Bertrand Gambier

Déformation des surfaces étudiée du point de vue infinitésimal

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 26 (1927)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1927__26__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.,
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées. ».

FASCICULE XXVI

Déformation des surfaces étudiées du point de vue infinitésimal

PAR M. BERTRAND GAMBIER
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1927

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, **immédiatement** avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

DÉFORMATION DES SURFACES

ÉTUDIÉE

DU POINT DE VUE INFINITÉSIMAI

Par M. Bertrand GAMBIER,
Professeur à la Faculte des Sciences de Lille.

INTRODUCTION.

La déformation des surfaces peut, suivant l'ordre naturel, et historique, être étudiée de deux points de vue différents : *du point de vue infinitésimal ou du point de vue fini.*

Le présent fascicule est consacré au premier point de vue; au Chapitre I, je donne la définition et la classification des invariants et paramètres différentiels; au Chapitre II, je traite du problème : reconnaître si deux surfaces données sont isométriques ou applicables; le Chapitre III est consacré au problème fondamental : trouver toutes les surfaces applicables sur une surface donnée, ou, si l'on préfère, représentatives d'un ds^2 donné.

Le second point de vue constitue l'objet d'un second fascicule (étude des principaux couples ou familles classiques de surfaces applicables; transformation des surfaces applicables sur certaines surfaces remarquables, et, en particulier, sur les quadriques; déformation *finie* d'un morceau de surface pris dans son ensemble; impossibilité de la déformation d'une surface fermée convexe et détermination d'une telle surface par son ds^2).

De nombreux emprunts ont été faits dans ce fascicule aux traités classiques de Darboux pour la France et de M. Bianchi pour l'Italie. J'ai essayé de montrer, pour chaque question, le principe élémentaire, dépourvu d'artifice, de la méthode de résolution et le lien avec les théories générales.

CHAPITRE I.

CLASSIFICATION ET DÉTERMINATION DES INVARIANTS ET PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS.

1. Invariants de Gauss, Beltrami et Minding. — Un *invariant de Gauss* [5] est une expression

$$\varphi\left[E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial E}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^2 E}{\partial u^2}, \ldots\right] \tag{1}$$

ne contenant que les coefficients E, F, G du ds^2

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{2}$$

et leurs dérivées jusqu'à un ordre fini, telle qu'après la substitution *arbitraire*

$$u = f(u', v'), \qquad v = g(u', v') \tag{3}$$

transformant le ds^2 en la nouvelle forme $E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$, l'expression (1) soit identiquement égale à l'expression analogue

$$\varphi\left[E', F', G', \frac{\partial E'}{\partial u'}, \frac{\partial E'}{\partial v'}, \frac{\partial F'}{\partial u'}, \ldots, \frac{\partial^2 E'}{\partial u'^2}, \ldots\right] \tag{1'}$$

construite de la même façon avec les coefficients du nouveau ds^2; E, F, G étant formés avec les dérivées premières $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial v}$ des coordonnées de toute surface représentative du ds^2, il semble naturel, du moins au premier abord, d'appeler *ordre* de l'invariant l'entier supérieur d'une unité à l'ordre maximum des dérivées de E, F, G dans l'invariant; or, l'invariant le plus simple, *la courbure totale* K, ne fait intervenir que les dérivées secondes de x, y, z et, par suite, doit être considéré comme d'ordre 2; il contient les dérivées d'ordre 2 de E, F, G et l'on serait donc amené à lui donner l'ordre 3, mais on voit aussitôt que les dérivées d'ordre 2 n'entrent que par le groupe

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = S\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right\},$$

d'où les dérivées d'ordre 3 de x, y, z s'éliminent. Nous prendrons donc comme ordre précis l'ordre maximum des dérivées de E, F, G; pour les invariants autres que K, le résultat est légitimé par cette propriété importante qu'*on peut les obtenir*, *à partir de* K *par les opérations* Δ_1 *et* Δ_2 *qui vont être définies pour les invariants de Beltrami.*

Les invariants de Beltrami [1] ne diffèrent de ceux de Gauss qu'en un point : la fonction φ dépend non seulement de E, F, G et leurs dérivées, mais encore de fonctions *arbitraires* $U_1 = \psi_1(u, v)$, $U_2 = \psi_2(u, v)$, ... et de leurs dérivées partielles en u et v, la nouvelle fonction U'_1 n'est autre que $\psi_1[f(u', v'), g(u', v')]$. Les invariants de Beltrami sont souvent appelés *paramètres différentiels;* l'ordre d'un invariant de Beltrami s'obtient en prenant l'ordre maximum des dérivées de E, F, G et de ψ_1, ψ_2, ...

Les invariants de Minding [12] contiennent, outre E, F, G et leurs dérivées, les dérivées successives de v considérée comme fonction *arbitraire* de u; l'ordre est le plus grand des entiers suivants : ordre maximum des dérivées de E, F, G et ordre maximum des dérivées successives v, v', ..., $v^{(n)}$.

La théorie des transformations des formes quadratiques différentielles a été étendue par Christoffel [2] à un nombre quelconque de variables supérieur à 2, donc à l'étude des variétés à n dimensions plongées dans l'espace à $n+1$ dimensions, définies intrinsèquement sans se préoccuper de leur relation topologique avec l'espace qui les entoure; je ne peux entrer dans cette théorie qui se prolonge par le calcul tensoriel; je signale simplement que, pour $n \geqq 2$, on trouve $\frac{n(n-1)}{2}$ invariants de Gauss du second ordre. Dans le cas de $n = 2$, espace ordinaire à 3 dimensions, il n'y a que l'invariant K pour l'ordre 2, un seul invariant $\Delta_1 K$ pour l'ordre 3, puis à partir de $p \geqq 4$, $p-1$ invariants *distincts* d'ordre p; ainsi pour $p = 4$, on a $\Delta_2 K$, $\Delta_1 \Delta_1 K$, $\Delta_1(K, \Delta_1 K)$.

Pour les invariants de Beltrami, on définit

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta_1 \varphi = \dfrac{G\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + E\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}{EG - F^2}, \\[2ex] \Delta_2 \varphi = \dfrac{1}{H}\dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\dfrac{G\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - F\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{H}\right\} + \dfrac{1}{H}\dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\dfrac{E\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - F\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{H}\right\}; \end{cases}$$

où H représente $\sqrt{EG - F^2}$, de sorte que $\Delta_2\varphi$ n'est irrationnel qu'en apparence.

Étant données deux fonctions φ, ψ, il existe trois invariants du premier ordre $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, puis $\Delta_1(\varphi, \psi)$,

$$(5) \qquad \Delta_1(\varphi, \psi) \equiv \frac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial u} - F\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\right) + E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}{EG - F^2}.$$

On peut définir un invariant irrationnel, non distinct des précédents, par la formule

$$(6) \qquad \Theta^2(\varphi, \psi) - \Delta_1^2(\varphi, \psi) \equiv \Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi$$

ou encore

$$(6') \qquad \Theta(\varphi, \psi) \equiv \frac{1}{H}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right).$$

Darboux emploie constamment la notation Δ au lieu de Δ_1 pour le paramètre du premier ordre; nous adopterons dorénavant cette notation. Christoffel démontre analytiquement l'invariance de $\Delta\varphi$ et $\Delta_2\varphi$; il est instructif d'employer avec Darboux une méthode géométrique, qui se rattache à l'emploi du trièdre mobile.

Si l'on prend pour nouvelles variables les fonctions

$$u' = \varphi(u, v), \qquad v' = \psi(u, v),$$

on a

$$(7) \qquad ds^2 = E'd\varphi^2 + 2F'd\varphi\,d\psi + G'd\psi^2,$$

$$(8) \quad \Delta\varphi = \frac{G'}{E'G' - F'^2}, \qquad \Delta\psi = \frac{E'}{E'G' - F'^2}, \qquad \Delta(\varphi, \psi) = \frac{-F'}{E'G' - F'^2},$$

comme on le voit en calculant directement $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta(\varphi, \psi)$ sous la forme (7) du ds^2. On en déduit

$$(9) \; E' = \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi\,\Delta\psi - \Delta^2(\varphi, \psi)}, \quad G' = \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi\,\Delta\psi - \Delta^2(\varphi, \psi)}, \quad F' = \frac{-\Delta(\varphi, \psi)}{\Delta\varphi\,\Delta\psi - \Delta^2(\varphi, \psi)}.$$

Donc, tout invariant de Beltrami peut être obtenu au moyen *des symboles* Δ_1, Δ_2; soit en effet

$$\text{(10)} \qquad I = \mathcal{F}\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \ldots\right)$$

un tel invariant, les coefficients E, F, G sont exprimés comme le montrent les formules (9), au moyen de Δu, Δv, $\Delta(u, v)$; d'autre part, quelle que soit la fonction λ, on a

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = H\Theta(\lambda, v), \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = H\Theta(u, \lambda).$$

On prendra donc comme variables u, v deux fonctions φ, ψ entrant dans l'invariant et s'il n'entre qu'une fonction φ, on lui adjoindra un de ses invariants $\Delta\varphi$ ou $\Delta_2\varphi$ par exemple : la proposition est établie.

D'ailleurs l'invariant K de Gauss étant calculé, ce procédé montre que ΔK, $\Delta\Delta K$, $\Delta_2 K$, ... donneront successivement tous les invariants de Gauss; un calcul simple, basé sur la formule

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{(EG - F^2)^2}$$

montre que K s'exprime uniquement au moyen de E, F, G et de leurs dérivées des deux premiers ordres; les notations D, D', D'' sont celles de Gauss et signifient les déterminants

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad D'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Je dois signaler que les géomètres italiens ont adopté une autre notation, que j'explique par le schéma

$$D(\text{italien}) = \frac{D(\text{Gauss})}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad D'(\text{italien}) = \frac{D'(\text{Gauss})}{\sqrt{EG - F^2}},$$
$$D''(\text{italien}) = \frac{D''(\text{Gauss})}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Il y aurait lieu d'unifier les notations : j'adopterai dans ce travail D, D', D'' pour les déterminants de Gauss et δ, δ', δ'' pour les coefficients italiens.

