..., D'_{n-1} de dérivées tangentielles de D'_0 des différents ordres, dépendant respectivement de 1, 2, ..., $n-1$ fonctions arbitraires.

On a aussi pour ces dérivées la propriété : *Étant donnée une* D'_r *de* D'_0, *ses* Ω_0, Ω'_1, ..., Ω'_s *contiennent les* Ω'_r, Ω'_{r+1}, ..., Ω'_{r+s}, $r+s \leqq n-1$, *correspondants de* D'_0, *de même que*

$$D'_s(D'_r) \equiv D'_{r+s}$$

Toutes ces propriétés sont simples et découlent aisément des définitions données, cependant ce sont des propriétés différentielles fondamentales des courbes d'un E_n.

II. — Courbes antidérivées.

30. Antidérivées ponctuelles. — Étant donné un arc ponctuel Δ_0 de l'espace projectif E_n, qui n'est pas tracé sur un L_p, $p < n$, il s'agit de trouver un autre arc Δ_r, qui ne soit pas contenu dans une variété linéaire à moins de n dimensions et qui ait l'arc donné Δ_0 comme dérivée ponctuelle d'ordre r. Nous dirons que Δ_r est une *antidérivée ponctuelle d'ordre* r de Δ_0.

Nous allons montrer que ce problème, qui à première vue paraît exiger, pour sa solution, l'intégration d'équations différentielles, peut être résolu sans quadratures.

A cet effet il faut se rendre compte des relations géométriques qui existent entre les courbes Δ_0 et Δ_r, cette dernière pouvant être définie aussi tangentiellement.

Par définition, le point générateur x de Δ_0 est situé dans le $\Omega_r \equiv \Omega'_{n-r-1}$ au point correspondant y de Δ_r, la tangente en x à Δ_0 est contenue dans le $\Omega_{r+1} \equiv \Omega'_{n-r-2}$ en y à Δ_r et, en général, le Ω_s en x est situé dans le $\Omega_{r+s} \equiv \Omega'_{n-r-s-1}$ en y de Δ_r.

On voit donc, en particulier, que si l'on prend $s = n - r - 1$, le Ω_{n-r-1} en x à Δ_0 se trouve dans le Ω_{n-1} en y, c'est-à-dire dans le Ω'_0 qui engendre tangentiellement Δ_r.

Réciproquement, faisons passer, d'après une loi arbitraire, un L'_0 par chaque Ω_{n-r-1} de l'arc Δ_0 donné. Ce L'_0, variable avec t, définit un arc tangentiel, dont l'arc ponctuel correspondant, c'est-à-dire ayant les mêmes variétés linéaires osculatrices, a évidemment l'arc donné Δ_0 comme dérivée ponctuelle d'ordre r, c'est donc une antidérivée Δ_r d'ordre r de cet arc. Or, l'opération géometrique que nous venons de faire, pour passer de Δ_0 à Δ_r, est exactement la même que celle qui définit une dérivée tangentielle d'ordre r à partir de l'arc tangentiel correspondant à Δ_0.

On a donc le résultat suivant :

Toute antidérivée ponctuelle Δ_r de l'arc ponctuel Δ_0 est une dérivée tangentielle du même ordre D'_r de l'arc tangentiel correspondant D'_0.

De là il résulte manifestement que *toute antidérivée ponctuelle s'obtient sans quadratures.*

31. Par dualité on obtient un résultat analogue, que nous nous bornons à énoncer : *Toute antidérivée tangentielle Δ'_r d'ordre r d'un arc tangentiel Δ'_0 est une dérivée ponctuelle D_r du même ordre de l'arc ponctuel qui correspond à Δ'_0, c'est-à-dire ayant les mêmes variétés osculatrices.*

Remarque. — Revenons à l'antidérivée ponctuelle Δ_r d'un arc ponctuel Δ_0. Nous nous sommes restreint au cas général, où cet arc Δ_0 n'est pas contenu dans un L_p, $p < n$. On peut envisager aussi les cas exclus, en tenant compte de la génération tangentielle que nous venons de donner à Δ_r dans le cas général.

Nous n'avons qu'à faire passer, selon une loi arbitraire, des L'_0 par les Ω_{n-r-1} de Δ_0. Ces L'_0 définissent tangentiellement une Δ_r quelconque de Δ_0, ce qui n'est possible que si

$$n - r - 1 \leqq p - 1,$$

c'est-à-dire

$$r + p \geqq n.$$

Avec cette condition restrictive la notion de antidérivée d'ordre de Δ_0 a encore un sens et toute Δ_r de cet arc s'obtient, comme dans le cas général, sans quadratures.

CHAPITRE IV.

COURBES FONCTIONNELLES.

32. On peut définir une courbe fonctionnelle à l'aide d'une fonction réelle et continue $x(\alpha, t)$ des variables α et t et admettant des dérivées continues par rapport à t dans les intervalles $0 \leqq \alpha \leqq 1$ et $a \leqq t \leqq b$.

Pour chaque valeur de t on a un point fonctionnel de la courbe, qui est décrite par ce point lorsque t varie de a à b. D'une manière plus précise nous dirons que ce point décrit un *arc ponctuel* de l'espace fonctionnel.

Si l'on considère, dans le même espace fonctionnel, le L'_0

$$\int_0^1 u(\alpha, t)\, x(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

variable avec t, on obtient un *arc tangentiel* ou une portion de développable fonctionnelle, qui correspond par dualité à un arc ponctuel.

33. Il est aisé de définir, pour chaque espèce d'arc fonctionnel, des variétés linéaires osculatrices. Cependant les arcs ponctuels n'admettent que des variétés osculatrices ponctuelles

$$\Omega_0, \quad \Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_i,$$

en général en nombre infini, sauf si l'arc est contenu dans un L_p. Les arcs tangentiels n'admettent que des variétés osculatrices tangentielles

$$\Omega'_0, \quad \Omega'_1, \quad \ldots, \quad \Omega'_i,$$

Une dualité transforme un arc ponctuel et ses Ω_i en un arc tangentiel et ses Ω'_i.

On ne peut pas trouver, comme dans un E_n, un arc ponctuel ayant les mêmes variétés osculatrices qu'un arc tangentiel donné.

Les deux espèces d'arc sont, dans l'espace fonctionnel, nettement séparées.

34. On peut définir, ici aussi, des dérivées ponctuelles

$$D_1, \quad D_2, \quad \ldots, \quad D_i,$$

d'un arc ponctuel donné D_0 et des dérivées tangentielles D'_i d'un arc tangentiel D'_0. Les opérations analytiques sont les mêmes que dans un E_n.

Il n'en est pas de même pour les antidérivées. Il n'y a pas, par exemple, identité entre une antidérivée ponctuelle Δ_r d'un arc ponctuel donné Δ_0 et une dérivée tangentielle de ce même arc, parce que cette dérivée tangentielle n'existe pas dans l'espace fonctionnel.

De sorte qu'une antidérivée quelconque Δ_r de Δ_0 ne s'obtient plus sans quadratures, comme dans un E_n, mais on peut démontrer aisément que le problème peut être résolu à l'aide de quadratures.

En effet, soit $x(\alpha, t)$ le point générateur de l'arc donné Δ_0, $y(\alpha, t)$ celui de l'arc Δ_r, qu'il s'agit de déterminer.

La relation géométrique entre les deux arcs peut être exprimée par l'équation

$$y^{(r)} + a_1 y^{(r-1)} + a_2 y^{(r-2)} + \ldots + a_{r-1} y' + a_r y = \lambda(t) x,$$

où a_1, a_2, $\ldots$, a_r et λ sont des fonctions arbitraires de t et $y^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ les dérivées de $y(\alpha, t)$ par rapport à t.

On peut manifestement écrire l'équation précédente sous la forme plus commode

$$\begin{vmatrix} y^{(r)} & y^{(r-1)} & \dots & y' & y \\ y_1^{(r)} & y_1^{(r-1)} & \dots & y_1' & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_r^{(r)} & y_r^{(r-1)} & \dots & y_r' & y_r \end{vmatrix} = \mu(t)x,$$

où $y_1, y_2, \dots, y_r$ et μ sont des fonctions arbitraires de t. On peut poser alors

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_r y_r$$

et appliquer la méthode des variations des constantes pour trouver, par des quadratures, les fonctions inconnues $\lambda_i(\alpha, t)$.

On peut trouver de la même manière, par des quadratures, les antiderivées tangentielles d'un arc tangentiel donné.

CHAPITRE V.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ANTIDÉRIVÉES.

35. Étant donnée une courbe (ξ) de E_n', décrite par le point ξ, on peut définir une de ses antidérivées ponctuelles du premier ordre (x) à l'aide de

$$x_i' + a x_i = \alpha \xi_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

ou

$$x' + a x = \alpha \xi,$$

a et α étant des fonctions de t. Comme on peut multiplier les x par un facteur, on peut réduire l'équation précédente à

$$x' = \alpha \xi$$

Cela étant, considérons deux antidérivées du premier ordre (x) et (y) de (ξ). On a

$$x' = \alpha \xi, \qquad y' = \beta \xi$$

On tire de ces relations

$$\beta x' - \alpha y' = 0$$

ou bien

$$(\beta x - \alpha y)' = \beta' x - \alpha' y,$$

qui prouve que le point

$$Z = \beta x - \alpha y,$$

situé sur la droite xy, décrit une courbe (Z) tangente à cette droite. La droite variable xy admet donc une enveloppe (Z) et celle-ci est évidemment une antidérivée du second ordre de (ξ). On a donc le résultat suivant :

Deux antidérivées du premier ordre d'une courbe donnée déterminent une antidérivée du second ordre de la même courbe.

36. Prenons maintenant trois antidérivées du premier ordre (x), (y) et (z) de (ξ), définies par

$$x' = \alpha\xi, \qquad y' = \beta\xi, \qquad z' = \gamma\xi.$$

Nous supposerons que les points x, y, z ne sont pas en ligne droite et que le plan xyz ne passe pas par ξ.

Nous savons que les droites yz, zx et xy restent tangentes à des courbes (X), (Y) et (Z), décrites par les points

$$X = \beta z - \gamma y, \qquad Y = \gamma x - \alpha z, \qquad Z = \alpha y - \beta x,$$

qui sont manifestement en ligne droite.

