A. BUHL

Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 33 (1928)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1928__33__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC., DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XXXIII

Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis

Par M. A. BUHL
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1928

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

APERÇUS MODERNES

SUR LA

THÉORIE DES GROUPES CONTINUS ET FINIS

Par M. A. BUHL,
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

Il peut paraître bien téméraire de consacrer, aux immenses développements engendrés par la notion de groupe, un fascicule obligatoirement aussi réduit que celui-ci.

Aussi n'ai-je pas cherché à faire un tableau de l'ensemble, mais seulement à pénétrer dans le domaine par deux sentiers qui, s'ils sont, en ce qui suit, d'une superficie infime, n'en vont peut-être pas moins jusqu'au cœur de la théorie.

Le premier — ce n'est déjà pas si peu, — passe par les six grandes théories repérées au Chapitre I. Ce repérage est aisé en suivant M. Elie Cartan et sa puissante analyse des formes de Pfaff.

Le second sentier s'apercevrait peut-être un peu moins clairement si je ne pouvais tout de suite en dessiner l'allure simple, esthétique et pénétrante.

Soit le système différentiel linéaire de r équations

$$(a) \qquad \frac{d\theta^s}{dt} + C_k^s \theta^k = 0 \qquad (s, k = 1, 2, \ldots, r),$$

en lequel, suivant une notation maintenant bien connue, k est indice de sommation. Rien de plus simple *à concevoir* que ce système linéaire général où les C_k^s sont, toujours en général, des fonctions quelconques de t pouvant, par suite, contenir des paramètres arbitraires. Il est, par contre, presque toujours impossible *à intégrer*, hors le cas des C_k^s constants; il s'apparente rapidement aux fonctions fuchsiennes et à leurs généralisations, et encore faut-il pour cela que les C_k^s soient rationnels ou algébriques en t. Bref, *en général*, le système (a) n'est point maniable. Essayons d'en diminuer la généralité en ne faisant dépendre les r^2 coefficients C_k^s que de r fonctions λ^j. Pour cela, il n'y a pas de manière plus simple, plus intuitive que celle qui consiste à poser

$$C_k^s = c_{jk}^s \lambda^j,$$

les c à trois indices étant des constantes. Si les λ^j contiennent, outre t, des paramètres λ_i en nombre r, on peut aboutir, à partir de (a), au système à seconds membres encore aussi naturels que possible s'ils doivent dépendre de deux indices,

$$(b) \qquad \frac{d\theta^{s\rho}}{dt} + c_{jk}^s \lambda^j \theta^{k\rho} = \frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\rho}.$$

Ce système (b) n'est d'ailleurs pas plus transcendant que

$$(c) \qquad \frac{d\theta^s}{dt} + c_{jk}^s \lambda^j \theta^k = 0,$$

en ce sens que si (c) pouvait être intégré, on achèverait (b) par des quadratures.

Or, (b) devient maniable, du moins si les c_{jk}^s satisfont aux relations structurales (E) du Chapitre II (§ 7). Il y a même là une manière d'imposer ces relations (E).

Et ce qui apparaît alors, c'est la Théorie des Groupes. Si l'on peut intégrer (b), on construira des groupes; si l'on ne le peut pas, on saura cependant que de certaines propriétés exactes, groupales, correspondent à (b) et ce sera un résultat capital par rapport à l'ignorance où nous restons vis-à-vis des propriétés intégrales de (a).

Ainsi, la Théorie des Groupes correspond à des systèmes (a) maniables. Tel est mon second point de vue que, bien entendu, je n'ai point manqué d'accorder avec de nombreuses recherches antérieures.

Il y a ici une sorte de réplique aux travaux de MM. E. Picard et E. Vessiot, travaux en lesquels se correspondent des groupes et des systèmes de solutions d'équations linéaires; ici, les groupes correspondent, plus particulièrement, aux paramètres λ_i introduits dans (b).

Et comme tout l'exposé qui suit dépend surtout des idées de M. E. Cartan, on voit que les recherches de trois grands géomètres peuvent être liées à partir d'équations différentielles linéaires.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES. — DE SIX GRANDES THÉORIES ANALOGUES.

1. Multiplication et dérivation extérieures. — Ces notions sont maintenant bien connues grâce à d'excellents ouvrages dus à MM. Édouard Goursat [1] et Elie Cartan [2].

Leur origine la plus explicite paraît être dans la Science extensive (*Ausdehnungslehre*) de Hermann Grassmann; au point de vue historique, on pourra consulter sur ce sujet un article très documenté de E. Jahnke [3].

Ici, un *produit extérieur* sera d'abord l'expression

$$[dx_1\, dx_2 \ldots dx_n] \tag{1}$$

qui figure sous une intégrale n-uple. Ce produit (1) change de signe quand on y intervertit deux facteurs dx_i *consécutifs*. L'interversion de deux facteurs non consécutifs peut toujours se ramener à une succession d'interversions consécutives.

Dans (1), les dx_i sont évidemment des différentielles exactes, mais cette propriété n'intervient pas obligatoirement dans la construction des intégrales multiples, ce qui permet d'imaginer des produits extérieurs

$$[\omega^1 \omega^2 \ldots \omega^n], \tag{2}$$

où les ω^i sont des formes linéaires quelconques des dx_i. Dans le développement de ces produits (2), les carrés et puissances supérieures d'un même dx_i sont à considérer comme identiquements nuls.

Considérons, *dans l'espace ordinaire*, un volume continu V enclos dans une surface fermée S, et soit l'identité fondamentale

$$\int\int_S X\, dY\, dZ = \int\int\int_V dX\, dY\, dZ \tag{3}$$

à laquelle on peut faire correspondre

$$(4)\qquad \int\int_S M_{ij}[dx_i\,dx_j] = \int\int\int_V [dM_{ij}\,dx_i\,dx_j],$$

les i, j étant *indices de sommation* comme tous les indices contenus *deux fois* dans un même terme *monome*. Si i et j varient tous deux de 1 à n, la formule (4) se rapporte à l'espace à n dimensions en lequel V est une *cloison* à trois dimensions, *ouverte*, limitée par une frontière *fermée* S à deux dimensions.

La formule (4) peut s'écrire

$$(5)\qquad \int\int_S M_{ij}[dx_i\,dx_j] = \int\int\int_V \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_k}[dx_i\,dx_j\,dx_k]$$

ou, en réunissant dans le second membre les monomes en ijk, jki, kij,

$$(6)\qquad \int\int_S M_{ij}[dx_i\,dx_j] = \int\int\int_V \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial M_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial x_j}\right)[dx_i\,dx_j\,dx_k].$$

Lorsque $M_{ij} = -M_{ji}$, c'est cette formule qui prend la *forme électromagnétique maxwellienne*

$$(7)\qquad \int\int_S M_{ij}[dx_i\,dx_j] = -\int\int\int_V \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{\dfrac{\partial F}{\partial x_4}}$$

en laquelle

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

est l'équation de la cloison V.

En (4), (5), (6), (7), les expressions sous les intégrales triples sont des formes diverses pour la *dérivée extérieure* de l'expression contenue sous l'intégrale double.

2. Formule de bifurcation. — Soient des formes différentielles *lineaires*

$$(8)\qquad \pi^k = \pi_i^k\,dx_i,$$

les π_i^k étant évidemment des coefficients dépendant des variables x_i.

On a

$$[\pi^k \pi^l] = \pi_i^k \pi_j^l [dx_i\, dx_j] \equiv \begin{vmatrix} \pi_i^k & \pi_j^k \\ \pi_i^l & \pi_j^l \end{vmatrix} [dx_i\, dx_j],$$

ce qui peut être traité comme une forme bilinéaire pour laquelle la formule (6) donne

$$(9) \qquad \int\!\!\int_S [\pi^k \pi^l] = \int\!\!\int\!\!\int_V \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} & \dfrac{\partial}{\partial x_h} \\ \pi_i^k & \pi_j^k & \pi_h^k \\ \pi_i^l & \pi_j^l & \pi_h^l \end{vmatrix} [dx_i\, dx_j\, dx_h].$$

C'est cette formule (9), moins générale que (6), car le produit de deux formes linéaires n'a pas la généralité de la forme bilinéaire, que nous appellerons *formule de bifurcation;* si, en effet, on cherche à revenir de (9) à (6), on voit que la généralité peut être retrouvée de diverses manières dont chacune ouvre la voie à d'immenses théories, chose qui ne va pas d'ailleurs sans étonnement étant donnée l'extrême simplicité du point de départ figuré en (3) par l'un des principes même du Calcul intégral. Le mot *bifurcation* est d'ailleurs insuffisant en ce sens que la formule (9) ouvre plus de *deux* voies, mais nous n'insisterons pas sur cette question de pure terminologie.

Observons d'abord qu'une forme linéaire (8), ou π^s, admet une dérivée extérieure $[\pi^s]'$, telle que

$$(10) \qquad \int\!\!\int_S [\pi^s]' = \int\!\!\int_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ \pi_i^s & \pi_j^s \end{vmatrix} [dx_i\, dx_j] = 0,$$

car S est toujours une variété à deux dimensions *fermée*. Si l'on intégrait, non sur S entière, mais sur une portion A de S, à frontière fermée C, le résultat ne serait pas nul, mais égal à l'intégrale de π^s le long de C (formule de Stokes); il devient nul quand A tend à recouvrir entièrement S parce qu'alors C se réduit à un point que l'on suppose non singulier.

Ceci posé, voyons explicitement comment des combinaisons linéaires de formules (9) permettent de remonter vers et même jusqu'à (6).

En premier lieu, on fera des sommations, à coefficients constants, telles que

$$(11) \qquad c_{kl}^s [\pi^k \pi^l]$$

ou même, en vertu de (10), telles que

$$[\pi^s]' + c^s_{kl}[\pi^k \pi^l]. \tag{12}$$

Si l'on veut que toutes les intégrales doubles portant sur de telles expressions soient nulles, quelles que soient les variétés d'intégration A que l'on peut considérer sur S, il faudra écrire

$$[\pi^s]' + c^s_{kl}[\pi^k \pi^l] = 0. \tag{13}$$

On obtient ainsi un système de Maurer-Cartan, que nous associerons bientôt aux *groupes paramétriques* dans la théorie des groupes continus *finis*.

En second lieu, on peut évidemment tenter de généraliser (9) en y associant d'autres formules (9) en lesquelles figureraient des formes linéaires ϖ autres que les π. Le raisonnement précédent pourrait alors donner, au lieu de (13), des systèmes

$$[\pi^s]' + c^s_{kl}[\pi^k \pi^l] + a^s_{k\rho}[\pi^k \varpi^\rho] = 0. \tag{14}$$

L'étude de ceux-ci appartient complètement à M. E. Cartan [4]. De même que (13) se rapporte à des groupes paramétriques toujours *transitifs*, il y a aussi, pour (14), une question de transitivité qui correspond au cas où les c et les a, à trois indices, sont de simples constantes. Ces systèmes (14) sont à la base de la théorie des groupes *infinis*.

En troisième lieu, on pourra construire, de même que les systèmes (13), les systèmes fondamentaux sur lesquels Gaston Darboux a si magnifiquement élevé sa théorie du trièdre mobile. Ces systèmes fondamentaux ne sont que des cas particuliers de (13). Nous développerons cette remarque à la fin du Chapitre III.

Faisons cependant, tout de suite, une remarque capitale. On voit que l'Électromagnétisme et la Théorie du trièdre mobile ont même origine, en la formule (7). Or, la Physique moderne considérant volontiers l'électricité comme la base de toutes choses, si l'on peut tenter une synthèse des phénomènes physiques à partir des idées maxwelliennes, on doit pouvoir la tenter aussi à partir de la Théorie du trièdre. Or cette dernière tentative n'est plus à faire; elle a été l'œuvre des frères Cosserat, en de grandioses développements [4*] qui, jusqu'ici, ne semblent pas avoir attiré l'attention autant qu'ils le méritaient.

En quatrième lieu, plutôt que d'imaginer des combinaisons (13) ou (14) à coefficients c ou a explicites, on peut recourir à des associations simplement additives

$$[\pi^i_k \pi^k],$$

puis à des

$$\Omega^i = [\pi^i]' + [\pi^i_k \pi^k] = [\pi^i]' - [\pi^k \pi^i_k] = \mathrm{A}^i_{jk}\,[\pi^j \pi^k], \tag{15}$$

$$\Omega^i_j = [\pi^i_j]' + [\pi^i_k \pi^k_j] = [\pi^i_j]' - [\pi^k_j \pi^i_\kappa] = \mathrm{A}^i_{jkl}[\pi^k \pi^l]. \tag{16}$$

Ici, les π^i_k ne sont plus des coefficients comme dans (8); ce sont de nouvelles formes linéaires énumérables au moyen des deux indices i et k.

On a, en (15) et en (16), toujours d'après M. E. Cartan [37], les composantes de la *torsion* et de la *courbure* dans les espaces *affines* ou *à connexion affine*. L'analogie, immédiatement visible, de (12), (15), (16), laisse pressentir, pour les *espaces paramétriques* des groupes, de remarquables propriétés de connexion affine avec intervention de la torsion et de la courbure précédentes.

En cinquième lieu, les extensions précédentes de (9) tendant à remonter, de (9) à (6) ou à (7), nous pouvons considérer l'Électromagnétisme de Maxwell comme une forme des théories déjà énumérées ou, si l'on préfère, ces théories comme étant des variantes d'un Électromagnétisme pris initialement d'une manière suffisamment générale.

En sixième lieu, comme on ne peut guère terminer un fascicule tel que celui-ci sans donner des exemples explicites de groupes, nous nous adresserons, pour cela, aux groupes de déplacements de la Géométrie de Cayley et nous rappellerons qu'on peut les construire à partir de la formule électromagnétique (7).

On voit que l'Électromagnétisme et la Géométrie, vus d'un point de vue suffisamment élevé, sont, au fond, des disciplines identiques.

Ces préliminaires nous permettent d'indiquer dans quel esprit est rédigé le présent fascicule : nous avons voulu en faire une introduction synthétique aux six théories précédentes. D'immenses régions de la Théorie des Groupes sont, à côté de cela, passées sous silence, mais il eût été chimérique de vouloir être plus complet dans le cadre dont nous disposions.

Et la synthèse tentée se rapporte précisément à l'évolution moderne de la Théorie, évolution surtout dessinée dans les beaux travaux de M. E. Cartan.

Je regrette de n'avoir pu ajouter quelques aperçus sur les idées très synthétiques récemment émises par M. H. Weyl. C'est là une lacune à combler ultérieurement. En attendant, et pour une comparaison rapide des points de vue de MM. Cartan et Weyl, signalons deux conférences faites conjointement, par ces savants, le 7 mai 1927, à Berne [4**]. Les systèmes linéaires, tels (a), (b), (c) de l'Introduction, ne vont point sans propriétés intégrales à la Fredholm-Volterra.

