

LÉON LECORNU

Théorie mathématique de l'élasticité

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 35 (1929)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1929__35__1_0

© Gauthier-Villars, 1929, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L 2848

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.,
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

~~Mathematisches Institut~~
~~Reichsuniversität Straßburg~~

FASCICULE XXXV

Théorie mathématique de l'élasticité

PAR M. LÉON LECORNU

Membre de l'Institut.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1929

A 2609.

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.



THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ

Par M. Léon LECORNU,

Membre de l'Institut.



La théorie mathématique de l'Élasticité ne justifie qu'imparfaitement son nom. Elle substitue en effet au solide naturel un corps schématique n'ayant avec lui aucun rapport nécessaire, et l'expérience est seule capable de dire jusqu'à quel point cette substitution est légitime. Tantôt on regarde la matière comme continue, alors que, pour les physiciens, elle est constituée par des atomes que séparent des intervalles relativement immenses; tantôt on tient compte de cette discontinuité, mais en supposant sans preuve que les actions mutuelles des atomes obéissent à la loi dite des forces centrales. Il est remarquable que des points de départ aussi différents conduisent à des résultats sensiblement concordants. Nous disons *sensiblement* parce qu'il y a divergence sur un résultat essentiel, divergence que nous aurons à discuter. Quelle que soit la méthode employée, on fait abstraction de l'agitation thermique, et c'est encore là une façon de procéder nécessitant le contrôle de l'expérience.

CHAPITRE I.

ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ DES SOLIDES ISOTROPES.

Admettons, pour l'instant, la fiction de la matière continue et supposons en outre que les déformations puissent être regardées comme infiniment petites. Soient u , v , w les composantes du déplacement éprouvé par le point dont les coordonnées initiales sont x , y , z . Ces composantes sont des fonctions de x , y , z et l'on sait que la déforma-

tion locale est caractérisée par six coefficients (α, b) définis au moyen des équations

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \alpha_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \alpha_3 &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 2b_1 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & 2b_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & 2b_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}$$

Les α mesurent les *dilatations linéaires* parallèlement aux trois axes. Les *glissements* ont pour valeurs : $g_1 = 2b_1$, $g_2 = 2b_2$, $g_3 = 2b_3$.

La *dilatation cubique* est exprimée par la somme

$$\theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Les coefficients α, b ne peuvent être choisis arbitrairement. Ils doivent, d'après leur définition, vérifier six relations, savoir :

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 b_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial z^2}, & \quad \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z} - \frac{\partial b_1}{\partial x} \right), \\ \dots\dots\dots & \quad \dots\dots\dots \end{aligned}$$

D'autre part, les composantes p_1, p_2, p_3 de la rotation élémentaire sont fournies par les équations

$$2p_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2p_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2p_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Sur chaque élément superficiel s'exerce une tension, généralement oblique, qui, rapportée à l'unité de surface, se décompose en une tension normale N et une tension tangentielle T .

Supposons provisoirement, avec Lamé, que les tensions s'annulent avec les déformations (c'est ce qu'on appelle l'hypothèse de l'état naturel) et plaçons-nous d'abord dans le cas du solide isotrope, c'est-à-dire du solide dont les propriétés élastiques sont en chaque point identiques pour toutes les directions. Si l'on considère alors trois éléments perpendiculaires aux axes, les tensions sont liées aux coefficients de la déformation par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} N_1 = \lambda \theta + 2\mu \alpha_1, & T_1 = 2\mu b_1 - \mu g_1, \\ N_2 = \lambda \theta + 2\mu \alpha_2, & T_2 = 2\mu b_2 - \mu g_2, \\ N_3 = \lambda \theta + 2\mu \alpha_3, & T_3 = 2\mu b_3 - \mu g_3, \end{cases}$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé, toujours positifs et différents de zéro pour les corps solides.

L'élément perpendiculaire à Ox supporte la tension normale N_1 et une tension tangentielle qui a pour composantes T_2 parallèlement à Oz et T_3 parallèlement à Oy .

En ajoutant à l'hypothèse de l'isotropie celle de l'homogénéité et appelant : ρ la densité; X_0, Y_0, Z_0 les composantes de la force extérieure *massique*, c'est-à-dire rapportée à l'unité de masse, les équations de l'équilibre d'élasticité, telles qu'elles ont été données par Lamé, sont

$$(2) \quad \begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + \rho X_0 = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v - \rho Y_0 = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + \rho Z_0 = 0 \end{cases} \quad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Ces équations peuvent également se mettre sous la forme

$$(2bis) \quad \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \left(\frac{\partial p_x}{\partial z} - \frac{\partial p_z}{\partial y} \right) + \rho X_0 &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

On en déduit les équations

$$2\mu \Delta p_x - \rho \left(\frac{\partial Y_0}{\partial z} - \frac{\partial Z_0}{\partial y} \right),$$

.....

dont chacune est une conséquence des deux autres et qui ne contiennent plus le coefficient λ .

Les équations (2) sont dites indéfinies parce qu'elles s'appliquent en tous points du corps. Il faut y joindre les conditions à la surface, appelées aussi équations définies. Sur chaque élément σ de cette surface est appliquée une force extérieure $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$. Si α, β, γ désignent les cosinus directeurs de la normale intérieure, on a

$$(3) \quad \begin{cases} X = N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma, \\ Y = T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma, \\ Z = T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma. \end{cases}$$

Ceci suppose que l'élément de surface considéré n'est soumis à aucune liaison extérieure. Dans le cas contraire, on a affaire à ce qu'on appelle une condition de seconde espèce. Si, par exemple, la

surface possède un point fixe, les équations précédentes sont remplacées en ce point par $u = v = w = 0$.

L'intégration présente en général de grandes difficultés. M. Korn a eu recours à la méthode des approximations successives. On peut également employer les équations de Fredholm.

Quand les forces massiques sont nulles, les six tensions N , T peuvent s'exprimer en fonction de trois inconnues $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ par les formules

$$N_1 = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}, \quad T_1 = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z},$$

.....

Principe de superposition. — Les équations indéfinies, aussi bien que les conditions à la surface, sont linéaires par rapport aux inconnues u, v, w et par rapport aux forces données. Il en résulte que si l'on connaît les états d'équilibre correspondant à plusieurs systèmes différents de forces données on obtient l'état d'équilibre correspondant à l'application simultanée de ces systèmes de forces en composant ensemble le champ de déplacements correspondant à chacun des systèmes. C'est ce qu'on appelle superposer les états d'équilibre. On peut notamment chercher à obtenir la solution en procédant de la manière suivante. Déterminons par un moyen quelconque un état d'équilibre E_1 vérifiant les équations indéfinies, puis calculons les forces superficielles correspondantes. Nous trouvons des valeurs X', Y', Z' qui généralement diffèrent des valeurs X, Y, Z imposées dans le problème considéré. Nous pouvons alors superposer à l'état E_1 un second état E_2 dans lequel les forces massiques soient nulles et les forces superficielles égales à $X - X', Y - Y', Z - Z'$. L'état E_2 , ainsi obtenu vérifie toutes les conditions de ce problème. C'est presque toujours dans la détermination de E_2 que réside la principale difficulté.

Unicité de la solution. — Supposons que, les forces extérieures et les conditions à la surface étant données, il y ait deux états d'équilibre E_1, E_2 . En superposant à l'état E_1 l'état $-E_2$, déduit de E_2 par renversement des forces et des déplacements, on obtient un nouvel état E_3 , dans lequel toutes les forces extérieures disparaissent. On est alors dans l'état naturel pour lequel, par hypothèse, les six ten-

sions N , T sont nulles, ce qui entraîne la nullité des six coefficients a , b . Il en résulte que les états E_1 , E_2 ne peuvent différer que par un déplacement d'ensemble (translation et rotation).

Observons toutefois que la démonstration tomberait en défaut dans le cas (purement fictif) où l'on aurait $3\lambda + 2\mu = 0$ car les équations

$$\lambda\theta + 2\mu a_1 = 0, \quad \lambda\theta + 2\mu a_2 = 0, \quad \lambda\theta + 2\mu a_3 = 0$$

conduiraient alors, par addition, à l'identité

$$(3\lambda + 2\mu)\theta = 0,$$

en sorte que, dans l'état E_3 , les coefficients a ne seraient pas nécessairement nuls.

La démonstration cesse également de s'appliquer dans le cas des liquides, pour lesquels $\mu = 0$, parce que la nullité des tensions cesse alors d'entraîner celle des coefficients b .

Travail des forces extérieures. — Envisageons une déformation élastique dans laquelle les forces extérieures aient des valeurs données. Pour réaliser une pareille déformation, on peut imaginer qu'après avoir attribué à chaque force F , en chaque point de la masse et en chaque point de la surface, la direction convenable, on fasse croître progressivement et proportionnellement toutes les forces F depuis zéro jusqu'aux valeurs voulues. On parvient ainsi de l'état initial à l'état final par une suite continue d'états intermédiaires. Admettons que la transformation s'effectue avec assez de lenteur pour que les forces d'inertie soient constamment négligeables. A un instant quelconque, chacune des forces est représentée par hF , h étant un paramètre compris entre 0 et 1 et ayant même valeur pour toutes les forces. Les équations de l'équilibre d'élasticité sont linéaires et homogènes par rapport aux quantités u , v , w , h .

Le travail élémentaire de chaque force hF , pour une variation dh de h , est dans ces conditions $h dh(Xu + Yv + Zw)$. Son travail total s'obtient en intégrant, par rapport à h , depuis 0 jusqu'à 1, ce qui donne $\frac{1}{2}(Xu + Yv + Zw)$. Cela montre que le travail total des forces extérieures est la moitié de ce qu'il serait si ces forces atteignaient, dès le début de la déformation, leurs valeurs définitives.

Potentiel interne. — En tenant compte des valeurs (1) des tensions et désignant par ω l'élément de volume, une intégration par parties conduit à la relation

$$(4) \int \omega (\Sigma N \alpha + \Sigma T g) = \int_3 \rho (X_0 u + Y_0 v + Z_0 w) \omega + \int_2 (\lambda u + Y v + Y w) \sigma.$$

l'intégrale triple qui figure au second membre se rapportant aux forces massiques, et l'intégrale double aux forces superficielles.

Appliquons cette équation à la déformation progressive produite par des forces extérieures croissantes dans les conditions qui viennent d'être indiquées. Le second membre représente alors le double du travail des forces extérieures. Comme, par hypothèse, le système n'acquiert pas de force vive sensible, il faut que le travail total de toutes les forces soit nul. Le premier membre représente donc le double du travail des tensions, pris négativement. En désignant par ${}_2U$ la valeur de ce premier membre, on peut encore dire que le travail des tensions, depuis l'instant où U est nul jusqu'à celui où cette fonction acquiert une valeur donnée, est égal à la variation de U changée de signe. Comme les N , T sont des fonctions connues des α , g , la fonction U ne dépend que de ces coefficients α , g . On voit ainsi que les tensions admettent un potentiel égal à U : c'est le potentiel interne. Nous poserons : ${}_2\omega = \Sigma N \alpha + \Sigma T g$. *Le potentiel élémentaire est $\omega\omega$.* En remplaçant les N , T par leurs valeurs, on trouve aisément

$$(5) \quad {}_2U = \int \omega [\lambda \theta^2 + 2\mu \Sigma \alpha^2 + \mu \Sigma g^2].$$

On peut inversement exprimer les α , g en fonction des N , T , et l'on obtient ainsi la formule suivante, due à Clapeyron :

$${}_2U = \frac{1}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \int \omega [(\lambda + \mu) \Sigma N^2 - \lambda(N_1 N_2 + N_2 N_3 + N_3 N_1) + (3\lambda + 2\mu) \Sigma T^2].$$

Stabilité. — Si les forces extérieures sont nulles, il en est de même de U . Comme, d'autre part, λ et μ sont positifs pour les solides naturels, l'expression de U ne peut être que positive. En l'absence des forces extérieures, U présente donc un minimum égal à zéro. On peut en conclure que l'état naturel correspond à un équilibre stable.

Le corps étant dans cet état, appliquons-lui des forces extérieures graduellement croissantes. Pour chaque système de valeurs de ces

forces, il existe un état déterminé d'équilibre et, si cet état vient à être troublé, il se rétablit aussitôt que disparaissent les causes perturbatrices. Ceci reste vrai tant que la déformation est assez petite pour que le principe de superposition demeure applicable. Quand les forces continuent à croître, cette condition cesse bientôt d'être remplie. En même temps le corps s'écarte de plus en plus de l'isotropie initiale. Il peut ainsi arriver un moment où le potentiel interne, dont l'expression n'est valable que pour le cas de l'isotropie et pour des déformations infiniment petites, atteigne un maximum, puis devienne décroissant. A ce moment, la stabilité disparaît et la déformation se poursuit spontanément. C'est par des considérations de ce genre que s'expliquent certains phénomènes tels que le coulage des corps plastiques, la rupture des corps fragiles, etc.

Théorème de réciprocité. — Dans l'équation (4) les tensions N, T sont celles qui résultent de la déformation caractérisée par les coefficients α, g , dues aux déplacements u, v, w produits par les forces extérieures; mais on peut s'affranchir de cette restriction. Écrivons à cet effet les équations

$$\frac{\partial N_1}{\partial u} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} - \rho X_0 = 0,$$

.....