Cette droite XYZ reste, elle aussi, tangente à une courbe (θ), décrite par le point

$$\theta = \begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha' \\ y & \beta & \beta' \\ z & \gamma & \gamma' \end{vmatrix}$$

Il est évident que la courbe (θ) admet le plan xyz comme plan osculateur, c'est-à-dire dans E_n le plan xyz a une enveloppe (θ), qui est une antidérivée ponctuelle du troisième ordre de (ξ).

D'une manière générale, le L_{p-1}, défini par p points qui décrivent des antidérivées du premier ordre de (ξ), a une enveloppe (ω), qui est une antidérivée du $p^{\text{ième}}$ ordre de (ξ). Le point ω qui décrit cette antidérivée (ω) est défini par le déterminant

$$\omega = | \; x \quad \alpha \quad \alpha' \quad .. \quad \alpha^{(p-2)} \; |,$$

dont nous avons écrit seulement la première ligne et qui est analogue au déterminant θ.

37. Revenons aux deux antidérivées (x) et (y) de (ξ) et prenons sur ξx, ξy les points

$$\bar{x} = x + \lambda\xi, \qquad \bar{y} = y + \mu\xi.$$

Comme on a

$$\bar{x}' = (\lambda' + \alpha)\xi + \lambda\xi', \qquad \bar{y}' = (\mu' + \beta)\eta + \mu\xi',$$

les tangentes en $\bar{x}$ et $\bar{y}$ aux courbes $(\bar{x})$ et $(\bar{y})$ se coupent si l'on a

$$\lambda' + \alpha = \rho\lambda, \qquad \mu' + \beta = \rho\mu,$$

ρ étant une fonction arbitraire de t.

Les courbes $(\bar{x})$ et $(\bar{y})$, pour lesquelles on a

$$\bar{x}' = \lambda\bar{\xi}, \qquad \bar{y}' = \mu\bar{\xi},$$

avec

$$\bar{\xi} = \xi' + \rho\xi,$$

sont donc des antidérivées premières de la courbe $(\bar{\xi})$, dérivée première de (ξ).

Remarquons maintenant que pour le point

$$\bar{Z} = \mu\bar{x} - \lambda\bar{y} = \mu x - \lambda y,$$

commun aux droites $\bar{x}\bar{y}$ et xy, on a

$$\bar{Z}' = (\mu\bar{x} - \lambda\bar{y})' = \mu'\bar{x} - \lambda'\bar{y};$$

c'est donc le point de contact de $\bar{x}\bar{y}$ avec son enveloppe $(\bar{Z})$. *La droite $\bar{x}\bar{y}$ touche par conséquent son enveloppe au point où elle coupe xy.* Naturellement $(\bar{Z})$ est une antidérivée du second ordre de $(\bar{\xi})$.

38. Considérons maintenant trois antidérivées de premier ordre (x), (y) et (z) de (ξ) et prenons sur ξx, ξy, ξz les points

$$\bar{x} = x + \lambda\xi, \qquad \bar{y} = y + \mu\xi, \qquad \bar{z} = z + \nu\xi.$$

Les tangentes en $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ aux courbes $(\bar{x})$, $(\bar{y})$, $(\bar{z})$ sont concourantes, si l'on a

$$\lambda' + \alpha = \rho\lambda, \qquad \mu' + \beta = \rho\mu, \qquad \nu' + \gamma = \rho\nu,$$

ρ étant une fonction arbitraire de t. Alors les courbes $(\bar{x})$, $(\bar{y})$, $(\bar{z})$

sont des antidérivées du premier ordre de la courbe $(\bar{\xi})$, décrite par le point

$$\bar{\xi} = \xi' + \rho\xi,$$

car on a

$$\bar{x}' = \lambda\bar{\xi}, \qquad \bar{y}' = \beta\bar{\xi}, \qquad \bar{z}' = \nu\bar{\xi}.$$

La courbe $(\bar{\xi})$ est visiblement une dérivée première de (ξ).

Selon les propriétés précédentes, les points $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, où les droites $\overline{yz}$, $\overline{zx}$, $\overline{xy}$ coupent les droites yz, zx, xy, décrivent des antidérivées du second ordre de $(\bar{\xi})$, à savoir les enveloppes de $\overline{yz}$, $\overline{zx}$, $\overline{xy}$. Il résulte encore des formules

$$\bar{X} = \mu\bar{y} - \nu\bar{z}, \qquad \bar{Y} = \nu\bar{z} - \lambda\bar{x}, \qquad \bar{Z} = \lambda\bar{x} - \mu\bar{y}$$

que le point

$$\theta = \begin{vmatrix} \bar{x} & \lambda & \lambda' \\ \bar{y} & \mu & \mu' \\ \bar{z} & \nu & \nu' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \lambda & \alpha \\ y & \mu & \beta \\ z & \nu & \gamma \end{vmatrix},$$

commun à la droite $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ et XYZ (§ 36), décrit une courbe tangente à $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, c'est-à-dire une antidérivée du troisième ordre de la courbe $(\bar{\xi})$.

Ces propriétés sont naturellement susceptibles de généralisations intéressantes.

39. Considérons de nouveau les deux antidérivées du premier ordre (x), (y) de (ξ) et déterminons tous les points de la droite xy qui décrivent aussi de telles antidérivées de (ξ). Il faudra déterminer les fonctions λ, μ de t de manière qu'on ait

$$(\lambda x + \mu y)' = \sigma\xi,$$

σ étant une fonction convenable de t. On en déduit

$$(\lambda\alpha + \mu\beta)\xi + \lambda' x + \mu' y = \sigma\xi.$$

Comme les points x, y et ξ ne sont pas en ligne droite, on a nécessairement

$$\lambda' = 0, \qquad \mu' = 0, \qquad \lambda\alpha + \mu\beta = \rho,$$

d'où en particulier

$$\lambda = \text{const.}, \qquad \mu = \text{const.}$$

On en déduit la proposition suivante : *Tous les points de la droite xy, qui décrivent des antidérivées du premier ordre de* (ξ), *forment, au point de vue projectif, un système invariable.*

On peut approfondir la proposition précédente en ne supposant pas connues deux antidérivées du premier ordre de (ξ), mais en se donnant simplement l'enveloppe (Z) des droites qui contiennent les points qui décrivent les antidérivées du premier ordre cherchées.

Comme (Z) est une antidérivée du second ordre de (ξ), on a

$$Z'' + p_1 Z' + p_2 Z = \rho\xi.$$

D'autre part, un point $Z' + \lambda Z$, pris sur la tangente en Z, décrit une antidérivée du premier ordre de ξ, si l'on a

$$(Z' + \lambda Z)' + q(Z' + \lambda Z) = \sigma\xi.$$

En développant cette équation et en l'identifiant à la précédente, on a

$$\lambda + q = p_1, \qquad \lambda' + q\lambda = p_2, \qquad \sigma = \rho,$$

d'où, en éliminant q, on tire

$$\lambda' - \lambda^2 + p_1\lambda - p_2 = \sigma,$$

c'est-à-dire une équation de Riccati.

On a donc sur la tangente ZZ' de (Z) ∞^1 points qui décrivent des antidérivées du premier ordre de (ξ). Quatre points quelconques, parmi ces points, ont un rapport anharmonique constant, c'est à-dire, comme nous l'avons déjà vu, ces ∞^1 points forment, au point de vue projectif, un système invariable.

40. Considérons maintenant trois antidérivées du premier ordre (x), (y) et (z) de (ξ), et cherchons à déterminer tous les points du plan xyz, qui décrivent des antidérivées du premier ordre de (ξ). Il s'agit de trouver les fonctions λ, μ, ν, σ de manière que l'on ait

$$(\lambda x + \mu y + \nu z)' = \sigma\xi.$$

Comme on a

$$x' = \alpha\xi, \qquad y' = \beta\xi, \qquad z' = \gamma\xi,$$

la relation précédente devient

$$(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\xi + \lambda' x + \mu' y + \nu' z = \sigma\xi.$$

Or, le plan xyz ne passe pas par ξ, on a donc nécessairement

$$\sigma = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma, \qquad \lambda' = 0, \qquad \mu' = 0, \qquad \nu' = 0,$$

d'où, en particulier,

$$\lambda = \text{const.}, \qquad \mu = \text{const.}, \qquad \nu = \text{const.}$$

On en conclut : *Tous les points du plan xyz, qui décrivent des antidérivées du premier ordre de* (ξ), *forment, au point de vue projectif, un système invariable.*

Cette proposition a lieu dans le cas général où l'on prend p courbes antidérivées du premier ordre de (ξ). Le L_{p-1}, déterminé par les points correspondants de ces courbes, contient ∞^{p-1} points qui décrivent des antidérivées du premier ordre de (ξ). *Tous ces points forment un système invariable au point de vue projectif.*

Cette propriété géométrique intéressante constitue la généralisation naturelle de deux propriétés connues; l'une métrique, donnée sous la forme générale par Guichard [13] ou [14], l'autre affine, donnée pour les courbes planes par M. Walsh [38].

La première propriété, celle de Guichard, est une généralisation des développantes des courbes gauches, à savoir : *Tous les points d'un L_p osculateur variable de la courbe située dans un espace euclidien à n dimensions, qui décrivent des trajectoires orthogonales de ce L_p, forment, au point de vue euclidien, un système invariable*, c'est-à-dire la distance de deux quelconques de ces points reste constante.

De même, la seconde propriété, celle de M. Walsh, généralisée pour une courbe d'un espace euclidien à n dimensions, s'énonce de la manière suivante : *Tous les points d'un L_p osculateur variable d'une telle courbe qui décrivent des courbes à tangentes parallèles, forment, au point de vue affine, un système invariable*, c'est-à-dire pour trois quelconques de ces points, en ligne droite, le rapport des distances d'un d'entre eux aux deux autres, reste constant.

Remarques. — I. Les problèmes géométriques du paragraphe 40 conduisent à des généralisations des équations de Riccati, qui seraient intéressantes à étudier.

II. On peut tirer une conclusion importante de la propriété donnée au paragraphe 39.

Considérons, dans un E_3, une congruence de droites ayant une courbe focale C et une développable focale S, c'est à-dire une congruence formée par les droites qui s'appuient sur une courbe C et restent tangentes à une surface développable S. Il est clair que l'arête de rebroussement Γ de la développable S est une antidérivée du second ordre de la courbe C.