CHAPITRE II.

GROUPES. THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

1. Groupe initial. Espaces de groupes. — La notion de ***groupe*** correspond à la coexistence des systèmes

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_r), \tag{1}$$

$$x''_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n;\ b_1, b_2, \ldots, b_r), \tag{2}$$

$$x''_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ c_1, c_2, \ldots, c_r) \tag{3}$$

et

$$c_i = \varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_r;\ b_1, b_2, \ldots, b_r). \tag{4}$$

On doit évidemment pouvoir écrire (1), (2), (3), (4) dès que l'on peut écrire (1).

Aussi nous dirons que les n équations (1) sont les équations ***initiales*** du groupe ou encore qu'elles définissent le groupe ***initial.***

Une *transformation* du groupe correspond à un ensemble de valeurs pour les *paramètres* a_i en nombre r. Nous admettrons que tout groupe contient la transformation *identique*, c'est-à-dire qu'il donne $x'_i = x_i$ pour des a_i convenablement choisis; de même, la transformation *inverse* T^{-1} d'une transformation T du groupe appartiendra également au groupe.

Tout ceci peut déjà donner lieu à une représentation géométrique fondamentale, des plus intéressantes et des plus utiles, bien que d'emploi extrêmement récent [5].

La transformation T_a, correspondant à r paramètres a_i, sera représentée, dans un espace à r dimensions, par un point a de coordonnées a_i. La transformation identique pourra servir d'origine O dans cet espace. La transformation T_a pourra être représentée aussi par le *vecteur* Oa, mais, dans celui-ci, il n'y a d'essentiels que l'*origine* O et l'*extrémité* a; le *trait* Oa ne joue qu'un rôle de commodité, les figures formées de traits étant plus claires que celles formées de points isolés qu'il serait difficile d'assembler deux à deux sans confusions.

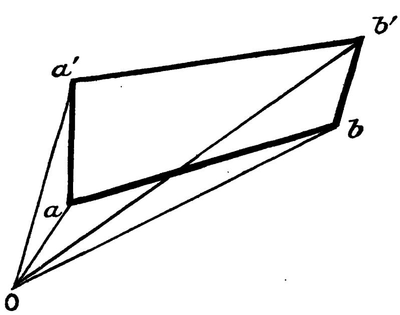
Deux points ou deux transformations, a et b, définissent la transformation

$$ab \equiv T_b T_a^{-1}$$

qui, de par la définition et l'existence mêmes du groupe initial, appartient aussi à ce groupe; ici, a est l'origine de ab et b en est l'extrémité.

Soient quatre points a, b, a', b' ou quatre transformations

$$Oa \equiv T_a, \qquad Ob \equiv T_b, \qquad Oa' \equiv T_{a'}, \qquad Ob' \equiv T_{b'}.$$



On pourra en déduire les nouvelles transformations du groupe initial

$$(5) \quad ab \equiv T_b T_a^{-1}, \qquad a'b' \equiv T_{b'} T_{a'}^{-1}, \qquad aa' \equiv T_{a'} T_a^{-1}, \qquad bb' \equiv T_{b'} T_b^{-1}.$$

2. Les deux espèces d'équipollences. — Supposons qu'il y ait équipollence entre ab et $a'b'$, c'est-à-dire que l'on ait

$$(6) \qquad T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}.$$

Si, dans cette égalité, on multiplie chaque membre, à gauche par T_b^{-1}, à droite par $T_{a'}$, il vient

$$T_a^{-1} T_{a'} = T_b^{-1} T_{b'}, \tag{7}$$

Ce résultat (7), comparé avec les deux dernières formules (5), montre que l'équipollence (6), imaginée entre ab et $a'b'$, n'entraîne pas, en général, une équipollence identique entre aa' et bb'; *il convient précisément d'admettre deux espèces d'équipollences.* La formule (6) exprimera une équipollence *de première espèce* entre ab et $a'b'$; on pourra en déduire (7) qui exprime une équipollence *de seconde espèce* entre aa' et bb'.

On peut dire qu'un espace de groupe jouit d'une *double connexion* qui provient précisément de la dualité d'équipollences existant dans cet espace. De plus, les équipollences de ab, $a'b'$ ou de aa', bb' peuvent être considérées comme des *parallélismes*, non pas, bien entendu, au sens euclidien du mot, mais au sens généralisé de M. Levi-Civita. C'est ainsi que des extensions nées avec les Théories d'Einstein auraient pu être justifiées aussi en d'autres domaines.

3. **Les deux groupes paramétriques.** — La transformation (4) permet de passer d'un point quelconque $a(a_i)$ à un point quelconque $c(c_i)$ de l'espace du groupe, les b_i jouant alors le rôle de paramètres; elle permet, de même, de passer de $b(b_i)$ à c avec les a_i comme paramètres. Les vecteurs adjacents ac et bc peuvent représenter des transformations du groupe initial auxquelles on adjoindra, par équipollence, des transformations ac' et bc' représentables, elles aussi, par des systèmes (4). On pourra même prolonger cette construction par des combinaisons vectorielles quelconques, le passage de l'origine à l'extrémité de tout vecteur nouveau ne relevant que du système (4).

Ainsi, les deux transformations (4), l'une en variables a_i et l'autre en variables b_i, s'appliquent identiquement, pour ainsi dire, sur l'espace du groupe initial; elles constituent obligatoirement deux groupes, P_1 et P_2, dits *groupes paramétriques* du groupe initial.

Les deux groupes paramétriques de P_1 *sont* P_1 *et* P_2.

Les deux groupes paramétriques de P_2 *sont* P_2 *et* P_1.

En revenant au quadrilatère $bcac'$ et en remarquant que les chemins cac' et cbc' sont équivalents, on voit que deux transformations appartenant respectivement à P_1 et P_2 peuvent être effectuées dans un ordre arbitraire : *les transformations des deux groupes paramétriques sont permutables.*

On voit que l'espace du groupe initial n'est autre chose que l'espace de ses deux groupes paramétriques; aussi convient-il de construire et d'étudier d'abord ces derniers.

Tout en commençant par le *premier théorème* de Lie, nous le débarrasserons, le plus rapidement possible, de ce qui concerne les variables x_i.

4. Premier théorème de Lie. — Partons de l'égalité des seconds membres en (2) et (3). De

$$f_\nu(x', b) = f_\nu(x, c),$$

en traitant les x, les a et les c comme des variables indépendantes, on déduit

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial a_l} + \frac{\partial f_\nu}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial a_l} = 0.$$

Nous adoptons, comme précédemment, la *convention de sommation*, d'après laquelle tout indice figurant deux fois dans un terme monome est indice de sommation.

De (4), on conclut

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial a_l} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_l} = 0.$$

On peut tirer de là les dérivées des b par rapport aux a et les porter dans le système précédent d'où l'on pourra conclure

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_l} = \alpha^{jl}\xi_{ji}(x'). \tag{5'}$$

Le calcul brut semble donner des α^{jl} fonctions des a et des b, et des ξ_{ji} fonctions des x' et des b, mais (1) doit donner une vérification de (5') sans b intervenant explicitement; aussi, finalement, les α^{jl} peuvent-ils s'exprimer rien qu'avec des a et les $\xi_{ji}(x)$ rien qu'avec des x'.

On a maintenant

$$\frac{\partial x'_i}{\partial b_m} = \frac{\partial x'_i}{\partial a_l}\frac{\partial a_l}{\partial b_m} = \alpha^{jl}\frac{\partial a_l}{\partial b_m}\xi_{ji}(x') = \beta^{jm}\xi_{ji}(x'). \tag{6'}$$

On peut encore démontrer que les β^{jm} sont exprimables rien qu'avec des b; le contraire serait d'ailleurs incompatible avec la symétrie de formules subséquentes.

On voit que l'on a posé

$$\alpha^{jl}\frac{\partial a_l}{\partial b_m} = \beta^{jm},$$

d'où, en multipliant par db_m,

$$\alpha^{jl}(a)\, da_l = \beta^{jl}(b)\, db_l. \tag{7'}$$

C'est ce que nous écrirons

$$\varpi^j(a) = \omega^j(b), \tag{8}$$

ceci par définition de ces deux nouveaux membres, la notation étant d'ailleurs celle qui est couramment employée pour les formes de Pfaff.

Le premier théorème de Lie est généralement exprimé par l'équation (5'); ici, nous le représenterons plus symétriquement par les quatre systèmes

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x'_i}{\partial a_l} = \alpha^{jl}(a)\,\xi_{ji}(x'), & \dfrac{\partial x'_i}{\partial b'_l} = \beta^{jl}(b)\,\xi_{ji}(x'), \\[2ex] \dfrac{\partial x_i}{\partial b_l} = \alpha^{jl}(b)\,\xi_{ji}(x), & \dfrac{\partial x_i}{\partial a_l} = \beta^{jl}(a)\,\xi_{ji}(x). \end{cases}$$

Trois de ces systèmes, le premier de gauche et les deux de droite, sont formés dans le grand Ouvrage [6] de S. Lie et Fr. Engel (Band I, Kap. 2).

Il ne faut pas s'attendre évidemment à voir intervenir, dans la suite, le tableau (A) pris au complet; il faut seulement considérer que l'on peut partir de l'un *quelconque* des quatre systèmes rassemblés en (A) pour construire le groupe initial.

Nous avons vu que la première ligne de (A) donnait l'équation (8); de même, la seconde ligne donne

$$\varpi^j(b) = \omega^j(a).$$

Mais le double système

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \varpi^j(a) = \omega^j(b), \\ \varpi^j(b) = \omega^j(a) \end{cases}$$

est-il compatible? Nous allons examiner la question en l'élargissant et même en augmentant encore la symétrie. Au moins provisoirement, les x_i sont hors de cause.

5. Tableau fondamental. — Cette dénomination s'appliquera très justement, comme nous allons le voir, au tableau

$$\begin{array}{ll} \varpi^j(a), & \omega^j(b), \\ \varpi^j(b), & \omega^j(a). \end{array}$$

Le système (B) en provient en égalant entre eux les termes des lignes, ce que l'on peut rappeler en disant que (B) est le système *horizontal* issu du tableau fondamental. Considérons également le système *vertical*

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \varpi^j(a) = \varpi^j(b), \\ \omega^j(b) = \omega^j(a). \end{cases}$$

Le système horizontal (B) *et le système vertical* (C) *ont les mêmes conditions d'existence* [7]. C'est là une assertion capitale.

Pour la démontrer, raisonnons d'abord sur (B). Prenons la première équation

$$\text{(9)} \qquad \varpi^s(a) = \omega^s(b),$$

en laquelle nous avons changé j en s pour être d'accord avec des notations plus fréquemment employées, notamment par M. Cartan. Pour qu'un système tel que (9) soit intégrable, il faut [2] (p. 99) que le système obtenu par dérivation *extérieure*

$$\text{(10)} \qquad [\varpi^s(a)]' = [\omega^s(b)]'$$

puisse être identiquement vérifié en profitant de (9). Or, on peut exprimer les deux membres *bilinéaires* de (10) sous les formes respectives

$$\text{(11)} \qquad -c^s_{jk}(a)[\varpi^j(a)\,\varpi^k(a)] = -\gamma^s_{jk}(b)[\omega^j(b)\,\omega^k(b)],$$

ce qui aura lieu identiquement, d'après (9), si

$$c^s_{jk}(a) = \gamma^s_{jk}(b) = c^s_{jk},$$

les derniers c^s_{jk} étant de simples constantes. Donc, en comparant à nouveau (10) et (11),

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} [\varpi^s(a)]' + c^s_{jk}[\varpi^j(a)\,\varpi^k(a)] = 0, \\ [\omega^s(b)]' + c^s_{jk}[\omega^j(b)\,\omega^k(b)] = 0. \end{cases}$$

En faisant le même raisonnement avec la seconde équation (B), on trouve

$$(13) \qquad \begin{cases} [\varpi^s(b)]' + c^s_{jk}[\varpi^j(b)\varpi^k(b)] = 0, \\ [\omega^s(a)]' + c^s_{jk}[\omega^j(a)\omega^k(a)] = 0, \end{cases}$$

les constantes c à trois indices étant les mêmes qu'en (12), ce qui assure la conservation de l'ensemble (13) quand on permute les a et les b.

Toujours de même, à la première équation (C), on peut faire correspondre la première (12) et la première (13) et, à la seconde équation (C), la seconde (12) et la seconde (13).

En résumé, *s'il existe des formes de Pfaff*, ϖ^s *et* ω^s, *vérifiant les systèmes* (B) *et* (C), *elles doivent vérifier d'abord le système*

$$(D) \qquad [\pi^s]' + c^s_{jk}[\pi^j \pi^k] = 0.$$

Nous dirons que le système (D) est le *système de Maurer-Cartan*. Avec les notations habituelles du Calcul différentiel ordinaire, on peut l'écrire

$$(14) \qquad \frac{\partial \alpha^{s\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial \alpha^{s\mu}}{\partial a_\nu} = c^s_{jk}\alpha^{k\mu}\alpha^{j\nu}$$

et, sous cette forme, il a été donné par L. Maurer [8] et reproduit en l'Ouvrage [6] de Lie et Engel (Band III, S. 581, 796), mais la forme (14) n'a pas la valeur intuitive de la forme (D) qui fait de ce système (D) un système primordial immédiatement associable aux premiers principes du Calcul intégral et éveillant l'idée de nombreuses analogies déjà sommairement indiquées au Chapitre I.

Il pourrait sembler naturel de s'occuper dès maintenant de l'intégration du système (D); ce sera l'objet du Chapitre suivant. Pour l'instant, nous en finirons avec les théorèmes fondamentaux de Lie.

Nous dirons, avec M. Cartan [5] (p. 48), que le système vertical (C) contient les *équations de définition* des deux groupes paramétriques; quant au système horizontal (B), son rôle ne peut évidemment être que de livrer des transformations permettant de passer de l'un de ces groupes à l'autre.

6. Quelques comparaisons. — Reprenons la théorie des fonctions analytiques

$$f(x+iy) = X + iY.$$

Nous avons d'abord les relations de Cauchy

$$(15)\qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

qui entraînent que X et Y sont solutions de l'équation de Laplace

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Or, de même que les équations (15) entraînent (16), les tableaux (B) et (C) entraînent (D). Les deux faits ainsi rapprochés sont inégalement compliqués, mais ils relèvent manifestement du même ordre d'idées.

