S. LEFSCHETZ

Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 40 (1929)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1929__40__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XL

Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques

Par M. S. LEFSCHETZ
Professeur à Princeton University

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1929

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

GÉOMÉTRIE SUR LES SURFACES

ET LES

VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

QUESTIONS TRANSCENDANTES. TOPOLOGIE

Par M. S. LEFSCHETZ,

Professeur à Princeton University.

I. — Introduction.

On entend par géométrie sur une configuration algébrique A (courbe, surface, variété), l'étude des propriétés des configurations algébriques sur A, invariantes sous les transformations birationnelles de A. A mesure que le nombre de dimensions augmente, nos renseignements sur la matière deviennent de moins en moins précis. Lorsque A est une courbe, on a affaire aux systèmes de points sur la courbe (séries linéaires ou algébriques, etc.), et l'on se trouve en présence d'un chapitre de la Géométrie qui a atteint un haut degré de perfectionnement sous toutes ses phases : purement géométrique, transcendante (intégrales abéliennes), topologique (surfaces de Riemann). Pour les surfaces, l'attaque par voie algébro-géométrique a eu bien plus de succès que les méthodes strictement transcendantes. On ne peut guère s'en étonner quand on se rappelle combien sont encore récentes et incomplètes nos connaissances sur les fonctions analytiques de plusieurs variables et sur la topologie à plus de deux dimensions.

Notre but ici est de présenter l'état actuel de nos connaissances sur les questions se rapportant aux surfaces ou variétés algébriques où les méthodes transcendantes prédominent. Ceci comprendra la topologie, les intégrales de fonctions rationnelles, le problème étroitement relié de la distribution des courbes sur une surface, des hypersurfaces sur une variété.

Il nous a semblé indispensable de rappeler les notions primitives de la topologie moderne et ses théorèmes les plus simples [20 *a*, *b*, *c*, E, B, 16 *k*, *l*, 2 *b*], en tant qu'ils trouvent application en géométrie algébrique. Temps perdu seulement en apparence, car une fois ces éléments acquis, on a pu avancer beaucoup plus vite dans le reste de l'opuscule.

II. — Questions topologiques.

1. Les configurations fondamentales : cellule, complexe, multiplicité. — On dit que deux configurations sont *homéomorphes* si l'on peut établir entre leurs points une correspondance biunivoque et continue.

Soit S_n un espace projectif, réel, à n dimensions. On appelle *simplexe* à n dimensions une région de S_n limitée par $n+1$ hyperplans linéairement indépendants. La *cellule* à n dimensions E_n est l'homéomorphe de ce simplexe, la sphère à $n-1$ dimensions, H_{n-1}, celle de sa frontière. Un *complexe* à n dimensions, K_n, est un ensemble fermé composé d'un nombre fini de cellules de dimensions $\leqq n$, ne se coupant pas deux à deux et telles que chaque E_k du système, $k<n$, se trouve sur la frontière d'une au moins de ses E_{k+1}. La multiplicité à n dimensions (en anglais *manifold*) sans frontière, M_n, est un K_n tel que chaque E_k en possède un voisinage qui est une E_n. Ainsi S_n, H_n sont des M_n.

2. Orientation. — Sur une E_n fixe, donnons-nous une E'_n variable. Établissons entre E'_n et un simplexe à n dimensions Σ_n un homéomorphisme bien défini et soient $A, A_1, \ldots, A_n$ les images des sommets du simplexe. Faisons subir maintenant à E'_n une série de déformations continues la ramenant à sa position primitive, et cela de telle manière que les images des divers éléments de Σ_n soient simplement permutés entre eux. C'est ainsi que par exemple une face triangulaire $A_iA_jA_k$ sera transformée en une autre semblable, etc. On démontre alors que la permutation que subissent les sommets A_i est nécessairement *paire*. Aux sommets nommés dans un certain ordre, on associe une *orientation* de E_n; deux orientations sont *identiques* si on les dérive l'une de l'autre par une permutation paire, *opposées* dans le cas contraire. On distingue les deux choix possibles par la notation $+E_n$, $-E_n$.

Une situation semblable se présente pour une M_n. Toutefois, on n'est plus assuré que la permutation des A_i, à la suite d'une déformation de E'_n soit toujours paire. Quand il en est effectivement ainsi, M'_n est *orientable* (bilatère); autrement, elle est *non orientable* (unilatère). Une H_n, un S_{2n+1}, la surface de Riemann, sont des multiplicités orientables; les S_{2n} réels (projectifs) sont des multiplicités non orientables.

Quand M_n est orientable, on peut répéter pour elle tout ce que l'on a dit pour E_n. La cellule E'_n, qui sert à spécifier l'orientation de E_n ou M_n, en est l'*indicatrice*.

3. **Frontières. Cycles.** — Soit, pour commencer, E_h une cellule dont la frontière est un K_{h-1} aux cellules orientées de façon quelconque. E^i_{h-1} étant une de celles de dimension maximum, soit $AA_1 \ldots A_h$ une indicatrice de E_h et déformons-la comme plus haut de telle façon que la face $A_1 \ldots A_h$ se trouve sur E^i_{h-1}. Posons maintenant $\theta_i = \pm 1$, suivant que cette face est devenue une indicatrice de $\pm E^i_{h-1}$. Le comportement de E_h par rapport aux cellules de sa frontière sera représenté symboliquement par la « relation aux frontières »,

$$E_k \rightarrow \sum \theta_i E^i_{k-1}, \tag{1}$$

introduite en substance par Poincaré [a], sauf qu'il employait $\equiv$ au lieu de $\rightarrow$, signe beaucoup plus commode, dû à Alexander [b].

Prenons maintenant un K_h aux cellules E^i_k, orientées de façon déterminée. Attachons à E^j_h un entier λ_j absolument quelconque. Le symbole $\Sigma\lambda_j\ E^j_h = K_h$ va constituer notre première généralisation du complexe. Nous en considérerons dans un instant une seconde. En ce sens, il est clair que le second membre de (1) est un K_{h-1}, dit *frontière* de E_h. En désignant cette fois par θ_{ij} un entier égal au θ ci-dessus correspondant à E^i_h et E^j_{h-1} si la seconde est sur la frontière de la première, égal à zéro dans le cas contraire, on aura

$$E_h^i \to \sum \theta_{ij} E_{h-1}^j. \tag{2}$$

On est donc conduit à écrire pour K_h la relation aux frontières

$$K_h \to \sum \theta_{ij} \lambda_i E_{h-1}^j. \tag{3}$$

Lorsque le second membre est $\equiv 0$, K_h est un *cycle* à h dimensions.

I. *Toute frontière est un cycle.*

4. Homologies. Modules de cycles. Nombres de Betti. — Soient $K_n (n \geqq h)$ un complexe donné, $\overline{K}_h$ une image *univoque* et continue de K_h sur K_n ($\overline{K}_h$ n'est pas nécessairement homéomorphe à K_h). Soit enfin $\overline{E}_h^i$ l'image sur $\overline{K}_h$ d'une cellule E_h^i quelconque de K_h. On dira que $\overline{K}_h$, $\overline{E}_h^i$ sont un complexe singulier, une cellule singulière sur K_n [Veblen, E]. On écrira aussi symboliquement

$$\overline{E}_h^i \to \sum \theta_{ij} \overline{E}_{h-1}^j, \tag{2'}$$

$$\overline{K}_h \to \sum \theta_{ij} \overline{E}_{h-1}^j. \tag{3'}$$

Lorsque K_h est un cycle, $\overline{K}_h$ sera dit *cycle à n dimensions* de K_n, et on le désignera encore par Γ_h. Supposons qu'il existe un $\overline{K}_{h+1} \to \Gamma_h$. On écrira alors $\Gamma_h \sim 0$. $(\mathrm{mod}\, K_n)$ (homologie $\mathrm{mod}\, K_n$) [Poincaré, 20 *a*].

Étant donnés des cycles Γ_h^i, de K_n, on dit qu'ils sont *dépendants* s'il existe des entiers μ_i non tous nuls tels que $\Sigma \mu_i \Gamma^i \sim 0 \ (\mathrm{mod}\, K_n)$; autrement ils sont *indépendants*.

Soit $\mathfrak{M}$ un *module*, ou ensemble additif, de cycles, c'est-à-dire contenant en même temps que deux cycles leur somme ou leur différence. On appelle $h^{\text{ième}}$ nombre de Betti de $\mathfrak{M}$, son nombre maximum $R_h(\mathfrak{M})$ de Γ_h indépendants [13 *a*]. Le $h^{\text{ième}}$ nombre de Betti, de K_n lui-même, est celui de l'ensemble de tous ses cycles à h dimensions. On le désigne par $R_h(K_n)$, ou simplement R_h. Au lieu de R_h, Poincaré [*a*] définissait comme nombre de Betti le nombre $1 + R_h$. D'autres auteurs, par exemple [Picard, D_1], appelaient ce nombre « indice de connexion à h dimensions ». Les notations et le terme

« nombre de Betti » au sens que nous avons donné, tendent à prévaloir aujourd'hui et ont le grand avantage de conduire à des formules plus simples.

Un module fort important est celui des cycles *algébriques* d'une variété algébrique (n° 10). Son nombre R_2 est le nombre ρ de Picard.

Pour tout K_n, on a les théorèmes suivants :

II. *Soit* K_h *un complexe (en général singulier) déformé continûment sur* K_n *de la position* K'_h *à la position* K''_h. *Son lieu convenablement orienté est un* $K_{h+1} \rightarrow K''_h - K'_h$. *En particulier*, $K'_h \sim K''_h (\bmod K_n)$.

III. *Tout* Γ_h *de* K_n *est déformable de façon continue en un* Γ'_h (*donc* $\sim \Gamma_h$, $\bmod K_n$), *somme de cellules à h dimensions de* K_n (*sous-complexe de* K_n) [Veblen, E].

IV. *Un sous-complexe de* K_n, *qui fait frontière sur* K_n, *y fait frontière pour un sous-complexe de* K_n [Veblen, E].

En d'autres termes, si le sous-complexe Γ_h de K_n est $\sim 0 \ (\bmod K_n)$, ce dernier a un sous-complexe $K_{h+1} \rightarrow \Gamma_h$.

De ces théorèmes, il résulte que, pour calculer les nombres de Betti d'un complexe, il suffit de considérer les relations aux frontières entre ses cellules. On en conclut que les R_h sont tous finis et $\leqq R_h(K_n)$. De plus, si K_n possède α_h cellules à h dimensions, on a la formule d'Euler-Poincaré [20 *a*],

$$\sum (-1)^h \alpha_h = \sum (-1)^h R_h. \tag{4}$$

5. Torsion. Homologies avec division. — Il peut très bien arriver que l'on ait $\lambda \Gamma_h \sim 0 \ (\bmod K_n)$ pour une valeur de $\lambda > 1$, mais non pour $\lambda = 1$. Γ_h est un *diviseur de zéro* de K_n. Le nombre de tels diviseurs d'un module $\mathfrak{M}$ en est l'*indice de torsion à h dimensions* et désigné par $\sigma_h(\mathfrak{M})$. L'indice de torsion de l'ensemble de tous les cycles à h dimensions est désigné par $\sigma_h(K_n)$, ou simplement σ_h. Des théorèmes ci-dessus, on déduit que tous les σ sont finis et $\leqq \sigma_h(K_n)$ [20 *c*, E, B].

Il est souvent commode d'introduire la notation $\Gamma_h \approx 0 \ (\bmod K_n)$

pour indiquer que Γ_h est un diviseur de zéro, voire fait frontière. La relation $\approx$ sert alors à désigner les homologies *sans division* de Poincaré, ou homologies obtenues en négligeant partout les diviseurs de zéro. *Dans le domaine de ces homologies, les coefficients ne sont plus restreints à être entiers*, mais peuvent tout aussi bien être pris simplement rationnels [16 *n*].

6. **Systèmes fondamentaux.** — Soit $\mathfrak{M}$ un module de cycles. Puisque $1 + R_h(\mathfrak{M})$ cycles à k dimensions de $\mathfrak{M}$ sont toujours dépendants, on peut en trouver $R_h(\mathfrak{M})$, soient $\Gamma_h^i\,[i=1, 2, \ldots, R^h(\mathfrak{M})]$, tels que pour tout autre cycle Γ_h de $\mathfrak{M}$ on ait

$$(5) \qquad \lambda\Gamma_h \sim \lambda\sum\lambda_i\Gamma_q^i \qquad (\text{mod } K_n).$$

Les Γ_h^i forment alors un *système fondamental* (abréviation S. F.) intermédiaire pour l'opération $\sim$, ou bien un S. F. ordinaire pour $\approx$ puisque

$$\Gamma_h \approx \sum\lambda_i\Gamma_h^i \qquad (\text{mod } K_n).$$

Au lieu de S. F. ordinaire, on dit aussi simplement S. F., ou bien *base minima.*

Soient $\Delta_h^j\,[j=1, 2, \ldots, \sigma_h(\mathfrak{M})-1]$ les diviseurs de zéro proprement dits appartenant au module. De (5), on tire donc

$$(6) \qquad \Gamma_h \sim \sum\lambda_i\Gamma^i + \sum\mu_j\Delta^j \qquad (\text{mod } K_n).$$

C'est dire que pour les Γ_h de $\mathfrak{M}$, les Γ^i et les Δ^j constituent ensemble un S. F. Cet S. F. est composé de $R_h(\mathfrak{M}) + \sigma_h(\mathfrak{M}) - 1$ cycles, nombre que l'on peut en général diminuer. En effet, les diviseurs de zéro appartenant à $\mathfrak{M}$ constituent un groupe G abélien d'éléments combinés par addition. Dès que l'ordre $\sigma_h(\mathfrak{M})$ de G est >2, il y a dans G des éléments en nombre $\zeta_h(\mathfrak{M})$, soient les $\zeta_h(\mathfrak{M})$ premiers Δ, tels que tout élément du groupe soit une somme de multiples de ceux-ci. Cela veut dire que le nombre de cycles Δ présents au second membre de (6) peut être réduit à $\zeta_h(\mathfrak{M})$.

Tout ceci s'applique évidemment au cas où $\mathfrak{M}$ se compose de tous les Γ_h de K_n. Le nombre ζ_h, alors désigné par $\zeta_h(K_n)$, ou simplement ζ_h, est égal au nombre des coefficients de torsion à h dimensions de Poincaré [c].

7. **Remarque sur la dimension zéro.** — La valeur zéro n'est en rien exceptionnelle. Un point associé à un entier quelconque est un Γ_0 [2 b, 16 l]. Si A, B sont deux points sur un K_n connexe, il y a sur ce dernier une $E_1 \rightarrow A - B$, donc $A \sim B \pmod{K_n}$. De plus, toute homologie entre points doit être dérivée d'une telle relation aux frontières. Donc R_0 est le nombre de sous-complexes connexes dont se compose K_n. C'est ainsi que si deux circonférences dans un même plan se coupent, elles peuvent être décomposées en une somme de cellules constituant un K_1 dont le $R_0 = 1$; si elles ne se coupent pas, le K_1 correspondant aura son $R_0 = 2$, etc. Les nombres σ_0, ζ_0 sont tous égaux à *un*.

8. **Cas d'une M_n orientable. Intersections de complexes. Indice de Kronecker.** — On a d'abord les relations de dualité suivantes entre les invariants topologiques [Poincaré *a*, *b*, *c*] :

$$(7) \qquad R_k = R_{n-k}, \qquad \sigma_k = \sigma_{n-1-k}, \qquad \zeta_k = \zeta_{n-1-k}.$$

Les intersections des complexes de M_n ont été définies et étudiées de façon fort complète par Lefschetz [k]. Voici comment on doit les envisager. Soit K_n le complexe qui sert à définir M_n. On peut construire de bien des manières un polyèdre Π_n, homéomorphe à K_n, dont les faces sont toutes des simplexes et correspondent, cellule pour cellule, à une certaine subdivision de K_n, par exemple sa subdivision *régulière* [E]. Il n'y a pas d'inconvénients à remplacer K_n par sa subdivision, c'est-à-dire à supposer qu'il correspond lui-même cellule pour cellule à Π_n. On dira alors que tel ou tel élément de M_n est *rectiligne*, *polyédral*, etc., s'il en est ainsi pour son image sur Π_n. Enfin, quant à ce dernier, on peut le supposer plongé dans un S_r euclidien. Alors on définira la distance de deux points de M_n comme égale à la longueur du segment qui joint leurs images sur Π_n. Moyennant ces notions, nous pouvons définir nos intersections de façon précise.

1° Soient E_h, E_j deux cellules polyédrales convexes sur une E_n

de M_n, leur intersection étant une E_l semblable $(l = h + j - n)$. Soient $AA_1 \ldots A_l$, $AA_1 \ldots A_h$, $AA_1 \ldots A_l\, A_{h+1} \ldots A_n$ des simplexes constituant respectivement des indicatrices de $\alpha_l E_l$, $\alpha_h E_h$, $\alpha_j E_j$, et ceci de telle façon que $AA_1 \ldots A_n$ en soit une de $\alpha_n E_n$, les α étant tous ± 1. Alors en tant qu'intersection orientée de E_h avec E_j, E_l doit être orientée par définition de telle façon que

$$\alpha_h . \alpha_j . \alpha_l . \alpha_n = 1.$$

La cellule ainsi orientée est désignée par $E_h . E_j$.

2° Lorsque $l = 0$, $j = n - h$, le nombre $\alpha_0 = \alpha_h . \alpha_{n-h} . \alpha_n$ est appelé *indice de Kronecker* de E_h et E_{n-h} et désigné par $(E_n . E_{n-h})$.

3° Quand E_h, E_j, cellules quelconques sur M_n ne se rencontrent pas, on pose par définition $E_h . E_j = 0$, et si $j = n - h$, $(E_h . E_{n-h}) = 0$.

4° Soient K_h, K_j, deux complexes sur M_n aux cellules toutes polyédrales, convexes et n'occupant pas de position spéciale les unes par rapport aux autres. Soit

$$K_h = \sum \lambda_p E_h^p, \qquad K_j = \sum \mu_q E_j^q.$$

Par définition,

$$K_h . K_j = \sum \lambda_p \mu_q E_h^p . E_j^q,$$

et lorsque $j = n - h$,

$$(K_h . K_{n-h}) = \sum \lambda_p \mu_q (E_h^p . E_{n-h}^q).$$

5° On peut remplacer partout les cellules polyédrales par des cellules analytiques. Les orientations et les indices sont alors déterminés par les signes de certains jacobiens [20 *a*, B, 16 *b*, *m*].