Il s'agit de décomposer la congruence donnée en deux familles de développables. Une des familles est immédiate : elle se compose des faisceaux plans ayant pour centres les points de la courbe C et pour plans les plans osculateurs aux points correspondants de la courbe Γ.

L'autre famille se compose des développables formées par les tangentes aux antidérivées du premier ordre de C, qui sont en même temps des dérivées du premier ordre de Γ. Or, ces antidérivées spéciales s'obtiennent en intégrant une équation de Riccati. Si nous connaissons une de ces antidérivées, le problème se résout à l'aide de deux quadratures; si l'on en connaît deux, a l'aide d'une seule quadrature; enfin si l'on en connaît trois, sans quadratures.

C'est ainsi que dans le cas des développées d'une courbe gauche C, on a au fond à décomposer la congruence des normales de la courbe en ses développables. Or, les normales de la courbe C restent tangentes à la développable polaire de C. C'est donc le cas précédent. D'autre part, on connaît deux développables spéciales, ce sont les deux nappes de la développable circonscrite à C et au cercle imaginaire de l'infini (*voir* aussi Darboux [9]). Le problème des développées se résout donc, en général, à l'aide d'une seule quadrature, ce qui est bien connu. De plus, deux normales de C, qui restent tangentes à des développées, forment avec les normales isotropes un rapport anharmonique constant; leur angle est donc invariable, ce qui est le théorème de Joachimstahl.

CHAPITRE VI.

COURBES RÉCIPROQUEMENT DÉRIVÉES.

41. Nous dirons que deux courbes (x) et (y) sont *réciproquement dérivées d'ordre* (r, s), si la courbe (y) est la dérivée ponctuelle d'ordre r de (x) et celle-ci la dérivée ponctuelle d'ordre s de (y). Comme ces courbes sont en même temps des antidérivées ponctuelles l'une de l'autre, c'est-à-dire des dérivées tangentielles, il est clair qu'on peut se borner au cas où les courbes (x) et (y) sont, comme nous les avons supposées, des dérivées ponctuelles l'une de l'autre, les autres cas pouvant se ramener à celui-ci.

Cela étant, on a entre les points correspondants x et y des deux courbes deux relations de la forme suivante .

$$\begin{aligned} &a x^{(r)} + a_1 x^{(r-1)} + \quad + a_{r-1} x' + a_r x = y \qquad (a \neq 0), \\ &b y^{(s)} + b_1 y^{(s-1)} + \quad + b_{s-1} y' + b_s y = x \qquad (b \neq 0). \end{aligned}$$

En éliminant successivement y et x entre ces équations, on obtient pour x et pour y des équations différentielles linéaire et homogène d'ordre $r+s$. On en conclut que la figure formée par les courbes x et y est située dans un E_{r+s-1} ou bien elle est la projection d'une telle figure sur une variété linéaire L_p, $p < r+s-1$

Nous nous bornons au cas général où l'espace ambiant de la figure est E_{r+s-1}.

Remarquons maintenant que, dans cet espace, les courbes (x) et (y) n'ont que des Ω_{r+s-2} (des L_{r+s-2} osculateurs) au plus, donc

$$r \leqq r + s = 2,$$
$$s \leqq r + s = 2,$$

d'où

$$r \geqq 2, \qquad s \geqq 2.$$

Le cas le plus simple dans la recherche des courbes réciproquement dérivées est donc celui où $r = s = 2$. Nous dirons alors que c'est *le problème de Kœnigs*, parce que c'est M. Kœnigs qui l'a étudié pour la première fois [27], [28], [29] (*voir* aussi Bianchi [2]).

42. Le problème, dans le cas général, est celui-ci : *Étant donnée une courbe* (x) *de l'espace projectif* E_{n-1}, $n = r+s$, *déterminer la courbe* (y) *la plus générale de cet espace, qui forme avec* (x) *un couple de courbes réciproquement dérivées d'ordre* (r, s).

Nous indiquerons une méthode pour étudier ce cas général et surtout pour mettre en évidence la difficulté du problème et le degré de généralité de la solution.

Supposons que l'on se donne, d'une manière arbitraire, la courbe (x) par l'équation

$$x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \quad + p_{n-1} x' + p_n x = 0, \qquad (n = r + s)$$

et qu'il s'agit de déterminer la courbe (y).

Celle-ci, étant une antidérivée ponctuelle d'ordre s de (x), est une dérivée tangentielle du même ordre de (x). On peut donc la définir tangentiellement à l'aide d'un L'_0 arbitraire qui passe constamment par le Ω_{r-2} correspondant de (x), car $n - s - 2 = r - 2$. Il faudra écrire ensuite que le point y de la courbe est situé dans le Ω_r de (x).

Considérons le $L'_0 \equiv L_{n-2}$ suivant

$$| \, X \quad x \quad x' \quad x'' \qquad x^{(r-2)} \quad x^{(i_1)} \quad x^{(i_2)} \quad . \qquad x^{(i_s)} \, | = 0,$$

où les différentes lignes du déterminant d'ordre $n = r + s$ s'obtiennent en donnant aux éléments de la ligne écrite successivement des indices $1, 2, \ldots, n$; où les $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sont les coordonnées projectives courantes; où, enfin, les indices supérieurs de dérivation $i_1, i_2, \ldots, i_s$ sont différents et l'on a

$$r - 1 \leqq i_1, i_2, \ldots, i_s \leqq r + s - 1$$

Il est manifeste que ce L'_0 passe constamment par le Ω_{r-2} de (x). En donnant aux $i_1, i_2, \ldots, i_s$ toutes les valeurs possibles, on obtient $s + 1$ L'_0, dont nous écrivons les équations sous la forme

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad P_{s+1} = 0.$$

Le L'_0 général qui passe par le Ω_{r-2} de (x) est alors

$$u_1 P_1 + u_2 P_2 + \ldots + u_{s+1} P_{s+1} = 0,$$

les u_i étant des fonctions arbitraires de t, leur nombre essentiel étant s.

Le point y de la courbe antidérivée (y) d'ordre s de (x) s'obtiendra à l'aide de l'équation précédente et des $r + s - 2 = n - 2$ équations que l'on tire de celle-là en la dérivant successivement $n - 2$ fois par rapport à t.

On peut évidemment poser

$$y = \alpha x + \alpha_1 x' + \ldots + \alpha_{n-1} x^{(n-1)} \qquad (n = r + s)$$

et introduire cette expression dans les $n - 1$ équations formées précédemment. Il sera aisé d'en tirer les valeurs de α, α_1, ..., α_{n-1} à un facteur près.

Or, pour que (y) soit une dérivée ponctuelle d'ordre r de (x), il faut que l'on ait

$$\alpha_{r+1} = 0, \qquad \alpha_{r+2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{r+s-1} = 0.$$

On a ainsi $s - 1$ équations qui peuvent déterminer $s - 1$ des fonctions u_i au moyen d'une d'entre elles, qui restera arbitraire.

La solution du problème dépend donc d'une seule fonction arbitraire. Toute la difficulté consiste dans la détermination effective et la plus simple des fonctions u_i à l'aide d'une fonction arbitraire.

43. Le problème de Kœnigs. — Dans le cas particulier du problème de Kœnigs, on peut démontrer que la solution s'obtient sans quadratures.

Soit

$$(1) \qquad x^{\text{IV}} + p x''' + q x'' + r x' + s x = 0$$

l'équation différentielle vérifiée par les coordonnées $x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ d'un point quelconque de la courbe donnée (x). Nous simplifierons un peu la méthode générale en posant

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &\equiv | \, \mathrm{X} \quad x \quad x' \quad x'' \, |, & \mathrm{Q} &\equiv | \, \mathrm{X} \quad x \quad x' \quad x''' \, |, \\ \mathrm{R} &\equiv | \, \mathrm{X} \quad x \quad x'' \quad x''' \, |, & \mathrm{S} &\equiv | \, \mathrm{X} \quad x' \quad x'' \quad x''' \, |, \end{aligned}$$

de sorte que les plans

$$\mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{Q} = 0, \qquad \mathrm{R} = 0, \qquad \mathrm{S} = 0$$

forment un tétraèdre mobile attaché à chaque point x de la courbe.

Un plan arbitraire passant par x a une équation de la forme

$$(2) \qquad u\mathrm{P} + v\mathrm{Q} + \mathrm{R} = 0,$$

u et v étant des fonctions arbitraires de t.

L'arête de rebroussement de l'enveloppe de ce plan est une antidérivée ponctuelle du second ordre de (x). Il s'agit d'écrire que cette antidérivée est en même temps une dérivée du second ordre de (x), c'est-à-dire que le point correspondant à x est situé dans le plan osculateur

$$\mathrm{P} = 0.$$

A cet effet, il faut dériver deux fois l'équation (2) en tenant compte de l'équation différentielle (1) de la courbe (x) et en remarquant que l'on a

$$P' \equiv Q, \qquad Q' \equiv R - pQ + qP,$$
$$R' \equiv S - pR + rP, \qquad S' \equiv -pS - sP$$

On obtiendra ainsi trois équations linéaires et homogènes en P, Q, R, S, qui doivent être compatibles avec $P = 0$.

La relation qui exprime la compatibilité est

$$(3) \qquad 2u' + (p - 2v)u + v'' - 3vv' - qv + v^3 + r = 0.$$

En prenant pour v une fonction arbitraire de t, u est déterminée par une équation différentielle linéaire du premier ordre, par conséquent par deux quadratures. On peut cependant exprimer v à l'aide d'une autre fonction arbitraire de manière qu'il n'y ait plus de quadratures. Posons à cet effet

$$\frac{p}{2} - v = \frac{\theta'}{\theta}, \qquad u = \frac{\omega}{\theta},$$

θ étant la nouvelle fonction arbitraire qui remplace v et ω une fonction qui remplace u. L'équation (3) prend la forme

$$(4) \qquad 2\omega' = \theta''' + a\theta'' + b\theta' + c\theta \equiv f(\theta),$$

où a, b, c sont des fonctions connues de t s'éxprimant au moyen de p, q, r et de leurs dérivées.

Pour résoudre le problème de Kœnigs, l'équation (4) montre qu'il faut choisir θ de manière que $f(\theta)$ soit une différentielle exacte. Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le produit $\theta . g(1)$, où $g(\theta)$ est l'expression différentielle adjointe de $f(\theta)$, soit une différentielle exacte (*voir* Darboux [9]),

On a deux cas selon que $g(1) = 0$ ou $\neq 0$. Dans le premier cas, le problème est résolu sans autre changement, car $f(\theta)$ est une différentielle exacte. Dans le second cas, il faut prendre $\theta g(1) = T'$, T étant une nouvelle fonction arbitraire de t.

