TH. DE DONDER

Applications de la gravifique einsteinienne

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 43 (1930)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1930__43__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XLIII

Applications de la gravifique einsteinienne

PAR M. TH. DE DONDER

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1930

APPLICATIONS

DE LA

GRAVIFIQUE EINSTEINIENNE

Par Th. DE DONDER.

CHAPITRE I.

APPLICATIONS AUX CHAMPS GRAVIFIQUES MASSIQUES AYANT LA SYMÉTRIE SPHÉRIQUE.

1. Première méthode. Déterminant constant [1]. — *Définition des champs gravifiques à symétrie sphérique.*

Un champ à symétrie *sphérique* est un champ défini par un δs^2 de la forme

$$(\delta s)^2 \equiv A(\delta r)^2 + B[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta(\delta\varphi)^2] + C(\delta t)^2, \tag{1}$$

où r, θ, φ étant les variables polaires, les coefficients A, B, C sont des fonctions de r seulement.

Passons, avec Schwarzschild, des variables r, θ, φ, t aux variables x_1, x_2, x_3, x_4 par les relations

$$x_1 = \frac{r^3}{3}, \qquad x_2 = -\cos\theta, \qquad x_3 = \varphi, \qquad x_4 = t \tag{2}$$

et posons

$$f_1 \equiv -\frac{A}{r^4}, \qquad f_2 \equiv -B, \qquad f_4 \equiv C. \tag{3}$$

---

(1) K. Schwarzschild, *Sitzungsberichte der Pr. Ak. Berlin*, 1916, p. 189 et p. 424. — Th. De Donder, *La gravifique einsteinienne* (*Annales de l'Observatoire Royal de Belgique*, et Gauthier-Villars, 1921). *Voir* spécialement Chapitre VIII.

Le δs^2 donné en (1) peut alors s'écrire

$$(4) \qquad \boxed{\delta s^2 = -f_1(\delta x_1)^2 - f_2\frac{(\delta x_2)^2}{1-x_2^2} - f_2(1-x_2^2)(\delta x_3)^2 + f_4(\delta x_4)^2,}$$

où f_1, f_2, f_4 sont des fonctions de x_1 seulement.

Calculons le déterminant g relatif au $(\delta s)^2$ donné en (4). Nous trouvons

$$(5) \qquad g = -f_1 f_2^2 f_4.$$

On voit que ce déterminant n'est fonction que de x_1.

La méthode de Schwarzschild consiste à ajouter la *condition complémentaire*

$$(6) \qquad f_1 f_2^2 f_4 = c^2,$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Cette condition revient à dire que *le déterminant* g dans les variables de Schwarzschild se réduit à une *constante* $(-c^2)$.

Les composantes $G_{\alpha\beta}$ du tenseur de Riemann peuvent être mises sous la forme [1]

$$(7) \qquad G_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial^2 \log\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} - \sum_\tau \frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_\tau}\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta\\ & \tau & \end{matrix}\right\} + \sum_\sigma\left[\sum_\tau \left\{\begin{matrix}\beta & \tau\\ & \sigma & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\alpha & \sigma\\ & \tau & \end{matrix}\right\} - \frac{\partial\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta\\ & \sigma & \end{matrix}\right\}}{\partial x_\sigma}\right].$$

Nous aurons donc, grâce à (5) et (6),

$$(8) \qquad G_{\alpha\beta} = \sum_\sigma\left[\sum_\tau \left\{\begin{matrix}\beta & \tau\\ & \sigma & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\alpha & \sigma\\ & \tau & \end{matrix}\right\} - \frac{\partial\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta\\ & \sigma & \end{matrix}\right\}}{\partial x_\sigma}\right].$$

Proposons-nous d'expliciter ces $G_{\alpha\beta}$. En utilisant les variables de Schwarzschild, nous aurons, pour valeurs des $g_{\alpha\beta}$ qui figurent dans les accolades de (8),

$$(9) \qquad g_{11} = -f_1, \qquad g_{22} \equiv -\frac{1}{1-x_2^2}f_2, \qquad g_{33} \equiv -(1-x_2^2)f_2, \qquad g_{44} \equiv f_4$$

---

[1] *Voir*, par exemple, Note 2 de notre *Gravifique einsteinienne* (Paris, 1921).

et

$$g_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta). \tag{10}$$

Nous aurons ainsi, en faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\left\{\begin{aligned} G_{11} &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{df_1}{dx_1}\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{f_1^2}\left(\frac{df_1}{dx_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{f_2^2}\left(\frac{df_2}{dx_1}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{f_4^2}\left(\frac{df_4}{dx_1}\right)^2, \\ G_{22} = G_{33} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{df_2}{dx_1}\right) - 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{f_1 f_2}\left(\frac{df_2}{dx_1}\right)^2, \\ G_{44} &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{df_4}{dx_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{f_1 f_4}\left(\frac{df_4}{dx_1}\right)^2, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

avec la condition

$$\frac{1}{f_1}\frac{df_1}{dx_1} + 2\frac{1}{f_2}\frac{df_2}{dx_1} + \frac{1}{f_4}\frac{df_4}{dx_1} = 0, \tag{12}$$

que l'on déduit de (6) par dérivation logarithmique.

Fluide massique parfait immobile. — Le tenseur phénoménal s'écrit, dans le cas du champ gravifique massique, (II, 38),

$$T_{\alpha\beta} = N\, u_\alpha u_\beta + P_{\alpha\beta}. \tag{13}$$

Nous aurons, en outre, (II, 66), dans le cas du fluide *parfait*,

$$P_\alpha^\beta = -\varepsilon_\alpha^\beta p. \tag{14}$$

Nous avons démontré (II, p. 15) que p est invariant pour un changement quelconque de variables.

Introduisons *la densité massique ordinaire* D, en posant (II, 126)

$$N = D c^2 + p. \tag{15}$$

Le fluide massique étant au repos par rapport au système de référence, nous pouvons écrire

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0. \tag{16}$$

Il résulte alors de la relation $\Sigma_\alpha \Sigma_\beta g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1$, que

$$(u^4)^2 = \frac{1}{g_{44}}. \tag{17}$$

On trouvera, en outre, que

$$(18) \qquad u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

et que

$$(19) \qquad (u_4)^2 = g_{44}.$$

Si nous introduisons les valeurs de ces vitesses dans (13) et si nous tenons compte de la définition du fluide massique parfait, nous obtenons, grâce à (14),

$$(20) \qquad T_{11} = f_1 p, \qquad T_{22} = f_2 p, \qquad T_{33} = f_3 p, \qquad T_{44} = D f_4 c^2$$

et

$$(21) \qquad T = D c^2 - 3p.$$

Les équations (11) s'écriront finalement

$$(22) \left\{ \begin{array}{ll} (a) & -\dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{1}{f_1}\dfrac{df_1}{dx_1}\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_1^2}\left(\dfrac{df_1}{dx_1}\right)^2 + \dfrac{1}{f_2^2}\left(\dfrac{df_2}{dx_1}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_4^2}\left(\dfrac{df_4}{dx_1}\right)^2 = -\varkappa c f_1 (D c^2 - p + a), \\ (b) & \dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{1}{f_2}\dfrac{df_2}{dx_1}\right) - 2\dfrac{f_1}{f_2} - \dfrac{1}{f_1 f_2}\dfrac{df_1}{dx_1}\dfrac{df_2}{dx_1} = -\varkappa c f_1 (D c^2 - p + a), \\ (c) & -\dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{1}{f_4}\dfrac{df_4}{dx_1}\right) + \dfrac{1}{f_1 f_4}\dfrac{df_1}{dx_1}\dfrac{df_4}{dx_1} = -\varkappa c f_1 (D c^2 + 3p - a), \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$(23) \qquad \varkappa = -\frac{1}{bc}.$$

Les équations (II, 79) se réduiront, d'autre part, à l'unique équation :

$$(24) \qquad \boxed{-\frac{D c^2 + p}{2}\,\frac{g_{44,1}}{g_{44}} = \frac{\partial p}{\partial x_1}.}$$

Il résulte immédiatement de (24) que, lorsque D est constant, on peut écrire

$$(25) \qquad (D c^2 + p)\sqrt{g_{44}} = \text{const.}$$

Enfin, si l'on suppose $p = 0$ et $D \neq 0$, on trouve, en vertu de (25), que

$$(26) \qquad g_{44} = \text{const.}$$

Ces corollaires nous seront utiles dans la suite.

THÉORÈME. — *L'introduction* (¹) *de la constante cosmique* a *dans les équations générales* (II, 73), *écrites d'abord dans le cas où* $a = 0$, *revient à diminuer la pression* p *de* $\frac{a}{2}$ *et à augmenter la densité* D *de* $\frac{a}{2c^2}$.

Démonstration. — Partons de l'équation (II, 73) et de la relation (24), en supposant d'abord $a = 0$; dans ce cas nous désignerons la pression par p et la densité ordinaire par D.

Posons

$$p \equiv p' - \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad D \equiv D' + \frac{a}{2c^2}. \tag{27}$$

On a donc

$$Dc^2 + p = D'c^2 + p'. \tag{28}$$

En remplaçant D et p par leurs valeurs dans (II, 73) où a est nul, on trouve l'équation

$$bG_{\alpha\beta} = (D'c^2 + p')\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) + \left(p' - \frac{a}{2}\right) g_{\alpha\beta}, \tag{29}$$

qui a la même forme que l'équation (II, 73) dans laquelle a serait différent de zéro.

Remarquons que l'équation (II, 79) n'est pas altérée par les transformations (27).

2. Problème de Brillouin. — Ce problème consiste à trouver le champ gravifique tant intérieur qu'extérieur, d'un système massique ayant la forme d'une sphère, dans laquelle la densité D est une fonction *donnée* de la distance au centre. Nous supposerons a quelconque.

Extérieur. — Nous prendrons, à l'extérieur du corps massique, $D = p = 0$. En additionnant les équations (22 a) et (22 b), et en tenant compte de la condition (12), on trouve

$$f_{1e} = (3x_1 + \beta)^{\frac{2}{3}} \quad (\beta \text{ constante d'intégration}). \tag{30}$$

Posons

$$f_{2e} = R_e^2 \quad \text{et} \quad f_{4e} = \frac{c^2\psi_e}{R_e}, \tag{31}$$

(¹) J. HAAG, *C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris*, t. 176, 1923.

où ψ_e est une fonction de x_1 à déterminer. L'indice e sert à rappeler qu'il s'agit du problème extérieur. Il résulte alors de (31) et de (6) que

$$f_{1e} = \frac{1}{\psi R^3}. \tag{32}$$

Retranchons du double de (22 b) la somme des équations (22 a) et (22 c); en faisant dans l'équation obtenue la substitution (31), on obtient une équation différentielle en ψ, dont l'intégrale générale est

$$\psi = R_e\left(1 - \frac{\alpha}{R_e} + \frac{a}{6b}R_e^2\right) \tag{33}$$

où α est une constante d'intégration.

Le δs^2 définissant le champ *à l'extérieur* peut donc s'écrire :

$$(\delta s)^2 \equiv -\frac{(\delta R_e)^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{R_e} + \frac{a}{6b}R_e^2\right)} - R_e^2[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta(\delta\varphi)^2] + c^2\left(1 - \frac{\alpha}{R_e} + \frac{a}{6b}R_e^2\right)(\delta t)^2. \tag{34}$$

Intérieur. — Supposons, avec M. Brillouin, que la densité D en un point intérieure soit fonction de x_1 seulement. Posons

$$\gamma = (Dc^3 + pc)\sqrt{f_4}. \tag{35}$$

Dérivons (35) par rapport à x_1 et remplaçons $\frac{dp}{dx_1}$ par sa valeur tirée de (24), on obtient ainsi la relation

$$f_4 = \frac{1}{c^6}\left(\frac{\gamma'}{D'}\right)^2, \tag{36}$$

où *les accents* désignent des dérivées par rapport à x_1.

Introduisons la variable (intérieure) R_i, en posant, comme au (31) [1],

$$f_2 = R_i^2, \qquad f_4 = \frac{c^2\psi_i}{R_i}, \tag{27}$$

où ψ_i est une fonction encore inconnue de x_1.

Il résulte alors de (6) que

$$f_1 = \frac{1}{\psi_i R_i^3}. \tag{38}$$

---

[1] M. Nuyens, *Sur un changement de variables de M. De Donder* (*Bull. Ac. Roy. Belg.* t. 7, juin 1922).

Multiplions les équations (22) respectivement par -1, 2, -1 et effectuons les combinaisons $a+b+c$ et $a+c$. Nous obtenons ainsi, après avoir introduit (37) et (38), le système d'équations

$$(39) \qquad 3R_i^2 \frac{dR_i}{dx_1}\frac{d\psi_i}{dx_1} = 3R_i^{-2} + \varkappa\gamma c^{-1}\psi_i^{-\frac{1}{2}}R_i^{\frac{1}{2}} - 3\varkappa\left(Dc^3 + \frac{ac}{2}\right)$$

$$(40) \qquad 2\psi_i \frac{d}{dx_1}\left(3R_i^2\frac{dR_i}{dx_1}\right) = -3\varkappa\gamma c^{-1}\psi_i^{-\frac{1}{2}}R_i^{\frac{1}{2}}.$$

Additionnons membre à membre; multiplions par $3R_i^2 \dfrac{dR_i}{dx_1}$ et intégrons; d'ou

$$(41) \qquad \psi_i\left(3R_i^2\frac{dR_i}{dx_1}\right)^2 = 9\left[R_i - \varkappa\int_0^{R_i}\left(Dc^3+\frac{ac}{2}\right)R_i^2\,dR_i + \lambda\right]$$

où λ est une constante d'intégration.

Divisons (40) par (41) élevé à la puissance $\frac{3}{2}$, puis multiplions les deux membres par $3R_i^2\dfrac{dR_i}{dx_1}$; en intégrant, de R_i à A_i (à la surface s),

$$(42) \qquad \frac{2}{\left(R_i^2\dfrac{dR_i}{dx_1}\right)} - \frac{2}{\left(R_i^2\dfrac{dR_i}{dx_1}\right)_s} = -\varkappa c^{-1}\int_{R_i}^{A_i}\frac{\gamma R_i^{\frac{5}{2}}\,dR_i}{\left[R_i - \varkappa\displaystyle\int_0^{R_i}\left(Dc^3+\frac{ac}{2}\right)R_i^2\,dR_i+\lambda\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Conditions de continuité à la surface et à l'origine. — Nous allons calculer maintenant les constantes d'intégration par les conditions de continuité à la surface et la condition à l'origine.

Dans le problème extérieur, on a posé, (30 et 31),

$$(43) \qquad 3x_1 + \beta = R_e^3$$

ou, en vertu de (2),

$$(44) \qquad R_e^3 - r^3 = \beta.$$

Exprimons que les *potentiels* $f_1 f_2 f_4$ et leurs dérivées *premières* doivent varier d'une manière *continue* de l'intérieur à l'extérieur de la sphère massique. On obtient alors les conditions

$$(45) \qquad A_e = A_i, \qquad \alpha = A_i - \psi_s, \qquad \left(\frac{dR_i}{dx_1}\right)_s = \frac{1}{A_i^2}, \qquad \left(\frac{d\psi_i}{dR_i}\right)_s = 1,$$

en posant à la surface $R_e \equiv A_e$, $R_i \equiv A_i$, $\psi \equiv \psi_s$. En vertu de (45), nous appellerons A la valeur commune de A_e et A_i; on aura donc

$$(46) \qquad A_e = A_i = A.$$

Introduisons (45) dans (41); d'où

$$(47)\qquad \psi_s = A - \varkappa\int_0^A \left(D c^3 + \frac{ac}{2}\right) R_i^2\, dR_i + \lambda.$$

En vertu de (35) et de (37), on pourra écrire

$$(48)\qquad \gamma_s = D_s c^4 \sqrt{\frac{\psi_s}{A}},$$

puisque $p = 0$ à la surface de la sphère.