6° Soient K_h, K_j deux complexes quelconques sur M_n, dont les frontières ne se rencontrent pas. On démontre qu'il est possible de les approximer d'aussi près que l'on veut par des complexes K'_h, K'_j tels que ceux de 4°. L'intersection $K'_h . K'_j$ est un cycle bien défini, et tous les cycles analogues correspondant à des approximations suffisantes sont homologues. Le cycle ainsi déterminé est, par définition, $K_h . K_j$. On définit de même l'indice $(K_h . K_{n-h})$.

L'indice de Kronecker peut être considéré comme le nombre de points d'intersection des deux complexes comptés avec des multiplicités qui peuvent avoir un signe quelconque.

Grâce aux approximations, on pourra dans toutes les questions d'intersection se borner à des complexes ou cycles polyédraux ou analytiques. C'est là une observation des plus utiles dans la pratique.

Pour les propriétés spéciales des intersections, voir [16 *k*, *l*]. Relevons seulement :

V. *Les symboles d'intersection sont associatifs et distributifs. Par contre,*

$$(8) \quad K_h.K_j = (-1)^{(n-h)(n-j)} K_j.K_h, \qquad (K_h.K_{n-h}) = (-1)^{(n+1)h}(K_{n-h}.K_h).$$

Ils changent de signe quand on change l'orientation de l'un des complexes ou celle de M_n [24 *a*, B, 16 *k*].

VI. *Lorsque* $\Gamma_h \sim \Gamma'_h$, *on a aussi* $\Gamma_h.\Gamma_k \sim \Gamma'_h.\Gamma_k$.

VII. *Pour que* $\Gamma_h \approx 0$, *il faut et il suffit que* $(\Gamma_h.\Gamma_{n-h}) = 0$, *quel que soit* Γ_{n-h} [20 *a*, 24 *a*, 25 *a*].

VIII. *Soient* Γ^i_h, Γ^j_{n-h} *des cycles de deux S. F. pour leurs dimensions. Les diviseurs élémentaires de la matrice* $\|(\Gamma^i_h.\Gamma^j_{n-h})\|$ *sont tous égaux à l'unité. Ces cycles étant au même nombre de* R_h, *pour qu'ils constituent des S. F. intermédiaires, il faut et il suffit que* $|(\Gamma^i_h.\Gamma^j_{n-h})| = \pm 1$ [26 *a*, 27 *a*]. *Plus généralement, supposons qu'ils appartiennent à* $\mathfrak{M}$, *tel que*

$$R_h(\mathfrak{M}) = R_{n-h}(\mathfrak{M}) = r,$$

et qu'ils soient de plus au même nombre de r. Pour que les Γ^i_h *constituent un S. F. intermédiaire, il faut et il suffit que les* Γ^j_{n-h} *étant fixes, on choisisse les* Γ^i_h *de telle manière que le déterminant ci-dessus soit* $\neq 0$ *et de valeur absolue minimum.*

La dernière partie se démontre comme le théorème XXIX de Severi [*l*]. Voir pour des généralisations des résultats précédents [16 *n*].

Comme application, sur un S_n complexe, les S_k complexes constituent un S. F. pour les Γ_{2k}. Car $R_{2k} = \zeta_{2k} = \sigma_{2k} = 1$ et de plus $(S_k.S_{n-k}) = 1$.

IX. *Lorsque* $n \equiv 2 \pmod 4$ $R_{\frac{1}{2}n}$ *est pair.*

Ce théorème est bien connu pour $n = 2$. Pour le cas général, on le déduit du fait que le déterminant $\left|\left(\Gamma^i_{\frac{1}{2}n} . \Gamma^j_{\frac{1}{2}n}\right)\right|$ est gauche et $\neq 0$, donc d'ordre pair. Tout ceci s'étend pour une bonne part aux intersections de plusieurs K. En particulier, quand ils coïncident, on écrit K^s, (K^s) pour le cycle ou l'indice.

III. — Propriétés topologiques spéciales des surfaces et des variétés algébriques.

9. **Généralités.** — Une variété à d dimensions sera désignée génériquement par V_d, une surface par F. Nous ne séparerons pas pour le présent les surfaces et les variétés, et quand nous parlerons d'une variété à d dimensions V_d, il n'y aura pas lieu de supposer $d \neq 2$, voire même en général $\neq 1$, quoique pour $d = 1$ (courbes), les faits sont trop connus pour être bien intéressants.

Supposons V_d d'ordre m. Elle est susceptible d'être représentée par une variété de Riemann $\mathcal{R}_{2d}$ à m feuillets, recouvrant le S_{2d} réel, image de S_d projectif complexe et se croisant le long d'une hypersurface de branchement B [D, 11', B].

$\mathcal{R}_{2d}$ peut être décomposé en cellules analytiques constituant un K_{2d}, ou comme nous le dirons, elle peut être *recouverte* par K_{2d}. Il n'y a, en effet, qu'à prendre les sections des m feuillets par un faisceau d'espaces parallèles les découpant suivant m S_{2d-1} superposés. En opérant par induction, on peut supposer que chaque section est un K_{2d-1} dont la structure ne change que pour un nombre fini de positions puisque $\mathcal{R}$ est algébrique. Le lieu d'une cellule étant une cellule, il s'ensuit que celui de K_{2d-1} est le K_{2d} cherché.

Le K_{2d} recouvrant $\mathcal{R}_{2d}$ a la propriété suivante : chacune de ses E_{2d-1} est sur la frontière de deux E_{2d} et de deux seulement, puisqu'au fond tout se passe comme si l'on avait affaire à S_{2d}. Quand cette propriété est satisfaite, on peut appliquer tout ce que nous avons dit sur l'orientation des multiplicités (n° 2). On trouve alors que $\mathcal{R}_{2d}$ est toujours *orientable* [B].

Tout comme pour les courbes, il y a lieu de convenir qu'à un point A de l'hypersurface multiple de V_d où se croisent s nappes distinctes doivent correspondre s points différents sur $\mathcal{R}_{2d}$. Moyennant cette convention, il sera plus simple à l'avenir de laisser $\mathcal{R}_{2d}$ de côté : dans les questions de topologie, quand nous parlerons de V_d, il s'agira toujours d'une homéomorphe de $\mathcal{R}_{2d}$.

Lorsque les singularités sont ordinaires (de même nature que pour la projection d'une V_d non singulière située dans un autre espace), V_d est une M_{2d} [B]. Cette M_{2d} est d'ailleurs décidément restreinte au point de vue topologique dès que $d > 1$, car, par exemple, son nombre de Betti R_1 est toujours pair, ce qui n'est nullement le cas pour une M_{2d} arbitraire.

On va se borner aux variétés irréductibles, à singularités ordinaires. Il y a lieu de considérer les invariants numériques topologiques, R_k, σ_k, ζ_k. Puisque V_d est irréductible $R_0 = 1$, et partant $R_{2d} = 1$. Comme $R_k = R_{2d-k}$, les seuls nombres de Betti distincts, outre l'unité, sont $R_1, \ldots, R_d$. De même,

$$\sigma_k = \sigma_{2d-1-k}, \qquad \zeta_k = \zeta_{2d-1-k}, \qquad \sigma_0 = \zeta_0 = 1$$

et il n'y a donc lieu de considérer que les nombres

$$\sigma_k, \zeta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, d-1).$$

N'oublions pas cependant que le groupe qui importe surtout n'est pas le groupe des homéomorphismes, mais celui des transformations birationnelles. Parmi ces dernières, il y a même lieu de se limiter aux transformations de V_d en une autre variété à singularités ordinaires. Il faudra donc examiner le comportement des invariants topologiques par rapport aux transformations birationnelles du second type, les seules que nous envisagerons. Il y a, en effet, des invariants topologiques, tel R_1, qui sont invariants birationnels, d'autres, tel R_2, qui ne le sont pas, ou qui ne le sont que pour des transformations restreintes (invariants relatifs).

10. **Cycles algébriques et leurs indices de Kronecker.** — Les questions les plus intéressantes sont naturellement celles où l'*Analysis situs* et les configurations algébriques figurent en même temps.

Considérons, par exemple, une courbe algébrique C sur F. Elle peut être recouverte par un K_2 orientable. Ce K_2, étant orienté, deviendra un certain cycle à deux dimensions. Désignons l'un des deux cycles que l'on peut ainsi obtenir par C. L'autre sera alors — C. Nous entendrons par cycle *algébrique* tout Γ_2 de F homologue à une combinaison linéaire des courbes algébriques, c'est-à-dire aux cycles tels que $\pm C$ que nous venons de considérer. De même, une V_r sur V_d donne lieu à deux cycles à $2r$ dimensions, $\pm V_r$. La considération des indices de Kronecker va nous permettre de faire un choix entre les deux signes. En effet :

X. *Soient* V_r, V_{d-r} *deux variétés sur* V_d *se coupant, sans contact, en des points, multiples ni pour elles, ni pour* V_d. *L'indice de Kronecker* $(V_r . V_{d-r})$ *est égal, au signe près, à* $[V_r V_{d-r}]$ *nombre de leurs intersections. De plus, on peut orienter* V_d, *ainsi que toutes ses* V_r *de telle manière que* $(V_r . V_{d-r}) = [V_r V_{d-r}]$ *dans tous les cas.*

Les démonstrations [B, p. 19, 16 m] s'étendent, en effet, facilement au cas général. On peut d'ailleurs considérer tout aussi bien les indices $(V_p . V_q \ldots V_r)$, $p + q + \ldots + r = d$, et leur appliquer X.

Pour un S_n, *on a comme corollaire de* X *le théorème de Bezout et ses généralisations, quant au nombre de points communs à plusieurs variétés.*

Démontrons, par exemple que, dans S_3, une courbe C d'ordre p et une surface F d'ordre q, se coupent en pq points s'ils sont distincts et qu'on les compte avec une multiplicité convenable. Désignons, en effet, une droite par L, un plan arbitraire par H. On a

$$C \sim pL, \qquad F \sim qH \qquad (\text{mod } S_3).$$

Par suite,

$$(C.F) = [CF] = pq[LH] = pq.$$

Soient A un des points d'intersection, C′, F′ des sous-complexes des complexes recouvrant C et F, de dimensions si restreintes qu'ils ne se coupent qu'en A, leurs frontières ne se rencontrant pas. La multiplicité avec laquelle on doit compter A est précisément égale à $(C' . F')$. Elle est d'ailleurs indépendante du choix de ces complexes. De plus, elle est positive. Car il suffit d'en déplacer un légèrement de façon que les intersections soient de la nature simple indiquée dans X. L'indice n'aura pas changé et sa valeur sera égale au nombre de points communs aux deux complexes déplacés.

Dans cette démonstration, la variation continue de C dans un système algébrique contenant L comptée p fois *n'intervient nulle part*. D'ailleurs, nos connaissances sur ces variations sont assez nébuleuses.

11. Variétés effectives ou virtuelles. — Une V_r effective sur V_d est tout simplement une V_r effectivement présente sur la variété. Il est beaucoup moins facile de définir la notion de *variété virtuelle*, pourtant extrêmement utile, par voie purement algébro-géométrique. A l'aide de la topologie, rien de plus simple : une V_r virtuelle n'est autre qu'un Γ_{2r} algébrique de V_d qui n'est pas homologue à une V_r effective. Par définition,

$$\Gamma_{2r} \sim \sum \lambda_i V_r^i - \sum \mu_i V_r^i$$

où les V^i sont effectives et les λ, μ des entiers positifs. Donc,

$$\Gamma_{2r} \sim V'_r - V''_r \qquad (V', V'' \text{ effectives}).$$

C'est-à-dire : toute V_r virtuelle est homologue à la différence de deux V_r effectives. Nous verrons plus tard comment cette notion se raccorde avec les définitions usitées, du moins dans le seul cas où l'on en ait fait usage pratique ($r = d - 1$).

XI. *Une V_r effective ne peut être* ≈ 0 [B, 16 *e*].

En effet, soit V_{d-r} l'intersection de r sections hyperplanes de V_d. L'indice $(V_r . V_{d-r}) \neq 0$ puisqu'il est égal à l'ordre de V_r. Donc, d'après VII, V_r n'est pas ≈ 0.

12. Application à un problème de H. W. E. Jung. — Cet auteur a fait l'étude des surfaces à singularités arbitraires [A]. Son point de départ est la représentation paramétrique locale par systèmes de séries de puissances. Topologiquement parlant, P étant un point singulier isolé de F, ou point multiple de sa courbe multiple, on considère une configuration F' dont les points correspondent : 1° aux points de F qui ne sont pas du type P; 2° à certains *éléments analytiques* d'approche des points P (directions complexes d'approche). F' donne lieu alors à une $\mathcal{R}_4$ qui est une M_4. Cette M_4 porte certains cycles $\sim (\text{mod} M_4)$ à des cycles dont tous les *points* appartiennent au type 2°. Ces cycles correspondent aux courbes B de Jung [A, p. 49] et les nombres d'intersections de ces courbes entre elles, qu'il obtient par une méthode analytique assez ardue, ne sont autres que les indices de Kronecker des cycles correspondants. Voir [A, p. 57].

En réalité, P n'a nullement besoin d'être un point singulier, mais peut très bien être un point ordinaire de F. Un cas très simple est celui où les nouveaux points de F' relatifs à P sont les images des ∞^1 directions (complexes) d'approche au point. L'image de ces directions est un Γ_2 de F' se réduisant à P sur F. Sous certaines transformations birationnelles P est transformé en une courbe rationnelle — courbe exceptionnelle de la nouvelle surface.

13. Homologies entre cycles algébriques. — Les cycles algébriques de V_d forment un module que nous désignerons dans la suite par $\mathfrak{A}$. Par conséquent, il existe un S. F. composé de $R_{2r}(\mathfrak{A})$, cycles algébriques indépendants de Γ^i_h et de $\zeta_{2r}(\mathfrak{A})$, diviseurs de zéro algébriques, Δ^j_{2r}. Les Γ^i constituent un S. F. intermédiaire.

Le cas $r = d - 1$ est particulièrement intéressant. On a alors $R_{2d-2}(\mathfrak{A}) = \rho$, nombre de Picard, et $\sigma_{2d-2}(\mathfrak{A})$ est le nombre σ de Severi, Lefschetz [*e*, B], aussi plus loin (th. XXXIV). Quand $\rho > 1$, on peut s'arranger pour que les éléments du S. F. soient tous effectifs. Voir [G, p. 320], où cependant au bas de la page, il faut faire $\alpha = 1$. Quand $\rho = 1$, on doit ajouter une hypersurface si l'on veut qu'elles soient toutes effectives.

Revenons au cas de r quelconque. Soient A^i_r, B^j_{2d-r} deux S. F. intermédiaires pour les cycles algébriques des deux dimensions complémentaires r, $2d - r$. On aura pour toute paire de tels cycles,

$$A_r \approx \sum x_i A^i, \qquad B_{2d-r} \approx \sum y_j B^j \qquad (\operatorname{mod} V_d).$$

Par suite, le nombre d'intersections des deux variétés

$$(A.B) = \sum x_i y_j (A^i.B^j). \tag{9}$$

Cette formule résout le problème des intersections des variétés sur V_d. Pour F, elle remonte à Severi [*a*, *k*], qui lui a donné le nom de *formule de Bezout généralisée*.

14. Systèmes linéaires et leurs propriétés topologiques. — Supposons V_d plongée dans S_k. Les V_{k-1} d'un système linéaire

$$\Sigma \lambda_h \varphi_h(x_0, x_1, \ldots, x_k) = 0$$

de S_r découpent sur V_d un système linéaire de V_{d-1} ou ***hypersurfaces***. Soit C la partie variable d'une intersection générique. Le système linéaire est désigné par $|C|$. Celui de dimension maximum, qui contient une C donnée comme hypersurface totale, est d'ailleurs unique : c'est le système linéaire *complet* qu'elle détermine et c'est lui que l'on désigne en général par $|C|$. La *dimension* d'un système linéaire est le nombre de points arbitraires que l'on peut imposer à son hypersurface générique.

Prenons sur V_d un $|C|$ tel que : 1° sa dimension $r \geqq d$; 2° $C^k (k < d)$ existe, est en général irréductible, à singularités ordinaires, et, quand elle en acquiert, celles-ci se réduisent en général à un point conique double isolé; 3° $(C^d) > 0$; 4° si r' est la dimension du système linéaire découpé par $|C|$ sur une C^k donnée, il ne contient pas en général $\infty^{r'-1}$ variétés, C^{k+1}, réductibles. Pour une F, la dernière condition n'entre en jeu que pour $k = 0$ et s'applique à $|C|$ lui-même. Le système $|H|$ des sections hyperplanes ou l'un de ses multiples fournit un exemple de système tel que $|C|$.

Prenons dans $|C|$ un faisceau linéaire arbitraire au paramètre linéaire u, avec C_u comme hypersurface correspondante. Les C_u à singularités exceptionnelles correspondent à n valeurs $a_1, \ldots, a_n$ de u. Il y a alors plusieurs théorèmes décrivant les relations entre les cycles de C_u et ceux de V_d, et partant certaines formules reliant leurs nombres de Betti.

XII. *Tout* Γ_k *de* $C_u (k < d - 1)$ *est invariant* [6 *b*, B].

Nous entendons par là que quand u décrit un chemin fermé quelconque, l'effet sur Γ_k est de le ramener à un autre cycle déformable en Γ_k (homotope à Γ_k), donc $\sim \Gamma_k (\mathrm{mod}\, C_u)$.

XIII. *Tout* Γ_k *de* $V_d (k < d)$ *est* $\sim (\mathrm{mod}\, V_d)$ *à un cycle de* C [D, 20 *d*, 16 *e*, B].

XIV. *Pour* $k < d - 2$, Γ_{k-2} *et son homologue sur* C *sont* ~ 0 *en même temps* mod *leurs variétés respectives.*

De la on déduit [6 *b*, 16 *e*, B]

$$R_k(V_d) = R_k(C) = \ldots = R_k(C^{k+1}) \qquad (k \leqq d - 2). \tag{10}$$

XV. *Supposons que u décrive un circuit positif entourant*

$u = a_i$. *Il existe un* Γ_{d-1} *de* C_u, *soit* δ^i, *qui tend vers le nouveau point singulier de* C_{a_i} *quand* $u \to a_i$ *et tel que l'accroissement de tout autre* Γ_{d-1} *de* C_u *est égal à* $(-1)^d (\Gamma_{d-1} . \delta^i) \delta_i$. *En particulier,* δ^i *lui-même est ainsi changé en* $(-1)^d \delta^i$. *Il est donc invariant pour d pair* [D_1, $20\,d$, B, $16\,d$].