Mathematisches Institut
der
Reichsuniversität Straßburg

exprimant que le centre de gravité du parallélépipède élémentaire est dépourvu d'accélération et, après les avoir multipliées respectivement par $u'\omega, v'\omega, w'\omega$ (u', v', w' désignant de petits déplacements arbitraires), ajoutons-les puis faisons l'intégration étendue à toute la masse du solide. En procédant comme précédemment, nous parvenons à l'équation

$$\int \omega [\Sigma N \alpha' + \Sigma T g'] = \int \rho (X_0 u' + Y_0 v' + Z_0 w') \omega + \int \Sigma (\Sigma u' + Y v' + Z w') \tau$$

dans laquelle les α', g' caractérisent la déformation due aux déplacements u', v', w' . D'ailleurs $N = \frac{\partial \pi}{\partial \alpha}$ et $T = \frac{\partial \pi}{\partial g}$ en sorte que le premier membre de l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$\int \omega \left[\Sigma \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} \alpha' + \Sigma \frac{\partial \pi}{\partial g} g' \right].$$

Comme ϖ est une fonction quadratique des a, g , cette expression ne change pas quand on y permute les a, g avec les a', g' .

Soient maintenant X'_0, Y'_0, Z'_0 et X', Y', Z' les composantes des forces capables de produire les déplacements u', v', w' en donnant naissance à des tensions N', T' . En permutant les u', v', w' avec les u, v, w , on est amené à conclure que les expressions

$$\int \varrho \Sigma (X_0 u' + Y_0 v' + Z_0 w') \omega + \int \Sigma (X u' + Y v' + Z w') \sigma$$

et

$$\int \varrho \Sigma (X'_0 u - Y'_0 v + Z'_0 w) \omega + \int \Sigma (X' u - Y' v - Z' w) \sigma$$

sont égales. De là ce *théorème de réciprocité*, dû à Betti :

Le travail total des forces de l'un des systèmes, pour les déplacements produits par l'autre système, est égal au travail des forces du second système, pour les déplacements produits par le premier.

Conditions analytiques de la détermination du problème. — Nous avons dit que dans le cas des corps solides, pour lesquels μ et $3\lambda + 2\mu$ sont toujours des quantités positives, la solution d'un problème d'élasticité est unique. Cette conclusion suppose toutefois que le principe de superposition est applicable; c'est un point sur lequel nous aurons à revenir. On peut se demander ce qui arrive lorsque, continuant à admettre que μ n'est pas nul (ce qui exclut le cas des fluides), on laisse indécis le signe de $3\lambda + 2\mu$. Cette question a fait l'objet d'importantes recherches analytiques, dues à MM. E. et F. Cosserat; nous ne pouvons en donner qu'un aperçu très sommaire.

Posons avec ces auteurs $\xi = \frac{\lambda}{\mu} + 1$ et admettons l'absence de forces extérieures. Les équations indéfinies prennent la forme

$$\Delta u + \xi \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \Delta v + \xi \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \Delta w + \xi \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Il faut trouver des valeurs de u, v, w qui vérifient ces équations et remplissent les conditions à la surface. A cet effet, on peut se proposer de représenter u, v, w par des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de ξ . Ces séries doivent vérifier formellement

les équations du problème et, de plus, posséder la convergence nécessaire. En effectuant les calculs, on met en évidence l'existence d'une suite de pôles correspondant à certaines valeurs de ξ . La discussion est délicate. MM. Cosserat se sont inspirés, pour la mener à bien, du Mémoire de Poincaré *Sur les équations de la Physique mathématique* (1).

Leur conclusion est que la solution n'est assurément unique que si ξ est compris entre -1 et $\frac{1}{3}$. Pour $\xi = \frac{1}{3}$, ils ont donné l'exemple suivant d'indétermination. Posons, en appelant a_0, a_1, b_1, c_1 quatre constantes arbitraires

$$\begin{aligned} u &= a_0 x + \frac{1}{2} a_1 (x^2 - y^2 - z^2) + b_1 x y + c_1 x z, \\ v &= a_0 y + a_1 x y + \frac{1}{2} b_1 (-x^2 - y^2 - z^2) + b_1 y z, \\ w &= a_0 z + a_1 x z + b_1 y z + \frac{1}{2} c_1 (-x^2 - y^2 - z^2). \end{aligned}$$

Il vient

$$\theta = 3(a_0 + a_1 x + b_1 y + c_1 z), \quad \Delta u = -a_1.$$

d'où, pour $\xi = \frac{1}{3}$,

$$\Delta u + \xi \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

et de même

$$\Delta v + \xi \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \Delta w + \xi \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

D'autre part, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître, toutes les tensions N, T sont nulles, en sorte que la surface n'est soumise à aucune force. Voilà donc un état naturel compatible avec des valeurs absolument quelconques de a_0, a_1, b_1, c_1 .

Remarquons que la valeur $\xi = \frac{1}{3}$ donne $3\lambda + 2\mu = 0$; nous savions déjà qu'il y a indétermination dans ce cas. L'autre cas limite $\xi = -1$ qui donne $\lambda + 2\mu = 0$ est, comme nous le verrons, celui de l'éther de Fresnel. Les équations indéfinies, mises sous la forme (2^{bis}) deviennent alors

$$\begin{aligned} 2\mu \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial z} - \frac{\partial \rho_3}{\partial y} \right) + \rho X_0 &= 0, & 2\mu \left(\frac{\partial \rho_3}{\partial x} - \frac{\partial \rho_1}{\partial z} \right) + \rho Y_0 &= 0, \\ 2\mu \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial y} - \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \right) + \rho Z_0 &= 0, \end{aligned}$$

(1) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1891.

d'où

$$\frac{\partial X_0}{\partial x} + \frac{\partial Y_0}{\partial y} - \frac{\partial Z_0}{\partial z} = 0.$$

Suivant que les forces massiques vérifient ou ne vérifient pas cette relation, il y a évidemment impossibilité ou indétermination.

Fonction des déplacements. — Il peut arriver que les déplacements u , v , w soient les dérivées partielles d'une fonction φ des coordonnées. On dit alors qu'il y a une fonction des déplacements. Dans ce cas, p , q , r sont nuls, d'où

$$(\lambda + 2\mu) d\theta - \rho(X_0 dx + Y_0 dy + Z_0 dz) = 0.$$

Cette équation, dans laquelle ρ est supposé constant, exprime qu'il y a une fonction des forces extérieures, et en désignant celle-ci par ψ , on a

$$(\lambda + 2\mu)\theta - \rho\psi = \text{const.}$$

On remarque que la dilatation cubique est constante sur chaque surface de niveau.

La dilatation cubique étant ainsi obtenue, la fonction φ est définie par l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

S'il n'y a pas de forces massiques, la dilatation cubique est partout la même.

En ce qui concerne les conditions à la surface, si l'on remarque que, pour une fonction quelconque, l'expression $\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}$ représente la dérivée $\frac{\partial f}{\partial n}$ prise suivant la direction α , β , γ , ces conditions se mettent sous la forme

$$X = \lambda\theta\alpha - 2\mu \frac{\partial u}{\partial n}, \quad Y = \lambda\theta\beta - 2\mu \frac{\partial v}{\partial n}, \quad Z = \lambda\theta\gamma - 2\mu \frac{\partial w}{\partial n}.$$

Emploi de coordonnées curvilignes. — Il est souvent utile, dans les applications, d'introduire des coordonnées non cartésiennes. Lamé s'est occupé de cette question. Admettant que les directions principales régnant à l'intérieur d'un solide en équilibre d'élasticité sont normales à trois familles de surfaces orthogonales appelées par lui

surfaces isostatiques, il prenait ces surfaces comme surfaces de référence et parvenait notamment aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial s} + \varrho F &= \frac{\Lambda - \Lambda_1}{\gamma_1} + \frac{\Lambda - \Lambda_2}{c_2}, \\ \frac{\partial \Lambda_1}{\partial s_1} - \varrho F_1 &= \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{\gamma_2} + \frac{\Lambda_1 - \Lambda}{c}, \\ \frac{\partial \Lambda_2}{\partial s_2} - \varrho F_2 &= \frac{\Lambda_2 - \Lambda}{\gamma} - \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{c_1}. \end{aligned}$$

Dans ces équations, Λ , Λ_1 , Λ_2 sont les tensions tangentes aux axes curvilignes des s , s_1 , s_2 ; F , F_1 , F_2 sont les composantes des forces massiques suivant les mêmes tangentes; $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{c_2}$ sont les deux courbures de la surface des s_1 , s_2 ; $\frac{1}{\gamma_2}$, $\frac{1}{c}$ celles de la surface des s_2 , s ; $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{c_1}$ celles de la surface des s , s_1 .

Plus tard, M. Boussinesq a fait remarquer que les surfaces isostatiques n'existent généralement pas. Voici comment on peut se rendre compte de ce fait.

Soient α_1 , β_1 , γ_1 ; α_2 , β_2 , γ_2 ; α_3 , β_3 , γ_3 les cosinus directeurs des tensions principales au point considéré. L'existence des surfaces isostatiques exige que l'on ait

$$(5) \quad \alpha_i \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial r} \right) + \beta_i \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial r} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \right) - \gamma_i \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} - \frac{\partial \beta_i}{\partial z} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Soient, d'autre part, s_1 , s_2 , s_3 les trois racines de l'équation en s

$$\begin{vmatrix} N_1 - s & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 - s & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 - s \end{vmatrix} = 0.$$

On doit avoir aussi

$$\begin{aligned} (N_1 - s_i)\alpha_i + T_3\beta_i - T_2\gamma_i &= 0, \\ T_3\alpha_i + (N_2 - s_i)\beta_i - T_1\gamma_i &= 0, \\ T_2\alpha_i - T_1\beta_i - (N_3 - s_i)\gamma_i &= 0. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} A_i &= (N_1 - s_i)T_1 - T_2T_3, & B_i &= (N_2 - s_i)T_2 - T_3T_1, \\ C_i &= (N_3 - s_i)T_3 - T_1T_2, \\ \frac{1}{D_i^2} &= \frac{1}{A_i^2} - \frac{1}{B_i^2} - \frac{1}{C_i^2}. \end{aligned}$$

Nous trouvons sans peine

$$\alpha_i = \frac{D_i}{A_i}, \quad \beta_i = \frac{D_i}{B_i}, \quad \gamma_i = \frac{D_i}{C_i}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (5), on est conduit à trois conditions que doivent remplir les tensions N, T . Ces conditions sont fort compliquées. La complication augmenterait encore si l'on entreprenait d'y remplacer les N, T par leurs valeurs en fonction de u, v, w . Enfin, pour savoir quels sont les systèmes de forces qui, appliqués à un solide donné, produisent des familles de surfaces isostatiques il resterait à éliminer u, v, w , au moyen des équations indéfinies et des conditions à la surface.

CHAPITRE II.

EQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ DES SOLIDES ANISOTROPES.

Nombre des coefficients. — Le travail \mathfrak{E} effectué par les forces extérieures appliquées à un solide partant de l'état naturel est donné par la moitié de l'intégrale

$$\int \omega (\mathcal{N}_1 \alpha_1 + \mathcal{N}_2 \alpha_2 + \mathcal{N}_3 \alpha_3 + \mathcal{T}_1 g_1 + \mathcal{T}_2 g_2 + \mathcal{T}_3 g_3),$$

dans laquelle les N, T sont des fonctions linéaires des α, g en sorte qu'il paraît s'introduire 36 coefficients arbitraires. Mais la Thermodynamique permet, comme nous le verrons, d'affirmer l'existence d'un potentiel interne et, en s'appuyant sur ce fait, on peut réduire le nombre des coefficients réellement indépendants.

Le potentiel interne U est la fonction dont la variation représente au signe près le travail des forces intérieures. Comme il n'est défini qu'à une constante près, on peut écrire

$$\mathfrak{E} = U,$$

d'où

$$\int \omega (\Sigma \mathcal{N} \alpha + \Sigma \mathcal{T} g) = 2U.$$

Admettons maintenant que U est la somme des potentiels élémen-

taires ϖ_ω correspondant à tous les éléments ω du solide, alors

$$2\varpi = \Sigma N a - \Sigma T g.$$

Comme les tensions N , T sont des fonctions linéaires des coefficients a , g de la déformation, on voit que ϖ est une fonction quadratique de ces mêmes coefficients. Par suite

$$N = \frac{\partial \varpi}{\partial a}, \quad T = \frac{\partial \varpi}{\partial g}.$$

Or une fonction quadratique de 6 variables a , g renferme seulement 21 coefficients arbitraires. Tel est donc le nombre des coefficients entrant dans l'expression générale des tensions. Il faut alors que les 36 coefficients admis précédemment vérifient 15 relations, et il est facile de voir quelles sont ces relations. A cet effet, changeons les notations : remplaçons g_1, g_2, g_3 par a_4, a_5, a_6 et T_1, T_2, T_3 par N_4, N_5, N_6 , ce qui permet d'écrire

$$N_i = \Sigma A_{ij} a_j \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Les 15 relations en question sont

$$N_{ij} = N_{ji} \quad (i \geq j).$$

Nous avons jusqu'ici admis avec Lamé qu'il existe un état dit naturel dans lequel, en l'absence de forces extérieures, les tensions N , T sont nulles. Or, si cette condition paraît en général se réaliser sensiblement, il existe des cas d'exception. Tel est celui, bien connu, des larmes bataviques : la pulvérisation spontanée qui s'opère quand on brise la pointe d'une pareille larme montre que la substance vitreuse se trouvait dans un état d'équilibre instable dû, sans aucun doute, à des tensions intérieures. On peut citer également le frettage d'une pièce d'artillerie, obtenu au moyen d'une ceinture formée du même métal et posée à chaud autour du tube. Après refroidissement, on se trouve en présence d'un bloc dans lequel, malgré l'absence de forces extérieures, la ceinture comprime fortement le tube, tandis qu'elle-même travaille à l'extension.