Les *invariants de Minding* donnent pour chaque valeur de $n \geqq 2$ *un* invariant, sauf $n = 3$ qui en donne *deux*. La courbure géodé-

sique ρ et ses dérivées successives $\frac{d\rho}{ds}$, $\frac{d^2\rho}{ds^2}$, ..., par rapport à l'arc s de la courbe indéterminée $v(u)$, sont manifestement des invariants d'ordre 2, 3, 4, ..., car on a

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\rho} = \frac{\sin\theta}{R} = \frac{1}{H\, ds^3}\left\{ H^2(du\, d^2v - dv\, d^2u) - \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + \frac{\partial E}{\partial v}du\,dv + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv^2 & E\,du + F\,dv \\ \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)du^2 + \frac{\partial G}{\partial u}du\,dv + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2 & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} \right\}, \\ &\frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho}{du} : \frac{ds}{du}, \qquad \frac{ds}{du} = \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}. \end{aligned}\right.$$

Pour découvrir l'invariant complémentaire d'ordre 3, remarquons qu'il n'est pas obligé de contenir v'' ni v''' et que les courbes les plus simples définies individuellement et *intrinsèquement* sur les surfaces représentatives du ds^2 sont celles où la courbure totale de la surface reste égale à une valeur numérique arbitraire : en chaque point de la surface passe une courbe γ et une seule de cette famille simplement infinie; en chaque point d'une courbe C *arbitraire* tracée sur la surface, *l'angle* V *de* C *et de la courbe* γ *correspondante est l'invariant cherché d'ordre* 3 : il contient v' et les dérivées d'ordre 3 de E, F, G, et cet exemple prouve bien que pour chaque invariant (de Gauss, ou Beltrami, ou Minding) il n'y a pas lieu de forcer d'une unité l'ordre maximum des dérivées de E, F, G. La dérivée v' peut donc s'exprimer au moyen de E, F, G, de leurs dérivées des trois premiers ordres et de V ; v'' au moyen de ces mêmes quantités, des dérivées d'ordre 4 de E, F, G et de $\frac{dV}{ds}$; de même v''', ...; ce calcul permettrait donc d'exprimer n'importe quel invariant de Minding au moyen de E, F, G, de leurs dérivées et de V, $\frac{dV}{ds}$, ..., mais on aurait ainsi pour l'invariant un ordre apparent trop élevé (4 pour ρ et non 2). Il est à remarquer que, dans les applications, seul l'élément géométrique ρ a été employé : Żorawski [22] a donné la classification des invariants de Gauss, Beltrami et Minding, mais il n'a pu obtenir ni l'expression de l'invariant complémentaire V d'ordre 3 de Minding ni son interprétation géométrique.

2. Symboles de Christoffel et quelques formules utiles ;

$$
(1)^{\bullet}\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta f(\alpha,\beta,\ldots) &&= \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^2\Delta\alpha+\ldots+2\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Delta(\alpha,\beta)+\ldots,\\
&\Theta(f,\varphi) &&= \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}-\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)\Theta(\alpha,\beta)+\ldots,\\
&\Delta(f,\varphi) &&= \frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\Delta\alpha+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)\Delta(\alpha,\beta)+\ldots,\\
&\Delta_2 f &&= \frac{\partial f}{\partial\alpha}\Delta_2\alpha+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\Delta\alpha+\ldots+2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta}\Delta(\alpha,\beta)+\ldots.
\end{aligned}\right.
$$

Dans ces formules f et φ sont des fonctions $f(\alpha,\beta,\ldots)$, $\varphi(\alpha,\beta,\ldots)$, où α, β, ... sont des fonctions données de u et v. La théorie des *formes covariantes* et des *dérivées covariantes* conduit à signaler le paramètre différentiel du second ordre

$$
(2)\qquad \Delta_{22}\mathrm{U} = \frac{2\,\Delta_2\mathrm{U}\,\Delta(\mathrm{U},\Delta\mathrm{U})-\Delta\Delta\mathrm{U}}{4\,\Delta\mathrm{U}},
$$

qui, en réalité, est entier; le numérateur contient $\Delta\mathrm{U}$ en facteur; avec les dérivées secondes covariantes, on a

$$
(3)\qquad \Delta_{22}\mathrm{U} = \frac{1}{\mathrm{H}^2}(\mathrm{U}_{11}\mathrm{U}_{22}-\mathrm{U}_{12}^2),
$$

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{U}_{11} &= \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial u^2}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial u}-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial v},\\
\mathrm{U}_{12} &= \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial u\,\partial v}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial v},\\
\mathrm{U}_{22} &= \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial v^2}-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial u}-\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial v}.
\end{aligned}\right.
$$

On a introduit les notations de Christoffel

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \frac{\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial u}+\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}-2\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial u}}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}, &&
\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \frac{-\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial u}+2\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial u}-\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)},\\
&\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}-\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}, &&
\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' = \frac{\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)},\\
&\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{-\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}+2\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}-\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}, &&
\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \frac{\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}+\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}-2\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}.
\end{aligned}\right.
$$

La forme $\mathrm{U}_{11}\,du^2+2\mathrm{U}_{12}\,du\,dv+\mathrm{U}_{22}\,dv^2$ est un covariant de la forme $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ et ceci suffit pour établir l'invariance absolue de l'expression $\Delta_{22}U$; Darboux a signalé l'importance de cet invariant (qu'il appelle σU) dans la théorie de la déformation.

Si maintenant on considère une surface S rapportée à une famille de géodésiques et leurs trajectoires orthogonales, on a

$$(6)\qquad \begin{cases} ds^2 = d\alpha^2 + C^2\,d\beta^2, \qquad \Delta\alpha = 1, \qquad \Delta_2\alpha = \dfrac{1}{C}\dfrac{\partial C}{\partial\alpha}, \\ K = -\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial^2 C}{\partial\alpha^2}, \qquad \Delta(\alpha, \Delta_2\alpha) = -K - (\Delta_2\alpha)^2. \end{cases}$$

On remarquera le résultat curieux : *quelle que soit la famille de courbes parallèles* $\alpha =$ const., *on a*

$$(7)\qquad \Delta(\alpha, \Delta_2\alpha) + (\Delta_2\alpha)^2 \equiv -K.$$

CHAPITRE II.

RECONNAÎTRE SI DEUX SURFACES SONT ISOMÉTRIQUES.

1. Isométrie. Applicabilité. — Le langage a établi une confusion entre les mots : surfaces *applicables ou isométriques*. C'est Voss [17] qui a signalé, pour la première fois, que ces mots ne sont pas synonymes. E.-E. Levi [10] a montré que deux portions de surfaces isométriques, de courbure totale nulle ou négative, sont *applicables;* tandis que si S et S_1 sont à courbure positive, S est isométrique à la fois à S_1 et à la surface S'_1 symétrique de S_1 relativement à un point, et applicable sur S_1 *ou* S'_1, les deux cas s'excluant. Désormais nous ne ferons aucune distinction entre les surfaces applicables ou les surfaces simplement isométriques, sauf pour certains problèmes précis tels que la déformation des surfaces fermées convexes. Je reprends ce point au second fascicule.

2. Conditions d'applicabilité. — Reconnaître si deux surfaces S, S_1 d'élément linéaire respectif

$$(1)\qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$(2)\qquad ds_1^2 = E_1\,du_1^2 + 2F_1\,du_1\,dv_1 + G_1\,dv_1^2$$

sont applicables revient à chercher, si elle existe, une transformation

$$(3) \qquad u = f(u_1, v_1), \qquad v = \varphi(u_1, v_1),$$

changeant identiquement (1) en (2); et à ce point de vue, il n'est pas indispensable de connaître effectivement une surface représentative de (1) ou (2). Nous avons à résoudre le système simultané de trois équations à deux inconnues

$$(4) \quad \begin{cases} E_1 = E\left(\dfrac{\partial u}{\partial u_1}\right)^2 + 2F\dfrac{\partial u}{\partial u_1}\dfrac{\partial v}{\partial u_1} + G\left(\dfrac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2, \\ F_1 = E\dfrac{\partial u}{\partial u_1}\dfrac{\partial u}{\partial v_1} + F\left(\dfrac{\partial u}{\partial u_1}\dfrac{\partial v}{\partial v_1} + \dfrac{\partial u}{\partial v_1}\dfrac{\partial v}{\partial u_1}\right) + G\dfrac{\partial v}{\partial u_1}\dfrac{\partial v}{\partial v_1}, \\ G_1 = E\left(\dfrac{\partial u}{\partial v_1}\right)^2 + 2F\dfrac{\partial u}{\partial v_1}\dfrac{\partial v}{\partial v_1} + G\left(\dfrac{\partial v}{\partial v_1}\right)^2. \end{cases}$$

Dérivons chaque équation (4) en u_1 ou v_1; les six équations linéaires, non homogènes, ainsi obtenues en $\dfrac{\partial^2 u}{\partial u_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial u_1 \partial v_1}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial u_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial u_1 \partial v_1}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial v_1^2}$, donnent pour ces six dérivées secondes un système de valeurs et un seul, exprimées au moyen de u, v et des dérivées premières $\dfrac{\partial u}{\partial u_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial v_1}$, $\dfrac{\partial v}{\partial u_1}$, $\dfrac{\partial v}{\partial v_1}$; pour obtenir les conditions d'intégrabilité, il suffit de dériver chaque équation (4) une fois de plus, ce qui donne neuf équations linéaires, non homogènes, entre les huit dérivées $\dfrac{\partial^3 u}{\partial u_1^3}, \ldots, \dfrac{\partial^3 v}{\partial v_1^3}$; un calcul facile montre qu'on a *exactement* par l'élimination de ces huit dérivées une relation *unique*, ne contenant plus que u, v et leurs dérivées d'ordre 1 et 2; ces dérivées d'ordre 2 étant elles-mêmes remplacées par leurs valeurs déjà trouvées, on trouve ce fait remarquable que *les dérivées d'ordre* 1 *disparaissent;* suivant la marche du calcul, cette disparition peut se faire, soit immédiatement, soit après avoir remarqué que ces dérivées n'entrent que par le groupe

$$\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2 = \frac{E_1 G_1 - F_1^2}{EG - F^2}.$$

Il reste donc une relation *nécessaire* que l'on met, en séparant les variables, sous la forme symétrique

$$(5) \qquad K(u, v) = K^1(u_1, v_1),$$

où K et K^1 signifient les courbures totales respectives des deux ds^2 (1)

et (2); le résultat se vérifie aussitôt si ces ds^2 sont pris sous les formes réduites $2F\,du\,dv$ et $2F_1\,du_1\,dv_1$, on trouve alors au lieu de (5)

$$\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{F_1}\frac{\partial^2 \log F_1}{\partial u_1\,\partial v_1},$$

et l'objection qu'une telle réduction suppose les ds^2 analytiques se lève comme pour les problèmes géométriques élémentaires relatifs à divers cas de figure rendant certains éléments géométriques tantôt réels tantôt imaginaires. Ce point établi, les équations (4) se complètent par (5) et par

$$(6)\qquad \frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u_1} + \frac{\partial K}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u_1} = \frac{\partial K^1}{\partial u_1}, \qquad \frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v_1} + \frac{\partial K}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v_1} = \frac{\partial K^1}{\partial v_1}.$$

Le système (4), (6) comprend alors cinq équations linéaires aux quatre inconnues $\frac{\partial u}{\partial u_1}$, $\frac{\partial u}{\partial v_1}$, $\frac{\partial v}{\partial u_1}$, $\frac{\partial v}{\partial v_1}$, de sorte que doivent apparaître d'autres conditions *nécessaires*. La méthode de Christoffel n'a pour but que de présenter élégamment les résultats des calculs; nous allons les retrouver très simplement en nous servant des paramètres introduits au précédent Chapitre.