XVI. $\delta^i \sim 0 \pmod{V_d}$. *De plus, si* Γ_{d-1} *sur* C_u *est* $\sim 0 \pmod{V_d}$, *il est* $\sim$ *à une somme de* $\delta \pmod{C_u}$ [D_1, $20\,b$, B, $16\,d$].

XVII. *Si* $\Sigma \lambda_i \delta^i$ *est invariant, il est* $\sim 0 \pmod{C_u}$ [B].

XVIII. *Tout* Γ_{d-1} *de* C_u *dépend des* δ *et des cycles invariants* [D_1, B, $16\,d$].

Traçons dans le plan u des lacets rectilignes aa_i et soit Δ^i le lieu de δ^i quand u décrit aa_i. Δ^i peut être recouvert par un K_d orientable. Nous l'orienterons de telle manière que si δ'^i est la position de δ^i pour $u = a$, on ait $\Delta^i \to \delta'^i$. Δ^i ainsi orienté est ce que nous nommerons l'*onglet* Δ^i. On peut toujours s'arranger pour que ces onglets soient des cellules.

XIX. *Pour tout* Γ_d *de* V_d, *il subsiste une homologie*

$$\Gamma_d \sim \sum \lambda_i \Delta^i + K_d \qquad \pmod{V_d}, \tag{11}$$

avec

$$K_d \to -\sum \lambda_i \delta'^i \qquad (K_d \text{ sur } C_a). \tag{12}$$

La relation (10), *donc l'existence de* Γ_d *entraîne*

$$\sum \lambda_i \delta^i \sim 0 \qquad \pmod{C_u}. \tag{13}$$

Réciproquement à (11) *correspond un* Γ_d *exprimé par* (9) [D_1, $20\,d$, $16\,d$, B].

De même que l'on considère les Γ_{d-1} invariants ou évanouissants de C_u, on peut considérer les Γ_{d-k} d'une C^{d-k} passant par une C^{d-k+1} fixe et qui sont invariants ou évanouissants quand C^{d-k} tend vers une position où elle acquiert une singularité nouvelle. Au lieu de XIX, on a alors :

XX. *Les Γ_{d-k} de C^{d-k} dépendent de ses cycles invariants ou évanouissants.*

XXI. *Les indices $R_{2k+1}(V_d)$ sont tous pairs. En particulier, $q = \frac{1}{2}R_1$ est pair.*

Pour les démonstrations transcendantes relatives à $k = 1$, voir [6 c]. La démonstration topologique du même cas [16 d, B] s'applique au cas général.

De XX, on tire aussi quant aux cycles de dimension $> d$:

XXII. *Tout Γ_k invariant d'une C^{d-k} passant par une C^{d-k+1} fixe a pour lieu un Γ_{2d-k}. Réciproquement, un Γ_{2d-k} coupe C^{d-k} suivant un Γ_k invariant. Il y a équivalence entre* [B]

$$(14) \qquad \Gamma_k \sim 0 \pmod{C^{d-k}}, \qquad \Gamma_{2d-k} \sim 0 \pmod{V_d}.$$

Rappelons que si $|C|$ est un faisceau linéaire de courbes d'ordre m et de genre p sur F, du même type que nous avons considéré jusqu'ici, le nombre $I_2 = n - m - 4p$ est un invariant numérique relatif de F, son invariant de Zeuthen-Segre [6 c].

Lorsque $|H|$ est le système des sections hyperplanes de F, m est l'ordre, n la classe de F, p le genre de la section hyperplane générique. Supposons que l'on ait donné une définition de I pour toute V_{d-i}, et soit I_k celui de C^{d-k}. Celui I_d de V_d se définit par la relation de récurrence [Alexander, *a*] :

$$I_d = n - 2I_{d-1} - I_{d-2}.$$

On a alors [2 *a*, B]

$$(15) \qquad R_d = I_d + 2(-1)^d d + 2\sum_0^{d-1}(-1)^{d-1-i}R_i.$$

ce qui conduit à :

XXIII. *Formule d'Alexander pour* I_d [2 *a*, B] :

$$(16) \qquad (-1)^d I_d + 2d = \sum (-1)^i R_i.$$

(15) nous donne R_d en terme de I_d et des invariants de dimension inférieure, (16) I_d en terme de la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Par voie analytique, Picard [D_2] avait donné le nombre de Γ_2 finis, distincts sur F. Sa formule revient à

$$R_2 - 1 = I_2 + 2R_1 + 1 \tag{17}$$

qui se réduit à (15) pour $d = 2$.

15. **Remarque sur les transformations birationnelles.** — On sait qu'avec des conventions fort simples (un point multiple à k branches distinctes $= k$ points de la surface de Riemann) toute transformation birationnelle d'une courbe algébrique peut être considérée comme un homéomorphisme de sa surface de Riemann. Malheureusement la situation est beaucoup plus compliquée pour les surfaces et les variétés. Il n'est pas possible d'introduire une fois pour toutes des conventions telles que toute transformation birationnelle de V_d corresponde à un homéomorphisme de sa multiplicité de Riemann $\mathcal{R}_{2d}$. Tout au plus, peut-on définir dans chaque cas une $\mathcal{R}_{2d}$ convenable transformée homéomorphiquement. Et encore ce résultat ne peut être considéré comme établi que pour $d = 2$.

Examinons les choses de plus près pour F. Soit T une transformation birationnelle de F en F'. Il y aura en général des points que T transforme en une ou plusieurs courbes. Lorsque F et F' sont à singularités ordinaires, ou, pour plus de clarté, lorsqu'elles sont sans singularités dans des espaces quelconques, à chaque point correspond au plus une seule courbe rationnelle, dite courbe *exceptionnelle*. Une telle courbe, A, est donc définie par la condition qu'il existe une T telle que TA soit un point ordinaire de TF.

Ne nous limitons pas pour l'instant aux singularités ordinaires. Soit A une courbe exceptionnelle sur F, telle que $A' = T^{-1}A$ soit un point de F'. Le cycle A n'est pas $\sim 0 \pmod{F}$ (th. XII), mais $T^{-1}A \sim 0 \pmod{F'}$. De même, si Γ_1 sur A n'est pas $\sim 0 \pmod{F}$, $T\Gamma_1$ n'en est pas moins $\sim 0 \pmod{F'}$. On voit que les nombres de Betti $R_1(F)$, $R_2(F)$ ne sont pas des invariants birationnels. Il est possible de rétablir l'invariance birationnelle de R_1 par des artifices analogues à ceux du n° 12, mais il n'en est pas ainsi pour R_2. De plus, R_1 est tout au moins invariant par rapport aux transformations entre les surfaces à singularités ordinaires, mais cela n'est pas non plus le cas pour R_2. On exprime ceci en disant que R_1 est un invariant *absolu*, R_2 un invariant *relatif*. Le comportement de R_2, typique pour les invariants relatifs, est exprimé par

$$R_2 - e = TR_2 - e', \tag{18}$$

où e, e' sont les nombres de courbes fondamentales irréductibles sur F et TF.

A titre d'exemple, prenons pour F une quadrique, pour T sa projection sur un plan F′ d'un centre de perspective sur la surface. On a alors $e = 2$, $e' = 1$, par suite $R_2(F) = R_2(F') + 1 = 2$, car sur le plan F′ tout Γ_2 est $\sim$ un multiple d'une droite.

Une étude très complète des courbes exceptionnelles a été faite par Castelnuovo-Enriques [*a*]. Ils ont démontré :

XXIV. *Lorsque* F *n'est pas la transformée birationnelle d'une surface réglée, elle peut toujours être transformée birationnellement en* F′ *non singulière et privée de courbes fondamentales.*

Il serait fort désirable que l'on établisse un théorème semblable pour les variétés supérieures.

Dans le même travail, les deux géomètres italiens ont étudié l'effet des transformations birationnelles sur divers invariants, notamment sur I_2, invariant de Zeuthen-Segre de F. Voir, pour le comportement du nombre $\rho = R_2(\mathfrak{A})$, Severi [*k*]. Il est aussi exprimé par (18), ce qui ressort d'ailleurs fort clairement de ce qui précède. Pour plus de renseignements sur cette question, voir [6 *c*].

IV. — Systèmes de courbes sur une surface au point de vue algébro-géométrique. Invariants numériques. Théorie de la base (Severi).

16. Systèmes linéaires sur une surface. Opérations fondamentales. — La théorie des surfaces est de beaucoup la plus riche et la mieux perfectionnée. C'est donc d'elle que nous allons nous occuper tout d'abord.

Nous avons déjà introduit le système complet unique $|C|$ défini par une courbe C donnée. Soient $|C|$, $|D|$ deux tels systèmes. Alors C, D étant deux quelconques de leurs courbes, $C + D$, courbe dont elles sont les deux composantes, définit un système complet unique indépendant des deux courbes spéciales dont on est parti. C'est le système *somme* de $|C|$ et $|D|$ et que l'on désigne par $|C + D|$.

De même, étant donnés $|C|$, $|D|$, s'il existe une C composée d'une D et d'une autre courbe E, cette dernière définit un système complet unique $|E|$ [Enriques, c], *différence* des deux autres, désigné par $|C - D|$. De là au système $|\Sigma\lambda_i C_i|$, la transition est immédiate. Même quand les C_i sont toutes effectives, ce système peut fort bien ne pas exister; exemple, $|-C| = |C - 2C|$. Dans ce cas, il est dit *virtuel* [23 g].

Il est à peine besoin d'observer que toute courbe de $|C \pm D|$ est $\sim C \pm D \pmod F$.

17. Genre et degré virtuels d'une courbe sur F. — Ce sont deux invariants birationnels simultanés d'une courbe et de F, introduits par Enriques [a, b, c] et désignés par $[C]$ et $[C^2]$ [23 k]. Les définitions ci-dessous, en rapport avec [G, Chap. XV; 16 a], sont beaucoup plus simples que celles usuelles.

Tout d'abord, le degré virtuel $[C^2] = (C^2)$, indice de Kronecker de C et d'un cycle $\sim C$. Lorsque C appartient à un système continu, irréductible (à courbe générique irréductible), sans points-bases, $[C^2]$ est le nombre d'intersections de deux courbes arbitraires du système. On définit de même $[CD]$ nombre virtuel d'intersections de C et D, comme $= (C.D)$. Lorsque C et D sont des courbes arbitraires de deux systèmes continus du type précédent, ce nombre est aussi celui de leurs intersections.

Le genre virtuel $[C]$ offre quelque peu plus de difficultés. Supposons d'abord C effective, irréductible, courbe totale d'un système complet, sans points-bases, $|C|$, dont la courbe générique a le même genre que C. Alors ce genre est par définition $[C]$. On observera que $|C|$ est irréductible.

Soient maintenant $|C|$, $|D|$ deux systèmes complets, irréductibles, sans points-bases. Alors $|E| = |C + D|$ l'est également, et entre les genres subsiste la relation suivante [Noether, 6, p. 685, 16 h] :

$$E = [C] + [D] + [CD] - 1. \tag{19}$$

D'ailleurs, (V),

$$[E^2] = [C^2] + 2[CD] + [D^2]. \tag{20}$$

Par suite [23 *k*],

$$(21)\qquad 2[E]-[E^2]-2=2[C]-[C^2]-2+2[D]-[D^2]-2.$$

Ainsi, la *fonction numérique de* C, $\varphi(C)=2[C]-[C^2]-2$ *est une fonction additive de courbes*, tant que toutes les courbes considérées sont des courbes effectives totales de systèmes linéaires irréductibles et sans points-bases.

Soit maintenant C une courbe absolument quelconque, effective ou virtuelle sur F. On a $C\sim D-E$, et, lorsque C est effective, même $|C|=|D-E|$, où D et E ont les propriétés ci-dessus. On définira $\varphi(C)$ par la relation $\varphi(C)=\varphi(D)-\varphi(E)$, et comme $[C^2]$ est connu, on en tire le genre virtuel [C]. Grâce au fait que φ est une fonction additive, $\varphi(C)$, donc C, ont une valeur indépendante du choix des courbes particulières D, E dont la différence est C. Ce sont donc bien des caractères numériques de C elle-même.

Il est à peine besoin d'observer que la dimension r du système complet $|C|$, dont une courbe effective donnée est une courbe totale, est également un invariant birationnel simultané de C et F. Nous verrons plus loin que les trois invariants ainsi obtenus ne sont pas complètement indépendants (n° 19).

18. Système canonique. Invariants birationnels de F. — Pour avoir des invariants birationnels de F elle-même, il suffit clairement d'obtenir des courbes ayant une relation birationnellement invariante par rapport à F. Les plus importantes sont celles du système *canonique* $|K|$. On peut les définir de plusieurs manières. Voici peut-être la plus élégante [Enriques, *c*] : On part d'un système, irréductible, sans points-bases $|C|$, de dimension $r\geqq 2$; puis on considère un réseau linéaire de $|C|$ (sous-système de dimension 2). Parmi les courbes du système, il y en aura à points singuliers exceptionnels. Le lieu de ces points singuliers (comptés avec une multiplicité convenable, égale à *un* pour les points doubles) est la courbe jacobienne du réseau. Par exemple, dans le cas des sections planes de F dans S_3, ce lieu est l'intersection avec une première polaire en dehors de la courbe double. Les jacobiennes sont toutes courbes totales d'un système linéaire unique, le système jacobien $|C_j|$ de $|C|$. Si $|D|$ est de même type que $|C|$, on a

$$(22)\qquad |(C+D)_j|=|C_j+3D|=|D_j+3C|.$$

Par suite, $|C_j - 3C|$, qui ne dépend pas de $|C|$, est un système invariant de F. Mais $|C'|$ est un invariant *relatif*, car s'il existe, il comprend les courbes exceptionnelles dites *de première espèce* (transformables en un point ordinaire sans introduction d'autres courbes exceptionnelles). Soit E leur somme. Le système

$$|C_j - 3C - E| = |K|,$$

ou système *canonique*, est un invariant absolu de F. Il donne lieu aux invariants numériques absolus suivants : 1° le genre géométrique p_g = nombre de courbes K linéairement indépendantes; 2° le plurigenre P_i ou nombre semblable pour $|iK|$; 3° le genre virtuel $p_1 = [K]$ et le degré virtuel $p_2 = [K^2]$. On a toujours $p_2 = p_1 - 1$.

On définit parfois le système canonique comme égal à $|C_j - 3C|$, mais alors il n'est plus qu'un invariant relatif. Le genre virtuel correspondant est, en général, désigné par ω (et non pas par p_1 comme nous l'avons fait à tort dans [G, p. 317]). D'ailleurs, $p_1 - \omega$ est égal au nombre de courbes exceptionnelles de première espèce.

Il y a une autre manière d'introduire le système canonique, également intéressante. Au système $|C|$ correspond un système *adjoint* $|C'|$, caractérisé par le fait qu'il découpe une série spéciale maximum sur toute C. On a aussi $|C' - C - E| = |K|$, car en fait $|C'| = |C_j - 2C|$ comme le montre la considération des sections planes de F quand elle est dans S_3.

Le système adjoint conduit à la considération d'un nouvel invariant absolu, le genre arithmétique p_a. Soient r, r' les dimensions respectives de $|C|$ et $|C'|$, avec $r \geqq 1$ et $|C|$ irréductible. Alors

$$p_a = r' - [C] + 1$$

[Zeuthen, 6*c*; D_2, p. 437; 23 *m*]. La différence $q = p_g - p_a$ ou *irrégularité* de F est égale à l'entier ainsi désigné au n° 14 (th. XXI). Voir à ce sujet plus loin (n° 23). On a toujours $p_g \geqq p_a$, ou bien $q \geqq 0$, et la surface est *régulière* pour $q = 0$, *irrégulière* autrement. Lorsque $p_a < -1$, elle est birationnellement transformable en une réglée [Castelnuovo, *e*].

Lorsque F est dans S_3 et n'a que des singularités ordinaires (courbe double D à points triples), les invariants peuvent être définis de façon assez simple. On appelle surface *adjointe* à F une surface qui passe par D. Soient m l'ordre de F, $|H|$ le système des sections planes, p le genre d'une H générique. $|H'|$ est le système découpé par les surfaces adjointes d'ordre $m-3$, $|K| = |H' - H - E|$ celui découpé par les surfaces adjointes d'ordre $m-4$ en dehors de E. Par suite, p_g est le nombre de ces surfaces linéairement indépendantes. La *postulation* de D, c'est-à-dire le nombre de relations qu'elle impose entre les coefficients de la surface d'ordre l (au-dessus d'une certaine valeur), la plus générale la contenant, est une expression $\varphi(l)$, où φ est un polynome à coefficients entiers. On définit alors p_a par la relation $p_a = \binom{m-1}{3} - \varphi(m-4)$. C'est ce que serait p_g si la formule de postulation de D était valide à partir de $l = m-4$. Les surfaces régulières à singularités ordinaires ont donc la propriété que la postulation de D entre en jeu dès $l = m-4$. On voit de suite qu'une surface sans singularités est régulière, que l'irrégularité se traduit par certaines propriétés spéciales de la courbe double.

Quant à I_2, n étant la classe de F, on aura $I_2 = n - m - 4p$.

Ces définitions projectives des caractères de F laissent entièrement ouverte la question de leur invariance birationnelle.

Pour plus de détails sur les invariants, voir [6 *c*].

19. Théorème de Riemann-Roch et ses généralisations. — Soit C une courbe donnée, effective ou virtuelle. On entend par son *indice de spécialité* i le nombre de courbes linéairement indépendantes du système complet $|K - C|$, de sorte que $i - 1$ en est la dimension. Lorsque C est effective, *non spéciale*, c'est-à-dire n'est pas la composante d'une K, $i = 0$.

XXV. *Théorème de Riemann-Roch généralisé. La dimension* r *du système complet* $|C|$ *satisfait à*

$$r \geqq s = [C^2] - [C] + 1 + p_a - i. \tag{23}$$

Cette proposition fort importante a été obtenue par étapes successives par Noether, Enriques, Castelnuovo, Severi [voir 6 *c*, p. 706]. Lorsque $r = s$, $|C|$ est *régulier*.

Étant donné un cycle algébrique, C, de caractères $[C^2]$, $|C|$, i connus, existe-t-il une courbe effective $\sim C$? La réponse est fournie par ce théorème de Severi [*f*] :

XXVI. *Lorsque* $s \geqq 0$, *la réponse est affirmative; il y a au moins un* $|C|$ *et sa dimension* $r \geqq s$.

20. Systèmes continus non linéaires. — Une courbe effective C peut aussi appartenir à un système continu non linéaire. Désignons par $\{C\}$ le système continu complet (le plus ample) dont C_1 est la courbe totale.