Quant à la symétrie soigneusement observée dans ce qui précède, elle nous a déjà été d'un secours puissant dans des questions analogues. Ainsi, dans nos *Formules stokiennes* [9] (p. 30), nous avons exposé une forme vectorielle de la Loi de Gravitation d'Einstein, qui peut se traduire par un seul système d'équations, mais est alors dissymétrique; l'adjonction d'un second système, compatible avec le premier, fait apparaître, au contraire, une symétrie remarquable analogue à celle des équations électromagnétiques.

Dans le même fascicule (p. 41), nous rappelons des Identités de Jacobi formant un tableau assez analogue à (A); une seule équation du tableau vaut tout le reste, et cependant c'est surtout la symétrie de l'ensemble qui joue un rôle remarquable en Mécanique céleste.

7. **Troisième théorème de Lie.** — La méthode d'exposition adoptée ici nous fait donner la seconde place à ce théorème auquel Lie donnait la troisième. Il s'agit de relations qui doivent obligatoirement exister entre les constantes c^s_{jk} ou *constantes de structure*. D'abord, l'équation (D) ne devant pas changer si l'on y intervertit les indices de sommation j et k, on a

$$(17)\qquad c^s_{jk} + c^s_{kj} = 0.$$

D'autre part, l'identité

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial a_i} & \frac{\partial}{\partial a_j} & \frac{\partial}{\partial a_k} \\ \frac{\partial}{\partial a_i} & \frac{\partial}{\partial a_j} & \frac{\partial}{\partial a_k} \\ \alpha^{ti} & \alpha^{tj} & \alpha^{tk} \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on remplace les mineurs des termes de la première ligne par leurs expressions (14), montre que les constantes de structure doivent satisfaire à des identités dont la forme s'apparente ainsi tout naturellement à celle de l'équation (18): ces identités sont

$$\text{(19)}\qquad \begin{vmatrix} c^t_{si} & c^t_{sj} & c^t_{sk} \\ c^s_{i\omega} & c^s_{j\omega} & c^s_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} = 0.$$

Ici, ω est un *indice de substitution* dont on comprend immédiatement le rôle en développant comme ci-dessous, et, en résumé, le troisième théorème de Lie est traduit par les *identités structurales fondamentales*

$$\text{(E)}\qquad \begin{cases} c^s_{jk} + c^s_{kj} = 0, \\ c^t_{si}c^s_{jk} + c^t_{sj}c^s_{ki} + c^t_{sk}c^s_{ij} = 0. \end{cases}$$

8. Transformations infinitésimales. — Par le jeu de notations bien connues, le tableau (A) peut être remplacé par

$$\text{(F)}\qquad \begin{cases} \xi_{ji}(x') = \alpha_{jk}(a)\dfrac{\partial x'_i}{\partial a_k}, & \xi_{ji}(x') = \beta_{jk}(b)\dfrac{\partial x_i}{\partial b_k}, \\ \xi_{ji}(x\,) = \alpha_{jk}(b)\dfrac{\partial x_i}{\partial b_k}, & \xi_{ji}(x\,) = \beta_{jk}(a)\dfrac{\partial x_i}{\partial a_k}. \end{cases}$$

Les α_{jk} (ou les β_{jk}) peuvent former un déterminant α (ou β) dont α^{jk} (ou β^{jk}) est le mineur algébrique de α_{jk} (ou de β_{jk}), mineur divisé par α (ou par β).

Ainsi,

$$\text{(20)}\qquad \alpha_{il}\alpha^{jl} \quad \text{ou} \quad \beta_{il}\beta^{jl} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Les indices de sommation l, écrits ici en second, pourraient aussi bien être écrits en premier, car on ne change point un déterminant en échangeant lignes et colonnes.

Écrivons maintenant

$$\text{(21)}\qquad \begin{cases} \lambda^j\,\xi_{ji}(x') = \lambda^j\,\alpha_{jk}(a)\dfrac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \dfrac{da_k}{dt}\dfrac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \dfrac{dx'_i}{dt}, \\ \mu^j\,\xi_{ji}(x') = \mu^j\,\beta_{jk}(b)\dfrac{\partial x'_i}{\partial b_k} = \dfrac{db_k}{du}\dfrac{\partial x'_i}{\partial b_k} = \dfrac{dx'_i}{du}. \end{cases}$$

On voit que

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{da_k}{dt} = \lambda^j \alpha_{jk}(a), & \dfrac{dx'_i}{dt} = \lambda^j \xi_{ji}(x') \\ \dfrac{db_k}{du} = \mu^j \beta_{jk}(b), & \dfrac{'dx'_i}{du} = \mu^j \xi_{ji}(x') \end{cases}$$

sont des systèmes différentiels étroitement associés; l'intégration des deux de gauche permet de remplacer les a_j par des $\lambda^j t$ et les b_j par des $\mu^j t$, artifice qui ne change rien à la généralité tout en introduisant avantageusement dans la question des systèmes différentiels ordinaires.

D'après (20), on conclut des systèmes (22) de gauche

$$(23)\quad \varpi^i(a) = \lambda^i\, dt, \qquad dF = \lambda^j\, dt\; \alpha_{jk}(a)\frac{\partial F}{\partial a_k} = \varpi^j(a)\, A_j(F),$$

$$(24)\quad \omega^i(b) = \mu^i\, du, \qquad dF = \mu^j\, du\, \beta_{jk}(b)\frac{\partial F}{\partial b_k} = \omega^j(b)\, B_j(F).$$

On a évidemment posé

$$(25)\quad A_j(F) = \alpha_{jk}(a)\frac{\partial F}{\partial a_k}, \qquad B_j(F) = \beta_{jk}(b)\frac{\partial F}{\partial b_k}.$$

Ce sont là les symboles des *transformations infinitésimales* des groupes paramétriques; ils sont liés, comme on voit, très symétriquement et très simplement aux formes ϖ^i et ω^i, c'est-à-dire aux équations de définition de ces groupes. Ce rapprochement a été effectué, d'une manière plus géométrique, par M. Cartan dans son Mémoire [5] (p. 48).

Voyons maintenant les *transformations infinitésimales* du groupe initial et justifions l'expression soulignée.

Soit F une fonction des x'_i; nous aurons, d'après (21) ou (22),

$$(26)\quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x'_i}\frac{dx'_i}{dt} = \lambda^j \xi_{ji}(x')\frac{\partial F}{\partial x'_i} = \lambda^j X'_j(F),$$

la dernière égalité constituant précisément une définition de $X'_j(F)$.

Imaginons maintenant le second système (22), première ligne, intégré de telle manière que x'_i se réduise à x_i pour $t = 0$. De

$$\lambda^j X'_j(F) = \frac{dF}{dt}, \qquad [\lambda^j X'_j(F)]^{(2)} = \frac{d^2F}{dt^2},$$

on déduit

$$\lambda^j X_j(F) = \left(\frac{dF}{dt}\right)_0, \quad [\lambda^j X_j(F)]^{(2)} = \left(\frac{d^2F}{dt^2}\right)_0, \quad \dots;$$

d'où, par la formule de Mac Laurin,

$$(27) \quad \begin{aligned} &F(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \\ &= F(x_1, \dots, x_n) + \frac{t}{1!}\lambda^j X_j(F) + \frac{t^2}{2!}[\lambda^j X_j(F)]^{(2)} + \dots. \end{aligned}$$

Les paramètres étant toujours les $\lambda^j t$, on peut évidemment faire $t = 1$ sans diminuer la généralité de cette formule écrite par Henri Poincaré [10] sous la forme symbolique encore plus réduite

$$F' = e^{\lambda^j X_j(F)}.$$

Pour t nul ou des λ^j tous nuls, la formule (27) donne la *transformation identique*.

Le symbole $X_j(\ )$ est celui d'une *transformation infinitésimale* du groupe initial; il faut une itération taylorienne d'une infinité de ces symboles pour obtenir une transformation finie du groupe. Plus simplement, si t ou les λ^j n'ont qu'une grandeur *infinitésimale*, le second membre de (27) peut être réduit à ses deux premiers termes et l'opérateur $X_j(\ )$ indique alors immédiatement comment $F(x')$ diffère de $F(x)$. Les transformations finies du groupe initial, condensées en la formule (27), sont dites *transformations canoniques* de ce groupe.

Il est maintenant évident qu'on peut écrire des développements du type (27) pour représenter les transformations finies des groupes paramétriques, ceci au moyen des symboles (25) des transformations infinitésimales de ces groupes et que *de tels développements sont propres à intégrer les équations de définition des groupes paramétriques.*

Il est clair que le raisonnement fait ci-dessus avec $(22)_2$ aurait pu l'être aussi bien avec $(22)_1$.

9. Deuxième théorème de Lie. — La méthode d'exposition adoptée ici, nous fait donner la troisième place à ce théorème auquel Lie donnait la seconde. Reprenons l'équation (26), les variables x'_i étant remplacées plus simplement par x_i, car ce qui va suivre est purement formel, le nom des variables devenant dès lors sans importance.

L'équation, en variables x_i et a_i,

$$dF = \lambda^j\, dt\, X_j(F) = X_j(F)\,\varpi^j(a) \tag{28}$$

doit être complètement intégrable, d'où ([1]), par dérivation extérieure, la relation

$$X_j(F)[\varpi^j]' + [dX_j(F).\varpi^j] = 0$$

qui doit être vérifiée, en vertu de (28) ou de

$$dX_j(F) = \varpi^k X_k X_j(F).$$

On a donc

$$X_s(F)[\varpi^s]' + X_j X_k(F)[\varpi^j \varpi^k] = 0.$$

Mais, comme les formes ϖ^s satisfont au système de Maurer-Cartan (D), on conclut de là

$$(X_j X_k) = X_j X_k - X_k X_j = c^s_{jk} X_s, \tag{G}$$

ce qui est le second théorème de Lie et complète la trinité des théorèmes dits *fondamentaux* par l'illustre créateur de la Théorie des groupes.

On voit qu'en (G), il faut $j < k$ et que le raisonnement suppose (D) pris sous la forme

$$[\varpi^j]' + c^s_{(jk)}[\varpi^j \varpi^k] = 0,$$

ce qui peut être considéré comme la forme naturelle du système quand on écrit également sans répétition dans les combinaisons μ, ν,

$$[\varpi^s]' = \left(\frac{\partial \alpha^{s\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial \alpha^{s\mu}}{\partial a_\nu}\right)[da_\mu\, da_\nu].$$

Les formules (D) et (14), telles qu'elles sont écrites au paragraphe 5, supposent, au contraire, j et k prenant toutes les valeurs de 1 à r.

D'ailleurs (G) redonne immédiatement la première des relations (E), puis la seconde quand on part de l'*identité de Jacobi*

$$\begin{vmatrix} \overline{X_i} & \overline{X_j} & \overline{X_k} \\ X_i & X_j & X_k \\ X_i & X_j & X_k \end{vmatrix} = 0, \tag{29}$$

en laquelle les opérateurs de la première ligne agissent sur des mineurs

([1]) *Cf.* E. CARTAN [2], p. 68, 99; [5], p. 33.

qui ont précisément la forme (G), et c'est ainsi que le théorème des relations (E) peut venir se placer après (G). Mais il est justement remarquable que l'identité de Jacobi (29) puisse être remplacée par l'identité (18) plus simple et relevant des principes développés comme Préliminaires au Chapitre I.

On pourrait maintenant raisonner sur les équations (23) et (24) exactement comme sur (28), et l'on obtiendrait, au lieu de (G),

$$(30)\qquad \begin{cases} (A_j A_k) = A_j A_k - A_k A_j = c_{jk}^s A_s, \\ (B_j B_k) = B_j B_k - B_k B_j = c_{jk}^s B_s. \end{cases}$$

Les groupes paramétriques ont même structure que le groupe initial.

Ces groupes sont aussi *semblables*, c'est-à-dire qu'on peut passer de l'un à l'autre par un changement de variables; la chose est évidente puisqu'on passe de (23) à (24) par le premier système (B) que l'on sait être complètement intégrable.

Enfin, *les opérateurs* (25) *doivent être permutables*, tout comme les transformations finies correspondantes (§ 3), ce que nous allons vérifier. Imaginons, par exemple, que dans B_j, on remplace les b par des a; on aura

$$(A_j B_l) = A_j B_l - B_l A_j = \left(\alpha_{jk}\frac{\partial \beta_{lm}}{\partial a_k} - \beta_{lk}\frac{\partial \alpha_{jm}}{\partial a_k}\right)\frac{\partial}{\partial a_m}.$$

Or, d'après les systèmes (22) de gauche, en lesquels les λ et les μ doivent être considérés comme des constantes,

$$\lambda^j \mu^l (A_j B_l) = \left(\frac{da_k}{dt}\frac{\partial}{\partial a_k}\frac{da_m}{du} - \frac{da_k}{du}\frac{\partial}{\partial a_k}\frac{da_m}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial a_m},$$

d'où

$$\lambda^j \mu^l (A_j B_l) = \left(\frac{d}{dt}\frac{da_m}{du} - \frac{d}{du}\frac{da_m}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial a_m} = 0.$$

En tenant compte de l'égalité de $\lambda^i\,dt$ et de $\mu^i\,du$, puis en exprimant que notre dernière équation a lieu quels que soient les λ (ou les μ), on a bien

$$(31)\qquad (A_j B_l) = 0.$$

Du point de vue de la symétrie, (31) complète (30).

Observons encore que (30), (25) et le système de Maurer-Cartan (14) sont toujours choses se tenant d'extrêmement près. Ainsi, on déduit de (25)

$$\alpha^{jl} A_j(F) = \frac{\partial F}{\partial a_l}, \qquad \alpha^{jk} A_j(F) = \frac{\partial F}{\partial a_k}.$$

En écrivant que les premiers membres sont permutables comme les seconds, on retrouve (14).

10. Considérations sur la structure. — Beaucoup d'exposés systématiques de la Théorie des Groupes semblant demander d'abord une très longue période d'assimilation, nous trouvons bon de la présenter le plus tôt possible sous des aspects plus abordables et beaucoup plus promptement féconds. Il est déjà entendu que, dès l'obtention du système (D), celui-ci peut être l'objet de particularisations remarquables ou d'intéressants développements concernant son intégration. De même, les théorèmes (E) et (G) peuvent être immédiatement le prétexte de recherches extrêmement étendues, largement commencées d'ailleurs, mais toujours susceptibles d'être poursuivies.

Au groupe initial, de transformations infinitésimales X_i, en nombre r, on peut aussi bien faire correspondre les transformations

$$Y_i = h_i^\rho X_\rho$$

où les h sont des constantes. Alors

$$(Y_i Y_k) = g_{ik}^s Y_s,$$
$$h_t^s g_{ik}^t = h_i^m h_k^n c_{mn}^s.$$

Les g_{ik}^s satisfont évidemment à de nouvelles relations (E) qui pourront toutefois être simplifiées par un choix convenable des h. Nous avons là une première indication sur la réduction et la construction des systèmes (E).