Grâce à (45), la relation (42) peut s'écrire

$$(49)\qquad \frac{R_e^2\, dR_e}{R_i^2\, dR_i} = 1 - \frac{\varkappa c^{-1}}{2}\int_{R_i}^{A} \frac{\gamma R_i^{\frac{5}{2}}\, dR_i}{\left[R_i - \varkappa\int_0^{R_i}\left(D c^3 + \frac{ac}{2}\right) R_i^2\, dR_i + \lambda\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

En intégrant entre R_i et A (ou R_e et A), on obtient, en tenant compte de (45),

$$(50)\qquad \frac{R_e^3}{3} = \frac{R_i^3}{3} + \frac{\varkappa c^{-1}}{2}\int_{R_i}^{A} R^2\, dR_i \int_{R_i}^{A} \frac{\gamma R_i^{\frac{5}{2}}\, dR_i}{\left[R_i - \varkappa\int_0^{R_i}\left(D c^3 + \frac{ac}{2}\right) R_i^2\, dR_i + \lambda\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Admettons, avec Schwarzschild, que $R_i = 0$ *au centre de la sphère*; rappelons que x_1 et r sont aussi nuls à l'origine (2); on aura, en vertu de (50),

$$(51)\qquad (R_e^3)_0 \equiv \beta = \frac{3}{2}\varkappa c^{-1}\int_0^{A} R_i^2\, dR_i \int_{R_i}^{A} \frac{\gamma R_i^{\frac{5}{2}}\, dR_i}{\left[R_i - \varkappa\int_0^{R_i}\left(D c^3 + \frac{ac}{2}\right) R_i^2\, dR_i + \lambda\right]^{\frac{3}{2}}},$$

en représentant par l'indice 0 la valeur de R à l'origine. Nous obtenons ainsi la constante β. Pour que le potentiel f_4 reste fini à l'origine des coordonnées, il faut et il suffit que

$$\lambda = 0.$$

Changement de variables. — Posons, avec Marcel Brillouin,

$$(52)\qquad \omega \equiv R_i - \varkappa\int_0^{R_i}\left(D c^3 + \frac{ac}{2}\right) R_i^2\, dR_i;$$

alors, on obtient, en vertu de (50), (52), et en tenant compte de ce que $\lambda = \sigma$, la relation (¹).

$$(53) \qquad R_e^3 - R_i^3 = \frac{3}{2}\frac{\varkappa}{c}\int_{R_i}^{A} R^2\, dR_i \int_{R_i}^{A} \frac{\gamma R_i^{\frac{5}{2}}\, dR_i}{\omega^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette relation montre que la variable R_e utilisée à l'extérieur de la sphère massique et la variable R_i utilisée à l'intérieur de cette même sphère dépendent l'une de l'autre; la relation définit ce changement des variables R_i et R_e.

Détermination des potentiels. — Il résulte de (37), (41) et (49) qu'on peut écrire

$$(54) \qquad f_4 = \frac{c^2\omega}{R_i}\left(1 - \frac{\varkappa c^{-1}}{2}\int_{R_i}^{A} \frac{\gamma R_i^{\frac{5}{2}}\, dR_i}{\omega^{\frac{3}{2}}}\right)^2.$$

Le potentiel f_4 sera donc connu si la fonction γ est déterminée. Pour cela, introduisons (52) dans (36). On obtient, d'abord,

$$(55) \qquad D'c^4\left(1 - \frac{\varkappa c^{-1}}{2}\int_{R_i}^{A} \frac{\gamma R_i^{\frac{5}{2}}\, dR_i}{\omega^{\frac{3}{2}}}\right)\omega^{\frac{1}{2}} R_i^{-\frac{1}{2}} = \gamma'.$$

En dérivant par rapport à R_i, on aura l'*équation différentielle linéaire de Marcel Brillouin* (²)

$$(56) \qquad \frac{d}{dR_i}\left(\sqrt{\frac{R_i}{\omega}}\,\frac{\gamma'}{D'}\right) = \frac{\varkappa c^3}{2}\,\frac{R_i^{\frac{5}{2}}}{\omega^{\frac{3}{2}}}\gamma.$$

Dans l'intégration de cette équation s'introduiront deux constantes qui seront déterminées par les conditions à la surface; en vertu de (48) et (52), on obtient immédiatement ces conditions; à savoir

$$(57) \qquad \gamma_s = D_s c^4 \sqrt{\frac{\omega_s}{A}} \qquad \text{et} \qquad \gamma'_s = D'_s c^4 \sqrt{\frac{\omega_s}{A}}.$$

Calcul de la pression. — De (35), on déduit

$$(58) \qquad p = -\left(Dc^2 + \frac{a}{2}\right) + D'c^2\frac{\gamma}{\gamma'}.$$

(¹) TH. DE DONDER, *Premiers compléments à la Gravifique einsteinienne* : Voir éq. [IV (26)]. Ce changement de variables est la généralisation de celui que nous avons donné dans la *Gravifique einsteinienne*. Note 15, éq. (52), (53) et (54).

(²) M. BRILLOUIN, *C. R.*, Paris, séance du 19 juin 1922. *Voir* aussi M. NUYENS, *C. R.*, Paris, t. 190; séance dn 6 janvier 1930.

Il ne reste plus qu'à y remplacer γ et γ' par leurs valeurs déduites de l'intégration de l'équation différentielle (56) ou (55) et des conditions (57).

3. Cas particuliers : I. Sphère massique homogène [1] (*Problème de Schwarzschild*). — Ce problème consiste à chercher le champ gravifique d'une sphère massique homogène, la constante cosmique étant considérée comme négligeable.

Extérieur. — Le δs^2 définissant le champ gravifique à l'extérieur de la sphère se tire immédiatement de (34) en faisant $a = 0$; on obtient :

$$(59)\qquad \delta s^2 = -\frac{(\delta R_e)^2}{1-\dfrac{\alpha}{R_e}} - R_e^2[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta(\delta\varphi)^2] + c^2\left(1-\frac{\alpha}{R_e}\right)(\delta t)^2.$$

Intérieur. — Si D est *constant* et si, par conséquent, sa dérivée, $D' = 0$, il résulte de (55) que γ est une constante dont la valeur est donnée par (57). On a, en effet, si l'on intègre (52),

$$(60)\qquad \omega = R_i - \frac{\varkappa c^3}{3} D R_i^3,$$

d'où

$$(61)\qquad \gamma = D c^4 \sqrt{1 - \frac{\varkappa c^3}{3} D A^2}.$$

Introduisons (60) dans (54) et intégrons; nous obtenons la valeur de f_4 ; à savoir :

$$(62)\qquad f_{4i} = c^2\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}DA^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}DR_i^2}\right]^2.$$

Les équations (37) et (38) donnent alors immédiatement la valeur de f_1. Pour pouvoir écrire le δs^2 intérieur, il nous reste encore à tirer de (42), en tenant compte de (45), la valeur de $\dfrac{dx_1}{dR_i}$. On trouve ainsi

$$(63)\qquad \frac{dx_1}{dR_i} = R_i^2\left[\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1-\dfrac{\varkappa c^3}{3}A^2}{1-\dfrac{\varkappa c^3}{3}R_i^2}} - \frac{1}{2}\right].$$

---

[1] K. Schwarzschild, Berlin, *Sitzungsberichte*, 1916, p. 189 et 424.

Nous pouvons alors, en partant de (62), et en introduisant (63), écrire la valeur du δs^2 définissant le champ gravifique de Schwarzschild à *l'intérieur* de la sphère :

$$(64)\qquad \delta s^2 = -\frac{(\delta R_i)^2}{1-\frac{\varkappa c^3}{3}\Gamma R^2} - R_i^2[(\delta\theta)^2+\sin^2\theta(\delta\varphi)^2] + c^2\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}DA^2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\varkappa c^3}{3}DR_i^2}\right]^2(\delta t)^2.$$

La condition générale de continuité (45) se réduit ici à

$$(65)\qquad \alpha = \frac{\varkappa c^3}{3}DA^3.$$

II. On aurait pu résoudre le même problème sans négliger (¹) la constante cosmique a, soit en partant du problème de Brillouin (avec $a \neq 0$), soit en appliquant au problème de Schwarzschild le théorème (29).

4. Univers d'Einstein (²). — Assimilons l'Univers stellaire à une répartition massique continue, à symétrie sphérique, masse dont la densité serait différente de zéro, mais dont la pression p serait négligeable. Nous devons donc intégrer les équations (22) dans lesquelles nous ferons $p = 0$.

Rappelons que, (26), la pression p étant nulle, on aura

$$(66)\qquad f_4 = \text{const.};$$

nous poserons

$$(67)\qquad f_4 = K^2.$$

Il résulte alors de l'équation (22 c) du système, que D est *constant* et donné par

$$(68)\qquad D = \frac{a}{c^2}.$$

En retranchant du double de (22 b) la somme des équations (22 a) et (22 c),

---

(¹) M. Nuyens, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, séance du 14 mai 1923.

(²) A. Einstein, Berlin, *Sitzungsberichte*, 1917, p. 142. *Voir* pour la méthode d'intégration : M. Nuyens, *Étude synthétique des champs massiques à symétrie sphérique*. Bruxelles (Castaigne), 1925, paragraphes 11 et 12.

et en tenant compte de (12), on obtient

$$(69)\qquad 4\frac{f_1}{f_2} - \frac{1}{f_2^2}\left(\frac{df_2}{dx_1}\right)^2 - 2\varkappa a c f_1 = 0.$$

Introduisons une nouvelle variable R, en posant :

$$(70)\qquad f_2 = R^2.$$

Il résulte alors, de (6) et (67) que l'on a

$$(71)\qquad f_1 = \frac{c^2}{K^2 R^4}.$$

Il suffit alors d'introduire (67) et (71) dans (69) pour obtenir la relation différentielle reliant R à l'ancienne variable x_1 :

$$(72)\qquad dx_1 = \frac{K R^2\, dR}{c\sqrt{1 - \frac{1}{2}\varkappa a c R^2}}.$$

Cette relation s'intégre facilement et l'on trouve

$$(73)\qquad x_1 = \frac{K}{2c}\left(\frac{\varkappa a c}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\arcsin\left(R\sqrt{\frac{\varkappa a c}{2}}\right) - R\sqrt{\frac{\varkappa a c}{2}}\sqrt{1 - \frac{\varkappa a c}{2}R^2} + \beta\right].$$

où β est une constante d'intégration. Cette équation est l'analogue de l'équation (53).

Grâce à (67), (70) et (71), on peut écrire le δs^2 demandé (4) sous la forme

$$(74)\qquad (\delta s)^2 \equiv -\frac{(\delta R)^2}{1 - \frac{\varkappa a c}{2}R^2} - R^2[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta(\delta\varphi)^2] + K^2(\delta t)^2.$$

Supposons maintenant que les potentiels tendent vers ceux de Minkowski lorsque R tend vers zéro. Supposons, en outre, que x_1 tend vers zéro, si R tend vers zéro. Ces deux conditions déterminent les constantes d'intégration β et K; à savoir

$$(75)\qquad K = c, \qquad \beta = 0.$$

Le $(\delta s)^2$ devient donc

$$(76)\qquad \boxed{(\delta s)^2 \equiv -\frac{(\delta R)^2}{1 - \frac{\varkappa a c}{2}R^2} - R^2[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta(\delta\varphi)^2] + c^2(\delta t)^2.}$$

D'après (23), on peut écrire

$$-\frac{\varkappa a c}{2}=\frac{a}{2b}. \tag{77}$$

En posant, avec Einstein,

$$\frac{a}{2b}=-\frac{1}{U^2}, \tag{78}$$

on a

$$(\delta s)^2=-\frac{(\delta R)^2}{1-\frac{R^2}{U^2}}-R^2[(\delta\theta)^2+\sin^2\theta(\delta\varphi)^2]+c^2(\delta t)^2. \tag{79}$$

Pour mettre ce δs^2 sous une autre forme trouvée par Einstein, il suffit de faire le changement de variable

$$R=U\sin\frac{r}{U} \tag{80}$$

qui donne par différentiation

$$dR=\cos\frac{r}{U}\,dr \quad \text{ou} \quad dr=\frac{dR}{\sqrt{1-\frac{R^2}{U^2}}}. \tag{81}$$

Grâce à ces dernières relations, (79) peut s'écrire

$$\delta s^2=-(\delta r)^2-U^2\sin^2\frac{r}{U}[(\delta\theta)^2+\sin^2\theta(\delta\varphi)^2]+c^2(\delta t)^2. \tag{82}$$

La courbure C de cet univers vaut, en vertu de (II, 12) et de (11),

$$C=-\frac{3a}{b}=3\varkappa ac=\frac{6}{U^2}. \tag{83}$$

5. Univers de de Sitter (¹). — Le problème de l'Univers a été traité d'une autre façon par de Sitter qui suppose que la densité moyenne de la masse répandue dans l'Univers est négligeable. Nous retournerons donc aux équations (22) en y faisant $D=p=0$. La méthode d'intégration est identique à celle que nous avons donnée dans le paragraphe pour la recherche du champ gravifique *à l'exté-*

(¹) DE SITTER, *Proc. Ac. of Amsterdam*, t. 19, 1917, p. 527. *Voir* aussi J. CHAZY, *La Théorie de la Relativite et la Mécanique céleste*, t. II, Paris, 1930, sp. page 221.

rieur de la sphère. Nous aurons donc

$$(84) \qquad f_1 = \frac{1}{R^4\left(1 - \frac{a}{6b}R^2 - \frac{\alpha}{R}\right)}, \qquad f_4 = c^2\left(1 - \frac{a}{6b}R^2 - \frac{\alpha}{R}\right).$$

Supposons encore que les potentiels tendent vers ceux de Minkowski lorsque R tend vers zéro, en même temps que x_1.

Nous obtenons, pour ces conditions, les constantes d'intégration, (33 et 43),

$$(85) \qquad \beta = 0, \qquad \alpha = 0.$$

Le champ gravifique dans l'Univers de *de Sitter* peut donc s'écrire, (43),

$$(86) \quad (\delta s)^2 \equiv -\frac{(\delta R)^2}{1 - \frac{\varkappa ac}{6}R^2} - R^2[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta(\delta\varphi)^2] + c^2\left(1 - \frac{\varkappa ac}{6}R^2\right)(\delta t)^2.$$

En posant, avec de Sitter,

$$(87) \qquad \frac{\varkappa ac}{6} = \frac{1}{U^2},$$

on a

$$(88) \quad (\delta s)^2 \equiv -\frac{(\delta R)^2}{1 - \frac{R^2}{U^2}} - R^2[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta(\delta\varphi)^2] + c^2\left(1 - \frac{R^2}{U^2}\right)(\delta t)^2.$$

Pour mettre ce $(\delta s)^2$ sous la forme trouvée par de Sitter, il suffit de faire le changement de variable suivant :

$$(89) \qquad R = U \sin\frac{r}{U}$$

qui donne par différentiation

$$(90) \qquad dR = \cos\frac{r}{U}\,dr \qquad \text{ou} \qquad dr = \frac{dR}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{U^2}}}.$$

Grâce à ces deux dernières relations, le $(\delta s)^2$ (86) pourra s'écrire

$$(91) \quad (\delta s)^2 \equiv -(\delta r)^2 - U^2 \sin^2\frac{r}{U}[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta(\delta\varphi)^2] + c^2\cos^2\frac{r}{U}(\delta t)^2.$$

La courbure C de cet univers vaut, en vertu de (II, 12) et de (11),

$$C = -\frac{2a}{b} = 2\varkappa ac = \frac{12}{U^2}. \tag{92}$$

6. Sphère massique homogène dans les univers d'Einstein ou de de Sitter [1]. — On cherche séparément les δs^2 définissant les champs gravifiques à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère, puis on détermine les constantes d'intégration par des conditions de continuité, à la surface, des potentiels et de leurs dérivées premières, et par des conditions à l'origine.

7. Problème d'Eddington. — *Eddington* [2] proposa de chercher le champ gravifique d'une sphère massique *homogène* dont la densité serait donnée, cette fois, par le scalaire *invariant*

$$T = \sum_{i=1}^{4} T_i^i = 2C_1, \tag{93}$$

où C_1 représente une *constante*.

Ce problème peut être ramené à un problème de Brillouin [3]. Nous ne parlerons ici que du problème *intérieur* d'Eddington.

Reprenons la condition ci-dessus et utilisons (15); d'où

$$T = Dc^2 - 3p = 2C_1. \tag{94}$$

De (35) et (36), il résulte, après intégration (dans le cas où $a = 0$),

$$\gamma = C_2(C_1 + 2p)^{\frac{3}{4}}, \tag{95}$$

où C_2 est une constante d'intégration.