XXVII. *Lorsque l'entier s défini par* (23) *est* $\geqq 0$, $\{C\}$ *est composé d'*∞^q *systèmes linéaires* [Enriques-Severi, 6 *c*].

XXVIII. *Dans les mêmes conditions, la variété des systèmes linéaires dont se compose* $\{C\}$ *est une variété abélienne de genre* q [Castelnuovo, *c*].

Cette variété abélienne, qui est unique pour F, est *la variété de Picard* de la surface. Pour des renseignements ultérieurs sur ces variétés, voir [G, Chap. XVII].

21. Équivalence algébrique. Son identité avec l'homologie. Théorie de la base. — On dit, avec Severi [*k*], que deux courbes C, D sont algébriquement équivalentes, et l'on écrit $C \equiv D$ lorsqu'il existe une courbe E telle que $|C+E|$ et $|D+E|$ soient des éléments d'un même système continu composé d'∞^q systèmes linéaires. Lorsque F est régulière, cela revient simplement à demander que $|C|$ et $|D|$ coïncident. Albanese [*a*] a étudié d'une façon générale la structure des systèmes continus de courbes et a introduit plusieurs types d'équivalence, mais celle ci-dessus nous suffira.

XXIX. *Critère d'équivalence de Severi* [*k*]. *Pour que* $C \equiv D$, *il faut et il suffit que* C *et* D *soient de même ordre et vérifient*

$$[C^2] = [CD] = [D^2].$$

Pour le montrer, H étant une section hyperplane de F, on calcule le nombre s de XXV pour $mH + t(C-D)$. Supposons $C \leqq D$. Lorsque m est suffisamment élevé mais fixe, et t dépasse une certaine limite, l'indice de spécialité $i \geqq 0$, et par un calcul fort simple, on trouve $s \geqq 0$. Donc la courbe est effective et fait partie d'un système complet composé d'∞^q systèmes linéaires. Comme les courbes en question ont toutes le même ordre, le nombre de ces systèmes complets différents est fini. Donc, il y a au moins deux t différents, soient t', t'', tels que

$$mH + t'(C-D) \quad \text{et} \quad mH + t''(C-D)$$

coïncident. Par suite,

$$(t'-t'')C = (t'-t'')D.$$

Au lieu d'écrire $C = D$, on écrira tout aussi bien $C - D = 0$. De là à attribuer un sens à une relation $\Sigma\lambda_i C_i = 0$, il n'y a qu'un pas. Lorsqu'une telle relation subsiste, on dit que les C sont algébriquement dépendantes. De son critère, Severi déduit [*k*]:

XXX. *Pour que* $C_1, \ldots, C_n$ *soient algébriquement dépendantes, il faut et il suffit que la matrice*

$$\left\| \begin{matrix} [C_i H] \\ [C_i C_k] \end{matrix} \right\|$$

soit de rang $< n$.

XXXI. *Critère d'équivalence de Lefschetz* [*e*; B]. *Pour que* $C = D$, *il faut et il suffit que* $C \sim D \pmod{F}$.

La démonstration complète est basée sur des considérations analytiques auxquelles nous retournerons plus loin. Albanese [*c*] a montré par voie algébrique ce théorème légèrement plus restreint : *Pour que* $\lambda C = \lambda D$, *il faut et il suffit que* $C - D \approx 0$, c'est-à-dire que $C - D$ soit un diviseur de zéro. En effet, si $\lambda C = \lambda D$, il existe une E telle que $\{E + \lambda C\}$, $\{E + \lambda D\}$ constituent le même système continu composé d'∞^q systèmes linéaires; donc les cycles $E + \lambda C$, $E + \lambda D$ peuvent être déformés l'un en l'autre et partant $C \approx D$. Réciproquement, si $C \approx D$, d'après VII, $(C.H) = (D.H)$, $(C^2) = (C.D) = (D^2)$, donc, d'après XXIX, $\lambda C = \lambda D$.

Grâce au critérium précédent, les S. F. du n° 13 deviennent les bases intermédiaires et minima de Severi [*k*, *l*, *p*], de sorte que, par exemple, pour $\rho > 1$, une C quelconque est exprimée par des relations

$$\lambda C = \lambda \sum \lambda_i C_i, \qquad C = \sum \lambda_i C_i + \sum \mu_j D_j$$

en termes de ρ ou de $\rho + \zeta$ courbes effectives. Pour $\rho = 1$, il peut devenir nécessaire de prendre dans le second cas $\zeta + 1$ courbes effectives.

XXXII. *Pour que des courbes données* $C_1, \ldots, C_n$ *soient indé-*

pendantes, ii faut et il suffit que le déterminant $|C_i C_k]| \neq 0$. *Pour qu'elles constituent un S. F. intermédiaire, il faut et il suffit que* $n = \rho$ *et que le déterminant ait sa valeur absolue minimum* [Severi, *k*, *l*].

Voir aussi à ce sujet le théorème VIII.

XXXIII. *Le nombre* ρ *des courbes algébriquement distinctes est fini.*

Severi [*k*] le démontre en ayant recours aux intégrales simples à courbes logarithmiques de Picard (*voir* plus loin n° 24). A l'aide du critère de Lefschetz, c'est un corollaire immédiat du fait que $R_2(\mathfrak{A}) \leqq R_2(F)$ un nombre fini ($\mathfrak{A}$ module algébrique).

On peut établir directement [Severi, *l*] que le nombre de courbes distinctes C, D telles que $C \neq D$, $\lambda C = \lambda D$ a un maximum fini qu'il désigne par σ. Il en résulte qu'il y a $\sigma - 1$ courbes virtuelles distinctes dont un multiple $= 0$. Appelons-les diviseurs algébriques. Il y a naturellement un entier analogue au ζ du n° 13. On peut démontrer cependant, mais par voie analytique [Lefschetz, *e*, B] (*voir* aussi plus loin n° 30), ce théorème :

XXXIV. *Les nombres* σ, $\sigma_2(\mathfrak{A})$, $\sigma_2(F)$ *sont égaux, et il en est de même des* ζ *correspondants.*

Pour F, les cycles linéaires ou superficiels, les cycles algébriques, l'équivalence algébrique ne donnent donc lieu qu'à un seul σ et un seul ζ.

On connaît des exemples de surface au $\sigma > 1$ [Severi, *l*; Godeaux, *a*, *b*; Lefschetz, *e*, p. 362]. L'invariant ζ a été introduit ici pour la première fois. Dans les exemples de Godeaux, σ est un nombre premier quelconque, et pour eux $\zeta = 1 < \sigma$. Par un procédé bien défini [16 *e*, p. 362], on peut déduire des surfaces de Godeaux des exemples de surfaces à ζ aussi grand que l'on veut.

Dans tout ce que nous avons dit, partout où intervient ζ, il faut le remplacer par un quand $\sigma = 1$.

Il n'est peut-être pas inutile de faire l'observation suivante :

Lorsque $\sigma > 1$, la surface F possède des cycles linéaires diviseurs de zéro, c'est-à-dire dont un multiple ~ 0 sans qu'eux-mêmes le soient. Pour une telle F, le groupe topologique de Poincaré [a] n'est certainement pas l'identité. Voir à ce sujet Zariski [a].

V. — Intégrales de fonctions rationnelles sur une surface.

22. Intégrales doubles de première espèce. — Supposons F dans S_3 à singularités ordinaires, et soient $f(xyz)=0$ son équation, m son ordre, $|H|$ le système des sections planes, H_x, H_y, ... les sections génériques x ou $y=$ const., p le genre d'une H arbitraire.

Par analogie avec les intégrales abéliennes, on est conduit à envisager les intégrales

$$\text{(24)} \qquad \int\int_{K_2} R(xyz)\,dx\,dy \qquad \text{(R, fonction rationnelle)}$$

prises sur des complexes analytiques. En théorie on devrait d'abord étudier *toutes* les intégrales doubles avant de passer aux intégrales simples, ou *vice versa*. Il sera plus conforme à l'ordre historique, et surtout plus pratique de considérer tout d'abord les intégrales doubles de première espèce, puis toutes les intégrales simples et ensuite les intégrales doubles de seconde espèce.

L'intégrale (24) est de *première espèce* [Noether, a], si elle est finie pour toute E_2 analytique sur F. Elle l'est alors pour tout K_2 analytique. Dans ce cas, (24) est réductible à la forme [Picard, D_1 Chap. VII],

$$\text{(25)} \qquad \int\int \frac{Q(xyz)\,dx\,dy}{f'_z},$$

où Q est un polynome adjoint (zéro sur la courbe double) d'ordre $m-4$. Les polynomes $Q=0$ découpent F, en dehors de la courbe double, suivant le système canonique complet. Par suite, le nombre d'intégrales de première espèce linéairement indépendantes (à coefficients différentiels linéairement indépendants) est égal au genre géométrique p_g. Comme les intégrales de première espèce sont de type évidemment birationnellement invariant, il en résulte d'une autre manière l'invariance absolue de p_g.

Si K_2 est un cycle, (24) est une *période* de l'intégrale. Les renseignements que l'on possède sur ces périodes sont assez faibles. Aux cycles à périodes nulles se rattache un critère transcendant d'équivalence des courbes [Lefschetz, B, *e*], auquel on reviendra plus tard.

Une intégrale double de première espèce peut-elle être sans périodes? C'est là une question à laquelle la réponse négative est des plus faciles pour les intégrales abéliennes. Ici, par contre, il en est tout autrement. Les renseignements que l'on possède se bornent à ceci [Lefschetz, *e*, p. 350] :

XXXV. *Soit t une variable d'homogénéité. Pour que* (25) *soit sans périodes, il faut et il suffit que l'on puisse trouver quatre polynomes adjoints d'ordre m* — 3 A, B, C, D, *tels que*

$$(26) \qquad \begin{cases} A'_x + B'_y + C'_z + D'_t \equiv Q, \\ A f'_x + B f'_y + C f'_z + D f'_t \equiv 0. \end{cases}$$

Les trois types suivants de surfaces assez importants dans la pratique ne peuvent posséder d'intégrales de première espèce sans périodes : Surfaces intersections complètes sans singularités dans S_r (sauf les quadriques et cubiques de S_3, les quartiques de S_4, toutes rationnelles, donc sans intégrales de première espèce); plan double [$z^2 = f(xy)$]; surfaces images des paires de points de deux courbes (produit des deux courbes); surfaces hyperelliptiques. Pour les deux premiers types, voir Lefschetz [*e*, p. 358]; pour le dernier, la vérification est immédiate, car on sait calculer les périodes des intégrales [B, 16 *e*]. Voir également sur les mêmes questions Severi [*y*].

23. Intégrales simples des deux premières espèces. — Ces intégrales, introduites par Picard [D_1], sont de type

$$(27) \qquad \int R\,dx + S\,dy, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x} \qquad \text{(R, S, fonctions rationnelles).}$$

En écrivant les dérivées partielles sous la forme ci-dessus, il est toujours convenu que z est la fonction de x, y définie par $f(xyz) = 0$. L'intégrale est une fonction analytique des x, y, de ses limites d'intégration. La classification se fait comme pour les intégrales abéliennes. En particulier, (27) est de première espèce si elle est finie pour tout chemin d'intégration, de seconde espèce si elle se conduit au voisinage de ses courbes d'infini comme une fonction rationnelle, de troisième espèce autrement. Dans ce dernier cas, il y a des courbes logarithmiques. Nous allons d'abord considérer les deux premières espèces. Picard observe [D_1] qu'il y a p intégrales de première espèce, $2p$ de seconde espèce, linéairement indépendantes, attachées à H_y et de forme

$$(28)\qquad \int \frac{P(xyz)\,dx}{f'_z} \qquad \text{(P, polynome adjoint).}$$

Pour les intégrales de première espèce, P est bien entendu d'ordre $m-3$ en x, z, et en fait d'ordre $\leqq m-2$ en xyz [Picard, D_2, p. 437; Severi, m]. Pour les mêmes intégrales, la condition d'intégrabilité se réduit à ceci : à chacune correspondent quatre polynomes homogènes en $xyzt$, d'ordre $m-3$, A, B, C, D, tels que [D_1, Chap. V]:

$$(29)\qquad \begin{cases} A'_x + B'_y + C'_z + D'_t \equiv 0, \\ A f'_x + B f'_y + C f'_z + D f'_t \equiv 0. \end{cases}$$

Ce sont les mêmes relations que (26) avec Q remplacé par zéro.

Les périodes de (28) par rapport aux cycles linéaires invariants sont des polynomes en y. Partant de là, on peut construire une intégrale

$$(30)\qquad \int R\,dx = \int \frac{P(xyz)\,dx}{A(y) f'_z} \qquad \text{(P, polynome adjoint; A, polynome)}$$

à périodes constantes par rapport aux mêmes cycles. Grâce au fait que $\frac{\partial}{\partial y}\int R\,dx$ est sans périodes, on arrive à construire S telle que l'intégrale (27) formée avec les deux soit une intégrale simple de deuxième espèce. On obtient ainsi $R_1(F)$ intégrales de ce type soient $J_i\,(i=1, 2, \ldots, R_1)$ linéairement indépendantes. Étant donnée une autre quelconque, J, il existe une combinaison $J + \Sigma c_i J_i$ sans périodes, donc rationnelle sur F. Par suite :

XXXVI. *Le nombre maximum d'intégrales simples de seconde espèce linéairement indépendantes est égal à* $R_1(F)$ [Picard, D_1, Chap. VI].

Severi [d] a fait l'étude des courbes polaires des intégrales de seconde espèce. Il a montré qu'à une fonction rationnelle près, on peut réduire toute intégrale à n'avoir qu'une seule courbe polaire C d'ordre *un* appartenant à un système linéaire convenable. Au voisinage de C une intégrale J quelconque se conduit comme une fonction rationnelle $\varphi(xyz)$, c'est-à-dire que $J - \varphi$ est holomorphe au voisinage d'un point arbitraire de C. Les points d'indétermination sur C d'une φ (définie d'une certaine manière précise) se composent de points fixes et de points variables avec J. Le groupe G de ces derniers est un groupe arbitraire d'une certaine série linéaire *complète* d'ordre $[C^2]$ sur C (série caractéristique découpée par les courbes infiniment voisines du même système continu complet [23 *b*]. De là, et en combinant avec certaines propriétés de la série caractéristique linéaire (découpée par $|C|$; [6 *c*, 8 *a*]), on déduit que l'excès du nombre maximum des intégrales de seconde espéce linéairement indépendantes sur celles de première espèce $\leqq p_g - p_a$.

On rattache à ce qui précède un important théorème, résultat des efforts combinés de tout un groupe de géomètres qui, outre Severi, comprend Humbert, Picard, Castelnuovo et Enriques [*voir*, pour son histoire très complexe, D_2, p. 495, 6 *c*, 23 *v*, *x*]. Soit d'abord r le nombre d'intégrales de première espèce. On a, en vertu de ce qui précède, $R_1 - r \leqq p_g - p_a = q$. D'un autre côté, on déduit par des raisonnements surtout géométriques, $2r \leqq R_1$, d'où $r \leqq q$, $R_1 \leqq 2q$, puis finalement que partout le signe d'égalité est seul à prendre. Donc $2r = R_1 = 2q$, qui exprime la proposition en question. D'une façon précise :

XXXVII. *Le nombre d'intégrales simples de première espèce est* $\frac{1}{2}R_1$ *et cet entier* $= q$.

On a ainsi identifié l'irrégularité géométrique q, avec ce que l'on pourrait appeler l'irrégularité « topologique », $\frac{1}{2}R_1(F)$. Comme les intégrales de première espèce sont de type invariant par définition, $p_g - p_a$, comme p_g, est un invariant absolu, et partant il en est de même de p_a.

Severi [*f*, *h*] a étendu aux intégrales de première espèce nombre des propriétés classiques des intégrales abéliennes de même espèce, notamment celles relatives aux intégrales normales. Soient $u_1, \ldots, u_q$ ces intégrales pour la première espèce. Il leur correspond une certaine matrice aux périodes

$$\| \omega_{j\mu} \| = \left\| \frac{1}{e_j} \delta_{jk};\ \tau_{jk} \right\| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, q),$$

où les δ sont les termes de la matrice unité, les e des entiers, et $\tau_{jk} = \tau_{kj}$. En général on ne peut pousser cette fois la réduction plus loin, comme le montre l'exemple des surfaces hyperellitiques. La présence des e introduit certaines complications, notamment quand il s'agit des extensions du théorème d'Abel [Severi, f, h]. Cet auteur obtient cependant plusieurs critères importants pour savoir si des courbes données appartiennent ou non à un même système linéaire. Ils se rapportent aux sommes abéliennes des u à partir d'un point fixe sur F jusqu'aux intersections avec une courbe C. Mentionnons :

XXXVIII. *Soit* C *variable dans un faisceau linéaire avec* $[C^2] > 0$. *Pour qu'un système continu* $\{D\}$ *soit contenu totalement dans un système linéaire, il faut et il suffit que les sommes abéliennes relatives aux intersections de* C *et* D *soient constantes.*

Severi [w] a aussi fait l'étude des *courbes* intégrales des intégrales de première espèce sur F. Il a annoncé en particulier :

XXXIX. *Soit u une intégrale de première espèce. Le nombre de courbes intégrales de* $du = 0$, *possédant un point double, est en général fini et égal à* I_2+4. *Le groupe de ces points doubles caractérise complètement l'intégrale.*

Les propriétés des intégrales simples et doubles de première espèce et des invariants numériques associés ont été employées avec grand succès pour la classification de divers types de surfaces. Pour ces recherches que nous ne pouvons examiner ici, voir [6 c].

Rappelons enfin une relation importante entre les intégrales simples et doubles de première espèce. Soient u, v deux intégrales simples de première espèce fonctionnellement indépendantes. $\int\int \frac{D(u, v)}{D(x, y)} dx\, dy$ est alors une intégrale double de première espèce, [Noether, a]. De Franchis a d'ailleurs montré que si le jacobien de u, v est $= 0$, la surface possède un faisceau irrationnel de courbes. Voir aussi à ce sujet [D_1, Chap. V, 23r, 6c, 21, 7c].

24. Intégrales simples de troisième espèce. — Picard part du problème suivant [D_2] : Soient $C_1, \ldots, C_r$ des courbes quelconques sur F.