Ce qu'il y a d'intéressant c'est que l'expression $g(1)$ ne diffère que par un facteur constant de l'invariant de Halphen de l'équation différentielle (1), rencontré aussi par M. Kœnigs dans sa méthode.

Le fait que le problème de Kœnigs peut se résoudre sans quadratures peut être prévu par une méthode géométrique qui sera exposée dans un des chapitres suivants.

Remarque. — Il serait intéressant d'étudier le problème pour d'autres valeurs de t et de s.

CHAPITRE VII.

I. — Courbes quadratiques.

44. Nous dirons qu'une courbe (x) d'un espace projectif E_n est *quadratique*, si elle est tracée sur une variété quadratique à $n-1$ dimensions

$$\sum_{1}^{n+1} \mathrm{X}_i^2 = 0, \tag{1}$$

c'est-à-dire si l'on a, quel que soit t,

$$\sum_{1}^{n+1} x_i^2(t) = 0$$

ou bien

$$\sum x^2 \doteq 0.$$

Nous désignerons une telle courbe quadratique, si elle n'est pas contenue dans un L_p, $p \leqq n-1$, par Q_n^0.

Si, non seulement les points de la courbe (x), mais aussi ses tangentes sont situées sur la variété quadratique (1), nous dirons que (x) est une *courbe quadratique spéciale de première espèce* et nous la désignerons par Q_n^1.

En général, une courbe (x), dont les Ω_p appartiennent tous à la variété quadratique, sera dite *courbe quadratique spéciale de* $p^{\text{ième}}$ *espèce* ou une Q_n^p.

45. Il s'agit tout d'abord de déterminer le maximum de p pour un n donné, c'est-à-dire de trouver combien d'espèces de courbes quadratiques spéciales y a-t-il dans un E_n.

A cet effet, posons

$$S_{i,k} = \sum x^{(i)} x^{(k)},$$

$x^{(i)}$ désignant la dérivée d'ordre i de x par rapport au paramètre t et la sommation étant étendue à toutes les coordonnées de x.

On a, par hypothèse,

$$S_{i,k} = 0 \qquad (i \leqq p,\ k \leqq p).$$

On peut démontrer qu'il suffit que l'on ait

$$S_{i,i} = 0 \qquad (0 \leqq i \leqq p),$$

pour que la courbe soit une Q_n^p, car on en tire en dérivant

$$S_{i,i+2j} = 0, \qquad S_{i,i+2j+1} = 0 \qquad (0 \leqq i \leqq p - j).$$

Je dis maintenant qu'on ne peut pas avoir

$$S_{0,k} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

parce qu'il en résulterait l'égalité

$$| x \quad x' \quad x'' \quad \ldots \quad x^{(n)} | = 0,$$

qui prouverait que la courbe (x) est contenue dans un L_r, $r \leqq n - 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc

$$0 \leqq k \leqq n - 1.$$

Une des relations établies plus haut prouve alors qu'on a

$$2j + 1 \leqq n - 1$$

pour $j \leqq p$, donc

$$2p + 1 \leqq n - 1,$$

d'où

$$p \leqq \frac{n}{2} - 1,$$

qui donne le maximum de p.

46. Parmi les courbes quadratiques spéciales, il y a une classe remarquable, celle des courbes autoconjuguées ou autopolaires par rapport à la variété quadratique (1).

Si l'on écrit que le point (x) de la courbe est le pôle du Ω_{n-1} en ce point par rapport à (1), on trouve les relations

$$S_{0,k} = 0 \qquad (0 \leqq k \leqq n-1).$$

d'où l'on tire aisément

$$S_{i,k} = 0 \qquad (0 \leqq i + k \leqq n-1)$$

et en particulier

$$S_{i,i+1} = 0 \qquad (0 \leqq 2i + 1 \leqq n-1)$$

On en conclut que n doit être pair, $n = 2q$, donc

$$0 \leqq i \leqq q-1$$

Il résulte de là que toute courbe autopolaire est une Q_{2q}^{q-1} et réciproquement.

47. Il est évident que si une courbe (x) est une Q_n^p, ses dérivées ponctuelles du premier ordre sont en général des Q_n^{p-1}, ses dérivées du second ordre des Q_n^{p-2} et ainsi de suite.

Naturellement, il y a des cas particuliers où la dérivée considérée est contenue dans un L_{n-1} et plus particulièrement encore où la variété quadratique se réduit à un cône quadratique.

Dans tous les cas, on peut réduire de cette manière l'espèce de la courbe quadratique et arriver à une Q_m^0, c'est-à-dire à une courbe quadratique générale.

Inversement, il s'agit de savoir si l'on peut remonter d'une courbe quadratique générale Q_m^0 à une courbe spéciale d'espèce p. Cela reviendrait à une intégration du

$$\sum x'^2 = 0, \qquad \sum x''^2 = 0, \qquad \ldots \qquad \sum (x^{(p)})^2 = 0,$$

le nombre des variables x étant $n+1$ et en ayant

$$p \leqq \frac{n}{2} - 1.$$

Ce problème a été résolu par une méthode géométrique élégante et ingénieuse par M. Borel [8]. Nous donnerons une forme un peu différente à sa solution.

Soit (x) une courbe quadratique d'espèce p dans un espace E_n, c'est-à-dire une Q_n^p, Prenons le point d'intersection y de la tangente

xx' à la courbe (x) en x avec le L_{n-1} tangent en un point fixe a de la variété quadratique

$$\sum x^2 = 0 \tag{1}$$

sur laquelle se trouve tracée la courbe (x). La dérivée du premier ordre (y) de (x) est manifestement située sur le cône C_{n-2} à $n-2$ dimensions de sommet a, découpé dans la varieté quadratique (1) par le L_{n-1} tangent en a. Projetons enfin le point y en z à partir du point a, sur un L_{n-1} arbitraire mais fixe, qui ne passe pas par a.

Le point z décrit une courbe (z), située à l'intersection de la variété (1) et du L_{n-2} commun aux deux L_{n-1} fixes considérées. Comme (y) est une courbe quadratique d'espèce $p-1$ [d'une manière plus précise, la courbe (y) et ses Ω_{p-1} sont situés sur le cône C_{n-2} de sommet a]; comme, d'autre part, la courbe (z) est une projection de (y) à partir de a, il résulte que cette courbe est une Q_{n-2}^{p-1}.

Cette opération abaisse n de deux unités et p d'une seule. En l'appliquant successivement, on arrive bien à une Q_{n-2p}^{0}, qui existe parce que

$$n - 2p \geqq 2.$$

Il s'agit maintenant de remonter de la courbe (z) à la courbe (x). A cet effet, il faudra prendre sur az, a étant le point de contact d'un L_{n-1} tangent à (1) mené par le L_{n-2} qui contient (z), un point y dont une de ses antidérivées ponctuelles du premier ordre (x) soit tracée sur la variété quadratique (1).

Prenons d'abord l'antidérivée ponctuelle du premier ordre arbitraire (ξ) de (z) dans le L_{n-2} où cette dernière courbe est située. On sait qu'on obtient (ξ) sans quadratures et qu'elle dépend d'une fonction arbitraire. La droite $a\xi$ coupe la variété quadratique (1) en un second point x, qui décrit une courbe quadratique Q_n^p. En effet, la tangente xx' à cette courbe en x coupe la droite az en un point y. Comme la courbe (z) est une Q_{n-2}^{p-1}, la courbe (y), tracée sur le cône C_{n-2}, a ses Ω_{p-1} situés sur ce cône quadratique, c'est-à-dire sur la variété (1). La courbe (x) étant quadratique et admettant (y) comme dérivée du premier ordre est nécessairement une Q_n^p.

On peut donc, en partant d'une courbe Q_{n-2p}^{0}, remonter, après p opérations, à une Q_n^p arbitraire. Ces p opérations introduisent p fonctions arbitraires. D'autre part, la courbe Q^0_{n-2p} dépend de $n-2p$ fonctions arbitraires, qu'on peut réduire, par un choix convenable de la variable indépendante et du facteur commun des coordonnées, à $n-2p-2$. On a donc le résultat suivant :

L'intégrale générale du système

$$\sum x^2 = 0, \qquad \sum x'^2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum (x^{(p)})^2 = 0,$$

le nombre des variables x étant $n+1$, s'obtient sans quadratures à l'aide de $n-p-2$ fonctions arbitraires.

II. — Courbes minima.

48. En relation etroite avec les courbes quadratiques que nous venons d'étudier, il y a les courbes minima d'un espace euclidien.

Considérons tout d'abord les courbes minima d'un espace euclidien à trois dimensions. Ce sont, au point de vue projectif, les antidérivées ponctuelles du premier ordre du cercle absolu de l'espace (le cercle imaginaire de l'infini commun à toutes les sphères). On les obtient, d'après la méthode générale, sans signe de quadrature, à l'aide d'une fonction arbitraire, en prenant l'enveloppe d'un plan arbitraire passant par une tangente mobile du cercle absolu. On trouve aisément les formules bien connues de Weierstrass.

49. On peut trouver, en général, sans quadratures, les courbes minima d'un espace à n dimensions.

Il s'agit d'intégrer l'équation

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 = 0$$

ou, en précisant le paramètre t,

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_n'^2 = 0,$$

qui exprime que la tangente en x à la courbe minima (x) coupe le plan de l'infini

$$X_{n+1} = 0$$

en un point ξ qui décrit une courbe (ξ) située sur la variété quadratique

$$(1) \qquad X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2=0, \qquad X_{n+1}=0,$$

c'est-à-dire parmi les dérivées ponctuelles du premier ordre de la courbe minima (x), il y en a une qui est Q_{n-1}^0 située à l'infini.

Réciproquement, toute courbe minima de l'espace euclidien à n dimensions est une antidérivee ponctuelle du premier ordre d'une courbe (ξ) arbitraire tracée sur la variété (1) de l'infini.