Quand, pour un i déterminé, les g_{ik}^s sont tous nuls, la transformation Y_i est permutable avec toutes les transformations du groupe; elle est dite *distinguée* (*ausgezeichnet*).

Si, avec des constantes α_i^s et

$$U_i = \alpha_i^s X_s \qquad (i = 1, 2, \ldots, m < r),$$

on peut obtenir

$$(U_i U_k) = \gamma_{ik}^s U_s,$$

les m opérateurs U correspondent à un *sous-groupe* du groupe initial.

La construction de sous-groupes peut dépendre uniquement de la structure du groupe initial.

Le *problème de Killing* consiste à rechercher les transformations du groupe initial, qui, avec une transformation donnée, soit X_1, forment un groupe à *deux* paramètres. On peut donc traduire ce problème par

$$(X_1, \lambda^k X_k) = \lambda^k c_{1k}^s X_s = \rho X_1 + \omega \lambda^k X_k,$$

les sommations relatives à l'indice k, se faisant de 2 à r, et ρ, ω étant deux constantes.

Évidemment, la question se pose encore immédiatement à partir de la structure initiale et elle commence par entraîner l'équation algébrique

$$\begin{vmatrix} c_{12}^2 - \omega & c_{13}^2 & \dots & c_{1r}^2 \\ c_{12}^3 & c_{13}^3 - \omega & \dots & c_{1r}^3 \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ c_{12}^r & c_{13}^r & \dots & c_{1r}^r - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Une légère variante du problème de Killing est traduite par

$$(e^i X_i, \lambda^k X_k) = \omega . \lambda^k X_k ;$$

on recherche une $\lambda^k X_k$ *invariante* par une $e^i X_i$ donnée. On aboutit alors à l'équation

$$\begin{vmatrix} e^i c_{i1}^1 - \omega & e^i c_{i2}^1 & \dots & e^i c_{ir}^1 \\ e^i c_{i1}^2 & e^i c_{i2}^2 - \omega & \dots & e^i c_{ir}^2 \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ e^i c_{i1}^r & e^i c_{i2}^r & \dots & e^i c_{ir}^r - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

dite *équation caractéristique* du groupe initial. La Thèse de M. E. Cartan [11] développe considérablement ces préliminaires sous une forme notablement plus accessible et beaucoup plus rigoureuse que celle adoptée par Wilhelm Killing [12].

Dans le même ordre d'idées, en diminuant de plus en plus la généralité, on finit par ne considérer qu'un seul opérateur X, auquel ne correspond plus qu'un groupe à un seul paramètre, opérateur pour lequel on recherche un Y permutable ; on doit avoir

$$(XY) = 0 \qquad \text{ou} \qquad XY - YX = 0.$$

Soient l'équation $X(f) = 0$, Φ_1, Φ_2, ..., Φ_{n-1} ses intégrales et Φ_n tel que $X(\Phi_n) = 1$.

Ceci permet la construction du multiplicateur de Jacobi

$$D = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}, \Phi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}$$

avec lequel on peut écrire

$$X(f) = \frac{1}{D} \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}, f)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}$$

et, [13], sous une forme remarquable,

$$Y(f) = \frac{1}{D} \left| \begin{array}{cccc|c} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} & 0 \\ \hline & & & & F_1 \\ & & D & & F_2 \\ & & & & \ldots \\ & & & & F_n \end{array} \right|,$$

les F étant des fonctions *arbitraires* de $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$, mais non de Φ_n.

Évidemment il ne faut pas compter sur l'opérateur Y pour permuter de manière avantageuse les intégrales de $X = 0$, car il faut connaître *toutes* les intégrales de cette équation pour former Y; l'intérêt est du côté de l'équation $Y(f) = 0$ dont les intégrales sont permutées par l'opérateur X.

Le sujet a été approfondi par S. Lie et G. Scheffers [14] (p. 313), Th. De Donder [15], P. Appell [16], E. Goursat [1] (p. 234), A. Buhl [17], [13], C. Popovici [18], N. Saltykow [19]. Il est aisé à rattacher au théorème de Poisson permutant les intégrales d'un système canonique. Quant à la réduction de généralité, opérée pour aboutir finalement à $X(f)$ et à $Y(f)$, elle est plus apparente que réelle, comme nous le verrons au Chapitre suivant.

La généralité reparaît aussi dans la direction suivante. Les équations les plus ordinaires de la Physique mathématique, telles celle de Laplace, celle de la conductibilité, celle de la propagation ondulatoire, etc., sont des équations *linéaires et à coefficients constants* formées avec des opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \ldots$$

tous permutables, d'où il suit que, pour les équations en litige, *toute* *dérivée partielle d'une solution est également une solution.* Or, avec les opérateurs

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad \ldots$$

d'un groupe, on peut former aussi des équations *linéaires, à coefficients constants, d'ordre quelconque*, qui, pour toute transformation *distinguée* Y du groupe, *auront la solution* $Y(f)$ *en même temps que la solution* f. Ces équations dites, *aux opérateurs* X, forment évidemment des classes particulières d'équations *aux dérivées partielles* à coefficients non constants [20], [21]. Ce sont elles que M. De Donder [45] appelle *équations de Buhl.*

Tous les groupes n'ont pas de transformations distinguées; on trouvera une première indication à ce sujet dans Lie et Engel [6] (Band I, S. 277). Henri Poincaré a commencé ses célèbres Mémoires sur les groupes [10] en partageant précisément ceux-ci en deux *familles :* groupes ne contenant aucune substitution permutable avec toutes les autres et groupes en contenant.

A ces considérations se rattache aussi celle du *groupe réciproque*, aux Y permutables avec les X d'un premier groupe; l'équation (31) exprime que *les deux groupes paramétriques sont réciproques.*

Le groupe

$$X = (x-y)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = (x-y)\frac{\partial}{\partial y}$$

admet

$$U = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \qquad V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

pour groupe réciproque et l'équation d'Euler et de Poisson

$$(x-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - n(x-y)\frac{\partial f}{\partial x} + m(x-y)\frac{\partial f}{\partial y} - pf = 0,$$

qui peut s'écrire

$$XY - nX + (m-1)Y - pf = 0,$$

a ses solutions changées en d'autres par les opérations U et V. Bien entendu, le même fait existe non seulement pour l'équation d'Euler et de Poisson mais pour toutes les équations linéaires en X et Y.

Ne quittons point l'équation caractéristique sans mentionner la notion de *rang*; le *rang* d'un groupe est le nombre de ceux des coefficients de l'équation caractéristique qui sont indépendants. Cette notion joue un très grand rôle dans les travaux de Poincaré déjà cités et dans ceux de M. Cartan [11], [22].

11. Connexions affines fondamentales. — En reprenant un raisonnement qu'on trouve au début de l'Ouvrage de Lie et Engel [6] (Band I, S. 44), considérons les identités

$$\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial a_l}+\frac{\partial x'_\nu}{\partial a_l}=0, \qquad \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial b_l}+\frac{\partial x'_\nu}{\partial b_l}=0. \tag{32}$$

La première, en tenant compte des égalités de la diagonale principale du tableau (A) et en multipliant par da_l, donne, d'après (7′) et (8),

$$\varpi^j(a)\,\xi_{jl}(x')+\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_i}\,\omega^j(a)\,\xi_{jl}(x)=0.$$

Multipliant par $\dfrac{\partial f}{\partial x'_\nu}$, il vient

$$\varpi^j(a)\,\xi_{jl}(x')\frac{\partial f}{\partial x'_i}+\omega^j(a)\,\xi_{jl}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}=0,$$

d'où, d'après la seconde formule (22), première ligne, et la première (23),

$$df=\varpi^j(a)\,X'_j(f), \qquad df=-\,\omega^j(a)\,X_j(f). \tag{33}$$

De même, en partant de la seconde équation (32), on aurait

$$df=\omega^j(b)\,X'_j(f), \qquad df=-\,\varpi^j(b)\,X_j(f). \tag{34}$$

On peut aussi déduire du tableau (A) le tableau

$$\left\{\begin{array}{ll} d\,f(x')=\varpi^j(a)X'_j, & d\,f(x')=\omega^j(b)X'_j,\\ d\,f(x\,)=\varpi^j(b)X_j, & d\,f(x)=\omega^j(a)X_j. \end{array}\right. \tag{35}$$

Il ne faut évidemment pas vouloir prendre ces relations (35) conjointement avec (32) (33), (34); les contradictions seraient manifestes. Il faut seulement et précisément observer qu'il y a différentes manières, non obligatoirement compatibles, d'établir des correspondances entre les x, les x', les a, les b, ces manières étant cependant propres, aussi bien l'une que l'autre, à mettre en évidence le tableau fondamental (§5).

De plus, des formules différentielles, telles que (33), (34), (35), commencent à mettre en évidence les plus simples des *connexions affines* de l'espace du groupe. Le grand Mémoire géométrique [5], de M. Élie Cartan, étudie plusieurs connexions affines à partir de la dualité des formules (33); le système (D) prend une forme double avec des π^j égaux tantôt aux ϖ^j, tantôt aux $-\omega^j$, dualité que la brièveté de ce fascicule nous empêche de reproduire. Bornons-nous à montrer que deux connexions affines fondamentales, les plus simples de toutes, peuvent être mises en évidence rien qu'en partant du système (D) et des équations de structure (E) qui sont d'ailleurs des conséquences immédiates de (D). Ceci va d'ailleurs établir, une fois de plus, que ce sont les groupes paramétriques qui constituent ce qu'il y a de plus essentiel dans le groupe initial.

En ne considérant d'abord que r formes π^i, on définit une *première connexion affine* qui, faute de formes π^i_j, est à *courbure nulle*, la *torsion* se réduisant à

$$\Omega^i = [\pi^i]' = - c^i_{(jk)}[\pi^j \pi^k].$$

Ceci d'après la formule (15) du Chapitre I, laquelle, comparée avec (D), donne une *seconde connexion affine* avec r formes π^i et des formes

$$\pi^i_k = c^i_{jk}\pi^j. \tag{36}$$

Dans cette seconde connexion, la torsion est

$$\Omega^i = [\pi^i]' + [\pi^i_k \pi^k] = - c^i_{(jk)}[\pi^j \pi^k] + c^i_{jk}[\pi^j \pi^k] = c^i_{(jk)}[\pi^j \pi^k].$$

On voit que *les deux connexions affines ont des torsions égales mais opposées.*

Comme la première, *la seconde connexion affine est sans courbure* et il est curieux de remarquer que, dans une connexion affine, l'existence de formes π^i_k n'entraîne pas toujours celle d'une courbure non nulle. On a

$$\Omega^i_j = [\pi^i_j]' - [\pi^k_j \pi^i_k] = c^i_{kj}[\pi^k]' - [\pi^k_j \pi^i_k],$$
$$\Omega^i_j = - c^i_{kj} c^k_{(\alpha\beta)}[\pi^\alpha \pi^\beta] - c^k_{\alpha j} c^i_{\beta k}[\pi^\alpha \pi^\beta],$$
$$\Omega^i_j = - [c^i_{kj} c^k_{(\alpha\beta)} + c^i_{k(\beta)} c^k_{j(\alpha)} + c^i_{k(\alpha)} c^k_{(\beta)j}][\pi^\alpha \pi^\beta].$$

Et ceci, d'après la seconde relation (E), est identiquement nul.

A propos de la seconde relation structurale remarquons aussi qu'elle donne

$$c^i_{si} c^s_{jk} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad c^i_{si}[\pi^s]' = 0$$

pour des formes π^s satisfaisant à (D). Alors $c^l_{sl}\pi^s$ est une différentielle exacte.

Ce résultat, également indiqué par M. Cartan [5] (p. 46), est d'une très grande importance. Il provient, au fond, d'une *contraction* de l'identité de Jacobi, de même que les équations générales d'Einstein proviennent d'une contraction de l'identité de Bianchi.

12. Le groupe adjoint. — Reprenons les équations (33) qui donnent aisément

$$\lambda_l \beta^{jl}(a) X_j + \lambda_l \alpha^{jl}(a) X'_j = 0$$

avec, à la place des da_l, de nouveaux coefficients constants λ_l qui peuvent être finis. Ceci peut s'écrire plus brièvement

$$e^j X_j - e'^j X'_j = 0, \tag{37}$$

en posant

$$e^j = \lambda_l \beta^{jl}(a), \qquad e'^j = -\lambda_l \alpha^{jl}(a).$$

Il n'y a là qu'un changement de notations qui, au fond, n'a rien d'indispensable mais qui nous met d'accord avec celles couramment employées par Lie et Engel.

Toutefois l'équation (37) exprime une chose très importante, savoir ce que devient la transformation infinitésimale $e^j X_j$, du groupe initial, lorsqu'on la soumet précisément à une transformation de ce groupe.

Des deux dernières formules, on tire

$$e^j \beta_{jm}(a) + e'^j \alpha_{jm}(a) = 0.$$

Considérons maintenant le tableau

$$\left\{\begin{aligned} &e^j\ \beta_{jm}(a) + e'^j\ \alpha_{jm}(a) = 0,\\ &e'^j\ \beta_{jm}(b) + e''^j\ \alpha_{jm}(b) = 0,\\ &e''^j\ \beta_{jm}(c) + e^j\ \alpha_{jm}(c) = 0.\end{aligned}\right. \tag{38}$$

La première équation (38) permet d'exprimer les e' par les e avec des coefficients en a. La seconde permet d'exprimer, *exactement de la même manière*, les e'' par les e' avec des b à la place des a. La troisième permet d'exprimer, toujours de manière linéaire et homogène, les e'' par les e initiaux avec des coefficients en c.

C'est le même principe que celui de l'association de (1), (2), (3) et, si les a, b, c sont justement ceux du groupe initial, les c sont des fonctions des a et des b.

On voit que l'expresion des e' en e fait naître un groupe *linéaire* et *homogène* associé de la manière la plus intime et la plus immédiate au groupe initial et à ses groupes paramétriques; c'est le *groupe adjoint*.

L'union est si intime que, toutes les fois que l'étude du groupe initial ou de ses groupes paramétriques fait apparaître brièvement un système différentiel linéaire et homogène, ce système se rapporte, au moins formellement, au groupe adjoint.