J'indique, pour mémoire, que dans le cas de formes quadratiques à n variables, c'est-à-dire de surfaces à n dimensions plongées dans l'espace à $n+1$ dimensions, en suivant une marche analogue on obtient $\frac{n^2(n^2-1)}{12} + \frac{n(n+1)}{2}$, équations entre les n^2 dérivées du premier ordre; le premier nombre surpasse le second du nombre

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n+3)}{12},$$

qui n'est pas nul si $n \geq 3$; c'est donc un fait très remarquable que pour $n=2$ les dérivées du premier ordre s'éliminent toutes les quatre, et ceci justifie l'importance de ce théorème sur la courbure totale, que les géomètres allemands appellent *theorema egregium*, en souvenir de l'illustre géomètre Gauss [6] qui l'a signalé le premier et jeté le fondement de cette belle théorie. En tout cas l'essentiel est de remarquer que *le nombre d'arbitraires dans les formules de transformation de deux formes quadratiquet à n variables ne peut avoir que l'une des valeurs* 0, 1, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$; *la valeur maxi-*

mum $\frac{n(n+1)}{2}$ *est effectivement atteinte pour deux formes quadratiques à n variables ayant la même courbure riemannienne constante.*

En nous bornant à l'espace euclidien à trois dimensions, je rappelle que la relation $\Delta\varphi = f(\varphi)$, quand elle a lieu, signifie que les courbes $\varphi = \text{const.}$ sont parallèles. Ici nous avons les courbes définies intrinsèquement par $K = \text{const.}$, que nous dirons *courbes de courbure totale constante sur la surface;* si deux surfaces sont isométriques, K et aussi tous ses invariants ont nécessairement la même valeur numérique aux points homologues, chacune de ces fonctions étant calculée séparément sur chaque ds^2. Trois cas se séparent : A, où S ni S_1 ne sont applicables sur une surface de révolution; nous verrons que ce cas se partage lui-même en deux : A_1 et A_2; B, où S et S_1 sont applicables sur une même surface de révolution à courbure totale non constante, C où S et S_1 ont la même courbure totale constante.

3. Hypothèse A_1 : $K(u, v)$ *et* $L \equiv \Delta K(u, v)$ *sont des fonctions indépendantes.* — Nous prenons K et L pour variables nouvelles et l'on a alors [Chap. I, formules (9) du paragraphe 1].

$$ds^2 = \frac{\Delta L . dK^2 - 2\Delta(K, L) . dK . dL + L\, dL^2}{L \Delta L - \Delta^2(K, L)}. \tag{1}$$

Il est donc nécessaire et suffisant que les quatre équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} K(u, v) = K^1(u_1, v_1), & \Delta(K, \Delta K) = \Delta^1(K^1, \Delta^1 K^1), \\ \Delta K(u, v) = \Delta^1 K^1(u_1, v_1), & \Delta\Delta K = \Delta^1 \Delta^1 K^1, \end{array} \right. \tag{2}$$

entre u, v, u_1, v_1, admettent un système de solutions communes (ou plusieurs); il ne peut y avoir de solution dépendant d'un paramètre arbitraire, puisque les deux premières équations sont *distinctes* par hypothèse; dans le cas de compatibilité, il y a, en général, un nombre *fini* de solutions, donc un nombre *fini* de points de S_1 homologues d'un même point de S. *De simples calculs de différentiation et élimination font reconnaître si les deux surfaces sont ou non applicables et donnent l'application quand elle existe.*

4. Hypothèse A_2 : ΔK *est fonction de* K, *mais non* $\Delta_2 K$. — Il est clair que $\Delta^1 K^1$ doit être la *même* fonction de K^1 que ΔK de K. Les courbes de courbure totale constante sont parallèles sur S ou sur S_1. Nous prenons K et $M = \Delta_2 K$ comme nouvelles variables indépendantes, d'où

$$(1) \qquad ds^2 = \frac{\Delta M . dK^2 - 2\,\Delta(K, M).dK.dM + \Delta K.dM^2}{\Delta K.\Delta M - [\Delta(K, M)]^2}.$$

Il est nécessaire et suffisant que les quatre équations

$$(2) \qquad \begin{cases} K = K^1, & \Delta\Delta_2 K = \Delta^1 \Delta_2^1 K^1, \\ \Delta_2 K = \Delta_2^1 K^1, & \Delta(K, \Delta_2 K) = \Delta^1(K^1, \Delta_2^1 K^1) \end{cases}$$

se réduisent encore à deux; montrons que l'on peut négliger l'équation

$$\Delta(K, \Delta_2 K) = \Delta^1(K^1, \Delta_2^1 K^1),$$

en remarquant que les courbes $K = \text{const.}$ sont parallèles; α étant l'arc des géodésiques trajectoires orthogonales ($\beta = \text{const.}$) compté à partir d'une courbe déterminée K, on a en effet

$$(3) \qquad \Delta K = \left(\frac{dK}{d\alpha}\right)^2 \Delta\alpha, \qquad ds^2 = d\alpha^2 + C^2\, d\beta^2.$$

Or nous avons vu (Chap. I, § 2, formule 7) la relation *identique*

$$(4) \qquad \Delta(\alpha, \Delta_2\alpha) + (\Delta_2\alpha)^2 \equiv -K,$$

ce qui prouve que l'équation $\Delta(\alpha, \Delta_2\alpha) = \Delta^1(\alpha^1, \Delta_2^1\alpha^1)$ est une conséquence des équations $\alpha = \alpha^1$, $K = K^1$, $\Delta_2(\alpha) = \Delta_2^1(\alpha^1)$ et le résultat analogue a lieu si l'on remplace α par la fonction $K(\alpha)$, d'après les formules données (§ 1, du premier Chapitre). L'applicabilité n'admet donc qu'un nombre limité de modes, exactement comme au cas A_1 : *de simples différentiations et éliminations permettent de vérifier la possibilité ou non, et de l'obtenir.*

On ne connaît d'ailleurs explicitement aucune surface de ce type; comme on a

$$(5) \qquad \Delta\alpha = 1, \qquad \Delta_2\alpha = \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial\alpha}, \qquad K = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha^2},$$

la condition que $\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha^2}$ soit fonction de α permet de réduire le ds^2 à la forme

$$(6) \qquad ds^2 = d\alpha^2 + \frac{(A-B)^2}{A'}\, d\beta^2, \qquad K = \frac{1}{2}\left[\frac{A'''}{A'} - \frac{3}{2}\frac{A''^2}{A'^2}\right],$$

où A est une fonction de α, et B une fonction, non réduite à une constante, de β.

5. **Surfaces applicables sur une surface de révolution.** — S est à courbure totale variable, donc S_1 aussi; ΔK et $\Delta_2 K$ sont tous deux fonctions de K, donc $\Delta^1 K^1$ et $\Delta_2^1 K^1$ doivent être les mêmes fonctions respectives de K^1; or la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes $\varphi = \text{const.}$, jointes à leurs trajectoires orthogonales déterminent un système isotherme, est que le quotient $\frac{\Delta_2\varphi}{\Delta\varphi}$ soit fonction de φ; Sophus Lie [16] a montré que ces trajectoires orthogonales s'obtiennent par une quadrature de différentielle totale; nous écrivons ici, d'après Sophus Lie,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu(K) = e^{-\int \frac{\Delta_2 K}{\Delta_1 K} dK},\\ &d\psi = \frac{\mu(K)}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\left(F\frac{\partial K}{\partial u} - E\frac{\partial K}{\partial v}\right) du + \left(G\frac{\partial K}{\partial u} - F\frac{\partial K}{\partial v}\right) dv\right\}.\end{aligned}\right.$$

L'équation $\psi = \text{const.}$ est celle des trajectoires orthogonales des courbes $K = \text{const.}$, et l'on a

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta\psi = \mu^2(K)\Delta K,\\ &\frac{D(K, \psi)}{D(u, v)} = \frac{\mu}{\sqrt{EG - F^2}}\left[E\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v} + G\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2\right],\end{aligned}\right.$$

de sorte que K et ψ sont bien des variables indépendantes, puisque K n'est pas une constante; avec les variables K et ψ, on a

$$(3)\qquad ds^2 = \frac{dK^2}{\Delta K} + \frac{d\psi^2}{\Delta\psi} = \frac{dK^2}{\Delta K} + \frac{d\psi^2}{\mu^2(K)\Delta K},$$

et l'on voit aussitôt que les deux surfaces admettent ∞^1 applicabilités définies par les équations, *obtenues après une quadrature*,

$$K = K^1, \qquad \psi = \psi^1 + \lambda,$$

où λ est une constante numérique *arbitraire;* chaque surface est applicable sur une même surface de révolution Σ; on sait, d'après Bour, obtenir, par des quadratures, ∞^1 surfaces de révolution Σ, non égales, mais applicables toutes entre elles ou sur S et S_1, les courbes $K = \text{const.}$ correspondent aux méridiens de Σ, les courbes orthogonales $\psi = \text{const.}$, aux méridiens ; augmenter ψ d'une constante revient à faire tourner Σ autour de son axe et revient à déformer S en elle même (déformation non réduite à une symétrie ou un déplacement si S n'est pas de révolution) ; changer de signe ψ revient encore à une auto-application de S sur elle-même, en laissant invariante sur S l'une des courbes correspondant à un méridien de Σ.