Trouver une intégrale abélienne de troisième espèce de H_y,

$$(31) \qquad \int R(xyz)dx \qquad \text{(R, fonction rationnelle)}$$

telle que : 1° les points d'intersection des C avec H_y en sont les seuls points logarithmiques ; 2° les périodes logarithmiques par rapport aux C_i sont égales à une même constante ; 3° les autres périodes sont également constantes. Pour résoudre la question, on observe qu'on peut obtenir une intégrale J_i de type (31), ayant pour points logarithmiques ceux sur C_i, avec une période $+1$, et ceux à l'infini, avec une période constante convenable. Soient $I_1, \ldots, I_{2p}$, $2p$ intégrales de seconde espèce, telles que (31), linéairement indépendantes. On démontre que si le nombre de courbes C dépasse une certaine valeur $\rho + 1 > 1$, il est toujours possible de former une intégrale

$$\sum a_h(y) I_h + \sum c_k J_k \qquad (a_h, \text{ fonction rationnelle; } c_k, \text{ constante}),$$

à périodes toutes constantes, les périodes logarithmiques n'étant pas toutes nulles. De là on déduit, comme pour la seconde espèce, l'existence d'une intégrale simple de F aux seules courbes logarithmiques C. Par suite :

XL. *Il existe un nombre* ρ *tel que* F *possède une intégrale simple ayant pour courbes logarithmiques* $\rho + 1$ *courbes arbitraires. Par contre il y a des ensembles de* ρ *courbes de* F *qui ne sont certainement pas les seules courbes logarithmiques d'une intégrale simple.* [Picard, D_2, Chap. IX].

On doit à Severi le théorème suivant [*k*], qui fait le pont entre le résultat de Picard et la théorie de la base :

XLI. *Pour que les courbes* C_i *soient courbes logarithmiques uniques d'une intégrale simple, il faut et il suffit qu'elles soient algébriquement dépendantes.*

C'est de là que Severi a conclu que F possède au plus un nombre fini de courbes algébriquement distinctes, précisément le nombre ρ ci-dessus.

Supposons la condition nécessaire satisfaite. Soient

$$\sum \lambda_{ih} C_h = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

les diverses relations de dépendance entre les C. Les périodes logarithmiques d'une intégrale quelconque sont de la forme $\Sigma x_i \lambda_{ih}$, où les x sont des constantes arbitraires [Severi, *k*].

25. Intégrales doubles de seconde espèce. — Voici la définition de Picard [D_2] à qui elles sont dues : J, intégrale double de fonction rationnelle, est de seconde espèce, si à tout point A sur F il correspond une intégrale

$$(32) \qquad \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy \qquad (\text{U, V, rationnelles}),$$

telle que la différence entre J et elle soit finie au voisinage de A. Lefschetz [*d*, B] modifie légèrement la définition en remplaçant « tout point A » et « voisinage de A » par « toute courbe d'infini C », et « voisinage d'un point arbitraire de C » ; les deux définitions sont équivalentes même quand on considère une F à singularités quelconques. Aux intégrales (32) Lefschetz [*d*] donne le nom « d'intégrales impropres de seconde espèce ». Elles jouent ici un peu le rôle des fonctions rationnelles pour les intégrales abéliennes.

XLII. *Une transformation birationnelle quelconque ne change pas la forme de* (32). *Par conséquent elle change les intégrales propres de seconde espèce* [*intégrales non de forme* (32)] *en intégrales propres, les intégrales impropres en intégrales impropres* [Picard, D_2].

Des intégrales de seconde espèce données sont linéairement indépendantes s'il n'y en a pas de combinaison linéaire impropre. Picard [D_2] introduit le nombre maximum ρ_0 de telles intégrales. D'après XLII, ρ_0 est un invariant absolu.

Pour déterminer ρ_0, Picard [D_2] suit cette voie : 1° Il réduit les intégrales à une forme normale ; 2° en se basant sur les propriétés des périodes des intégrales réduites (et il n'en considère pas d'autres), il énumère les intégrales propres. Lefschetz, au contraire [*d*, B], fait un large appel à la topologie, considère *toutes* les périodes et simplifie ainsi considérablement l'analyse (beaucoup plus algébrique) de Picard. Nous allons surtout suivre [B].

Étant données tout d'abord

$$(33) \qquad \int\int \mathrm{R}(xyz)\, dx\, dy \qquad (\mathrm{R}, \text{ rationnelle})$$

et une courbe d'infini C, la période de (33) par rapport à un tube très mince, d'axe sur C, ne rencontrant nulle part les courbes d'infini, est un *résidu* de (33). Les résidus par rapport à C sont les périodes d'une intégrale abélienne bien définie attachée à C [D_1, Chap. III].

XLIII. *Pour qu'une intégrale soit de seconde espèce, il faut et il suffit qu'elle soit sans résidus* [D_2, Chap. VII].

XLIV. *Les périodes d'une intégrale de deuxième espèce par rapport à deux cycles homologues sont égales* [B].

Soit Γ_2 un cycle analytique quelconque. Pour que la période $\int\int_\Gamma$ ait un sens, il suffit certes que Γ_2 ne rencontre pas les courbes d'infini de l'intégrale. Alors C étant une quelconque d'entre elles, $(\Gamma_2.\mathrm{C}) = 0$. Réciproquement si $(\Gamma_2.\mathrm{C}) = 0$, $\Gamma_2 \sim \Gamma'_2$ ne rencontrant pas ces courbes [B].

Supposons l'intégrale de seconde espèce. Alors $\int\int_{\Gamma'}$ est bien définie. Ce sera ce que l'on entendra par *période* relativement à Γ_2. On a ainsi des périodes bien définies par rapport à tout Γ_2, tel que si C est une courbe d'infini, $(\Gamma_2.\mathrm{C}) = 0$. Bien entendu cela ne s'applique qu'aux intégrales de seconde espèce ; pour les autres cela est faux et $\int\int_{\Gamma-\Gamma'}$ est en général un résidu.

La forme normale de Picard est

$$(34) \qquad \int\int \frac{\mathrm{P}(xyz)\, dx\, dy}{f'_z} \qquad (\mathrm{P}, \text{ polynome adjoint}).$$

L'intégrale est finie, au pis aller, sur la courbe à l'infini. Il y a donc lieu d'en étudier les périodes par rapport aux cycles *finis*, ou plutôt par rapport aux cycles ayant cette propriété : Γ_2 étant l'un d'eux, $(\Gamma_2.\mathrm{H}) = 0$. Un tel cycle est homologue à un cycle fini.

Rapportons-nous-en au théorème XIX. En remplaçant C, $\mathrm{C}a_i$ et C_a, par H_y, H_{a_i} et H_a, puis désignant un sous-complexe K_2 de H_a par (H_a) (partie de H_a), on aura pour tout Γ_2 :

$$(35) \qquad \Gamma_2 \sim \sum \lambda_i \Delta^i + (H_a).$$

Pour que $(\Gamma_2 . H) = (\Gamma_2 . H_a) = 0$, il faut et il suffit que (H_a) soit fini. Soient, comme, au n° 14, δ^i le cycle évanouissant de H_y relatif au point critique $y = a_i$ et $\Omega_i(y)$ la période par rapport à δ^i de l'intégrale abélienne

$$(36) \qquad \int \frac{P\,dx}{f'_z}$$

associée à (34). On aura

$$(37) \qquad \int\int_{\Gamma_1} = \sum \lambda_i \int_a^{a_i} \Omega_i(y)\,dy.$$

XLV. *Une intégrale normale de seconde espèce arbitraire a ses* $R_2 - 1$ *périodes distinctes entièrement arbitraires. Une intégrale n'ayant que des* H_y *comme courbes d'infini, en particulier une intégrale normale, dont toutes les périodes sont nulles, est impropre de seconde espèce* [D_2].

Les périodes, quand il y en a, sont relatives à des cycles coupant la courbe à l'infini, H_∞, de façon à donner un indice de Kronecker nul; si l'on veut, ce sont des cycles satisfaisant à la relation

$$(\Gamma_2 . H) = (\Gamma_2 . H_a) = 0.$$

Donnons-nous maintenant ρ courbes indépendantes comprenant une section plane H, soient $C_1, \ldots, C_{\rho-1}$, $C = H$. Puisque $(C_i . C_k) \neq 0$ [Severi, k], étant donné Γ_2 quelconque, on peut trouver des entiers λ tels que $\Gamma'_2 \sim \lambda\Gamma_2 + \Sigma\lambda_i C_i$ satisfasse à $(\Gamma'_2 . C_i) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, \rho$, avec en tout cas $\lambda \neq 0$. On aura alors $(\Gamma'_2 . C) = 0$ quelle que soit la courbe algébrique C. On peut ainsi obtenir $R_2 - \rho$ cycles indépendants, soit Γ^j, tels que $(\Gamma^j . C) = 0$ quelle que soit C.

XLVI. *Pour qu'une intégrale normale soit impropre, il faut et il suffit que ses périodes par rapport aux* Γ^j *soient nulles* [B].

En combinant avec XLV, on a finalement :

XLVII. *Formule de Picard* [D_2, Chap. XII] :

$$\rho_0 = R_2 - \rho = I_2 + 2R_1 + 2 - \rho.$$

La dernière expression est dérivée de (17). Comme ρ_0 et R_1 sont des invariants absolus, on peut conclure de cette formule que R_2, I, ρ sont des invariants relatifs dont les variations par rapport aux transformations birationnelles sont toujours égales.

Observons encore ceci : Une intégrale de première espèce est toujours de seconde espèce et même normale. D'après XLVIII, pour savoir si ses périodes sont nulles (*voir* n° 22), il faut et il suffit de savoir si elle est impropre.

Terminons en remarquant que de la théorie des intégrales doubles de seconde espèce, on peut rapidement dériver celle des intégrales simples de troisième espèce [16 *d*, B].

VI. — Théorie analytique des systèmes de courbes sur une surface.

26. Remarques générales. — Dans les deux Chapitres précédents, nous nous sommes occupé de la théorie des surfaces algébriques telle qu'elle se présentait en somme vers 1910. La géométrie et l'algèbre y étaient prédominantes. En 1910-1911, Poincaré a publié deux Mémoires [*f*, *g*] qui ont un peu égalisé les choses à l'avantage de l'analyse. Son point de départ est l'étude de certaines sommes abéliennes pour lesquelles il a donné des expressions relativement simples. A l'aide de ces sommes, il réussit à caractériser les courbes algébriques de F, et à retrouver de façon remarquablement directe nombre de résultats déjà connus. Les recherches de Poincaré furent reprises par Lefschetz [*c*, *e*, B]. Tout d'abord il simplifia beaucoup l'analyse de Poincaré; ensuite, et surtout, faisant entrer en jeu l'*Analysis situs*, il réussit à montrer que les équivalences algébriques de Severi n'étaient autre chose que des homologies entre les courbes. Par cette voie on arrive de manière aussi simple que rapide au cœur même de la théorie des surfaces. Voir à ce sujet notamment [B, Chap. IV], et certaines notes fort suggestives de Severi [*u*].

La théorie analytique présente un ordre et une symétrie qui manquent un peu à sa rivale algébro-géométrique. C'est peut-être dû au fait qu'elle n'a pas encore atteint le même développement. Ce qu'il faudrait faire ce serait de retrouver par la voie analytique *tous* les résultats acquis, et peut-être nombre d'autres, sans cependant abandonner la simplicité relative des méthodes.

Dans ce Chapitre nous allons donner un résumé de ce que l'on a déjà obtenu dans la voie esquissée, et en particulier simplifier en quelques points le traitement de [B, Chap. IV].

27. Sur certaines sommes abéliennes. Formules de Poincaré. — La courbe adjointe d'ordre $m-3$, la plus générale de H_y, est déterminée par des conditions rationnelles par rapport aux coefficients de $f=0$, considérée comme équations en x et z seules. Donc on peut trouver p polynomes $P_h(x, y, z)$, $h=1, 2, \ldots, p$ adjoints à F, d'ordre $m-3$ en x, z et linéairement indépendants en tant que polynomes en ces deux variables seulement. Supposons qu'il existe une combinaison linéaire $\Sigma c_h P_h = L^n . P(xyz)$, où L est linéaire en y, et soit $c_1 \neq 0$. On remplace alors P_1 par P. Continuant de même, on arrivera finalement à un système analogue à celui dont on est parti, et dont les combinaisons linéaires, qui ne sont pas elles-mêmes de degré $\leqq 1$, n'admettent aucun facteur linéaire. Nous supposerons que les P_h satisfont déjà à cette condition, et que de plus ils sont dans un ordre tel que leur degré (total) ne décroît pas avec h. Si l'on désigne par $m-3+\mu_h$ celui de P_h, μ_h ne décroît pas avec h. Enfin parmi les P, un certain nombre, soient $P_{p-r+1}, \ldots, P_r$, sont de degré $\geqq m-3$.

A P_h il va correspondre une intégrale de première espèce

$$u_h = \int \frac{P_h\, dx}{f'_z},$$

attachée à H_y. Désignons par $A_1, \ldots, A_m$ les points à l'infini de cette courbe, et soit C une courbe algébrique absolument quelconque sur F. Prenons sur H_y un groupe de points $B_1, \ldots, B_r$, qui comprennent tous les points variables du groupe CH_y (intersection des deux courbes), et peut-être aussi quelques-uns des A comptés avec des multiplicités quelconques. L'essentiel c'est d'avoir un groupe de points déterminé rationnellement sur H_y. Poincaré [f, g] prend pour point de départ les sommes abéliennes

$$(38) \qquad v_h(y) = \sum_k \int_{A_1}^{B_k} du_h.$$

Il obtient pour elles des expressions qui, ici, se réduisent à

$$(39) \qquad v_h(y) = \sum \frac{\lambda_k}{2\pi i} \int_a^{a_k} \frac{\Omega_{hk}(Y)\, dY}{Y-y} + \alpha_h(y),$$

où Ω_{hk} est la période de u_h par rapport au cycle évanouissant δ^k, et α_h un polynome de degré μ_h, pour $\mu_h \geqq 0$, zéro autrement. Quant aux λ, ce sont les entiers de l'homologie (35) relative à C [16 *e*, B]

$$(40) \qquad C \sim \sum \lambda_k \Delta^k + (H_a).$$

De façon plus précise, (40) n'est pas unique, mais à toute homologie (40) correspond un choix de chemins d'intégration à droite de (38) pour lesquels les relations (39) sont vérifiées.

28. Conditions d'existence des courbes. — On doit maintenant se poser la question inverse : *Étant donné un*

$$(41) \qquad \Gamma_2 \sim \sum \lambda_k \Delta^k + (H_a),$$

on forme les fonctions $v_h(y)$ correspondantes, avec des α pour le moment indéterminés. Quand peut-on affirmer qu'il leur correspond une courbe algébrique C?

Poincaré [*f*, *g*] et Severi [*u*] se sont posés la question analytique équivalente et l'ont traitée à l'aide des fonctions Θ qui entrent en jeu dans la solution du problème d'inversion. Lefschetz [B] étudie au contraire directement les équations du problème.

En modifiant légèrement la question, il s'agit de déterminer sur H_y, p points $B_1, \ldots, B_p$, rationnellement déterminés dans leur ensemble sur la courbe. Tout dépend du système

$$(42) \qquad \sum \int_{A_1}^{B_i} du_h = v_h(y) = \sum \frac{\lambda_k}{2\pi i} \int_a^{a_k} \frac{\Omega_{hk}(Y)\,dY}{Y-y} + \alpha_h(y).$$

Reportons-nous aux résultats classiques sur le théorème d'inversion. Les v vont déterminer, pour y arbitraire d'une manière unique, un groupe de p points qui peuvent comprendre p' fois le point A_1 et $p-p'$ autres points.

Modifions le problème en ajoutant aux v les fonctions semblables relatives à $p'A_2$. Le nouveau groupe à déterminer comprendra les mêmes $p-p'$ points mentionnés $+p'A_2$. On peut donc toujours supposer $p'=0$, c'est-à-dire que le groupe de v points à déterminer sur H_y n'est pas spécial.

Les v sont holomorphes pour y arbitraire, donc le groupe des B est déterminé uniquement sur une H_y arbitraire. Soient x_j, y, z_j les coordonnées de B_j. Les fonctions symétriques élémentaires des x_j, z_j sont uniformes en y. Il s'agit de voir dans quelles conditions elles sont méromorphes dans tout le plan des y, infini compris.

Soit y_0 une valeur finie de y, non critique et $\neq a$. Il est facile de représenter paramétriquement le voisinage d'un point *quelconque* de H_{y_0} en fonction de deux paramètres dont l'un est y lui-même [Hensel, a]. Par un raisonnement familier, on en conclut que le voisinage total de la courbe est la somme d'un nombre fini ν de régions représentables paramétriquement de la façon indiquée. Cela transforme les équations (42) en un système d'équations $\varphi_k = 0$, où les φ sont holomorphes en $p+1$ variables dont l'une est t; il y a lieu de considérer en même temps un certain nombre de tels systèmes, correspondant aux diverses manières de distribuer les p points B entre nos ν régions. Ce qui est essentiel c'est que là où on les considère, pour $y = y_0$ les φ représentent *toutes* des multiplicités analytiques régulières. Donc leurs intersections sont aussi des multiplicités de ce type. On est alors assuré que la solution unique x_j, y, z_j du système considéré, pour y voisin de y_0, tend vers une limite unique et bien déterminée quand y tend vers y_0. Par suite les fonctions symétriques élémentaires des x_j, z_j sont régulières près de y_0.

On démontre que pour $y = a_j$ les équations (42) peuvent être remplacées par d'autres équivalentes du type $\varphi_k = 0$ que l'on vient de considérer. Quant à la valeur $y = a$, grâce au fait que les λ sont les entiers figurant dans l'homologie (41) d'un cycle, les seconds membres des équations (42) sont indépendants de a. Donc c'est une valeur ordinaire pour le système.