D'autre part, développons (56); nous obtenons

$$-\frac{1}{R_i^2} + \frac{1}{\omega R_i} - \frac{2}{R_i}\frac{\gamma''}{\gamma'} + \frac{2D''}{R_i D'} = -\varkappa pc\frac{R_i}{\omega}. \tag{96}$$

---

(1) J. Chazy, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1922, p. 1157 — Maurice Nuyens, *Bull. Acad. Roy. Belg.*, t. II, 7 mars 1920, p. 113 120. — Vanderlinden, *Wis-en Natuurkundig Tydschrift.* Gent. Dl II, 1924.

(2) *The mathematical Theory of Relativity*, 2e édition, p. 170 (Cambridge, 1924).

(3) Maurice Nuyens, *Bull. Acad. Roy. Belg.*, 5e série, t. XIII, n° 7, 2 juillet 1927.

En remplaçant D et γ par leurs valeurs en fonction de p dans cette équation (96), on trouve l'équation différentielle en p

$$(97)\qquad \frac{d}{dR_i}\left(\frac{1+\varkappa p c R_i^2}{\dfrac{1}{R_i}-\dfrac{1}{C_1+2p}\dfrac{dp}{dR_i}}\right)=1-\varkappa c R_i^2(2C_1+3p).$$

Introduisons la fonction D, grâce à (94); d'où l'équation différentielle (97) s'écrira

$$(98)\qquad \frac{d}{dR_i}\left(\frac{1+\dfrac{\varkappa c}{3}R_i^2(Dc^2-2C_1)}{\dfrac{1}{R_i}-\dfrac{D'c^2}{2Dc^2-C_1}}\right)=1-\varkappa R_i^2 D c^3.$$

Ces calculs montrent que le problème d'Eddington revient à résoudre un problème de Brillouin où la *densité massique variable* D satisferait à l'équation différentielle (98).

8. Deuxième méthode. Déterminant quelconque ([1]). — En passant des coordonnées rectangulaires x_1, x_2, x_3 et du temps x_4 aux variables R, θ, φ, t par la transformation

$$(99)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= R\sin\theta\cos\varphi,\\ x_2 &= R\sin\theta\sin\varphi,\\ x_3 &= R\cos\theta,\\ x_4 &= t,\end{aligned}\right.$$

on peut définir un champ à symétrie sphérique, par un δs^2 de la forme

$$(100)\qquad \boxed{(\delta s)^2 \equiv -f_1(\delta R)^2 - R^2[(\delta\theta)^2+\sin^2\theta(\delta\varphi)^2]+f_4(\delta t)^2,}$$

où f_1 et f_4 sont des fonctions de R seulement.

On a donc posé

$$(101)\qquad \left\{\begin{array}{llll} g_{11}=-f_1, & g_{22}=-R^2, & g_{33}=-R^2\sin^2\theta, & g_{44}=f_4,\\ g^{11}=-\dfrac{1}{f_1}, & g^{22}=-\dfrac{1}{R^2}, & g^{33}=-\dfrac{1}{R^2\sin^2\theta}, & g^{44}=\dfrac{1}{f_4},\\ & g_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}=0 & \text{pour } \alpha\neq\beta. & \end{array}\right.$$

([1]) *Voir* à ce propos Henry Janne, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, octobre 1924, et Maurice Nuyens, *Étude synthétique des champs massiques à symétrie sphérique*, Bruxelles (Castraigne), 1925, Chap. IV et suiv.

Il en résulte que

$$\sqrt{-g} = R^2 \sin\theta \sqrt{f_1 f_4}, \tag{102}$$

La masse étant au repos par rapport à ce système d'axes, nous pouvons écrire

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0, \tag{103}$$

d'où, en vertu de (101) et de (II, 35),

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \qquad u^4 = \frac{1}{\sqrt{f_4}}, \qquad u_4 = \sqrt{f_4}. \tag{104}$$

En vertu de (101), (103) et (104), les trois dernières composantes de l'accélération généralisée A_σ(I, 205) sont nulles identiquement. Quant à la première elle se réduit à

$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_4}\frac{df_4}{dR}. \tag{105}$$

Nous avons ainsi pour les composantes $G_{\alpha\beta}$ du tenseur de Riemann

$$\left\{\begin{aligned}
G_{11} &\equiv \frac{1}{2}\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{f_4}\frac{df_4}{dR}\right) - \frac{1}{4}\frac{1}{f_1 f_4}\frac{df_1}{dR}\frac{df_4}{dR} + \frac{1}{4}\frac{1}{f_4^2}\left(\frac{df_4}{dR}\right)^2 - \frac{1}{f_1 R}\frac{df_1}{dR},\\
G_{22} &\equiv \frac{1}{f_1} - 1 + \frac{1}{2}\frac{R}{f_1 f_4}\frac{df_4}{dR} - \frac{1}{2}\frac{R}{f_1^2}\frac{df_1}{dR},\\
G_{33} &\equiv \sin^2\theta\, G_{22},\\
G_{44} &\equiv \frac{f_4}{f_1}\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{f_4}\frac{df_4}{dR}\right) - \frac{1}{4}\frac{1}{f_4^2}\left(\frac{df_4}{dR}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{f_1 f_4}\frac{df_1}{dR}\frac{df_4}{dR} - \frac{1}{f_4 R}\frac{df_4}{dR}\right.\\
&\qquad\qquad G_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta).
\end{aligned}\right. \tag{106}$$

De la définition (II, 12) de la courbure il résulte immédiatement que l'on a

$$\begin{aligned}
C \equiv &-\frac{1}{f_1}\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{f_4}\frac{df_4}{dR}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{f_1^2 f_4}\frac{df_1}{dR}\frac{df_4}{dR} - \frac{1}{2}\frac{1}{f_1 f_4^2}\left(\frac{df_4}{dR}\right)^2\\
&+ \frac{2}{f_1^2 R}\frac{df_1}{dR} - \frac{2}{f_1 R^2} + \frac{2}{R^2} - \frac{2}{f_1 f_4 R}\frac{df_4}{dR}.
\end{aligned} \tag{107}$$

Reportons-nous maintenant aux équations générales (II, 15) du champ gravifique

$$-a g_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} C = \frac{1}{b} T_{\alpha\beta}. \tag{108}$$

Il résulte alors de (101), (104) et (14) que ces équations se réduisent à

$$(109)\quad \begin{cases} (a) & -\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{f_1}{R^2}-\dfrac{1}{f_4 R}\dfrac{df_4}{dR}+\dfrac{a}{2b}f_1=-\varkappa p c f_1, \\ (b) & -\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dR}\left(\dfrac{1}{f_4}\dfrac{df_4}{dR}\right)+\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{f_1 f_4}\dfrac{df_1}{dR}\dfrac{df_4}{dR}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{f_4^2}\left(\dfrac{df_4}{dR}\right)^2 \\ & \qquad -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_4 R}\dfrac{df_4}{dR}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_1 R}\dfrac{df_1}{dR}+\dfrac{a}{2b}f_1=-\varkappa p c f_1, \\ (c) & \dfrac{1}{R^2}-\dfrac{f_1}{R^2}-\dfrac{1}{f_1 R}\dfrac{df_1}{dR}-\dfrac{a}{2b}f_1=-\varkappa D c^3 f_1. \end{cases}$$

L'équation (109 c) peut s'écrire

$$(110)\qquad \frac{d}{dR}\left(\frac{R}{f_1}\right)=1-\varkappa c^3 DR^2+\frac{a}{2b}R^2$$

ou, en intégrant à partir d'une valeur quelconque A de R,

$$(111)\qquad \frac{R}{f_1}=R-\varkappa c^3\int_A^R DR^2\,dR+\frac{a}{6b}R^3-\alpha,$$

avec

$$(112)\qquad \alpha=A+\frac{a}{6b}A^3-\frac{A}{(f_1)_A}.$$

Posons

$$(113)\qquad \omega\equiv R-\varkappa c^3\int_A^R DR^2\,dR+\frac{a}{6b}R^3-\alpha,$$

On aura donc

$$(114)\qquad \boxed{f_1=\frac{R}{\omega}.}$$

En introduisant (114) dans (109 b), on obtiendra une équation en f_4 seulement, à savoir

$$(115)\qquad \frac{d}{dR}\left(\frac{1}{f_4}\frac{df_4}{dR}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{R}-\frac{\omega'}{\omega}\right)\frac{1}{f_4}\frac{df_4}{dR} +\frac{1}{2}\frac{1}{f_4^2}\left(\frac{df_4}{dR}\right)^2-\frac{3\omega-\omega' R-2R}{\omega R^2}=0,$$

où les accents désignent des dérivées par rapport à R.

Dans le cas particulier où D est constant, l'équation précédente peut s'intégrer très facilement. Posons, pour simplifier,

$$f_4 = \frac{\omega}{R} v^2, \tag{116}$$

v étant une fonction encore inconnue de R.

En introduisant (116) dans (115), on obtient l'équation différentielle très simple

$$v'' - \left(\frac{5}{2}\frac{1}{R} - \frac{3}{2}\frac{\omega'}{\omega}\right) v' = 0. \tag{117}$$

En intégrant deux fois, on trouve

$$v = C_1 \int \frac{R^{\frac{5}{2}}}{\omega^{\frac{3}{2}}} dR + C_2, \tag{118}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

On a donc, finalement, grâce à (116) :

$$f_4 = \frac{\omega}{R}\left(C_1 \int \frac{R^{\frac{5}{2}}}{\omega^{\frac{3}{2}}} dR + C_2\right)^2. \tag{119}$$

Théorème. — *Pour tous les champs où* $D = p = 0$, *la constante* C_1 *est nulle et l'on a*

$$\boxed{f_1 = \frac{R}{\omega},} \qquad \boxed{f_4 = C_2^2 \frac{\omega}{R}.} \tag{120}$$

Démonstration. — Introduisons (114) et (119) dans (109 *a*) et faisons $D = p = 0$. Il vient, en intégrant

$$C_1 \int \frac{R^{\frac{5}{2}}}{\omega^{\frac{3}{2}}} dR + C_2 = \text{const.} \tag{121}$$

Cette relation exige que

$$C_1 = 0, \tag{122}$$

ce qui démontre le théorème.

Nous pourrions reprendre ici tous les problèmes que nous avons résolus par la première méthode. A titre d'exemple, nous traiterons ici en détail le problème de Schwarzschild et celui d'Eddington. Nous ferons donc $a = 0$ dans les équations précédentes.

9. Sphère massique homogène (*Problème de Schwarzschild*).

Problème extérieur. — Faisons $D = p = 0$ dans (113), il vient

(123) $$\omega = R_e - \alpha\,;$$

d'où, en vertu de (114),

(124) $$f_{1e} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{R_e}}$$

et, puisque nous sommes dans le cas où le théorème (120) s'applique,

(125) $$f_{4e} = C_{2e}^2\left(1 - \frac{\alpha}{R_e}\right).$$

Le δs^2 définissant le champ à l'extérieur s'écrit donc :

(126) $$(\delta s)^2 \equiv -\frac{(\delta R_e)^2}{1 - \frac{\alpha}{R_e}} - R_e^2[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta(\delta\varphi)^2] + C_{2e}^2\left(1 - \frac{\alpha}{R_e}\right)(\delta t)^2.$$

C'est le résultat que nous avons trouvé en (59). Il nous reste deux constantes d'intégration que nous déterminerons plus tard. Nous avons ajouté à C_2 un indice e pour distinguer cette constante de celle qui s'introduira dans le problème intérieur.

Problème intérieur. — Supposons que D soit constant et p différent de zéro La fonction ω(113) devient, dans ce cas, si nous intégrons depuis le centre de la sphère $R_i = 0$,

(127) $$\omega = R_i - \frac{\varkappa c^3}{3} D R_i^3\,;$$

d'où, en vertu de (114),

(128) $$f_1 = \frac{1}{1 - \frac{\varkappa c^3}{3} D R_i^2}.$$

Puisque D est constant, on aura, en utilisant (115) et en effectuant l'intégration,

(129) $$f_4 = \left[\frac{3 C_{1i}}{\varkappa c^3 D} + C_{2i}\sqrt{1 - \frac{\varkappa c^3 D}{3} R_i^2}\right]^2.$$

Le δs^2 définissant le champ à l'intérieur s'écrit donc

(130) $$\delta s^2 \equiv -\frac{(\delta R_i)^2}{1 - \frac{\varkappa c^3}{3} D R_i^2} - R_i^2[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta(\delta\varphi)^2] + \left(\frac{3 C_{1i}}{\varkappa c^3 D} + C_{2i}\sqrt{1 - \frac{\varkappa c^3}{3} D R_i^2}\right)^2 (\delta t)^2,$$

où il reste à déterminer les constantes d'intégration C_{1i} et C_{2i}.

Détermination des constantes. — La continuité, à la surface, des potentiels g_{22} donne

$$(R_i)_s = (R_e)_s = A, \tag{131}$$

et la continuité des dérivées de ces mêmes potentiels donne

$$\left(\frac{dR_e}{dR_i}\right)_s = 1. \tag{132}$$

La continuité des potentils g_{11} donne

$$\alpha = \frac{\varkappa c^3 D}{3} A^3 \tag{133}$$

et celle des dérivées de ces mêmes potentiels fournit, entre les rayons R_e et R_i, la condition à la surface

$$\left(\frac{d^2 R_e}{dR_i^2}\right)_s = \frac{\dfrac{\varkappa c^3}{3} DA}{1 - \dfrac{\varkappa c^3}{3} DA^2}. \tag{134}$$

Enfin, la continuité à la surface des potentiels g_{44} et de leurs dérivées donne les deux conditions

$$\left\{\begin{aligned} C_{2i} &= -\frac{1}{2} C_{2e}; \\ C_{1i} &= C_{2e}\frac{\varkappa c^2}{2} D \sqrt{1 - \frac{\varkappa c^3}{3} DA^2}. \end{aligned}\right. \tag{135}$$

On aura donc, en introduisant (135) dans (129),

$$f_4 = C_{2e}^2 \left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{\varkappa c^2}{3} DA^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\varkappa c^2}{3} DR_i^2}\right]^2. \tag{136}$$

En remplaçant f_4 par sa valeur dans l'équation (115) et en tenant compte de (127) on trouve

$$C_{2e} = c. \tag{137}$$

Le résultat que nous trouvons ici est donc tout à fait celui que nous avons trouvé par la première méthode.

10. Problème d'Eddington (1) (Intérieur).

— Retournons aux équations (109) du champ gravifique et ajoutons-y le théorème de l'impulsion et de l'énergie qui se réduit ici à l'unique équation

$$-\frac{1}{2}(Dc^2 + p)\frac{1}{f_4}\frac{df_4}{dR_i} = \frac{dp}{dR_i}. \tag{138}$$

(1) MAURICE NUYENS, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, 5e série, t. XIII, no 7, 2 juillet 1927.

La condition

$$(139) \qquad T = Dc^2 - 3p = 2C_1$$

permet d'intégrer l'équation (138) et l'on obtient

$$(140) \qquad f_4\sqrt{C_1 + 2p} = C_2,$$

où C_2 est une constante d'intégration.

En remplaçant f_4 par sa valeur en fonction de p dans (109 *a*) on trouve pour f_1

$$(141) \qquad f_1 = \frac{\dfrac{1}{R_i} - \dfrac{1}{C_1 + 2p}\dfrac{dp}{dR_i}}{\dfrac{1}{R_i} + \varkappa pc R_i}.$$

Enfin, en introduisant f_1 et f_4 tirés de ces deux dernières formules dans (109 *b*), ou bien encore en remplaçant f_1 seulement dans (109 *c*) on trouve l'équation différentielle

$$(142) \qquad \frac{d}{dR_i}\left(\frac{1 + \varkappa pc R_i^2}{\dfrac{1}{R_i} - \dfrac{1}{C_1 + 2p}\dfrac{dp}{dR_i}}\right) = 1 - \varkappa c R_i^2 (2C_1 + 3p)$$

identique à celle que nous avons trouvée par la méthode précédente.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS ASTRONOMIQUES.

11. Mouvement planétaire. — Assimilons le Soleil à la sphère massique homogène étudiée aux paragraphes 3 et 9. Dans le champ extérieur au Soleil, plaçons un corps d'épreuve ne modifiant donc pas sensiblement ce champ. Ce corps d'épreuve sera ici une planète, Mercure par exemple. Pour étudier la trajectoire de cette planète et son mode de parcours, nous n'aurons qu'à nous reporter aux quatre équations du théorème du tenseur asymétrique (II, 61) ou bien aux équations (II, 5), qui expriment que cette trajectoire est une extrémale de l'espace-temps considéré. Nous pouvons écrire ces mêmes relations dans l'espace *et* le temps, grâce aux relations (II, 93) et (II, 104).