6. **Surfaces à courbure totale constante.** — On a ce résultat important : *deux surfaces de même courbure totale constante sont applicables l'une sur l'autre de ∞^3 modes différents.* On le montre géométriquement, en prenant sur la surface S de courbure totale constante K une première géodésique γ ; les courbes géodésiquement parallèles à γ seront les courbes $u = \text{const.}$, u étant l'arc de géodésique normale à γ compté à partir de γ ; ces géodésiques normales à γ sont les courbes $v = \text{const.}$, et le paramètre v est l'arc de γ compté sur γ à partir d'un point fixe $O(u = v = 0)$; l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + G\, dv^2$$

donne, en calculant l'arc de γ, l'identité $G(0, v) \equiv 1$, puis en calculant la courbure géodésique des lignes $u = \text{const.}$, ou $\frac{1}{\rho_u} = \frac{-1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$, la nouvelle identité $\left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} \equiv 0$; on doit ensuite intégrer la relation

$$K = \frac{-1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u}.$$

Si l'on prend $K = 0$, on a

$$\sqrt{G} = u\varphi(v) + \psi(v), \qquad \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \varphi(v),$$

et les conditions initiales réduisent le ds^2 à la forme $du^2 + dv^2$: on a donc une surface développable.

Si l'on suppose $K \neq 0$ et positif, $K = \frac{1}{R^2}$, on arrive par le même procédé à

$$ds^2 = du^2 + \cos^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2,$$

élément linéaire d'une sphère de rayon R ; si K est négatif, $K = -\frac{1}{R^2}$, on a de même

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{ch}^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2,$$

élément bien connu de la *pseudo-sphère*, engendrée par une tractrice tournant autour de sa base.

Or, dans les trois cas, la construction s'applique à un point O choisi *arbitrairement* sur S, puis à une géodésique *arbitraire* issue de O, ce qui fait bien trois paramètres arbitraires pour appliquer S sur la surface type, plan, sphère ou pseudo-sphère; de même pour la seconde surface, de sorte que *l'applicabilité de* S *sur* S_1 *dépend bien de trois paramètres.* Si une surface admet un groupe *transitif* d'applications sur elle-même, elle est à courbure totale et le groupe a trois paramètres. *Pour appliquer deux surfaces à courbure totale l'une sur l'autre, il faut intégrer l'équation des géodésiques;* si la courbure est nulle, cela conduit à trois quadratures; si la courbure n'est pas nulle, l'équation différentielle des géodésiques se ramène à une équation de Riccati.

CHAPITRE III.

ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES SURFACES APPLICABLES SUR UNE SURFACE DONNÉE.

1. Formes quadratiques fondamentales. — Le problème nouveau, beaucoup plus important et difficile que le précédent, est le suivant : *trouver toutes les surfaces applicables sur une surface donnée, ou du moins, si l'on ne connaît que le ds^2, représentatives d'un ds^2 donné.*

La géométrie intrinsèque de la surface, indépendamment de ses relations avec le milieu extérieur, ne fait intervenir que la forme quadratique ds^2, que nous appelons *première forme fondamentale;* le milieu extérieur introduit la *seconde forme fondamentale :*

$$\varphi \equiv - \mathrm{S}\, dc\, dx \equiv \mathrm{S}\, c\, d^2 x.$$

où x, y, z sont les coordonnées d'un point de la surface et c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale aux points x, y, z, par rapport à trois axes rectangulaires fixes. On a

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'du\,dv + \mathrm{D}''dv^2 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & d^2x \end{vmatrix},$$

$$\delta\,du^2 + 2\,\delta'du\,dv + \delta''dv^2 \equiv \mathrm{S}\,c\,d^2x \equiv -\,\mathrm{S}\,dc\,dx \equiv \varphi.$$

L'expression $\mathrm{S}\,dc\,dx$ est le produit scalaire des deux déplacements concomitants, (dx, dy, dz) effectué sur la surface, (dc, dc', dc'') effectué sur la sphère unité au cours de la représentation sphérique de Gauss; la forme φ représente donc une quantité indépendante du choix des variables indépendantes (u, v), tandis que la forme

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'du\,dv + \mathrm{D}''dv^2$$

de Gauss en dépend; il y a donc nécessité, avec les géomètres italiens d'étudier la forme φ à l'exclusion de celle de Gauss. *Dans un changement de variables, les deux formes quadratiques fondamentales se transforment en les nouvelles formes relatives aux nouvelles variables; elles définissent, à un déplacement près, la surface.*

2. Formules équivalentes pour les surfaces aux formules de Serret-Frenet pour les courbes. — Puisque les droites de paramètres directeurs

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right), \quad (c, c', c'')$$

forment un véritable trièdre, on peut écrire

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \mathrm{A}c + \mathrm{B}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{C}\frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} &= \mathrm{A}c' + \mathrm{B}\frac{\partial y}{\partial u} + \mathrm{C}\frac{\partial y}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \mathrm{A}c'' + \mathrm{B}\frac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{C}\frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

La signification vectorielle de ces égalités montre que les coefficients A, B, C s'obtiennent en multipliant par (c, c', c'') ou $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$, ou $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ et ajoutant. On obtient ainsi

$$(2)\qquad \mathrm{A} = \delta, \qquad \mathrm{B} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Le même procédé donne finalement les *formules suivantes, analogues, pour les surfaces, aux formules de Serret-Frenet pour* *les courbes*

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \delta c + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}, &\quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} &= \ldots, &\quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \ldots,\\
\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \delta' c + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}, &\quad \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} &= \ldots, &\quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} &= \ldots,\\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \delta'' c + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}, &\quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} &= \ldots, &\quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= \ldots.
\end{aligned}\right.$$

La surface S et la sphère sur laquelle on effectue la représentation sphérique ont leurs plans tangents homologues parallèles : on a, par un procédé semblable,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial u} &= \frac{F\delta' - G\delta}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{F\delta - E\delta'}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial v}, &\quad \frac{\partial c'}{\partial u} &= \ldots, &\quad \frac{\partial c''}{\partial u} &= \ldots,\\
\frac{\partial c}{\partial v} &= \frac{F\delta'' - G\delta'}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{F\delta' - E\delta''}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial v}, &\quad \frac{\partial c'}{\partial v} &= \ldots, &\quad \frac{\partial c''}{\partial v} &= \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules on permute x, y, z et c, c', c'' sans toucher aux coefficients. Si donc on donne en fonction de u et v, les six fonctions E, F, G, δ, δ', δ'', et si, de plus, nous choisissons *arbitrairement* x_0, y_0, z_0 pour $u = u_0$, $v = v_0$, puis si nous déterminons un système $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0$, $\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0$, $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0$, $\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0$, $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0$, $\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0$, satisfaisant aux relations

$$(5)\qquad E_0 = S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0^2, \qquad F_0 = S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0, \qquad G_0 = S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0^2,$$

nous en déduirons c_0, c'_0, c''_0 et les formules (3) nous donneront $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)_0$, $\ldots$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)_0$; des différentiations successives des formules (3), en tenant compte de (4), nous donnent de proche en proche les dérivées d'ordre quelconque de x, y, z pour $u = u_0$, $v = v_0$; les développements en série de Taylor de x, y, z ne peuvent donc contenir que les six paramètres arbitraires qui correspondent au déplacement le plus général de la surface [position de M_0 donnée par x_0, y_0, z_0; orientation du système plan formé par les tangentes en M_0 aux courbes $u = u_0$ et $v = v_0$ fixée par les équations (5)]. C'est la conclusion donnée au paragraphe précédent.

La théorie des équations aux dérivées partielles nous fait écrire les conditions d'intégrabilité

$$(6)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right);$$

c, c', c'' étant remplacées par $\frac{1}{H}\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \dots$, et leurs dérivées étant données par (4). Les équations (6) doivent être répétées avec y, puis z et cela revient, dans (6) à égaler les termes en $c, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$ aux deux membres, toujours d'après l'interprétation vectorielle. Il est clair que le nombre de conditions *distinctes* (6 au plus) ainsi obtenu est indépendant du choix des variables indépendantes; si l'on suppose la surface rapportée à ses lignes de longueur nulle, on a $E = G = 0$ et au lieu de (3) et (4).

$$(3')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{\partial \log F}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \delta c,\\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \delta' c,\\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \frac{\partial \log F}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \delta'' c;\end{aligned}\right.$$

$$(4')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial u} &= -\frac{1}{F}\left(\delta'\frac{\partial x}{\partial u} + \delta\frac{\partial x}{\partial v}\right),\\ \frac{\partial c}{\partial v} &= -\frac{1}{F}\left(\delta''\frac{\partial x}{\partial u} + \delta'\frac{\partial x}{\partial v}\right).\end{aligned}\right.$$

On obtient *trois* conditions d'intégrabilité

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta'\frac{\partial \log F}{\partial u} &= \frac{\partial \delta'}{\partial u} - \frac{\partial \delta}{\partial v}\\ \delta'\frac{\partial \log F}{\partial v} &= \frac{\partial \delta'}{\partial v} - \frac{\partial \delta''}{\partial u}\end{aligned}\right. \qquad \frac{-1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u\,\partial v} = \frac{\delta\delta'' - \delta'^2}{-F^2}.$$

L'équation, en termes finis, du système (7) exprime le *theorema egregium* de Gauss, les deux membres étant égaux à $\frac{1}{R_1 R_2}$. En revenant à un système curviligne quelconque, on obtient aisément les équations dites de *Gauss-Codazzi* [3] :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \delta}{\partial v} - \frac{\partial \delta'}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\delta + \left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right]\delta' + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\delta'' = 0,\\ &\frac{\partial \delta''}{\partial u} - \frac{\partial \delta'}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\delta + \left[\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]\delta' - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\delta'' = 0.\end{aligned}\right.$$

Il suffit en effet d'écrire

$$S\left[c\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)\right] = S\left[c\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)\right] \qquad S\left[c\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)\right] = \left[c\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)\right].$$

Quant à celle qui concerne $\delta\delta'' - \delta'^2$ on trouve aisément, par un produit de déterminants,

$$(9) \qquad DD'' - D'^2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2} & \dfrac{\partial F}{\partial v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial v} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{2}{1}\dfrac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix}.$$

Il est quelquefois utile d'introduire les quantités

$$(10) \qquad \Delta = \frac{\delta}{H} = \frac{D}{H^2}, \qquad \Delta' = \frac{\delta'}{H} = \frac{D'}{H^2}, \qquad \Delta'' = \frac{\delta''}{H} = \frac{D''}{H^2}$$

et les équations (8), (9) prennent la forme

$$(8') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \Delta}{\partial v} - \frac{\partial \Delta'}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \Delta - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \Delta' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \Delta'' = 0, \\ &\frac{\partial \Delta''}{\partial u} - \frac{\partial \Delta'}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \Delta - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \Delta' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \Delta'' = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(9') \qquad K = \Delta\Delta'' - \Delta'^2 = \frac{\delta\delta'' - \delta'^2}{H^2} = \frac{DD'' - D'^2}{H^4}.$$

Conclusion. — *Un système de solutions* δ, δ', δ'' *des trois équations* (8), (9) *détermine la surface à un déplacement près; chercher toutes les surfaces représentatives d'un* ds^2 *donné revient à intégrer le système* (8) et (9). Nous verrons plus loin comment la méthode du trièdre mobile intervient pour donner plus de souplesse.