Il est donc désirable de s'affranchir de l'hypothèse de Lamé. On y parvient sans peine en remarquant que, si les tensions ne sont pas nulles dans l'état naturel, chacune d'elles renferme un terme indépendant des a , g , ce qui introduit 6 constantes nouvelles, portant à 27 le nombre total des constantes arbitraires.

Théorie de Poincaré. — La question peut, comme nous l'avons dit dès le début, être abordée par une voie toute différente qui a donné lieu à de nombreux travaux. On regarde alors le corps comme formé d'un nombre immense de points matériels agissant les uns sur les autres, et l'on cherche à calculer les effets produits par les actions mutuelles de ces points. Poincaré, dans ses leçons *Sur la théorie mathématique de l'élasticité*, a fait usage de cette méthode.

Le point de départ de Poincaré consiste à admettre l'existence d'un potentiel des forces intérieures, fonction des petits déplacements éprouvés par les points du système à partir d'un certain *état naturel*, et à développer ce potentiel par la formule de Taylor en s'arrêtant aux termes du second ordre. L'auteur s'abstient de supposer les forces extérieures nulles dans l'état naturel, parce qu'autrement, dit-il, il pourrait arriver que les déplacements correspondant à l'état final, appelé d'équilibre contraint ne fussent pas très petits. Pour éclaircir cette idée, il cite le cas d'un gaz qui ne peut, sans pression superficielle, occuper un volume fini. Après avoir ainsi posé le problème, Poincaré, pour continuer les calculs, suppose que les actions moléculaires deviennent insensibles quand les distances dépassent une très petite longueur, appelée rayon d'action moléculaire, et, après une discussion serrée, il néglige tout ce qui est effectivement négligeable. Finalement, distinguant deux cas, suivant que les forces intérieures sont ou non centrales, c'est-à-dire dirigées suivant les droites de jonction des couples de points, il aboutit au tableau suivant du nombre des coefficients distincts :

		Nombre de coefficients.	
Forces intérieures non centrales	}	Forces extérieures non nulles dans l'état naturel.....	27
		Forces extérieures nulles dans l'état naturel.....	21
Forces intérieures centrales	}	Forces extérieures non nulles dans l'état naturel.....	21
		Forces extérieures nulles dans l'état naturel.....	15

Dans le cas particulier de l'isotropie, la conclusion de Poincaré est qu'il y a en général trois coefficients, se réduisant à deux ou à un seul quand les 27 coefficients de l'anisotropie se réduisent à 21 ou à 15. On a d'abord les deux coefficients λ et μ de Lamé. Le troisième

coefficient ν s'annule si les forces extérieures sont nulles dans l'état naturel. La réduction à un seul coefficient se produit si, en outre, les forces intérieures sont centrales, car on trouve alors que μ ne diffère pas de λ .

La question de l'égalité ou de l'inégalité des deux coefficients λ et μ a soulevé de nombreuses controverses. Elle devrait, semble-t-il, être tranchée par l'expérience. Mais indépendamment de la difficulté de mesurer ces coefficients, il faudrait alors opérer sur des corps rigoureusement isotropes qu'il est pratiquement impossible de se procurer. Il paraît établi qu'avec des corps très rigides, la différence entre λ et μ est d'autant moindre qu'on se rapproche davantage de l'isotropie parfaite. Au contraire, avec les corps peu compressibles et facilement déformables, tels que les substances gélatineuses, la valeur de λ surpasse beaucoup celle de μ et il ne saurait guère en être autrement : car à la limite, lorsque l'on arrive au cas du liquide, celui-ci ne résiste pas aux glissements, ce qui indique que T_1, T_2, T_3 doivent être nuls pour toutes valeurs de b_1, b_2, b_3 , d'où $\mu = 0$, et en même temps, la résistance à la compression subsiste, d'où $\lambda > 0$.

Pour concilier la notion des forces centrales avec l'inégalité des deux coefficients, Duhem a imaginé de concevoir l'action de liaisons intérieures définies, à la façon de Lagrange, par certaines équations. Laissons-lui un instant la parole (¹).

« L'idée essentiellement neuve de Poisson, c'est la négation même des forces de liaison et l'affirmation que le rôle attribué par Lagrange à ces forces doit, en réalité, être attribué aux attractions moléculaires.... Selon lui, cette innovation constitue une réforme capitale, la création d'une nouvelle mécanique, la mécanique physique, qui s'oppose à la mécanique analytique de Lagrange.... Non seulement les fondateurs de l'Élastique ont pris cette idée pour point de départ de leurs recherches, mais encore les plus éminents esprits qui ont traité de cette science l'ont adoptée et enseignée.... Cependant le flair, disons mieux, le génie de Poisson et de Cauchy ne les a pas empêchés de déduire des principes inexacts qu'ils avaient adoptés des conséquences fausses dont la Physique ne s'est pas encore entièrement débarrassée. Une seule de ces conséquences nous intéresse dans ce cas, c'est la

(¹) *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*. Cours autographié. Tome II, p. 258 et suiv.

suivante. L'étude du corps élastique le plus général exige la connaissance expérimentale seulement de quinze coefficients d'élasticité distincts, et non de vingt et un. Dans le cas des corps isotropes, un seul coefficient est à considérer, car les deux quantités λ et μ sont égales entre elles et les équations qui régissent les corps isotropes sont celles qu'avait données Navier. Nous avons vu les raisons qui doivent faire rejeter cette dernière conséquence. »

Les objections de Duhem n'ont nullement convaincu Poincaré, et voici sa réponse ⁽¹⁾ :

« Nous avons supposé que toutes les molécules étaient libres; dans certaines théories, au contraire, on les suppose assujetties à des liaisons. Pour trouver dans cette hypothèse les équations d'équilibre, il suffit d'appliquer la méthode de Lagrange.... Il semble au premier abord qu'en introduisant cette hypothèse nous pourrions étudier des phénomènes plus généraux, c'est-à-dire que l'hypothèse de molécules entièrement libres restreint la généralité; ce n'est qu'une apparence. Prenons, par exemple, la liaison la plus simple : supposons deux molécules assujetties à rester à une distance invariable r_0 l'une de l'autre. Tout se passe comme s'il existait entre elles une force attractive ou répulsive dirigée suivant la droite qui les joint et fonction seulement de leur distance, cette force étant supposée nulle pour $r = r_0$, très grande et répulsive pour $r = r_0 - \varepsilon$, très grande et attractive pour $r = r_0 + \varepsilon$. La force de liaison apparaît donc, dans cet exemple simple, comme un cas limite de la force ordinaire. On pourrait faire une étude analogue pour les liaisons quelconques, et l'on arriverait au même résultat. On ne généralise donc pas en introduisant des liaisons....

» Si l'introduction de liaisons ne donne pas une plus grande généralité, si, par conséquent, on peut arriver à des résultats tout aussi étendus, à condition de ne pas préciser la nature de ces forces, comment se fait-il qu'on ait créé des théories différentes en faisant usage de liaisons? La raison en est simple : il est certains esprits auxquels répugne la conception d'actions à distance autres que des forces centrales; dans les cas où l'hypothèse des forces centrales ne rend pas compte des faits observés, ils introduisent des liaisons qui leur permettent d'expliquer ces faits sans renoncer à leur hypothèse fondamentale. »

(1) *Leçons sur la théorie de l'Élasticité*, p. 37 et suiv.

Un peu plus loin, Poincaré précise son idée en montrant que, si l'on veut tenir compte d'une équation de liaison $\vartheta = 0$ on est conduit à remplacer $W_1 + W_2$ par $W_1 + W_2 + l\vartheta$, l désignant un multiplicateur de Lagrange, en sorte qu'il y a une fonction inconnue de plus, qui est l , et une équation de plus, qui est $\vartheta = 0$ et il ajoute : « Il est alors aisé de comprendre que nous ne restreignons pas la généralité en supposant qu'il n'y a pas de liaison. »

En somme, pour expliquer l'inégalité des coefficients de Lamé, on pourrait opter entre deux hypothèses : ou bien admettre, avec Duhem, l'existence de liaisons représentées par certaines équations, ou bien, avec Poincaré, dire que l'action mutuelle de deux molécules n'est pas uniquement fonction de leur distance ; mais alors cette action mutuelle ne satisfait plus à la loi d'égalité de l'action et de la réaction. Le choix est un peu une question de sentiment ; la seule chose à retenir c'est que, d'une façon ou de l'autre, λ peut différer de μ .

D'autres interprétations sont possibles. W. Thomson (lord Kelvin) considère deux systèmes de points matériels. Deux points quelconques exercent l'un sur l'autre une action centrale. Mais l'action réciproque des points de l'un des systèmes est différente de celle des points de l'autre et différente aussi de celle de deux points appartenant à des systèmes différents. Pour simplifier le langage W. Thomson appelle ces deux systèmes le système des points *rouges* et le système des points *bleus*. Il admet que chaque système occupe les sommets d'un réseau de mailles parallélépipédiques. L'image d'un corps *incompressible* s'obtient de la manière suivante. Chaque point bleu est relié par quatre barres rigides aux sommets du tétraèdre rouge à l'intérieur duquel il se trouve, et ces barres sont dirigées de façon que le volume du tétraèdre soit maximum, ce qui exige que chaque barre soit perpendiculaire à la face opposée. Un tétraèdre ainsi construit conduit à 15 constantes d'élasticité. En remplaçant ce tétraèdre spécial par un tétraèdre quelconque et substituant aux tiges inextensibles des tiges élastiques, on ajoute 6 constantes arbitraires. Un système de ce genre donne donc au total 21 constantes d'élasticité.

Poisson avait jadis essayé d'élargir la théorie moléculaire en regardant la matière comme formée non plus de simples points matériels, mais bien de molécules rigides et polyédriques exerçant les unes sur les autres, en outre des forces centrales, des couples de rotation. Une conception analogue a été reprise par W. Voigt. Il a montré en 1887

qu'en considérant les molécules comme douées de polarité, le nombre des constantes, indépendantes s'élève à 21 dans le cas de l'anisotropie. Dans le cas de l'isotropie il ne subsiste qu'une seule constante. Mais plus tard W. Voigt est parvenu au degré voulu de généralité en utilisant la notion de *quasi-isotropie* imaginée par de Saint-Venant pour le cas des corps ayant subi une déformation permanente. L'expérience montre qu'un grand nombre de corps dits *isotropes* sont formés de petits individus cristallins, orientés dans tous les sens. Dans un pareil corps *quasi-isotrope*, la tension sur un élément superficiel doit être la moyenne de toutes les tensions qui, dans un cristal régulier, formé de la même matière, s'exercent sur les éléments orientés de toutes les façons possibles. Partant de là, Voigt trouve que la tension est fonction linéaire des coefficients de la déformation et que cette fonction renferme deux constantes arbitraires.

Il convient encore de dire que Barré de Saint-Venant, partisan déclaré de l'hypothèse des forces centrales, n'a jamais voulu admettre la possibilité que ces deux coefficients soient inégaux. Dans la note 16 qu'il a ajoutée à la traduction française de l'ouvrage de Clebsch, il conteste en ces termes la portée des observations faites sur les corps gélatineux : « Diverses expériences ont prouvé que le caoutchouc n'est, comme les gelées, qu'un réseau vésiculeux dont les mailles ou cellules sont remplies d'une matière liquide : or toute déformation perceptible d'éléments liquides produit des changements de distances moléculaires qui excèdent beaucoup les limites dans lesquelles les actions développées leur restent proportionnelles et ne cessent pas d'avoir les mêmes intensités pour les diminutions que pour les augmentations de ces distances. On ne peut donc, de ce que présentent ces composés spongieux lorsqu'on les déforme ou comprime, rien inférer de relatif à la loi des actions qui sont en jeu là où la proportionnalité dont il est question se conserve, comme par exemple dans les métaux. » Barré de Saint-Venant prétend ensuite démontrer que l'hypothèse des forces centrales est seule compatible avec le principe de conservation de l'énergie. Mais ses arguments sont inopérants ainsi que la méthode suivie par Poincaré suffit à l'établir : on a vu en effet que dans cette méthode le principe de conservation est respecté sans qu'on soit nécessairement conduit à admettre l'hypothèse des forces centrales. D'ailleurs, quoiqu'en dise Barré de Saint-Venant, il est bien difficile de ne pas considérer l'état liquide comme dérivant de l'état du solide isotrope par l'annulation du coefficient μ .

CHAPITRE III.

PETITS MOUVEMENTS.