Par raison de symétrie, on peut affirmer que *les extrémales* de (II, 62) sont *planes* et que leurs plans passent par l'origine. Considérons un de ces plans, et prenons-le comme plan équatorial dans nos coordonnées polaires; on aura donc $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dans ce plan, l'espace-temps sera défini par

$$\delta s^2 = -\frac{\delta R^2}{1-\frac{\alpha}{R}} - R^2\,\delta\varphi^2 + c^2\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)\delta t^2. \tag{143}$$

Rappelons que le long d'une extrémale, on aura, (II, 36),

$$-\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)^{-1}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - R^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + c^2\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1. \tag{144}$$

Reportons-nous aux équations (II, 60) des extrémales dans le champ (143); faisons-y $\alpha = 2$ et 4 respectivement (nous considérons φ comme la *seconde* variable et t comme la *quatrième*); on trouve immédiatement les *invariants* ou *intégrales* des équations du mouvement :

$$R^2\frac{d\varphi}{ds} = K, \tag{145}$$

$$c^2\frac{R-\alpha}{R}\,\frac{dt}{ds} = L, \tag{146}$$

où K et L représentent deux constantes d'intégration.

Entre les trois invariants (144), (145), (146), éliminons ds et dt; d'où

$$\left(\frac{d\frac{1}{R}}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{K^2}\left(-1+\frac{L^2}{c^2}\right) + \frac{\alpha}{K^2}\,\frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} + \frac{\alpha}{R^3}. \tag{147}$$

Cette équation est l'équation différentielle de la trajectoire géométrique décrite par le corps d'épreuve placé dans le champ gravifique produit par le Soleil.

Cette équation peut être exactement intégrée à l'aide d'une fonction elliptique [1]. Introduisons les constantes *numériques*

$$\sigma = \left(\frac{\alpha}{K}\right)^2, \qquad \tau = \left(\frac{\alpha L}{cK}\right)^2. \tag{148}$$

---

[1] J. Droste, *Dissertation*, Leyde, 1916. — A. R. Forsyth, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, série A, vol. XCVII, 1920, p. 145-151. — F. Morley, *Amer. Journ. of Math.*, vol. XLIII, 1921, p. 29-32. — C. de Jans, *Mém. Acad. roy. Belg.* (Classe des Sc.), collection in-8°, 2e série, t. VII, fasc. 4, 1923.

et posons

(149) $$g_2 = \frac{1}{12} - \frac{\sigma}{4}, \qquad g_3 = \frac{1}{216}\left(1 + 9\sigma - \frac{27}{2}\tau\right);$$

posons aussi

(150) $$\frac{\alpha}{4R} = u + \frac{1}{12}.$$

L'équation (147) devient

(151) $$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3,$$

et s'intègre immédiatement par une fonction p de Weierstrass aux invariants (149).

La solution convient aussi bien au mouvement d'une particule lumineuse qu'à celui d'un point matériel; dans ce dernier cas, σ et τ sont positifs; pour le mouvement de la lumière, la condition $ds = 0$ conduit, par (145), (146) et (148), à $\sigma = 0$, $\tau > 0$.

On peut répartir les orbites en plusieurs catégories, en tenant compte du signe du discriminant Δ de la fonction p et de la valeur relative des paramètres σ et τ. Quand $\Delta = 0$, la trajectoire présente au moins un point où R est un extremum; le cas le plus intéressant est celui où elle a un péricentre.

Dans ce cas, l'équation de l'orbite est

(152) $$\frac{\alpha}{4R} = \frac{1}{12} + p(\varphi + \omega_3),$$

avec $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, $2\omega_1$ et $2\omega_2$ désignant le couple de périodes primitives de la fonction p tel que ω_1 et $\frac{\omega_2}{i}$ soient positifs. Les orbites que l'on obtient ainsi sont la généralisation de celles que la mécanique de Newton assigne aux corps célestes. Leur discussion conduit aux conclusions suivantes : Si $\sigma > \tau$, R oscille entre deux valeurs fixes et positives R_p, R_a, correspondant respectivement aux distances péricentre et apocentre du corps d'épreuve; celui-ci effectue un mouvement révolutif. accompagné d'un déplacement des apsides, Si $\sigma \leqq \tau$, la trajectoire est composée de branches infinies; la particule ne peut en décrire qu'une, comprise entre deux infinis consécutifs de R, en passant une seule fois au péricentre. Les trois genres de trajectoires correspondent respectivement aux orbites elliptiques, hyperboliques et paraboliques de la dynamique classique; on peut les appeler orbites *périodiques* ($\sigma > \tau$), *ouvertes* ($\sigma < \tau$), *limites* ($\sigma = \tau$) (¹). Les orbites périodiques sont des courbes fermées si ω_1 est commensurable avec π. Elles peuvent dégénérer en cercles, auquel cas $\Delta = 0$.

(¹) C. DE JANS, *loc. cit.*, § 11.

La vitesse v du corps d'épreuve sur son orbite est donnée par

$$(153)\qquad v^2 = c^2\frac{R-\alpha}{R}\left(1-\frac{\sigma}{\tau}\,\frac{R-\alpha}{R}\right).$$

En général, le temps s'exprime en fonction de φ par une combinaison assez compliquée des fonctions p, p', ζ et σ de Weierstrass (1). Pour une orbite périodique, on en déduit la formule suivante donnant la durée T d'une révolution, comptée entre les passages à deux péricentres consécutifs :

$$(154)\qquad T = \frac{\alpha}{c}\,\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma-\tau}\left\{4\left(\eta_1-\frac{\omega_1}{12}\right)-\frac{3\sigma-2\tau}{2}\,\frac{\eta_1 a-\omega_1\zeta(a)}{p'(a)} + (\sigma-\tau)\,\frac{\eta_1 b-\omega_1\zeta(b)}{p'(b)}\right\},$$

les constantes a et b satisfaisant aux conditions

$$p(a) = -\frac{1}{12},\qquad p(b)=\frac{1}{6};$$

il faut prendre

$$p'(a)=\frac{1}{4i}\sqrt{\sigma-\tau},\qquad p'(b)=-\frac{1}{4}\sqrt{\tau}.$$

En outre

$$\eta_1 \equiv \zeta(\omega_1).$$

La formule (154) remplace la troisième loi de Képler de la mécanique newtonienne.

La théorie classique du mouvement képlérien des corps célestes se déduit aisément, en *première* approximation, des formules (152) et (154) (2). A cette fin, regardons σ et τ comme très petits du premier ordre, et soient e_1, e_2, $e_3 (e_1 > e_3 > e_2)$ les racines du second membre de (151). Pour parvenir à l'équation approchée de l'orbite, posons $v \equiv \varphi\sqrt{e_1-e_2}$. En exprimant $p(\varphi)$ en fonction de $\mathrm{sn}(v)$ de module $k=\sqrt{\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}}$, l'équation (152) se ramène d'abord à

$$\frac{2\alpha}{R} = \sigma + \nu(1-2\,\mathrm{sn}^2 v),$$

avec $\nu^2 \equiv \sigma^2 - 4(\sigma-\tau)$. Pour les planètes, $\sigma-\tau$ est très petit du second ordre; en considérant donc ν comme du premier ordre, on peut remplacer $\mathrm{sn}^2 v$ par $\sin^2\frac{\pi v}{2K}$, où K est l'intégrale complète de première espèce de Legendre pour le module k. Alors

$$\frac{2\alpha}{R} = \sigma + \nu\cos\frac{\pi v}{K},$$

(1) C. DE JANS, *loc. cit.*, § 16.

(2) *Loc. cit.*, § 42 et suiv., *Mem.* (in 8°) *de l'Ac. Roy. de Belg.* (Classe des Sciences), 2e série, t. VII, 1924, § 47 et suiv.

et ceci se ramène, en négligeant les grandeurs du premier ordre, à

$$(155) \qquad \mathrm{R} = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

avec $p = \frac{2\alpha}{\sigma}$, $e = \frac{\nu}{\sigma}$. La distance périhélie étant très grande relativement à α, la variable R peut être assimilée, au degré d'approximation adopté, à un vecteur euclidien. Dans ces conditions, (155) montre qu'en première approximation, *l'orbite est une conique fixe dont le Soleil occupe un foyer;* une ellipse si $\sigma > \nu$, c'est à dire $\sigma > \tau$, une hyperbole si $\sigma < \tau$, une parabole si $\sigma = \tau$.

Cette orbite est décrite suivant la loi des aires. — En effet, au premier ordre près, (146) donne $\frac{ds}{dt} = \frac{c^2}{\mathrm{L}}$, en vertu de quoi il résulte de (145) que

$$\mathrm{R}^2\, d\varphi = \mathrm{K}\, ds = \mathrm{C}\, dt,$$

en posant (1)

$$\mathrm{C} = c^2 \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}.$$

Si $2a$ représente la longueur d'un grand axe d'une orbite *elliptique*, on déduit de (155)

$$(156) \qquad a = \frac{2\alpha\sigma}{\sigma^2 - \nu^2}, \qquad e = \frac{\nu}{\sigma}.$$

Dans ce cas, la formule (154) conduit à la *troisieme loi de Képler.* En s'aidant des relations bien connues qui relient les fonctions de Weierstrass aux séries θ, on parvient à la formule approchée

$$\mathrm{T} = \frac{8\pi\alpha}{c(n\sigma)^{\frac{3}{2}}}\left(1 + \frac{3}{8}\pi\sigma\right),$$

avec $n = 1 - \frac{\nu^2}{\sigma^2} = 1 - e^2$; en première approximation, on a donc

$$\mathrm{T} = \frac{8\pi\alpha}{c(n\sigma)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8\pi\alpha}{c}\left(\frac{\sigma}{\sigma^2 - \nu^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi\alpha}{c}\left(\frac{2a}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}$$

ou

$$\frac{\mathrm{T}^2}{a^3} = \frac{8\pi^2}{\alpha c^2} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le cas d'une particule lumineuse correspond à $\sigma = 0$. La formule (155) se ramène alors à

$$\mathrm{R}\cos\varphi = \frac{2\alpha}{\nu} \qquad \left(\nu = 2\sqrt{\tau}\right).$$

---

(1) *Cf.* TH. DE DONDER, *La Gravifique einsteinienne*, p. 101.

$\frac{\alpha}{R}$ est une grandeur du premier ordre; en la négligeant, (153) montre qu'en première approximation $v = c$. Ainsi, à cette approximation, les rayons lumineux sont des droites décrites à vitesse constante.

La *seconde* approximation consiste à conserver les grandeurs du premier ordre. L'équation de la trajectoire devient assez compliquée; elle est

$$\frac{2\alpha}{R} = \sigma + \nu\cos\varphi + \frac{3}{4}\sigma^2 + \frac{3}{8}\nu^2 + \frac{3}{4}\sigma\nu\varphi\sin\varphi + \nu\left(\xi - \frac{3}{2}\sigma\right)\cos\varphi - \frac{1}{8}\nu^2\cos 2\varphi;$$

toutefois, on en déduit aisément la valeur de la progression du périhélie des planètes. Mais on peut procéder plus directement. On montre sans peine, à l'aide de la formule qui exprime ω_1 par une série θ, que dans le cas que nous considérons la période réelle de la fonction p diffère peu de 2π. En première approximation, on trouve [1]

$$\frac{\omega_1}{\pi} = 1 + \frac{3}{4}\sigma.$$

La fraction de circonférence dont la longitude du périhélie, mesurée dans le plan d'une orbite périodique, s'accroît au cours d'une révolution de l'astre, est donc

$$\frac{\psi}{2\pi} = \frac{3}{4}\sigma \qquad (\psi \equiv 2\omega_1 - 2\pi).$$

En substituant dans cette relation la valeur de σ déduite de (156), on trouve la *formule d'Einstein*

$$\psi = \frac{3\pi\alpha}{a(1-e^2)}.$$

Pour Mercure on obtient, moyennant $\alpha = 2.94$ km, $a = 5.78 \times 10^7$ km, $e = 0.2$,

$$\frac{\psi}{2\pi} = 0{,}795 \,.\, 10^{-7}.$$

En adoptant pour la durée de l'année mercurienne 87.969 jours solaires moyens, on trouve pour l'accroissement susdit 42",8 par siècle, en complet accord avec le nombre calculé par Newcomb d'après les observations astronomiques.

Enfin, la deuxième approximation, grâce à l'analyse de C. de Jans, conduit également à rendre compte de la réflexion de la lumière dans le champ de gravitation du Soleil. En posant $\sigma = 0$ dans l'équation de la trajectoire, celle-ci devient, avec l'approximation précitée,

$$\frac{2\alpha}{R} = \nu\cos\varphi + \frac{1}{8}\nu^2(3 - \cos 2\varphi).$$

---

(1) C. DE JANS, *Mémoires* (in-8°), *Ac. Roy. Belg.* (Classe des Sc.), 1923, § 45.

Mais, R_p désignant la distance périhélie du rayon lumineux, on a

$$\frac{\alpha}{4R_p} = \frac{1}{8}\nu\left(1+\frac{1}{4}\nu\right);$$

donc

$$\frac{R_p}{R} = \cos\varphi + \frac{\alpha}{4R_p}(3-2\cos\varphi-\cos 2\varphi), \tag{157}$$

et cette forme est équivalente à celle sous laquelle A. R. Forsyth a obtenu directement l'équation du rayon (1).

Si δ est la déviation du rayon, pour un observateur à l'infini, on déduit immédiatement de l'équation précédente, aux grandeurs du second ordre près, la formule d'Einstein (2)

$$\delta = \frac{2\alpha}{R_p}.$$

Pour un rayon rasant le bord du Soleil, cette formule donne $\delta = 1'',75$.

Nous nous sommes borné, dans ce qui précède, aux cas des orbites à péricentre, et aux trajectoires circulaires qui sont des limites d'orbites périodiques. Pour la discussion des autres orbites théoriquement possibles, nous devons renvoyer le lecteur aux travaux originaux (3). Remarquons ici que toutes les espèces d'orbites contenues dans l'équation (147) ne sont pas réalisables si nous considérons le champ de Schwarzschild produit par une sphère massique de rayon *quelconque*. Pour pouvoir parler de toutes les orbites, il faut supposer que le centre du champ est occupé par un *point* matériel.

12. La constante de Gauss et la constante d'Einstein. — Dans le champ gravifique externe du Soleil, considérons un corps d'épreuve à l'état de repos, à l'instant considéré; on aura donc, à ce moment, $v^1 = v^2 = v^3 = 0$, $v^4 = 1$.

Utilisons (II, 99); d'où

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\left\{\begin{matrix}4 & 4\\ & 1\end{matrix}\right\}. \tag{158}$$

(1) L'étude directe rigoureuse d'un rayon lumineux dans le champ de Schwarzschild a été faite presque simultanément par A. R. FORSYTH, *Monthly Notices* R. A. S., novembre 1921, et par C. DE JANS, *Mém.* (in-8°) *Ac. Roy. Belg.*, (II), t. VI, 1922. Une équation équivalente à (157) a été obtenue, en suivant une méthode d'approximations successives, par A. S. EDDINGTON (voir *The mathematical Theory of Relativity*, Cambridge 1923, p. 90).

(2) TH. DE DONDER, *Grav. einst.*, p. 105, formule (470).

(3) J. DROSTE, *loc. cit.* — C. DE JANS, *Mém. cités.* Ce dernier a également examiné la stabilité cinétique sur les diverses orbites, au sens de Lord Kelvin et P. G. Tait.

Grâce à (143), on obtient aisément

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{\alpha c^2}{2 R^2}\left(1 - \frac{\alpha}{R}\right). \tag{159}$$

En s'inspirant de la loi de l'attraction universelle newtonienne, on est amené à poser

$$\frac{\alpha c^2}{2} = f.M, \tag{160}$$

en représentant par f *la constante de Gauss*, et par M la masse du Soleil, c'est-à-dire

$$M = \frac{4}{3}.\pi A^3 D, \tag{161}$$

A étant le rayon du Soleil et D la densité ordinaire.

