Mémorial des sciences mathématiques

Léopold Leau

Les suites de fonctions en général. Domaine réel

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 44 (1930)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1930__44__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XLIV

Les suites de fonctions en général. Domaine réel.

PAR M. LÉOPOLD LEAU

Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1930

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
86902-30 Quai des Grands-Augustins, 55.

LES

SUITES DE FONCTIONS EN GÉNÉRAL

DOMAINE RÉEL

Par M. Léopold LEAU.

I. — INTRODUCTION.

1. Problèmes et méthode. — Les problèmes qui se posent au sujet des suites de fonctions se rattachent à trois ordres de questions : caractères de convergence, nature de la fonction limite, opérations qui se conservent dans le passage à la limite, mais ils ne sauraient être traités dans cet ordre rigide. A un autre point de vue, il y a lieu de distinguer entre les fonctions réelles de variables réelles et les fonctions de variables complexes, spécialement les fonctions analytiques. C'est une division commode, suivant laquelle les sujets seront répartis en deux fascicules. Pour chaque cas, une subdivision s'impose d'après le nombre des variables.

On peut se proposer, conformément à la méthode instaurée par M. Fréchet, de donner aux définitions et aux démonstrations la forme la plus générale, qui ne mette en œuvre que les données strictement nécessaires et soit, par conséquent, utilisable pour les classes d'objets les plus étendues possible. C'est, assurément, le point de vue le plus philosophique. Il a paru préférable, pour une raison de brièveté, d'envisager chaque fois en bloc et pour lui-même le domaine offert à l'étude et de tenter d'en coordonner simplement les faits et les théories. On se place systématiquement dans un espace métrique, l'espace euclidien.

Il est bien connu que les suites et les séries se ramènent immédiatement les unes aux autres; en fait, on parlera généralement ici des premières.

2. Quelques notions préliminaires. — Dans les questions de convergence, le critère de Cauchy est un instrument usuel. Rappelons qu'il consiste en ceci : soit une suite $\{a_\nu\}$ de quantités finies, réelles ou non. Pour qu'il existe un nombre fini a, tel que pour tout ε positif on ait à partir d'un certain indice $|a_n - a| < \varepsilon$, il faut et il suffit qu'à tout η positif corresponde un indice n_0 tel que $|a_{n'} - a_{n''}| < \eta$ dès que n' et n'' surpassent n_0. La convergence simple ou (si les a_ν dépendent de divers objets) uniforme de $\{a_\nu\}$ équivaut donc à la convergence simple ou uniforme de la suite à deux indices $\{a_{\nu'} - a_{\nu''}\}$ vers zéro (la convergence proprement dite à la convergence mutuelle, pour employer une expression de J. Hadamard, notion et propriété dont l'extension s'impose (*voir*, par exemple, n° 14).

Quelques-unes des notions, indispensables pour la suite et qui ne figurent pas couramment dans les traités généraux d'analyse, vont être données ci-dessous. Elles ont trait à la théorie des ensembles. Le lecteur, qui désirerait les approfondir, pourra consulter notamment E. Borel [5, *b*], C. de la Vallée Poussin [II], H. Hahn [I], G. Valiron [III].

Nous considérons dans un espace à h dimensions des points (réels) définis par leurs coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_h)$ et des ensembles E de tels points. On désigne par $E_1 + E_2 + \ldots$ la somme de ces ensembles en nombre fini ou non, c'est-à-dire l'ensemble formé par les points dont chacun appartient au moins à l'un d'eux; par $E_1 - E_2$ l'excès de E_1 sur l'ensemble inclus E_2 (ou le complément de E_2 sur E_1), soit l'ensemble des points qui appartiennent à E_1 sans faire partie de E_2; par $E_1 E_2 \ldots$ le produit des ensembles $E_1, E_2, \ldots$ en nombre fini ou non ou ensemble des points communs à tous.

E' étant l'ensemble dérivé de E, nous noterons $\hat{E}$ la somme $E + E'$ (donc tout ensemble fermé), $\check{E}$ l'ensemble des points intérieurs de E (donc tout ensemble ouvert); P désignera un ensemble parfait.

Si $E < P$, un point M de P est intérieur à E *sur* P s'il est à une distance non nulle du complémentaire de E par rapport à P (C. de la Vallée Poussin [II, p. 105]). Appelons *ici* domaine rectangulaire (orienté parallèlement aux axes) l'ensemble des points dont les coordonnées appartiennent respectivement à des intervalles (a_1, b_1), ..., (a_h, b_h). La fonction caractéristique d'un ensemble E situé dans le domaine D, dont la notion a été introduite par C. de la Vallée Poussin [II, p. 7], est égale à 1 en chaque point de E, à 0 en chaque point du complémentaire.

Mesure. — La mesure extérieure $m_e E$ d'un ensemble borné E est la borne inférieure de la somme des mesures des domaines rectangulaires, en nombre fini ou en infinité dénombrable, non empiétants, qui le contiennent; sa mesure intérieure $m_i E$ est le complément de la mesure extérieure de l'ensemble complémentaire dans un domaine rectangulaire quelconque le contenant. On a toujours $m_i E \leqq m_e E$; dans le cas de l'égalité, on dit que E est mesurable et sa mesure $m E$ est par définition la valeur commune $m_i E$, $m_e E$.

La somme et le produit d'un nombre fini ou infini d'ensembles mesurables (dans un ensemble borné) sont mesurables.

La somme d'un nombre fini ou infini d'ensembles mesurables sans point commun deux a deux a pour mesure la somme de leurs mesures.

Les ensembles mesurables les plus simples et les plus utiles sont ceux que l'on peut construire à partir des domaines rectangulaires, formés par addition, soustraction et multiplication en nombre fini ou non. Les seuls étudiés au début par E. Borel, ils sont désignés sous le nom d'ensembles mesurables (B). Tels sont les ensembles ouverts et les ensembles fermés.

Des ensembles de mesure nulle ou positive sont respectivement appelés par A. Denjoy minces ou épais.

Une propriété a lieu *presque partout* sur un ensemble si elle a lieu en tous les points de cet ensemble, sauf peut-être aux points d'un ensemble inclus de mesure nulle.

Si, à chaque ensemble E d'une famille d'ensembles bornés et mesurables, on fait correspondre un nombre, on définit ainsi une fonction d'ensemble $f(E)$. Elle est additive au sens restreint (ou complet) lorsque l'un quelconque E de ces ensembles étant la somme d'un nombre fini (ou même infini) d'ensembles de la famille sans point commun deux à deux, $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$, on a

$$f(E) = f(E_1) + f(E_2) + \ldots + f(E_n) + \ldots.$$

Elle est continue (ou absolument continue), si E variant dans un espace borné $f(\mathrm{E})$ tend vers zéro avec le diamètre de E, c'est-à-dire la borne supérieure de la distance de deux de ses points (ou bien avec la mesure de E) [43, *a* et *b*].

La mesure est une fonction d'ensemble, additive au sens complet et absolument continue.

A moins d'indication contraire, les ensembles considérés seront supposés bornés.

II. — Convergence des suites.

Nota. — On trouvera un exposé détaillé des questions traitées dans ce chapitre et une abondante documentation bibliographique dans H. Hahn [I].

3. Transformation stéréographique. — R. Baire a usé d'une transformation $y = \frac{x}{1+|x|}$ qui fait correspondre à la totalité des nombres, $-\infty$ et $+\infty$ étant traités comme deux nombres distincts, l'intervalle $(-1, +1)$ et qui uniformise les limites finie ou infinie (d'un signe déterminé) en les ramenant à une limite finie. Une telle transformation homéologique est possible d'une infinité de façons. Pour particulariser ici l'emploi de la sphère de Riemann utilisée dans le cas des quantités complexes nous supposons que, dans un plan passant par l'axe $x'\mathrm{O}x$, est tracé le cercle unité de centre O et que d'une extrémité Ω du diamètre $\Omega\mathrm{I}$ perpendiculaire à l'axe, on a fait sur lui la projection stéréographique de la circonférence. Chaque point M d'affixe x correspond ainsi à un point m, dont la distance comptée sur la circonférence à partir de I dans un sens convenable est $y = 2 \operatorname{arc\,tang} x$. A $+\infty$ et $-\infty$ correspondent ainsi $+\pi$ et $-\pi$. Et si l'on ne veut pas faire de distinction entre ces couples de nombres, on parlera de points sur la circonférence et de distance cyclique (arithmétique) de ces points. Nous utiliserons quelquefois une telle transformation sans nous y astreindre en toute circonstance.

4. Premières fonctions associées à une suite. — Étant donnée une famille $\mathfrak{F}$ de fonctions $f(\mathrm{M})$ définies aux points M d'un ensemble E à h dimensions, on considère : 1° les *fonctions inférieure* et *supérieure*, dont les valeurs en chaque point M sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure des valeurs prises en ce point par les $f(M)$; nous les noterons $\beta_1[E; \{f\}; M]$, $\beta_2[E; \{f\}; M]$; 2° *la plus petite* et *la plus grande fonction limite*, dont les valeurs en chaque point sont respectivement les valeurs d'accumulation inférieure et supérieure des $f(M)$ en considérant comme distinctes les valeurs prises par des fonctions différentes de la famille; nous les noterons $\lambda_1[E; \{f\}; M]$, $\lambda_2[E; \{f\}; M]$. Ces fonctions se présentent notamment dans l'étude des équations différentielles. *Voir*, par exemple, P. Montel [34, *c*].

Ces définitions s'appliquent en particulier à la famille d'une suite infinie de fonctions $\{f_\nu(M)\}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$); et, quant aux plus petite et plus grande fonctions limites d'une telle suite, nous les écrirons aussi $\underline{f}(M)$, $\overline{f}(M)$.

Soit un point M de $\hat{E}$; dans le cas d'une fonction $g(M')$ définie sur E, R. Baire a défini deux nombres, le minimé et le maximé; le premier est la borne supérieure des bornes inférieures de $g(M')$ pour le voisinage V sur E du point M, le second a une définition analogue. Ainsi, relativement à E, sont construites sur $\hat{E}$ deux fonctions qui sont dites minimale et maximale et désignées par $\mu_1\left[\hat{E}, g, M\right]$, $\mu_2\left[\hat{E}, g, M\right]$. Leurs valeurs en M sont aussi respectivement la borne inférieure ou supérieure des $\underline{\lim}_{n=\infty} g(M_n)$, $\overline{\lim}_{n-\infty} g(M_n)$, M_n tendant sur E vers M (si M fait partie de E, le choix $M_n = M$ n'est pas exclu).

Dans le cas d'une suite $\{f_\nu\}$, on imagine la borne inférieure des $f_\nu(M')$ pour les indices $\nu \geqq n$, n entier arbitraire et un voisinage quelconque V(M) sur E; la borne supérieure des bornes inférieures ainsi obtenues définit en M la *fonction minimale* $\mu_1\left[\hat{E}; \{f_\nu\}; M\right]$ de la suite.

Définition analogue de la *fonction maximale* $\mu_2\left[\hat{E}; \{f_\nu\}; M\right]$. Leurs valeurs en M sont aussi respectivement la borne inférieure ou supérieure des $\underline{\lim}_{n=\infty} f_{\nu_n}(M_n)$ ou $\overline{\lim}_{n=\infty} f_{\nu_n}(M_n)$, M_n tendant sur E vers M et ν_n vers l'infini. Si les nombres $\frac{1}{\nu}$ définissant les valeurs d'une $(h+1)^{\text{ième}}$ coordonnée dans un espace à $h+1$ dimensions, nous faisons correspondre à l'ensemble E et aux nombres ν un ensemble $\mathcal{E}$ dans ce nouvel espace, à la suite f_ν définie sur E correspond une fonction F définie sur $\mathcal{E}$, un point limite $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$ est $(M, 0)$; à un voisinage $V(M')$ de M sur E et aux valeurs de $\nu \geqq n$, n entier arbitraire, correspond un voisinage $\mathcal{V}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{E}$ et les fonctions minimale et maximale de $\{f_\nu\}$ en M ne sont autres que les fonctions de même nom de F pour $\mathcal{E}$ en $\mathcal{M}$ [10, d].

Les fonctions maximale et minimale, supposées finies, d'une suite $\{f_\nu\}$ sont respectivement continues supérieurement et inférieurement.

Pour que la limite d'une suite $\{f_\nu\}$ supposée convergente soit continue en M de E, il suffit que, en ce point, les fonctions maximale et minimale aient même valeur.

On définit aussi les fonctions maximale et minimale *réduites* d'une fonction ou d'une suite en un point M de E en utilisant les voisinages réduits (M exclu) de M au lieu des voisinages complets.

5. **Suites convergentes.** — La suite $\{f_\nu\}$ est dite *convergente-continue* en M de $\hat{E}$ lorsque, en ce point, les fonctions maximale et minimale ont même valeur finie. Si M est de E, cette définition implique déjà la convergence de la suite en ce point; elle exige, en outre, que les fonctions minimale et maximale réduites y soient égales à cette valeur limite; la définition générale revient à dire que la fonction adjointe $F\left(M', \frac{1}{\nu}\right)$ a une limite au point $(M, 0)$.