Prenons comme exemple $n=4$. Une courbe arbitraire (ξ) de la variété

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2=0, \qquad X_5=0$$

s'exprime aisément au moyen d'une fonction arbitraire d'un paramètre t choisi convenablement. Un L_3 arbitraire passant par le Ω_2 de la courbe en ξ a pour équation

$$|\, X \quad \xi \quad \xi' \quad \xi'' \,| = f(t) X_5,$$

où le déterminant s'obtient en posant les indices 1, 2, 3, 4, et $f(t)$ est une nouvelle fonction arbitraire. L'arête de rebroussement de l'enveloppe de ce plan L_3 est la courbe minima générale de l'espace euclidien à 4 dimensions; elle dépend de deux fonctions arbitraires. On prendra $X_5=1$.

50. On peut aller plus loin et considérer des courbes minima spéciales de différentes espèces. Nous dirons qu'une courbe d'un espace euclidien à n dimensions est *minima spéciale de* $(p-1)^{\text{ième}}$ espèce, si l'on a

$$\sum x'^2=0, \qquad \sum x''^2=0, \qquad \ldots \qquad \sum (x^{(p)})^2=0,$$

c'est-a-dire si elle est une antidérivée ponctuelle du premier ordre d'une courbe quadratique spéciale (ξ) d'espèce $p-1$, appartenant à la variété quadratique (1) de l'infini. On en conclut qu'on a nécessairement

$$p \leqq \frac{n-1}{2}$$

et que la courbe minima la plus générale d'espèce $p-1$ d'un espace euclidien à n dimensions dépend de $n-p-1$ fonctions arbitraires

51. D'ailleurs, si l'on pose

$$X_1 = 2x_1, \quad X_2 = 2x_2, \quad \ldots, \quad X_n = 2x_n,$$
$$X_{n+1} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 1,$$
$$X_{n+2} = i(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1),$$

on peut faire correspondre à tout point x de l'espace euclidien à n dimensions un point X de l'espace projectif E_{n+1}. Ce dernier point se trouve sur la variété quadratique

$$(2) \qquad X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_{n+1}^2 + X_{n+2}^2 = 0$$

Réciproquement, à tout point X de cette variété, il correspond un point x de l'espace euclidien.

Supposons que x décrive une courbe minima spéciale de $p-1$ espèce, alors il est aisé de voir que le point correspondant X décrit une Q_{n-1}^p et reciproquement.

Nous avons ramené ainsi l'étude des courbes minima à celle des courbes quadratiques.

CHAPITRE VIII.

I. — Transformations des courbes quadratiques

52. Étant donnée une courbe quadratique spéciale (x) d'espèce p dans un E_n, c'est-à-dire une Q_n^p, avec

$$0 \leq p \leq \frac{n}{2} - 1,$$

il y a des transformations intéressantes qui permettent de déduire de cette courbe d'autres courbes quadratiques de la même espèce.

Il y a d'abord la transformation simple que l'on peut faire au moyen d'un point fixe ω et de l'espace E_n. On suppose que ω n'appartient pas à la variété quadratique fondamentale, on pourra donc prendre

$$\sum \omega^2 = 1.$$

Cela étant, la droite ωx coupe la variété quadratique sur laquelle se trouve tracée la courbe (x), en un second point y, qui décrit, par conséquent, une nouvelle courbe quadratique (y). Je dis qu'elle est de même espèce p que (x).

On a, par hypothèse.

$$\sum x^2 = 0, \qquad \sum x'^2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum (x^{(p)})^2 = 0.$$

D'autre part,

$$y = x + \lambda\omega,$$

où λ est déterminé par la condition

$$\sum y^2 = 0,$$

ce qui donne

$$\lambda = -2 \sum \omega x.$$

Comme on a

$$y^{(i)} = x^{(i)} + \lambda^{(i)}\omega,$$

on en tire

$$\sum (y^{(i)})^2 = \sum (x^{(i)})^2 + 2\lambda^{(i)} \sum \omega x^{(i)} + (\lambda^{(i)})^2.$$

Or,

$$\lambda^{(i)} = -2 \sum \omega x^{(i)},$$

donc

$$\sum (y^{(i)})^2 = \sum (x^{(i)})^2,$$

qui démontre la proposition.

53. Il y a une transformation plus générale et plus intéressante que la précédente.

Soit (a) une antidérivée ponctuelle du premier ordre de la courbe quadratique (x) d'espèce p. On suppose que (a) n'est pas tracée sur la variété quadratique sur laquelle est située (x).

On sait qu'on peut déterminer (a) sans quadratures et que, d'autre part, la relation géométrique entre les points correspondants a et x des courbes (a) et (x) peut s'écrire

$$a' = \alpha x.$$

Prenons maintenant le second point y, commun à la droite ax et à la variété quadratique fondamentale. On a

$$y = x + \lambda a,$$

où λ est déterminé de manière que $\Sigma y^2 = 0$, donc

$$\lambda \sum a^2 + 2 \sum a x = 0.$$

Posons

$$A = \sum a^2 \qquad X = 2 \sum a x,$$

on pourra prendre

$$y = A x - X a$$

Il s'agit de prouver que ce point y décrit une courbe quadratique de même espèce p que la courbe (x).

Remarquons tout d'abord que l'on a

$$X' = \alpha X,$$

ensuite que, par hypothèse,

$$\sum x^{(i)} x^{(k)} = 0 \qquad (0 \leqq i, \ k \leqq p).$$

Cela étant, on a d'abord

$$y' = A x' - X' a,$$

d'où

$$\sum y'^2 = A^2 \sum x'^2,$$

donc, si (x) est une Q_n^2, il en est de même de (y).

Pour traiter le cas général, nous employons l'induction complète.

A cet effet, remarquons que l'on a d'abord

$$y'' = A x'' - X' x' - X' \alpha x - X'' a$$

et, en général,

$$y^{(i)} = P x + P_1 x' + \ldots + P_i x^{(i)} + Q a.$$

Supposons que l'on ait

$$\sum (y^{(i)})^2 = 0$$

pour $i < p$, bien entendu. Je dis que l'on a aussi

$$\sum (y^{(i+1)})^2 = 0.$$

Comme on a

$$X = 2\sum a x, \qquad X' = 2\sum a x', \qquad \ldots, \qquad X^{(i)} = 2\sum a x^{(i)},$$

l'égalité

$$\sum (y^{(i)})^2 = 0$$

peut s'écrire

$$(1) \qquad PX + P_1 X' + \ldots + P_i X^{(i)} + QA = 0.$$

D'autre part, on a

$$y^{(i+1)} = (P' + \alpha Q)x + (P'_1 + P)x' + \ldots + (P'_i + P_{i-1})x^{(i)} + P_i x^{(i+1)} + Q'a,$$

et alors

$$\sum (y^{(i+1)})^2 = Q'[(P' + \alpha Q)X + (P'_1 + P)X' + \ldots + (P'_i + P_{i-1})X^{(i)} + P_i X^{(i+1)} + Q'A]$$

est nulle en vertu de (1) dérivée par rapport à t.

Ceci démontre que la courbe (y) est au moins une Q''_n. Comme la transformation est réciproque, l'espèce de (y) est égale à p.

II. — Le problème de Kœnigs

54. Nous avons complètement résolu (§ 43) le problème de Kœnigs, à l'aide d'une fonction arbitraire et sans quadratures. Nous allons mettre en évidence la raison géométrique de la possibilité de ce résultat admirable dû à M. Kœnigs.

Soit (x) une courbe d'un espace projectif E_3 à trois dimensions. Les coordonnées pluckèriennes de la tangente xx' à cette courbe sont

$$p_{ik} = x_i x'_k - x_k x'_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

On a, évidemment,

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

et comme

$$p'_{ik} = x_i x''_k - x_k x''_i$$

les p'_{ik} sont, elles aussi, les coordonnées d'une droite, située manifestement dans le plan osculateur de la courbe et passant par le point x, et l'on a aussi

$$p'_{12}p'_{34}+p'_{13}p'_{42}+p'_{14}p'_{23}=0$$

Il en résulte que si l'on considère les p_{ik} comme les coordonnées projectives d'un point p dans un E_5, l'image de la développable formée par les tangentes de la courbe (x) de E_3 est une courbe (p) quadratique spéciale de première espèce.

Réciproquement, à toute courbe quadratique spéciale de première espèce de E_5, on peut faire correspondre une développable, et, par conséquent, une courbe (x) de E_3.

Ce qu'il y a d'intéressant, c'est que, aux différents points de la tangente pp' à la courbe (p) de E_5, il correspond dans E_3 un faisceau plan de droites dont le sommet est x et situé dans le plan osculateur de (x) et que nous appellerons *le faisceau osculateur* de la courbe en (x).

55. La courbe (x) de E_3 étant donnée, il s'agit, dans le problème de Kœnigs, de trouver toutes les courbes (y) du même espace, telles que les faisceaux osculateurs aux points correspondants x et y aient un rayon commun, qui ne peut être, évidemment, que la droite xy qui joint les sommets de ces deux faisceaux.

Le problème correspondant de E_5 revient alors à ceci : Étant donnée une courbe quadratique spéciale de première espèce (p), trouver toutes les courbes (q), tracées sur la même variété quadratique fondamentale que (p) et étant, elles aussi, spéciales de première espèce et telles que pour chaque courbe (q) les tangentes aux points correspondants p et q se coupent en un point r.

Remarquons, avant d'aller plus loin, que le point r est l'image du rayon xy, commun aux deux faisceaux osculateurs en x et y aux courbes (x) et (y) de E_3. Il décrit donc une courbe (r), image de la surface réglée engendrée par la droite xy. Les courbes (x) et (y) sont visiblement des lignes asymptotiques de cette surface réglée. C'est pourquoi M. Bianchi [2] a appelé le passage de la courbe (x) à la courbe (y) *transformation asymptotique*.

Cela étant, revenons à notre problème. Les courbes (p) et (q) étant des antidérivées ponctuelles du premier ordre de la même courbe (r), la droite pq reste tangente à une courbe (ρ) ou bien passe par un point fixe ω.

Il résulte de là que les courbes (q) s'obtiennent de (p) par l'une ou l'autre des transformations des courbes quadratiques que nous avons étudiées précédemment (§ 52 et 53), à l'aide d'un point fixe ω ou à l'aide d'une antidérivée ponctuelle du premier ordre (ρ). Comme celle-ci s'obtient, à partir de (x), sans quadratures, le problème de Kœnigs est résoluble sans quadratures au moyen d'une seule fonction arbitraire.