Deux types de solution. Rien ne permet d'affirmer que dans un solide en voie de déformation les tensions suivent les mêmes lois qu'à l'état statique. Nous reviendrons bientôt sur ce point; mais admettons provisoirement qu'il en est ainsi. Alors, d'après le principe de d'Alembert, il suffit, pour passer du problème statique au problème dynamique, de tenir compte des forces d'inertie, en sorte que pour un corps isotrope les équations indéfinies prennent la forme

$$(6) \quad \begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \mu \Delta u - \rho X_0 = \rho \frac{d^2 u}{dt^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} - \mu \Delta v + \rho Y_0 = \rho \frac{d^2 v}{dt^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \mu \Delta w + \rho Z_0 = \rho \frac{d^2 w}{dt^2}. \end{cases}$$

Ces équations, comme celles de l'équilibre d'élasticité, ne sont valables que si les dérivées partielles de u , v , w par rapport à x , y , z peuvent être regardées comme infiniment petites. C'est ce qui arrive dans le cas des petits mouvements vibratoires, qui va maintenant nous occuper. Commençons par faire disparaître les forces massiques X_0 , Y_0 , Z_0 supposées constantes en mesurant les déplacements de chaque point à partir de la position correspondant à l'état d'équilibre produit par ces forces. Ceci fait, posons

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_1, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_1, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + w_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0.$$

Pour que les équations du mouvement soient vérifiées il suffit que les fonctions φ , u_1 , v_1 , w_1 satisfassent aux quatre conditions

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ \frac{\mu}{\rho} \Delta u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\mu}{\rho} \Delta v_1 = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\mu}{\rho} \Delta w_1 = \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}.$$

et

$$2\bar{\omega} = \lambda \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2 \sum \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Soit une autre solution

$$u' = u'_0 \sin k't, \quad v' = v'_0 \sin k't, \quad w' = w'_0 \sin k't.$$

On a pareillement

$$\int \omega \cdot \delta \bar{\omega}' = \int (X' \delta u' + Y' \delta v' + Z' \delta w') \omega.$$

Les déplacements virtuels étant arbitraires, on peut prendre

$$\begin{aligned} \delta u &= u', & \delta v &= v', & \delta w &= w', \\ \delta u' &= u, & \delta v' &= v, & \delta w' &= w. \end{aligned}$$

Le terme $\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\delta \partial u}{\partial x}$ qui figure dans $\delta \bar{\omega}$ peut s'écrire $\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d \delta u}{dx}$, c'est-à-dire $\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x}$ et il se retrouve dans $\delta \bar{\omega}'$. Il en est de même pour les autres termes de δw , en sorte que $\delta \bar{\omega} = \delta \bar{\omega}'$. On est ainsi conduit à la relation

$$\int (X u' + Y v' + Z w') \omega = \int (X' u + Y' v + Z' w) \omega,$$

d'où, en remplaçant X, Y, Z et X', Y', Z' par leurs valeurs,

$$\int \left(u' \frac{d^2 u}{dt^2} + v' \frac{d^2 v}{dt^2} + w' \frac{d^2 w'}{dt^2} \right) \omega = \int \left(u \frac{d^2 u'}{dt^2} + v \frac{d^2 v'}{dt^2} + w \frac{d^2 w'}{dt^2} \right) \omega,$$

c'est-à-dire

$$(k^2 - k'^2) \int (u_0 u'_0 + v_0 v'_0 + w_0 w'_0) \omega = 0.$$

On voit que si k' diffère de k , l'intégrale est nécessairement nulle.

Ce résultat subsisterait si le solide était encastré dans un bloc infiniment rigide assurant la fixité de sa surface, car alors les déplacements étant partout nuls sur cette surface, il n'y aurait aucun travail des pressions superficielles et par conséquent l'équation du travail virtuel ne serait pas modifiée.

L'équation précédente conduit à une conséquence importante. Si k' pouvait varier d'une façon continue à partir de k , les quantités u'_0, v'_0, w'_0

seraient des fonctions continues de cette variable. L'intégrale, qui est nulle tant que k' diffère de k , devrait, par raison de continuité, rester nulle pour $k = k'$. Or ceci est impossible, car à la limite, pour $k' = k$, u'_0 , v'_0 , w'_0 se confondent nécessairement avec u_0 , v_0 , w_0 en sorte que l'intégrale devient $\int (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \omega$. Les valeurs de k forment donc une suite discontinue. En d'autres termes, un corps solide, de même qu'une corde vibrante, possède un son fondamental et des harmoniques bien déterminées. Poincaré, dans ses leçons sur l'Élasticité, a indiqué une méthode de recherche de ces harmoniques.

Ondes planes. — Dans le cas d'un milieu élastique illimité en tous sens, les conditions à la surface cessent d'exister. On peut alors envisager la propagation d'une onde plane, et l'on retrouve la distinction, trouvée ci-dessus, entre deux systèmes de vibrations : d'une part les vibrations qui s'effectuent sans tourbillonner, d'autre part les vibrations tourbillonnaires qui n'entraînent aucune variation de densité. Les premières sont longitudinales, c'est-à-dire normales au plan de l'onde et se propagent avec la vitesse $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, correspondant à l'équation $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$. Les autres sont transversales, c'est-à-dire dirigées dans le plan de l'onde et se propagent avec la vitesse $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, qui correspond à l'équation $\frac{\mu}{\rho} \Delta \psi = \frac{d^2 \psi}{dt^2}$.

L'expérience indique que les vibrations lumineuses sont exclusivement transversales. On est conduit, pour expliquer ce fait, à admettre que dans le cas de l'éther, assimilé à un milieu élastique, on a $\lambda + 2\mu = 0$, en sorte que λ et μ sont de signes contraires. La propagation des vibrations transversales exigeant que μ soit positif, il faut que λ soit négatif. Cette constitution de l'éther diffère profondément de celle des milieux matériels, pour lesquels λ est toujours positif.

Si l'on remplace λ par -2μ et si l'on pose $\frac{\mu}{\rho} = e$, les équations des mouvements vibratoires de l'éther isotrope prennent la forme

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = e \left(\Delta u - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = e \left(\Delta v - \frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = e \left(\Delta w - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right).$$

Les théories optiques indiquent que, pour se rendre compte du

mode de propagation de la lumière dans les cristaux transparents, il suffit d'écrire

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = e \left(\Delta u - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = f \left(\Delta v - \frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = g \left(\Delta w - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right),$$

avec trois coefficients distincts e, f, g .

Influence de la viscosité. — On admet que si un solide n'est pas parfaitement élastique, les tensions N, T , à chaque instant du mouvement, dépendent non seulement de la déformation locale, mais encore de la vitesse de déformation et l'on précise cette hypothèse en remplaçant les N, T calculés comme précédemment par $N + N', T + T'$, les N', T' étant constitués en fonction des dérivées u', v', w' de u, v, w par rapport au temps, comme les N, T le sont en fonction de u, v, w avec cette seule différence que les coefficients de Lamé λ et μ sont remplacés par d'autres coefficients λ' et μ' , appelés coefficients de viscosité. Les équations du mouvement prennent ainsi la forme

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + (\lambda' - \mu') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} - \mu' \frac{\partial}{\partial t} \Delta u + \rho X_0 = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

.....

On passe du cas du solide imparfaitement élastique à celui du fluide visqueux en posant $\mu = 0$.

Ce que nous avons dit au sujet des petits mouvements d'un solide n'est donc exact que si, comme il arrive souvent, λ' et μ' sont négligeables.

CHAPITRE IV.

CAS DES CORPS MINCES.

Un corps est dit mince quand tous les points de sa masse sont très rapprochés de sa surface et quand, en même temps, son volume est très grand par rapport au cube du maximum de cette distance. Les cas les plus simples sont ceux d'une tige cylindrique de petite section et d'une plaque plane de très faible épaisseur. L'équilibre d'élasticité de pareils corps présente des particularités qui ont depuis long-

temps attiré l'attention et dont la cause profonde a été, au point de vue analytique, mise en lumière par MM. E. et F. Cosserat.

Si l'on définit le contour de la section d'une tige par son rapport de similitude ε à une courbe donnée, de dimensions finies, et si l'on connaît les forces extérieures, u , v , w sont des fonctions déterminées de x , y , z , ε ainsi que de la longueur h de cette tige. MM. Cosserat ont établi que la valeur $\varepsilon = 0$ correspond, pour ces fonctions, à un *point singulier essentiel*. Il en est de même pour la plaque, en représentant alors l'épaisseur par ε .

L'existence de ce point singulier essentiel rend évidemment impossible le développement de u , v , w ou même de $\varepsilon^n u$, $\varepsilon^n v$, $\varepsilon^n w$ (quel que soit l'entier n) suivant les puissances ascendantes de ε . On peut néanmoins obtenir par cette voie des solutions *partielles*, c'est-à-dire ne vérifiant qu'approximativement les conditions à la surface.

Dans le cas de la tige mince, on retrouve ainsi la solution classique de Saint-Venant, dans laquelle on ne tient compte que de la résultante de translation et du moment résultant des forces appliquées sur chaque base. Dans le cas de la plaque il faut pareillement se borner à un mode particulier de distribution des forces appliquées sur le contour.

Tige mince. — Lamé, dans ses *Leçons sur la Théorie mathématique de l'Élasticité*, s'est occupé du problème d'un fil mince en supposant que les forces massiques sont uniformément réparties dans le plan de chaque section et qu'aucune force superficielle ne s'exerce sur le contour. On obtient ainsi les conditions d'équilibre d'un fil parfaitement flexible, tel qu'on l'envisage en Mécanique rationnelle. Lamé ajoute seulement que la dilatation en chaque point est égale à la tension multipliée par le coefficient d'élasticité.

On peut envisager le cas plus général d'une tige mince de forme quelconque, douée d'une certaine raideur. Si l'on suppose l'équilibre réalisé, la mécanique rationnelle suffit pour établir les équations auxquelles satisfont la résultante de translation T et le moment résultant G des tensions développées sur chaque section droite. Il suffit de remarquer que, du moment où l'équilibre existe, rien n'empêche de considérer le système comme absolument rigide. Dans ces conditions il y a, pour chaque tronçon de longueur ds assimilé à un corps solide invariable, équilibre entre les forces massiques et les tensions

terminales. En prenant pour axes Ox , Oy , Oz la tangente en un point O de la tige, la binormale et la normale principale, puis désignant par : $X ds$, $Y ds$, $Z ds$ les projections de la force massique; T_1 , T_2 , T_3 celles de T ; G_1 , G_2 , G_3 celles de G ; ρ , ρ' les rayons de courbure et de torsion, on parvient sans peine aux équations

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{ds} - \frac{T_2}{\rho} + X &= 0, \\ \frac{dT_2}{ds} + \frac{T_3}{\rho'} + Y &= 0, \\ \frac{dT_3}{ds} + \frac{T_1}{\rho} - \frac{T_2}{\rho'} + Z &= 0, \\ \frac{dG_1}{ds} - \frac{G_1}{\rho} &= 0, \\ \frac{dG_2}{ds} - \frac{G_3}{\rho'} - T_3 &= 0, \\ \frac{dG_3}{ds} + \frac{G_1}{\rho} - \frac{G_2}{\rho'} + T_2 &= 0.\end{aligned}$$

Si l'on suppose en particulier que les forces extérieures sont exclusivement appliquées aux extrémités du fil, il faut annuler X , Y , Z et l'on aperçoit alors les deux intégrales

$$\begin{aligned}T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 &= \text{const.}, \\ G_1 T_1 + G_2 T_2 + G_3 T_3 &= \text{const.}\end{aligned}$$

Ce sont les invariants bien connus des systèmes équivalents de vecteurs. Pour aller plus loin, c'est-à-dire pour trouver la forme d'équilibre correspondant à l'application de forces données, il faut cesser de regarder les rayons de courbure ρ , ρ' comme connus, et faire intervenir la théorie de l'élasticité. En se bornant au cas d'une tige primitivement rectiligne, on se trouve en présence du problème dit *de la courbe élastique* dont nous allons maintenant parler.

Problème de la courbe élastique. — Une tige très mince peut être regardée comme ayant une longueur infinie par rapport aux dimensions de sa section. Si l'on prend sur cette section un tronçon de longueur finie, il se comporte comme la pièce, prismatique ou cylindrique, envisagée dans le problème de Saint-Venant. La tige résulte

de la juxtaposition d'un nombre infini de pareils tronçons, dont chacun se déforme pour sa part, de sorte que, pour l'ensemble de la tige, si l'une des extrémités est maintenue fixe ainsi que le premier élément de la fibre moyenne, l'autre extrémité peut éprouver des déplacements d'amplitude quelconque. On arrive ainsi à déformer fortement une tige très mince sans que la théorie de l'élasticité, qui suppose simplement la petitesse des dérivées partielles du déplacement moléculaire, cesse d'être applicable.

Le problème dit *de la courbe élastique* consiste à déterminer la forme prise par la fibre moyenne d'une pareille tige, sous l'action de forces appliquées à ses extrémités. On démontre que la recherche de la courbe élastique se ramène à celle du mouvement d'un solide passant autour d'un point fixe, pourvu que le centre de gravité de ce solide se trouve sur l'un des axes principaux d'inertie issus du point fixe. Si, en particulier, la tige est fléchie par une force unique située dans l'un des plans de symétrie passant par la fibre moyenne, la courbe élastique est évidemment plane et le problème correspondant est celui du pendule composé. Si la tige est sollicitée uniquement par un couple, le problème correspondant est celui du mouvement de Poinsot. Si la tige présente, pour sa section droite, des moments d'inertie égaux, le problème correspondant est celui du mouvement d'un solide de révolution pesant suspendu par un point de son axe.