La suite $\{f_\nu\}$ est dite *uniformément et proprement convergente* en M de $\hat{E}$ lorsque à tout $\varepsilon > 0$ correspondent un voisinage $V(M)$ sur E et un entier ν_0 tels que pour tout M' de V et chaque $\nu \geqq \nu_0$, on ait

$$\lambda_2[V; \{f_\nu\}; M'] - \lambda_1[V; \{f_\nu\}; M'] < \varepsilon.$$

Si M est de E, cette définition implique la convergence en M.

Par extension, $\{f_\nu\}$ est *uniformément convergente* en un tel point M de $\hat{E}$ si la suite déduite de $\{f_\nu\}$ par transformation stéréographique est uniformément et proprement convergente en M.

Appelons *écart* de la suite $\{f_\nu\}(\nu \geqq n)$ en M' de E et notons $\omega[E; \{f_\nu\}; M'](\nu \geqq n)$ ou, abréviativement, $\omega_n(E, M')$ la différence

$$\beta_2[E; \{f_\nu\}; M'] - \beta_1[E; \{f_\nu\}; M'] \qquad (\nu \geqq n)$$

(si les deux termes sont infinis de même signe, on prend la différence égale à zéro). La fonction maximale de $\{\omega_n\}$ en M de $\hat{E}$, soit $O[\hat{E};\{f_\nu\};M]$, peut être appelée le *balancement* de la suite $\{f_\nu\}$ en M; il semble préférable, en effet, afin d'éviter la confusion, de réserver le mot oscillation, avec une extension de sens différente, au cas général d'une famille quelconque de fonctions [8, p. 177] et (6).

Le balancement n'est pas négatif; les f_ν étant supposés bornés dans leur ensemble dans le voisinage de M; il faut et il suffit qu'il soit nul en M de $\hat{E}$ pour que $\{f_\nu\}$ soit en ce point uniformément et proprement convergente.

On voit aisément que : 1° si $\{f_\nu\}$ est convergente-continue en M de $\hat{E}$, elle est uniformément convergente en ce point; 2° si en M de E, une infinité de f_ν sont continues et $\{f_\nu\}$ est uniformément convergente, la suite est convergente-continue en ce point.

Si $\{f_\nu\}$ converge dans un certain voisinage de M de $\hat{E}$ vers une fonction f, pour que la suite soit uniformément et proprement convergente en M, il faut et il suffit qu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspondent un voisinage V(M) sur E et un entier ν_0 tels que $|f_\nu(M') - f(M')| < \varepsilon$ pour tout M′ de V et chaque $\nu \geqq \nu_0$.

On peut appeler, dans ce cas de la convergence de $\{f_\nu\}$, *écart* de f_ν en M′ ($\nu \geqq n$) *autour de sa limite* $f(M')$, la borne supérieure de $|f_\nu(M') - f(M')|$, soit $\varphi_\nu(M')$ et *balancement* de la suite en M *autour de sa limite* la fonction maximale de $\{\varphi_n\}$ en M. Il est visible que ce balancement est nul en même temps que le premier [37, *a*, p. 166].

Fait important et immédiat :

Si $\{f_\nu\}$ *converge vers une fonction finie f dans un certain voisinage de* M *de* E, *la convergence étant uniforme en* M, *si, de plus, une infinité de* f_ν *sont continues en* M, *alors f est aussi continue en ce point.*

La notion de *convergence uniforme* **remonte à Cauchy. Elle a été introduite dans le dessein d'approfondir la question de la continuité de la somme d'une série convergente. (*Voir* [1, *a*; 10, *a*, *d*, *e*, *g*; 33, p. 844.]**

Définition. — La suite $\{f_\nu\}$ est dite uniformément (et proprement) convergente sur E vers une fonction f si à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un indice ν_0 tel que, en tout point M de E et pour tout $\nu \geqq \nu_0$, on ait $|f_\nu(M) - f(M)| < \varepsilon$.

Par extension, elle est encore dite uniformément convergente si la suite stéréographiquement transformée est uniformément et proprement convergente.

Si $\{f_\nu\}$ est uniformément convergente sur E, elle l'est en chaque point de $\hat{E}$; réciproquement, si, en chaque point de E supposé fermé, $(\hat{E} = E)\{f_\nu\}$ est uniformément convergente, elle l'est sur E.

Pour la convergence uniforme d'une série quel que soit l'ordre des termes, une condition nécessaire et suffisante est la convergence uniforme de la série des modules [6, p. 90].

A. Cauchy remonte le théorème fondamental (réduit ci-dessus à son élément essentiel).

I. *Si* $\{f_\nu\}$ *est uniformément convergente sur* E *vers une fonction* f, *en tout point* M *de* E *auquel une infinité de* f_ν *sont continues, la fonction* f *est elle-même continue.*

De plus, si en M, non de E, mais de $\hat{E}$, une infinité de f_ν ont une limite, f a aussi une limite en ce point.

Les points où la convergence n'est pas uniforme ont été classés par W. F. Osgood [37, *a*]; au voisinage d'un tel point, les fonctions peuvent être ou non bornées dans leur ensemble; dans ce dernier cas, il appelle le point un point χ. *Voir* aussi [45, *b* et *c*; 22, *b*, p. 485] et [10, *c*].

Nombre de questions se rapportant à la fonction limite d'une suite, telle la continuité, se ramènent à un problème d'interversion de passage à la limite; ainsi a-t-on

$$\lim_{M \to M_0} \left\{ \lim_{n=\infty} f_n(M) \right\} = \lim_{n=\infty} \left\{ \lim_{M \to M_0} f_n(M) \right\} ?$$

Condensation des singularités. — L'emploi de séries uniformément convergentes dans un intervalle permet de construire des fonctions qui admettent, en chacun des points d'un ensemble dénombrable dans cet intervalle, une singularité de nature donnée. C'est la méthode de condensation des singularités.

Imaginée sous une forme imparfaite par M. Hankel [19], elle a été exposée dans sa généralité par G. Cantor [7]; en voici le principe : soit $\varphi(y)$ une fonction bornée dans l'intervalle $(-a, a)$ continue, sauf pour $y = 0$, puis une série Σc_n absolument convergente, un ensemble dénombrable de points ξ_k de $(0, a)$. La série $\sum_1^\infty c_n \varphi(x - \xi_n)$ est uniformément convergente; elle est continue en tout point de $(0, a)$ différent des ξ et en un tel point même ξ_k si l'on supprime le terme correspondant $c_k \varphi(x - \xi_k)$; elle est donc discontinue aux points ξ_k seulement et présente en un tel point la même discontinuité que $\varphi(y)$ pour $y = 0$.

Continuité de la fonction limite. — La convergence uniforme donne une condition suffisante pour la continuité de la limite. Cette condition n'est pas nécessaire. La notion de *convergence uniforme simple*, introduite par U. Dini [12], permet de serrer le problème de plus près. En un point M de $\hat{E}$, la suite $\{f_\nu\}$ est dite posséder (proprement) la convergence uniforme simple si elle converge dans le voisinage de M sur E vers une fonction f, et si à tout $\varepsilon > 0$ et à tout indice $\nu_0 > 0$ correspondent un voisinage V de M et un indice ν_1 supérieur à ν_0 tels que $|f_{\nu_1}(M') - f(M')| < \varepsilon$ pour tout M′ de V.

Par extension, on dit qu'elle possède la convergence uniforme simple en ce point si la suite obtenue par transformation stéréographique la possède au sens propre précédent.

Par définition, la suite $\{f_\nu\}$ a sur E (proprement) la convergence uniforme simple si elle y converge vers une fonction f, et si dans les mêmes conditions que ci-dessus l'inégalité a lieu pour tout M′ de E. On passe de là, comme précédemment, à la convergence uniforme simple, en général.

Si $\{f_\nu\}$ possède la convergence simplement uniforme sur E, elle a cette convergence en chaque point de $\hat{E}$, mais la réciproque, même $\hat{E}$ étant supposé borné, n'est pas vraie [22, *b*, p. 489].

II. *Si les f_ν sont continues en* M *de* E *et que $\{f_\nu\}$ converge dans le voisinage, une condition nécessaire et suffisante pour que f (limite de $\{f_\nu\}$) soit continue en* M *est que $\{f_\nu\}$ converge de manière simplement uniforme en* M.

Lorsque les f_ν sont continues sur E *et que* $\{f_\nu\}$ *y converge de manière simplement uniforme vers une fonction f, cette fonction limite est continue.*

C'est là le progrès obtenu par Dini. Mais comme il ne s'agit toujours que d'une condition suffisante *en ce qui concerne un ensemble* E, le problème n'est pas encore résolu. Une solution complète est apportée par C. Arzelà avec la notion de *convergence quasi uniforme* (qu'il appelait convergence à traits pour des raisons de représentation géométrique). La suite $\{f_\nu\}$ est dite posséder (proprement) la convergence quasi uniforme sur E si à tout $\varepsilon > 0$ et à chaque indice ν_0 correspond un indice supérieur ν'_0, en sorte que pour tout M de E existe au moins un ν satisfaisant à $\nu_0 \leqq \nu < \nu'_0$ tel que $|f_\nu(M) - f(M)| < \varepsilon$.

A l'aide de la transformation stéréographique, on passe à la définition générale de la convergence quasi uniforme.

III. Théorème fondamental. — *Si la suite $\{f_\nu\}$ de fonctions définies et continues sur $\hat{E}$ borné converge vers une fonction f, pour que f soit continue sur $\hat{E}$, il faut et il suffit que la convergence soit quasi uniforme.*

(La démonstration [1, *c*, *d*] a été simplifiée par E. Borel [5, *c*]; M. Fréchet [16, *a*] a montré que la démonstration de Borel s'étend immédiatement aux éléments d'une classe (L) (calcul fonctionnel), *voir* aussi pour ce théorème Dell' Agnola [10, *b*]). On peut rattacher cette propriété au théorème II.

La condition est suffisante. En M de $\hat{E}$, à $\varepsilon > 0$ correspond ν_0 tel que si $\nu_0 < n < n'$, on a $|f_{n'}(M) - f_n(M)| < \varepsilon$. Soit $\nu'_0 > \nu_0$ et tel que à chaque H de $\hat{E}$ répond un $n (\nu_0 \leqq n < \nu'_0)$ pour lequel $|f_n(H) - f(H)| < \varepsilon$. A l'ensemble des n correspond un voisinage V de M tel que si M′ est de V, on a, pour chaque n, $|f_n(M') - f_n(M)| < \varepsilon$. Or, soient un tel point M′, ν' et ν les valeurs de n relatives à M′ et à M, on a

$$\begin{aligned} f_\nu(M') - f(M') = {} & [f_{\nu'}(M') - f(M')] + [f_\nu(M') - f_\nu(M)] \\ & - [f_{\nu'}(M') - f_{\nu'}(M)] + [f_\nu(M) - f_{\nu'}(M)], \end{aligned}$$

d'où l'on conclut aisément que $\{f_\nu\}$ a la convergence simplement uniforme en M.

La condition est nécessaire. Puisque f est continue en tout point M de E, $\{\hat{f}_\nu\}$ y a la convergence simplement uniforme. Soient $\varepsilon > 0$ et un indice ν_0. A tout M de $\hat{E}$ correspond un voisinage, avec un indice ν_1, pour tout M' duquel on a

$$|f_{\nu_1}(M') - f(M')| < \varepsilon.$$

Il existe (théorême de Borel-Lebesgue) un nombre limité de tels voisinages tels que tout point de $\hat{E}$ soit intérieur à l'un d'eux. D'où la conclusion.

On étend, comme il suit, à une suite $\{f_\nu\}$ la notion de fonction *continue supérieurement ou inférieurement.*

$\{f_\nu\}$ est une suite oscillante supérieurement ou inférieurement continue en M de E si

$$\bar{f}(M) = \mu_2[E; \{f_\nu\}; M]$$

ou

$$\underline{f}(M) = \mu_1[E; \{f_\nu\}; M].$$

On dit que $\{f_\nu\}$ est une suite oscillante continue en M de E lorsqu'elle satisfait à la fois aux deux conditions précédentes.

Il résulte de la définition de la convergence proprement uniforme de $\{f_\nu\}$ en M de E que, à toute suite M_n de points de E tendant vers M, et à tout $\varepsilon > 0$ correspondent deux indices n_0 et ν_0 tels que pour $n > n_0$ et $\nu' > \nu_0$, on ait

$$f_{\nu'}(M_n) < \overline{\lim_{\nu=\infty}} f_\nu(M_n) + \varepsilon, \qquad f_{\nu'}(M_n) > \underline{\lim_{\nu=\infty}} f_\nu(M_n) - \varepsilon.$$

La suite étant bornée dans le voisinage de M est dite osciller en M d'une manière proprement uniforme si elle satisfait aux deux conditions, supérieurement ou inférieurement si elle n'est assujettie qu'à la première ou qu'à la seconde. Lorsqu'elle satisfait aux deux et que, de plus, elle est convergente dans le voisinage de M, il est aisé de constater que sa convergence est uniforme en ce point.