En vue du calcul de α prenons *la masse du Soleil* comme unité de masse, *la distance du Soleil à la Terre* comme unité de longueur et le *jour solaire moyen* comme unité de temps; alors

$$c = \frac{86400}{498,5}, \tag{162}$$

le numérateur étant le nombre de secondes en un jour, et le dénominateur, le nombre de secondes employées par la lumière pour parcourir la distance du Soleil à la Terre. On sait que

$$\log f = 6,4711628_{-10}. \tag{163}$$

Il en résulte que

$$\log \alpha = 2,2944958_{-10}, \tag{163'}$$

donc α est compris entre 10^{-8} et 10^{-7}. La longueur α vaut environ 2,94 kilomètres. Pour déterminer maintenant la constante universelle d'Einstein, à savoir $\varkappa \equiv -\frac{1}{bc}$, (23), reportons-nous à (65); on aura en vertu de (160) :

$$\alpha = \frac{2 f M}{c^2} = \frac{\varkappa c^3}{3} DA^3. \tag{164}$$

Rapprochons la relation précédente de (161); on obtient immédiatement

(165) $$\boxed{\varkappa = \frac{8\pi f}{c^5}.}$$

En vertu de (23), la relation (165) devient

(165′) $$b \equiv -\frac{1}{\varkappa c} \equiv -\frac{c^4}{8\pi f}.$$

Si l'on emploie les unités astronomiques, la valeur absolue de cette constante est de l'ordre de 10^{10}.

La constante k utilisée par Einstein vaut

(166) $$k \equiv c^3 \varkappa \equiv -\frac{c^2}{b} \equiv \frac{8\pi f}{c^2}.$$

13. Tableau des valeurs numériques des constantes :

$$\alpha \equiv [\mathrm{L}] = \frac{\varkappa c^3}{3} \mathrm{DA}^3 = \frac{2 f \mathrm{M}}{c^2} = 2{,}94 \times 10^5 \,\mathrm{cm}$$

[se reporter à (65) et (165)].

Constante f de Gauss :

$$f \equiv [\mathrm{L}^3 \mathrm{T}^{-2} \mathrm{M}^{-1}] = 6{,}675.10^{-8} \frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{sec}^2 \,\mathrm{gr}}$$

[se reporter à (165),

$$f \text{ de Gauss} \equiv \mathrm{C} \text{ de Laue} \equiv k \text{ de Weyl}.$$

$$\varkappa \equiv [\mathrm{L}^{-2} \mathrm{T}^3 \mathrm{M}^{-1}] = -\frac{1}{bc} = \frac{8\pi f}{c^5}$$

[se reporter à (23) et (165)],

$$b \equiv [\mathrm{LT}^{-2} \mathrm{M}] = -\frac{1}{\varkappa c} = -\frac{c^4}{8\pi f} = -4{,}8.10^{47} \frac{\mathrm{cm\text{-}gr}}{\mathrm{sec}^2} \quad (^1)$$

Constante K d'Eintein :

$$\mathrm{K} \equiv [\mathrm{LM}^{-1}] = c^3 \varkappa = \frac{-c^2}{b} = \frac{8\pi f}{c^2} = 1{,}87.10^{-27} \,\mathrm{cm} : \mathrm{gr}.$$

[se reporter à (166) et (165)].

---

(1) La constante b qui figure dans cet exposé vaut le double de celle qui figure dans notre *Gravifique einsteinienne*. Comparer (II, 73) et la formule (130) de notre *Gravifique*.

Vitesse c de la lumière :

$$c \equiv [LT^{-1}] = 3.10^{10} \text{ cm : sec} = \frac{86400}{498,5} \frac{\text{Soleil-Terre}}{\text{jour sol. moyen}}$$

[se reporter à (162)].

Constante a cosmique :

$$a \equiv [L^{-1}T^{-2}M] < \frac{1}{5} \frac{\text{gr}}{\text{cm-sec}^2}.$$

M = masse du Soleil = $1,94 \times 10^{33}$ gr.

$10^6 \times$(distance du Soleil à la Terre) $= 15 \times 10^{18}$ cm = 5 parsecs = 16 années de lumière jour solaire moyen = 86.400 secondes solaires moyennes.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS AUX CHAMPS GRAVIFIQUES ÉLECTROMAGNÉTIQUES AYANT LA SYMÉTRIE SPHÉRIQUE. PROBLÈME ÉLECTROSTATIQUE.

14. Première méthode. Déterminant constant. — Nous avons étudié longuement dans notre Gravifique einsteinienne (¹) et dans les Premiers compléments les problèmes relatifs aux champs électromagnétiques à symétrie sphérique. On y verra traité en détails le problème de la sphère massique électrisée, celui de l'électron de Poincaré et enfin celui de la bulle électrique. Nous ne reprendrons pas ces problèmes ici.

15. Deuxième méthode. Déterminant quelconque (²). — Reportons-nous au paragraphe 8 du premier chapitre et reprenons toutes les relations (99 à 106).

(¹) TH. DE DONDER, *La Gravifique einsteinienne* (*Annales de l'Observatoire Royal de Belgique*) et Paris, Gauthier-Villars, 1921; *voir* Chap. VIII); *Premiers Compléments à la Gravifique einsteinienne* (*Ibid.*, 1922, Compl. V). — NORDSTRÖM, *Verslag Ak. Wetensch. Amsterdam, deel* XXVI, 26 janvier 1918, p. 1204. — Carlotta LONGO, *Il nuovo Cimento*, mai 1918, p. 191 à 211. — W. VAN DEN BERG, *Vraagstukken uit Einstein's gravitatie theorie* (Haarlem, 1920). — VANDER LINDEN. *Bull. Ac. Roy. Belg.*, t. 6, mai 1921.

(²) MAURICE NUYENS, *L'électron à tensions internes* (*Mém.* (in-8°) *Ac. Roy. de Belg.*, t. IX, 1927).

Nous supposerons, les charges étant au repos, que le potentiel vecteur est nul, à savoir

$$(167) \qquad \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0,$$

et nous poserons pour le potentiel scalaire Φ_4

$$(168) \qquad \Phi_4 = \Phi(R).$$

Il en résulte (II, 169) que les composantes $H_{\alpha\beta}$ de la force électrique se réduisent à l'unique composante H_{14} non nulle :

$$(169) \qquad \begin{cases} H_{14} = -H_{41} = -\dfrac{d\Phi}{dR} \\ \text{et, de même,} \\ H^{14} = -H^{41} = \dfrac{1}{f_1 f_4}\dfrac{d\Phi}{dR}. \end{cases}$$

La *densité électrique*, exprimée en variables x_1, x_2, x_3, x_4, est définie par (II, 230)

$$(170) \qquad \rho = \sigma u^4.$$

Lorsqu'on passera de ces variables aux variables R, θ, φ, t (99), cette fonction se transforme en une autre définie par

$$\rho \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(R, \theta, \varphi)},$$

ou encore par

$$\rho R^2$$

si l'on choisit, comme plan équatorial, celui pour lequel $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$.

On devra donc écrire

$$(171) \qquad \sigma u^4 = \rho R^2,$$

où ρ exprime la densité électrique ordinaire.

La densité massique, exprimée en variables x_1, x_2, x_3, x_4, est définie par (II, 121)

$$(172) \qquad D = \frac{N + P_4^4}{c^2},$$

où P_4^4 est la dernière composante du tenseur massique P_α^β.

Cette composante P_4^4 n'étant pas un invariant, il faudra examiner ce qu'elle devient lors du changement de variables (99). Il suffira pour cela d'utiliser la covariance

$$P'^{\beta}_{\alpha} = \sum_i \sum_j P^j_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_j} \qquad (\sigma, \beta, i, j = 1, \ldots, 4).$$

Grâce aux formules précédentes, les 10 équations générales (108) se réduisent aux suivantes :

$$(173) \begin{cases} (a) & -\frac{1}{R^2} + \frac{f_1}{R^2} - \frac{1}{f_4 R} \frac{df_4}{dR} = \varkappa c f_1 P^1_1 + \frac{\varkappa c}{2} \frac{1}{f_4} \left(\frac{d\Phi}{dR}\right)^2, \\ (b) & -\frac{1}{2} \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{f_4} \frac{df_4}{dR}\right) + \frac{1}{4} \frac{1}{f_1 f_4} \frac{df_1}{dR} \frac{df_4}{dR} \\ & \qquad - \frac{1}{4} \frac{1}{f_4^2} \left(\frac{df_4}{dR}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{f_4 R} \frac{df_4}{dR} + \frac{1}{2} \frac{1}{f_1 R} \frac{df_1}{dR} \\ & = \varkappa c f_1 P^2_2 - \frac{\varkappa c}{2} \frac{1}{f_4} \left(\frac{d\Phi}{dR}\right)^2, \\ (c) & \frac{1}{R^2} - \frac{f_1}{R^2} - \frac{1}{f_1 R} \frac{df_1}{dR} = -\varkappa c^3 f_1 D - \frac{\varkappa c}{2} \frac{1}{f_4} \left(\frac{d\Phi}{dR}\right)^2, \end{cases}$$

avec les *conditions*

$$(174) \qquad \boxed{P^\beta_\alpha = P_{\alpha\beta} = 0} \qquad (\alpha \neq \beta).$$

On a encore posé

$$(175) \qquad \varkappa = -\frac{1}{bc}.$$

Remarquons immédiatement qu'en ajoutant (173 a) et (173 c) on peut écrire

$$(176) \qquad \boxed{\frac{1}{f_1} \frac{df_1}{dR} + \frac{1}{f_4} \frac{df_4}{dR} = \varkappa c f_1 R (D c^2 - P^1_1).}$$

En vertu de (II, 49) toutes les composantes du vecteur P_α sont nulles, sauf P_1 qui se réduit à

$$(177) \qquad P_1 \equiv \frac{dP^1_1}{dR} + \frac{2}{R}(P^1_1 - P^2_2) + \frac{1}{2} \frac{1}{f_4} \frac{df_4}{dR}(P^1_1 - P^4_4).$$

L'équation (II, 342) peut donc s'écrire, en vertu de (169), (171), (172), sous la forme suivante :

$$(178) \qquad \boxed{-\frac{1}{2}(D c^2 - P^1_1) \frac{1}{f_4} \frac{df_4}{dR} + \frac{dP^1_1}{dR} + \frac{2}{R}(P^1_1 - P^2_2) - \frac{\rho R^2}{\sqrt{-g}} \frac{d\Phi}{dR} = 0.}$$

Enfin, les quatre *équations maxwelliennes* (II, 176) se réduisent à l'unique équation

$$\boxed{\frac{d}{dR}\left(\frac{R^2}{\sqrt{f_1 f_4}}\frac{d\Phi}{dR}\right) = -\rho R^2.} \tag{179}$$

Le système d'équations différentielles à intégrer est donc formé par les équations (173), (176), (178) et (179). Remarquons cependant que trois seulement des cinq équations (173), (176), (178) sont indépendantes.

Rappelons aussi ce fait intéressant que c'est de l'unique hypothèse de la symétrie sphérique du champ que l'on a pu *déduire* que $P^\beta_\alpha = 0$ pour $\alpha \neq \beta$.

Intégration de l'équation (179). — Appliquons cette équation au cas d'une sphère remplie, ou couverte superficiellement, d'électricité. En intégrant depuis l'origine jusqu'à une distance R, on aura, en supposant $\frac{d\Phi}{dR} = 0$ à l'origine,

$$\frac{d\Phi}{dR} = -\frac{Q(R)\sqrt{f_1 f_4}}{4\pi R^2}, \tag{180}$$

où l'on a posé

$$Q(R) = 4\pi\int_0^R \rho R^2\, dR. \tag{181}$$

Si le rayon R est égal ou supérieur au rayon A de la sphère, Q(R) se réduira à Q(A) et représentera la charge totale de la sphère.

Si la charge est répartie superficiellement, on aura $Q(R) = 0$ pour $R < A$. D'où, en vertu de (180), $\frac{d\Phi}{dR} = 0$ à l'intérieur de cette couche.

En affectant tous les symboles d'indices e et i suivant qu'ils se rapportent à des points situés *à l'extérieur* ou *à l'intérieur*, nous aurons donc, par exemple, dans le cas d'une sphère électrisée superficiellement,

$$\frac{d\Phi_e}{dR_e} = -\frac{Q[f_1 f_4]_e^{\frac{1}{2}}}{4\pi R_e^2}, \qquad \frac{d\Phi_i}{dR_i} = 0. \tag{182}$$

16. Électron à tensions internes (1). — Cet électron est, par défi-

(1) Maurice Nuyens, *L'électron à tensions internes* [*Mém.* (in-8°) *Ac. Roy. Belg.*, t. IX 1927].

nition, constitué par une sphère massique recouverte d'une couche superficielle d'électricité. Nous supposerons qu'il existe *à l'intérieur* de cette sphère des tensions P_α^β dont les composantes, nous l'avons vu (174), se réduisent aux seules composantes P_α^α. A *l'extérieur* de cet électron nous supposerons $D_e = 0$, $\rho_e = 0$, $P_{\alpha e}^\alpha = 0$.

Grâce à ces hypothèses, l'équation (176) fournit l'intégrale

$$f_{1e} f_{4e} = C;$$

si nous imaginons que le champ de cet électron doit tendre à l'infini vers celui de Minkowski, on aura $C = c^2$, d'où

$$(183) \qquad f_{1e} f_{4e} = c^2.$$

En vertu de (II, 142) de (180) et de (183), les composantes du tenseur T_α^β deviennent *à l'extérieur*

$$(184) \quad T_{1e}^1 = -T_{2e}^2 = -T_{3e}^3 = T_{4e}^4 = \frac{Q^2}{32\pi^2 R_e^4}, \qquad T_{\alpha e}^\beta = 0 \qquad (\alpha \neq \beta).$$

Les composantes du même tenseur T_α^β deviennent *à l'intérieur*

$$(185) \qquad T_{1i}^1 = P_1^1, \qquad T_{2i}^2 = P_2^2, \qquad T_{3i}^3 = P_3^3, \qquad T_{4i}^4 = D_i c^2.$$

Nous ferons maintenant sur la constitution de cet électron les deux seules *hypothèses* suivantes :

1° Les composantes $T_{\alpha i}^\alpha$ sont *égales à l'intérieur* de l'électron. D'où l'on déduit

$$(186) \qquad P_{1i}^1 = P_{2i}^2 = P_{3i}^3 = D_i c^2.$$

2° *A la surface*, la composante T_1^1 est *continue* quand on passe de l'extérieur à l'intérieur. On a donc

$$(187) \qquad (T_{1e}^1)_s = (T_{1i}^1)_s.$$

De la première hypothèse, il résulte, en vertu de (178), que les composantes (186) sont *constantes* à l'intérieur de l'électron. De (187), il résulte que cette constante est déterminée par (184) et que l'on a

$$(188) \qquad P_{1i}^1 = P_{2i}^2 = P_{3i}^3 = D_i c^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 A^4}.$$

En vertu de (186) et de (176), on peut dire que le produit $f_1 f_4$ est également constant à l'intérieur de l'électron. Si l'on suppose, en outre, que les potentiels f_1 et f_4 doivent être continus à la surface de séparation, on peut écrire, grâce à (183),

$$(189) \qquad f_{1i} f_{4i} = c^2.$$

L'équation (173 c) peut se mettre sous la forme

$$(190) \qquad \frac{d}{dR_i}\left(\frac{R_i}{f_{1i}}\right) = 1 - \varkappa c^3 D R_i^2.$$

En intégrant cette équation de O jusque R_i et en tenant compte de (188) on trouve ([1])

$$(191) \qquad \boxed{\frac{1}{f_{1i}} = 1 - \frac{\varepsilon^2 R_i^2}{3 A^4}}$$

où l'on a posé

$$(192) \qquad \varepsilon^2 = \frac{c \varkappa Q^2}{32 \pi^2},$$

La valeur du potentiel f_{4i} est alors immédiatement donnée par (189), à savoir

$$(193) \qquad \boxed{f_{4i} = c^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2 R_i^2}{3 A^4}\right).}$$

Remarquons, en passant, qu'au centre de cet électron règne le champ de Minkowski.

Proposons-nous maintenant de chercher le champ extérieur. En vertu de (182), nous avons

$$(194) \qquad \frac{d\Phi_e}{dR_e} = -\frac{Qc}{4\pi R_e^2},$$

ou, en intégrant de R_e à l'infini,

$$(195) \qquad \Phi_e = \frac{Qc}{4\pi R_e};$$

nous avons supposé que $\Phi_e = 0$ à l'infini.

Introduisons (194) dans (173 c); nous obtenons

$$(196) \qquad \frac{d}{dR_e}\left(\frac{R_e}{f_{1e}}\right) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{R_e^2}.$$

En intégrant de A à R_e, nous trouvons

$$(197) \qquad \frac{1}{f_{1e}} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{R_e^2} + \frac{1}{R_e}\left(\frac{A}{f_{1s}} - \frac{\varepsilon^2}{A}\right) - \frac{A}{R_e};$$

Le potentiel f_{4e} est donné par (183).