Membrane. — Lamé, après Poisson, a également traité le cas d'une membrane de petite épaisseur ε , en admettant qu'aucune force ne s'exerce sur les deux faces et que les tensions sont, en un point donné, de même grandeur et de même direction pour toute l'épaisseur ε . En représentant par $z = f(x, y)$ l'équation de la surface moyenne, et par h l'inverse du cosinus γ de l'angle formé par la normale avec l'axe des z , et écrivant qu'il y a équilibre pour un prisme oblique de base $dx dy$, ayant ses arêtes parallèles aux z , il a obtenu les trois équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cdot \varepsilon h N_1}{\partial x} - \frac{\partial \cdot \varepsilon h T_{23}}{\partial y} + \varepsilon h X_0 &= 0, \\ \frac{\partial \cdot \varepsilon h T_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \varepsilon h N_2}{\partial y} + \varepsilon h Y_0 &= 0, \\ \frac{\partial \cdot \varepsilon h T_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \varepsilon h T_{12}}{\partial y} + \varepsilon h Z_0 &= 0, \end{aligned}$$

qui, en posant $\alpha = -p\gamma$, $\beta = -q\gamma$, conduisent à la suivante :

$$N_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2T_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + N_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma(Z_0 - pX_0 - qY_0) = 0.$$

Ces équations sont indépendantes du degré d'élasticité de la membrane : elles subsisteraient pour une membrane (ou surface) parfaitement flexible et inextensible. On peut, en introduisant des coordonnées curvilignes tracées sur la surface, les mettre sous une autre forme. Soient l , m ces coordonnées supposées orthogonales, en sorte que le carré de l'élément linéaire ait pour expression

$$ds^2 = L^2 dl^2 + M^2 dm^2.$$

Les courbures géodésiques de ces lignes sont, comme on sait,

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{\partial L}{\partial m}, \quad \frac{1}{\rho_2} = -\frac{\partial M}{\partial l},$$

Appelons R_1 , R_2 les rayons de courbure normale des lignes coordonnées et R_3 la valeur commune des rayons de torsion géodésique. Soient F_1 , F_2 , Φ les projections suivant dl , suivant dm et suivant la normale à la surface, de la force extérieure rapportée à l'unité de superficie. Soient enfin N_1 , N_2 les tensions normales éprouvées par les éléments linéaires $L dl$, $M dm$ et T la valeur commune des tensions tangentielles. L'application du théorème du travail virtuel à l'élément rectangulaire de côtés $L dl$, $M dm$ conduit aux équations

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \frac{\partial N_2}{\partial l} - \frac{1}{M} \frac{\partial T}{\partial m} - \frac{N_1 - N_2}{\rho_2} - \frac{2T}{\rho_1} &= F_1, \\ \frac{1}{M} \frac{\partial N_1}{\partial m} - \frac{1}{L} \frac{\partial T}{\partial l} + \frac{N_2 - N_1}{\rho_1} + \frac{2T}{\rho_2} &= F_2, \\ \frac{N_1}{R_2} + \frac{N_2}{R_1} - \frac{2T}{R_3} &= \Phi. \end{aligned}$$

Voici une conséquence remarquable de ces équations :

Lorsqu'une surface ou une portion de surface n'est soumise, sauf sur son contour, à aucune force extérieure, les tensions qui peuvent s'y développer sont proportionnelles aux variations que subissent, dans une certaine déformation infiniment petite de la surface, les courbures $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{R_3}$.

Il y a ainsi un lien intime entre le problème géométrique de la

déformation des surfaces inextensibles et le problème statique des efforts qu'elles subissent.

D'après la troisième des équations précédentes, la nullité de $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{R_3}$ entraîne celle de Φ , c'est-à-dire qu'une surface plane ne peut être en équilibre tant qu'il existe une composante normale de la force extérieure.

La recherche de la déformation élastique d'une membrane extensible présente de grandes difficultés; c'est seulement dans l'état final d'équilibre qu'on peut faire abstraction de l'extensibilité et appliquer ce qui vient d'être dit. Bornons-nous au cas d'une membrane d'épaisseur constante, primitivement plane, qui reste plane sous l'action de forces appliquées exclusivement sur son contour.

Le déplacement (u, v) d'un point (x, y) du plan moyen vérifie alors les équations

$$\begin{aligned} 4(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (\lambda - 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\ 4(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\lambda - 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned}$$

Les fonctions arbitraires introduites par l'intégration de ces équations doivent être déterminées de façon à vérifier les conditions relatives au contour. Si, en particulier, le contour est sollicité par une traction normale à ce contour, dans le plan moyen, et dont la valeur rapportée à l'unité de longueur soit égale à une constante F , on trouve aisément

$$u = ax, \quad v = ay, \quad a = \frac{1}{2\mu} \frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} F.$$

Vibrations des corps minces. — Les vibrations des corps minces (tiges ou membranes) s'étudient en introduisant les forces d'inertie et laissant au besoin de côté certains termes dont l'influence est reconnue négligeable. C'est ainsi que, dans la théorie des vibrations transversales d'une membrane plane également tendue en tous sens, on admet que les forces élastiques qui, pendant le mouvement, proviennent des dérivées partielles du déplacement w perpendiculaire à la membrane disparaissent devant celles, beaucoup plus grandes, qui sont dues à la traction F . Nous n'en dirons pas davantage sur ce genre de questions qui intéressent surtout l'acoustique.

CHAPITRE V.

EFFETS THERMIQUES.

La théorie mathématique de l'élasticité, telle que nous l'avons envisagée jusqu'ici, fait abstraction des effets thermiques qui accompagnent nécessairement toute déformation d'un corps solide. Cette façon de procéder n'est légitime que si les déformations s'effectuent dans une enceinte à température uniforme et avec assez de lenteur pour que toutes les parties du solide se mettent à chaque instant en équilibre de température avec cette enceinte. On peut, d'autre part, se demander ce qui arrive quand la température de l'enceinte se trouve modifiée. Nous devons donc reprendre la question au point de vue de la Thermodynamique.

Énergie interne. — D'après le principe de l'équivalence entre la chaleur et le travail, on a, dans toute transformation d'un corps matériel,

$$\Delta E = \mathfrak{E} - Q.$$

ΔE désignent la variation de l'énergie totale E , \mathfrak{E} le travail effectué par les forces extérieures, et Q la valeur mécanique de la chaleur reçue du dehors.

L'énergie totale est la somme de l'énergie cinétique, égale à la demi-force visible T , et de l'énergie potentielle U . Celle-ci dépend à chaque instant de l'état du corps, défini par un ensemble de variables mécaniques et par la température absolue τ existant en chaque point. Les variables mécaniques se divisent en deux groupes : d'une part celles qui caractérisent la constitution du corps et ne changent pas quand il se déplace d'un seul bloc : ces variables sont les coefficients de la déformation éprouvée par chacun des éléments; d'autre part celles qui déterminent à chaque instant la position de l'ensemble considéré comme solide invariable : par exemple les coordonnées du centre de gravité et les trois angles d'Euler concernant l'orientation des axes centraux d'inertie. Soient U_1 et U_2 ces deux parties de l'énergie potentielle. Le travail \mathfrak{E} des forces extérieures se divise de même en travail de déformation et travail global, indépendant de

cette déformation. Soient \mathfrak{E}_1 et \mathfrak{E}_2 ces deux parties de \mathfrak{E} . D'après ces définitions, le théorème des forces vives donne

$$\Delta T + \Delta U_2 = \mathfrak{E}_2,$$

en sorte qu'il reste

$$\Delta U_1 = \mathfrak{E}_1 + Q.$$

Cette équation est valable pour chaque élément du corps à condition de comprendre dans \mathfrak{E}_1 le travail des tensions superficielles agissant sur cet élément. Plaçons-nous dans ces conditions, et remplaçons alors U_1 et Q_1 par u , q ; supprimons en même temps l'indice de \mathfrak{E}_1 , devenu inutile, d'où

$$\Delta u = \mathfrak{E} - q.$$

Nous admettrons que la transformation considérée est réversible, c'est-à-dire que si A et B désignent deux états quelconques on passe à volonté, en conservant les mêmes forces extérieures, de A à B ou de B à A par la même suite d'états intermédiaires. Sans insister davantage sur cette notion de la réversibilité, rappelons qu'elle conduit à dire que l'énergie interne u est une fonction uniforme des coefficients de la déformation et de la température. Pour une transformation infinitésimale de cette nature, on a

$$du = \delta\mathfrak{E} + \delta q,$$

du est la différentielle de la fonction u ; mais il n'existe pas de fonctions dont $\delta\mathfrak{E}$, δq soient les différentielles.

Potentiel thermodynamique. — Appliquons maintenant le second principe de la thermodynamique. Ce principe entraîne comme conséquence l'existence d'une fonction s des mêmes variables, telle que l'on ait

$$\delta q = \tau ds.$$

Cette fonction est l'entropie. Il vient ainsi

$$du = \delta\mathfrak{E} + \tau ds.$$

Considérons une troisième fonction h , égale à $u - s\tau$. Elle permet d'écrire

$$dh = \delta\mathfrak{E} - s d\tau.$$

h est, par définition, le *potentiel thermodynamique*.

Les variables mécaniques sont, pour l'élément matériel, les six quantités $a_1, a_2, a_3, g_1, g_2, g_3$ précédemment définies. La quantité infiniment petite $\delta\mathfrak{E}$ est une fonction linéaire des différentielles de ces six quantités. Elle ne renferme pas $d\tau$ car le travail élémentaire s'annule nécessairement quand l'élément n'éprouve aucune déformation. On a ainsi

$$\delta\mathfrak{E} = \Sigma L da + \Sigma M dg,$$

expression dans laquelle les L, M sont des fonctions des a, g et de τ . D'autre part,

$$\begin{aligned} du &= \Sigma \frac{\partial u}{\partial a} da + \Sigma \frac{\partial u}{\partial g} dg + \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau, \\ ds &= \Sigma \frac{\partial s}{\partial a} da + \Sigma \frac{\partial s}{\partial g} dg + \frac{\partial s}{\partial \tau} d\tau, \\ dh &= \Sigma \frac{\partial h}{\partial a} da + \Sigma \frac{\partial h}{\partial g} dg + \frac{\partial h}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned}$$

ce qui conduit aux relations

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial u}{\partial a} - \tau \frac{\partial s}{\partial a} = \frac{\partial h}{\partial a}, \\ M &= \frac{\partial u}{\partial g} - \tau \frac{\partial s}{\partial g} = \frac{\partial h}{\partial g}, \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \tau \frac{\partial s}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial h}{\partial \tau} = -s, \\ u &= h - \tau \frac{\partial h}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Déformations isothermes ou adiabatiques. — Ceci posé, considérons un solide qui évolue d'une façon réversible. Si la déformation est isotherme, on a $d\tau = 0$, d'où, pour chaque élément,

$$dh = \delta\mathfrak{E},$$

On admet que le potentiel thermodynamique H de l'ensemble est l'intégrale des potentiels correspondant aux masses élémentaires $\rho dx dy dz$, et l'on écrit par suite

$$d \int \int \int \rho h dx dy dz = \Delta\mathfrak{E}.$$

Le travail $\Delta\mathfrak{E}$ des forces extérieures appliquées au corps est l'intégrale des travaux $\delta\mathfrak{E}$ effectués sur ses éléments. Remarquons que,

dans cette intégration, on voit disparaître les travaux des tensions superficielles introduites précédemment pour isoler ces éléments les uns des autres : car, à chaque tension de cette nature, correspond pour un élément contigu, en vertu du principe d'égalité d'action et de la réaction, une force égale et contraire, et ces deux forces opposées ont une somme de travaux nulle, parce que deux éléments contigus ne glissent pas l'un sur l'autre. Restent donc seulement les forces massiques et les forces qui s'exercent sur la surface libre des corps. Si les forces d'inertie ne sont pas négligeables, il faut, bien entendu, les faire entrer en ligne de compte.

Si la déformation, au lieu d'être isotherme, s'effectue d'une façon adiabatique, on doit, à la place du potentiel thermodynamique, considérer l'énergie interne U et en faisant $ds = 0$, on est conduit à l'équation

$$d \int \int \int \rho u \, dx \, dy \, dz = \Delta \mathfrak{E}$$

qui donne lieu aux mêmes observations.

L'hypothèse de l'adiabaticité est celle qui convient au cas des transformations rapides, parce qu'alors chaque élément peut être regardé comme conservant sa chaleur propre, les échanges de chaleur avec les éléments voisins n'ayant pas le temps de s'opérer.

Dans un cas comme dans l'autre, on voit que le travail des forces extérieures est égal à la différentielle d'une certaine fonction (H ou U) et, comme le travail des forces extérieures (y compris les forces d'inertie) ne peut, d'après le théorème du travail virtuel, différer de celui des forces intérieures pris avec le signe convenable, on vérifie l'existence admise précédemment sans démonstration d'un potentiel des forces intérieures : mais on voit en même temps que ce potentiel n'est pas le même dans le cas de la déformation isotherme que dans celui de la déformation adiabatique. Comme, d'autre part, ainsi que nous l'avons vu, les tensions sont égales aux dérivées du potentiel prises par rapport aux α et aux g , il faut conclure que les tensions développées dans la déformation isotherme diffèrent de celles de la déformation adiabatique.

Tensions thermiques. — On constate en même temps que les tensions dépendent de la température. Voici, en nous bornant au cas de

l'isothermie, la méthode employée par Voigt pour préciser cette influence.

Posons

$$\tau = \tau_0 + \theta,$$

θ représentant l'écart supposé très petit entre la température τ et une certaine température initiale τ_0 . On cherche ainsi ce qui se passe quand le corps, avant d'être soumis à l'action des forces extérieures, subit le petit échauffement représenté par θ . Développons h suivant les puissances ascendantes des α , g et de θ en nous arrêtant aux termes du second ordre. Comme, en admettant l'absence de tensions initiales, les termes linéaires par rapport aux α , g doivent être nuls, on peut, en désignant par h_2 une fonction quadratique de ces quantités, écrire

$$h = h_2 - (q_1 \alpha_1 + q_2 \alpha_2 + q_3 \alpha_3 + q_4 g_1 + q_5 g_2 + q_6 g_3) \theta - r \theta^2.$$

Les coefficients q s'appellent les *pressions thermiques*. Les tensions sont, comme toujours, les dérivées partielles de h par rapport aux α , g . Il résulte de là que le coefficient r ne figure pas dans l'expression de ces tensions et que, si l'on désigne par N, T leurs valeurs calculées pour $\theta = 0$, on a, pour une autre valeur de θ , les valeurs n, t données par les relations

$$\begin{aligned} n_1 &= N_1 - q_1 \theta, & n_2 &= N_2 - q_2 \theta, & n_3 &= N_3 - q_3 \theta, \\ t_1 &= T_1 - q_4 \theta, & t_2 &= T_2 - q_5 \theta, & t_3 &= T_3 - q_6 \theta. \end{aligned}$$

On obtient ainsi la généralisation des résultats trouvés par Duhamel en 1838 et par Neumann en 1841, en partant de l'hypothèse moléculaire de Poisson. Ces auteurs admettaient que la fonction $f(r)$ proportionnelle à l'action mutuelle de deux molécules est liée à la température θ de telle façon qu'un accroissement $d\theta$ augmente $f(r)$ de $\frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta$ sans que cette dilatation thermique change la direction des axes. Ils obtenaient ainsi, pour un corps de température non uniforme, les équations

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \rho X_0 = q_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho \frac{d^2 u}{dt^2},$$

.....

avec les conditions à la surface

$$(N_1 - q_1 \theta)z - T_3 \beta + T_2 \gamma = X,$$

.....