Une autre généralisation a été donnée sous le nom d'oscillation uniforme (supérieure, inférieure) de deuxième espèce.

Cette théorie est due principalement à W. H. Young [45, *d*, *g*, *j*] (*voir* H. Hahn [1] et aussi sur le problème général des limites [35]).

6. Fonctions également continues. — Le fait de savoir qu'une famille de fonctions continues est telle que de toute suite infinie de ces fonctions on peut extraire une autre suite infinie convergeant uniformément vers une fonction limite est souvent utile en analyse. Le problème ainsi posé a été résolu par C. Arzelà [1, *a*, p. 342, et *b*, p. 55], grâce à la notion d'égale continuité introduite par G. Ascoli ([2], p. 545). *Voir* aussi Dell' Agnola [10, *f*] et A. Roussel [41]. A ces familles, M. Fréchet a donné le nom de *compactes* et il en a étendu la définition et l'usage aux opérations fonctionnelles.

Soit une famille de $\mathcal{F}$ de fonctions f_α définies sur E. Elle est dite *également continue* en M de E si à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un voisinage V de M sur E tel que, pour tout M′ de V et tout f_α de $\mathcal{F}$, on ait $|f_\alpha(M') - f_\alpha(M)| < \varepsilon$.

Si une suite $\{f_\nu\}$ définie sur E converge en M et si les f_ν sont continues en ce point, pour qu'elle forme une famille également continue en M des conditions nécessaires et suffisantes sont qu'elle soit convergente-continue ou uniformément convergente en ce point [1, *b*, p. 55; *c*, p. 176] *voir* aussi [45, *e*, p. 356].

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est *également continue sur* E si à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta > 0$ tel que pour tout f_α de $\mathcal{F}$ et tout couple M′M″ de E satisfaisant à $|M'' - M'| < \eta$ on ait $|f_\alpha(M'') - f_\alpha(M')| < \varepsilon$.

Pour que $\mathcal{F}$ soit également continue sur E il faut et, si E est fermé, il suffit que $\mathcal{F}$ soit également continue en tout point de E.

On appelle *oscillation* d'une fonction $g(M)$ définie sur E la borne supérieure de $|g(M'') - g(M')|$ pour tout couple M′, M″ de E, c'est-à-dire l'excès de la borne supérieure sur la borne inférieure de g dans E; oscillation de g en M de $\hat{E}$ la borne inférieure de l'oscillation de g pour les voisinages de M sur E. De même l'*oscillation d'une famille* $\mathcal{F}$ de fonctions f_α définies sur E est la borne supérieure de $|f_\alpha(M'') - f_\alpha(M')|$ pour tout couple M′, M″ de E et toute fonction de $\mathcal{F}$ et oscillation de la famille en M de $\hat{E}$ la borne inférieure de l'oscillation de la famille pour les voisinages de M sur E.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}$ soit également continue en M de E est que son oscillation y soit nulle.

Pour que les fonctions f_α d'une famille $\mathcal{F}$ également continue sur E soient sur E bornées dans leur ensemble il faut et, si E est fermé et d'un seul tenant, il suffit qu'elles soient bornées dans leur ensemble en un point M de E.

Du théorème de Borel-Lebesgue on déduit en effet aisément qu'il existe un nombre fini K tel que si M et M' sont deux points quelconques de $\hat{\mathrm{E}}\left(\text{ici } \hat{\mathrm{E}} = \mathrm{E}\right)$ on a pour tout f_α de $\mathcal{F}$ $|f_\alpha(\mathrm{M}') - f_\alpha(\mathrm{M})| < \mathrm{K}$. On a cette propriété fondamentale :

IV. *Pour qu'une famille $\mathcal{F}$ de fonctions continues sur* E *soit compacte il faut et, si elle est bornée sur* E *supposé fermé, il suffit qu'elle soit également continue sur* E. *Si elle est également continue sur* E *supposé fermé et d'un seul tenant, mais si elle n'y est pas bornée dans son ensemble (donc en un point quelconque), on peut de toute suite infinie tirée de $\mathcal{F}$ extraire une suite partielle tendant uniformément vers une fonction finie ou vers l'infini (d'un signe déterminé).*

La condition est nécessaire. On montre que si en un point M la famille n'était pas également continue il existerait $\varepsilon > 0$, une suite M'_n tendant vers M et une suite $\{f_n\}$ de fonctions de $\mathcal{F}$ telles que $|f_n(\mathrm{M}'_n) - f_n(\mathrm{M})| \geqq \varepsilon$. De cette suite on ne pourrait extraire une suite partielle ayant une limite.

La condition est suffisante. — 1° La famille est bornée dans son ensemble. Remarquons que les fonctions d'une suite étant bornées en un point il existe certainement une suite partielle qui y converge. Soit alors une variable positive ρ_n tendant vers 0; à ρ_n correspond un système Σ_n d'un nombre limité de cercles de rayons ρ_n tel que tout point de $\hat{\mathrm{E}}\left(\text{ici } \hat{\mathrm{E}} = \mathrm{E}\right)$ soit à l'intérieur de l'un d'eux. Si $\mathrm{M}_1^{(n)}, \ldots, \mathrm{M}_{\nu_n}^{(n)}$ sont les centres des cercles de Σ_n, on peut d'une suite donnée des f_α extraire une première suite $f_1^{(1)} \ldots f_{\nu_1}^{(1)}$ qui converge aux points $\mathrm{M}_1^{(1)}, \ldots, \mathrm{M}_{\nu_1}^{(1)}$ vers certaines valeurs $u_1^{(1)}, \ldots, u_{\nu_1}^{(1)}$; de celle-ci une deuxième qui converge en outre en $\mathrm{M}_1^{(2)}, \ldots, \mathrm{M}_{\nu_2}^{(2)}$ vers des valeurs $u_1^{(2)}, \ldots, u_{\nu_2}^{(1)}$ et ainsi de suite. La suite $f_1^{(1)} f_2^{(2)}, \ldots, f_q^{(q)}, \ldots$ converge en chacun des centres vers la valeur correspondante. Il est aisé de conclure de là que, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un indice q_0 tel que si $q > q_0$ et $r > 0$, on a pour tout M de $\hat{E}$

$$|f_{q+r}(M) - f_q(M)| < \varepsilon.$$

2° La famille n'est pas bornée dans son ensemble. D'une suite donnée on peut extraire une suite partielle qui converge, en un point marqué M, vers une valeur finie ou vers un infini de signe déterminé. Ou l'on retombe sur le premier cas ou l'on établit sans difficulté la convergence uniforme vers $+\infty$ ou $-\infty$. Un exemple de famille également continue, non bornée, et dont toute suite partielle converge vers l'infini, est donné par la suite $f_\nu(x) = x + \nu$.

Ces définitions et propriétés d'une famille s'appliquent en particulier à une suite.

V. *Si une suite de fonctions continues sur* E *est uniformément convergente elle forme évidemment une famille compacte; mais, et le fait est très important, inversement :*

Si une suite convergente $\{f_\nu(M)\}$ *de fonctions continues sur* E *constitue une famille compacte, la convergence est uniforme.*

En effet, dans le cas contraire, il y aurait $\varepsilon > 0$, une suite de points M_1, M_2, ..., M_p, ..., et une suite partielle des f_ν, φ_1, φ_2, ..., φ_p, ..., tels que, $f(M)$ étant la fonction limite, on ait $|\varphi_p(M_p) - f(M_p)| > \varepsilon$. Il serait donc impossible d'extraire de la suite des φ une suite uniformément convergente.

Si l'on adjoint à une famille $\mathcal{F}$ également continue les fonctions limites que peuvent fournir les suites partielles par convergence uniforme, la nouvelle famille $\mathcal{F}_1$ est aussi également continue et de plus elle constitue un ensemble fermé, c'est-à-dire que toute fonction déduite de $\mathcal{F}_1$ par le même procédé appartient à $\mathcal{F}_1$. Il n'est pas nécessaire de supposer $\mathcal{F}$ bornée à condition de considérer comme nulle la différence en deux points d'une fonction qui se réduit à une constante infinie..

Par la projection stéréographique et l'introduction de la distance cyclique, notée $|a, b|$, des points images des nombres a, b sur le cercle substitué à la différence $|a - b|$ on étend les notions et propriétés précédentes (jusqu'ici prises au sens *propre* et maintenant considérées *sur le cercle*). Il faut noter que, ce qui a lieu sur le cercle relativement à $f(M)$ lorsque $f(M)$ est infini (par exemple la continuité) équivaut aux mêmes choses relatives à $\frac{1}{f(\mathrm{M})}$ avec les définitions ordinaires. On retrouve ces extensions sous une forme plus générale avec les quantités complexes.

VI. *Lorsqu'une famille $\mathcal{F}$ est également continue en* M *de* E *les fonctions inférieure et supérieure ainsi que la plus petite et la plus grande fonction limite de la famille sont continues en* M *quand elles y sont finies.*

Si $\mathcal{F}$ est bornée sur $\hat{\mathrm{E}}$ et est également continue en tout M de $\hat{\mathrm{E}}$, pour chaque $\varepsilon > 0$ presque toutes les fonctions f_α de $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire toutes, sauf peut-être un nombre fini) satisfont à

$$\lambda_1\left[\hat{\mathrm{E}};\ \{f_\alpha\};\ \mathrm{M}\right] - \varepsilon < f_\alpha(\mathrm{M}) < \lambda_2\left[\hat{\mathrm{E}};\ \{f_\alpha\};\ \mathrm{M}\right] + \varepsilon.$$

Soit une suite monotone $\{f_\nu\}$ de fonctions continues sur E; si elle forme une famille bornée également continue, elle admet une fonction limite continue qui est la valeur commune de $\underline{f}$ et de $\overline{f}$. Réciproquement si, définie sur $\hat{\mathrm{E}}$, elle y admet une limite continue f, elle est également continue et uniformément convergente [1, *b*, p. 61; 34, *a*; 45, *e*, p. 355].

L'égale continuité est assurée pour une famille $\mathcal{F}$ sur un ensemble E s'il existe une constante A et une fonction $\varphi(u)$ de la variable positive u, infiniment petite avec elle, telles que pour tout couple de points M'', M' de E et toute fonction f_α de $\mathcal{F}$ l'on puisse écrire

$$|f_\alpha(\mathrm{M''}) - f_\alpha(\mathrm{M'})| < \mathrm{A}\,\varphi(|\mathrm{M''} - \mathrm{M'}|).$$

Soit dans l'intervalle (a, b) une famille $\mathcal{F}$ de fonctions $f_\alpha(x)$ admettant des dérivées $f'_\alpha(x)$ qui forment une famille également continue. Si les plus petites limites de $|f'_\alpha(x)|$ et de $|f_\alpha(x)|$ ne sont pas infinies, on peut de toute suite de $f_\alpha(x)$ extraire une suite partielle convergente telle que la suite correspondante des dérivées tende vers la dérivée de la fonction limite, les convergences étant uniformes. On forme d'abord une suite partielle $f'_\nu(x)$ ayant une limite $g(x)$ et telle qu'en un point x_0 $f_\nu(x)$ ait une limite finie C et l'on part de l'égalité

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_\nu(x)\,dx.$$

On étend ces considérations au cas où les f ont des dérivées jusqu'à un certain ordre ou indéfiniment.

Imaginons que les fonctions f_α d'une famille $\mathcal{F}$, définies sur un ensemble fermé, soient développables en séries d'un type déterminé. Si elles sont bornées dans leur ensemble et également continues, de toute suite infinie des f_α on pourra extraire une suite convergeant uniformément vers une fonction limite. Mais y aura t-il une fonction limite développable en série du même type? Voici une propriété générale dont on tirera parti :

VII. *Soient* $\sum_0^\infty a_n \varphi_n(\mathrm{M})$ *la forme de la série envisagée et un ensemble* E; *supposons chaque* φ_n *borné sur* E *en module et une famille* $\mathcal{F}$ *de fonctions représentées sur* E *par des séries de la forme précédente satisfaisant à deux conditions :* 1° *pour chaque* n *les* a_n *sont bornés en module;* 2° *les séries représentatives sont également convergentes sur* E.

Alors de toute suite de fonctions de $\mathcal{F}$ *on peut extraire une suite tendant uniformément vers une fonction développable en série de même forme.*

On remarquera que les conditions posées impliquent la limitation en module de l'ensemble des fonctions sur E mais non leur continuité. En supposant E fermé si les φ_n sont continues la famille $\mathcal{F}$ sera également continue sur l'ensemble.

Soit une suite $f_\nu(\mathrm{M})$

$$f_\nu(\mathrm{M}) = \sum_0^\infty a_n^\nu \varphi_n(\mathrm{M}).$$

Les a_0^ν étant bornés admettent au moins une valeur limite A_0, il existe une suite

$$(1) \qquad \nu_0^1 \nu_0^2 \nu_0^3 \ldots,$$

telle que la suite

$$(1)' \qquad a_0^{\nu_0^1} a_0^{\nu_0^2} a_0^{\nu_0^3} \ldots$$

ait A_0 pour limite.