([1]) Nous avons résolu ce problème en *appliquant* à l'intérieur d'une couche sphérique électrique *le tenseur de Poincaré* donné par (185) et (188). Cette tension est produite ici par la masse qui se trouve à l'intérieur de *l'électron considéré*. [Voir notre *Gravifique einsténienne*, éq. (413).]

Exprimons que les potentiels du δs^2 doivent être continus à la surface de la sphère, de même que leurs dérivées premières.

La continuité de f_2 donne la condition

$$(R_e)_s = (R_i)_s = A. \tag{198}$$

La continuité de f_1 donne

$$\frac{1}{f_{1s}} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{3A^2}. \tag{199}$$

La continuité de f_4 en résulte. Il en est de même de la continuité des dérivées premières de ce même potentiel.

En introduisant (199) dans (197) et en tenant compte de (183), on aura

$$\boxed{\frac{1}{f_{1e}} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{R_e^2} - \frac{4\varepsilon^2}{3AR_e}} \tag{200}$$

et

$$\boxed{f_{4e} = c^2\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{R_e^2} - \frac{4\varepsilon^2}{3AR_e}\right).} \tag{201}$$

Les relations (191) et (193), d'une part, (200) et (201), d'autre part, nous fournissent respectivement les champs intérieur et extérieur de l'électron à tensions internes.

Calcul de la masse de l'électron à tensions internes (1). — Les valeurs de la densité énergétique T_4^4 divisées par c^2 sont :

$$\text{A l'intérieur : } \frac{1}{c^2}T_{4i}^4 = \frac{Q^2}{32\pi^2 A^4 c^2}; \tag{202}$$

$$\text{A l'extérieur : } \frac{1}{c^2}T_{4e}^4 = \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4 c^2}. \tag{203}$$

Nous aurons, en intégrant ces expressions,

$$\left\{\begin{aligned} M_i &= \frac{1}{c^2}\frac{Q^2}{24\pi A}, \\ M_e &= \frac{1}{c^2}\frac{Q^2}{8\pi A}, \end{aligned}\right. \tag{204}$$

(1) MAURICE NUYENS, *Électron à tensions internes* [*Mém.* (in-8°) *Ac. Roy. Belg.*, *loc. cit.*].

où nous avons posé

$$(205) \qquad M_i = 4\pi \int_0^A \frac{T_{4i}^4}{c^2} R_i^2 \, dR_i.$$

$$(206) \qquad M_e = 4\pi \int_A^\infty \frac{T_{4e}^4}{c^2} R_e^2 \, dR_e.$$

Si nous appelons alors *masse totale* de l'électron la somme de ces deux masses, nous trouvons la relation classique de H.-A. Lorentz

$$(207) \qquad \boxed{M = \frac{1}{c^2} \frac{Q^2}{6\pi A}.}$$

Les trois quarts de la masse totale de l'électron se trouvent donc dans le champ gravifique extérieur et un quart à l'intérieur.

L'interprétation physique de cette masse totale est très facile. C'est celle qu'il faut mettre à la place de l'électron, en la répandant uniformément dans un volume identique et sans la couvrir cette fois d'électricité, pour obtenir, *à grande distance*, un champ gravifique, équivalent à celui de l'électron.

Supposons que nous nous trouvions à distance suffisamment grande de l'électron pour que nous puissions négliger le terme en $\frac{1}{R_e^2}$ dans les potentiels f_{4e} et f_{4e} (200) et (201). Nous aurions alors

$$(208) \qquad f_{4e} \sim c^2 \left(1 - \frac{4\varepsilon^2}{3AR_e}\right).$$

En identifiant ce potentiel avec celui dû à une sphère purement massique à répartition uniforme, à savoir (59) :

$$(209) \qquad f_{4e} = c^2 \left(1 - \frac{\varkappa[D]c^3}{3} \frac{A^3}{R_e}\right),$$

on trouve

$$(210) \qquad [D] \sim \frac{Q^2}{8\pi^2 c^2 A^3},$$

et par conséquent, pour la masse d'une sphère de rayon A (1),

$$(211) \qquad [M] \sim \frac{1}{c^2} \frac{Q^2}{6\pi A}.$$

Cette masse est bien identique à celle qui a été trouvée en (207).

(1) TH. DE DONDER, *La Gravifique einsteinienne*, Chap. VIII, éq. (419).

17. Bulle électrique. — Cette bulle est constituee par une surface sphérique purement électrique. A l'intérieur de cette surface, les densités massique et électrique sont nulles, ainsi que les tensions P_α^β.

Il résulte immédiatement de ces hypothèses que

$$f_1 f_4 = \text{const.} \tag{212}$$

aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la bulle.

La continuité des potentiels *à la surface* et l'hypothèse que le champ doit tendre, à l'infini, vers le champ de Minkowski donnent donc

$$\left\{ \begin{aligned} & f_{1e} f_{4e} = c^2, \\ & f_{1i} f_{4i} = c^2. \end{aligned} \right. \tag{213}$$

Problème intérieur. — Si l'on tient compte des hypothèses précédentes et si l'on intègre (173 c) de O à R_i, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & f_{1i} = 1, \\ & f_{4i} = c^2. \end{aligned} \right. \tag{214}$$

Il règne donc à l'intérieur de cette bulle le champ de Minkowski.

Problème extérieur. — Introduisons (182) dans (173 c); nous obtenons, en contractant,

$$\frac{d}{dR_e}\left(\frac{R_e}{f_{1e}}\right) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4\pi R_e^2}. \tag{215}$$

En intégrant depuis A jusque R_e, et en exprimant que ce potentiel doit être continu à la surface de la sphère, on trouve

$$\frac{1}{f_{1e}} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{R_e}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{R_e}\right), \tag{216}$$

d'où, en vertu de (213),

$$f_{4e} = c^2\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{R_e}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{R_e}\right)\right]. \tag{217}$$

Ce résultat est identique à celui que nous avons obtenu par la première méthode (1).

(1) Pour tout ce qui concerne les applications aux Champs gravifiques à symétrie axiale, ainsi qu'au problème des n corps, le lecteur pourra se reporter à l'étude de GEORGES DARMOIS parue dans le *Mémorial des Sciences mathématiques : Les équations de la gravitation einsteinienne* (XXV^e fasc., 1927) et à l'ouvrage de JEAN CHAZY : *La Théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. II, Paris, 1930, sp. page 170).

Nous pouvons nous proposer, comme nous l'avons fait dans le cas de l'électron à tensions internes, de chercher la masse de cette bulle électrique.

Le tenseur T_4^4 a pour valeurs

$$\text{A l'intérieur : } T_{4i}^4 = 0, \tag{218}$$

$$\text{A l'extérieur : } T_{4e}^4 = \frac{Q^2}{32\pi^2 R_e^4}. \tag{219}$$

Nous aurons donc

$$M_i = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^A T_{4i}^4 R_i^2 \, dR_i = 0, \tag{220}$$

$$M_e = \frac{4\pi}{c^2} \int_A^\infty T_{4e}^4 R_e^2 \, dR_e = \frac{1}{c^2} \frac{Q^2}{8\pi A}; \tag{221}$$

d'où la *masse totale*

$$M = M_e + M_i = \frac{1}{c^2} \frac{Q^2}{8\pi A}. \tag{222}$$

CHAPITRE IV.

APPLICATION A LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE (1).

18. Mécanique relativiste des particules ponctuelles électrisées. — Reportons-nous aux équations générales (II, 200) de la mécanique des masses électrisées. Considérons un élément massique-électrique *ponctuel*, défini par τ^m et τ^e (II, 188 et 184). Nous poserons

$$\varepsilon \equiv \frac{\tau^e}{\tau^m}; \tag{223}$$

(1) L'exposé que l'on va lire ici constitue la synthèse de diverses Notes que nous avons publiées depuis 1926 :

C. R., t. 182, 5 juillet 1926, p. 22-24. — *Bull. Ac. Roy. Belg.*, 5e série, t. 12, 3 juillet 1926, p. 490-497. — *C. R.* t. 183, 11 octobre 1926, p. 594-595. — *Bull. Ac. Roy. Belg.*, 5e série, 9 octobre 1926, t. 12, p. 663-672; 5e série, t. 13, 8 janvier 1927, p. 27, et t. 13, 5 février 1927, p. 79. — *C. R.*, t. 184, 1927, p. 439-441. — *Bull. Ac. Roy. Belg.*, 5e série, t. 13, 5 mars 1927, p. 103-113, et t. 13, 2 avril 1927, p. 185-191. — *C. R.*, t. 184, 1927, p. 810-811. — *Bull. Ac. Roy. Belg.*, 5e série, t. 13, 2 août 1927, p. 504-509. — *C. R.*, t. 184, 10 octobre 1927, p. 698-700. — *Bull. Ac. Roy. Belg.*, 5e série, *t.* 13, 5 novembre 1927, p. 693-695; 3 décembre 1927, p. 756-767; t. 14, 3 mars 1928, p. 135-139; 2 juin 1928, p. 307-312.

rappelons (II, 188′ et 184′), que ε est un *invariant* le long d'une ligne d'univers s, décrite par le point massique-électrique considéré. Les équations rappelées ci-dessus deviennent :

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\partial\left(\frac{W^2}{2}+\varepsilon U\right)}{\partial u^\alpha}\right]-\left[\frac{\partial\left(\frac{W^2}{2}+\varepsilon U\right)}{\partial x^\alpha}\right]=0, \tag{224}$$

où

$$U \equiv \sum_\beta \Phi_\beta u^\beta. \tag{225}$$

Introduisons la fonction lagrangienne

$$L \equiv \frac{W^2}{2} + \varepsilon U. \tag{226}$$

Il en résulte les variables hamiltoniennes

$$p_\alpha \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha}\right) = u_\alpha + \varepsilon \Phi_\alpha. \tag{227}$$

En utilisant les variables x_α, p_α, s, la fonction hamiltonienne s'écrira :

$$H = - L + \sum_\alpha p_\alpha u^\alpha. \tag{228}$$

On trouvera en introduisant (227) dans (228)

$$H = \frac{1}{2}. \tag{229}$$

Cet H peut aussi s'écrire :

$$H \equiv \frac{1}{2}\sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta}(p_\alpha - \varepsilon\Phi_\alpha)(p_\beta - \varepsilon\Phi_\beta). \tag{230}$$

Les trajectoires des particules seront alors données par les équations

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{dp_\alpha}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}. \tag{231}$$

Introduisons la fonction jacobienne S, en posant

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}; \tag{232}$$

nous aurons, grâce à (230), l'équation de Jacobi :

$$(233) \qquad \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\alpha} - \varepsilon \Phi_\alpha \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\beta} - \varepsilon \Phi_\beta \right) = 0.$$

En vertu de (229) et de (230), on aura

$$(234) \qquad S = -\frac{1}{2} s + S_0,$$

où S_0 est une fonction des quatre variables $x^1, \ldots, x^4$.

L'équation (233) pourra s'écrire ([1]), en tenant compte de (234),

$$(235) \qquad \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\alpha} - \varepsilon \Phi_\alpha \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\beta} - \varepsilon \Phi_\beta \right) - 1 = 0.$$

Posons

$$(236) \qquad \boxed{kS = \log \psi,}$$

où k est une constante universelle dont la valeur sera donnée plus loin. On aura donc

$$(237) \qquad \psi = -\frac{2}{k} \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

et

$$(238) \qquad \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial s}}.$$

L'équation jacobienne (235) devient maintenant

$$(239) \qquad J \equiv \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + \varepsilon \Phi_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x^\beta} + \varepsilon \Phi_\beta \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 = 0.$$

19. L'équation relativiste de la mécanique ondulatoire. — Étudions l'équation *variationnelle* suivante ([2]) :

$$(240) \qquad \frac{\delta (J \sqrt{g})}{\delta \psi} = 0,$$

([1]) TH. DE DONDER, *Association française pour l'Avancement des Sciences* (Congrès de juillet, 1925).

([2]) TH. DE DONDER et F. H. VAN DEN DUNGEN, *La quantification déduite de la gravifique einsteinienne* (*C. R.*, t. 182, 5 juillet, 1926).

où g représente le déterminant des $g_{\alpha\beta}$ et où

(241) $$\frac{\delta}{\delta\psi} \equiv \frac{\partial}{\partial\psi} - \sum_{\sigma=0}^{4} \frac{d}{dx^\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial \frac{\partial\psi}{\partial x^\sigma}}\right).$$

L'équation (240) explicitée donnera (¹)

(242) $$\boxed{\Box\psi - 2k\varepsilon\sum_\alpha \Phi^\alpha \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} - k\varepsilon\, D\psi + (k\varepsilon)^2\left(F - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\psi = 0,}$$

où l'on a posé

(243) $$\Box\psi \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{g}\sum_\beta g^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x^\beta}\right),$$

(244) $$D \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{g}\sum_\beta g^{\alpha\beta}\Phi_\beta\right),$$

(245) $$F \equiv \sum_\alpha \Phi_\alpha \Phi^\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, 4).$$

La constante universelle k est donnée par (²)

(246) $$-k \equiv 2i\pi\frac{(m_0 c^2)}{hc},$$

où m_0 est la masse de l'électron *au repos*. **On aura, en vertu de (246)**

(247) $$\frac{2i\pi}{-k} = 2{,}42.10^{-2}\,\text{Å}.$$

Dans le second membre de (247) figure la longueur d'onde correspondant à la transformation du contenu énergétique $m_0 c^2$ d'un électron en un quantum lumineux.

Exemples. — Nous assimilerons, en première approximation, le champ gravifique au champ de *Minkowski*.

On aura donc

(248) $$\Box\psi \equiv -\left[\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right],$$

où

(249) $$\Delta\psi \equiv \sum_i \frac{\partial^2\psi}{(\partial x_i)^2} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

(¹) Th. De Donder, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, 5ᵉ série, t. 13, 5 février 1927.
(²) Th. De Donder, *C. R. Ac. Sc.*, Paris, 24 mars 1930.

Si nous introduisons le potentiel vecteur (A_1, A_2, A_3) et le potentiel scalaire V, on aura, en coordonnées rectangulaires dextrogyres,

$$\Phi_i = -A_i \quad \text{et} \quad \Phi_4 = cV; \tag{250}$$

d'où

$$\Phi^i = A_i \quad \text{et} \quad \Phi^4 = \frac{1}{c} V \quad (i = 1, 2, 3). \tag{251}$$

L'équation de quantification (242) prendra, si $D = 0$, la forme (¹)

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - 4i\pi\frac{e_0}{m_0}\frac{m_0}{hc}\left(\sum_i A_i \frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \frac{V}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - 4\pi^2\left(\frac{e_0}{m_0}\right)^2\left(\frac{m_0}{hc}\right)^2\left[\sum_i A_i^2 - V^2 + \left(\frac{m_0 c^2}{e_0}\right)^2\right]\psi = 0. \tag{252}$$

Pour obtenir une équation moins compliquée, posons (¹)

$$\psi \equiv \xi e^{-2i\pi\frac{m_0 c^2}{h}t} \tag{253}$$

et considérons, avec O. Klein, les expressions $\frac{h}{2i\pi}\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $e_0 V\xi$ et $e_0 A\xi$ comme des infiniment petits du premier ordre par rapport à $m_0 c^2\xi$; d'où

$$\Delta\xi + 4i\pi\frac{e_0 m_0}{h e_0}\frac{\partial\xi}{\partial t} - 4i\pi\frac{m_0}{hc}\frac{e_0}{m_0}\sum_i A_i\frac{\partial\xi}{\partial x^i} - \frac{8\pi e_0^2}{h^2}\frac{m_0}{e_0}V\xi = 0. \tag{254}$$

Reprenons l'équation générale (242). Pour obtenir *l'equation de L. de Broglie-Schrödinger*, supposons que le système considéré soit *stationnaire*. Nous pouvons alors poser, avec O. Klein,

$$\psi \equiv \theta e^{-\frac{2\pi i}{h}Et} \tag{255}$$

où θ ne dépend plus de t et où E est une constante (²).