Ce calcul revenait à annuler q_4, q_5, q_6 .

Nous n'avons pu donner qu'un aperçu sommaire des méthodes employées pour l'application de la Thermodynamique à la Théorie de l'Élasticité. Bien des questions se posent à ce sujet. On peut, par exemple, se proposer d'établir les lois auxquelles obéissent les chaleurs spécifiques à pression constante ou à volume constant. Voigt l'a fait en se plaçant dans l'hypothèse de l'état naturel; M. Jouguet a repris la même étude en s'affranchissant de cette hypothèse:

CHAPITRE VI.

DÉFORMATIONS FINIES.

Formules cinématiques. — Posons, comme précédemment,

$$x' = x + u, \quad y' = y + v, \quad z' = z + w,$$

mais admettons maintenant que l'on veuille tenir compte des puissances de u, v, w supérieures à la première. Nous faisons ainsi subir à chaque point (M) du solide non déformé un déplacement u, v, w qui l'amène dans une position M'. Le carré ds^2 , de l'élément linéaire du corps déformé est

$$ds_1^2 = (dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2.$$

Si u, v, w sont des fonctions connues de x, y, z , on peut, en appelant A, B, C trois autres fonctions de ces coordonnées, écrire

$$ds_1^2 = A dx^2 + B dy^2 + C dz^2 + 2D dy dz + 2E dz dx + 2F dx dy.$$

Nous admettrons que cette forme quadratique est définie et positive, en sorte que ds_1 ne puisse s'annuler tant que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

n'est pas nul.

La valeur de ds_1^2 devient identique à ds^2 quand on a

$$A = B = C = 1, \quad D = E = F = 0.$$

On peut donc dire que la déformation en **M** est caractérisée par les valeurs des six coefficients

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A-1}{2}, & a_2 &= \frac{B-1}{2}, & a_3 &= \frac{C-1}{2}, \\ b_1 &= D, & b_2 &= E, & b_3 &= F. \end{aligned}$$

Un calcul facile donne

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} : \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], & a_2 &= \dots, & a_3 &= \dots, \\ b_1 &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}, & b_2 &= \dots, & b_3 &= \dots \end{aligned}$$

En désignant par x'_x, y'_y, z'_z, \dots les dérivées de x', y', z' par rapport à x, y, z , on peut encore écrire

$$\begin{aligned} 2a_1 &= (x'_x)^2 + (y'_x)^2 + (z'_x)^2 - 1, & 2a_2 &= \dots, & 2a_3 &= \dots, \\ b_1 &= x'_y x'_z - y'_y y'_z + z'_y z'_z, & b_2 &= \dots, & b_3 &= \dots \end{aligned}$$

Les conditions pour que la déformation soit nulle s'obtiennent en égalant à zéro ces six coefficients. Quand ces conditions sont remplies, on passe du premier état local au second par un déplacement d'ensemble (translation et rotation) combiné, s'il y a lieu, avec une transformation par symétrie, c'est-à-dire une transformation consistant à substituer à la figure initiale la figure symétrique par rapport à un plan quelconque.

Il peut arriver que les a, b soient des constantes. On a alors ce que lord Kelvin a appelé une déformation homogène : une telle déformation est définie par les équations

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_{10} + (1 - \alpha_{11})x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z, \\ y' &= \alpha_{20} + \alpha_{21}x + (1 + \alpha_{22})y + \alpha_{23}z, \\ z' &= \alpha_{30} + \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + (1 + \alpha_{33})z, \end{aligned}$$

où les α_{rj} sont des constantes, et l'on a

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{11} - \frac{1}{2}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2), \\ b_1 &= \alpha_{32} - \alpha_{23} + \alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{33}, \\ &\dots \end{aligned}$$

En introduisant trois angles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ définis par les équations

$$\cos \varphi_1 = \frac{D}{\sqrt{BC}}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{E}{\sqrt{CA}}, \quad \cos \varphi_3 = \frac{F}{\sqrt{AB}},$$

il vient

$$ds_1^2 = A dx^2 + B dy^2 + C dz^2 + 2\sqrt{BC} \cos \varphi_1 dy dz + 2\sqrt{CA} \cos \varphi_2 dz dx + 2\sqrt{AB} \cos \varphi_3 dx dz.$$

x, y, z peuvent être regardés comme définissant un système de coordonnées curvilignes du corps déformé. Dans ce système, les lignes de coordonnées se coupent sous les angles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. L'arc élémentaire $\sqrt{A} dx$ correspond à l'élément dx du corps non déformé. La dilatation linéaire éprouvée par cet élément est $\sqrt{A} - 1$, c'est-à-dire $\sqrt{1 + 2\alpha_1} - 1$. De même, pour dy et dz , les dilatations linéaires sont $\sqrt{1 + 2\alpha_2} - 1$ et $\sqrt{1 + 2\alpha_3} - 1$.

Les angles $\frac{\pi}{2}$ du réseau initial deviennent $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, en sorte que les dilatations angulaires sont $\frac{\pi}{2} - \varphi_1, \frac{\pi}{2} - \varphi_2, \frac{\pi}{2} - \varphi_3$.

Revenons au cas d'une déformation quelconque. Les α cessent d'être des constantes; mais, au voisinage d'un point M, on peut les réduire à leurs parties principales, et l'on obtient ainsi la déformation homogène dite tangente en M à la déformation donnée, ou, simplement, la déformation en M. Dans cette déformation, une sphère infiniment petite de centre M se transforme en un ellipsoïde de centre M'. Les trois axes principaux de cet ellipsoïde correspondent à trois directions, issues de M, qui ont la propriété de conserver leur orthogonalité. Si h, k, l sont les coordonnées d'un point de la sphère rapportées au point M comme origine et si ε est le rayon de cette sphère, son équation est

$$h^2 + k^2 + l^2 = \varepsilon^2.$$

Celle de l'ellipsoïde est

$$(1 + 2\alpha_1)h^2 + (1 + 2\alpha_2)k^2 + (1 + 2\alpha_3)l^2 + 2b_1hk + 2b_2kl + 2b_3lh = \varepsilon^2.$$

Dans la déformation inverse, une sphère de centre M' donne un ellipsoïde de centre M, dont les axes ont pareillement la propriété de

demeurer orthogonaux. On est ainsi conduit à considérer deux ellipsoïdes de déformation. Il peut arriver que leurs axes soient parallèles; il est pour cela nécessaire, mais non suffisant, que l'on ait

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}, \quad \alpha_{23} = \alpha_{32}, \quad \alpha_{31} = \alpha_{13}.$$

On dit alors que la déformation est pure.

On démontre, et nous admettons ici, que la déformation en M équivaut, de plusieurs façons, à une rotation suivie d'une déformation pure.

Lorsqu'on effectue un changement de coordonnées, les quantités α , β se modifient, mais l'ellipsoïde de déformation demeure nécessairement invariable. En exprimant qu'il en est ainsi on reconnaît que les trois expressions

$$\begin{aligned} & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \\ & \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 4(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1), \\ & 4\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \beta_1\beta_2\beta_3 - \alpha_1\beta_1^2 - \alpha_2\beta_2^2 - \alpha_3\beta_3^2 \end{aligned}$$

ne changent pas

Si l'on annule les deux dernières, on obtient une déformation dans laquelle les éléments linéaires parallèles à une direction donnée varient de longueur sans modification des éléments perpendiculaires à cette direction, c'est l'*extension simple*. Si, d'autre part, on écrit que la troisième expression est nulle tandis que la seconde est double de la première, on obtient une déformation dans laquelle des plans parallèles formant une suite continue glissent chacun sur lui-même parallèlement à une même direction proportionnellement à la distance à l'un de ces plans, et dans laquelle les sections contenues dans chaque plan demeurent inaltérées; c'est le cas du *glissement simple*.

La dilatation cubique α , comme dans le cas d'une déformation infiniment petite, la valeur

$$\theta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \theta = \Delta - 1.$$

Le carré du déterminant Δ est, comme le montre la règle de multi-

plication des déterminants,

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 1 + 2a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 1 + 2a_3 \end{vmatrix}.$$

Formules dynamiques. — Envisageons maintenant du point de vue dynamique cette question des déformations finies,

A cet effet, appliquons au solide l'équation du travail virtuel en désignant par $\delta\mathfrak{E}$ le travail virtuel fourni par les forces extérieures, y compris (s'il y a mouvement), les forces d'inertie. Soient ρ la densité et ω le volume élémentaire. La masse élémentaire $\rho\omega$ demeurant invariable, il vient

$$\int \rho\omega \cdot \delta u - \int \rho\omega \cdot \delta q = \delta\mathfrak{E}$$

ou bien

$$\int \rho\omega \cdot \delta u - \int \rho\omega \cdot \tau \delta s = \delta\mathfrak{E}.$$

Si l'on se place dans le cas de l'isothermie, pour lequel

$$\delta u - \theta \delta s = \delta h,$$

on trouve

$$\delta\mathfrak{E} = \int \rho\omega \cdot \delta h.$$

Dans le cas de l'adiabaticisme δs est nul, en sorte que

$$\delta\mathfrak{E} = \int \rho\omega \cdot \delta u.$$

Supposons d'abord que la température demeure constante, et voyons ce que nous donne l'équation du travail virtuel quand on prend comme variables les coordonnées x, y, z afférentes à l'état initial.

Alors $d\omega = dx dy dz$ et la densité ρ est partout la même.

Posons

$$\begin{aligned} A_x &= \rho \frac{\partial h}{\partial x_x}, & A_y &= \rho \frac{\partial h}{\partial y_y}, & A_z &= \rho \frac{\partial h}{\partial z_z}, \\ B_x &= \rho \frac{\partial h}{\partial x_y}, & B_y &= \rho \frac{\partial h}{\partial y_x}, & B_z &= \rho \frac{\partial h}{\partial z_y}, \\ C_x &= \rho \frac{\partial h}{\partial x_z}, & C_y &= \rho \frac{\partial h}{\partial y_z}, & C_z &= \rho \frac{\partial h}{\partial z_x}. \end{aligned}$$

d'où

$$\rho \delta h = \Sigma A_x \delta x_x + \dots$$

D'ailleurs

$$\delta x_x = \delta \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial(\delta x')}{\partial x} = \dots$$

En substituant dans l'équation du travail virtuel et faisant disparaître les dérivées de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ au moyen d'intégrations par parties, puis annulant séparément les coefficients de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ on parvient aux équations suivantes, dans lesquelles sont écrites explicitement les composantes $-j_x$, $-j_y$, $-j_z$ de la force d'inertie.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial C_x}{\partial z} + \rho X_0 &= \rho j_x, \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial C_y}{\partial z} + \rho Y_0 &= \rho j_y, \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} + \rho Z_0 &= \rho j_z, \\ X &= \alpha A_x + \beta B_x + \gamma C_x, \\ Y &= \alpha A_y + \beta B_y + \gamma C_y, \\ Z &= \alpha A_z + \beta B_z + \gamma C_z. \end{aligned}$$

Il est à noter qu'en général A_y diffère de B_x , B_z de C_y et C_x de A_z .

Au lieu des coordonnées initiales x , y , z on peut employer les coordonnées finales x' , y' , z' concernant l'état déformé. La dérivée ρ' cesse alors d'être constante et l'on obtient les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x'} - \frac{\partial T_3}{\partial y'} + \frac{\partial T_2}{\partial z'} - \rho' X'_0 &= \rho' j_x, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x'} + \frac{\partial N_3}{\partial y'} + \frac{\partial T_1}{\partial z'} - \rho' Y'_0 &= \rho' j_y, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x'} + \frac{\partial T_1}{\partial y'} - \frac{\partial N_3}{\partial z'} - \rho' Z'_0 &= \rho' j_z, \\ X' &= N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma, \\ Y' &= T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma, \\ Z' &= T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma. \end{aligned}$$

Pour passer d'un système de coordonnées à l'autre, il faut faire un changement de variables et tenir compte de la relation

$$\rho' \Delta = \rho$$

exprimant l'invariance de la masse élémentaire.