Ainsi reprenons la connexion affine de π^i_k définis en (36). Elle admet un parallélisme généralisé qui se traduit par le système différentiel

$$du^i + \pi^i_k u^k = 0.$$

Ce dernier, pour

$$\pi^i_k = \Gamma^i_{\lambda k}\, dx_\lambda,$$

donnerait le résultat bien connu

$$du^i + \Gamma^i_{\lambda k} u^k\, dx_\lambda = 0.$$

Ici, avec (36), dont le π^j sera le $\varpi^j(a)$ égal à $\lambda^j\, dt$ d'après (23), on a

$$du^i + c^i_{jk} \lambda^j u^k\, dt = 0.$$

C'est bien l'équation

$$de'^s + c^s_{\nu k} \lambda^\nu e'^k\, dt = 0 \tag{39}$$

de Lie et Engel [6] (Band I, S. 273).

M. E. Cartan [5] (p. 43) a d'ailleurs donné une méthode très simple pour passer immédiatement des groupes paramétriques au groupe adjoint. Reprenons le système (D) sous la forme (14) et écrivons, avec deux systèmes de différentielles, d et δ, permutables,

$$\left(\frac{\partial \alpha^{s\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial \alpha^{s\mu}}{\partial a_\nu}\right) da_\mu\, \delta a_\nu = c^s_{jk}\, \alpha^{k\mu} \alpha^{j\nu}\, da_\mu\, \delta a_\nu$$

ou, plus brièvement,

$$d\alpha^{s\nu}\, \delta a_\nu - \delta \alpha^{s\mu}\, da_\mu = c^s_{jk}\, \varpi^k(d)\, \varpi^j(\delta)$$

ou encore

$$d\,\varpi^s(\delta) - \delta\,\varpi^s(d) = c^s_{jk}\, \varpi^j(\delta)\, \varpi^k(d).$$

Or, on peut imaginer que les $\varpi^s(\delta)$ soient des $\lambda^s\,\delta t$ constants, au même titre que δt différentielle d'une variable indépendante. Alors les $\varpi^s(d)$ satisfont à (39) et peuvent être identifiés aux e'^s de (37). Il y a en (37), (38) des équations finies qui ont manifestement même origine analytique que le système différentiel (39); celui-ci s'intègre d'ailleurs sous la forme

$$e'^s = \psi^s_j(\lambda^1 t, \lambda^2 t, \ldots, \lambda^r t)\, e^j,$$

les λt pouvant s'exprimer en a. Bref la première équation (38) intègre le système (39) qui peut alors donner immédiatement les transformations infinitésimales du groupe adjoint. De (39) on peut, en effet, conclure

$$\frac{\partial f}{\partial e'^s}\frac{de'^s}{dt} = -c^s_{\nu k}\lambda^\nu e'^k \frac{\partial f}{\partial e'^s} = \lambda^\nu E'_\nu(f),$$

d'où

$$E_\nu(f) = c^s_{k\nu} e^k \frac{\partial f}{\partial e^s}. \tag{40}$$

De (40) et des relations (E), on tire enfin

$$(E_i E_k) = c^s_{ik} E_s.$$

Le groupe adjoint a même structure que le groupe initial et que ses groupes paramétriques. Encore une fois, le groupe initial, ses deux groupes paramétriques et le groupe adjoint forment un tout indissoluble; on ne saurait imiter Lie et Engel qui, dans leur Tome I [6], ont séparé les trois choses par des centaines de pages.

D'ailleurs l'indissolubilité en question ne demande qu'à apparaître à tout propos; ainsi, dans le Chapitre suivant, nous ne pourrons traiter de l'intégration du système (D) sans faire apparaître incidemment un système du type (39). Ce système du type (39) peut d'ailleurs être rapproché tout de suite du système (c) de notre Introduction.

CHAPITRE III.

SYSTÈMES DE MAURER-CARTAN ET SYSTÈMES LINÉAIRES ASSOCIÉS.

1. Symétrie. Homogénéité. Invariance. — Nous arrivons au problème fondamental et d'importance maximum de la théorie des groupes : intégration du système (D). Nous traiterons la question avec le détail des procédés classiques de l'analyse, en considérant notamment (D) sous la forme (14) du Chapitre précédent.

$$\frac{\partial \alpha^{t\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial \alpha^{t\mu}}{\partial a_\nu} = c^t_{jk} \alpha^{k\mu} \alpha^{j\nu}. \tag{1}$$

Ici, j et k prennent toutes les valeurs de 1 à r.

La formule de Stokes, prise sous la forme habituelle

$$\int_C \alpha^{t\lambda}\, da_\lambda = \frac{1}{2} \int\int_S \left(\frac{\partial \alpha^{t\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial \alpha^{t\mu}}{\partial a_\nu} \right) [da_\mu\, da_\nu], \tag{2}$$

retransforme bien (1) en

$$\int_C \alpha^{t\lambda}\, da_\lambda = \frac{1}{2} c^t_{jk} \int\int_S \alpha^{k\mu} \alpha^{j\nu} [da_\mu\, da_\nu], \tag{3}$$

c'est-à-dire en

$$[\pi^t]' = c^t_{(jk)} [\pi^k \pi^j], \tag{4}$$

si le premier membre de (4) représente le second membre de (2), avec le facteur 1 : 2. On peut faire abstraction de ce facteur, ce qui revient, dans le second membre de (4), à écrire jk pour (jk) et l'on retrouve ainsi (D). D'ailleurs cette question de facteur constant est, au fond, sans importance; si, dans (1), (4) ou (D), on affecte tous les c, à trois indices, d'un *même* facteur constant $1 : h$, le système est vérifié par des formes $h\pi$. On voit qu'on ne change rien à un groupe en multipliant toutes les constantes de structure par un même facteur constant, ce qui entraîne aussi l'homogénéité des relations (E).

Les équations (1) sont invariantes lorsqu'on substitue, aux a_ρ, des b_ρ en nombre égal ou surabondant. On a alors

$$\frac{\partial A^{s\nu}}{\partial b_\mu} - \frac{\partial A^{s\mu}}{\partial b_\nu} = c^s_{jk} A^{k\mu} A^{j\nu}, \qquad A^{s\tau} = \alpha^{s\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial b_\tau}. \tag{5}$$

L'assertion est évidente si l'on prend le système (1) sous la forme (D) car les formes π^t ne peuvent se changer qu'en formes linéaires analogues.

Le calcul vérifie aussi la chose très simplement. De la dernière équation (5), on tire

$$\frac{\partial A^{s\nu}}{\partial b_\mu} = \frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial b_\mu}\frac{\partial a_\rho}{\partial b_\nu} + \alpha^{s\rho}\frac{\partial^2 a_\rho}{\partial b_\nu \partial b_\mu},$$
$$\frac{\partial A^{s\mu}}{\partial b_\nu} = \frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial b_\nu}\frac{\partial a_\rho}{\partial b_\mu} + \alpha^{s\rho}\frac{\partial^2 a_\rho}{\partial b_\mu \partial b_\nu}.$$

Observant que

$$\frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial b_\mu} = \frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial a_\tau}\frac{\partial a_\tau}{\partial b_\mu}, \qquad \frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial b_\nu} = \frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial a_\tau}\frac{\partial a_\tau}{\partial b_\nu},$$

on a, après quelques permutations d'indices de sommation,

$$\frac{\partial A^{s\nu}}{\partial b_\mu} - \frac{\partial A^{s\mu}}{\partial b_\nu} = \left(\frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial a_\tau} - \frac{\partial \alpha^{s\tau}}{\partial a_\rho}\right)\frac{\partial a_\tau}{\partial b_\mu}\frac{\partial a_\rho}{\partial b_\nu}$$

et (5) s'écrit

$$\left(\frac{\partial \alpha^{s\rho}}{\partial a_\tau} - \frac{\partial \alpha^{s\tau}}{\partial a_\rho} - c^s_{jk}\alpha^{k\tau}\alpha^{j\rho}\right)\frac{\partial a_\tau}{\partial b_\mu}\frac{\partial a_\rho}{\partial b_\nu} = 0.$$

Comme ceci doit avoir lieu quelles que soient les fonctions a_τ, la nullité de la parenthèse est obligatoire et l'on retrouve le système (1) dont la forme a été conservée en (5).

Appliquons ceci au cas où $a_\rho = \lambda_\rho t$. Les λ_ρ correspondent, si l'on veut, aux a_ρ et t est une variable surabondante. Les $A^{s\tau}$ de la seconde équation (5) sont ici

$$(6) \qquad \theta^{s\rho} = t\alpha^{s\rho}, \qquad \lambda^s = \lambda_\rho \alpha^{s\rho}$$

et les transformées de (1), type (5), qui contiennent t, sont

$$(7) \qquad \frac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial t} + c^s_{jk}\lambda^j\theta^{k\rho} = \frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\rho}.$$

C'est l'équation (b) de notre Introduction. Le système (7) intègre celui de Maurer-Cartan; son importance est immense, non seulement vis-à-vis des groupes paramétriques mais aussi vis-à-vis du groupe initial. Il y a d'ailleurs une foule de manières de faire apparaître le système (7) et d'étudier ses propriétés. Ainsi reprenons le paragraphe 8 du Chapitre précédent et plus particulièrement la première équation (F).

Les équations finies du groupe initial expriment que des fonctions F, des x' et des a, sont constantes en vertu de (F) car si l'on pouvait intégrer (F) les x seraient des constantes d'intégration. Donc

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} + \frac{\partial F}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = 0,$$

$$X'_j(F) = \xi_{ji}(x')\frac{\partial F}{\partial x'_i} = \alpha_{jk}(a)\frac{\partial F}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = -\alpha_{jk}(a)\frac{\partial F}{\partial a_k} = -A_j(F).$$

Soient maintenant des μ^j fonctions des a et d'un paramètre auxiliaire t dont d'ailleurs les a vont dépendre aussi. En posant

$$\frac{da_k}{dt} = \mu^j \alpha_{jk}(a),$$

on a

$$\frac{d}{dt} = \mu^j A_j.$$

Reprenons maintenant la dernière équation du paragraphe 9 du Chapitre précédent et étudions la différence

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial a_k} - \frac{\partial}{\partial a_k}\frac{d}{dt};$$

il y viendra des termes qui, annulés, reproduiront

$$(7') \qquad \frac{d\alpha^{sk}}{dt} + c^s_{ij}\mu^i\alpha^{jk} = \frac{\partial\mu^s}{\partial a_k}.$$

C'est le système (7) où il est finalement indifférent d'écrire les dérivées en t avec des ∂ ou avec des d. Certes les μ^i de (7') ont un sens plus large que les λ^j de (7) mais des faits de ce genre sont fréquents dans la Théorie des groupes surtout quand on part, comme nous l'avons fait ici, de la notion de groupe initial c'est-à-dire d'une définition qui n'emprunte absolument rien aux concepts différentiels. Théoriquement, il y a alors une infinité de manières d'associer des systèmes différentiels, parfois très divers, au groupe initial et cet état de choses, loin d'entraîner des paradoxes, est précisément de ceux qui donnent au génial algorithme créé par Lie son merveilleux caractère synthétique.

Les opérateurs

$$(8) \qquad \alpha^{jk}X'_j + \frac{\partial}{\partial a_k}, \qquad \mu^i X'_i + \frac{d}{dt}$$

ont aussi deux produits symboliques dont la différence fait apparaître (7').

Cette assertion se vérifie sans peine; elle est encore de première importance car elle tend à nous renseigner sur la construction du groupe initial en variables x' ou x.

Il ne peut entrer, dans le plan de ce fascicule, d'aller jusqu'a cette construction complète, laquelle se subdivise en d'innombrables problèmes particuliers, mais il n'en est que plus important de montrer que cette construction définitive et générale est en relation avec l'existence d'opérateurs (8) analogues aux premiers membres du système *complet* susmentionné

$$X'_j + A_j = 0.$$

Ce dernier joue un grand rôle dans l'exposition de Lie [6] (Band I, S. 148).

De ce fait la question des opérateurs $X(f)$ et $Y(f)$ permutables, présentée comme très particulière au paragraphe 10 du Chapitre précédent, aurait cependant conservé une généralité comparable à celle de toute la théorie. Certes les opérateurs X' ou A ne sont pas permutables, mais ils sont constamment associés à des questions de permutabilité comme nous l'avons vu à la fin du paragraphe 9, comme nous allons le voir, en (9), en cherchant à intégrer, par (7'), le système de Maurer-Cartan. D'ailleurs ces associations ne sont ici que rapidement ébauchées; on trouvera déjà plus de détail dans un travail [22*] récemment publié.

2. Conséquences de l'intégrabilité du système S. — Le « système S » sera soit (7) soit (7'). Alors, si nous conservons les notations (7), les λ^j sont des fonctions quelconques de t et de paramètres λ_ρ. Les $\theta^{s\rho}$ sont les inconnues.

Il s'agit donc d'un système linéaire toujours *intégrable*, au sens analytique le plus général du mot. Cependant il semble avoir la condition d'existence

$$\frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial \lambda_\rho \partial \lambda_\tau} = \frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial \lambda_\tau \partial \lambda_\rho} \tag{9}$$

qui ne paraît pas réalisée de manière immédiatement évidente.

Il faut évidemment conclure de là que, si la prétendue condition (9) conduit à quelque nouveau système différentiel T, celui-ci sera satisfait *nécessairement*, c'est-à-dire intégré, dès qu'il en sera ainsi du système S. Or, comme nous allons le voir, le système T est un nouveau *système de Maurer-Cartan*, ne différant de (1) que par les notations. *Ce système sera donc intégré par intégration préliminaire d'un système linéaire* S.

Développons tout ceci. On tire de (7)

$$\frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial\lambda_\rho\,\partial\lambda_\tau} = \frac{\partial^2 \theta^{s\rho}}{\partial t\,\partial\lambda_\tau} + c^s_{jk}\lambda^j\frac{\partial\theta^{k\rho}}{\partial\lambda_\tau} + c^s_{jk}\theta^{k\rho}\left(\frac{\partial\theta^{j\tau}}{\partial t} + c^j_{mn}\lambda^m\theta^{n\tau}\right),$$
$$\frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial\lambda_\tau\,\partial\lambda_\rho} = \frac{\partial^2 \theta^{s\tau}}{\partial t\,\partial\lambda_\rho} + c^s_{jk}\lambda^j\frac{\partial\theta^{k\tau}}{\partial\lambda_\rho} + c^s_{jk}\theta^{k\tau}\left(\frac{\partial\theta^{j\rho}}{\partial t} + c^j_{mn}\lambda^m\theta^{n\rho}\right).$$

De ces deux équations il s'agit de retrancher la seconde de la première. Observons d'abord que la différence des troisièmes termes des seconds membres (termes formés avec le premier des parenthèses) peut s'écrire, avec une interversion d'indices j, k,

$$c^s_{jk}\theta^{k\rho}\frac{\partial\theta^{j\tau}}{\partial t} + c^s_{jk}\theta^{j\tau}\frac{\partial\theta^{k\rho}}{\partial t} = c^s_{jk}\frac{\partial}{\partial t}(\theta^{k\rho}\theta^{j\tau}).$$

Ensuite, si l'on pose

$$V^{s\rho\tau} = \frac{\partial\theta^{s\rho}}{\partial\lambda_\tau} - \frac{\partial\theta^{s\tau}}{\partial\lambda_\rho} - c^s_{kj}\theta^{j\tau}\theta^{k\rho},$$

la différence cherchée prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}V^{s\rho\tau} = c^s_{kj}\lambda^j V^{k\rho\tau}, \tag{10}$$

abstraction faite de termes qui se détruisent identiquement d'après (E). On voit que, pour obtenir (10), il faut faire intervenir les deux identités structurales fondamentales.