Substituons dans l'équation générale (242); d'où, en vertu de (250) et de (251),

$$-\Delta\psi - \frac{4i\pi}{h}(E - e_0 V)\sum g^{i4}\frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{-g}\,g^{i4}) - \frac{4i\pi e_0}{ch}\sum_i\sum_j g^{ij}A_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + \frac{2i\pi e_0}{ch}\psi X = 0 \tag{256}$$

(¹) O. Klein, *Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenz prinzips* (*Z. f. Ph.*, Bd 41, Helt 6/7, 1927, p. 407-442).

(²) La valeur de $(-Ec)$ est donnée par le second membre de (II, 269).

où l'on a posé

$$X \equiv D + \frac{2i\pi e_0}{ch}\mathcal{F} + \frac{2i\pi e_0}{ch}\left[\frac{c^2 g^{44}}{e_0^2}(E - e_0 V)^2 - \frac{c^4 m_0^2}{e^2}\right] + \frac{4i\pi}{h}(E - e_0 V)\sum_i g^{i4} A_i - \frac{cE}{e_0}\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\sqrt{-g}\, g^{\alpha 4})$$

$$(\alpha = 1, \ldots, 4;\ i, j = 1, 2, 3).$$

On a posé, conformément à (249),

(257) $$\Delta\psi = \frac{-1}{\sqrt{-g}}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{-g}\sum_j g^{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right),$$

(258) $$\mathcal{F} = \sum_i\sum_j g^{ij} A_i A_j.$$

On a également tenu compte de la relation

(259) $$\varepsilon = \frac{\tau_e}{\tau_m} = \frac{e_0}{c^2 m_0}.$$

Dans le cas particulier où $g_{i4} = g^{i4} = 0$ et où $A_i = 0$, cette équation se réduit à

(260) $$\Delta\psi + \frac{4\pi^2}{h^2}[g^{44}(E - e_0 V)^2 - c^2 m_0^2]\psi = 0.$$

On a tenu compte également de l'équation complémentaire de Maxwell $D = 0$. Prenons maintenant le cas encore plus particulier où le champ gravifique se réduit à celui de Minkowski. L'équation précédente devient alors

(261) $$\Delta\psi + \frac{4\pi^2}{c^2 h^2}[(E - e_0 V)^2 - (c^2 m_0)^2]\psi = 0,$$

où $\Delta\psi$ se réduit à (249).

L'équation (261) peut aussi s'écrire sous la forme

(262) $$\Delta\psi + \frac{4\pi^2}{c^2 h^2}[(\mathcal{E} - e_0 V)^2 + 2(\mathcal{E} - e_0 V)c^2 m_0]\psi = 0,$$

où l'on a posé

(263) $$\mathcal{E} = E - c^2 m_0.$$

Approximativement, l'équation précédente pourra s'écrire

(264) $$\Delta\psi + \frac{8\pi^2}{c^2 h^2}c^2 m_0(\mathcal{E} - e_0 V)\psi = 0.$$

Retournons à l'équation (256). Dans le cas où le champ se réduit à celui de

Minkowski, l'équation pourra s'écrire sous la forme

$$(265)\qquad -\frac{h^2}{4\pi^2}\Delta\theta - 2\frac{h}{2\pi i}\,\frac{e_0}{c}(\mathrm{A}\ \mathrm{grad}\ \theta) + \left[m_0^2 c^2 + \frac{e_0^2}{c^2}\mathrm{A}^2 - \frac{1}{c^2}(h\mathrm{T} + e_0\mathrm{V})^2\right]\theta = 0,$$

où l'on a posé

$$(266)\qquad \mathrm{T} = -\frac{\mathrm{E}}{h}.$$

Cette équation est identique à l'équation (11) de Klein [1]. Pour passer de nos notations à celles de Klein, on remplacera θ par ξ, e_0 par $(-\varepsilon)$, m_0 par μ. et A par un grand A gothique.

20. Univers à cinq dimensions. — Retournons à l'équation (239) et posons, avec L. Rosenfeld [2],

$$(267)\qquad x^0 = -\frac{\alpha}{2\varepsilon}s,$$

où α est une constante universelle. On peut alors écrire (239) sous la forme

$$(268)\qquad 4\mathrm{J} \equiv \sum_{\mu=0}^{4}\sum_{\nu=0}^{4}\gamma^{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} - \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\xi\alpha^2}\right)k_*^2\psi^2 = 0,$$

où l'on a posé

$$(269)\qquad \begin{cases} \gamma^{ij} \equiv g^{ij}, \\ \gamma^{0i} \equiv \gamma^{i0} \equiv -\alpha\Phi^i \\ \gamma^{00} \equiv \mathrm{F}\alpha^2 - \dfrac{1}{\xi} \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, 4)$$

et

$$(270)\qquad k_* = \varepsilon k.$$

On trouve aisément

$$(271)\qquad \begin{cases} \gamma_{ij} \equiv g_{ij} - \xi\alpha^2\Phi_i\Phi_j, \\ \gamma_{0i} \equiv \gamma_{i0} \equiv -\xi\alpha\Phi_i, \\ \gamma_{00} \equiv -\xi. \end{cases}$$

Il résulte immédiatement de (236) que

$$(272)\qquad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{k\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} = -\frac{1}{k\bar\psi}\frac{\partial\bar\psi}{\partial x_\mu}.$$

---

(1) O. Klein, *loc. cit.*

(2) L. Rosenfeld, *Bull. Ac. Roy. de Belg.*, 5e série, t. XIII, n° 6, 3 mai 1927.

Le tiret au-dessus de ψ désigne que l'on considère l'imaginaire conjuguée. L'équation de Jacobi devient, en tenant compte de la relation précédente,

$$\sum_{\mu=0}^{4}\sum_{\nu=0}^{4}\gamma^{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\nu}+k_*^2\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\xi\alpha^2}\right)\psi\bar{\psi}=0. \tag{273}$$

Ce résultat a amené L. Rosenfeld à adopter *la fonction caractéristique* (1) (non nulle)

$$L=\sum_{\mu}\sum_{\nu}\gamma^{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\nu}+k_*^2\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\xi\alpha^2}\right)\psi\bar{\psi}. \tag{274}$$

Pour plus de généralité, on ne supposera plus, comme précédemment (236) que l'amplitude de ψ est constante (égale à l'unité), mais une fonction *complexe*. La fonction L est la généralisation d'une fonction analogue adoptée par Gordon (2) et Schrödinger (3).

Si l'on considère les fonctions ψ et $\bar{\psi}$ comme indépendantes et si l'on annule les dérivées variationnelles de $L\sqrt{-g}$ par rapport à ces fonctions, on obtient *les équations quantiques*

$$\sum_{\mu=0}^{4}\sum_{\nu=0}^{4}\gamma^{\mu\nu}\psi_{.\mu\nu}-k_*^2\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\xi\alpha^2}\right)\psi=0, \tag{275}$$

$$\sum_{\mu=0}^{4}\sum_{\nu=0}^{4}\gamma^{\mu\nu}\bar{\psi}_{.\mu\nu}-k_*^2\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\xi\alpha^2}\right)\bar{\psi}=0. \tag{276}$$

On vérifie facilement que ces équations sont identiques à l'équation (242) que nous avons trouvée précédemment.

Principe variationnel. — Nous allons montrer que *les équations quantiques* (275) *et* (276), *les équations de gravitation et les équations de Maxwell sont réunies dans le principe variationnel*

$$\boxed{\delta\int(\Gamma+\xi\alpha^2 L)\sqrt{-g}\,dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4=0.} \tag{277}$$

(1) L. ROSENFELD, *Loc. cit.*
(2) GORDON, *Z. f. Ph.*, Bd 40, 1927, p. 117 et suiv.
(3) SCHRÖDINGER, *Ann. der Ph.*, Bd 82, 1927, p. 265 et suiv.

On a posé

$$\Gamma \equiv \gamma^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}, \tag{278}$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\begin{Bmatrix}\mu & \rho \\ & \rho\end{Bmatrix}_5 - \frac{\partial}{\partial x^\rho}\begin{Bmatrix}\mu & \nu \\ & \rho\end{Bmatrix}_5 + \begin{Bmatrix}\mu & \rho \\ & \sigma\end{Bmatrix}_5\begin{Bmatrix}\nu & \sigma \\ & \rho\end{Bmatrix}_5 - \begin{Bmatrix}\mu & \nu \\ & \rho\end{Bmatrix}_5\begin{Bmatrix}\rho & \sigma \\ & \sigma\end{Bmatrix}_5, \tag{279}$$

$$\begin{Bmatrix}\mu & \rho \\ & \sigma\end{Bmatrix}_5 = \frac{1}{2}\sum_\tau \gamma^{\sigma\tau}\left(\frac{\partial\gamma_{\tau\mu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\gamma_{\mu\rho}}{\partial x^\tau}\right). \tag{280'}$$

Nous venons de montrer que les équations (275) et (276) résultent de

$$\frac{\delta L\sqrt{-g}}{\delta\psi} = 0, \qquad \frac{\delta L\sqrt{-g}}{\delta\overline{\psi}} = 0 \tag{281}$$

ou, ce qui revient au même, de

$$\frac{\delta(\Gamma + \xi\alpha^2 L)\sqrt{-g}}{\delta\psi} = 0, \qquad \frac{\delta(\Gamma + \xi\alpha^2 L)\sqrt{-g}}{\delta\overline{\psi}} = 0. \tag{282}$$

Il reste à calculer les dérivées variationnelles par rapport aux $\gamma_{\mu\nu}$. Remarquons immédiatement que, d'après (271), $\delta\gamma_{00} \equiv 0$. La quinzième équation est donc identiquement satisfaite. On trouve, pour les 14 premières, en retournant à (269) et (271),

$$G^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}G = -\frac{\xi\alpha^2}{2}(S^{mn} + T^{mn}); \tag{283}$$

$$\sum_j \frac{\partial\mathfrak{H}^{ij}}{\partial x_j} = \alpha\sqrt{-g}\,T_0^i \qquad (m, n, i = 1, 2, 3, 4). \tag{284}$$

Dans ces équations G^{mn} et G représentent respectivement les composantes covariantes du tenseur de Riemann (II, 13) et la courbure (II, 12). On a posé

$$S_{mn} \equiv \frac{1}{4}g_{mn}\sum_i\sum_j H_{ij}H^{ij} - \sum_l H_{ml}H_n^l. \tag{285}$$

Ainsi que

$$T_{\mu\nu} \equiv \psi_{\cdot\mu}\overline{\psi}_{\cdot\nu} + \overline{\psi}_{\cdot\mu}\psi_{\cdot\nu} - \gamma_{\mu\nu}L, \tag{286}$$

$$H_{ij} \equiv \Phi_{i.j} - \Phi_{j.i}. \tag{287}$$

Nous poserons, en outre,

$$\chi \doteq \frac{\xi\alpha^2}{2}. \tag{288}$$

On voit que cette constante χ, indéterminée jusqu'ici, n'est autre que la constante de gravitation d'Einstein que nous avons désignée par $-\frac{1}{b}$ (II, 284) et dont nous avons donné la valeur numérique au paragraphe 13.

Principe de correspondance [1]. — *Identifions* les quatre équations (284) avec les quatre équations (II, 324),

$$\sum_j \frac{\partial \mathfrak{H}^{ij}}{\partial x_j} = \sigma u^i + Q^i, \tag{289}$$

où Q^i sont les composantes contravariantes du courant *quantique* [2]. On trouve ainsi les conditions :

$$\alpha \sqrt{-g}\, T^{i\cdot}_{0} = \sigma u^i + Q^i \tag{290}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sigma u^i + Q^i) = -k_*^2 \frac{c}{e} \sum_j \left[\frac{-h}{2i\pi} g^{ij} (\psi \bar{\psi}_{.j} - \bar{\psi} \psi_{.j}) - 2\frac{e}{c} \Phi^j \psi \bar{\psi} \right]} \tag{291}$$

$$(i, j = 1, 2, 3, 4).$$

C'est le *principe de correspondance relatif au champ électromagnétique* [3]. Passons maintenant à la recherche du principe de correspondance relatif au champ gravifique. Utilisons la même méthode : *identifions* les équations (283) avec les équations (II, 336) du champ gravifique.

Notre principe fournit donc, en outre, les 10 conditions

$$\boxed{N u^i u^j + P^{ij} = \sum_\alpha \sum_\beta \gamma^{i\alpha} \gamma^{j\beta} (\psi_{.\alpha} \bar{\psi}_{.\beta} + \bar{\psi}_{.\alpha} \psi_{.\beta}) - \gamma^{ij} L,} \tag{292}$$

où L est donné par (274).

---

(1) TH. DE DONDER, *Bull. Ac. Roy. de Belg.*, 5e série, t. 13, nos 8-9, 2 août, 1927, p. 504-509.

(2) Nous avons été amené à introduire un courant *quantique particulier*, dérivant d'un potentiel de courant, en tâchant de mettre les équations de R. Ferrier sous la forme relativistique (*Revue générale de l'Électricité*, t. XXI, 11 juin 1927, p. 930). Ce courant quantique particulier peut s'identifier avec le terme complémentaire introduit par L. de Broglie dans les équations de Maxwell-Lorentz (*voir* page 70 de l'Ouvrage *Ondes et Mouvements* de L. de Broglie, Paris, 1926).

(3) O. KLEIN, *Z. f. Ph.*, Bd 41, Heft 6/7, 1927 [comparer avec éq. (18), p. 414].

C'est le principe de correspondance relatif au champ gravifique. — En résumé, le principe de correspondance défini par (291) et (292) fournit une application nouvelle de la gravifique. Les équations (291) et (292') jointes aux deux équations de de Broglie-Schrödinger et aux 14 équations de la gravifique sont les équations fondamentales de la *mécanique gravifique ondulatoire.*

Théorème de L. Rosenfeld (¹). — Ce théorème peut s'énoncer comme suit :

Si les valeurs de

$$(293) \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sigma u^i + Q^i) \qquad \text{et} \qquad (N u^i u^j + P^{hj}),$$

exprimées, grâce à notre principe de correspondance (291) et (292), en fonction de ψ, sont substituées dans les équations (II, 326) et (II, 319), à savoir :

$$(294) \qquad \sum_i \frac{\partial(\sigma u^i + Q^i)}{\partial x^i} = 0$$

et

$$(295) \qquad \mathfrak{F}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

régissant la conservation du courant électrique et quantique, et celle de l'impulsion et de l'énergie, on *obtient, en vertu des équations quantiques* (275) *et* (276), des *identités.*

La démonstration de ce théorème se fait aisément grâce aux identités fondamentales (²) de la Gravifique appliquées à l'invariant $L\sqrt{-g}$.

21. Mécanique relativiste des systèmes continus électrisés, ayant un potentiel de tensions internes. — *Définition des systèmes continus.* — Considérons un système holonome de f degrés de liberté et posons (³)

$$(296) \qquad x_\alpha = x_\alpha(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4; q_1, \ldots, q_f) \qquad (\alpha = 1, \ldots, 4),$$

(¹) L. Rosenfeld, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, 5ᵉ série, t. XIII, 2 août 1927, p. 573-579.

(²) Th. De Donder, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, 5ᵉ série, t. XI, 5 avril 1924, p. 188 201.

(³) Th. De Donder, *J. of. math. and Phys.*, vol. V, nº 4, juin 1926; *C. R. Acad. Sc.* t. 182, 7 juin 1926, p. 1380-1382.

x_α définissant un événement dans un système de référence donné et x'_α le même événement dans un autre système de référence tel que les x'_α restent constants quand le temps propre s augmente de ds. Pour cette raison $dx'_\alpha = 0$ et $q_1, \ldots, q_f$ sont des fonctions de s.

Posons, pour la vitesse contravariante généralisée,

$$\varkappa^\varphi = \frac{dq^\varphi}{ds} \qquad (\varphi = 1, \ldots, f) \tag{297}$$

et introduisons, d'autre part, la variation δ' telle que $\delta' q_1 = \ldots = \delta' q_f = 0$.