Puis de (1) on peut extraire une suite

$$(2) \qquad \nu_1^1 \nu_1^2 \nu_1^3 \ldots,$$

telle que la suite

$$(2)' \qquad a_1^{\nu_1^1} a_1^{\nu_1^2} a_1^{\nu_1^3} \ldots$$

ait une limite A_1 ; etc.

Si l'on pose $\nu_i^{i+1} = \nu_i$, la suite $a_q^{\nu_0} a_q^{\nu_1} a_q^{\nu_2} \ldots$ aura la limite A_q.

Soit alors

$$f(M) = \sum A_n \varphi_n(M);$$

$$s_n^\nu = a_0^\nu \varphi_0(M) + \ldots + a_n^\nu \varphi_n(M), \qquad r_n^\nu = a_{n+1}^\nu \varphi_{n+1}(M) + \ldots,$$
$$S_n = A_0 \varphi_0(M) + \ldots + A_n \varphi_n(M), \qquad R_n = A_{n+1} \varphi_{n+1}(M) + \ldots.$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné il existe n_0 tel que si $n > n_0$ $|r_n^\nu| < \varepsilon$ et $|r_{n+q}^\nu - r_n^\nu| < 2\varepsilon$. Or ν parcourant les valeurs $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$, $r_{n+q}^\nu - r_n^\nu$ a pour limite $R_{n+q} - R_n$. Donc $\Sigma A_n \varphi_n(M)$ est une série convergente. De plus

$$f_\nu(M) - f(M) = (s_n^\nu - S_n) + (r_n^\nu - R_n).$$

Par là s'achève la démonstration (*voir* P. Montel [*a*]).

III. — Fonctions mesurables. Classes de Baire.

7. Fonctions mesurables. — La notion, devenue fondamentale, de fonction mesurable est due à H. Lebesgue [*a*]. Désignons par $\mathcal{E}(C)$ l'ensemble des points qui satisfont à la condition C. Soit une fonction de point $f(M)$ définie sur un ensemble mesurable E, finie ou infinie de signe déterminé; on dit qu'elle est mesurable sur E si l'un au moins des quatre ensembles

$$(1) \qquad \mathcal{E}(f \geqq A), \qquad \mathcal{E}(f < A), \qquad \mathcal{E}(f > A), \qquad \mathcal{E}(f \leqq A)$$

est mesurable quelle que soit la constante A, auquel cas ils le sont tous les quatre.

Après avoir établi que la somme et le produit de deux fonctions finies et mesurables sont eux-mêmes mesurables, on démontre [II, p. 29] les théorèmes suivants :

VIII. *Soit* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions mesurables sur* E, *finies ou non.*

1° *Les fonctions inférieure et supérieure de la suite sont mesurables.*

En particulier : toute limite, finie ou non, d'une suite monotone de fonctions mesurables, finies ou non, est mesurable. (Par définition une suite de valeurs infinies de même signe est considérée comme monotone et ayant pour limite l'infini de même signe.)

2° *La plus grande et la plus petite fonction limite de la suite sont mesurables.*

Et notamment : si la suite est convergente la fonction limite est mesurable.

Si l'ensemble E est mesurable (B), et si l'un des quatre ensembles est mesurable (B) les trois autres le sont et la fonction est dite mesurable (B).

On établit facilement que les somme, différence, produit et *limites* de fonctions mesurables (B) sont mesurables (B).

D. T. Egoroff [13, p. 244] a conclu d'un théorème de E. Borel une importante proposition : Si la suite $\{f_\nu\}$ de fonctions mesurables converge presque partout dans un intervalle, on peut supprimer de cet intervalle un ensemble de mesure arbitrairement petite de manière que la suite converge uniformément sur l'ensemble restant; proposition à laquelle on donne maintenant cet énoncé général et précis [8, p. 382].

IX. *Les points de* E, *dans un espace à h dimensions, auxquels une suite quelconque de fonctions mesurables converge vers un nombre fini, forment un ensemble mesurable e. Si mes.* $e > 0$ *et si* α *est un nombre arbitraire tel que* $0 < \alpha <$ *mes.e il y a des sous-ensembles mesurables* e_α *de e pour lesquels mes.* $e_\alpha \geq \alpha$ *et dans lesquels la convergence de la suite donnée est uniforme.*

Le théorème a été généralisé dans une autre direction par R. Caccioppoli [*b*].

X. *Soient, dans un espace à h dimensions, une suite de fonctions continues* $\{f_\nu(M)\}$, *convergente dans un domaine rectangulaire* D *et d'autre part une fonction additive d'ensemble* φ, *non négative, par exemple la mesure, on peut trouver un ensemble* $\hat{E}$ *tel* *que* $\varphi\left(\mathrm{D}-\hat{\mathrm{E}}\right)<\varepsilon$, ε *nombre positif arbitrairement donné, et que la suite converge uniformément sur* $\hat{\mathrm{E}}$ *vers* $f(\mathrm{M})$, *qui y est alors nécessairement continue.*

8. **Limites de fonctions. Classes de Baire.** — Une classification rationnelle, fondée sur le passage à la limite, des fonctions réelles qui se présentent en analyse, a été faite par R. Baire [a, b]; c'est à lui et à H. Lebesgue [c, d] que l'on doit principalement leur étude envisagée de ce point de vue, à laquelle C. de la Vallée Poussin [b et II] a plus récemment apporté une importante contribution. L'exposé si personnel qu'il a notamment donné de ces questions dans son Ouvrage est suivi à grands traits dans le présent chapitre.

Les fonctions continues forment la classe 0; les fonctions discontinues limites, finies ou non, de fonctions continues, la classe 1; les limites de fonctions de classe n, qui ne sont pas de classe au plus égale à n, la classe $n+1$; les limites de fonctions f_p de classe $n=\varphi(p)$ infiniment grande avec p, n'appartenant à aucune classe finie, la classe ω. On définit ensuite les fonctions de classe $\omega+1$, $\omega+2$, ..., et ainsi de suite transfiniment par l'application des deux principes qui servent précisément à la construction des nombres transfinis (Baire [6, Ch. II]).

1° Après tout nombre il en existe un autre;

2° Après toute suite illimitée de nombres croissants, il y a un premier nombre auquel tout nombre de la suite est antérieur.

Ainsi il existe des nombres de deux espèces, ceux qui ont et ceux qui n'ont pas d'antérieur immédiat.

Un théorème est vrai pour tous les nombres transfinis s'il est vrai pour 1 et si étant vrai pour les nombres inférieurs à α (quelconque) il subsiste pour α. C'est le principe de la méthode de récurrence.

Les fonctions de Baire sont celles qui rentrent dans la classification précédente. Une remarque importante est que l'*on n'élève pas la classe d'une fonction* en bornant la fonction à deux nombres a et $b\,(a<b)$, c'est-à-dire en substituant à la fonction f une fonction $[f]_a^b$ qui lui est égale lorsque $a\leqq f\leqq b$, qui est égale à a lorsque $f<a$, à b lorsque $f>b$.

Il est aisé d'établir cette propriété fondamentale :

La somme ou le produit d'un nombre limité de fonctions de Baire, finies et de classes $\leqq \alpha$, *sont des fonctions de Baire* $\leqq \alpha$.

Voici une *propriété capitale* établie par H. Lebesgue [*c*] :

XI. *Les fonctions de Baire sont identiques aux fonctions mesurables* (B).

Les fonctions de Baire sont mesurables (B); il suffit de l'établir pour les fonctions continues; or, dans ce cas, les ensembles $E(f \geqq A)$ sont fermés.

Les fonctions mesurables (B) sont des fonctions de Baire. De la Vallée Poussin le conclut de ce fait que la caractéristique (fonction dont il fait grand usage) d'un ensemble mesurable (B) est une fonction de Baire, ce qui est aisé à voir pour un domaine rectangulaire fermé.

Fonctions de classe 1. — Leur étude a été faite par R. Baire lui-même [*b*], reprise avec d'autres méthodes ne faisant pas appel à la notion du transfini par H. Lebesgue (Note 2 de [5, *c*] et [29, *d*]). De la Vallée Poussin [II], utilisant les travaux de ses devanciers, construit une théorie élégante et plus simple.

Il considère des ensembles bornés et parfaits P. Il introduit la notion d'ensemble E *compact* sur P, entendant par là que EP contient un point intérieur sur P et il établit le théorème auxiliaire suivant: si $P < E_1 + \ldots + E_n + \ldots$, les E étant des ensembles quelconques, pour que P puisse se mettre sous la forme $\Phi_1 + \ldots + \Phi_n + \ldots$ où $\Phi_n < E_n$, les Φ sans point commun deux à deux, chacun ou somme d'ensembles fermés ou vide, il faut et il suffit que, quel que soit l'ensemble parfait Q contenu dans P, l'un au moins des E_n soit compact sur Q. Et il effectue la décomposition lorsque la condition est remplie.

Disons avec R. Baire qu'une fonction f, considérée sur P, univoque finie et discontinue sur P, est soit totalement soit ponctuellement discontinue sur P selon que l'ensemble E des points de discontinuité est ou non compact sur P.

De la Vallée Poussin établit les théorèmes fondamentaux de Lebesgue et de Baire :

XII. Théorème de Lebesgue. — *Soit une fonction f univoque et* *discontinue sur* P, *pour qu'elle soit de classe* 1 *il faut et il suffit que les ensembles* $E(f > A)$, $E(f < A)$ *soient des sommes d'ensembles fermés, quel que soit* A.

XIII. Théorème de Baire. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction univoque, finie, discontinue* f, *soit de classe* 1 *sur* P *borné et parfait, est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait* Q *contenu dans* P (*voir* aussi [10, c, p. 676]).

Donnons ici une démonstration du fait que la condition est nécessaire.

Soit $\{f_\nu(M)\}$ une suite de fonctions continues sur P et y convergeant vers f:

1° Dans tout ensemble parfait $Q < P$ on peut trouver un ensemble E, compact sur Q, dans lequel l'ensemble des $f_\nu(M)$ est borné.

Ci-dessous considérons des domaines simples, par exemple sphériques.

Je dis que, étant donnés $\varepsilon > 0$ et un domaine D contenant un point arbitraire H de Q, il existe un domaine $D' < D$ contenant des points de Q, et tel que pour les points de $D'Q$ on a à partir d'une certaine valeur n_0 de l'indice $|f_{n''}(M) - f_{n'}(M)| \leqq \varepsilon$ (1). Si, pour un domaine D'_1 choisi à volonté sous les conditions que $D'_1 < D$ et que $D'_1 Q$ ne soit pas vide la propriété n'a pas lieu, il y a M_1 de $D'_1 Q$ et deux indices n'_1, n''_1 tels que

$$|f_{n''_1}(M_1) - f_{n'_1}(M_1)| > \varepsilon \ (2).$$

Et à cause de la continuité des fonctions, cette relation serait aussi vérifiée par tous les points de $D'_2 Q$, D'_2 étant un certain domaine inclus dans D'_1 et contenant M_1. Si pour $D'_2 Q$ l'on n'a pas l'inégalité (1) à partir d'un indice n_2 supérieur à n'_1 et n''_1 il y a un point M_2 et deux indices n'_2, n''_2 supérieurs à n'_1 et n''_1 tels que

$$|f_{n''_2}(M_2) - f_{n'_2}(M_2)| > \varepsilon,$$

et ainsi de suite. Or l'existence d'une telle suite de domaines emboîtés avec au moins un point commun M_0 de Q est incompatible avec la convergence en ce point. Donc il existe un domaine $D' < D$ tel que $D'Q$ ne soit pas vide et que à partir d'un indice n_0 (1) ait lieu.

Laissons fixe n''. Réduisons D' à Δ de manière que l'oscillation de $f_{n''}(M)$ ne dépasse pas ε sur ΔQ (non vide). Choisissons une position M_0, on aura

$$(3) \qquad |f_{n''}(M_0) - f_{n'}(M)| \leqq 2\varepsilon, \qquad |f_{n'}(M)| \leqq 2\varepsilon + |f_{n''}(M_0)|.$$

La présence des n_0 premières fonctions continues ne gêne pas la conclusion.

2° Sur l'ensemble $E = \Delta Q$ ainsi déterminé il existe des points de continuité pour $f(M)$ sur Q, car l'inégalité (3) (y faire n' infini) montre que l'oscillation de $f(M)$ sur E ne dépasse pas $4\varepsilon = \eta$. De là par des domaines emboîtés Δ, Δ_1, Δ_2, ... avec au moins un point M' de G on a des oscillations inférieures à η, $\frac{\eta}{2}$, $\frac{\eta}{3}$, ... L'oscillation est nulle en M'; f est donc continue sur Q en ce point qui, appartenant à D, est à une distance de H inférieure à un nombre positif arbitraire.

(*Voir* [3, *a*, *b*; 37, *b*, n° 1; 34, *b*, p. 109 et 119, *d*, p. 209]).

L'hypothèse que P est borné n'est pas essentielle. D'autre part Baire a généralisé ses définitions de manière que son théorème subsiste si f ne reste pas finie [3, *b*].