3. **Troisième forme fondamentale.** — On appelle ainsi la forme

quadratique $S\,dc^2$, carré de l'élément linéaire de la représentation sphérique. *Il y a une relation linéaire entre les trois formes :*

$$(1)\qquad d\sigma^2 + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) S\,dc\,dx + K\,ds^2 = 0 \quad (^1)$$

ou

$$(2)\qquad (EG - F^2)\,d\sigma^2 + (E\delta'' + G\delta - 2F\delta')\,S\,dc\,dx + (\delta\delta'' - \delta'^2)\,ds^2 = 0.$$

On doit remarquer que le changement de signe de δ, δ', δ'' revient à remplacer la surface S par sa symétrique relativement à un plan ou un point. La donnée des deux formes ds^2 et $d\sigma^2$ permet de calculer immédiatement une forme $(EG - F^2)\,d\sigma^2 + (\delta\delta'' - \delta'^2)\,ds^2$ (explicitement connue, puisque $\delta\delta'' - \delta'^2$ ne dépend que de E, F, G) proportionnelle à $\delta\,du^2 + 2\delta'\,du\,dv + \delta''\,dv^2$; connaissant ainsi les rapports $\delta : \delta' : \delta''$ et $\delta\delta'' - \delta'^2$, on en déduit δ, δ', δ'' au signe près; *la donnée de la première et de la troisième forme détermine donc, à un déplacement ou une symétrie près, la surface* S, pourvu, bien entendu, que les coefficients δ, δ', δ'' ainsi calculés satisfassent aux équations de Gauss-Codazzi : cela entraîne trois équations entre E, F, G et les coefficients de la forme $d\sigma^2$ ou $e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$; l'une de ces trois relations est indépendante de E, F, G et exprime purement et simplement que $d\sigma^2$ a pour courbure totale l'unité.

Weingarten a montré que la *donnée des deux formes* $S\,dc\,dx$ *et* $d\sigma^2$ *détermine une surface* S *et une seule, sauf déplacement, pourvu que les coefficients* δ, δ', δ'' *satisfassent aux deux équations de Gauss-Codazzi de même forme que les équations* (8) *du paragraphe précédent formées avec le* $d\sigma^2$

$$e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

de la représentation sphérique et que la forme $d\sigma^2$ *ait pour courbure totale l'unité.*

---

(1) On remarquera qu'un changement de sens positif sur la normale (résultant par exemple de la permutation des noms u et v attribués aux lignes de coordonnées) change de signe c, c', c'' mais aussi R et R' de sorte que la formule (2) reste, comme cela doit être, inaltérée.

Nous écrivons ces équations ainsi :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\delta}{\partial v}-\frac{\partial\delta'}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\delta+\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\right]\delta'+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\delta''=0,\\ &\frac{\partial\delta''}{\partial u}-\frac{\partial\delta'}{\partial v}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\delta+\left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\right]\delta'-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\delta''=0;\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad eg-f^2=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial v^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} & \frac{\partial f}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u} & e & f\\ \frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} & f & g\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} & e & f\\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} & f & g\end{vmatrix},$$

les symboles de Christoffel avec accent se rapportent à $d\sigma^2$. Pour le démontrer, raisonnons sur la sphère Σ d'élément $d\sigma^2$ comme pour la surface S; la *première* forme de Σ est $d\sigma^2$, et la *seconde* est $(-d\sigma^2)$, car (x, y, z) coordonnées du point courant de Σ, et (c, c', c'') cosinus directeurs de la normale à Σ coïncident, (c, c', c'') étant d'ailleurs les mêmes que pour S. J'applique donc les formules (3) du paragraphe précédent, d'où

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial u^2}&=-ec+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'\frac{\partial c}{\partial u}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\frac{\partial c}{\partial v},\\ \frac{\partial^2 c}{\partial u\,\partial v}&=-fc+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\frac{\partial c}{\partial u}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\frac{\partial c}{\partial v},\\ \frac{\partial^2 c}{\partial v^2}&=-gc+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\frac{\partial c}{\partial u}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'\frac{\partial c}{\partial v}.\end{aligned}\right.$$

D'autre part on a le droit d'écrire, en raison du parallélisme des plans tangents à S et Σ,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u}=m\frac{\partial c}{\partial u}+n\frac{\partial c}{\partial v}, &&\frac{\partial y}{\partial u}=m\frac{\partial c'}{\partial u}+n\frac{\partial c'}{\partial v}, &&\frac{\partial z}{\partial u}=\ldots,\\ &\frac{\partial x}{\partial v}=m'\frac{\partial c}{\partial u}+n'\frac{\partial c}{\partial v}, &&\frac{\partial y}{\partial v}=m'\frac{\partial c'}{\partial u}+n'\frac{\partial c'}{\partial v}, &&\frac{\partial z}{\partial v}=\ldots.\end{aligned}\right.$$

On calcule m, n en multipliant les équations de la première ligne par $\frac{\partial c}{\partial u}$, $\frac{\partial c'}{\partial u}$, $\frac{\partial c''}{\partial u}$ et ajoutant, puis par $\frac{\partial c}{\partial v}$, $\frac{\partial c'}{\partial v}$, $\frac{\partial c''}{\partial v}$ et ajoutant; de même pour m', n' et la seconde ligne. On a ainsi

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{f\delta'-g\delta}{eg-f^2}\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{f\delta-e\delta'}{eg-f^2}\frac{\partial c}{\partial v}, &\quad \frac{\partial y}{\partial u} &= \ldots, &\quad \frac{\partial z}{\partial u} &= \ldots, \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{f\delta''-g\delta'}{eg-f^2}\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{f\delta'-e\delta''}{eg-f^2}\frac{\partial c}{\partial v}, &\quad \frac{\partial y}{\partial v} &= \ldots, &\quad \frac{\partial z}{\partial v} &= \ldots. \end{aligned} \right.$$

Ces équations (7) ont la même forme que les équations (4) du paragraphe précédent, sauf échange de x, y, z avec c, c', c'' et de E, F, G avec e, f, g. Or les deux équations de Gauss-Codazzi (8) du paragraphe précédent peuvent, entre autres procédés de calcul, être déduites des équations (4) déjà citées, que je recopie :

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial u} &= \mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{N}\frac{\partial x}{\partial v}, &\quad \frac{\partial c'}{\partial u} &= \ldots, &\quad \frac{\partial c''}{\partial u} &= \ldots, \\ \frac{\partial c}{\partial v} &= \mathrm{M}'\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{N}'\frac{\partial x}{\partial v}, &\quad \frac{\partial c'}{\partial v} &= \ldots, &\quad \frac{\partial c''}{\partial v} &= \ldots, \end{aligned} \right.$$

puis écrivant

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial c}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial c}{\partial v}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(9)\quad \begin{aligned} &(\mathrm{M}-\mathrm{N}')\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \mathrm{N}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \mathrm{M}'\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial u}\right) + \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{N}'}{\partial u}\right) = 0. \end{aligned}$$

On remplace $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ par les expressions obtenues précédemment, et l'on annule séparément les coefficients de $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$ (le terme en c a disparu automatiquement).

Ici nous pouvous recommencer le même calcul : nous écririons, en partant de (6) ou (7),

$$(9')\quad \begin{aligned} &(m-n')\frac{\partial^2 c}{\partial u\,\partial v} + n\frac{\partial^2 c}{\partial v^2} - m'\frac{\partial^2 c}{\partial u^2} \\ &\quad + \frac{\partial c}{\partial u}\left(\frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial m'}{\partial u}\right) + \frac{\partial c}{\partial v}\left(\frac{\partial n}{\partial v} - \frac{\partial n'}{\partial u}\right) = 0. \end{aligned}$$

Nous remplaçons ensuite $\frac{\partial^2 c}{\partial u^2}$, $\frac{\partial v^2}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 c}{\partial v^2}$ par leurs expressions (5) et nous annulons les coefficients de $\frac{\partial c}{\partial u}$ et $\frac{\partial c}{\partial v}$ (celui de c disparaît automatiquement). Mais alors c'est *exactement* le même calcul que précédemment, sauf que E, F, G ont été remplacés par e, f, g. Les formules de Weingarten se trouvent ainsi établies; cela posé, la forme $d\sigma^2$ définit *intrinsèquement* la sphère Σ : par une équation de Riccati, on détermine $c(u, v)$, $c'(u, v)$, $c''(u, v)$ et les formules (7) donnent ensuite x, y, z par des quadratures de différentielle totale; les paramètres entrant en jeu sont, d'une part la substitution orthogonale à coefficients constants sur c, c', c'', d'autre part les constantes additives entrant dans x, y, z; on a donc une surface S et une seule sauf déplacement.