Il y a plus; sans que nous le cherchions le moins du monde, (10) trahit l'existence du *groupe adjoint*, cette équation (10) étant *de forme* identique à (39) du Chapitre précédent, en lequel (§ 12) nous avons déjà annoncé cette rencontre.

Imaginons maintenant le système (7), ou système S, *intégré de telle manière que l'on ait toujours* $\theta^{s\rho} = 0$ *pour* $t = 0$.

D'abord on aura, pour les inconnues, des séries entières en t telles que

$$\theta^{sk} = \left(\frac{\partial\lambda^s}{\partial\lambda_k}\right)_0 t + \ldots,$$

l'indice zéro accolé à une parenthèse indiquant la valeur de celle-ci pour $t = 0$. Soit aussi

$$\lambda^s = A_0^s + A_1^s t + \ldots;$$

alors

$$\frac{\partial \theta^{s\alpha}}{\partial \lambda_\beta} = \frac{\partial}{\partial \lambda_\beta}\left(\frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\alpha}\right)_0 t + \ldots = \frac{\partial^2 A_0^s}{\partial \lambda_\beta \, \partial \lambda_\alpha} t + \ldots,$$

$$\frac{\partial \theta^{s\beta}}{\partial \lambda_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha}\left(\frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\beta}\right)_0 t + \ldots = \frac{\partial^2 A_0^s}{\partial \lambda_\alpha \, \partial \lambda_\beta} t + \ldots;$$

donc l'expression

$$\frac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial \lambda_\tau} - \frac{\partial \theta^{s\tau}}{\partial \lambda_\rho},$$

développée suivant les puissances croissantes de t, commence par un terme en t^2. Il en sera de même pour $V^{s\rho\tau}$, puisque les $\theta^{j\tau}$, $\theta^{k\rho}$ commencent par des termes en t. Donc les deux membres de l'équation (10) s'annulent pour $t = 0$.

Si l'on dérive cette équation, par rapport à t, un nombre quelconque de fois, on voit que toutes les dérivées

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i} V^{s\rho\tau}$$

s'annulent, quel que soit i, pour $t = 0$. Donc $V^{s\rho\tau}$ est identiquement nul, quel que soit t, et *l'on a*

$$\frac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial \lambda_\tau} - \frac{\partial \theta^{s\tau}}{\partial \lambda_\rho} = c_{kj}^s \theta^{j\tau} \theta^{k\rho} \tag{11}$$

avec toutes les fonctions $\theta^{s\rho}$ qui satisfont au système (7) *et qui s'annulent pour $t = 0$.*

Donc le système de Maurer-Cartan (1) ou (11) est intégré par l'intégration préliminaire du système S.

C'est là, en somme, une conclusion d'apparence relativement élémentaire [23], [24].

Sophus Lie a toujours considéré des résultats de ce genre comme un idéal qu'il atteignit enfin mais après de longs détours. C'est ainsi qu'après avoir constaté que sa théorie primordiale conduisait à des équations fonctionnelles à peine accessibles à des méthodes de résolution ordinaire, il ajoute [24*] : « Es war daher eine überraschende Entdeckung, als ich seinerzeit fand, dass die Erledigung dieser Functionalgleichungen sich auf die Integration von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen zurückfuhren lässt. »

3. Cas particuliers du système S. — Après la construction des groupes par opérations « exécutables », devait venir la question de leur construction par opérations *algébriques*. La particularisation se présente élégamment en partant de (7). L'équation (7), multipliée par λ_ρ, donne, d'après (6),

$$\frac{\partial}{\partial t}(t\lambda^s) - \lambda_\rho \frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_\rho} = c^s_{kj}\lambda^j\lambda^k t = 0,$$

d'où

$$\lambda^s = \lambda_p f^{sp}(t\lambda_1, t\lambda_2, \ldots),$$

les f^{sp} étant r^2 fonctions arbitraires. Si, dans celles-ci, on n'introduit que les rapports des $t\lambda_i$, pris deux à deux, le système (7) est *à coefficients constants* et l'intégration algébrique apparaît.

Celle-ci devient celle de Schur [25], [25*] quand les f^{sp} sont réduites à des constantes nulles pour $s \neq p$ et égales à l'unité pour $s = p$. Le système (7) s'écrit alors

$$(7'') \qquad \frac{\partial \theta^{s\rho}}{\partial t} = \varepsilon_{s\rho} + c^s_{kj}\lambda_j\theta^{k\rho},$$

en désignant précisément par $\varepsilon_{s\rho}$ une constante nulle pour $s \neq \rho$ et égale à l'unité pour $s = \rho$. En faisant abstraction des $\varepsilon_{s\rho}$, on a alors exactement l'équation différentielle qui se rapporte au groupe adjoint. La méthode de Schur revient donc à remplacer le déterminant général des r^2 éléments f^{sp} par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

C'est quelque chose comme la particularisation qui permet de passer d'un ds^2 de Riemann à un ds^2 euclidien. L'équation (7″) se trouve dans Lie [6] (Band III, S. 794) et dans Bianchi [26] (p. 111); c'est elle que nous rapprochons, sous les formes plus naturelles (7) ou (7′), des bases de l'analyse et des principes de la théorie des systèmes différentiels.

Ces considérations ont été étendues, par M. E. Cartan [27], à la théorie des groupes infinis.

Remarquons que dans le cas d'intégration algébrique correspondant aux f^{sp} homogènes et d'ordre zéro en λ_i, on cherche, en réalité, les solutions communes du système

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda_\rho \theta^{s\rho} = \lambda^s,\\ &\frac{\partial\theta^{s\rho}}{\partial\lambda_\tau} - \frac{\partial\theta^{s\tau}}{\partial\lambda_\rho} = c^s_{jk}\theta^{j\tau}\theta^{k\rho}. \end{aligned}\right.$$

en lequel λ^s peut être considéré comme une fonction *homogène et d'ordre un*, d'ailleurs arbitrairement choisie, des variables λ_i.

4. Séries de fonctions homogènes. — Le système (12) se prête à l'expression des fonctions $\theta^{s\rho}$ par des séries de fonctions homogènes, séries déjà considérées par Schur [25] quand λ^s se réduit à λ_s.

De la première équation (12), on tire

$$\lambda_\rho \frac{\partial\theta^{s\rho}}{\partial\lambda_\tau} + \theta^{s\tau} = \frac{\partial\lambda^s}{\partial\lambda_\tau}.$$

La seconde, multipliée par λ_ρ, peut alors s'écrire

$$(13)\qquad \theta^{s\tau} + \lambda_\rho \frac{\partial\theta^{s\tau}}{\partial\lambda_\rho} + C^s_j \theta^{j\tau} = \frac{\partial\lambda^s}{\partial\lambda_\tau},$$

en posant

$$C^s_j = c^s_{jk}\lambda^k.$$

En désignant maintenant par $U^{s\tau}_m$ une fonction homogène, d'ordre m, des λ_i, écrivons

$$\begin{aligned} \theta^{s\tau} &= \frac{1}{1!}U^{s\tau}_0 + \frac{1}{2!}U^{s\tau}_1 + \frac{1}{3!}U^{s\tau}_2 + \frac{1}{4!}U^{s\tau}_3 + \ldots,\\ \lambda_\rho \frac{\partial\theta^{s\tau}}{\partial\lambda_\rho} &= \qquad\quad + \frac{1}{2!}U^{s\tau}_1 + \frac{2}{3!}U^{s\tau}_2 + \frac{3}{4!}U^{s\tau}_3 + \ldots,\\ C^s_j\theta^{j\tau} &= \qquad\quad \frac{1}{1!}C^s_jU^{j\tau}_0 + \frac{1}{2!}C^s_jU^{j\tau}_1 + \frac{1}{3!}C^s_jU^{j\tau}_2 + \ldots. \end{aligned}$$

Le développement indiqué pour $\theta^{s\tau}$ vérifie visiblement l'équation (13), si l'on a

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &U^{s\tau}_0 = \frac{\partial\lambda^s}{\partial\lambda_\tau},\\ &U^{s\tau}_1 + C^s_jU^{j\tau}_0 = 0,\\ &U^{s\tau}_2 + C^s_jU^{j\tau}_1 = 0,\\ &U^{s\tau}_3 + C^s_jU^{j\tau}_2 = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &U^{s\tau}_m + C^s_jU^{j\tau}_{m-1} = 0. \end{aligned}\right.$$

En multipliant ces diverses équations par λ_τ, on a

$$\lambda_\tau U_0^{s\tau} = \lambda^s,$$
$$\lambda_\tau U_1^{s\tau} + c_{kj}^s \lambda^k \lambda^j = 0,$$

d'où, c_{kj}^s et c_{jk}^s étant de signes contraires,

$$\lambda_\tau U_1^{s\tau} = 0.$$

De même, en général,

$$\lambda_\tau U_m^{s\tau} = 0.$$

Avec ces divers résultats, on vérifie immédiatement que le développement en série adopté pour $\theta^{s\tau}$ satisfait à la première équation (12), si, bien entendu, les équations (14) ont lieu.

5. Développement de Schur. — Il est aisé de vérifier que les résultats qui viennent d'être obtenus donnent le développement bien connu de Schur [25] (p. 270), [6] (III, p. 795), où interviennent les nombres de Bernoulli. Alors le second membre de la première équation (12) se réduit à l'unique variable λ_s. Les formules (14) donnent

$$U_0^{s\tau} = \varepsilon_{s\tau},$$
$$U_1^{s\tau} = c_{jk}^s \lambda^k \varepsilon_{j\tau} = c_{\tau k}^s \lambda^k,$$
$$U_2^{s\tau} = c_{jk}^s \lambda^k U_1^{j\tau} = U_1^{sj} U_1^{j\tau},$$
$$U_3^{s\tau} = U_1^{sj} U_1^{jk} U_1^{k\tau},$$
$$U_4^{s\tau} = U_1^{sj} U_1^{jk} U_1^{kl} U_1^{l\tau},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$U_{m+n}^{ac} = U_m^{ab} U_n^{bc}.$$

Dans ces conditions, en vertu de

$$\theta^{s\tau} \theta_{s\rho} = \varepsilon_{\tau\rho},$$

la détermination des coefficients μ_i dans le second des développements

$$\theta^{s\tau} = \frac{1}{1!} U_0^{s\tau} + \frac{1}{2!} U_1^{s\tau} + \frac{1}{3!} U_2^{s\tau} + \dots,$$
$$\theta_{s\rho} = \mu_0 U_0^{\rho s} + \mu_1 U_1^{\rho s} + \mu_2 U_2^{\rho s} + \dots$$

se présente exactement comme pour

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots,$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \dots.$$

C'est ainsi que, grâce à Schur, les nombres de Bernoulli, d'une manière indéniablement élégante et quelque peu inattendue, se sont introduits dans la Théorie des groupes. Mais on voit qu'ils ne se rapportent qu'à des solutions extrêmement particulières du système (12).

Toutefois leur rôle a été, dans la suite, considérablement étendu, notamment par Ernesto Pascal [27*] qui a remarqué que ces nombres intervenaient dans des identités fonctionnelles permettant d'atteindre aux généralités de la Théorie.

Henri Poincaré [10] (1900) a fait quelque chose d'analogue en écrivant pour transformations infinitésimales de l'un des groupes paramétriques.

$$A_i(f) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{\xi\, d\xi}{(1 - e^{-\xi}) F(\xi)} P_{ji} \frac{\partial f}{\partial w_j}.$$

Ici $F(\xi) = 0$ est une forme de l'équation caractéristique du groupe, $F(\xi)$ étant un déterminant dont les mineurs sont les P_{ji}; il s'agit d'une intégrale complexe prise le long d'un contour contenant toutes les racines de $F = 0$ mais non les points $2ki\pi$.

Le seul aspect de l'intégrale de Poincaré en rappelle d'autres qui représentent les nombres de Bernoulli. Cette intégrale et d'autres du même genre sont prétextes à d'intéressants et profonds rapprochements entre la Théorie des groupes et la Théorie des fonctions.

6. **Extensions.** — Il est indiqué d'étendre l'hypothèse représentée par la première équation (12) en posant

$$\lambda_\rho \theta^s \rho = \lambda_1^s + \lambda_2^s + \lambda_3^s + \dots,$$

le terme λ_i^s étant une fonction homogène d'ordre i; ce n'est pas toujours un polynome [28].

Fr. Schur, déjà et surtout préoccupé par le point de vue fonctionnel, a attaché beaucoup d'importance aux séries obtenues avec un tel point de départ [25], [29]. Toutefois la convergence en est d'une étude assez pénible. D'ailleurs, il semble, de plus en plus, à l'heure actuelle, que l'un des principaux buts de la théorie soit d'associer aux équations différentielles des propriété exactes ou imaginables autrement que sous forme de séries; employer ces dernières ne fait guère que doubler les théorèmes généraux sur la représentation analytique des intégrales des systèmes différentiels.

7. **Trièdre mobile.** — On voit immédiatement que les équations de Maurer-Cartan donnent, comme cas particuliers, les deux systèmes différentiels fondamentaux de la théorie du trièdre mobile. Cette remarque si simple n'en a pas moins engendré d'importants développements dus surtout à MM. Cartan [30], Cotton [31], Vessiot [32].