Fonctions de Baire de classe α. — Disons (notion due à Lebesgue) qu'un ensemble E contenu dans P borné est fermé ou au contraire ouvert de classe α s'il existe une fonction θ, définie sur P, de classe $\leqq \alpha$ telle que E soit l'ensemble des points de P où $\theta = 0$ ou au contraire $\theta \neq 0$.

Une suite $\{f_\nu\}$ et une fonction f étant finies sur un ensemble E, $\{f_\nu\}$ converge vers f à moins de ε près sur E si, en tout point de E, $\underline{f_\nu}$ et $\overline{f_\nu}$ sont égales à f à moins de ε près.

Une fonction finie f est de classe $\alpha > 0$ sur P à ε près si elle est, sur P, à moins de ε près, limite de f_ν de classe inférieure à α.

Soit E contenu dans P sur lequel est donnée la fonction finie f; f est à ε près de classe $\alpha > 0$ sur E si, sur E, f est à ε près limite de fonctions f_ν finies et de classes inférieures à α sur P.

Une fonction f, finie sur P, est à ε près de classe α sur un ensemble $E < P$ en un point M de E si le point M est le centre d'un domaine Δ de rayon assez petit pour que f soit à ε près de classe α sur l'ensemble $E\Delta$.

On a le théorème fondamental suivant :

Si f est à ε près de classe α sur P, quelque petit que soit ε, f est de classe $\leqq \alpha$ sur P.

De là découle cette importante propriété :

XIV. *La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classes* $\leqq \alpha$ (*ainsi que la somme d'une série uniformément convergente de telles fonctions*) *sont des fonctions de classe* α *au plus*.

Voici, respectivement, les conditions généralisées de Lebesgue et de Baire :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction, finie ou non, f soit de classe $\alpha > 0$ sur P est que, quelle que soit la constante A, les ensembles $E(f > A)$, $E(f < A)$ soient ouverts de classe α et ne soient pas tous deux de classe moindre; ou, ce qui revient au même, que les ensembles complémentaires $E(f \geqq A)$, $E(f \leqq A)$ soient fermés de classe α et ne soient pas tous deux de classe moindre.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction finie f soit de classe $\leqq \alpha$ sur P est que, quels que soient $\varepsilon > 0$ et l'ensemble parfait $Q < P$, on puisse trouver un point M de Q où f est à ε près de classe α sur Q.

Il existe, comme l'a montré R. Baire lui-même, des fonctions uniformes qui restent lors de sa classification. Partant d'un raisonnement de E. Borel, H. Lebesgue a établi qu'il existe des fonctions de toutes classes et montré que l'on peut nommer des fonctions de toute classe et même des fonctions qui n'appartiennent à aucune.

C. Kuratowski [26] a repris ce problème : « Pour tout α (nombre transfini) nommer une fonction déterminée de classe α ». Il le résout en définissant une fonction $f(\alpha, x)$ dépendant du nombre transfini α, de la deuxième classe, et de la variable $x (0 \leqq x \leqq 1)$ qui est, pour α fixe, fonction de x de classe α.

L'étude des fonctions mesurables (B) doit assurément être poursuivie. Signalons dans cet ordre d'idées que A. Kovanko a obtenu [25, *d*] une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$, supposée limite de fonctions $f_\nu(x)$ de classe 1 dans l'intervalle $(0, 1)$, ne soit pas de classe > 1.

Ajoutons, en ce qui concerne les fonctions non mesurables (B), qu'un exemple arithmétique d'une telle fonction a été donné par N. Lusin [32].

Mais, par sa classification, R. Baire « a limité un domaine fonctionnel réel qui suffit à tous les besoins de l'Analyse et au delà duquel toutes les généralisations paraissent condamnées à être vaines et stériles, ... Leur théorie peut être considérée comme la théorie générale des fonctions de variables réelles, progrès fondamental dû surtout à M. Lebesgue » [II, préface].

IV. — Intégrales et dérivées.

9. Intégrale de Riemann. — Deux questions se posent :

1° La limite $f(x)$ d'une suite convergente $\{f_\nu(x)\}$ de fonctions intégrables est-elle intégrable ?

2° En cas d'affirmative a-t-on

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,? \tag{1}$$

Une condition pratique suffisante qui remonte à Moigno et a été rectifiée par Weierstrass est :

XV. *Si la suite $\{f_\nu(x)\}$ de fonctions continues dans un intervalle Δ y converge uniformément vers $f(x)$, $\int_a^b f_n(x)\,dx$ tend vers $\int_a^b f(x)\,dx$ et même uniformément pour tout couple (a, b) de Δ si a et b restent bornés.*

On en déduit aisément cette conséquence, envisagée d'ordinaire comme procédé de dérivation :

Si la suite $\{f'_\nu(x)\}$ de fonctions continues dans un intervalle Δ y converge uniformément vers $g(x)$ et si la suite $\{f_\nu(x)\}$ est convergente en un point x_0 de Δ, elle est convergente pour toute valeur et la fonction limite $f(x)$ a pour dérivée $g(x)$.

C. Arzelà [1, c, p. 702] a démontré que :

Une condition nécessaire et suffisante pour que la limite d'une suite convergente (il parle de la somme d'une série) de fonctions intégrables soit intégrable est que la convergence soit quasi uniforme en général.

En général signifie que la convergence est quasi uniforme dans l'intervalle d'intégration après suppression d'un nombre fini d'intervalles partiels de longueur totale arbitrairement petite.

A la seconde question C. Arzelà [1, *c*, p. 131 et 723] a donné la réponse suivante : Oui, si les $f_n(x)$ sont bornés dans leur ensemble et si $f(x)$ est intégrable. Si les $f_n(x)$ ne sont pas bornés en certains points x (c'est-à-dire dans un intervalle $(x-h, x+h)$ suffisamment petit) et si ces points forment un ensemble dénombrable la propriété subsiste. Lorsque cet ensemble n'est pas dénombrable il peut arriver (exemple donné par W. F. Osgood) que la limite de $\int f_n(x)\,dx$ existe et soit différente de $\int f(x)\,dx$.

F. Hausdorff a donné [21] une démonstration simple du deuxième théorème d'Arzelà.

C. de la Vallée Poussin [9, *a*, t. II] montre que, si l'on a dans l'intervalle (a, b) fini ou non une suite non décroissante de fonctions $f_n(x)$, bornées, continues sauf peut-être pour des valeurs isolées et fixes de x, on a, que $f(x)$ soit fini ou non,

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

pourvu que $f(x)$ n'ait que des points isolés de discontinuité; les deux nombres de l'égalité peuvent d'ailleurs être infinis.

Osgood avait antérieurement démontré [37, *a*, p. 175] que, si les $f_n(x)$ sont continues et bornées dans leur ensemble et tendent vers $f(x)$ continue, l'égalité (1) a lieu; le théorème subsiste si $f(x)$ a un nombre limité de points de discontinuité dans (a, b). Une démonstration simple en a été fournie par F. Riesz [40, *d*, p. 274].

W. H. Young [45, *a*] a montré que si l'égalité (1) a lieu, la suite $\int_a^x f_n(x)\,dx$ converge uniformément, sauf peut-être aux points χ.

(*Voir* aussi sur ce sujet J. Haag [18, p. 131]; E. W. Hobson [22, *a*]; W. H. Young [45, *b*, *c*, *e*, *f*].)

A. Kovanko [25, *a*] distingue deux classes de points χ, ceux dont la présence rend impossible le passage à la limite et ceux où il reste possible.

10. Intégrale de Lebesgue. — L'intégrale de Lebesgue est une généralisation de celle de Riemann qu'elle comprend comme cas particulier. Pour une étude complète se reporter soit à [29, *b*], soit à [II].

Cette intégrale est d'un emploi plus commode que celle de Riemann dans bien des applications.

Voici les notions essentielles pour la suite :

On considère une fonction $f(M)$ du point M, à un nombre déterminé quelconque de coordonnées, mesurable dans un ensemble E borné et mesurable.

Cas d'une fonction bornée. — Soient A et B ses bornes ($A < B$); nous divisons l'intervalle (A, B) à l'aide de nombres croissants $l_0 = A$, $l_1, \ldots, l_i, l_{i+1} \ldots l_n = B$; e_i désignant la mesure de l'ensemble des points pour lesquels $l_{i-1} \leqq f < l_i$, nous formons les sommes

$$S' = \sum_i l_{i-1} e_i, \qquad S'' = \sum_i l_i e_i.$$

On démontre, en procédant comme pour l'intégrale de Riemann, que les ensembles des sommes S' d'une part, S'' d'autre part, déterminent une coupure I, comprise entre les S' et les S'', limite commune de ces sommes lorsque le maximum des intervalles de subdivision y relatifs tend vers zéro. Le nombre I est par définition l'intégrale $\int_E f(M)\,dM$ au sens de Lebesgue on intégrale (L).

Elle vérifie le théorème de la moyenne, elle est une fonction additive d'ensemble; l'intégrale d'une somme de fonctions bornées et mesurables, en nombre limité, et la somme des intégrales de chaque terme; un facteur constant peut sortir du signe d'intégration. On a

$$\left| \int_E f\,dM \right| \leqq \int_E |f|\,dM.$$

Deux fonctions qui sont égales presque partout sur E sont intégrables en même temps et ont dans ce cas même intégrale.

Enfin, proposition fondamentale :

XVI. *Soit* $\{f_\nu\}$ *une suite illimitée de fonctions de* M *sur* E, *mesurables et bornées dans leur ensemble. Si en tout point* M *de* E, $f_n(\mathrm{M})$ *a une limite* $f(\mathrm{M})$ *on a*

$$\lim_{n=\infty} \int_{\mathrm{E}} f_n \, d\mathrm{M} = \int_{\mathrm{E}} f \, d\mathrm{M}.$$

Il suffit de considérer le cas où $f \equiv 0$ et $f_n \geqq 0$. Si ε est un nombre positif arbitraire et si E_k désigne l'ensemble des points de E où $f_{k-1} \geqq \varepsilon \, (k > 1)$, toutes les fonctions suivantes y étant $< \varepsilon$, on a

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \ldots + \mathrm{E}_k + \ldots,$$

$$\int_{\mathrm{E}} f_n \, d\mathrm{M} = \int_{\mathrm{E}_1} f_n \, d\mathrm{M} + \ldots + \int_{\mathrm{E}_k} f_n \, d\mathrm{M} + \ldots.$$

On a

$$\left| \int_{\mathrm{E}_1} + \ldots + \int_{\mathrm{E}_k} \right| < \varepsilon (m\mathrm{E}_1 + \ldots + m\mathrm{E}_n)$$

et

$$\left| \int_{\mathrm{E}_{n+1}} + \int_{\mathrm{E}_{n+2}} + \ldots \right| < \mathrm{B}(m\mathrm{E}_{n+1} + m\mathrm{E}_{n+2} + \ldots),$$

B étant la borne supérieure du module des f.

La démonstration prouve en outre que : si une suite de fonctions f_n mesurables sur E converge vers une fonction limite finie f, étant donnés deux nombres positifs arbitraires ε et η, il existe une valeur de l'indice à partir de laquelle l'ensemble des points pour lesquels $|f_n(\mathrm{M}) - f(\mathrm{M})| > \varepsilon$ est de mesure inférieure à η. C'est la convergence en mesure (n° 13).

Dans son Ouvrage [29, *b*] H. Lebesgue, étudiant les relations entre les fonctions dérivées (ou nombres dérivés) et les fonctions primitives, a notamment établi les propriétés suivantes :

XVII. 1° *Toute fonction dérivée bornée est intégrable* (L) *et ses intégrales sont ses fonctions primitives.*

2° *Si une suite de fonctions dérivées* $\{f_\nu(x)\}$ *converge uniformément vers une fonction* $f(x)$, *celle-ci est une fonction dérivée et l'on a*

$$\lim \mathrm{C}_n + \int_a^x f_n(x) \, dx = \mathrm{C} + \int_a^x f(x) \, dx, \tag{1}$$

C_n *ayant pour limite* C.

Le cas des $f_n(x)$ continues est depuis longtemps classique.

3° *Si une suite monotone de fonctions dérivées* $\{f_\nu(x)\}$ *a pour* *limite une fonction $f(x)$ qui soit elle-même une fonction dérivée (ce qui n'a pas lieu nécessairement), on a aussi la relation* (1).

Cas d'une fonction non bornée. — Soit f une fonction mesurable non bornée, non négative; n étant un entier positif, appelons f_n une fonction égale en chaque point à la plus petite des quantités f et n; par définition

$$\int_E f\, dM = \lim_{n=\infty} \int_E f_n\, dM;$$

cette limite est finie ou infinie positive. De même si f est non positif on pose

$$\int_E f\, dM = \lim_{n=\infty} \int_E (-f)_n\, dM.$$

Enfin, dans le cas général, prenons f_1 et f_2 tels que

$$2f_1 = |f| + f, \qquad 2f_2 = |f| - f;$$

si $\int_{E_1} f_1\, dM$ et $\int_E f_2\, dM$ sont finies, Lebesgue dit que f est sommable et définit l'intégrale de f par l'égalité

$$\int_E f\, dM = \int_E f_1\, dM - \int_E f_2\, dM.$$

Les propriétés des intégrales (L) de fonctions bornées s'étendent aux fonctions sommables.