4. **Équation de Monge-Ampère de la déformation.** — Le problème fondamental est le suivant : $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ étant, dans un certain champ de variation pour (u, v), une forme quadratique différentielle *définie*, *positive*, trouver 3 fonctions inconnues $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ telles que l'on ait identiquement

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

Darboux écrit

$$dx^2 + dy^2 \equiv E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right)^2, \tag{2}$$

puis exprime que la courbure totale du second membre est nulle; p, q, r, s, t désignant $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, on annulera la quantité $DD'' - D'^2$ calculée par la formule (9) du paragraphe 2, en y remplaçant E, F, G par $E - p^2$, $F - pq$, $G - q^2$. On a ainsi une équation de Monge-Ampère :

$$\begin{aligned}
4(EG - F^2)&\left[s^2 - rt + pr\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + qr\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right.\\
&\left.- 2ps\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - 2qs\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + pt\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + qt\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right]\\
&+ (E - p^2)\left[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right]\\
&+ (F - pq)\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial v} - 2\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial u} + 4\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\right]\\
&+ (G - q^2)\left[\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial E}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial E}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right]\\
&\qquad + 2[EG - F^2 - Gp^2 - Eq^2 + 2Fpq]\left[2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Réciproquement, soit z une solution de cette équation (3) telle que la forme quadratrique (2) déjà envisagée

$$(2') \qquad (E - p^2)\,du^2 + 2(F - pq)\,du\,dv + (G - q^2)\,dv^2$$

soit définie positive, ce qui se traduit par

$$(4) \qquad \Delta z < 1.$$

La forme (2') se décompose en un produit de deux facteurs, imaginaires conjugués, $\alpha\,du + \beta\,dv$, $\alpha_0\,du + \beta_0\,dv$; une quadrature de différentielle totale donne un facteur intégrant λ du premier, λ_0 du second, et l'on a deux fonctions *réelles* $x(u, v)$, $y(u, v)$ telles que

$$x + iy = \int \lambda(\alpha\,du + \beta\,dv), \qquad x - iy = \int \lambda_0(\alpha_0\,du + \beta_0\,dv.$$

La variation des constantes qui interviennent dans ces quadratures revient à une substitution

$$(x, y;\ a + x\cos\omega \pm y\sin\omega, \qquad b + x\sin\omega \mp y\cos\omega);$$

où a, b, ω sont constants, ce qui revient à un simple déplacement accompagné ou non d'une symétrie, infligé à S. *Donc, à toute solution réelle de l'équation* (3), *satisfaisant de plus à l'inégalité* (4) *correspond une surface* S *et une seule* (*sauf déplacement ou symétrie*), *ayant le* ds^2 *proposé*. Remarquons cette circonstance qui reviendra souvent : au lieu de déterminer la surface $z(x, y)$, nous avons en réalité déterminé la surface auxiliaire $z(u, v)$ qui s'introduit naturellement par la représentation paramétrique $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ de S.

L'expression $(EG - F^2)(1 - \Delta z)$ est le discriminant de (2'); si l'on remplace $E - p^2$ par $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$, $F - pq$, $G - q^2$ par les expressions semblables, on a

$$(5) \qquad 1 - \Delta z = c''^2, \qquad c'' = \varepsilon\sqrt{1 - \Delta z}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Se servant des formules (3) du paragraphe 2, on a, avec les dérivées covariantes de z,

$$(6) \qquad z_{11} = \varepsilon\delta\sqrt{1 - \Delta z}, \qquad z_{12} = \varepsilon\delta'\sqrt{1 - \Delta z}, \qquad z_{22} = \varepsilon\delta''\sqrt{1 - \Delta z}.$$

Les coefficients δ, δ', δ'' de la seconde forme quadratique fondamentale se trouvent ainsi connus au signe près. L'équation de Monge-Ampère (3) peut alors être écrite sous la forme équivalente

$$(7) \qquad \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}^2}{EG - F^2} = K(1 - \Delta z).$$

Cette équation de Monge-Ampère admet des solutions étrangères à notre problème, à savoir celles de l'équation $\Delta z - 1 = 0$ *dont dépend la recherche des géodésiques*; (2′) est alors carré parfait, et a donc *a fortiori* sa courbure nulle. Bien que ces solutions soient à rejeter, il est essentiel de remarquer que *pour tout* ds^2 *dont on sait trouver toutes les surfaces représentatives, on saura nécessairement intégrer l'équation des géodésiques*. Si l'on prend maintenant les solutions de (3) pour lesquelles Δz surpasse 1, l'expression (2′) est réductible à la forme $dx^2 - dy^2$, de sorte que l'on obtient une surface imaginaire x, $i\eta$, z, où x, η, z sont réelles : il faut bien se garder de négliger ces solutions, car la théorie des systèmes cycliques exige précisément de savoir trouver la décomposition du ds^2 en une expression $d\xi^2 + d\eta^2 - d\zeta^2$ au lieu de $d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$ et une première surface réelle connue jointe à une surface imaginaire de cette espèce donne des systèmes cycliques réels; ces surfaces imaginaires se retrouvent aussi dans la méthode donnée par Weingarten pour transformer l'équation de Monge-Ampère, méthode étudiée plus loin.

5. **Déformation d'une surface connaissant la transformée d'une courbe de cette surface.** — Nous pouvons démontrer deux propositions fondamentales :

A. *On peut, de deux façons et deux seulement, déformer une surface* S *de sorte qu'une courbe* C *de* S *prenne une forme* Γ *donnée* a priori, *pourvu que* Γ *ne doive pas être asymptotique de la surface* Σ *déformée.*

B. *Il est impossible de déformer d'une façon continue une surface* S, *en maintenant rigide une courbe* C *de cette surface, sauf si* C *est une asymptotique* (*régulière*) *de* S.

Étudions la première proposition; soient R le rayon de courbure de Γ au point M, ρ le rayon de courbure géodésique correspondant de C sur la surface S; l'équation $\sin\theta = \frac{R}{\rho}$ fournit l'angle θ compté, dans le plan normal de Γ en M, depuis la normale principale de Γ jusqu'à la normale en M à la surface inconnue Σ (ce plan est orienté suivant les règles classiques adoptées pour le trièdre de Serret-Frenet); on doit donc se borner, au point de vue réel, à un arc de C tel que l'on ait toujours $\rho > R$ sans égalité : les deux déterminations obtenues pour θ (que nous laissons compris entre o et π) sont donc réelles, distinctes et celle qui donne un angle aigu (ou obtus) ne se confond jamais avec l'autre; nous adoptons l'une. Nous rapportons la surface cherchée Σ à un système orthogonal tel que la courbe $v = 0$ soit la courbe Γ et que u soit l'arc de Γ compté à partir d'un point fixe de Γ; la tangente MT à Γ en M, la normale principale MT_1, la binormale MB, ont, par rapport à un système d'axes fixes les cosinus directeurs respectifs $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, (β, β', β'') et $(\gamma, \gamma', \gamma'')$. Les coordonnées (x, y, z) du point courant M de Γ sont des fonctions $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ de u et sur Σ les coordonnées $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ se réduisent à $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ pour $v = 0$. Nous pouvons donc écrire, pour $v = 0$, le système d'équations T :

$$
(\mathrm{T}) \left\{
\begin{array}{c}
\alpha = \dfrac{\partial x}{\partial u}, \qquad \alpha' = \dfrac{\partial y}{\partial u}, \qquad \alpha'' = \dfrac{\partial z}{\partial u}, \\[2ex]
\dfrac{\beta}{R} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad \dfrac{\beta'}{R} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \qquad \dfrac{\gamma'}{R} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \\[2ex]
c = \beta \cos\theta + \gamma \sin\theta, \qquad c' = \beta' \cos\theta + \gamma' \sin\theta, \qquad c'' = \beta'' \cos\theta + \gamma'' \sin\theta, \\
\mathrm{E}(u, 0) \equiv 1, \\[1ex]
\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial x}{\partial v}\right)_{v=0} = \beta \sin\theta - \gamma \cos\theta, \qquad \left(\dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial y}{\partial v}\right)_{v=0} = \beta' \sin\theta - \gamma' \cos\theta, \\[2ex]
\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial z}{\partial v}\right)_{v=0} = \beta'' \sin\theta - \gamma'' \cos\theta.
\end{array}
\right.
$$

Or il s'agit d'intégrer l'équation (1),

$$(1) \qquad z_{11} z_{22} - z_{12}^2 = \mathrm{K}(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)(1 - \Delta_1 z);$$

où l'inconnue est $z(u, v)$; cette équation est linéaire en $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ et $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right)^2$; si nous regardons u, v, z comme les coordonnées d'un point en axes rectilignes, nous avons à déterminer la surface auxiliaire $z = z(u, v)$ signalée au paragraphe précédent; elle doit passer par la courbe connue d'équations

$$(2) \qquad v = 0, \qquad z = z(u)$$

et être tangente en chaque point $[u, o, z(u)]$ de cette courbe au plan de coefficients directeurs $(p, q, -1)$, où p, q désignent $\frac{\partial}{\partial u} z(u, v)$, $\frac{\partial}{\partial v} z(u, v)$, calculés par les relations

$$(3) \quad \begin{cases} p = x'', \qquad q = (\sqrt{G})_{v=0}(\beta'' \sin\theta - \gamma'' \cos\theta), \\ \sin\theta = \dfrac{R(u)}{\rho(u)}, \qquad \cos\theta = \varepsilon\sqrt{1 - \dfrac{R^2}{\rho^2}}; \end{cases}$$

ε étant égal à $+1$ ou -1 suivant que l'angle θ adopté est aigu ou obtus : c'est l'énoncé du problème classique de Cauchy. Ce problème admet une solution et une seule si l'on peut calculer les valeurs de $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ le long de la courbe (2) : or le tableau T donne, pour $v = o$, les valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$. On a de plus

$$(4) \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v}\right)_{v=0} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{v=0}\right] = \frac{d}{du}\{\sqrt{G}_{v=0}(\beta'' \sin\theta - \gamma'' \cos\theta)\}.$$

Enfin l'équation (1) elle-même doit servir à calculer $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)_{v=0}$; le coefficient de $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ est $(z_{11})_{v=0}$; nous allons le calculer en nous rappelant qu'en vertu des formules (3) du paragraphe 2, on a

$$(5) \quad z_{11} = \delta c''$$

et que la formule de Meusnier

$$(6) \quad \frac{\cos\theta}{R} = \frac{\delta\, du^2 + 2\,\delta'\, du\, dv + \delta''\, dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}$$

donne, pour $v = o$,

$$(7) \quad \frac{\cos\theta}{R} = \delta, \qquad (z_{11})_{v=0} = c''\frac{\cos\theta}{R} = \varepsilon c''\sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{1}{\rho^2}}.$$

Le même calcul, fait avec x ou y, eût donné $\frac{c\cos\theta}{R}$ ou $\frac{c'\cos\theta}{R}$; comme c, c', c'' ne peuvent être nuls tous les trois, nous ne restreignons pas la généralité en supposant $c'' \neq o$. *Si donc*

$$\frac{\cos\theta}{R} \quad \text{ou} \quad \varepsilon\sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{1}{\rho^2}}$$

n'est pas nul, on a bien une solution $z(u, v)$ *et une seule.* Il est bon d'ailleurs de calculer explicitement $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)_{v=0}$. On a, d'après le tableau T et les formules de Serret,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} z_{11} &= c''\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}},\\ z_{12} &= \frac{d}{du}\left[\sqrt{\mathrm{G}}(\beta''\sin\theta-\gamma''\cos\theta)_{v=0}\right]-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)_{v=0}\alpha''-\left(\frac{1}{2\mathrm{G}}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)_{v=0}\frac{\partial z}{\partial v}\\ &= (\sqrt{\mathrm{G}})_{v=0}c''\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{\mathrm{T}}\right),\\ z_{22} &= \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\alpha''-\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}(\beta''\sin\theta-\gamma''\cos\theta). \end{aligned}\right.$$