Il reste à considérer $y = \infty$. Tout d'abord on trouve que si $\mu_h \geqq 0$, le degré de $\alpha_h(y)$ ne doit pas le dépasser. A part cela ce polynome est arbitraire. Le résultat le plus expressif de toute la discussion est cependant le suivant : Pour $\mu_h < 0$, il faut que l'on ait

$$\sum^{k} \lambda_k \int_a^{a_k} y^s \, \Omega_{hk}(y) \, dy = 0, \tag{43}$$

où s est un entier quelconque $\geqq 0$ et $< -\mu_h$. Cela signifie que la période de l'intégrale double de première espèce (puisque $y^s P_h$ est de degré $\leqq m - 4$),

$$\iint \frac{y^s \mathrm{P}_h \, dx \, dy}{f'_z}. \tag{44}$$

par rapport au cycle Γ_2 donné doit être nulle. D'ailleurs toute intégrale de première espèce dépend linéairement des intégrales (44). Donc sa période par rapport à Γ_2 est nulle. On a ainsi finalement [B, **16** *e*] :

XLVIII. Théorème d'existence. — *Pour que les fonctions $v(y)$ appartiennent à une courbe algébrique* C, *il faut et il suffit : 1° que pour $\mu_h \geqq 0$, α_h soit de degré $\leqq \mu_h$; 2° que les λ soiént les entiers figurant dans l'homologie d'un cycle* (41) *par rapport auquel la période de toute intégrale double de première espèce est nulle. On aura alors* $\Gamma_2 \sim \mathrm{C} + t\mathrm{H}$.

La présence du multiple de H est due au fait que dans (41) on peut l'ajouter à (H_a) sans altérer les λ. En d'autres termes, à H correspond une homologie (41) aux λ tous nuls.

29. Application aux intégrales simples de première espèce. — A l'aide de ce qui précède on déduit rapidement nombre de conséquences importantes. Soit q le nombre de coefficients arbitraires dans les α_h, ou, si l'on veut, soit $q = \Sigma(\mu_h + 1)$, où dans la somme ne figurent que les μ non négatifs, dont le nombre est r.

La courbe C du théorème d'existence appartient à un système continu à q paramètres, les coefficients des α. Mais à chaque C doit correspondre un système de valeurs finies de ces paramètres, du moins mod leurs valeurs pour les périodes rationnelles des intégrales u_h. En s'en rapportant à la représentation dans l'espace des q variables, et en se rappelant que les intégrales n'ont de périodes rationnelles que par rapport aux R_1 cycles invariants, on trouve $q = r = \frac{1}{2}\mathrm{R}_1$. Donc q est l'*irrégularité* de la surface. De plus les α se réduisent tous à des constantes. De là on tire $q = p_g - p_a = \frac{1}{2}\mathrm{R}_1$; en outre un théorème de Picard [D_2 et Severi, *m*] en est également un simple corollaire. Enfin, résultat bien plus profond, en ayant recours à un théorème classique sur la réduction des matrices de Riemann (Picard, Poincaré, Scorza [$22a$]), on en déduit assez rapidement que les q dernières intégrales u peuvent être remplacées par d'autres à périodes constantes. A chacune de ces q intégrales correspond une et une seule intégrale simple de première espèce de F, et la surface n'en a pas d'autres. On retrouve ainsi le théorème fondamental, Poincaré [f, g]. Voir aussi Severi [u], Lefschetz [e, B].

En définitive on peut considérer les u_{p-q+h} comme les intégrales simples de première espèce de F. Les Ω correspondantes sont nulles. Comme pour les autres u les nombres μ sont négatifs, les expressions des v ont maintenant la forme relativement simple

$$(45)\qquad \begin{cases} v_h(y) = \sum \dfrac{\lambda_k}{2\pi i}\displaystyle\int_a^{a_k} \dfrac{\Omega_{hk}(Y)\,dY}{Y-y} & (h \leqq p-q); \\ v_{p-q+j} = \alpha_j, \end{cases}$$

les α étant maintenant des constantes.

30. Application à la distribution des courbes. — Dans ce qui précède, on a considéré les v relatives aux points variables du groupe CH_y plus une somme de multiples des A. Quand on étudie la distribution des courbes, il convient de se limiter aux v relatives au groupe total et à ce groupe seulement; c'est ce que l'on fera à partir de maintenant. Ces fonctions sont bien déterminées, du moins à des périodes près.

Autre remarque. — Il n'est nullement nécessaire de prendre pour $|H|$ le système des sections planes. Rien n'est changé s'il est tout simplement un système tel que celui du n° 14, et pour une bonne part on peut même prendre à sa place un système continu quelconque. En particulier dans le cas où H_y varie dans un faisceau linéaire quelconque avec au moins un point-base, il suffit de supposer que $f(xyz) = 0$, sans être l'équation de F, est celle de H_y, y n'étant plus nécessairement une coordonnée. On a alors [Severi, f] :

XLIX. *Supposons que nulle* H_y *ne soit réductible. Pour que* C *et* D *appartiennent à un même système linéaire, il faut et il suffit que les groupes* CH_y, DH_y *appartiennent toujours à une même série linéaire sur* H_y.

Sous forme analytique [B] : *Il faut et il suffit que* C *et* D *aient les mêmes* v.

Lorsque certaines H_γ sont réductibles, C peut appartenir au système linéaire somme de D et d'une somme de composantes de ces H_γ.

Étant donnée une courbe quelconque C, il existe un entier k tel que $C + kH$ détermine un système continu complet composé d'∞^q systèmes linéaires. Supposons que $\{C\}$ ait déjà cette propriété. Alors aux courbes de $\{C\}$ correspondent les mêmes λ, à un système de λ relatifs à des périodes près. De même les α individualisent les divers systèmes linéaires dont $\{C\}$ se compose. En substance, c'est là le théorème XXXVIII de Severi. A ces considérations se rattache une dérivation facile du critère d'équivalence XXXI de Lefschetz, ainsi que :

L. *Pour que* Γ_2 *soit algébrique, il faut et il suffit que les périodes correspondantes de toute intégrale double de première espèce soient nulles* [16 *e*, B].

De ce théorème on déduit :

LI. *Les cycles à deux dimensions diviseurs de zéro sont tous algébriques* [16 *e*, B].

Ceci entraîne comme corollaire XXXIV.

LII. *Le nombre* ρ *est égal au nombre de cycles à deux dimensions indépendants par rapport auxquels les périodes des intégrales de première espèce sont nulles.*

Le théorème précédent donne un moyen régulier, quoique en général peu pratique, de déterminer ρ. Il faut dire d'ailleurs qu'on n'en connaît pas d'autre. Il y a plusieurs cas où la détermination de ρ par cette méthode est des plus faciles : 1° quand F n'a pas d'intégrales doubles de première espèce; ceci comprend les surfaces réglées ($\rho = 2$); 2° quand F est la surface image des paires de points de deux courbes algébriques. (Voir sur ces deux exemples [23 *a*, *k*, D_2, 16 *c*, *e*, B].)

VII. — Variétés algébriques.

31. Systèmes linéaires. Invariants numériques. — Leur théorie a fait l'objet d'un important Mémoire de Severi [*n*]. Il a réussi à y étendre à une V_3 à singularités ordinaires un bon nombre des résultats obtenus pour les surfaces. Il est à peine besoin de dire qu'avec les dimensions, les difficultés croissent rapidement; aussi, pour $d > 3$, Severi s'est-il borné à quelques indications générales. On peut dire que tout reste à faire pour $d > 3$, et que même pour $d = 3$ il y a encore bien des points obscurs. Peut-être faudrait-il développer une technique spéciale, comme on l'a fait par exemple en topologie ou récemment en géométrie différentielle, étudier plus à fond la théorie générale des modules de formes, etc. Toujours est-il que l'emploi direct des belles méthodes des géomètres italiens devient bien ardu dès que $d > 2$.

Examinons d'un peu plus près quelques-unes des questions étudiées par Severi. On part de V_d sans singularités, plongée dans S_r. Soit $\nu(l)$ sa postulation (nombre de conditions imposées aux coefficients d'une V_{r-1} d'ordre l de S_r assujettie à contenir V_d). D'après Hilbert,

$$\nu(l) = \sum k_i \binom{l+r-i}{r-i}.$$

Severi définit alors le genre arithmétique P_a de V_d par la relation

$$P_a = (-1)^d [\nu(0) - 1]. \tag{46}$$

Il démontre que pour $d = 3$ ce nombre est un invariant birationnel absolu.

Les systèmes linéaires et leurs opérations peuvent être définis comme pour F. Étant donné $|C|$ suffisamment général, on peut introduire son système jacobien $|C_J|$. Il donne lieu à la relation

$$|(C+D)_J| = |C_J + (d+1)D| = |(d+1)C + D_J|. \tag{47}$$

Par suite, $|K| = |(d+1)C - C_J|$ est un système invariant de V_d, c'est son système canonique. Le nombre d'hypersurfaces K linéairement indépendantes est le *genre géométrique* P_g. On peut d'ailleurs, comme pour F, définir $|K|$ comme égal à $|C' - C|$, où $|C'|$ est le système adjoint à $|C|$, ou système découpant une C générique suivant son *système canonique* [23 *e*].

Lorsque V_d est projetée dans S_{d+1} en une variété d'ordre m à singularités ordinaires : V_{d-1} double, etc., soit D, et si $w(l)$ est la postulation de D, on peut aussi définir P_a par

$$(48) \qquad P_a = \binom{m-1}{d+1} - \varpi(m-d-2).$$

On doit alors montrer que les deux définitions sont concordantes, ce que Severi établit pour une V_3. La différence $q_d = P_g - P_a$ est l'irrégularité à d dimensions. Il y a lieu de considérer les irrégularités $q_i (i < d)$, ou irrégularités fixes (probablement) des V_i suffisamment générales contenues dans V_d (exemple : sections par des S_{r-d+i} arbitraires). Pour une V_3, $q_2 = \frac{1}{2} R_1 (V_d)$. On sait effectivement que les surfaces suffisamment générales ont toutes le même nombre de Betti R_1 et partant, la même irrégularité (th. XIV) [Castelnuovo-Enriques, *b*]. Dans bien des questions où entre q pour F, on est amené à considérer par exemple $q_3 + q_2$ pour V_3, peut-être des sommes d'irrégularités pour $d > 3$ [23 *n*].

Nous avons déjà défini les variétés virtuelles sur V_d ; ce sont en somme ses cycles algébriques. Étant donnée une variété quelconque effective ou virtuelle W, il y a lieu de définir son genre virtuel [W] (notation de Severi). Soient $|A|$, $|B|$ des systèmes linéaires avec les propriétés générales du n° 14, et supposons que $|A+B|$ en soit un également. Alors [Severi, *n*], les hypersurfaces étant génériques dans leurs systèmes

$$(49) \qquad [(A+B)] = [A] + [B] + [AB] \qquad (d > 2).$$

Pour une V_1 le genre numérique est le genre ordinaire et pour une V_0 le nombre de points dont se compose V_0.

Pour $d = 2$, (19) doit remplacer (49), ce qui revient à y remplacer [AB] par $[AB] - 1$. Pour $d = 1$, il faut faire $[AB] = 0$, la formule exprimant alors tout simplement que, sur une courbe algébrique, un groupe de points, somme de deux autres, a pour ordre la somme de leurs ordres.

En partant de (49) on peut résoudre de manière largement formelle le problème de la détermination du genre numérique des intersections complètes [Lefschetz, *a*], Soient D_j, C_i des hypersurfaces telles que

$$(50) \qquad \lambda_i D_i = \sum \lambda_{ij} C_j.$$

Il s'agit de déterminer le genre numérique $[D_1, \ldots, D_s]$ en termes des λ et de ceux des intersections des C. Prenons d'abord

$$|D| = |C_1 + C_2|$$

avec C_1, C_2, D variables dans des systèmes linéaires suffisamment généraux. On a, par application répétée de (49) à la relation

$$|\lambda D| = |\lambda C_1 + \lambda C_2|,$$

$$(51)\quad [(1+D)^\lambda - 1] - \binom{\lambda - 1}{d-1} = [(1+C_1)^\lambda (1+C_2)^\lambda - 1] - \binom{2\lambda - 1}{d-1},$$

vraie pour toutes les valeurs positives entières de λ. Il est entendu que partout les termes de degré $> d$ sont à remplacer par zéro et les autres par les genres. Si l'on pose

$$(52)\qquad \varphi_d(C) = \sum_1^d k(-1)^{k-1} \frac{[C^k] + (-1)^{d-k}}{k} + \frac{(-1)^d}{d},$$

on trouve, en égalant les coefficients du premier degré en λ,

$$\varphi_d(C_1 + C_2) = \varphi_d(C_1) + \varphi_d(C_2).$$

Donc φ_d est une fonction additive de C, et de même pour $\varphi_i(V_i C)$. Grâce à ceci on peut, comme au n° 17, définir les genres virtuels des intersections complètes. De là on déduit facilement que si $\lambda D = \Sigma \lambda_i C_i$, $[D]$ est un polynome aux rapports $\frac{\lambda_i}{\lambda} = \mu_i$, à coefficients fonctions linéaires des genres. On en déduit la formule valide pour $\mu_i \geqq 0$ et entier, donc dans tous les cas

$$(53)\qquad [D] = [(1+C_i)^{\mu_i} - 1] - \binom{\mu - 1}{d-1}, \qquad \mu = \sum \mu_i.$$

A droite on doit développer par la formule de Taylor relativement aux C, et ne garder que les termes de degré $\leqq d$. Formellement cette formule est encore applicable pour $d = 1$, pourvu que l'on remplace $[D]$ par $[D] - 1$. Par application répétée de (52) on arrive sans peine à la formule qui résout le problème général [16 a].

Nous sommes entrés à dessein dans des détails, car nous avons ici un exemple de la technique formelle qu'il serait nécessaire de développer davantage, pour attaquer convenablement les problèmes relatifs aux variétés supérieures. En ce qui concerne la même question, voir aussi Albanese [b], où l'on trouvera de plus des formules d'addition pour l'invariant de Zeuthen-Segre des surfaces d'une V_3.

Une fois que l'on a défini le système canonique $|K|$, et les genres numériques virtuels, on est à même d'introduire toute la série des nombres $[K^i]$ qui sont des invariants absolus de V_d. Albanese [b] étudie ces invariants et, par application répétée de (53), leur étend une relation connue pour $d=2$. Voir aussi Panelli [a, b] pour $d=3$.

Les genres numériques $[C'^i C] = [(K+C)^i C]$ constituent toute une série d'invariants numériques virtuels de C. Par exemple, pour $d=3$, on obtient ainsi les nombres virtuels P_1, P_2 (nº 18) de la surface C. A ce propos on peut faire une remarque intéressante. Pour $d=2$, on a tout simplement

$$2\varphi_2(C) = [(C'-C)C] = [KC]$$

et le fait que φ_2 est additive est un corollaire immédiat de la même propriété pour l'indice de Kronecker. Pour $d>2$ à ce que l'on sache, rien de pareil, et $\varphi_d(C)$ est une fonction *covariante* additive de C, essentiellement nouvelle.

On peut encore faire une remarque d'un autre point de vue. Partons de la relation

$$\lambda D = \sum_1^n \lambda_i C_i,$$

que nous écrirons aussi en introduisant sans hésitation des coefficients rationnels

$$D = \sum \mu_i C_i.$$

Il est entendu que l'on néglige les diviseurs de zéro, dont les genres virtuels sont d'ailleurs tous nuls. Supposons maintenant que l'on applique aux C une transformation à coefficients rationnels

$$C_i = \sum \alpha_{ij} C'_j, \qquad |\alpha_{ij}| \neq 0.$$

On aura alors

$$D = \sum \mu'_i C'_i, \qquad \mu'_i = \sum \mu_j \alpha_{ji}.$$

D'un autre côté l'expression de [D] donnée par (53) doit rester invariante. C'est donc une fonction covariante de la transformation des C. Pour des raisons évidentes d'homogénéité la somme des termes homogènes de degré donné aux μ est une fonction covariante. On obtient ainsi $d-1$ de ces fonctions. Celle du premier degré est précisément $\Sigma\mu_i\varphi_d(C_i)$, mais les autres sont plus compliquées.

De même si $D_t=\Sigma\mu_{ij}C_{ij}$, que l'on obtienne $[D_1, \ldots, D_s]$ en termes des genres des intersections des C, on en tirera une série de fonctions covariantes relativement aux transformations linéaires simultanées des s systèmes d'hypersurfaces C. Par exemple les termes de degré s linéaires aux μ_{ij} (i fixe) (multilinéaires d'ordre s), donnent lieu à un *tenseur* covariant de l'ensemble des C, etc. Ces considérations mériteraient d'être poussées plus loin.

32. Distribution des hypersurfaces. Théorie de la base. — Les renseignements que l'on possède sur l'équivalence algébrique au sens de Severi sont fort complets et la théorie de la base pour V_d présente relativement peu de faits nouveaux. Nous allons traiter surtout le cas $d=3$, dont l'analyse est un peu plus simple.

Soit $f(xyzt)=0$ l'équation de V_3 à singularités ordinaires dans un S_4, $|H|$, H_x, ... ayant le même sens que pour F. La variété possède $q_2=\frac{1}{2}R_1(V_3)$ intégrales simples de première espèce, c'est-à-dire de la forme

$$\int R\,dx+S\,dy+T\,dz, \qquad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial S}{\partial x}, \qquad \ldots \tag{54}$$

finies partout [Castelnuovo-Enriques, *b*]. Soit p le genre de la courbe H_yH_z générique. Elle possédera $p-q_2$ intégrales de première espèce $u_1, \ldots, u_{p-q_2}$ à périodes nulles par rapport aux cycles invariants, et en outre q intégrales u_{p-q_2+i} qui sont des intégrales (54) linéairement indépendantes. Pour une surface D arbitraire, on aura des sommes abéliennes correspondant aux points du groupe DH_yH_z prises à partir d'un des points fixes A de H_yH_z et ces sommes auront pour expressions

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} &v_h(y,z)=\sum{}'\frac{\lambda_k}{2\pi i}\int_a^{a_k(z)}\frac{\Omega_{hk}(Y,z)\,dY}{Y-y} \qquad (h\leqq p-q_2);\\ &v_{p-q_2+j}=\alpha_j;\end{aligned}\right.$$

le sens des diverses quantités introduites étant évident par comparaison avec la formule (39). En particulier, les α sont constantes et les λ correspondent à un certain cycle *invariant* algébrique de H_z

$$(56) \qquad \Gamma_2 \sim \sum \lambda_k \Delta^k + (H_a H_z) \qquad (\mathrm{mod}\, H_z).$$

Réciproquement à tout Γ_2 invariant algébrique et à son homologie (56) correspondent des v déterminant une surface algébrique [16 *e*].

Une surface algébrique détermine un Γ_4 algébrique. Réciproquement un Γ_4 algébrique est $\sim$ à une différence de surfaces.

LIII. *Pour que* Γ_4 *soit algébrique il faut et il suffit que* $\Gamma_4 H_z$ *le soit pour z arbitraire* [16 *e*].

LIV. *Deux surfaces coupant* H_z *suivant deux courbes totales d'un même système linéaire sont elles-mêmes surfaces totales d'un même système linéaire* [23 *e*, 16 *e*].