Récrivons les équations de Maurer-Cartan

$$\frac{\partial \alpha^{si}}{\partial \tau_k} - \frac{\partial \alpha^{sk}}{\partial \tau_i} = c^s_{mn}\alpha^{mi}\alpha^{nk} = c^s_{mn}(\alpha^{mi}\alpha^{nk} - \alpha^{mk}\alpha^{ni}) \tag{15}$$

en convenant que l'emploi du troisième membre supposera toujours $m < n$. On peut alors tirer de (15)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \alpha^{1i}}{\partial \tau_k} - \frac{\partial \alpha^{1k}}{\partial \tau_i} &= c^1_{23}(\alpha^{2i}\alpha^{3k} - \alpha^{2k}\alpha^{3i}),\\ \frac{\partial \alpha^{2i}}{\partial \tau_k} - \frac{\partial \alpha^{2k}}{\partial \tau_i} &= c^2_{31}(\alpha^{3i}\alpha^{1k} - \alpha^{3k}\alpha^{1i}),\\ \frac{\partial \alpha^{3i}}{\partial \tau_k} - \frac{\partial \alpha^{3k}}{\partial \tau_i} &= c^3_{12}(\alpha^{1i}\alpha^{2k} - \alpha^{1k}\alpha^{2i}). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Dans le second membre de la seconde équation (16) on a d'abord écrit les indices 13 pour mn, mais on a changé c^2_{13} en $-c^2_{31}$. Tous les autres c^s_{mn} sont considérés comme nuls.

On peut continuer de même par la formation du système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \alpha^{4i}}{\partial \tau_k} - \frac{\partial \alpha^{4k}}{\partial \tau_i} &= c^4_{26}(\alpha^{2i}\alpha^{6k} - \alpha^{2k}\alpha^{6i}) + c^4_{35}(\alpha^{3i}\alpha^{5k} - \alpha^{3k}\alpha^{5i}),\\ \frac{\partial \alpha^{5i}}{\partial \tau_k} - \frac{\partial \alpha^{5k}}{\partial \tau_i} &= c^5_{34}(\alpha^{3i}\alpha^{4k} - \alpha^{3k}\alpha^{4i}) + c^5_{16}(\alpha^{1i}\alpha^{6k} - \alpha^{1k}\alpha^{6i}),\\ \frac{\partial \alpha^{6i}}{\partial \tau_k} - \frac{\partial \alpha^{6k}}{\partial \tau_i} &= c^6_{15}(\alpha^{1i}\alpha^{5k} - \alpha^{1k}\alpha^{5i}) + c^6_{24}(\alpha^{2i}\alpha^{4k} - \alpha^{2k}\alpha^{4i}). \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Là encore tous les c^s_{mn} non écrits sont nuls; si tous ceux qui sont écrits, en (16) et (17), sont pris égaux à l'unité, changée de signe pour la dernière colonne de (17), si, de plus, on remplace les α pourvus de leur premier indice par une seule lettre, conformément au tableau

$$(18)\qquad \begin{cases} \alpha^1, & \alpha^2, & \alpha^3; & \alpha^4, & \alpha^5, & \alpha^6;\\ p, & q, & r; & \xi, & \eta, & \zeta; \end{cases}$$

les systèmes (16) et (17) deviennent respectivement

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p^i}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial p^k}{\partial \tau_i} = q^i r^k - q^k r^i,\\ \dfrac{\partial q^i}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial q^k}{\partial \tau_i} = r^i p^k - r^k p^i,\\ \dfrac{\partial r^i}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial r^k}{\partial \tau_i} = p^i q^k - p^k q^i; \end{cases}$$

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi^i}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial \xi^k}{\partial \tau_i} = q^i \zeta^k - q^k \zeta^i - r^i \eta^k + r^k \eta^i,\\ \dfrac{\partial \eta^i}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial \eta^k}{\partial \tau_i} = r^i \xi^k - r^k \xi^i - p^i \zeta^k + p^k \zeta^i,\\ \dfrac{\partial \zeta^i}{\partial \tau_k} - \dfrac{\partial \zeta^k}{\partial \tau_i} = p^i \eta^k - p^k \eta^i - q^i \xi^k + q^k \xi^i. \end{cases}$$

Ce sont bien les systèmes fondamentaux de G. Darboux [33]

Gaston Darboux a insisté sur une méthode originale, inspirée des travaux d'Olinde Rodrigues, qui permet d'obtenir les systèmes (19) et (20) à l'aide d'un même raisonnement. On part du système

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \tau_k} + \xi_k + z q_k - y r_k = 0,\\ \dfrac{\partial y}{\partial \tau_k} + \eta_k + x r_k - z p_k = 0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial \tau_k} + \zeta_k + y p_k - x q_k = 0, \end{cases}$$

en lequel x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque de l'espace par rapport au trièdre mobile (T). En écrivant que

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau_i\, \partial \tau_k}(x, y, z) = \frac{\partial^2}{\partial \tau_k\, \partial \tau_i}(x, y, z),$$

ces conditions d'intégrabilité se scindent sans peine en (19) et (20).

Mais il y a mieux. Les équations (21) sont, par rapport à (19) et (20), ce que les équations (7) sont par rapport aux équations de Maurer-Cartan.

Ces équations (7) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial \lambda_k} - \frac{\partial \theta^{sk}}{\partial t} + c^s_{ij}(\lambda^j \theta^{ik} - \lambda^i \theta^{jk}) = 0 \qquad (i < j),$$

ce qui redonne bien le système (21) si les correspondances ont lieu d'après le tableau

$$\begin{array}{cccccc} \lambda^1, & \lambda^2, & \lambda^3; & \theta^1, & \theta^2, & \theta^3, \\ x, & y, & z; & p, & q, & r, \end{array}$$

si

$$c^1_{23} = c^2_{31} = c^3_{12} = 1$$

et si, de plus,

$$\frac{\partial \theta^{sk}}{\partial t} = -\theta^{(s+3)k}$$

avec la correspondance

$$\begin{array}{ccc} \theta^4, & \theta^5, & \theta^6, \\ \xi, & \eta, & \zeta. \end{array}$$

Le fait que les indices à comparer sont tantôt supérieurs, tantôt inférieurs, est présentement sans importance : il provient de ce que l'ouvrage de Darboux n'a pas toujours des notations d'accord avec celles que l'on s'imposerait aujourd'hui en ayant recours au Calcul différentiel absolu.

Tout ceci donne, en résumé, le résultat suivant : *Le système* (20) *provient du système* (19) *dérivé partiellement par rapport à une variable auxiliaire t si l'on pose*

$$(22) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = \xi, \qquad \frac{\partial q}{\partial t} = \eta, \qquad \frac{\partial r}{\partial t} = \zeta.$$

Cette assertion, d'une *vérification* immédiate, admet certainement des explications géométriques.

Voici une idée particulièrement originale due à M. E. Cartan. Les six coordonnées plückériennes de droites quelconques peuvent être considérées comme *imaginaires* ou *complexes* de par l'emploi d'une unité imaginaire appropriée ε; avec ce symbolisme étudié notamment par Ch. Cailler [34], les seules droites *réelles* sont celles qui passent toutes par un point pris pour origine et l'on passe aux autres comme on passe des points d'un axe aux points d'un plan avec les imaginaires ordinaires. Ainsi l'espace réglé ou l'espace des mouvements hélicoïdaux sont de simples prolongements de l'espace à symétrie sphérique, ce qui met bien tous les déplacements dans la dépendance de rotations préliminaires.

Nous n'examinerons point ici de forme de la théorie du trièdre où l'on tenterait de profiter de la particularité structurale que nous venons de mettre en évidence. La remarque ouvre peut-être la voie à l'étude d'autres systèmes de Maurer-Cartan, en lesquels certaines équations d'un même système se déduiraient des autres équations par une opération analytique simple, telle la dérivation partielle.

Il faut bien remarquer que le paramètre t n'est pas introduit dans la théorie du trièdre d'une manière quelque peu fantaisiste et tout juste propre à donner le seul résultat ici mis en évidence. Ce t tient profondément à la nature même de l'analyse exposée dans ce Chapitre. Les systèmes de Maurer-Cartan (11) sont tous vérifiés avec des fonctions $\theta^{s\rho}$ qui doivent s'annuler pour $t=0$; donc, en général, toutes ces fonctions contiennent t.

D'autre part, des généralisations de (22) sont aisées à apercevoir. Imaginons (19) intégré avec plusieurs constantes arbitraires t_i. Un opérateur tel que

$$W = T_i \frac{\partial}{\partial t_i} + U_i \frac{\partial}{\partial \tau_i},$$

en lequel les coefficients T et U ne dépendent que des t_i, permettra de satisfaire à (20) en posant

$$W(p) = \xi, \qquad W(q) = \eta, \qquad W(r) = \zeta.$$

On voit réapparaître les équations aux opérateurs X (ici W) dont il a été question au Chapitre précédent (§ 10).

8. Équations dynamiques de Poincaré. — Reprenons (7') et, avec des δa_k ne dépendant que des a, soit, ce qui est revenir aux notations de M. Cartan

$$\alpha^{sk}\,\delta a_k = \omega^s.$$

Alors (7') peut être remplacé par

$$\frac{d\omega^s}{dt} + c^s_{ij}\mu^i\omega^j = \delta\mu^s.$$

Une énergie cinétique T généralement exprimee avec des coordonnées a_k et des vitesses a'_k peut être exprimée en a_k et en μ^k. Alors

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \mu^j} \delta\mu^j + \frac{\partial T}{\partial a_i} \delta a_i, \qquad \delta U = \frac{\partial U}{\partial a_i} \delta a_i.$$

En posant

$$\left(\frac{\partial T}{\partial a_i} - \frac{\partial U}{\partial a_i}\right) \delta a_i = \Omega_i \omega^i;$$

l'intégrale d'Hamilton

$$J = \int (T - U)\, dt$$

donne

$$\delta J = \int \frac{\partial T}{\partial \mu^j}\left(\frac{d\omega^j}{dt} + c^j_{ik} \mu^i \omega^k\right) dt + \Omega_i \omega^i dt,$$

d'où, avec l'habituelle intégration par parties et pour $\delta J = 0$,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \mu^s} = c^j_{is} \mu^i \frac{\partial T}{\partial \mu^j} + \Omega_s.$$

Telles sont les équations dues à Henri Poincaré [34*]. Elles ont été réétudiées récemment par M. Četajev [34**]. Comparer avec [44].

CHAPITRE IV.

RELATIONS DIVERSES ENTRE GROUPES ET FORMES DE PFAFF.

Les pages précédentes, où l'on n'envisage que les groupes au voisinage immédiat de leur structure, donnent en résumé le procédé de construction suivant : on choisira d'abord des constantes de structure satisfaisant aux relations (E) puis on *intégrera* le système de Maurer-Cartan (D), ce qui conduira aux équations de définition ou aux transformations infinitésimales de groupes paramétriques. Le système (D) est un système différentiel spécial dont les inconnues sont des formes de Pfaff; son intégration est généralement pénible. Or, il existe des groupes qui se peuvent construire aussi avec l'aide des formes de Pfaff mais d'une manière totalement différente et sans qu'il soit question d'intégration. Tel est le groupe des déplacements dans la Géométrie de Cayley. Un tel groupe emprunte au fond ses très belles symétries à celles de la forme de Pfaff, $M_{ij}\,[dx_i\, dx_j]$ ou à celles de la formule stokienne (7) du Chapitre I. Quant aux deux points de vue que nous venons d'opposer, ils n'en sont pas moins dominés par la *formule de bifurcation.*

1. Groupes projectifs. — Les groupes projectifs, avec leurs nombreux cas particuliers, ont naturellement été les premiers auxquels ont été appliquées les méthodes générales. Lie et Engel [6] y ont consacré la fin de leur premier volume. Lie et Scheffers [35] ont publié un autre et fort volume où ils jouent un rôle initial extrêmement étendu; Bianchi [26] les a repris. Le tome III de Lie et Engel discute des principes de la Géométrie par des méthodes qui sont surtout projectives.

Le groupe *projectif* ou *homographique* général est représenté par le système

$$(1)\quad x'_i = \frac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + a_{i,n+1}}{a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \ldots + a_{n+1,n}x_n + a_{n+1,n+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En coordonnées homogènes $\frac{x_i}{x_{n+1}}$ et $\frac{x'_i}{x'_{n+1}}$, il prend la forme

$$(2)\quad x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + a_{i,n+1}x_{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Dans ce dernier cas, on trouve immédiatement pour transformation infinitésimale générale

$$\mathrm{X}(f) = \beta_{ik}x_i\frac{\partial f}{\partial x_k},$$

les β_{ik} étant des constantes. Ce qui va nous intéresser est que de telles transformations infinitésimales, puis les transformations finies de (2), peuvent conserver la forme quadratique homogèn

$$\Omega = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2.$$

Il suffit que l'on ait

$$2\beta_{ii} = 1, \qquad \beta_{ik} + \beta_{ki} = 0.$$

Bref, il existe des groupes qui peuvent avoir aussi bien la forme (1) que la forme (2) et qui conservent une hypersphère à n dimensions; une nouvelle transformation projective convenable les transformerait d'ailleurs en groupes conservant une hyperquadrique.

2. Symétries électromagnétiques. — Les liens entre l'électromagnétisme de Maxwell et la géométrie de Cayley ont déjà été exposés [36]. Aussi ne rappellerons-nous ici que ce qui est absolument essentiel. Nous raisonnerons dans le cas de l'espace à trois dimensions, donc avec quatre coordonnées homogènes.

Nous construirons d'abord des transformations d'après les schèmes

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{array}{cccc}
X-\xi & Y-\eta & Z-\zeta & T-\tau \\
\hline\hline
\dfrac{\partial}{\partial\xi} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\zeta} & \dfrac{\partial}{\partial\tau} \\
fM_{1\omega} & fM_{2\omega} & fM_{3\omega} & fM_{4\omega} \\
1 & 2 & 3 & 4
\end{array}
\right.
$$

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline\hline
\dfrac{\partial}{\partial\xi} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\zeta} & \dfrac{\partial}{\partial\tau} \\
M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\
1 & 2 & 3 & 4
\end{array}
\right.
$$

Chacun de ces tableaux représente un système de quatre égalités obtenues en égalant les termes écrits au-dessus du double trait à ce qui serait le mineur *algébrique* de chaque terme si le tableau de seize éléments était un déterminant. On remarquera, et c'est justement là le point essentiel, que les tableaux (3) et (4) répètent la configuration de la formule stokienne (7) du Chapitre I.