Cependant, cette méthode intuitive qui permet de voir la nature de la solution, n'est pas avantageuse pour la trouver effectivement. Aussi avons nous employé une autre méthode plus expéditive.

Remarques. — I. La solution à l'aide d'un point fixe ω correspond à une polarité de la courbe par rapport à un complexe linéaire, c'est donc une solution presque banale.

II. Si la courbe (x) appartient, par ses tangentes, à un complexe linéaire, alors la courbe (p) est située dans un L_1, et les calculs qu'on devrait faire dans ce cas pour trouver effectivement l'antidérivée (ρ) sont légèrement différents de ceux que l'on fait dans le cas général, mais le principe géométrique reste le même.

CHAPITRE IX

COURBES ANHARMONIQUES

56. Parmi les courbes d'un espace projectif E_n à n dimensions, celles qui restent invariantes à la suite des transformations à un paramètre d'un sous-groupe du groupe projectif, jouissent de propriétés remarquables et intéressantes et méritent une étude approfondie. Elles sont analogues aux cercles d'un plan et aux hélices circulaires d'un espace euclidien à trois dimensions.

Nous arriverons à cette classe de courbes par une voie indirecte, mais conforme aux principes et méthodes que nous avons développées.

Posons-nous le problème suivant :

Trouver les courbes (x) d'un espace projectif E_n, telles que, parmi ses dérivées ponctuelles du premier ordre, il y ait au moins une (y), qui soit aussi une transformée projective de la *courbe* (x), *les points correspondants étant ceux qui se correspondent par dérivation.*

On a, par hypothèse,

$$(1) \qquad y_i = \alpha x'_i + \beta x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

α et β étant des fonctions de t et en même temps

$$(2) \qquad y_i = \sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

où les a_{ik} sont des constantes.

On peut prendre

$$x_i = \lambda \overline{x}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

et déterminer λ de manière que (1) deviennent

$$y_i = \alpha\lambda \overline{x}'_i$$

et alors les (2) deviennent

$$\alpha \overline{x}'_i = \sum a_{ik} \overline{x}_k$$

Finalement, en changeant la variable indépendante, on peut réduire ces dernières équations à la forme simple

$$(3) \qquad x'_i = \sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

On peut tirer de ce résultat un autre plus intéressant. A cet effet, soit

$$(4) \qquad x^{(n+1)} + p_1 x^{(n)} + p_2 x^{(n-1)} + \ldots + p_n x' + p_{n+1} x = 0,$$

l'équation différentielle vérifiée par les coordonnées $x_i (i = 1, 2, \ldots, n+1)$ d'un point variable de (x). La relation (3) prouve que les x'_i satisfont à la même équation différentielle (4) que les x_i. Or, pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que les coefficients p_1, $p_2, \ldots, p_{n+1}$ soient tous constants.

Pour des motifs que nous verrons dans la suite, nous appellerons *courbe anharmonique* toute courbe (x), dont l'équation différentielle correspondante (4) peut se ramener, par une transformation de la forme

$$x = \lambda \overline{x}$$

et par un changement de la variable indépendante, à une équation à coefficients constants.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe (x) *de* E_n *admette une dérivée ponctuelle du premier ordre* (y) *qui lui soit projective, c'est que la courbe* (x) *soit une courbe anharmonique.*

57. Supposons que les racines $r_i (i = 1, 2, \ldots, n+2)$ de l'équation caractéristique

$$(5) \qquad r^{n+1} + p_1 r^n + \ldots + p_n r + p_{n+1} = 0,$$

qui correspond à l'équation différentielle (4) à coefficients constants, soient inégales. On peut prendre pour la courbe (x)

$$x_i = e^{r_i t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Comme

$$\overline{x}_i = e^{r_i(t+\alpha)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

est manifestement aussi un point de la courbe, il résulte que la transformation projective

$$\overline{x}_i = e^{r_i \alpha} x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

transforme, quel que soit le paramètre α, la courbe (x) en elle-même.

C'est cette propriété qui a été prise pour definition des courbes anharmoniques par Klein et Sophus Lie dans leurs célèbres travaux sur cette classe des courbes, qu'ils ont appelées courbes W (*voir* [25], [26]).

58. Remarquons tout d'abord que les ∞_1 points

$$x' - \lambda x \qquad (\lambda = \text{const.})$$

vérifient la même équation (4) que x et x'. Ils dérivent donc des courbes anharmoniques.

Ces points forment, avec x et x', *un système invariable au point de vue projectif.*

Parmi ces points, situés sur la tangente en x à la courbe (x), il y a des *points exceptionnels* appartenant à un L_{n-1}. Nous allons étudier ces points exceptionnels.

Il faudra écrire que le point

$$y = x' - \lambda x$$

satisfait à une équation de la forme

$$y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + q_2 y^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1} y' + q_n y = 0.$$

Cela donne une équation qui doit être identique à (4), d'où l'on tire

$$q_1 - \lambda = p_1, \qquad q_2 - \lambda q_1 = p_2, \qquad \ldots, \qquad q_n - \lambda q_{n-1} = p_n,$$
$$- \lambda q_n = p_{n+1}$$

En éliminant $q_1, q_2, \ldots, q_n$ entre ces relations, on obtient

$$\lambda^{n+1} + p_1 \lambda^n + p_2 \lambda^{n-1} + \ldots + p_n \lambda + p_{n+1} = 0,$$

c'est-à-dire, pour que y soit un point exceptionnel, il faut et il suffit, que λ soit une racine de l'équation caractéristique (5). Il y a donc $n+1$ points exceptionnels, qui décrivent, eux aussi, des courbes anharmoniques (sauf pour $n=2$), mais situées dans des L_{n-1}.

59. Nous venons de mettre en évidence un *polyèdre fondamental* de la courbe anharmonique (x), formé par les $n+1$ variétés linéaires L_{n-1} dans lesquelles se trouvent plongées les courbes décrites par les $n+1$ points exceptionnels de chaque tangente de (x).

On a, pour ce polyèdre, d'abord la propriété suivante (§ 58) : *Les* $n+1$ L_{n-1} *de ce polyèdre découpent sur chaque tangente de* (x) $n+1$ *points, les points exceptionnels, qui forment avec* x, *au point de vue projectif, un système invariable.*

Cette propriété sert, elle aussi, surtout pour les courbes planes, comme définition des courbes anharmoniques.

On peut considérer parmi les dérivés du second ordre

$$y = x'' + \lambda x' + \lambda_1 x$$

de x, ceux pour lesquels $\lambda = \text{const.}$, $\lambda_1 = \text{const.}$; ils décrivent aussi des courbes anharmoniques. Parmi ces points, il y en a d'exceptionnels, qui décrivent des courbes situées dans des L_{n-2}.

On a ainsi les $\frac{n(n+1)}{2}$ L_{n-2} communs aux $n+1$ L_{n-1} du polyèdre fondamental pris deux à deux.

On peut continuer et considérer en général les ∞^p points

$$z = x^{(p)} + \lambda x^{(p-1)} + \lambda_1 x^{(p-2)} + \ldots + \lambda_{p-2} x' + \lambda_{p-1} x,$$

où λ, λ_1, ..., λ_{p-1} sont des constantes. Il est aisé de voir qu'ils décrivent aussi des courbes anharmoniques et que, parmi eux, il y a des points exceptionnels dont les courbes correspondantes sont situées dans des L_{n-p}. Ces L_{n-p} s'obtiennent en prenant les L_{n-1} du polyèdre fondamental p à p.

60. Revenons aux points

$$x' - \lambda x \qquad (\lambda = \text{const.})$$

qui décrivent des dérivées du premier ordre de (x) anharmoniques. Les ∞^2 tangentes à ces courbes le long de xx' sont situées dans le plan osculateur en x à (x) et elles enveloppent dans ce plan, pour x fixe, une conique. En effet, un point du plan osculateur a des coordonnées de la forme

$$\xi x + \xi_1 x' + \xi_2 x'',$$

ξ, ξ_1, ξ_2 étant les coordonnées du même point par rapport au triangle $xx'x''$. La tangente en $x' - \lambda x$, s'obtenant en joignant ce point avec $x'' - \lambda x'$, a, par rapport à $xx'x''$, pour equation

$$\xi + \lambda \xi_1 + \lambda^2 \xi_2 = 0,$$

dont l'enveloppe est la conique

$$\xi_1^2 - 4\xi\xi_2 = 0,$$

tangente en x et x'' aux droites xx' et $x'x''$.

Cette conique est évidemment tangente aux $n+1$ tangentes des courbes anharmoniques décrites par les points exceptionnels.

On peut dire aussi que la conique précédente est inscrite dans le polygone déterminé sur le plan osculateur en x par les $n+1$ faces (L_{n-1}) du polyèdre fondamental.

On peut chercher aussi les enveloppes, pour x fixe, des variétés osculatrices Ω_p des courbes décrites par les points $x' - \lambda x$. On trouvera des courbes inscrites dans les figures linéaires déterminées par le polyèdre fondamental sur la variété linéaire osculatrice Ω_{p+1} qui contient tous les Ω_p précédentes.

61. Nous allons chercher maintenant parmi les points

$$z = x^{(n)} + \lambda x^{(n-1)} + \lambda_1 x^{(n-2)} + \ldots + \lambda_{n-2} x' + \lambda_{n-1} x,$$

où $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont des constantes et qui décrivent par conséquent des courbes anharmoniques, ceux qui décrivent des antidérivées ponctuelles du premier ordre de (x). Nous supposons toujours que l'équation différentielle linéaire à coefficients constants qui correspond à (x) est l'équation (4) du paragraphe 56.

Cela étant, les conditions géométriques du problème s'écrivent

$$z' - uz = vx,$$

u et v étant des fonctions de t ou des constantes. Cette relation doit être identique à (4). L'identification donne

$$\begin{aligned}
\lambda &= u + p_1,\\
\lambda_1 &= u^2 + p_1 u + p_2,\\
&\ldots\ldots\\
\lambda_{n-1} &= u^n + p_1 u^{n-1} + \ldots + p_{n-1} u + p_n,\\
-v &= u^{n+1} + p_1 u^n + \ldots + p_n u + p_{n+1}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que u et v sont des constantes dont la première reste arbitraire.

On a donc ∞^1 points z qui répondrait à notre problème. Le point x étant fixe, les points correspondants z sont situés sur une courbe. On peut prendre le polyèdre $xx', \ldots, x^{(n)}$ comme repère, par rapport auquel tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$\xi x + \xi_1 x' + \xi_2 x'' + \ldots + \xi_n x^{(n)},$$

dont les coordonnées relatives sont $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n$.