On définit l'équivalence algébrique comme pour F. Alors :

LV. *Il y a équivalence complète entre les quatre relations*

$$C = D, \qquad CH_z = DH_z \text{ sur } H_z, \qquad C \sim D\,(\mathrm{mod}\, V_3), \qquad CH_z \sim DH_z\,(\mathrm{mod}\, H_z)$$

qui sont toutes algébriques [23 *e*, *t*; 16 *e*, B].

LVI. *Les diviseurs de zéro pour les cycles à deux dimensions de* H_z *sont invariants. Ce sont les intersections de* H_z *avec ceux relatifs aux cycles à quatre dimensions de* V_3. *On a de plus*

$$\sigma_1(H) = \sigma_1(V_3), \qquad \zeta_1(H) = \zeta_1(V_3),$$

et ces nombres, respectivement égaux aux nombres $\sigma_4(V_3)$, $\zeta_4(V_3)$, *le sont donc par suite aux nombres* σ, ζ, *relatifs à l'équivalence des hypersurfaces de* V_3 [16 *e*].

Les théorèmes précédents n'offrent pas de difficultés sérieuses. Le théorème suivant, des plus utiles dans la pratique, est aussi décidément délicat :

LVII. *Si l'un des cycles évanouissants (nécessairement à deux* *dimensions) de* H *arbitraire est algébrique, ils le sont tous. Par suite, ou bien les cycles évanouissants sont tous algébriques, ou bien les cycles algébriques sont tous invariants. Dans le premier cas tout* Γ_2 *de* H_z *dépend des cycles évanouissants et des cycles invariants, dans le second des cycles algébriques et des cycles invariants* [16 *e*, B].

On définira plus loin (n° 37) les intégrales de seconde espèce propres ou impropres pour toutes les dimensions, et l'on introduira le nombre $\rho_0^i(V_d)$ d'intégrales linéairement indépendantes de multiplicité i.

LVIII. *Lorsque* $\rho_0^2(V_3) < \rho_0^2(H)$, *on a nécessairement* $\rho(V_3) = \rho(H)$. *De plus, si* $C_1, \ldots, C_\nu$ *constituent un S. F. pour les hypersurfaces de* V_3, *les courbes* $C_i H$ *en constituent un pour les courbes de* H [16 *e*, B].

Tout ce qui précède peut être considérablement généralisé. Soit en particulier $|C|$ un système général au sens du n° 14, sauf que C^2 se compose d'une courbe variable irréductible plus un certain nombre r de courbes fixes. La surface C a donc un groupe base; nous supposerons pour simplifier qu'elle n'a pas de points multiples isolés fixes, ou si l'on préfère, de courbes « infinitésimales » fixes. Alors le théorème précédent subsiste pourvu qu'on ajoute à l'S. F. les courbes de la base indépendantes par rapport à la C générique.

De même que l'on peut définir des intégrales de seconde espèce, on peut en définir de première espèce de multiplicité quelconque. Au lieu du théorème précis LII pour F, on n'a plus maintenant que cette proposition plus faible :

LIX. *Le nombre* $\rho(V_3)$ *est au plus égal à celui des cycles à deux dimensions par rapport auxquels les périodes des intégrales doubles de première espèce sont nulles* [16 *e*].

Il serait certainement fort désirable de démontrer que le maximum de ρ est toujours atteint, ou bien de donner un exemple du contraire. Pour tous ceux actuellement connus, notamment pour les variétés abéliennes, le maximum est effectivement atteint. Un autre cas où il en est également ainsi est celui d'une V_3 dont la somme des irrégularités est nulle [16 *e*].

Il y a un cas fort intéressant où la condition du théorème LVIII est remplie, celui où V_3 possède une intégrale triple de première espèce à périodes non toutes nulles. Alors le théorème est toujours applicable [16 *e*]. Telles sont en particulier les V_3 abéliennes.

Tout ce que l'on a dit jusqu'ici s'étend à une V_d quelconque, et même dans des conditions plus simples. La restriction du théorème LVIII est alors superflue.

33. Les bases de certaines surfaces et variétés et leurs invariants. — Leur détermination n'est jamais facile, mais dans certains cas particuliers les théorèmes qui précèdent donnent quelques renseignements précis. Pour les surfaces il s'agira chaque fois de la surface générique de son type. Le point de départ pour F est le suivant. On en considère une générique, de type donné, appartenant à une V_3 pour laquelle $\rho_0^2(V_3) = 0$, par exemple un S_3, et l'on démontre que ses intégrales doubles de première espèce ne peuvent être toutes sans périodes. Cela signifie que F possède au moins un cycle non algébrique, par conséquent $\rho_0^2(F) > \rho_0^2(V_3)$, ce qui permet d'appliquer LVIII. On arrive à traiter ainsi les cas suivants [16 *e*] :

1° *Surface non rationnelle intersection complète dans* S_r. — Sous-entendu intersection complète de $r - 2$ variétés à $r - 1$ dimensions (formes) dans S_r. La rationalité n'exclut que les quadriques et cubiques sans singularités de S_3, et la quartique intersection complète de S_4 dont la projection est une cubique de S_3. Sur toutes les autres surfaces, toute courbe est une intersection complète, ce qui signifie que H est un S. F., même plus précisément que toute courbe appartient à un $|kH|$. Pour l'espace ordinaire, ceci comprend un théorème énoncé par Noether [*voir* aussi Fano, *b*].

Il est d'ailleurs facile de montrer analytiquement que F, d'ordre $m > 3$, sans singularités dans S_3, possède en général des Γ_2 non algébriques. On peut en effet donner un exemple simple d'une F possédant une intégrale de première espèce avec au moins une période non nulle [B, p. 109].

2° V_d *intersection complète dans* S_r. — Si elle n'a pas de singularités, toutes ses hypersurfaces sont des intersections complètes. Le cas $d = r - 1$ a été étudié par Klein [*a*] (quadriques généralisées), Fano [*a*, *b*], Severi [*j*].

3° *Plan double.* — C'est la surface $z^2 = f(xy)$. Elle possède un point singulier à l'infini qui entraîne des complications. On peut cependant donner un résultat assez précis lorsqu'une au moins des composantes de la courbe de branchement $f(xy) = 0$ est arbitraire dans un système linéaire suffisamment général [16 *e*]. Contentons-nous de dire que si $f = 0$ est irréductible et sans singularités, elle constitue à elle seule un S. F.; pour les courbes finies ou infinitésimales, il suffit de lui adjoindre une seule courbe infinitésimale à l'infini. On aura donc $\rho = 2$, $\sigma = \zeta = 1$. A ceci se rattachent nombre de surfaces étudiées par Picard [D] et aussi Enriques [*voir* 6 *c*, p. 730].

4° *Variétés produit de plusieurs autres.* — On appelle *produit* de V_d, $V_{d'}$, la $V_{d+d'}$ image des paires de points de V_d, $V_{d'}$. Cette définition s'étend automatiquement au produit de plusieurs autres. Les surfaces produit de deux courbes ont été étudiées à fond par nombre de géomètres [G, Chap. XVI] à cause de leurs rapports intimes avec les correspondances singulières. C'est même à leur sujet que Severi [*a*] a été conduit à considérer pour la première fois la base pour les courbes d'une surface. Pour les invariants il suffit de considérer comme plus haut le cas de deux facteurs. Une fois connus ceux de V_d, $V_{d'}$ et l'*index de simultanéité* λ de Scorza [*a*] de leurs variétés de Picard, on détermine facilement les invariants de $V_{d+d'}$ et les S. F. [23 *a*, 16 *e*].

Cas particuliers intéressants : (*a*) $d = d' = 1$. On a alors le produit de deux courbes, et $\rho = \lambda + 2$, $\sigma = \zeta = 1$ [Severi, *a*]. Ici λ est l'indice de simultanéité des matrices aux périodes des deux courbes. (*b*) D'après ceci, pour une *surface réglée*, $\rho = 2$, $\sigma = \zeta = 1$. Soient G une génératrice, H une section plane. Puisque $(G.H) = 1$, G et H constituent un S. F. Cela entraîne la conséquence suivante : Toute courbe sur une surface réglée de S_3 est l'intersection résiduelle par rapport à une surface passant par des génératrices. A ceci se rattachent certaines formules simples pour les intersections des courbes sur la surface, leur genre, et les généralisations aux variétés réglées, dont la première remonte à Segre [23 *a*, 16 *a*, *h*].

5° *Variétés abéliennes.* — Nous ne considérerons que les variétés de rang *un*. Soit $\|\omega_{j\mu}\|$ $(j = 1, 2, \ldots, p;\ \mu = 1, 2, \ldots, 2p)$ une matrice de Riemann ou matrice aux périodes de fonctions $2p$-uplement périodiques de p variables. La variété V_p en question est le lieu des points d'un S_r, r suffisamment élevé, dont les coordonnées sont des fonctions périodiques arbitraires attachées à la matrice. Pour un résumé des résultats connus sur ces variétés, voir [G, Chap. XVII]. On peut facilement en déterminer les nombres de Betti et l'on trouve que tous les σ, ζ sont égaux à l'unité. A l'aide de la généralisation d'un théorème dû à Appell et Humbert [16 *e*, B], on trouve que toute hypersurface de V_p est obtenue en écrivant qu'une certaine fonction dite *intermédiaire* $= 0$. Elle est de plus associée à une forme alternée à coefficients rationnels $\Sigma c_\mu x_\mu y_\nu$, de $\|\omega_{j\mu}\|$ ou forme $= 0$ quand on y remplace les x et y par les éléments de deux lignes quelconques. Soit k le nombre de telles formes linéairement indépendantes. On a $\rho = k$, Bagnera de Franchis [*a*] pour $p = 2$, Lefschetz [*e*, B] pour p quelconque : $k - 1$ est un entier que Scorza [*a*] désigne sous le nom *d'indice de singularité* de la matrice. La détermination de k, donc de ρ, a été accomplie dans des cas fort étendus, décrits en détail dans [G, Chap. XVII]. Des considérations du même genre conduisent à la détermination de l'entier analogue à ρ pour les hypersurfaces réelles d'une variété abélienne réelle [16 *f*, *g*].

6° *Surfaces de genre* $p_g = 0$. — Ce sont les surfaces sans intégrales doubles de première espèce. D'après le théorème L, leurs cycles à deux dimensions sont tous algébriques. Par conséquent $\rho_3 = 0$, $\rho = R_2$. C'est là un résultat dû à Bagnera de Franchis [*a*] qui l'ont obtenu par voie géométrique. On voit que c'est un corollaire immédiat de L.

VIII. — Intégrales de fonctions rationnelles sur une variété quelconque.

34. Généralités. Digression sur les tenseurs. — Il sera commode de se donner V_d sur un S_{d+1} (on l'y projette au besoin). Soit alors $f(x_1, \ldots, x_d; y) = 0$ son équation rapportée à des axes cartésiens arbitraires. Nous écrirons souvent $f(x; y)$, $\varphi(x; y)$, ... pour désigner une fonction des x et de y. Au voisinage d'un point quelconque et puisque V_d est à singularités ordinaires, y et les x seront des fonctions holomorphes de d paramètres convenablement choisis, avec les modifications usuelles pour l'infini et les points multiples (une représentation paramétrique pour chaque nappe de V_d; un point multiple est à considérer comme autant de points distincts qu'il y a de nappes y passant). Nous avons déjà considéré les intégrales simples et doubles de F, et pour une V_d il n'y aurait pas de difficultés à écrire l'expression générale d'une intégrale k-uple sans moyens spéciaux. Il est néanmoins particulièrement commode de se servir des tenseurs, dont le mérite principal, en vérité, est de simplifier beaucoup les calculs de géométrie à n dimensions. Nous n'aurons d'ailleurs besoin que des notions les plus simples. Nous les empruntons à Veblen [E].

Un système de fonctions à p indices $A_{ij\ldots k}$ de d variables $x_1, \ldots, x_d$ est un tenseur covariant d'ordre p, lorsque quand on fait un changement de variables des x aux x' elles donnent lieu à un nouveau système $A_{ij\ldots k}$ exprimé par

$$A_{ab\ldots c} = A_{ij\ldots k} \frac{\partial x_i}{\partial x'_a} \frac{\partial x_j}{\partial x'_b} \cdots \frac{\partial x_k}{\partial x'_c}, \tag{57}$$

où il est entendu que l'on somme de 1 à d par rapport aux indices répétés. Les A sont les composantes du tenseur dans le système de coordonnées considérées.

Un tenseur est *alterné* si ses composantes changent de signe par suite d'une permutation impaire de leurs indices. Par exemple A_{ij} est un tenseur alterné d'ordre 2 lorsque $A_{ij} = -A_{ji}$.

Il est commode d'introduire les δ de Kronecker généralisés. On appelle ainsi un symbole $\delta^{ij\ldots k}_{ab\ldots c}$ dont la valeur est réglée comme ceci : 1° il est zéro à moins que les indices supérieurs et inférieurs ne soient les mêmes à l'ordre près; 2° quand ils sont les mêmes, et réductibles les uns aux autres par une permutation paire, le symbole $= +1$, quand la permutation est impaire il $= -1$.

Au tenseur d'ordre p, $A_{ij\ldots k}$, correspond un nouveau tenseur alterné d'ordre $p+1$ de composantes [E, p. 65]

$$B_{ab\ldots cd} = \delta^{ij\ldots kl}_{ab\ldots cd} \frac{\partial A_{ij\ldots k}}{\partial x_l}. \tag{58}$$

Puisque les transformées des composantes d'un tenseur sont des fonctions linéaires et homogènes de celles du tenseur initial, si elles sont nulles dans un système de coordonnées, elles le sont dans tout autre. Cela signifie que le système de relations $A_{ij\ldots k} = 0$ est invariant par rapport aux changements de variables. Par exemple $A_{ij\ldots k}$ étant un tenseur alterné, les équations $B_{ij\ldots kl} = 0$ sont invariantes.

35. Intégrales multiples. Classification. — Partons d'un tenseur alterné covariant défini par un système de fonctions $A_{ij\ldots k}(x; y)$ rationnelles sur V_d, puis considérons l'intégrale indéfinie de multiplicité p

$$\int A_{ij\ldots k}\, dx_{ij\ldots k}.$$

Nous écrivons $dx_{ij\ldots k}$ au lieu de $dx_i dx_j \ldots dx_k$, et l'on doit se rappeler que l'on somme sous le signe d'intégration. En tenant compte de la loi de transformation de l'élément différentiel, on trouve que cette intégrale multiple est un invariant. C'est dire que si l'on passe à de nouvelles coordonnées x', l'intégrale sera de même forme avec les A remplacés par les composantes A' du même tenseur par rapport aux coordonnées x'. L'invariance est même *rationnelle:* si y et les x sont rationnelles aux x', y', les A' seront également rationnelles aux x', y'. Soit sur V_d un complexe $K_p \rightarrow \Gamma_{p-1}$, composé de cellules analytiques, et situé en entier dans la région de la variété où les composantes A sont finies. Maintenant Γ fixe, déformons légèrement K_p sans le faire sortir de la région en question. Alors, d'après Poincaré [*voir* D, Chap. I], pour que $\int_K$ reste invariante, il faut et il suffit que

$$\delta^{ij\ldots kl}_{ab\ldots cd}\,\frac{\partial A_{ij\ldots k}}{\partial x_l} = 0. \tag{59}$$

D'après ce que nous avons vu, puisque les premiers membres sont les composantes d'un tenseur, le système (59) est invariant. Observons que son invariance birationnelle est presque évidente, mais il s'agit ici d'une invariance formelle beaucoup plus générale, relative aux changements de coordonnées analytiques les plus généraux.

A titre d'exemple, pour $k = 1$, on a

$$\int A_i\, dx_i, \qquad \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = 0; \tag{60}$$

pour $k = 2$,

$$\int A_{ik}\, dx_{ik}, \qquad \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k} = 0. \tag{61}$$

36. **Intégrales de première espèce.** — L'intégrale (59) est de première espèce lorsque $\int_K$ est finie quel que soit le complexe K. On ne sait pas grand'chose sur ces intégrales, mais il est probable qu'elles ont une importance considérable pour la théorie algébro-géométrique de V_d. Le nombre d'intégrales k-uples de première espèce linéairement indépendantes sera désigné par p_g^k. C'est en tout cas un invariant absolu de la variété. Severi [n] vérifie sur quelques exemples simples (auxquels on peut ajouter les variétés abéliennes [16 e]) la formule

$$V_d = \sum (-1)^{d-i} p_g^i \tag{62}$$

démontrée seulement pour $d = 2$, auquel cas elle se réduit à

$$p_a = p_g - p_g',$$

qui exprime simplement XXX. Il serait fort désirable de savoir si (62) est vraie pour toute V_d.

Dans le même Mémoire [n], Severi considère certaines propriétés des intégrales doubles de première espèce d'une V_3. Il démontre en particulier que $p_g^2 \leqq q_2 + q_3$ la somme des deux irrégularités (n° 31). Comme q_3 peut être négative, V_3 peut avoir des q toutes deux $\neq 0$, et n'en être pas moins privée d'intégrales doubles de première espèce. Exemple : La V_3 produit d'une surface aux invariants $p_g = 0$, $p_a < 0$ et d'une ligne droite. Plus généralement pour la V_3 produit d'une courbe et d'une surface, ou bien image des triples de points d'une courbe, $p_g^2 = q_2 + q_3$. La même relation subsiste pour une V_3 abélienne de rang un [16 e]; car pour elle $p_g^2 = 3$, $p_g^1 = [V_3] = 1$; donc $q_3 = 0$, $q_2 = \frac{1}{2} R_1(F) = 3$.

Severi [r] a étudié la formation des intégrales de première espèce de multiplicité $k + 1$ à partir de celles de multiplicité k. Elle n'est pas toujours possible et l'on n'est pas assuré que les intégrales obtenues ne se réduisent pas à des constantes. Comessatti [a, b], Rosenblatt [b] ont étudié la même question au point de vue de certaines inégalités satisfaites par les genres.

Nous avons vu qu'une intégrale double de première espèce est sans périodes par rapport aux cycles algébriques. Une intégrale k-uple de première espèce a au moins $\rho_k - R_{k-4} + R_{k-8} - \ldots$ périodes nulles;

l'invariant ρ_k sera défini plus loin. Une expression équivalente aux notations près a été donnée par Lefschetz [e, p. 342]. Pour $d = 2$ le nombre ρ_2 est le nombre ρ de Picard et le minimum est toujours atteint, mais on ne sait s'il l'est en général. L'expression donnée représente en fait le nombre de cycles Γ_k tels qu'à la suite d'une transformation birationnelle convenable, ils se trouvent plongés dans un espace $x_1 = \text{const.}$, ou bien $dx_1 = 0$.