Passage à la limite pour les fonctions non bornées (*voir* [9, *b*]). Les résultats fondamentaux sont dus à G. Vitali [43, *a*]; Il dit que, $\{f_\nu\}$ étant une suite de fonctions de x sommables, l'absolue continuité de $\int f_n\, dx$ est *uniforme* sur E si à tout $\varepsilon > 0$ correspond un δ tel que, pour tout n, $\left|\int_e f_n\, dx\right| < \varepsilon$ pourvu que e soit une portion de E de mesure inférieure à δ.

Remarque. — Si cette propriété a lieu sur E supposé borné les intégrales étendues à E sont bornées dans leur ensemble. Cela posé :

XVIII. *Soient les fonctions $f_n(x)$, finies ou non, tendant vers $f(x)$, finie ou non.*

Si l'absolue continuité des $\int f_n(x)\,dx$ *est uniforme sur* E, f *est sommable sur* E *et*

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx. \tag{2}$$

Conséquences :

Si les $f_n(x)$, *sommables, sont de module inférieur à une fonction positive sommable* $\varphi(x)$ *et si elles ont une limite* $f(x)$, *celle-ci est sommable et l'on a la relation* (2).

Énoncée pour un ensemble d'un nombre quelconque de dimensions cette propriété constitue la généralisation de Lebesgue de son théorème fondamental.

XIX. *Si la suite de fonctions* $f_n(x)$ *sommables et non négatives est non décroissante, elles admettent une limite* $f(x)$ *finie ou non et l'on a la relation* (2). *Si* f *n'est pas sommable les deux membres sont infinis.*

C'est un théorème antérieur de Beppo Levi [30] valable avec un ensemble d'un nombre quelconque de dimensions.

XX. *Dans l'hypothèse où les fonctions sommables* $f_n(x)$ *ont une limite* $f(x)$ *et ne sont pas négatives, une condition nécessaire et suffisante pour que* $f(x)$ *soit sommable et que la relation* (2) *ait lieu est que la continuité absolue de* $\int f_n\,dx$ *soit uniforme dans* E.

Le théorème s'applique aux fonctions sommables $f_n(x)$ inférieures (ou supérieures) à une même fonction positive (ou négative) sommable.

G. Vitali dit qu'une suite convergente de fonctions sommables est *complètement intégrable* dans E lorsque le passage à la limite est valable pour tout sous-ensemble mesurable de E. Alors :

XXI. *Si la suite des fonctions sommables* $f_n(x)$ *converge sur* E *vers une fonction sommable* $f(x)$, *il est nécessaire pour que cette suite soit complètement intégrable sur* E *que la continuité absolue de* $\int f_n(x)\,dx$ *soit uniforme dans* E.

Les propositions XVIII et XXI réunies donnent donc une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite soit complètement intégrable.

De la Vallée Poussin s'est proposé de trouver des critériums plus pratiques pour le passage à la limite. Il obtient le théorème suivant aussi général que XX :

XXII. *Soit une suite de fonctions $f_n(x)$ sommables, non négatives, admettant une limite f. Si l'on peut définir une fonction $\varphi(x)$ non décroissante et infiniment grande avec x telle que les $\int_E f_n \varphi(f_n)\,dx$ soient bornées dans leur ensemble, f est sommable et le passage à la limite est valable.*

En spécifiant φ on obtient des critériums particuliers. Ainsi avec $\varphi(x) = x^\varepsilon$ on a ce résultat :

Si, avec la suite précédente et un ε positif fixe les $\int_E f_n^{1+\varepsilon}\,dx$ sont bornées dans leur ensemble, f est sommable et le passage à la limite a lieu.

Supposons la sommabilité de f, la suite $|f_n - f|$ est sommable et converge vers zéro presque partout. Donc :

Si les fonctions sommables $f_n(x)$ convergent vers une fonction sommable $f(x)$ et si les $\int_E |f_n - f|^{1+\varepsilon}\,dx$ (pour un $\varepsilon > 0$) sont bornées dans leur ensemble, le passage à la limite est valable.

Le cas de $\varepsilon = 1$ avait été signalé par F. Riesz [40, a, p. 615].

Une propriété, trouvée indépendamment l'un de l'autre par A. Kovanko et par G. Fichtenholz (conséquence du théorème fondamental de Vitali et d'un lemme de Lebesgue), est simplifiée comme il suit [14] par ce dernier auteur :

Soit la suite $\{f_\nu(x)\}$ convergeant presque partout dans (a, b) vers $f(x)$. Supposons que, quel que soit l'ensemble mesurable E de (a, b), $\lim \int_E f_n(x)\,dx$ existe, soit J(E), alors $f(x)$ est sommable et l'on a le passage à la limite.

Si même l'existence de J(E) n'est assurée que pour les ensembles parfaits, le passage est valable pour tous les ensembles mesurables.

R. Cacciopoli a donné [6, a] une théorie générale de l'intégration dont l'idée directrice est de procéder par définitions constructives, suivant les méthodes de E. Borel. Son exposé a trait à un espace d'un nombre fini quelconque de dimensions. Il y démontre notamment la proposition XVIII.

Ultérieurement [6, *b*], examinant le cas d'un intervalle, il a fait observer que la condition qu'elle implique n'est aussi nécessaire (XXI) que si l'on veut le passage à la limite pour tout ensemble de l'intervalle (a, b). Il établit une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de $f_n(x)$ converge uniformément vers celle de $f(x)$ dans tout sous-intervalle partiel.

Cas d'un ensemble E *non borné.* — Un tel ensemble est dit mesurable si la partie commune à E et à une hypersphère quelconque S est mesurable. Si celle-ci varie de manière que tout point de l'espace lui soit intérieur à partir d'un certain moment et si la mesure de la partie commune a une limite finie E est dit mesurable et de mesure finie.

Une fonction f définie sur E est dite mesurable dans les mêmes conditions que si E était borné, sommable si, quand S varie de la condition indiquée, $\int_e |f(M)|\,dM$ étendue à la partie commune e à S et à E reste bornée et par conséquent tend vers une limite déterminée [29, *e*, p. 361].

On a la propriété suivante [30 et 29, *e*] :

XXIII. *Soit une suite de fonctions f_n ne devenant infinies sur* E *qu'en des ensembles de mesure nulle et sommable, quand on excepte ces points. Alors la limite f ne devient infinie que sur un ensemble de mesure nulle, elle est sommable sur l'ensemble restant, son intégrale est la limite de celle des f_n si cette limite existe et, inversement, cette limite existe toutes les fois que f ne devient infinie qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle et est sommable dans l'ensemble restant.*

11. Autres types d'intégrales. — *Totalisation.* — Il est aisé de former des fonctions dérivées non intégrables (L); par exemple la dérivée de $f = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ qui est o pour $x = 0$ et $2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$. Il n'est donc pas possible de calculer par la seule intégrale (L) la variation entre a et b d'une primitive quelconque dont la dérivée existe et est connue en chaque point intérieur à (a, b). Ce problème, et même un plus étendu, a été résolu par A. Denjoy à l'aide d'une opération qu'il a appelée *totalisation*. Le lecteur désireux de l'étudier est prié de se reporter aux Mémoires de l'auteur, à ceux d'abord dans lesquels il approfondit la question des nombres dérivés [11, a] et des dérivées sommables [11, b], puis celui où il expose sa méthode même [11, c].

Signalons seulement la propriété fondamentale suivante :

XXIV. *Soit* F_n *la totale d'une fonction totalisable* f_n *qui croît relativement à l'indice et qui a* f *pour limite. La totale de* f *existe ou non en même temps que la limite de* F_n *et, dans le premier cas, elle lui est égale.*

Des compléments ont été apportés sur ce sujet par A. Kovanko [25, b et c].

Autres extensions :

Les mêmes questions relatives aux suites de fonctions se posent avec les autres extensions de la notion d'intégrale, lesquelles cadrent d'ailleurs dans le cas général avec celle de Lebesgue. Bornons-nous à une sèche énumération :

Intégrales de T. J. Stieltjès [42], de W. H. Young [45, c, f, h, i], de E. Borel [5, a].

$F(M)$ et $g(M)$ désignant deux fonctions d'un point M dans un espace à h dimensions, la seconde bornée, J. Radon [39] a donné une définition de l'intégrale $\int F(M)\, dg(M)$ qui est une sorte de fusion de l'intégrale de H. Lebesgue et de celle de T. S. Stieltjès. M. Fréchet [d, e[a remarqué qu'elle peut s'écrire $\int_E F(M)\, df(e)$ où $f(e)$ est une fonction additive du sous-ensemble variable e de E et que sous cette forme la définition et les propriétés peuvent s'étendre sans graves modifications, fait très remarquable, au vaste domaine du calcul fonctionnel.

A. Kolmogoroff [24, a et b] et S. T. Kempisty [23] reprennent la notion générale d'intégrale. (*Voir* aussi Hardy et Chapmann [20].)

12. Dérivées. — Soit une suite de fonctions $f_\nu(x)$, pourvues de dérivées $f_\nu(x)$, et qui converge vers $f(x)$, cette dernière fonction a-t-elle une dérivée qui soit limite de $f_\nu(x)$? Le théorème de H. Lebesgue donne une réponse à cette question. Mais si l'on considère des fonctions de plusieurs variables et des dérivées de divers ordres, des problèmes se posent qui n'ont guère jusqu'ici reçu de solution.

Utilisant une étude approfondie de l'interpolation L. Neder [36] établit, entre autres, les théorèmes suivants :

A. Une variable :

XXV. *Soient* $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *des fonctions définies dans l'intervalle ouvert* (a, b) *et y possédant des dérivées jusqu'à l'ordre* k *inclusivement. Si* $\sum_\nu f_\nu(x)$ *converge en* k *points* x_1, $x_2, \ldots, x_k$ *et si* $\sum f_\nu^{(k)}(x)$ *converge uniformément dans* (a, b), *alors* $\sum_\nu f_\nu^{(i)}(x)$ *converge uniformément dans* (a, b) *pour* $i = 0, 1, \ldots, k$ [$f_\nu^{(0)}(x)$ *désigne* $f_\nu(x)$]; *en outre la fonction*

$$F(x) = \sum_\nu f_\nu(x)$$

peut être différenciée au moins k *fois et l'on a*

$$F^{(i)}(x) = \sum_\nu f_\nu^{(i)}(x)$$

Il généralise aussi un théorème de Bendixon.

B. Plusieurs variables, deux par exemple :

XXVI. On suppose que dans un rectangle ouvert

$$R\,(a < x < b,\ c < y < d)$$

les fonctions $f_\nu(x, y)$ sont définies et admettent des dérivées partielles $\frac{\partial^{\lambda+\mu}}{\partial_x^\lambda \partial_y^\mu} = f_{(\nu)}^{(\lambda,\mu)}$ jusqu'à $\lambda = l$, $\mu = m$, indépendantes de l'ordre de différentiation (L. Neder donne à ce sujet une proposition beaucoup plus avantageuse que les théorèmes classiques).

Si $\Sigma f_\nu(x, y)$ *converge aux* lm *points* $x = x_i, y = y_j$

$$(i = 1, 2, \ldots, l;\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

dans R, *si* $\Sigma f_\nu^{(l,0)}(x,y)$ *converge uniformément pour* $y=y_1, \ldots, y_m$, $\Sigma f_\nu^{(0,m)}(x,y)$ *pour* $x=x_1, \ldots, x_l$ *et aussi* $\Sigma f_\nu^{(l,m)}(x,y)$ *dans* R, *alors* $\Sigma f_\nu^{(i,j)}(x,y)$ *converge uniformément pour les diverses valeurs du couple* (i, j) *dans le domaine. De plus, la fonction*

$$F(x, y) = \sum_\nu f_\nu(x, y)$$

possède dans R, *pour ces couples* (i, j), *des dérivées* $F^{(i,j)}(x,y)$ *et l'on a*

$$F^{(i,j)}(x, y) = \sum f_\nu^{(i,j)}(x, y).$$

V. — Convergence en mesure; convergence en moyenne.

13. La convergence en mesure. — F. Riesz [40, *b*] dit qu'une suite de fonctions $f_n(M)$, finies, données sur E borné, tend en mesure vers $f(M)$ si, quels que soient les nombres positifs ε et η, il existe n_0 tel que pour $n > n_0$ l'ensemble (en général variable avec n) des points de E pour lesquels $|f_n(M) - f(M)| > \varepsilon$ est de mesure inférieure à η. (*Voir* [31, p. 375]).

On sait (n° 7) qu'une suite convergente de fonctions mesurables converge en mesure, proposition due à E. Borel. Mais la réciproque n'est pas vraie. Ainsi, soit une suite l_n d'intervalles tels que: 1° la longueur de l_n tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$; 2° tout point compris entre 0 et 1 soit intérieur à une infinité d'entre eux; prenons pour $f_n(M)$ une fonction égale à 1 dans l_n, à 0 en dehors; $\{f_n(M)$ ne converge en aucun point de (0, 1) et converge en mesure vers zéro dans l'intervalle.