Les $\delta' x_1, \ldots, \delta' x_4$ sont, en général, différents de zéro. Nous avons

$$W^2 = \sum_\varphi \sum_\psi g^*_{\varphi\psi} \varkappa^\varphi \varkappa^\psi = 1 \qquad (\varphi, \psi = 1, \ldots, f), \tag{298}$$

où

$$g^*_{\varphi\psi} = \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\varphi} \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\psi} g_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, 4). \tag{299}$$

On aura, d'autre part,

$$U = \sum_\varphi \Phi^*_\varphi \varkappa^\varphi, \tag{300}$$

où

$$\Phi^*_\varphi = \sum_\alpha \Phi_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\varphi}. \tag{301}$$

Posons

$$K^{(m)}_\varphi \equiv \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial W}{\partial \varkappa^\varphi}\right) - \frac{\partial W}{\partial q^\varphi} \tag{302}$$

et

$$K^{(e)}_\varphi \equiv \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial \varkappa^\varphi}\right) - \frac{\partial U}{\partial q^\varphi}. \tag{303}$$

On trouve facilement que

$$K^{(m)}_\varphi \equiv \sum_\alpha \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial W}{\partial u^\alpha}\right) - \frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right] \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\varphi}, \tag{304}$$

et

$$K^{(e)}_\varphi \equiv \sum_\alpha \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial u^\alpha}\right) - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right] \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\varphi}. \tag{305}$$

Systèmes continus à tensions internes. — Reportons-nous aux équations (II, 340). Pour qu'il y ait *conservation* de la masse définie par $\mathfrak{M}$, il faut et il suffit, d'après (II, 339), que

$$\sum_\alpha \mathfrak{T}_\alpha u^\alpha = 0; \tag{306}$$

nous admettrons que l'équation précédente est satisfaite par le système continu considéré. Admettons, en outre, que les $\mathfrak{T}_\alpha$ dérivent *d'une fonction des tensions* A et que l'on ait

$$\boxed{\mathfrak{T}_\alpha = \mathfrak{M}\frac{\partial A}{\partial x_\alpha}.} \tag{307}$$

La fonction [1] A dépend de $x_1, \ldots, x_4$, et non de $u^1, \ldots, u^4$. Nous disons que A est le *potentiel des tensions internes* du système.

Rapprochons (306) et (307); d'où

$$\frac{dA}{ds} = 0; \tag{308}$$

donc A est un invariant du mouvement du système.

Par des calculs analogues à ceux développés au paragraphe 18 on est donc amené à écrire pour la fonction lagrangienne régissant le mouvement de ces systèmes :

$$L \equiv \frac{1}{\tau_m}\int\left[\left(\frac{1}{2}W^2 + A\right)\delta\tau_m + U\,\delta\tau_e\right] \tag{309}$$

où $\delta\tau_m$ et $\delta\tau_e$ ont été définis en (II, 188) et (II, 184). On a posé

$$\tau_m \equiv \int \delta\tau_m; \tag{310}$$

posons de même

$$\tau_e \equiv \int \delta\tau_e. \tag{311}$$

On a, en vertu de (310) et (311) d'une part, et de (II, 339) d'autre part, les équations

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x^\varphi}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_\varphi}\right) = 0. \tag{312}$$

Introduisons les variables canoniques

$$p_\varphi = \left(\frac{\partial L}{\partial x^\varphi}\right). \tag{313}$$

---

[1] Il serait aisé d'étendre ce cas à celui-ci où A serait une fonction *complexe* de $x_1, \ldots, x_4$.

En effectuant la dérivation, on aura, (298) et (300),

$$p_\varphi = \varkappa_\varphi + \varepsilon Q_\varphi, \tag{314}$$

où l'on a posé

$$\tau_e Q_\varphi \equiv \int \Phi_\varphi^\star \, \delta\tau_e; \tag{315}$$

nous poserons de même

$$\tau_m P_{\varphi\psi} = \int g_{\varphi\psi}^\star \, \delta\tau_m. \tag{316}$$

La fonction hamiltonienne H est définie par

$$H \equiv -L + \sum_\varphi p_\varphi \varkappa^\varphi; \tag{317}$$

elle peut s'écrire, en utilisant le théorème d'Euler relatif aux fonctions homogènes

$$H = \frac{1}{2} W^2 - A \tag{318}$$

ou encore, en vertu de (314) et (316),

$$H = \frac{1}{2} \sum_\varphi \sum_\psi P^{\varphi\psi} (p_\varphi - \varepsilon Q_\varphi)(p_\psi - \varepsilon Q_\psi) - A. \tag{319}$$

On aperçoit, en comparant cette fonction hamiltonienne à celle définie en (230), le terme supplémentaire $-$ A. On aura donc l'équation jacobienne

$$\frac{\partial S}{\partial s} + \overline{H} = 0, \tag{320}$$

où $\overline{H}$ représente H après remplacement des p_φ par $\dfrac{\partial S}{\partial q_\varphi}$.

On aura donc

$$\frac{\partial S}{\partial s} = -H = \left(-\frac{1}{2} + A\right); \tag{321}$$

d'où, en intégrant,

$$S = \left(-\frac{1}{2} + A\right) s + S_0, \tag{322}$$

où S_0 est une fonction (encore arbitraire) de $q_1, \ldots, q_f$ seulement, donc indépendante de s.

En vertu de (321), l'équation de Jacobi (320) pourra s'écrire sous la forme

$$(323)\qquad [S] \equiv \sum_{\varphi}\sum_{\psi} P^{\varphi\psi}\left(\frac{\partial S}{\partial q_\varphi} - \varepsilon Q_\varphi\right)\left(\frac{\partial S}{\partial q_\psi} - \varepsilon Q_\psi\right) - 1 = 0,$$

qui est identique à (235) des systèmes ponctuels. Substituons (322) dans (323); d'où

$$(324)\qquad \sum_{\varphi}\sum_{\psi} P^{\varphi\psi}\left[\frac{\partial S_0}{\partial q_\varphi} - \varepsilon Q_\varphi\right]\left[\frac{\partial S_0}{\partial q_\psi} - \varepsilon Q_\varphi\right]$$
$$+ 2s\sum_{\varphi}\sum_{\psi} P^{\varphi\psi}\left[\frac{\partial S_0}{\partial q_\varphi} - \varepsilon Q_\varphi\right]\frac{\partial A}{\partial q_\psi} + s^2\sum_{\varphi}\sum_{\psi} P^{\varphi\psi}\frac{\partial A}{\partial q_\varphi}\frac{\partial A}{\partial q_\psi} - 1 = 0.$$

Retournons à (308); nous aurons successivement

$$(325)\qquad 0 = \frac{dA}{ds} = \sum_{\varphi}\frac{\partial A}{\partial q_\varphi}x^{\varphi} = \sum_{\varphi}\sum_{\psi} P^{\varphi\psi}\left[\frac{\partial S}{\partial q_\varphi} - \varepsilon Q_\varphi\right]\frac{\partial A}{\partial q_\psi}$$
$$= \sum_{\varphi}\sum_{\psi} P^{\varphi\psi}\left[\frac{\partial S_0}{\partial q_\varphi} - \varepsilon Q_\varphi\right]\frac{\partial A}{\partial q_\psi} + s\sum_{\varphi}\sum_{\psi} P^{\varphi\psi}\frac{\partial A}{\partial q_\varphi}\frac{\partial A}{\partial q_\psi}.$$

Remarquons que les doubles sommes qui figurent dans le dernier membre de (325) sont indépendantes de s; on aura, à la fois,

$$(326)\qquad \sum_{\varphi}\sum_{\psi} P^{\varphi\psi}\frac{\partial A}{\partial q_\varphi}\frac{\partial A}{\partial q_\psi} = 0$$

et

$$(327)\qquad \sum_{\varphi}\sum_{\psi}\left[\frac{\partial S_0}{\partial q_\varphi} - \varepsilon Q_\varphi\right]\frac{\partial A}{\partial q_\psi} = 0.$$

En vertu de (326) et (327), l'équation (324) devient *l'équation jacobienne*

$$(328)\qquad [S_0] \equiv \sum_{\varphi}\sum_{\psi} P^{\varphi\psi}\left[\frac{\partial S_0}{\partial q_\varphi} - \varepsilon Q_\varphi\right]\left[\frac{\partial S_0}{\partial q_\psi} - \varepsilon Q_\psi\right] - 1 = 0,$$

qui régit nos *systèmes continus à tensions internes.*

L'équation fondamentale de quantification déduite de la gravifique einsteinienne. — Le spectre étant supposé *permanent*, il devra en être de même de la source lumineuse, et l'on aura, par définition,

$$(329)\qquad \boxed{\frac{d}{ds}\int \sqrt{-P}\,\delta q_1 \ldots \delta q_f = 0,}$$

c'est-à-dire

(330) $$\sum_{\varphi} \frac{\partial(\sqrt{-P}\,\varkappa^{\varphi})}{\partial q_{\varphi}} = 0.$$

où P est le déterminant des $P_{\varphi\psi}$.

En tenant compte de

(331) $$p_{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial q_{\varphi}},$$

on aura

(332) $$\sum_{\varphi} \frac{\partial\left(\sqrt{-P}\sum_{\psi} P^{\varphi\psi}\frac{\partial S}{\partial q_{\psi}}\right)}{\partial q_{\varphi}} - \varepsilon \sum_{\varphi} \frac{\partial(\sqrt{-P}\,Q^{\varphi})}{\partial q_{\varphi}} = 0,$$

où l'on a posé

(333) $$\sum_{\varphi} P^{\psi\varphi} p_{\psi} = \varkappa^{\varphi} + \varepsilon Q^{\varphi}.$$

La dernière somme est nulle, en vertu de *l'équation complémentaire* (généralisée) de Maxwell, c'est-à-dire

(334) $$\sum_{\varphi} \frac{\partial(\sqrt{-P}\,Q^{\varphi})}{\partial q_{\varphi}} = 0.$$

Donc, l'équation (330), définissant les sources permanentes, devient

(335) $$\square S = 0.$$

Substituons dans (335) l'expression (322) de S; d'où

(336) $$\square S_0 + s\,\square A = 0.$$

Ici encore, les deux dalembertiens $\square$ ne dépendent que de $q_1, \ldots, q_f$; autrement dit, ils sont indépendants de s; on aura donc, à la fois,

(337) $$\square S_0 = 0$$

et

(338) $$\square A = 0.$$

Considérons l'équation

(339) $$\square S_0 + k[S_0] = 0$$

qui résume en une seule les deux équations fondamentales (337) et (328). La quantité k est donnée en (246).

Effectuons maintenant le changement de fonction

$$\boxed{\psi = \mathrm{A}\, e^{k\mathrm{S}_0}.} \tag{340}$$

En vertu de (326) et de (327) le résultat de ce changement de fonction devient

$$\boxed{\square\psi - 2(k\varepsilon)\sum_{\varphi=1}^{f} \mathrm{Q}^{\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial q_{\varphi}} + (k\varepsilon)^2\left[\mathrm{Q} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right]\psi = 0,} \tag{341}$$

où

$$\mathrm{Q} = \sum_{\varphi} \mathrm{Q}_{\varphi}\mathrm{Q}^{\varphi}. \tag{342}$$

C'est l'équation de la quantification de nos systèmes continus à tensions internes.

Remarquons que cette équation de quantification des sytèmes continus est identique à celle que nous avons obtenue dans le cas des systèmes ponctuels. *On voit que* A *dans* (340), c'est-à-dire *le module ou l'amplitude de* ψ, *est identique à notre potentiel des tensions internes.*

Posons

$$[\mathrm{A}]_0 \equiv \sum_{\varphi}\sum_{\psi} \mathrm{P}^{\varphi\psi}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q_{\varphi}}\,\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q_{\psi}}. \tag{343}$$

Alors les équations (338) et (343) pourront être réunies en l'*unique* équation

$$\square\mathrm{A} + k_0[\mathrm{A}]_0 = 0, \tag{344}$$

où k_0 est une quantité imaginaire pure.

Posons

$$\psi_0 = e^{k_0\mathrm{A}}, \tag{345}$$

l'équation (344) devient

$$\square\psi_0 = 0. \tag{346}$$

C'est l'équation de quantification de l'amplitude A de la fonction fondamentale ψ.

22. Application à la structure fine spectrale dans le champ gravifique du Soleil (¹). — Considérons dans le champ gravifique du Soleil, un électron vibrant dans un champ électrostatique. Par un changement de variable R, ce champ pourra s'écrire, en première approximation (²),

$$ds^2 \equiv - G^{-1}(dR^2 + R^2\, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2) + c^2 G\, dt^2, \tag{347}$$

où

$$G \equiv 1 - \frac{\alpha}{r}. \tag{348}$$

Dans cette application, G sera considéré comme étant *constant*.

L'équation (260) devient ici,

$$\Delta_s \psi + \frac{4\pi^2}{h^2 c^2 G^2}[(E - e_0 V)^2 - c^4 m_0^2 G]\psi = 0, \tag{349}$$

où m_0 et e_0 sont respectivement la masse et la charge de l'électron au repos. On a posé, en coordonnées sphériques,

$$\Delta_s \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. \tag{350}$$

Pour l'atome d'hydrogène, dans un champ de Minkowski, on a

$$V' = -\frac{e_0^2}{R'}, \tag{351}$$

où les accents indiquent les variables propres de ce système. Pour passer du champ gravifique (347) au champ de Minkouski

$$ds^2 = - dR'^2 - R'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + c^2\, dt'^2, \tag{352}$$

nous utiliserons le changement de variables :

$$R = R' G^{\frac{1}{2}}, \qquad \theta = \theta', \qquad \varphi = \varphi', \qquad t = t' G^{-\frac{1}{2}}. \tag{353}$$

Par variance, nous obtenons ainsi,

$$V' = -\frac{e_0^2}{R} G^{\frac{1}{2}}, \qquad V = -\frac{e_0^2}{R} G. \tag{354}$$

(¹) H. VAN DER LINDFN, *C. R. Acad. Sc.*, 18 juillet 1927. Voir aussi *Wis-en Natuurkundig Tÿdschrift.*, IIIᵉ Deel 6ᵉ en 7ᵉ Aflevering., août 1927.

(²) A. S. EDDINGTON, *Mathematical Theory of Relativity*, 1923, p. 101, éq. (46-15).

Posons successivement

$$E \equiv E'\sqrt{G} = (\mathcal{E}' + m_0 c^2)\sqrt{G}, \tag{355}$$

$$\frac{4\pi^2 e_0^2}{h^2 c^2}(m_0 c^2 + \mathcal{E}') \equiv \frac{1}{a'} \equiv \frac{G^{\frac{1}{2}}}{a}, \tag{356}$$

$$a'^2 \frac{4\pi^2}{h^2 c^2}(2 m_0 c^2 \mathcal{E}' + \mathcal{E}'^2) \equiv \beta' \tag{357}$$

et introduisons la constante de la structure fine $\gamma = \frac{2\pi e_0^2}{hc}$; l'équation des ondes (375) s'écrira, grâce à ces notations,

$$\Delta_s \psi + \left(\frac{\beta'}{a^2} + \frac{2}{a R} + \frac{\gamma^2}{R^2}\right)\psi = 0. \tag{358}$$

On sait ([1]) que cette équation admet des solutions quantiques

$$\beta' = -\frac{1}{(n+k)^2}, \tag{359}$$

où $n = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(p + \frac{1}{2} + \gamma\right)\left(p + \frac{1}{2} - \gamma\right)}$ et où p et $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Il résulte de (356), (357) et (359) que les niveaux d'énergie de l'atome dans le champ *de Minkowski* sont donnés par

$$E' = m_0 c^2 \frac{n+k}{\sqrt{(n+k)^2 + \gamma^2}}, \tag{360}$$

qui est la formule de la structure fine due à Sommerfeld.

On tire alors immédiatement de (355) la valeur des niveaux d'énergie de l'atome *dans le champ du Soleil* à une distance r du centre de celui-ci

$$E = \sqrt{G}\, m_0 c^2 \frac{n+k}{\sqrt{(n+k)^2 + \gamma^2}}. \tag{361}$$

Si l'on désigne par $\nu' = \frac{E'_1 - E'_2}{h}$ une fréquence émise par l'atome considéré dans le champ de Minkowski et par $\nu = \frac{E_1 - E_2}{h}$ la fréquence correspondante (mêmes nombres quantiques) émise dans le champ du Soleil, on aura, en vertu de (355) et (348),

$$\frac{\nu}{\nu'} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{R}}. \tag{362}$$

Cette formule est identique à la *loi d'Einstein du déplacement des raies spectrales de l'atome dans le champ du Soleil.*

([1]) V. Fock, *Z. f. Ph.*, 38, 1926, p. 242.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

APPLICATIONS AUX CHAMPS GRAVIFIQUES MASSIQUES AYANT LA SYMÉTRIE SPHÉRIQUE.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS ASTRONOMIQUES.

CHAPITRE III.

APPLICATION AUX CHAMPS GRAVIFIQUES ÉLECTROMAGNÉTIQUES AYANT LA SYMÉTRIE SPHÉRIQUE.

CHAPITRE IV.

APPLICATION A LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.