Cela étant, les coordonnées relatives de z sont

$$\begin{aligned}
\xi &= u^n + p_1 u^{n-1} + \ldots + p_{n-1} u + p_n,\\
\xi_1 &= u^{n-1} + p_1 u^{n-2} + \ldots + p_{n-1},\\
&\ldots\ldots\\
\xi_{n-1} &= u + p_1,\\
\xi_n &= 1.
\end{aligned}$$

Le point z décrit ce qu'on appelle une *courbe normale* de l'espace E_n.

Parmi les points z il y en a de particulièrement interessants. Ce sont ceux pour lesquels $v = 0$, c'est-a-dire pour lesquels u est déterminé par l'équation caractéristique

$$u^{n+1} + p_1 u^n + \ldots + p_n u + p_{n+1} = 0$$

de (4). On obtient ainsi sur la courbe normale précédente $n+1$ points remarquables, qui sont fixes dans E_n, car on a

$$z' - u z = 0$$

Ce sont, évidemment, les $n+1$ sommets du polyèdre fondamental de la courbe anharmonique donnée (x).

62. Courbes anharmoniques dans le plan. — Si l'on exclut les coniques, on peut prendre pour équation différentielle de la courbe

$$x''' + 2 h x' + x = 0 \qquad (h = \text{const.})$$

La conique inscrite dans le triangle fondamental de la courbe, par rapport auquel elle a les définitions classiques bien connues, a pour équation (§ 60)

$$\xi_1^2 - 4 \xi \xi_2 = 0,$$

elle est tangente en x à xx'. Cette conique est donc bien déterminée.

La courbe normale du plan circonscrite au même triangle fondamental est définie (§ 61) paramétriquement par

$$\xi = u^2 + 2h, \qquad \xi_1 = u, \qquad \xi_2 = 1;$$

elle a donc pour équation

$$(\xi - 2h\xi_2)\xi_2 = \xi_1^2,$$

c'est une conique tangente aussi en x à xx'.

Cette conique et la précédente ont la corde commune

$$3\xi + 2h\xi_2 = 0$$

qui définit intrinsèquement le point x' sur xx'. La droite xx'', polaire commune de x' par rapport aux deux coniques, a donc aussi une définition intrinsèque.

C'est la *normale projective* en x à la courbe considérée.

La conique osculatrice à (x) au point x a pour équation

$$2(\xi - h\xi_1)\xi_2 = \xi_1^2$$

Il est aisé de montrer que la tangente à cette dernière conique menée de x' est conjuguée harmonique de $x'x$ par rapport aux tangentes menées du même point aux deux coniques précédentes. Aussi c'est la tangente menée de x' à la conique osculatrice, avec xx' et xx'' que l'on prend comme repère mobile de la courbe.

On pourra poser

$$x' = y, \qquad y' = z - hx,$$

donc

$$z' = -x$$

C'est un système analogue aux équations de Frenet, qui définit la courbe par rapport à un reprère mobile attaché d'une manière intrinsèque à chaque point x de la courbe.

63. Les dernières recherches de géométrie différentielle projective des courbes introduisent certains invariants et covariants différentiels qui définissent une sorte de métrique projective. Cette théorie commencée par Halphen [15], [16], [17], [18], poussée plus loin par Wilczynski [39], [40], a été envisagée dernièrement sous différents points de vue. Nous nous bornons à citer les travaux de MM. Berwald [1], Bompiani [7], Kawaguchi [23], Sannia [32], Terracini [36].

A un point de vue plus général, une métrique peut être définie pour tout groupe transitif, comme l'ont montré MM. Pick et Kowalewski.

CHAPITRE X.

CONFIGURATIONS A DEUX DIMENSIONS DÉTERMINÉES PAR DEUX COURBES.

64. Nous laissons de côté l'étude des surfaces réglées, définies à l'aide de deux courbes dont les points se correspondent. Cette étude comporte des développements qui dépassent l'étendue d'un chapitre. Nous considérons d'autres configurations intéressantes qui dépendent de deux paramètres.

Étant données deux courbes (x) et (y) d'un espace projectif à n dimensions E_n, nous supposerons que les points x et y qui décrivent ces courbes sont déterminés respectivement à l'aide des paramètres u et v.

Cela étant, considérons pour u arbitraire un L_p osculateur à (x) en x et pour v arbitraire un L_q osculateur à (y) en y. Nous les designerons par $\Omega_p(x)$ et $\Omega_q(y)$. Ces deux variétés linéaires se coupent si l'on a

$$p+q \geqq n$$

et la variété linéaire commune est un L_{p+q-n} dépendant des deux paramètres u et v.

Comme on a

$$p \leqq n-1 \qquad q \leqq n-1,$$

les courbes (x) et (y) déterminent, de cette manière, une première sorte de configurations à deux dimensions engendrées par des

$$L_0, \quad L_1, \quad \ldots, \quad L_{n-2}.$$

Il y a une deuxième sorte de configurations à deux dimensions déterminées par les mêmes courbes (x) et (y).

En effet, $\Omega_p(x)$ peut être défini par $p+1$ quelconques de ses points, $\Omega_q(y)$ par $q+1$. Si les deux variétés osculatrices n'ont pas de points communs, c'est à-dire si l'on a

$$p+q<n,$$

ces $p+q+2$ points déterminent un L_{p+q+1} contenant $\Omega_p(x)$ et $\Omega_q(y)$ et dépendant par conséquent des paramètres u et v.

Dans le cas actuel, on a

$$1 \leqq p+q+1 \leqq n-1,$$

donc on obtient des configurations à deux dimensions engendrées par des

$$L_1, \quad L_2, \quad \ldots, \quad L_{n-1}$$

Ce sont là les configurations de la deuxième sorte.

65. Configurations de la première sorte. — Prenons tout d'abord les configurations de la première sorte engendrées par des L_0, c'est-à-dire par des points.

Il faudra prendre le point $\xi_{p,q}$, commun à un $\Omega_p(x)$ et à un $\Omega_q(x)$, lorsque

$$p+q=n.$$

On obtient ainsi, pour un couple donné de points x et y, les points

(1) $$\xi_{1,n-1},\quad \xi_{2,n-2},\quad \ldots,\quad \xi_{n-1,1},$$

qui décrivent, lorsque u et v varient, des surfaces que nous désignons par

(2) $$(\xi_{1,n-1}),\quad (\xi_{2,n-2}),\quad \ldots,\quad (\xi_{n-1,1}).$$

Prenons deux surfaces successives $(\xi_{p-1,n-p+1})$, $(\xi_{p,n-p})$ de cette suite (2) et soient $\xi_{p-1,n-p+1}$, $\xi_{p,n-p}$ les points correspondant aux mêmes valeurs de u et v. Le premier point est défini par l'intersection des variétés osculatrices $\Omega_{p-1}(x)$ et $\Omega_{n-p+1}(y)$, le second par $\Omega_p(x)$ et $\Omega_{n-p+1}(y)$.

Considérons sur la surface $(\xi_{p-1,n-p+1})$ la courbe $v=$ const. Comme elle est manifestement une dérivée ponctuelle d'ordre $p-1$ de (x), sa tangente en $\xi_{p-1,n-p+1}$ est située dans $\Omega_p(x)$. Comme d'autre part, v ne varie pas, la courbe $v=$ const. décrite par $\xi_{p-1,n-p+1}$ sur $(\xi_{p-1,n-p+1})$ est entièrement contenue dans $\Omega_{n-p+1}(y)$; par conséquent la tangente en $\xi_{p-1,n-p+1}$ à $v=$ const. y est contenue aussi. Cette tangente est donc la droite commune aux varietés $\Omega_p(x)$ et $\Omega_{n-p+1}(y)$.

On peut raisonner de la même manière pour prouver que la tangente en $\xi_{p,n-p}$ à la courbe $u=$ const. décrite sur la surface $(\xi_{p,n-p})$ est déterminée par les mêmes varietés osculatrices $\Omega_p(x)$ et $\Omega_{n-p+1}(y)$. Il en résulte que cette droite, tangente en $\xi_{p-1,n-p+1}$ à $v=$ const et en $\xi_{p,n-p}$ à $u=$ const., est celle qui réunit les deux points considérés.

On en conclut que le système des droites $\xi_{p-1,n-p+1}\,\xi_{p,n-p}$ dépendant de deux paramètres se décompose en deux familles de développables $u=$ const., $v=$ const. Nous dirons que ce système est une *congruence de droites*.

D'autre part, les courbes $u=$ const., $v=$ const. jouissent sur chaque surface de la suite (2) de la propriété suivante : *Les tangentes aux courbes* $v=$ const. (*ou* $u=$ const.) *aux points où ces courbes coupent une même courbe* $u=$ const. (*ou* $v=$ const.) *forment une développable dont l'arête de rebrousement est une courbe* $u=$ const. (*ou* $v=$ const.) *tracée sur la surface voisine dans la suite* (2) *à* *droite* (*ou à gauche*). Nous dirons que ces courbes forment sur chaque surface de la suite un *réseau*.

On voit de quelle manière sont liées entre elles les tangentes aux courbes $u =$ const. et $v =$ const. des réseaux successifs. On dit qu'ils forment une *suite de Laplace* terminée aux courbes (x) et (y). Pour plus de détails voir [36].

66. On peut aller plus loin et considérer le plan déterminé par trois points successifs de la suite (1) : $\xi_{p-1,n-p+1}$, $\xi_{p,n-p}$, $\xi_{p+1,n-p-1}$. Supposons d'abord $v =$ const. Alors chacun des points considérés décrit sur la surface respective une courbe, dont, en vertu du paragraphe, 65 la deuxième est une dérivée ponctuelle du premier ordre de la première et la troisième une dérivée du second ordre de la même courbe. Cela prouve que le plan des trois points est osculateur en $\xi_{p-1,n-p-1}$ à la courbe $v =$ const. décrite par ce point. Il est en même temps osculateur à la courbe $u =$ const. décrite par le point $\xi_{p+1,n-p-1}$. Enfin, le même plan est simplement tangent aux courbes $u =$ const., $v =$ const. décrites par $\xi_{p,n-p}$.