La notion de convergence en mesure est une extension naturelle de la notion simple de convergence. Exemple : la série de Fourier d'une fonction sommable à carré sommable sera en général divergente, mais elle converge toujours dans le sens généralisé.

Cette extension conduit (comme déjà la notion d'intégrale) à considérer comme non distinctes des fonctions égales presque partout.

Le critère de Cauchy s'applique à la convergence en mesure pour les fonctions mesurables (H. Weyl).

XXVII. *Pour qu'une suite de fonctions mesurables* $f_n(M)$ *converge en mesure, il faut et il suffit que pour tout couple de* *nombres positifs* ε, η *il existe une valeur* n_0 *de l'indice telle que si* $p > n_0$, $q > n_0$ *l'ensemble des points pour lesquels*

$$|f_p(M) - f_q(M)| > \varepsilon$$

soit de mesure inférieure à η.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante. Soient deux séries convergentes à termes positifs $\Sigma\varepsilon_i$, $\Sigma\eta_i$, n_i l'indice correspondant à ε_i et η_i de sorte que si $p > n_i$, $q > n_i$ on ait

$$m\,E[|f_p(M) - f_q(M)| > \varepsilon_i] < \eta_i.$$

Supposons les n_i croissants; prenons $p = n_{i+2}$, $q = n_{i+1}$. Définissons $f(M)$ par

$$(1) \qquad f(M) - f_{n_2}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} [f_{n_{i+2}}(M) - f_{n_{i+1}}(M)].$$

Soient E_i l'ensemble des points sous lesquels

$$|f_{n_{i+2}}(M) - f_{n_{i+1}}(M)| > \varepsilon_i$$

et $\mathcal{E}_i$ la somme

$$E_i + E_{i+1} + \ldots$$

$$m\,\mathcal{E}_i \leq \eta_i + \eta_{i+1} + \ldots.$$

Le reste de la série (1) après le $r^{\text{ième}}$ terme est inférieur à

$$\varepsilon_{r+1} + \varepsilon_{r+2} + \ldots$$

sauf dans un ensemble de points de mesure inférieure à

$$r_{r+1} + r_{r+2} + \ldots.$$

Donc :

1° sauf peut-être aux points de l'ensemble $\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \ldots \mathcal{E}_i \ldots$ de mesure nulle la série (1) est absolument convergente;

2° l'ensemble des points pour lesquels $|f_{n_{i+1}} - f|$ et aussi $|f_m - f|$ dépasse ε est, dès que l'indice est assez grand, de mesure inférieure à η, ε et η étant positifs arbitraires.

De plus, sauf dans un ensemble $\mathcal{E}_i$ de mesure arbitrairement petite, la suite $\{f_{n_i}(M)\}$ est uniformément convergente. Ainsi (D. T. Egoroff) :

XXVIII. *D'une suite* $\{f_n(M)\}$ *convergente en mesure on peut* *extraire une suite partielle qui converge uniformément vers la fonction limite $f(\mathrm{M})$ sauf peut-être sur un ensemble de mesure aussi petite que l'on veut.*

F. Riesz [40, *b*] a fait connaître que beaucoup de résultats concernant les suites convergentes subsistent avec la convergence en mesure. Ainsi le théorème de Lebesgue sur l'intégrale d'une suite convergente de fonctions sommables. En généralisant une proposition de P. Fatou on a l'énoncé que voici :

XXIX. *Étant donnée une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions positives, sommables, tendant en mesure vers $f(x)$, si $\int_{\mathrm{E}} f_n(x)\,dx$ reste, quel que soit x, inférieur à un nombre* B *constant, $f(x)$ est sommable et l'on a*

$$\int_{\mathrm{E}} f(x)\,dx \leqq \mathrm{B}.$$

M. Fréchet [16, *e*] a généralisé la notion de convergence en mesure en l'étendant à des fonctions quelconques et en utilisant la mesure extérieure des ensembles. Il établit les deux théorèmes précédents et relie ces notions à celle de la *distance* de deux fonctions f et g : il entend par cette expression la borne inférieure de

$$\omega + m_e\,\mathrm{E}[\,|f-g|>\omega\,]$$

pour $\omega > 0$.

14. **La convergence en moyenne.** — Les fonctions réelles de carré sommable (au sens de Lebesgue) jouent un rôle important dans les recherches modernes. Elles constituent un espace fonctionnel identique à l'espace Ω [M. Fréchet] à une infinité de dimensions [31, p. 346].

On dit que la suite de fonctions $f_x(\mathrm{M})$, définies dans l'intervalle (a, b) et de carrés sommables, *converge en moyenne* vers $f(\mathrm{M})$, de carré sommable, si

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b [f_n(\mathrm{M}) - f(\mathrm{M})]^2\, d\mathrm{M} = 0.$$

Cette condition est remplie si $f_x(\mathrm{M})$ tend uniformément vers $f(\mathrm{M})$, mais elle peut l'être même si $f_n(\mathrm{M})$ n'a pas de limite, au sens habituel du mot.

Deux fonctions $f(M)$, $g(M)$ égales dans (a, b) presque partout satisfont à

$$\int_a^b [f(M) - g(M)]^2 \, dM = 0$$

et réciproquement.

H. Weyl [44] a démontré que le critérium de Cauchy s'applique à ce mode de convergence :

Pour qu'une suite de fonctions $f_n(M)$, de carrés sommables, soit convergente en moyenne, il faut et il suffit que

$$\lim_{\substack{p=\infty \\ q=\infty}} \int_E [f_p(M) - f_q(M)]^2 \, dM = 0.$$

De cette proposition se déduit un théorème fondamental de Fischer-Riesz [15, *a*; 40, *a* et *c*; 27, p. 90; 38, *a*].

Étant donné un système orthogonal et normal de fonctions $\varphi_i(x)$, à chacune desquelles on fait correspondre un nombre a_i, pour que la série $\Sigma a_i \varphi_i(x)$ converge en moyenne vers une fonction $f(x)$ de carré sommable, il faut et il suffit que la série Σa_i^2 soit convergente.

F. Riesz a observé que le critérium de Cauchy est valable si l'on remplace l'exposant 2 par un exposant positif α quelconque. On dit alors que la suite $\{f_\nu(M)\}$ de fonctions mesurables converge en moyenne d'ordre α vers $f(M)$ mesurable si

$$\lim_{n=\infty} \int_E |f_n(M) - f(M)|^\alpha \, dM = 0.$$

M. Plancherel [38, *b*] a donné, avec cette généralisation, une démonstration simple du théorème de H. Weyl; il ne suppose pas E borné.

Fait important : si $f_n(M)$ converge en moyenne d'ordre α vers $f(M)$ et aussi vers $g(M)$, $f(M)$ et $g(M)$ sont égales presque partout, car $\int_E |f - q|^\alpha \, dM$ est nulle (extension du cas $\alpha = 1$).

Ses démonstrations faites avec une variable et un intervalle s'appliquent, si l'on considère une suite de fonctions de plusieurs variables et si l'on remplace l'intervalle (a, b) par un ensemble mesurable quelconque.

La démonstration de H. Weyl a été l'occasion d'une discussion, au séminaire de J. Hadamard, qui a abouti à des exposés plus simples dont le principe est dû a Noaillon [31, p. 344 et 374]. Étendant encore la notion on introduit une fonction paire quelconque $\omega(r)$ de la variable r, continue, croissante avec $|r|$ st s'annulant pour $r = 0$. On appelle *moyenne généralisée* [dans l'intervalle (0, 1)] de $f(x) - g(x)$ ou distance de $f(x)$ et de $g(x)$, liée à $\omega(r)$, le nombre positif r défini par

$$\omega(r) = \int_0^1 \omega[f(x) - g(x)]\,dx.$$

Le critérium de Cauchy est alors suffisant pour une suite de fonctions sommables $f_n(x)$. En effet si

$$\lim_{\substack{p=\infty \\ q=\infty}} \int_0^1 \omega[f_p(x) - f_q(x)]\,dx = 0;$$

pour p et q supérieurs à un certain indice n_0

$$m\,\mathcal{E}[f_p(x) - f_q(x) > \varepsilon] < \eta,$$

ε et η étant deux nombres positifs arbitraires; $f_n(x)$ converge donc en mesure vers une fonction $f(x)$; $\omega[f_p(x) - f_q(x)]$ converge en mesure pour $q = \infty$ vers $\omega[f_p(x) - f(x)]$ et si les $f_p(x)$ sont bornés dans l'ensemble

$$\lim_{q=\infty} \int_0^1 \omega[f_p(x) - f_q(x)]\,dx = \int_0^1 \omega[f_p(x) - f(x)]\,dx.$$

On passe de là aux fonctions sommables.

Le critérium est nécessaire si ω *est tel que* $\omega(2r) \leqq k\omega(r)$, k étant une constante. On s'appuie sur ce que

$$\omega[u + v] \leqq k\{\omega(u) + \omega(v)\}.$$

On a vu en passant que *la convergence en moyenne généralisée entraîne la convergence en mesure.*

VI. — Fonctions d'une infinité de variables réelles.

15. Recherches de J. Le Roux, M. Fréchet, R. Gâteaux. — A. Les intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles dépendent, en général, d'une infinité dénombrable de constantes arbitraires, le groupement des constantes sous forme de fonctions initiales étant souvent artificiel. Ce fait a conduit J. Le Roux à considérer les fonctions d'une infinité de variables indépendantes [**28**, a et b] appartenant à un type simple qui possède des propriétés remarquables.

Soit la suite illimitée de variables indépendantes x_n ($a_n < x_n < b_n$), évoluant dans des champs que l'on peut, par un changement linéaire préalable, supposer non évanouissants, c'est-à-dire tels que la borne inférieure de leurs longueurs soit positive. Désignons par x l'ensemble des x_n, par $f(x)$ une fonction de ces variables. Si, à tout $\varepsilon > 0$ correspond $\eta > 0$, en sorte que pour $|h_i| < \eta$, h désignant l'ensemble des h_i, on ait $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, $f(x)$ est continue en x. Soit $f_m(x^0 + h, x^0)$ ce que devient $f(x^0 + h)$ lorsqu'on néglige $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots$ on dit que $f(x)$ est convergente pour x^0 si à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un indice m' tel que pour $m > m'$

$$|f_m(x^0 + h, x^0) - f(x^0 + h)| < \varepsilon.$$

Si, en outre, m' peut être fixe indépendamment des h_i, $x^0 + h$ devant rester à l'intérieur des intervalles.

Une fonction peut être convergente et même uniformément sans être continue et elle peut être continue sans être convergente.

D désignant le système d'intervalles ouverts constituant le champ de la variable x. J. Le Roux démontre ces deux propositions :

XXX. 1° *Une série dont les termes sont des fonctions uniformément convergentes dans* D *et qui est elle-même uniformément convergente dans* D *y représente une fonction uniformément convergente.*

2° *Une série uniformément convergente dans* D *et dont les termes sont des fonctions continues dans* D *y représente une fonction continue.*

B. M. Fréchet part de la notion abstraite de distance [**16**, f, p. 61) (à laquelle il a d'abord donné le nom d'écart) et qui est caractérisée par les conditions suivantes :

1° A tout couple a, b d'éléments de l'ensemble envisagé est attaché un nombre $(a, b) = (b, a) \geqq 0$ qui est appelé la distance des deux éléments;

2° Deux éléments sont considérés comme identiques si $(a, b) = 0$;

3° Si a, b, c sont trois éléments quelconques, $(a, b) \leq (a, c) + (c, b)$;

4° La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite d'éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ converge vers a est que (a_n, a) converge vers zéro.

Espace E_ω — [16, *a* et *f*, p. 51]. — Un point x est constitué par une suite $\{x_n\}$ de variables réelles; x' tend vers x si x_n tend vers x_n. On peut définir la distance (x, x') par

$$(x, x') = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n!} \frac{|x_n - x'_n|}{1 + |x_n - x'_n|}.$$

Un ensemble de points est limite s'il existe une suite A_n de nombres positifs tels que $|x_n| \leq A_n$.

XXXI. *Si une suite de fonctions* continues *dans un domaine* D *converge uniformément dans tout ensemble limité extrait de* D, *sa somme est une fonction continue dans* D.

A la suite de D. Hilbert et de F. Riesz, M. Fréchet etudie [16, *b* et *c*] *l'espace* Ω dont chaque point x a une infinité de coordonnées x_n telles que la série Σx_n^2 converge. Cet espace est lié d'une façon simple à l'espace des fonctions sommables et de carrés sommables dans un intervalle déterminé [31, p. 346]. D'autre part [16, *b*] l'espace Ω correspond à l'espace euclidien ordinaire. A. Padoa a montré au Congrès international de Mathématiques, en 1900, qu'on pourrait definir tous les symboles de la géométrie à l'aide de deux d'entre eux : 1° le symbole point; 2° le symbole $(a, b) = (c, d)$, où a, b, c, d sont des points, que l'on peut lire : le couple de points (a, b) est superposable au couple de points (c, d). M. Fréchet donne au point la signification indiquée et à (x, y) celui de la distance définie par

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 \qquad + (x_n - y_n)^2}$$

XXXII. *Pour qu'un ensemble* E *de points de* Ω *soit compact, il faut et il suffit qu'il existe une série convergente* Σa_n^2 *telle que pour tout point* (x) *de* E

$$\sum_p^\infty x_n^2 < \sum_p^\infty a_n^2$$

quel que soit p.