Severi [r] a montré comment on peut former, à l'aide des intégrales de première espèce de multiplicité k, certaines intégrales de même espèce de multiplicité $k+1$.

37. **Intégrales de seconde espèce.** — Les intégrales impropres de seconde espèce sont par définition celles de type

$$\int \delta^{ij\dots kl}_{ab\dots cd} \frac{\partial A_{ij\dots k}}{\partial x_l} \, dx_{ab\dots cd}. \tag{63}$$

Elles satisfont automatiquement aux conditions d'intégrabilité (59). Les intégrales propres se définissent ensuite comme pour F. On démontre à leur sujet le théorème définitif suivant [Lefschetz, B, k] :

LX. *Soit r le nombre maximum de cycles à k dimensions ne rencontrant pas un groupe donné d'hypersurfaces de V_d, et soit ρ_0^k son maximum. Le nombre maximum d'intégrales k-uples de seconde espèce linéairement indépendantes est égal à ρ_0^k.*

Le nombre $\rho_k = R_k(V_d) - \rho_0^k$ est l'entier désigné ainsi au n° 36. Ce théorème est vrai sans aucune exception.

IX. — Recherches nouvelles a poursuivre.

38. Ce ne sont certes pas les problèmes non résolus qui manquent en géométrie algébrique. Nous ne pouvons guère faire plus ici que d'en mentionner un certain nombre présentant quelque chance d'aboutir dans un temps fini :

a. Il a été démontré [16 e, B] que, pour les courbes de F, les hypersurfaces de V_d, l'équivalence algébrique et l'homologie sont interchangeables. Si l'on peut faire varier une courbe C sur F de sa position à celle d'une autre D de manière continue (en tant que cycle de F), on peut aussi faire varier une certaine courbe de $C+E$ à $D+E$ (E, courbe convenable), dans le domaine *algébrique*, c'est-à-dire de telle façon que les cycles intermédiaires soient tous des courbes algébriques. *Cette propriété est-elle vraie pour les* V_k *sur* V_d $(k < d-1)$? Si oui, les nombres de Betti $R_k(\mathfrak{A})$ du module algébrique auraient une interprétation algébro-géométrique précise. Sinon, en ont-ils une autre? Il serait aussi fort désirable à ce sujet d'étendre le théorème L.

b. Étudier les propriétés générales des systèmes continus algébriques sur V_d, *par exemple les congruences de courbes sur* V_3, etc. — Ceci se rattache à (a). Il s'agirait d'étendre si possible la théorie de la base de Severi. A ce sujet voir les travaux récents du même auteur sur les courbes de S, SEVERI-LÖFFLER, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, ainsi que les extensions dues à Albanese [d].

c. Étudier le groupe topologique de Poincaré [a] *ou groupe d'homotopie de* F *ou* V_d. — A ce sujet on ne sait pas grand'chose. On peut par exemple énoncer le théorème suivant : *Une* V_d *sans singularités de* S_{d+1} *a pour groupe l'identité.* On le prouve à l'aide du théorème XII plus pour F la comparaison avec la surface $x^n+y^n+z^n=1$. Les cycles linéaires de cette surface issus du point (0, 1, 0) sont tous réductibles à la section $y=0$, qui est composée de n droites par ce point. Donc les cycles sont tous continûment déformables en ce point. Or la surface en question est homéomorphe à une F quelconque de degré m sans singularités; donc, etc. A ce sujet se rattache un travail récent de Zariski [a] sur le groupe de Poincaré de l'espace résiduel d'une courbe plane par rapport au plan complexe qui la contient.

d. Problème étroitement relié au précédent : *Quelles sont les surfaces ou variétés uniformisables par des fonctions automorphes ou autres?*

e. A la question a se rattache la suivante : *Existe-t-il des intégrales multiples de première espèce, non constantes, sans périodes?* Pour les surfaces nous avons réduit le problème (*voir* n° 22) à une question algébrique. Nous avons de plus montré que dans des cas fort étendus la réponse est négative. Severi [x] a poursuivi quelque peu l'étude des surfaces hypothétiques ayant des intégrales apériodiques, mais n'a pas réussi à en donner un seul exemple effectif.

f. Extension du théorème d'existence de Riemann, c'est-à-dire démonstration de l'existence d'une V_d correspondant à une variété de Riemann à plusieurs feuillets donnée. Pour les surfaces *voir* Enriques [*d*], Zariski [*a*].

g. Résolution des singularités d'une V_d. — Pour les surfaces il y a des solutions dues à B. Levi, Chisini, Albanese [*voir* G, Chap. X].

h. Étude des systèmes linéaires d'une V_d. — Il s'agirait d'étendre à d quelconque les résultats établis par Severi [*n*] pour les V_3. On consultera à ce sujet avec profit la fin de son Mémoire.

j. Classification des V_d *par leurs invariants numériques.* — Il s'agirait de caractériser tout au moins les lieux d'espaces ou les variétés rationnelles par leurs invariants comme l'ont fait pour les surfaces Castelnuovo-Enriques [*a*, *b*, *c*], Castelnuovo [*b*].

k. Étude des V_d *réelles.* — Topologie des nappes réelles, rapports entre leurs invariants et ceux déjà étudiés, etc. Pour les variétés abéliennes, *voir* [G], Chap. XVII; pour les surfaces, deux intéressants Mémoires de Commessatti [*d*, *e*].

Rappel des notations courantes.

a. Topologie. — L'indice indique chaque fois la dimension :

E_h, cellule; K_h, complexe; M_h, multiplicité; Γ_h, cycle; $\rightarrow$, relation frontière; $\sim$, $\approx$, homologie sans division ou avec division, $\mathfrak{M}$, module de cycles; $R_h(\mathfrak{M})$, son $h^{\text{ième}}$ nombre de Betti; $\sigma_h(\mathfrak{M})$, $\zeta_h(\mathfrak{M})$, ses invariants de torsion; $K_h.K_j$, intersection de deux complexes; $(K_h.K_{n-h})$, indice de Kronecker; S.F., système fondamental = base minima.

b. Surfaces et variétés algébriques :

S_d, espace à d dimensions; V_d, variété à d dimensions; F, surface algébrique; $|C|$, $\{C\}$, systèmes linéaire ou continu sur F ou V_d; VV', intersection de V et V'; $\mathfrak{A}$ module de cycles algébriques; $\rho = R_2(\mathfrak{A})$, nombre de Picard; $\sigma = \sigma_2(\mathfrak{A})$, invariant de division de Severi; $\zeta = \zeta_2(\mathfrak{A})$; p_g, genre géométrique; p_a, genre arithmétique de F ou V; [W], genre arithmétique virtuel de W contenue dans V, nombre de points de W quand sa dimension est zéro.

OUVRAGES A CONSULTER.

A. H. W. E. JUNG. — *Algebraische Flächen* (Hanover, 1925).
B. S. LEFSCHETZ. — L'*Analysis situs et la Géométrie algébrique* (Collection Borel, 1924).
C. F. S. MACAULAY. — *The algebraic theory of modular systems* (Cambridge Tract, n° 19, 1916).
D. PICARD-SIMART. — *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (2 volumes désignés respectivement par D_1, D_2. Paris, 1897-1906).
E. O. VEBLEN. — *Lectures on Analysis situs. The Cambridge Colloquium* (New-York, 1922).
F. O. VEBLEN. — *Invariants of quadratic differential forms* (Cambridge Tract, n° 24, 1927).
G. *The National Research Council Committee on rational transformations* (Coble, Emch, Lefschetz, Sharpe, Sisam, Snyder). *Report on Selected Topics in Algebraic Geometry* (Washington, 1928).

BIBLIOGRAPHIE.

1. ALBANESE (G.). — *a.* Intorno ad alcuni concetti fondamentali sui sistemi algebrici di curve d'una superficie algebrica (*Annali di Mat.*, 1915).
b. Formule fondamentali della geometria sopra una superficie algebrica (*Annali di Mat.*, 1927).
c. Sul teorema fondamentale delle base per la totalità delle curve d'una superficie algebrica (*Rendic. dei Lincei*, 1er semestre, 1927).
d. Sulle condizioni perche una curve algebrica riducibile si possa considerare come limite di una curva irriducibile (*Palermo Rendic.*, vol. 52, 1928).
2. ALEXANDER (J. W.). — *a.* Sur les cycles des surfaces algébriques et sur une définition topologique de l'invariant de Zeuthen-Segre (*Rendic. dei Lincei*, 2e semestre, 1914).
b. Combinatorial Analysis situs (*Trans. Am. Math. Soc.*, 1926).
3. BAKER (H. F.). — *a.* On some recent advances in the theory of algebraic surfaces (*Proc. London Math. Soc.*, 1911).
4. BAGNERA DE FRANCHIS. — *a.* Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et les surfaces irrégulières de genre zéro (Mémoire BORDIN, *Palermo Rendic.*, vol. 30, 1910).

5. Castelnuovo (G.). — *a.* Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica (*Mem. Soc. Ital. delle Sc.*, 1896).

b. Sulle superficie di genere zero (*Mem. Soc. Ital. delle Sc.*, 1896).

c. Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie (*Annali di Mat.*, 1897).

d. Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare (*Rendic. dei Lincei*, 1er semestre 1905).

e. Sulle superficie avente il genere aritmetico negativo (*Palermo Rendic.*, vol. 20, 1905).

6. Castelnuovo-Enriques. — *a.* Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche (*Annali di Mat.*, 1900).

b. Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions (*Ann. Ec. Norm.*, 1906).

c. Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus (*Encyklopädie der Math. Wiss.*, III, C. 6 *b*).

7. Comessatti (A.). — *a.* Sulle varietà algebriche che possegono integrali semplici funzionalmente dipendenti (*Rendic. dei Lincei*, 2e semestre 1913).

b. Sopra certe disuguaglianze fra i caratteri di una varieta algebrica (*Rendic. dei Lincei*, 2e semestre 1913).

c. Intorno alle superficie algebriche irregolari con $p_g \geqq 2(p_a + 2)$ e ad un problema analitico ad esse collegato (*Palermo Rendic.*, vol. 46, 1922).

d. Sulla connessione delle superficie razionali reali (*Annali di Mat.*, 1915).

e. Sulla connessione delle superficie algebriche reali (*Annali di Mat.*, 1928).

8. Enriques (F.). — *a.* Ricerche di geometria sulle superficie algebriche (*Torino Mem.*, vol. 44, 1893).

b. Intorno alla geometria sopra le superficie algebriche (*Mem. della Società Italiana delle Sc.*, 1896).

c. Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche (*Torino Atti*, 1901).

d. Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione (*Annali di Mat.*, 1923-1924).

9. Fano (F.). — *a.* Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni (*Torino Atti*, vol. 39, 1904).

b. Sulle varietà algebriche che sono intersezione complete di piu forme (*Torino Atti*, vol. 44, 1909).

10. Franchis (M. De). — *a.* Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve (*Palermo Rendic.*, vol. 20, 1905).

b. Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica (*Palermo Rendic.*, vol. 17, 1903).

c. Sull'invariante ρ_0 di una classe di superficie (*Palermo Rendic.*, vol. 28, 1909).

11. Godeaux (L.). — *a.* Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité (*Bull. Soc. des Sc. de Cracovie*, 1914).

b. Exemples de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité (*Bull. des Sc. math.*, 1915).

11. HEEGAARD (P.). — *a.* Sur l'*Analysis situs* (*Bull. de la Soc. math. de France*, vol. 44, 1916).

12. HENSEL (K.). — *a.* Ueber eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variabeln (*Acta Mat.*, vol. 23, 1900).

13. HOPF (H.). — *a.* On some properties of one-valued transformations of manifolds (*Proc. Nat. Acad.*, 1928).

14. HUMBERT (G.). — *a.* Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques (*Journal de Math.*, 1894).

15. KLEIN (F.). — *a.* Ueber einen liniengeometrischen Satz (*Math. Ann.*, vol. 22, 1883).

16. LEFSCHETZ (S.). — *a.* The arithmetic genus of an algebraic manifold immersed in another (*Annals of Math.*, 1916).

b. Sur les intégrales doubles des variétés algébriques (*Annali di Mat.*, 1917).

c. Sur certains cycles à deux dimensions des surfaces algébriques (*Rendic. dei Lincei*, 1er semestre 1917).

d. Algebraic surfaces, their cycles and integrals (*Annal's of Math.*, 1920).

e. On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties (Mémoire BORDIN; *Trans. Am. Math. Soc.*, 1921).

f. On real folds of abelian varieties (*Proc. Nat. Acad. of Sc.*, 1919).

g. Real hypersurfaces contained in abelian varieties (*Proc. Nat. Acad. of Sc.*, 1919).

h. Report on curves traced on algebraic surfaces (*Bull. Am. Math. Soc.*, 1923).

j. Sur les intégrales multiples des variétés algébriques (*Journal de Math.*, 1924).

k. Intersections and continuous transformations of complexes and manifolds (*Trans. Am. Math. Soc.*, 1926).

l. Manifolds with a boundary and their transformations (*Trans. Am. Math. Soc.*, 1927).

m. Correspondences between algebraic curves (*Annals of Math.*, 1927).

n. Closed sets on a manifold (*Annals of Math.*, 1928).

17. NOETHER (M.). — *a.* Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde (*Math. Ann.*, 1870, 1875).

b. Ueber die reduciblen algebraischen Kurven (*Acta Mat.*, 1886).

c. Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke erster Gattung (*Math. Ann.*, vol. 29, 1887).

18. PANNELLI (M.). — *a.* Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni (*Rendic. dei Lincei*, 1er semestre 1906).

b. Sopra gl'invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali (*Rendic. dei Lincei*, 1er semestre 1906).

19. Picard (E.). — *a.* Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce (*Journal de Math.*, 1885).

b. Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce (*Journal de Math.*, 1886).

c. Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables (*Journal de Math.*, 1889).

d. Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques (*Journal de Math.*, 1899).

e. Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des surfaces algébriques (*Ann. Ec. Normale*, 1901).

f. Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables (*Ann. Ec. Normale*, 1902).

g. Sur quelques points fondamentaux dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables (*Acta Mat.*, 1902).

h. Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et les intégrales de différentielles totales (*Ann. Ec. Normale*, 1903).

j. Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espéce relatives à une surface algébrique (*Ann. Ec. Normale*, 1905).

k. Sur certaines surfaces algébriques dont les intégrales de différentielles totales sont algébrico-logarithmiques (*Ann. Ec. Normale*, 1903).

l. Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes (*Journal f. Mathem.*, 1905).

20. Poincaré (H.). — *a. Analysis situs* (*Journal de l'Éc. Polyt.*, Volume du Centenaire, 1894).

b. Complément à l'*Analysis situs* (*Palermo Rendic.*, vol. 13, 1899).

c. Second complément à l'*Analysis situs* (*Proc. London Math. Soc.*, 1900).

d. Sur les cycles des surfaces algébriques (*Journal de Math.*, 1902).

e. Sur les périodes des intégrales doubles (*Journal de Math.*, 1906).

f. Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques (*Ann. Éc. Normale*, 1910).

g. Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques (*Berliner Sitzungsb.*, 1911).

21. Rosenblatt (A.). — *a.* Sur les surfacs irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité $p_g > 2(p_a + 2)$ (*Palermo Rendic.*, vol. 35, 1913).

22. Scorza (G). — *a.* Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazione (*Palermo Rendic.*, vol. 41, 1916).

23. Severi (F.). — *a.* Sulle correspondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie (*Torino Mem.* vol. 54, 1903).

b. Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica (*Torino Atti*, vol. 39. 1904).

c. Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica (*Torino Atti*, vol. 40, 1905).

d. Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della seconda specie (*Math. Ann.* vol 6, 1905).

e. Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà (*Veneto Atti*, 1906).

f. Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche (*Annali di Mat.*, 1906).

g. Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica (*Lombardo Rendic.*, 1905).

h. Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione alla forma normale degl'integrali di Picard (*Palermo Rendic.*, vol. 21, 1906).

j. Una proprietà delle forme algebriche private di punti multipli (*Rendic. dei Lincei.*, 2e semestre 1906).

k. Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica (*Math. Ann.*, vol. 62, 1906).

l. La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique (*Ann. Ec. Norm.*, 1908).

m. Sulla regolarità del sistema aggiunto ad una superficie algebrica (*Rendic. dei Lincei*, 2e semestre 1908).

n. Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche (*Palermo Rendic.*, vol. 28, 1909).

p. Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica (*Palermo Rendic.*, vol. 30, 1910).

q. Un teorema d'inversione per gl'integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica (*Veneto Atti*, vol. 72, 1913).

r. Relazioni fra gl'integrali semplici e gli integrali multipli di prima specie di una varietà algebrica (*Annali di Mat.*, 1913).

s. Sulla varieta che rappresenta gli spazi surbordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare (*Annali di Mat.*, 1915).

t. Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle carateristiche (*Veneto atti*, vol. 75, 1916).

u. Sulla teoria degl'integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica (*Rendic. dei Lincei*, 1921).

v. Die Geométrie auf einer algebraischen Fläche (*Pascal's Repertorium*, Chapitre XXXIII).

w. Sulle curve di livello costante degl'integrali di Picard (*Rendic. dei Lincei*, 2e semestre 1925).

x. Conferencia general sobre la geometria algebraica (*Revista Mat.*, 1926).

y. Sugl'integrali algebrici semplici e doppi (*Rendic. dei Lincei*, 1er semestre 1928).

z. La géométrie algébrique (*Proceedings of the Toronto Congress*, 1924).

24. VEBLEN (O.). — *a*. The intersection numbers (*Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 25, 1923).

25. WEYL (H.). — *a*. Analisis situs combinatorio (*Rev. Matem.*, 1923).

26. WHITE (H. S.). — *a*. Linear systems of curves on algebraic surfaces (*The Boston Colloquium*. New-York, 1905).

27. ZARISKI (O.). — *a*. On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve (*Amer. Journal*, vol. 51, 1929).

TABLE DES MATIÈRES.

I. — Introduction.

II. — Questions topologiques.

III. — Propriétés topologiques spéciales des surfaces et des variétés algébriques.

IV. — Systèmes de courbes sur une surface au point de vue algébro-géométrique. Invariants numériques. Théorie de la base (Severi).

V. — Intégrales de fonctions rationnelles sur une surface.