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} A_{,e} &= N_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_{,e}} + T_3 \frac{\partial \Delta}{\partial y_{,e}} - T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial z_{,e}}, \\ B_{,e} &= N_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_{,y}} - T_3 \frac{\partial \Delta}{\partial y_{,y}} + T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial z_{,y}}, \\ &\dots\dots\dots \\ A_{,y} &= T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial y_{,x}} + N_2 \frac{\partial \Delta}{\partial y_{,e}} - T_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z_{,e}}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Inversement

$$(40) \left\{ \begin{aligned} \Delta N_1 &= A_{,x} x_{,e} - B_{,x} x_{,y} - C_{,x} x_{,z} = \rho \left(\frac{\partial h}{\partial x_{,e}} x_{,e} + \frac{\partial h}{\partial x_{,y}} x_{,y} + \frac{\partial h}{\partial x_{,z}} x_{,z} \right); \\ \Delta T_1 &= A_{,y} z_{,e} - B_{,y} z_{,y} - C_{,y} z_{,z} = \rho \left(\frac{\partial h}{\partial y_{,e}} z_{,e} + \frac{\partial h}{\partial y_{,y}} z_{,y} + \frac{\partial h}{\partial y_{,z}} z_{,z} \right), \\ & \qquad \qquad \qquad \rho \left(\frac{\partial h}{\partial z_{,x}} x_{,e} + \frac{\partial h}{\partial z_{,y}} x_{,y} + \frac{\partial h}{\partial z_{,z}} x_{,z} \right). \end{aligned} \right.$$

Des calculs analogues s'appliquent aux transformations adiabatiques; il suffit de remplacer h par u .

Par analogie avec ce qui se fait en Hydrodynamique, on appelle souvent coordonnées de Lagrange les quantités x, y, z qui se rapportent à l'état initial, et coordonnées d'Euler les quantités x', y', z' qui se rapportent à l'état final.

La théorie des déformations finies a été utilisée par Duhem et par M. Hadamard pour l'étude de la propagation des ondes dans les solides élastiques. M. Jouguet a étendu cette recherche à la propagation des ondes de choc.

Phénomènes de flambement. — On entend par *flambement* ou *voilement* la déformation finie qui parfois, sous l'action de forces extérieures, apparaît subitement avant même que la limite d'élasticité soit atteinte. Ce phénomène se produit dans le cas des tiges ou des plaques minces.

Nous nous bornerons au cas d'une tige, droite ou courbe, symétrique par rapport à un plan passant par sa fibre moyenne et sollicitée par des forces qui admettent le même plan de symétrie. Le flambement suppose que le moment fléchissant demeure nul pendant la mise en charge, sans quoi la déformation se produirait d'une façon

progressive. Dire que le moment fléchissant est partout nul, c'est dire que la fibre moyenne coïncide avec la courbe funiculaire relative aux forces extérieures. Une seconde condition du flambement consiste en ce que les tensions tangentielles éprouvées par la fibre moyenne soient des efforts de compression et non pas de traction. On s'en rend compte en remarquant qu'une courbe funiculaire parfaitement flexible, travaillant à la traction, est en équilibre stable, quelque grande que soit cette traction, tandis que, dans le cas de la compression, l'équilibre ne peut subsister, en fait, que grâce à une certaine raideur de la pièce. Tant que cette raideur est suffisante pour résister à la déformation, la fibre moyenne conserve sa forme : le flambement survient à l'instant où l'effort de compression acquiert une valeur capable de surmonter le défaut de flexibilité.

En somme, au moment du flambement, la stabilité de la forme primitive se change en instabilité.

Comment concilier ce fait avec la stabilité d'équilibre attribuée généralement aux solides pour lesquels la limite d'élasticité n'est pas atteinte? C'est un point qu'il importe d'éclaircir. Nous pouvons, pour cela, considérer le cas le plus simple, celui de la tige rectiligne.

Soit, pour fixer les idées, une tige verticale de longueur l encastrée à son extrémité inférieure et chargée d'un poids P à l'autre extrémité, laissée libre. Négligeons le poids propre de cette tige.

Cherchons à appliquer le principe de superposition des effets des forces. Pour les équations indéfinies, aucune difficulté ne se présente; mais il n'en est pas de même pour les conditions à la surface. Ces conditions sont, nous l'avons vu, du type

$$X = \lambda_1 \alpha - T_3 \beta + T_2 \gamma.$$

On peut généralement traiter les cosinus α , β , γ comme des constantes données. Il n'en est plus de même dans le cas présent, et ces cosinus ne sont pas indépendants de la grandeur de P . Car la tige mince a la propriété de prendre, sans que la limite d'élasticité soit dépassée, une courbure finie. Cette courbure, dès que la tige commence à fléchir, varie avec P , et du fait que α , β , γ sont des fonctions de cette force, il résulte que X cesse d'être une fonction linéaire de la charge. Le principe de superposition n'est plus valable; or nous nous sommes appuyés sur ce principe pour établir la stabilité de l'équilibre.

Soit encore une tige terminée par deux encastremens qui assurent l'invariabilité de direction de ses extrémités, mais dont un seul est fixe, l'autre étant susceptible de glisser en se rapprochant du premier. Prenons pour origine l'extrémité fixe, pour axe des x la fibre moyenne et soient u , v , w les composantes du déplacement du point x , y , z . Soit h le déplacement arbitraire, imprimé suivant Ox , à l'extrémité mobile. On doit avoir $u = h$ pour $x = l$. D'autre part, X , Y , Z sont nuls sur la surface latérale. Ces conditions déterminent, pour tous les points de la masse, les valeurs de u , v , w en fonction de h , de l et des dimensions transversales. Supposons que nous comparions des tiges de sections semblables, et soit r l'une des dimensions transversales. Il est clair que si h , r , l soit multipliée par un même facteur arbitraire, il en est de même pour u , v , w . On peut donc écrire

$$u = hf\left(\frac{h}{l}, \frac{h}{r}\right),$$

$\frac{h}{l}$ est un très petit nombre; il en est de même pour $\frac{h}{r}$ tant que la section droite a des dimensions comparables à la longueur l et alors on a sensiblement $u = hf(0, 0)$, c'est-à-dire que u est à peu près proportionnel à h . Mais, dans le cas d'une tige mince, $\frac{h}{r}$ acquiert une valeur notable, et par suite la constante du rapport $\frac{u}{h}$ ne peut plus, lorsque h varie, être admise même à titre de simple approximation. Ici encore, le principe de superposition tombe en défaut.

Cherchons à préciser les conditions dans lesquelles la stabilité se change en instabilité. Soit par exemple le cas de la tige à double encastrement envisagée en dernier lieu. L'encastrement mobile ayant subi un déplacement h dans le sens voulu pour comprimer la tige, il s'agit de savoir si l'équilibre sans flambement est stable ou instable. Pour cela, imaginons une déformation virtuelle, infiniment petite, effectuée (sans nouveau déplacement de l'encastrement) parallèlement à l'un des plans de symétrie que nous attribuons à la tige, et cherchons la variation du potentiel.

Chaque point x , o de la fibre moyenne se déplace d'une quantité u dans le sens de l'axe des x et d'une quantité y dans le sens transversal. Les déplacements u produisent une variation du potentiel total qui est infiniment petite du second ordre. Cette variation est

positive, car l'équilibre longitudinal, tel qu'il se réaliserait si la tige était guidée dans toute sa longueur, est évidemment stable; désignons-la par k^2 .

Passons aux déplacements transversaux, représentés par y . L'élément dx de la fibre moyenne prend la longueur $dx\sqrt{1+y'^2}$, que nous pouvons écrire $dx\left(1+\frac{1}{2}y'^2\right)$ puisque y est infiniment petit. L'allongement de la fibre moyenne est donc $\frac{1}{2}\int_0^l (y'^2) dx$ et si P désigne la force appliquée à l'encastrement, il se produit ainsi une diminution de potentiel égale à $\frac{P}{2}\int_0^l y'^2 dx$. En même temps, la fibre se courbe. Si l'on désigne par ρ son rayon de courbure, par I le moment d'inertie de la section relativement à la perpendiculaire au plan de la fibre déformée et par E le coefficient d'élasticité, égal à $\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$, il y a de ce fait, pour le fragment de longueur dx , une augmentation de potentiel égale à $\frac{EI}{2\rho^2}dx$. On peut d'ailleurs remplacer $\frac{1}{\rho}$ par y'' . Il est aisé de voir que l'augmentation nette de potentiel est ainsi

$$\Delta U = \frac{EI}{2}\int_0^l (y'')^2 dx - \frac{P}{2}\int_0^l (y'^2) dx + k^2$$

et la condition de stabilité est que cette expression demeure positive quelle que soit la fonction infiniment petite y .

Admettons maintenant que cette fonction puisse être représentée au moyen de la série de Fourier

$$y = a_0 + \sum a_n \sin\left(2n\pi\frac{x}{l} + \alpha_n\right)$$

dans laquelle la sommation se rapporte à la suite des nombres entiers n , et que cette série remplisse les conditions voulues pour être deux fois dérivable. Il vient, tous calculs faits,

$$\Delta U = \frac{\pi^2}{l}\sum n^2 a_n^2 \left[\frac{4\pi^2 n^2 EI}{l^2} - P \right] k^2.$$

Comme les coefficients a_n sont arbitraires, ainsi que k , la stabilité exige que la quantité entre crochets soit positive pour toute valeur

de l'entier n . Il en résulte que la condition de stabilité est

$$P < \frac{4\pi^2 EI}{l^2}.$$

Il faut naturellement prendre pour l le plus petit des moments d'inertie de la section droite. La condition subsiste lorsqu'on tient compte de la possibilité d'un gauchissement, celui-ci pouvant être obtenu par la composition de déformations effectuées dans deux plans rectangulaires.

Soit Ω l'aire de la section droite. L'effort P a pour valeur $E\Omega \frac{h}{\rho}$. La condition précédente peut donc s'écrire

$$h < \frac{4\pi^2 I}{\Omega l},$$

On remarque que cette inégalité ne renferme pas le coefficient d'élasticité E , en sorte qu'elle reste la même quelle que soit la nature physique de la tige.

On pourrait multiplier les exemples de ce genre. Nous nous contenterons de dire que, d'une façon générale, le flambement apparaît quand, pour certaines déformations virtuelles du système considéré, le travail des forces extérieures évalué, en tenant compte des infiniment petits du second ordre, croît plus vite que le potentiel des forces intérieures.

CHAPITRE VII.

APERÇU HISTORIQUE.

La théorie mathématique de l'élasticité est une création du XIX^e siècle; mais elle avait été amorcée au $XVII^e$ et au $XVIII^e$ par diverses recherches concernant les corps élastiques ou plastiques.

Galilée avait abordé le problème de la résistance d'une poutre encastree dans un mur; il croyait pouvoir regarder comme inextensibles les fibres de cette poutre.

En 1678, Hooke fit connaître la loi d'après laquelle il y a proportionnalité entre la déformation et l'effort. Il y avait été conduit par l'étude des ressorts spiraux. Mariotte retrouva cette loi, en 1686, à propos du problème de la poutre; il remarqua en outre que dans la

flexion d'une poutre, une partie des fibres s'allonge tandis que l'autre se raccourcit, le passage des unes aux autres s'effectuant par la fibre neutre, qu'il plaçait à mi-hauteur de la poutre. Le problème de la résistance se trouvait ainsi relié à celui de la flexion. Il restait à calculer la courbure prise par la fibre centrale (lieu des centres de gravité des sections droites), question dont Jacques Bernoulli s'occupa à diverses reprises (1691, 1694, 1705). Puis J. Bernoulli et Euler consacrèrent divers travaux à l'Élastique plane. Euler, dans l'un de ses Mémoires, rechercha la forme de cette courbe en supposant que les fibres soient soumises à un effort de compression et il fonda ainsi la théorie de la résistance d'une colonne, théorie qui fut ensuite développée par Lagrange et par Euler lui-même. Euler entreprit également les premières recherches sur la stabilité des corps élastiques.

Bientôt les vibrations de ces corps appellent l'attention des savants. En 1700, Sauveur fait de l'acoustique une science spéciale. L'étude mathématique des vibrations des cordes, des tiges, des membranes, entreprise par Taylor, Jean et Daniel Bernoulli, d'Alembert et Lagrange, fournit l'occasion d'importants développements analytiques.

Les résultats obtenus ne s'étendaient pas sans difficulté au cas des plaques. A la suite des recherches expérimentales de Chladni, l'Académie des Sciences créa pour 1811 un prix qui provoqua les travaux de Sophie Germain et de Poisson.

Ces travaux inaugurent au XIX^e siècle la théorie mathématique de l'élasticité. En même temps l'étude de la résistance des matériaux, abandonnée depuis Coulomb (1773), était reprise par Young et Navier en vue de répondre aux besoins des ingénieurs. Puis, le 14 mai 1821, Navier ingénieur des Ponts et Chaussées, lut à l'Académie des Sciences un Mémoire sur la théorie de l'élasticité, qui fut imprimé seulement en 1827. Dans ce Mémoire il établissait, le premier, les équations de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques à trois dimensions; aussi doit-il être regardé comme le véritable fondateur de la théorie de l'élasticité.

Navier suppose que, dans l'état naturel d'un corps élastique, ses éléments ne produisent aucune action mutuelle, et que si le corps est écarté de cet état naturel, en sorte que la distance r de deux points matériels de masses m , m' devienne $r + \Delta r$, ces deux points s'attirent

avec une force dirigée suivant la droite de jonction et ayant pour grandeur $mm'F(r)\Delta r$, expression dans laquelle $F(r)$ désigne une fonction positive possédant de grandes valeurs lorsque r est extrêmement petit et diminuant très rapidement dès que r prend des valeurs sensibles. Ces forces doivent faire équilibre aux forces extérieures. Navier parvient ainsi aux équations indéfinies telles qu'on les obtient en faisant $\lambda = \mu$, mais il ne voit pas le moyen d'en déduire les conditions à la surface. Il forme alors le potentiel des forces intérieures puis écrit que, pour l'équilibre, la variation de ce potentiel doit, dans toute modification virtuelle, être égale au travail de toutes les forces extérieures, ce qui le conduit au résultat désiré.