La proposition sur la suite des fonctions continues dans E_ω s'applique à l'espace Ω.

C. R. Gâteaux (tué au début de la grande guerre) avait entrepris [17] l'étude des fonctions dans ces espaces E_ω, Ω. On donnera, à propos des variables complexes, dans un second fascicule, quelques indications sur les premiers résultats qu'il avait obtenus et qui ont été publiés par les soins de P. Lévy.

Ouvrages à consulter.

I. HAHN (H.). — *Theorie der reellen Funktionen* (J. Springer, Berlin, 1921).

II. DE LA VALLÉE POUSSIN (C.). — *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire* (Collection Borel, Gauthier-Villars, 1916).

III. VALIRON (G). — *Familles normales et quasi normales de fonctions méromorphes* (*Mémorial des Sciences Mathématiques*, fasc. XXXVIII, Gauthier-Villars, 1929.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. ARZELÀ (C.). — *a.* Funzioni di linee (*Rendic. d. R. Acc. dei. Lincei*, vol. 5, 1889).
   b. Sulle funzioni di linee (*Mém. d. R. Acc. di. Bologna*, t. 5, 1895).
   c. Sulle serie di funzioni (*Ibid.*, t. 8, 1899-1900).
   d. Sulle serie di funzioni di variabli reali (*Ibid.*, nuava serie, t. 7, 1902-1903).

2. ASCOLI (G.). — Le curve limite di una varietà data di curve (*Mém. d. R. Acc. dei Lincei*, t. 18, 1833).

3. BAIRE (R.). — *a.* Thèse (1899) : Sur les fonctions de variables réelles (*Annali di Matematica*, 1900).
   b. Leçons sur les fonctions discontinues (Collection Borel, 1905).

4. BIRKHOFF (G. D.). — A theorem concerning uniform convergence (*Ann. of Math.*, t. 6, 1905).

5. Borel (E.). — *a.* Sur la définition de l'intégrale définie (*C. R. Ac. Sc.*, t. 150, 1910).

b. Leçons sur la théorie des fonctions (Gauthier-Villars, 3e édition).

c. Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par séries de polygones (Gauthier-Villars, 3e édition).

6. Cacciopoli (R.). — *a.* Sull' integrazione delle funzioni discontinue (*Rendic. d. Circ. mat. Palermo*, t. 52, 1928).

b. Un théorème général pour le passage à la limite sous le signe d'intégrale indéfinie (*C. R. Ac. Sc.*, 1er semestre 1928).

7. Cantor (G.). — Ueber ein neuer und allgemeiner Condensationsprincip der Singularitäten von Functionen (*Math. Ann.*, t. 19, 1882).

8. Carathéodory (C.). — *Vorlesungen über reelle Funktionen* (Teubner, 1927).

9. de la Vallée Poussin (C.). — *a. Cours d'Analyse infinitésimale.*

b. Sur l'intégrale de Lebesgue (*Trans. of the amer. Soc.*, t. 16, 1915).

10. Dell' Agnola (C. A.). — *a.* Sopra alcuna proporisioni fondamentali del l'analisi (*R. Ist. Lomb.*, 1907).

b. Le successioni di funzioni continue e il teorema di Arzelà (*Ibid.*, 1908).

c. Sulla funzione limite di una successione di funzioni continue (*Ibid.*, 1908).

d. Sulla convergenza uniforma di una successione di funzioni continue. (*Atti R. Ist. Ven.*, t. 69, 1909).

e. Delle varie speine di convergenza uniforma (*Ibid.*, t. 69, 1909).

f. Sulle funzioni egualmonte continue (*Ibid.*, t. 69, 1909).

g. Del massimo e del minimo di una successione di funzioni continue (*Ibid.*, t. 76, 1916-1917).

11. Denjoy (A.). — *a.* Les nombres dérivés (*Journal de Math.*, 1915).

b. Les dérivées sommables (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1916).

c. La totalisation des nombres dérivés non sommables (*Ann. Éc. Norm.*, 1916-1917).

12. Dini (U.). — *Fundamenti per la teoria delle Funzioni di variabili reali* (Pise, 1878).

13. Égoroff (D. T.). — Sur les suites de fonctions sommables (*C. R. Ac. Sc.*, t. 152, 1911).

14. Fichtenholtz (Fr.). — Sur l'intégration des suites de fonctions sommables (*C. R. Ac. Sc.*, 1er semestre 1927).

15. Fischer (E.). — *a.* Sur la convergence en moyenne (*C. R. Ac. Sc.*, t. 144, 1907).

b. Application d'un théorème sur la convergence en moyenne (*Ibid.*).

16. Fréchet (M.). — *a.* Sur quelques points du calcul fonctionnel (*Rendic. d. Circ. mat. Palermo*, t. 22, 1906).

b. Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées (*N. Ann. Math.*, 4e série, t. 8, 1908).

c. Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel (*Rendic. d. Circ. mat. Palermo*, t. 30, 1910).

d. Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait (*Bull. Sc. math.*, t. **43**, 1915).

e. Sur les divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable (*The Bull. Calc. Math. Soc.*, t. **11**, 1921).

f. *Les espaces abstraits* (Gauthier-Villars, 1928).

17. GATEAUX (R.). — Fonctions d'une infinité de variables indépendantes (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1919).

18. HAAG (J.). — Sur l'intégration des séries (*Bull. Sc. math.*, t. **59**, 1924).

19. HANKEL (H.). — Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen (*Math. Ann.*, t. **20**, 1882).

20. HARDY et CHAPMANN. — Vue générale de la théorie des séries sommables (*The quarterly Journal*, t. **42**, 1911).

21. HAUSDORFF (F.). — Beweis eine Satges von Arzelà (*Math. Zeitsch.*, 1927).

22. HOBSON (E. W.). — *a.* On the integration of series (*Acta math.*, 1903).

b. *Theory of functions of a real variable* (1907).

23. KEMPISTY (St.). — Un nouveau procédé d'intégration de fonctions mesurables non sommables (*C. R. Ac. Sc.*, 1^er^ semestre 1925).

24. KOLMOGOROFF (A.). — La définition axiomatique de l'intégrale (*C. R. Ac. Sc.*, 1925).

b. Sur la possibilité de la définition générale de la dérivée, de l'intégrale et de la sommation des séries divergentes (*Ibid.*, 1925).

25. KOVANKO (A.). — *a.* Sur une classe de points de convergence non uniforme de suites de fonctions (*Ibid.*, 2^e^ semestre 1925).

b. Sur les suites de fonctions absolument continues (*Ibid.*).

c. Sur l'intégration des suites de fonctions totalisables (*Ibid.*, 2^e^ semestre 1926 et 1^er^ semestre 1927).

d. Sur les suites de fonctions de classe I (*Ibid.*, 1^er^ semestre 1927).

26. KURATOWSKI (C.). — Sur l'existence effective des fonctions représentables analytiquement de toute classe de Baire (*Ibid.*, 1^er^ semestre 1923).

27. LALESKO (T.). — *Introduction à la théorie des équations intégrales* (Paris, 1912).

28. LE ROUX (J.). — *a.* Recherches sur les équations aux dérivées partielles (*Journ. Math. pures et appl.*, 5^e^ série, t. **9**, 1903).

b. Les fonctions d'une infinité de variables indépendantes (*Nouv. Ann. Math.*, 4^e^ série, t. **4**, 1904).

29. LEBESGUE (H.). — *a.* *Thèse* (Paris, 1902).

b. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Collection Borel, 1904).

c. Sur les fonctions représentables analytiquement (*Journ. Math. pures et appl.*, 6^e^ série, t. **1**, 1905).

d. Sur une propriété caractéristique des fonctions de classe I (*Bull. Sc. math.*, t. **40**, 1905).

e. Sur l'intégration des fonctions discontinues (*Ann. Éc. Norm.*, 1910).

30. LEVI (B.). — Sopra l'integrazione delle serie (*R. Ist. Lomb.*, 1906).

31. LÉVY (P.). — Sur le théorème de M. Fischer et Fr. Riesz sur la convergence en moyenne (*Bull. Sc. math.*, t. **60**, 1925).

32. Lusin (N.). — Sur un exemple arithmétique d'une fonction ne faisant pas partie de la classification de Baire (*C. R. Ac. Sc.*, 1er semestre 1926).

33. Martinotti (P.). — Su i limiti continuità e derivate delle funzioni di due variabili. Successioni e serie di funzioni di una variabile (*R. Ist. Lomb.*, 1914).

34. Montel (P.). — *a.* Sur les suites infinies de fonctions (*Ann. Éc. Norm.*, 1907).

b. *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe* (Collection Borel, 1910)

c. Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle (*Bull. Sc. math.*, t. 61, 1926).

d. *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Collection Borel, 1927).

35. Moore (E. H.) et Smith (H. L.). — A general theory of limites (*Amer. Journ. of Math.*, t. 49, 1922).

36. Neder (L.). — Ueber Funktionen reeller Argumente (*Jahr. b. d. deutsch Math. V.*, t. 35, 1926).

37. Osgood (W. F.). — *a.* Non uniform Convergence and' the integration of series term by term (*Amer. Journ. of Math.*, t. 19, 1897).

b. Note on the funktions defined by infinite serie whose terms are analytic functions of a complex variable (*Annals of Math.*, 2e série, t. 3, 1901-1902).

38. Plancherel (M.). — *a.* Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies (*Rendic. d. Circ. mat. Palermo*, t. 30, 1910).

b. Démonstration du théorème de Riesz Fischer et du théorème de Weyl sur les suites convergentes en moyenne (*Bull. Sc. Math.*, t. 58, 1923).

39. Radon (J.). — Ueber die absoluten additiven Mengenfunktionen (*Ber. Ak. Wissens. Wien*, 1913).

40. Riesz (F.). — *a.* Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm (*C. R. Ac. Sc.*, t. 144, 1907)

b. Sur les suites de fonctions mesurables (*Ibid.*, t. 148, 1909).

c. Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fonctions continues (*Ibid.*, t. 150, 1910).

d. Ueber Integration unendlichen Folgen (*Jahr. b. d. deutsch. Math. V.*, t. 26, 1918).

41. Roussel (A.). — Recherches sur le calcul des variations (*Thèse*, Paris, 1926).

42. Stieltjès (T. S.). — Recherches sur les fonctions continues (*Ann. Fac. Sc Toulouse*, 1894).

43 Vitali (G.). — *a.* Sull' integrazione per serie (*Rendic. d. Circ. mat. Palermo*, t. 23, 1907).

b. Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali (*Rendic. d. R. Acc. Torino*, 1908).

44. Weyl (H.). — Konvergenz von Reihen die nachorthogonal Funktionen fortschreiben (*Math. Ann.*, t. 67, 1909).

45. Young (W. H.). — *a.* Sur l'intégration des séries (*C. R. Ac. Sc.*, t. 136, 1903).

b. On non uniform convergence and term by-term integration of series (*Proc. Lond. Math. Soc.*, t. 1, 1904).

c. On the distribution of the points of uniform convergence of a series of functions (*Ibid.*, t. 1, 1904).

d. Oscillating successions of continuous functions (*Ibid.*, t. 6, 1908).

e. On the discontinuities of a function of one or more reel variables (*Ibid.*, t. 8, 1910).

f. On term-by term integration of oscillating series (*Ibid.*, t. 8, 1910).

g. On homogeneus oscillation of successions of functions (*Ibid.*, t. 8, 1910).

h. On a new method in the theorie of integration (*Ibid.*, t. 9, 1911).

i. On semi integrals and oscillating of expansions to definite integrals (*Ibid.*, t. 9, 1911).

j. On uniform oscillation of the first and second (*Ibid.*, t. 12, 1913).

TABLE DES MATIÈRES.

I. — Introduction.

		Pages.
1.	Problèmes et méthode	1
2.	Quelques notions préliminaires	2

II. — Convergence des suites.

3.	Transformation stéréographique	4
4.	Premières fonctions associées à une suite	4
5.	Suites convergentes	6
6.	Fonctions également continues	12

III. — Fonctions mesurables. Classes de Baire.

7.	Fonctions mesurables	17
8.	Limites de fonctions. Classes de Baire	19

IV. — Intégrales et dérivées.

9.	Intégrale de Riemann	24
10.	Intégrale de Lebesgue	26
11.	Autres types d'intégrales	31
12.	Dérivées	32

V. — Convergence en mesure; convergence en moyenne.

13.	La convergence en mesure	34
14.	La convergence en moyenne	36

VI. — Fonctions d'une infinité de variables réelles.

15.	Recherches de J. Le Roux, M. Fréchet, R. Gâteaux	38
	Ouvrages a consulter	41
	Index bibliographique	41