Par combinaison de (3) et (4), on obtient le nouveau système

$$
(5)\qquad \left\{
\begin{array}{cccc}
X-\xi & Y-\eta & Z-\zeta & T-\tau \\
\hline\hline
\dfrac{\partial f}{\partial\xi} & \dfrac{\partial f}{\partial\eta} & \dfrac{\partial f}{\partial\zeta} & \dfrac{\partial f}{\partial\tau} \\
M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\
1 & 2 & 3 & 4
\end{array}
\right.
$$

Celui-ci entraîne l'égalité

$$
(6)\qquad (X-\xi)\frac{\partial f}{\partial\xi}+(Y-\eta)\frac{\partial f}{\partial\eta}+(Z-\zeta)\frac{\partial f}{\partial\zeta}+(T-\tau)\frac{\partial f}{\partial\tau}=0.
$$

Nous cherchons des formules de transformation linéaires et homogènes. C'est justement ce que nous donnera le système (5) si $f(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ est un polynome homogène du second degré et si les M_{ij}

sont des constantes. D'autre part, l'équation (6) donnera

$$X\frac{\partial f}{\partial \xi}+Y\frac{\partial f}{\partial \eta}+Z\frac{\partial f}{\partial \zeta}+T\frac{\partial f}{\partial \tau}=2f(\xi,\eta,\zeta,\tau),$$

ce qui peut s'écrire

$$f(2\xi-X,\ 2\eta-Y,\ 2\zeta-Z,\ 2\tau-T)=f(X,Y,Z,T)$$

ou

$$f(x,y,z,t)=f(X,Y,Z,T), \tag{7}$$

si l'on pose

$$X+x=2\xi,\qquad Y+y=2\eta,\qquad Z+z=2\zeta,\qquad T+t=2\tau.$$

On a finalement en (5) des formules du type (2), formules de transformation conservant la quadrique $f=0$. Les transformations linéaires conservent aussi les rapports anharmoniques, donc les *distances* et les *angles* définis par de tels rapports associés à la quadrique elle-même invariante. Définitivement, on reconnaît, dans les transformations précédentes, le caractère d'un groupe de *déplacements*.

Pour plus de détails, renvoyons à la publication [36] déjà citée.

Tout ceci, d'ailleurs, est à peine une ombre d'esquisse pour des théories à prodigieux développements. Ainsi changer des coefficients, ou même seulement des signes, dans la forme Ω du paragraphe précédent, c'est passer d'une Géométrie à une autre, d'un Univers à un autre. Des classifications, d'une extrême importance pour le sujet, sont encore dues à M. E. Cartan [4**], [36*]. Elles permettent de remonter à Klein, Poincaré, Hermite.

3. **Extensions.** — La formule stokienne (7) du Chapitre I se prête aisément à des extensions où les ∂ sont remplacés par des D plus généraux; on atteint ainsi aisément les Espaces de Riemann et la Gravifique d'Einstein. C'est ce que nous avons montré dans nos *Formules stokiennes* [9]. Ici, avec la formule (16) du Chapitre I, et en posant

$$\pi_j^i=\Gamma_{jl}^i\,dx_l,$$

on peut former immédiatement

$$\Lambda_{jmn}^i=\frac{\partial}{\partial x_m}\Gamma_{jn}^i-\frac{\partial}{\partial x_n}\Gamma_{jm}^i+\Gamma_{jn}^\beta\Gamma_{\beta m}^i-\Gamma_{jm}^\beta\Gamma_{\beta n}^i,$$

ce qui est le symbole riemannien à quatre indices, fondamental pour les deux théories susmentionnées. On voit par là, comme d'ailleurs par la brève étude des connexions affines fondamentales (Ch. II, § 11), combien les Espaces généralisés, la Gravifique, les Groupes sont des disciplines s'avoisinant de près. Mais un très important travail de M. Elie Cartan [37] a poussé les choses beaucoup plus loin encore. L'espace de l'éminent géomètre est d'abord l'espace phénoménal. La Mécanique classique admet un espace-temps *affine*, c'est-à-dire où jouent les déplacements et les équipollences vectorielles élémentaires, bref les plus simples des groupes linéaires; ces considérations s'étendent sans peine à la Relativité dite restreinte.

Nous avons essayé de montrer [38] les symétries électromagnétiques de ces considérations. Au delà, nous arrivons aux variétés *à connexion affine* avec leur *courbure* et leur *torsion*. *Sur* une telle variété, deux points non infiniment voisins ne peuvent être liés par une opération affine, la notion de groupe semble même étrangère à la variété [39]. Mais, dans le voisinage d'un point, il nous paraît naturel, instinctif, de rechercher des propriétés affines traduisant, *de manière approchée*, celles de la variété. Ainsi, toujours en un point, nous pouvons considérer un espace affine tangent dans lequel jouent des groupes affines et l'ensemble de ceux-ci, pour tous les points de la variété, ne peut constituer autre chose qu'un groupe affine, plus général, les admettant pour sous-groupes. C'est le *théorème d'homogénéité*.

D'ailleurs, ces considérations ont été reprises par M. Cartan avec d'autres groupes ou sous-groupes ayant un caractère plus général que le caractère affine; les transformations associées à différents cycles d'origine donnée forment un groupe continu g, sous-groupe d'un groupe fondamental quelconque; g est le *groupe d'holonomie* [40].

Dans d'autres travaux, on s'est efforcé de créer une sorte d'homographie vectorielle, dans laquelle toutes les transformations (1) ou (2) se manient symboliquement comme autrefois les équipollences; citons à cet égard un exposé de MM. Burali-Forti et Boggio [41]. Si l'on remplace les homographies par les transformations qui conservent les angles, on crée les géométries *conformes* qui doivent beaucoup aux recherches de M. Vessiot [42]. On consultera, pour la réunion des deux points de vue, une Thèse récente de M. P.-C. Delens [43]. Toutes ces études peuvent être faites par des méthodes assez variées mais on peut aussi se borner à l'emploi des formes de Pfaff, génératrices de groupes, comme nous l'avons montré dans ce fascicule, et génératrices, par ce fait, de géométries extrêmement générales liées, elles aussi, de manière plus ou moins directe à cette même notion de groupe.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. E. GOURSAT. — *Leçons sur le Problème de Pfaff* (J. Hermann, Paris, 1922).
2. E. CARTAN. — *Leçons sur les Invariants intégraux* (J. Hermann, Paris, 1922).
3. E. JAHNKE. — La science extensive de Grassmann (*Ausdehnungslehre*) (*L'Enseignement mathématique*, t. 11, 1909, p. 417-429).
   Il faut lire, dans cet article, surtout la conclusion mélancolique mais enthousiaste de Grassmann, peu suivi par ses contemporains mais plein d'une foi ardente en l'avenir de ses méthodes.
4. E. CARTAN. — Sur la structure des groupes infinis de transformations (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. **21**, 1904, p. 153-206; t. **22**, 1905, p. 219-308).

4*. E. et F. COSSERAT. — 1° Note sur la Théorie de l'Action euclidienne, adjointe au *Traité de Mécanique* de M. P. Appell, t. 3, 2e édition, 1909; 2° Note sur la Dynamique du Point et du Corps invariable; 3° Théorie des Corps déformables. Adjonctions au *Traité de Physique*, de O.-D. Chwolson, également publiées à part (A. Hermann, Paris, 1906 et 1909).

4**. H. WEYL, E. CARTAN. — Deux Conférences faites à la Société mathématique suisse, à Berne, le 7 mai 1927 (*L'Enseignement mathématique*, 26e année, 1927, p. 200-240).

5. E. CARTAN. — La Géométrie des groupes de transformations (*Journal de Mathématiques*, rédigé par H. Villat, 9e série, t. 6, 1927, p. 1-120).
6. S. LIE et Fr. ENGEL. — *Theorie der Transformationsgruppen*, Band 1, 1888; Band 2, 1890; Band 3, 1893 (B. G. Teubner, Leipzig).
7. A. BUHL. — Sur les symétries de la théorie des groupes continus (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 13 juin 1927).
8. L. MAURER. — Ueber allgemeinere Invarianten-Systeme (*Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der Akademie der Wissenschaften zu München*, Band 18, 1888, S. 103-150).
9. A. BUHL. — Formules stokiennes (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 16, 1926).

10. H. Poincaré. — Trois Mémoires : *Sur les groupes continus* (1° *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 18, 1900. — 2° *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 15, 1901, parte prima. — 3° *Ibid.*, t. 25, 1908, 1er semestre).

11. E. Cartan. — *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* (Nony, Paris, 1894).

12. W. Killing. — Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen (*Mathematische Annalen*, Band 31, 1888, S. 252-290; Band 33, 1889, S. 1-48; Band 34, 1889, S. 57-122; Band 36, 1890, S. 161-189).

13. A. Buhl. — Sur la permutation des intégrales d'un système d'équations différentielles (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 9 décembre 1907).

14. S. Lie et G. Scheffers. — *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten Infinitesimalen Transformationen* (B. G. Teubner, Leipzig, 1891).

15. Th. De Donder. — Étude sur les Invariants intégraux (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 15, 1901, p. 66-132; t. 16, 1902, p. 155-180).

16. P. Appell. — Sur le théorème de Poisson (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 5 août 1901).

17. A. Buhl. — Thèse *Sur les Équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe* (Gauthier-Villars, Paris, 1901).

18. C. Popovici. — Sur les fonctions adjointes de M. A. Buhl (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 4 novembre 1907).

19. N. Saltykow. — Sur les transformations infinitésimales et les fonctions adjointes (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 16 décembre 1907).

20. A. Buhl. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la théorie des groupes continus (*Journal de Mathématiques*, publié par C. Jordan, 5e série, t. 10, 1904, p. 85-130).

21. A. Buhl. — Sur les surfaces dont un système de lignes asymptotiques se projette suivant une famille de courbes donnée (*Bulletin de la Société mathématique*, t. 31, 1903, p. 47-55).

22. E. Cartan. — Ueber die einfachen Transformationsgruppen (*Berichte der mathematisch-physikalischen, Classe der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, Band 45, 1893, S. 395-420).

22*. A. Buhl. — Sur les opérateurs différentiels permutables ou non (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1928).

Cet exposé est précédé d'une intéressante Note de M. *G. Pfeiffer*, de Kiew. Cette Note se rapporte aux Mémoires cités ici de [13] à [20]. Le sujet semble inépuisable.

23. A. Buhl. — Sur les groupes continus et l'intégration des équations de Maurer (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 19 avril 1926).

24. A. Buhl. — Sur les formules fondamentales de l'Électromagnétisme et de la Gravifique (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. 19, 1927, p. 1-39. Sixième Mémoire).

24*. S. Lie. — Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Transformationsgruppen durch ausführbare Operationen (*Berichte der Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig*. Band 42, 1890, p. 478-491).

25. F. Schur. — Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen (*Mathematische Annalen*, Band 38, 1891, S. 263-287).

25*. Fr. Engel. — Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie (*Berichte der Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig*, Band 43, 1891, S. 308-316).

26. L. Bianchi. — *Lezioni sulla Teoria dei Gruppi continui finiti di trasformazioni* (E. Spoerri, Pisa, 1918).

27. E. Cartan. — Sur certains systèmes différentiels dont les inconnues sont des formes de Pfaff (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 19 avril 1926).

27*. E. Pascal. — Résumé de quelques-uns de mes récents travaux sur la Théorie des Groupes de Lie (*Prace Matematyczno-Fizyczne*, Varsovie, t. 14, 1903, p. 1-28).

28. A. Buhl. — Sur l'intégration des équations de Maurer par des séries de fonctions homogènes (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 21 juin 1926).

29. Fr. Schur. — Ueber den analytischen Charakter der eine endliche continuirliche Transformationsgruppe darstellenden Functionen (*Mathematische Annalen*, Band 41, 1893, S. 509-539).

30. E. Cartan. — La structure des groupes continus et la théorie du trièdre mobile (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 34, 1910, p. 250-284).

31. E. Cotton. — Généralisation de la théorie du trièdre mobile (*Bulletin de la Société mathématique*, t. 33, 1905, p. 42-65).

32. E. Vessiot. — Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus (*Acta mathematica*, t. 28, 1904, p. 307-350).

33. G. Darboux. — *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*, t. 1.

34. Ch. Cailler. — *Introduction géométrique à la Mécanique rationnelle*. Ouvrage publié par H. Fehr et R. Wavre (Georg, Genève; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1924).

Pour les analogies entre la géométrie sphérique et la géométrie réglée, *voir* p. 187 et suiv.

34*. H. Poincaré. — Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 18 février 1901).

34.** Četajev. — Sur les équations de Poincaré (*Ibid.*, 27 décembre 1927).

35. S. Lie et G. Scheffers. — *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen* (B. G. Teubner, Leipzig, 1893).

36. P. Barbarin. — *La Géométrie non euclidienne*. Troisième édition augmentée de *Notes sur la Géométrie non euclidienne dans ses* *rapports avec la Physique mathématique*, par A. BUHL (Collection *Scientia*, Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1928).

36*. E. CARTAN. — Les groupes réels simples, finis et continus (*Annales de l'École Normale*, t. 31, 1914, p. 263-356). — Sur certaines formes riemanniennes des géométries à groupe fondamental simple (*Ibid.*, t. 44, 1927, p. 345-468).

37. E. CARTAN. — Sur les variétés à connexion affine et la Théorie de la Relativité généralisée (*Annales de l'École Normale*, t. 40, 1923, p. 325-412; t. 41, 1924, p. 1-25; t. 42, 1925, p. 17-88).

38. A. BUHL. — Sur les formules fondamentales de l'Électromagnétisme et de la Gravifique (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. 18, 1926, p. 1-40. Cinquième Mémoire).

39. E. CARTAN. — La Théorie des Groupes et les recherches récentes de Géométrie différentielle. Conférence faite le 13 août 1924 au Congrès international de Mathématiques de Toronto (*L'Enseignement mathématique*, t. 24, 1924-1925, p. 5-19).

40. E. CARTAN. — Les groupes d'holonomie des espaces généralisés (*Acta mathematica*, t. 48, 1926, p. 1-43).

41. C. BURALI-FORTI et T. BOGGIO. — *Espaces courbes. Critique de la Relativité* (Sten Editrice, Torino, 1924).

42. E. VESSIOT. — Contribution à la Géométrie conforme. Cercles et surfaces cerclées (*Journal de Mathématiques* publié par H. Villat, 9e série, t. 2, 1923, p. 99-166).

43. P.-C. DELENS. — *Méthodes et Problèmes des Géométries différentielles euclidienne et conforme*. Préface de M. E. Cartan (Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1927).

44. GEORGE D. BIRKHOFF. — Dynamical Systems (*American Mathematical Society Colloquium Publications*, vol. IX. New-York, 1927). Générations analytiques des équations de Lagrange, Hamilton, Poincaré. *Voir* particulièrement cet Ouvrage, p. 30, pour la comparaison indiquée ici à la fin du Chapitre III.

45. TH. DE DONDER. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles d'un ordre quelconque (*Journal de Mathématiques*, publié par H. Villat, 9e série, t. 7, 1928, p. 173-188). Dans ce travail, *voir* p. 183 les *équations de Buhl* mentionnées ici page 24.

TABLE DES MATIÈRES.