L'équation (1) devient donc, le long de $\Gamma(v=0,\ \mathrm{E}=1,\ \mathrm{F}=0)$,

$$(9)\quad \begin{aligned} &\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\alpha''-\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}(\beta''\sin\theta-\gamma''\cos\theta)\right]\\ &\quad= \mathrm{G}c''\left[\mathrm{K}+\left(\frac{1}{\mathrm{T}}-\frac{d\theta}{ds}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Cette forme permet maintenant d'analyser ce qui se passe si $\mathrm{R}(u)\equiv\rho(u)$, d'où $\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}}=0$; la proposition B du début de ce paragraphe se trouvera élucidée par là même. Si la torsion $\frac{1}{\mathrm{T}}$ de la courbe Γ n'est pas égale à $\pm\sqrt{-\mathrm{K}}$, l'équation (9) donne pour $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ une valeur infinie; il ne faut pas en conclure que le problème soit impossible, mais simplement que, *si la surface déformée Σ existe*, Γ est sur elle une ligne singulière : nous verrons en effet, au deuxième mémoire, que Γ est une arête de rebroussement, *asymptotique singulière* de Σ et que S n'est recouverte par Σ que sur la région de convexité géodésique de C si $\frac{1}{\mathrm{T}^2}+\mathrm{K}$ est positif le long de Γ, sur la région de concavité géodésique de C si $\frac{1}{\mathrm{T}^2}+\mathrm{K}$ est négatif. Si au contraire $\frac{1}{\mathrm{T}}$ est égal à $\pm\sqrt{-\mathrm{K}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ n'est plus déterminée, et la déformation dépend d'une fonction arbitraire d'une variable comme nous le montrerons directement; cela tient à ce que Γ, jointe à l'ensemble de ses plans osculateurs, donne cette fois une caractéristique de l'équation Monge-Ampère étudiée : on sait en effet que les caractéristiques d'une équation du second ordre $\Phi(u,\ v,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0$ sont données par la relation

$$(10) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial r} dv^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial s} du\, dv + \frac{\partial \Phi}{\partial t} du^2 = 0.$$

Ici, cela donne

$$(11) \qquad z_{22} dv^2 + 2 z_{12} du\, dv + z_{11} du^2 \equiv c''(\delta'' dv^2 + 2\delta' du\, dv + \delta\, du^2) = 0.$$

La courbe Γ est une asymptotique *régulière* de toute surface Σ obtenue, et Σ représente une portion de S chevauchant sur la courbe C.

Si l'on prend l'équation des asymptotiques sous la forme

$$(12) \qquad z_{11} du^2 + 2 z_{12} du\, dv + z_{22} dv^2 = 0$$

ou encore

$$(13) \qquad (z_{11} du + z_{12} dv)^2 + K(1 - \Delta_1 z) H^2 dv^2 = 0,$$

on voit bien que, pour $R \equiv \rho$, $K + \frac{1}{T^2} \neq 0$, en un point de Γ on a $z_{11} = 0$, la valeur de z_{12} étant finie, de sorte que l'équation se réduit à $dv^2 = 0$ et l'asymptotique Γ est *singulière;* dans le cas $R \equiv \rho$, $K + \frac{1}{T^2} \equiv 0$, z_{11} est nulle pour chaque point de Γ, z_{12} est finie non nulle, de sorte que l'équation (12) donne

$$(14) \qquad (2 z_{12} du + z_{22} dv)\, dv = 0$$

avec z_{22} finie : on a deux directions asymptotiques *distinctes.*

6. Déformation autour d'une asymptotique. Asymptotiques virtuelles. — Il est naturel de déterminer non seulement les asymptotiques *actuelles*, mais encore les asymptotiques *virtuelles*, c'est-à-dire les courbes susceptibles de devenir asymptotiques au cours de la déformation. Darboux a indiqué le moyen de former leur équation. Si l'on suppose que les lignes (u, v) sont asymptotiques *actuelles*, on a $\delta = \delta'' = 0$, $K = \frac{1}{RR'} = \frac{-\delta'^2}{EG - F^2}$ de sorte que les équations de Gauss-Codazzi donnent

$$(1) \qquad \frac{\partial \log K}{\partial u} + 4 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0, \qquad \frac{\partial \log K}{\partial v} + 4 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

Réciproquement, si ces équations (1) sont vérifiées, on voit que

$$\delta = \delta'' = 0, \qquad \delta' = \pm\sqrt{-K(EG - F^2)}$$

est une solution des équations de Gauss-Codazzi et que sur la surface correspondante les lignes (u, v) sont asymptotiques *actuelles*.

Si maintenant nous supposons la surface S rapportée à un réseau curviligne (u, v) *quelconque*, puis à ses asymptotiques (α, β) avec

$$(2) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = E_1\,d\alpha^2 + 2F_1\,d\alpha\,d\beta + G_1\,d\beta^2,$$

on aura, d'après la théorie générale,

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} \\ &\quad = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1\frac{\partial u}{\partial\beta}, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} \\ &\quad = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1\frac{\partial\beta}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, qui ne supposent encore rien sur α et β, les symboles de Christoffel avec indice se rapportent à la forme

$$E_1\,d\alpha + 2F_1\,d\alpha\,d\beta + G_1\,d\beta^2,$$

les formules (1) appliquées aux *asymptotiques* (appelées cette fois α et β) deviennent

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1 &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\log K}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial\log K}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right), \\ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\log K}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial\log K}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\beta}\right). \end{aligned}\right.$$

Substituant dans (3), on aura

$$(5) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\frac{\partial\log K}{\partial u}\right]\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} \\ &\qquad + \left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \frac{1}{4}\frac{\partial\log K}{\partial v}\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \frac{1}{4}\frac{\partial\log K}{\partial u}\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) \\ &\qquad + \left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\frac{\partial\log K}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0. \end{aligned}\right.$$

Ce sont les équations de Darboux; elles appartiennent au type hyperbolique, avec caractéristiques réelles et distinctes, pour tout champ où la courbure totale reste négative. Elles nous permettent de démontrer deux résultats importants. Voici le premier :

A. *Étant donné une surface* S *à courbures opposées et deux courbes* C *et* Γ *se croisant sur la surface en* O *sans y être tangentes, il existe deux déformées et deux seulement,* S_1 *et* S'_1, *symétriques l'une de l'autre, telles que* C *et* Γ *soient devenues asymptotiques de* S_1 *et* S'_1.

Au second fascicule, nous verrons l'application importante de ce résultat aux surfaces à courbure totale négative : deux surfaces de cette espèce sont en effet *applicables* dès qu'elles sont *isométriques*. Voici maintenant la seconde proposition :

B. *On peut déformer la surface* S *autour d'une ligne asymptotique maintenue rigide et les configurations obtenues dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable.*

Soient la surface S et une asymptotique *actuelle* C; choisissons un point O de C et, à partir de O, traçons sur S une courbe Γ *arbitraire*, non tangente à C en O; pour chaque tracé de Γ il existe *une* déformée et une seule S_1 de S pour laquelle C et Γ deviennent des asymptotiques C_1 et Γ_1 de S_1, C_1 *ayant sa torsion de même signe que* C. Or C et C_1 doivent être *égales*, car en chaque point de C_1 la courbure de C_1 est égale à la courbure géodésique de C, donc à la courbure de C et la torsion est égale à $\varepsilon\sqrt{-K}$, ε ayant le même signe que pour C; C et C_1 sont donc *égales*. Il faut bien noter que cette propriété de déformation continue ne s'étend pas aux asymptotiques *singulières* déjà signalées (ligne d'arrêt ou arête de rebroussement). Ainsi une surface développable est complètement définie par l'arête de rebroussement enveloppe des génératrices.

La conclusion précise qui se dégage de ce paragraphe et du précédent est la suivante :

Si S est une surface connue et C une courbe de S, la donnée d'une courbe Γ correspondant à C après déformation éventuelle (on donne sur C et Γ deux points homologues, les sens correspondants de circulation) détermine *deux* surfaces S_1 et S'_1, *réelles* si le rayon R de courbure de Γ est inférieur au rayon de courbure géodésique ρ de C ou (Γ). La construction indiquée pour l'angle θ fixe la développable circonscrite à S_1 le long de Γ, et de même celle circonscrite à S'_1.

Dans le cas particulier où C est géodésique sur S (et par suite sur S_1 et S'_1), la courbe Γ peut être choisie *arbitrairement*, les surfaces S_1 et S'_1 sont *réelles*, car $\rho = \infty$ (écartons le cas où Γ serait rectiligne). La valeur de θ est alors o ou π, de sorte que les deux surfaces S_1 et S'_1 se raccordent le long de Γ, mais elles sont *distinctes;* on le reconnaît aisément en supposant d'abord Γ plane, auquel cas S_1 étant donnée, la symétrique de S_1 relativement au plan de Γ donne S'_1; il suffit ensuite de déformer Γ d'une façon continue pour voir que S_1 et S'_1 restent distinctes. S_1 et S'_1 ne peuvent se confondre que si la géodésique C partage S en deux régions isométriques, C étant invariante dans l'isométrie. La présence d'une telle géodésique doit être considérée comme une circonstance *exceptionnelle.*

Dans ces deux cas que nous venons d'indiquer (C non géodésique ou géodésique), S_1 et S'_1 sont *isométriques*, non nécessairement *applicables.*

Si maintenant $R = \rho$, mais $T \neq \pm\sqrt{\frac{-1}{K}}$, Γ est asymptotique singulière, arête de rebroussement; en réalité les deux nappes de S_1, que je peux appeler S_1 et S'_1 sont les équivalents des deux surfaces S_1 et S'_1 rencontrées dans l'hypothèse précédente ($R < \rho$) : S_1 et S'_1 continuent à être isométriques entre elles et donnent l'homologue d'une seule région limitée sur S par C, et cela d'après le signe de $T^2 + \frac{1}{K}$. Si donc C était géodésique sur S et Γ *rectiligne*, on pourrait se donner *arbitrairement* la disposition des plans tangents à Σ le long de Γ, ce qui revient à se donner T, et si $T^2 + \frac{1}{K} \neq 0$, on a encore une arête de rebroussement.