Navier termine en cherchant à relier la valeur de λ à celle du coefficient d'élasticité d'une barre soumise à un effort de traction. Mais ici, il commet une erreur, consistant à ne pas tenir compte de la contraction latérale.

Navier se bornait au cas du solide isotrope. La notion du solide anisotrope avait été déjà envisagée par Euler, Bernoulli, Poisson, à propos de l'étude des plaques élastiques. Fresnel l'a étendue au cas du solide de dimensions quelconques. Il conçoit d'ailleurs la constitution du solide à un point de vue différent de celui de Navier. Duhem, dans son Cours autographié de la Faculté des Sciences de Lille (1891), s'exprime à cet égard de la manière suivante :

« D'après Fresnel, lorsque le corps est à l'état naturel, ce sont les répulsions moléculaires qui maintiennent à distance les points matériels qui le composent; l'équilibre est assuré par ce fait que la résultante des actions moléculaires qui agissent sur chacun de ces points matériels est égale à zéro. Au contraire, d'après Navier, toutes les forces moléculaires sont nulles à l'état naturel, et c'est en vertu des liaisons imposées par la nature même des molécules que le corps à l'état naturel a une densité finie. »

Cauchy était l'un des membres de la Commission chargée par l'Académie d'examiner le Mémoire de Navier. Cette circonstance, jointe à ses conversations avec Fresnel, l'amena à approfondir les principes de la théorie nouvelle à laquelle il consacra divers Mémoires d'une haute importance. On lui doit l'étude géométrique de la déformation d'un milieu continu, ainsi que celle des lois auxquelles obéissent les tensions intérieures. Il restait à établir les relations

existant entre les tensions N , T et les six coefficients de la déformation. Cauchy supposa d'abord (1822) que chacune des trois tensions principales, dirigée dans un corps isotrope, suivant l'un des axes principaux de dilatation, devait être proportionnelle à la dilatation correspondante. C'était là une erreur analogue à celle que Navier avait commise à propos de la traction d'une barre : elle conduisait à annuler le coefficient λ . Plus tard (1828) il corrigea cette conception en admettant que chacune des pressions principales est la somme d'un terme correspondant à la dilatation correspondante et d'un terme proportionnel à la dilatation cubique. Il parvint ainsi à la théorie exacte de l'élasticité des corps isotropes. Enfin, en 1830, il étendit cette théorie aux corps anisotropes, moyennant l'introduction des 36 coefficients dont nous avons parlé précédemment.

Cauchy ne s'en est pas tenu là. Il a également traité le problème en faisant intervenir la considération des actions moléculaires. Il y a été conduit par l'analogie qu'il remarquait entre un théorème trouvé par lui au sujet des pressions et une proposition due à Fresnel, concernant les forces élastiques développées dans l'éther lumineux. Le théorème de Cauchy consiste en ceci, que les pressions en un point d'une surface sont entièrement déterminées par les pressions exercées sur trois éléments plans rectangulaires menés par ce point. Fresnel avait montré de son côté que l'action exercée par des forces centrales quelconques sur une molécule écartée de sa position d'équilibre est équivalente à l'ensemble des actions correspondant à trois déplacements rectangulaires. Cauchy prend comme état initial un état qui n'est pas nécessairement d'équilibre, et dans lequel par conséquent la résultante des actions exercées sur une molécule par les molécules voisines peut différer de zéro. Il cherche comment varie cette résultante à la suite d'une petite déformation et par des sommations effectuées autour du point considéré, en supposant qu'il existe par rapport à ce point une symétrie centrale, il parvient à exprimer cette variation en fonction linéaire des secondes dérivées partielles du déplacement u , v , w par rapport à x , y , z . Les équations obtenues renferment 21 constantes, nombre qui se réduit à 9 quand il existe trois plans de symétrie, à 3 si la symétrie est la même pour les trois plans, et à 2 dans le cas de l'isotropie. Enfin, dans le cas du corps isotrope pour lequel la résultante des actions moléculaires est nulle dans l'état initial, il ne subsiste qu'une seule constante.

Grâce à l'hypothèse d'une répartition symétrique des molécules, Cauchy parvient à effectuer ses calculs sans être, comme Navier, obligé d'avoir recours à une intégration d'une légitimité discutable. Poisson qui, de son côté, était parvenu aux équations de l'élasticité, estimait que les méthodes de la mécanique analytique qui se basent sur la continuité de la matière ne devraient pas être appliquées à la mécanique physique. D'après lui, l'intégration faite de $r = 0$ à $r = \infty$ autour d'une molécule oblige les constantes d'élasticité à être nulles, en sorte qu'aucune tension ne se produirait du fait de la déformation. A cela, Clausius a répondu, en 1849, qu'on doit considérer non pas une seule molécule et sa sphère d'activité, mais un nombre indéfini de pareils systèmes et prendre la moyenne des valeurs convenant à tous ces systèmes. Il est alors permis, dit Clausius, de remplacer les sommations par des intégrations: mais la limite inférieure de r , au lieu d'être égale à zéro, devient une très petite quantité inconnue, ce qui fait disparaître le paradoxe de Poisson. Jellett conclut à son tour (1852) que les intégrations sont permises si les forces moléculaires varient d'une façon continue à l'intérieur de la sphère d'activité et si ladite sphère est assez grande pour pouvoir être partagée en un grand nombre de petits éléments dont chacun contienne un très grand nombre de molécules.

Nous avons dit plus haut que Navier, pour former les conditions à la surface, avait eu l'idée de faire intervenir la notion du potentiel des forces intérieures. Cette notion a été reprise en 1842 par Green, qui s'en est servi pour établir les équations indéfinies sans faire d'hypothèses spéciales sur la nature des forces élastiques. Green admet, comme conséquence immédiate de la loi de conservation de l'énergie, l'existence d'une fonction

$$\Phi = \int \int \int \varphi dx dy dz,$$

dont la différentielle, prise négativement, exprime la somme des travaux des forces intérieures dans une déformation virtuelle infiniment petite. Green suppose en outre que φ est fonction des six coefficients a, b pouvant être développée suivant les puissances croissantes de ces coefficients. Le terme constant peut être laissé de côté. Les termes du premier ordre sont nuls dans l'hypothèse de l'absence des tensions initiales. En négligeant d'autre part les termes d'ordre supé-

rieur au second, on a seulement affaire à une fonction quadratique renfermant 21 constantes. Telle est la méthode suivie par Green; c'est, comme on voit, à peu près celle qui a été adoptée et étendue par Poincaré.

Au sujet du potentiel des forces intérieures, il convient de rappeler qu'on doit à Clapeyron l'expression, indiquée précédemment, de ce potentiel en fonction des tensions. Lamé, dans son Livre classique, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (1852), a fait ressortir l'importance que présente cette expression au point de vue de l'art des constructions.

Nous ne poursuivrons pas plus loin cet aperçu historique. Il montre que la création de la théorie mathématique de l'Élasticité est une œuvre principalement française. Ajoutons seulement qu'en 1909 MM. E. Cosserat et F. Cosserat ont publié une *Théorie des corps déformables*, dans laquelle ils proposent d'envisager un milieu plus général que celui considéré dans la théorie de l'élasticité, et cela pour atteindre le but poursuivi par W. Thomson et Helmholtz dans leurs théories de la lumière et du magnétisme. A chaque point M de l'espace, MM. Cosserat adjoignent un trièdre trirectangle dont les axes ont, par rapport à des axes fixes, des cosinus déterminés en fonction des coordonnées x, y, z du point M. La déformation consiste à faire varier le système en sorte que le trièdre change d'orientation en même temps que se déplace le point M. Dans cette théorie intervient un élément essentiel que les auteurs appellent *l'action de déformation* et qui constitue une généralisation du potentiel élastique.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

- HOKE. — Lectures de potentia restitutiva of springs (Londres, 1678).
 MARIOTTE. — Traité du mouvement des eaux (Paris, 1686).
 BERNOULLI. — Véritable hypothèse de la résistance des solides (Académie des Sciences, 1765).
 NAVIER. — Recherches sur la flexion des plans élastiques (Académie des Sciences, 1820; *Bulletin de la Société philomathique*, 1825).
 NAVIER. — Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques (Académie des Sciences, 1827).

- FRESNEL. — Mémoire sur la double réfraction (Académie des Sciences, 1827).
- CAUCHY. — Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques (*Bulletin de la Société philomathique*, 1823).
- CAUCHY. — De la pression ou tension dans un corps solide (*Exercices de Mathématiques*, 1827).
- CAUCHY. — Sur la condensation et la dilatation des corps solides (*Ibid.*, 1827).
- CAUCHY. — Sur les relations qui existent dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices (*Ibid.*, 1827).
- CAUCHY. — Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide élastique ou non élastique (*Ibid.*, 1828).
- CAUCHY. — Relations entre les tensions et les déformations (*Ibid.*, 1829).
- POISSON. — Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques (Académie des Sciences, 1829).
- POISSON. — Sur l'équilibre et le mouvement des corps solides cristallisés (*Journal de l'École Polytechnique*, 1831; Académie des Sciences, 1842).
- LAMÉ et CLAPEYRON. — Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes (Académie des Sciences, 1833).
- DUHAMEL. — Mémoires présentés par divers savants (Paris, 1838).
- NEUMANN. — Mémoires de l'Académie des Sciences de Vienne (1841).
- GREEN. — On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two non cristallized media (Cambridge, 1842).
- GREEN. — On the propagation of light in cristallized media (Cambridge, 1842).
- PIOLA. — Intorno alle equazione fondamentali del movimento di corpi qualsivogliano considerati secondo la naturale loro forma et costituzione (Modène, 1848).
- HAUGHTON. — On a classification of elastic media and the laws of plane waves propagated through them (Dublin, 1849).
- RANKINE. — Laws of elasticity of solid bodies (Cambridge, 1851).
- RANKINE. — On the centrifugal theory of elasticity and its connection with the theory of heat (Edimbourg, 1853).
- LAMÉ. — Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides (Paris, 1852).
- JELLETT. — On the equilibrium and motion of elastic solids (Dublin, 1855).
- CLAPEYRON. — Sur le travail des forces élastiques dans un corps solide déformé par l'action de forces extérieures (*Comptes rendus Acad. Sc.*, 1858).
- CLEBSCH. — Théorie de l'élasticité des corps solides (Leipzig, 1861), traduction française par Barré de Saint-Venant et Flamant, avec nombreuses additions (Paris, 1883).
- BOUSSINESQ. — Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques (*Journal de Mathématiques*, 1871).
- BOUSSINESQ. — Recherches sur les principes de la Mécanique (*Ibid.*, 1873).
- RESAL. — Traité de Mécanique générale (t. II, 1874).

- KIRCHHOFF. — Mécanique (2^e édition, 1877).
- THOMSON. — Elasticity (*Encyclopédie britannique*, 1878).
- CASTIGLIANO. — Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications (Turin, 1879).
- LECORNU. — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles (*Journal de l'École Polytechnique*, 1880).
- POINCARÉ. — Leçons sur la théorie de l'Élasticité (Paris, 1882).
- WEYRACH. — Theorie elastischer Körper (Leipzig, 1884).
- IBLETSON. — Mathematical theory of perfectly elastic solids (Londres, 1887).
- VOIGT. — Theoretische Studien über die Elastizitäts Verhältnisse der Krystalle (Göttingen, 1887).
- VOIGT. — Abrégé de la physique théorique (Leipzig, 1895).
- BRILLOUIN. — Principes généraux d'une théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides (*Annales de l'École Normale*, 1890).
- TODHUNTER et PEARSON. — A History of the theory of Elasticity and on the strength of materials (t. I, 1886; t. II, 1893).
- COSSERAT (E. et F.). — Sur la théorie de l'Élasticité (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1896).
- COSSERAT (E. et F.). — Théorie des corps déformables (Paris, 1909).
- COSSERAT (E. et F.). — Comptes rendus de l'Académie des Sciences (*passim*, Paris, 1898, 1901).
- DUHEM. — Hydrodynamique, élasticité et acoustique (autographié, Lille, 1891).
- DUHEM. — Recherches sur l'élasticité (*Annales de l'École Normale*, 1904, 1905, 1906).
- HADAMARD. — Leçons sur la propagation des ondes (Paris, 1903).
- MÜLLER-BRESLAU. — Die neueren Methoden der Festizkeitslehre (Leipzig, 1904).
- LOVE. — Traité de la théorie mathématique de l'élasticité (Cambridge, 1906).
- KORN. — Solution générale des problèmes d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1908).
- LECORNU. — Cours de Mécanique de l'École Polytechnique (t. II, Paris, 1915).
- LECORNU. — Dynamique appliquée (2^e édition, Paris, 1921).
- BERTRAND DE FONTVOLIANT. — Les méthodes modernes de la Résistance des matériaux (2^e édition, 1920).
- APPELL. — Cours de Mécanique rationnelle (t. III, 3^e édition, Paris, 1921).
- JOUGUET. — Notes sur la théorie de l'Élasticité (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1921).
- ROY. — Sur les équations générales des lignes élastiques et la propagation des ondes (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1926).



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
CHAPITRE I. — Équilibre d'élasticité des solides isotropes.....	1
CHAPITRE II. — Équilibre d'élasticité des solides anisotropes.....	12
CHAPITRE III. — Petits mouvements	19
CHAPITRE IV. — Cas des corps minces.....	23
CHAPITRE V. — Effets thermiques.....	29
CHAPITRE VI. — Déformations finies	34
CHAPITRE VII. — Aperçu historique.....	44
BIBLIOGRAPHIE.....	49