Or, le plan considéré est, manifestement, commun aux variétés osculatrices $\Omega_{p+1}(x)$ et $\Omega_{n-p+1}(y)$ aux courbes (x) et (y) en x et y. La configuration à deux dimensions déterminée par ces plans, lorsque u et v varient, est en réalité une propriété intéressante de la suite de Laplace que nous avons définie au paragraphe 65.

Il en est de même des autres configurations de la première sorte. Ainsi, si l'on prend les quatre points successifs

$$\xi_{p-1,n-p+1}, \quad \xi_{p,n-p}, \quad \xi_{p+1,n-p-1}, \quad \xi_{p+2,n-p-2}$$

de la suite, ils définissent une variété linéaire L_3 à trois dimensions, qui est Ω_3 en $\xi_{p-1,n-p+1}$, contient le Ω_2 en $\xi_{p,n-p}$ et le Ω_1 en $\xi_{p+1,n-p-1}$ aux courbes $v =$ const. décrites par ces trois points sur les surfaces respectives, en même temps il est Ω_3 en $\xi_{p+2,n-p-2}$, contient le Ω_2 en $\xi_{p+1,n-p-1}$ et le Ω_1 en $\xi_{p,n-p}$ aux courbes $u =$ const. décrites par ces derniers trois points.

On peut continuer de la même manière pour formuler les propriétés des autres configurations de la premièrè sorte.

67. **Configuration de la deuxième sorte.** — Considérons tout d'abord le L_1 ou la droite déterminée par les points x et y. Elle

engendre, lorsque u et v varient, une congruence, dont les développables sont des cônes ayant pour base la courbe (x) ou la courbe (y) et pour sommets les points y (ou x).

Si l'on coupe la droite xy par un L_{n-1} fixe, on obtient un point ξ qui décrit, dans cette variété linéaire, une surface (ξ). Pour $v =$ const., ce point décrit sur la surface une courbe, qui est la projection de (x) à partir de y sur le L_{n-1} donné; de même, la courbe $u =$ const. décrite par ξ est la projection de (y) à partir de x sur la même variété linéaire donnée.

Soient ζ et η les points où les tangentes xx' et yy' aux courbes (x) et (y) coupent le L_{n-1} fixe choisi, ils décrivent, lorsque u et v varient, respectivement des courbes (ξ) et (η).

Cela étant, il est évident que la tangente en ξ à la courbe $v =$ const. passe par ζ et que la tangente à la courbe $u =$ const. passe par η. On en conclut que le point ζ décrit un réseau, dont les courbes sont $u =$ const. et $v =$ const.

68. Prenons maintenant le L_2 ou le plan déterminé par la tangente en x à la courbe (x) et par le point quelconque y de (y). Il engendre, si u et v varient, une configuration à deux dimensions de la deuxième sorte que nous allons étudier.

Pour $v =$ const. y est fixe et x décrit la courbe donnée (x), donc le plan $xx'y$ enveloppe le cône ayant (x) pour base et y pour sommet.

Pour $u =$ const. c'est x et par conséquent la tangente xx' qui sont fixes et y qui est variable et décrit la courbe (y). Le plan $xx'y$ tourne autour de la tangente xx' en s'appuyant sur la courbe (y). Il engendre une figure géométrique, qui généralise le cône, dans laquelle la droite xx' est en quelque sorte le sommet et la courbe (y) la base.

On a une configuration analogue à la précédente en prenant le plan déterminé par la tangente yy' à (y) et par le point x, lorsque u et v varient.

Cependant on obtient une configuration plus intéressante en coupant les deux plans précédents $xx'y$ et $yy'x$, variables avec u et v, par un L_{n-1} fixe. On retrouve les points ξ, η et ζ du paragraphe précédent.

La configuration des plans $xx'y$ détermine sur le L_{n-2} considéré la congruence engendrée par la droite $\xi\zeta$, celle des plans $yy'x$ détermine sur le même L_{n-1} la congruence des droites $\eta\zeta$.

69. On peut aller plus loin et considérer les L_3 suivants : 1° celui qui contient le $\Omega_2(x)$ en x et le point arbitraire y de la courbe (y); 2° celui que la tangente en x à (x) et la tangente en y à (y); 3° celui qui contient le point arbitraire x de (x) et le $\Omega_2(y)$ en y de (y). Lorsque u et v varient, ces L_3 forment aussi des configurations à deux dimensions de la deuxième sorte.

On obtient une configuration plus intéressante en coupant les L_3 précédents par un L_{n-2} fixe.

Le $\Omega_2(x)$ en x détermine sur ce L_{n-2} un point ξ, le L_2 défini par xx' et y détermine un autre point $\zeta_{1,0}$, celui défini par x et yy' le point $\zeta_{0,1}$, enfin $\Omega_2(y)$ le point η.

Il est évident que ξ et η décrivent des courbes (ξ) et (η), tandis que $\zeta_{1,0}$ et $\zeta_{0,1}$ des surfaces sur lesquelles les courbes $u=$ const. et $v=$ const. tracent des réseaux. On a ainsi une suite de Laplace, composée de deux réseaux et terminée à deux courbes.

Dans le cas général, on trouve aussi une suite de Laplace, composée de plusieurs réseaux et terminée à deux courbes. Il faut cependant remarquer qu'il y a une différence fondamentale entre la manière dont la sorte est terminée dans le cas des configurations de la première série et celles de la seconde sorte.

Nous nous bornons à ces indications, en attirant l'attention des lecteurs sur les travaux de M. E. Bompiani et surtout sur [3], [4], [5], [6], de même que sur [36], qui contient une théorie générale des réseaux, des congruences et des suites de Laplace.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. Berwald (L.). — Zur projektiven Differentialgeometrie der Ebene (*Jahresberichte d. Deutschen Math. Vereinig*, Bd 30 1921)

2. Bianchi (L.), — Sulle configurazioni mobile di Mœbius nelle transformazioni asintotiche delle curve e delle superficie (*Rend. del Circolo matem. di Palermo*, t. XXV, 1908)

3. Bompiani (E.). — Sull'equazione di Laplace (*Rend. del Circolo matem. di Palermo*, t. XXXIV, 1912)

4. — Risoluzione geometrica del problema di Moutard (*Rend. Lincei*, 5e série, vol. XXIV, 1915)
5. — Sur les configurations de Laplace (*C. R. Acad. Sci.*, t. 156, 1913, p. 603),
6. — Pour la géométrie de l'équation de Laplace (*C. R. Acad. Sci.*, t. 167, 1915, p. 57).
7. — Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane (*Rend. Lincei*, 1926).
8. Borel (E.). — Sur l'équation adjointe (*Ann. Éc. Norm.*, 1892).
9. Darboux (G.). — *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II.
10 Fréchet (M.). — Sur deux suites remarquables de polynomes et de courbes (*Nouv. Ann. de Mathém.*, 1905)
11. — Sur la représentation paramétrique intrinsèque de la courbe continue la plus générale (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1925).
12. Fubini (G.), Cech (E.). — Geometria proiettiva differenziale (Zanichelli), t. I
13. Guichard (C.). — Sur les propriétés métriques des courbes dans un espace quelconque (*Bull. Soc. math.*, 1911).
14. — Les courbes de l'espace à *n* dimensions (*Mém. Sc. math.*, fasc. XXIX).
15. Halphen (G.). — Sur les invariants différentiels (*Œuvres*, t. II, p. 197).
16. — Sur les invariants différentiels des courbes gauches (*Œuvres*, t. II, p. 353).
17. — Sur quelques équations différentielles linéaires du quatrième ordre (*Œuvres*, t. III, p. 457).
18. — Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre (*Œuvres*, t. III, p. 463).
19 Hjelmslev (J.). — Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle (*Bull. de l'Acad. de Copenhague*, 1911).
20 — Introduction à la théorie des suites monotones (*Bull. Acad. de Copenhague*, 1914).
21. — Geometrie der Wirklichkeit (*Acta mathematica*, t. 45).
22. — Darstellende Geometrie, p. 135 et suiv. (Teubner).
23. Kawaguchi (A.). — Ueber projektive Differentialgeometrie, I, II, III, IV (*The Tohoku mathem. Journal*, vol. 28 et 29, 1927 et 1928).
24 Klein (G.). — Elementharmathematik vom hoherem Stand punkte aus, t. III, p. 117 (Springer)
25. Klein (F.) et Lie (S.). — Sur une certaine famille de courbes et de surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 70, 1870).
26. — Ueber diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in siche ubergehen (*Math. Annalen*, Bd 4, 1871).
27. Kœnigs (G.). — Détermination sous forme explicite de toute surface réglée rapportée à ses lignes asymptotiques, etc. (*C. R. Acad. Sc.*, t. 106, 1888, p. 51).
28. — Sur un problème concernant deux courbes gauches (*Amer. Journ. of Mathem.*, vol. XIX, 1897)
29. — Sur une correspondance ponctuelle entre deux courbes gauches (*Rend. del Circolo matem. di Palermo*, t. 26, 1908).

30. MONTEL ((P.). — Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel (*Bull. des Sciences mathém*, 1924).

31. ROSENTHAL (A). — Ueber die Singularitaeten der rellen ebenen Kurven (*Math. Ann*, Bd 73).

32. SANNIA (G). — Nuova trattazione della geometria proiettivo differenziale delle curve piane (*Rend Lincei*, 1922).

33. STŒHELIN (Helene). — Die charakteristischen Zahlen analytischer Kurven auf dem Kegel zweiter Ordnung und ihrer Studyschen Bildkurven (*Dissertation*, Basel, 1924).

34. — Die charakteristischen Zahlen analytischer Kurven, etc. (*Math. Annalen*, Bd 93, 1925).

35. STUDY (E.). — Ueber S Lie Geometrie der Kreise und Kugeln (*Math. Ann.* Bd 87).

36. TERRACINI (A.). — Sul significato geometrico della normale proiettiva (*Rend. Lincei*, 1926).

37. TZITZÉICA (G). — Géométrie différentielle projective des réseaux (Gauthier-Villars).

38. WALSH (J.-L) — A generalisation of evolutes (*Rend. del Circolo matem. di Palermo*, t. 48, 1924).

39. WILCZYNSKI (E J.) — Projective differential Geometry of curves, etc. (Teubner, 1906).

40. — Integral invariantes in projective Geometry (*Rend. del Circolo matem. di Palermo*, t. 42, 1917).

TABLE DES MATIÈRES.