Enfin si $R = \rho$, $T^2 + \frac{1}{K} = 0$, on a le cas d'une déformation continue possible autour de Γ restant invariante (si C est géodésique, il y a donc possibilité de la transformer en droite, avec une distribution convenable des plans tangents).

Donc, quand on considère le cas général, $R \neq \rho$, un arc de Γ où $R < \rho$ donne une surface S_1 représentant une région de S à cheval sur C et les extrémités d'un arc de Γ où R devient égal à ρ indiquent que l'on rencontre une arête de rebroussement de S_1 : ce sera précisément le but de mon deuxième mémoire de montrer la nécessité pour certaines surfaces, les surfaces convexes fermées, de ne pouvoir être déformées qu'en *partie*.

7. Étude de l'équation de Monge-Ampère. — Si la Géométrie a permis de former l'équation de Monge-Ampère de la déformation, l'étude de cette équation et de la détermination des cas, très restreints, où elle peut être intégrée par la méthode de Darboux, relève uniquement de la Théorie des équations aux dérivées partielles. On connaît le beau Traité de M. Goursat [8] sur ces sujets et les recherches de MM. Gau [4] et Gosse [7]; M. Gau a étudié spécialement l'équation de Monge-Ampère de la déformation, dans un Mémoire couronné (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 42, 1925, p. 89-141), mais ses résultats, malgré leur importance, avaient besoin d'être mis au point et complétés; M. Gosse a pu achever la discussion et a bien voulu rédiger lui-même l'exposé qui suit, du moins pour sa partie analytique, que j'ai complétée par les explications géométriques.

Au point de vue théorique, il est indifférent d'adopter tel système de coordonnées curvilignes plutôt que tel autre. Il est donc commode de rapporter la surface à une famille de géodésiques $Y = \text{const.}$ et à leurs trajectoires orthogonales $X = \text{const.}$; la détermination des surfaces d'élément linéaire

$$(1) \qquad ds^2 = dX^2 + \Gamma^2(X, Y)\, dY^2$$

dépend de l'intégration de l'équation

$$(E) \quad RT - S^2 + R\left(P\Gamma\frac{\partial\Gamma}{\partial X} - \frac{Q}{\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial Y}\right) + \frac{2SQ}{\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial X} + \Gamma\frac{\partial^2\Gamma}{\partial X^2}(1 - P^2) - Q^2\left[\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial X^2} + \frac{1}{\Gamma^2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial X}\right)^2\right] = 0,$$

où Z désigne l'une des coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, et P, Q, R, S, T les dérivées $\frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}, \ldots$; le lecteur se rappellera que X et Y ne sont pas des coordonnées rectangulaires, mais des paramètres curvilignes. La transformation d'Ampère

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} X = q, & Y = x, & Z = z - qy, & P = -y, & Q = p, \\ R = \frac{-1}{t}, & S = \frac{s}{t}, & T = \frac{rt - s^2}{t}, & RT - S^2 = -\frac{r}{t} & \end{array} \right.$$

donne à (E) la forme linéaire

$$(\mathrm{E}') \qquad r + (m_1 + m_2)s + m_1 m_2 t + \lambda(x, y, p, q) = 0;$$

$$(3) \qquad \begin{cases} m_1 + m_2 = \dfrac{-2p}{\Gamma(q, x)} \dfrac{\partial \Gamma}{\partial q}, \\ m_1 m_2 = \Gamma \dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial q^2}\left(y^2 - 1 + \dfrac{p^2}{\Gamma^2}\right) + \dfrac{p^2}{\Gamma^2}\left(\dfrac{\partial \Gamma}{\partial q}\right)^2, \\ \lambda = -\dfrac{p}{\Gamma}\dfrac{\partial \Gamma}{\partial x} - y\Gamma \dfrac{\partial \Gamma}{\partial q}. \end{cases}$$

Ces équations (E) *ou* (E′) *ne peuvent admettre de solutions explicites dépendant d'au moins une fonction arbitraire que si elles admettent au moins une involution.*

M. Gosse montre que (E′) n'admet d'involution que *s'il existe un changement de variables* T

$$(\mathrm{T}) \qquad \mathrm{X} = f(u, v) \qquad \mathrm{Y} = g(u, v)$$

qui ramène l'élément linéaire donné à l'une des deux formes

$$(\mathrm{I}) \qquad ds^2 = du^2 + 2[u + c(v)]\, dv^2,$$

$$(\mathrm{II}) \qquad ds^2 = du^2 + [u^2 a(v) + 2u b(v) + c(v)] dv^2.$$

qui conviennent aux surfaces réglées.

Conclusion. — *Le problème de la déformation ne peut admettre de solution explicite, dépendant d'au moins une fonction arbitraire, que pour les surfaces applicables sur une surface réglée* [1].

Pour la forme (I), l'équation (E) admet, *quelle que soit la fonction* $c(v)$, les involutions

$$(4) \qquad \mathrm{P} = \pm 1, \qquad \mathrm{R} = 0.$$

L'équation (E′) admet alors, outre l'intégrale intermédiaire

$$(5) \qquad \rho^2 \equiv p^2 + 2(q + c)(y^2 - 1) = 0,$$

les involutions $y = \pm 1$; elle prend la forme

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p}{\rho(y^2 - 1)}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

---

[1] C'est M. Gau qui a signalé le premier ce résultat important; mais en continuant l'application de sa méthode, M. Gau n'a retrouvé que le premier des cinq cas d'intégrabilité complète que je signale d'après M. Gosse; ces cinq cas sont donnés explicitement aux tomes 3 et 4 de Darboux; M. Gosse a montré que ce sont les seuls.

et l'ensemble de ces résultats amène naturellement à la transformation de Bäcklund

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = z', \qquad y = \dfrac{y' + x'}{y' - x'}, \qquad p = px' - qy', \\ (p'x' + q'y')^2 = p^2 + 2(q + c)(y^2 - 1) \end{array}\right.$$

qui donne l'équation de Weingarten

$$(\mathrm{E}'')\qquad \frac{\partial^2 z'}{\partial x' \partial y'} = \frac{1}{(x' - y')^2} \frac{d}{dz'}[c(z')],$$

(E), (E′), (E″) *sont susceptibles d'une solution explicite dépendant de deux fonctions arbitraires dans les seuls cas suivants :*

1° $$c = \text{const.};$$

(E) admet un invariant d'ordre 1 et 2 pour chaque système de caractéristiques; elle s'intègre donc complètement; en remplaçant u par $u =$ const. on peut supposer $c = 0$ et l'élément linéaire obtenu $du^2 + 2u\, dv^2$ définit l'une ou l'autre nappe de la développée de la surface minima générale; on obtient donc, par les formules classiques de Weierstrass, les surfaces représentatives du ds^2 en jeu, et cela par des formules dégagées de tout signe de quadrature, contenant deux fonctions arbitraires d'une variable

2° $$c = \frac{2v}{\mathrm{K}} + 2\mathrm{K}_1 e^{\mathrm{K}v},$$

où K et K_1 sont des constantes quelconques; (E) admet un invariant d'ordre 2 et 3 pour chaque système de caractéristiques, elle s'intègre complètement.

Pour $\mathrm{K}_1 = 0$, on a les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution $x^2 + y^2 = 2pz$ ou $x^2 + y^2 = 2piz$, où p est une constante réelle; ces deux paraboloïdes conduisent tous deux à des surfaces réelles. Pour obtenir les formules explicites qui définissent la surface S applicable sur un tel paraboloïde, traçons sur la sphère unité une courbe B arbitraire (c, c', c''), puis une autre courbe B_1 arbitraire (c_1, c'_1, c''_1) de sorte que c, c', c'' d'une part, c_1, c'_1, c''_1 de l'autre sont des fonctions respectives des paramètres α et β liées par les relations

$$(8)\qquad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \qquad c_1^2 + c_1'^2 + c_1''^2 = 1.$$

La surface S est définie par les quadratures ($\varepsilon = \pm 1$) :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{i\tau}{2}\int c''\,dc' - c'\,dc'' - \frac{i\tau}{2}\int c''_1\,dc'_1 - c'_1\,dc''_1 + \frac{\varepsilon\tau i}{2}(c'\,c''_1 - c''c'_1),\\ y &= \frac{i\tau}{2}\int c\,dc'' - c''\,dc - \frac{i\tau}{2}\int c_1\,dc''_1 - c''_1\,dc_1 + \frac{\varepsilon\tau i}{2}(c''c_1 - cc''_1),\\ z &= \frac{i\tau}{2}\int c'\,dc - c\,dc' - \frac{i\tau}{2}\int c'_1\,dc_1 - c_1\,dc'_1 + \frac{\varepsilon\tau i}{2}(cc'_1 - c'c_1). \end{aligned}\right.$$

Elle est applicable sur le paraboloïde de paramètre 2τ; si τ est réel, on doit prendre les courbes B et B_1 imaginaires conjuguées; si τ est imaginaire pure, les courbes B et B_1 sont quelconques vis-à-vis l'une de l'autre et réelles; il est impossible, comme l'a montré M. Cartan, de faire disparaître les signes de quadrature. Pour τ réel, la surface $\varepsilon = +1$ est applicable sur le paraboloïde P : $x^2 + y^2 = 4\tau z$ de sorte qu'à un point réel de S corresponde un point réel de P; mais pour $\varepsilon = -1$, à un point réel de S correspond un point imaginaire de P $\left(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ \frac{r^2}{4\tau}\text{ où } r \text{ et } \theta \text{ sont imaginaires pures}\right)$ et réciproquement à un point de P réel correspond un point imaginaire de S; en passant, remarquons que cela nous donne un bel exemple des solutions signalées aux numéros précédents, pour lesquelles $\Delta z > 1$; cet exemple est fourni par la nappe imaginaire de P correspondant à la nappe réelle de S($\varepsilon = -1$). Le cas de τ imaginaire pure n'exige que l'introduction des fonctions de variable réelle, tandis que celui de τ réel exige l'introduction des fonctions de variable complexe : aussi les surfaces correspondantes offrent des caractères bien différents. On peut, pour τ imaginaire pure, prendre pour c, c', c'' des fonctions réelles ayant une dérivée première continue, mais dépourvues de dérivée seconde : on réalise ainsi des surfaces réelles, ayant un plan tangent en chaque point, mais pour lesquels les éléments du second ordre cessent de pouvoir être définis ou du moins ne possèdent qu'une partie des propriétés auxquelles nous sommes habitués; ici, il y aurait en chaque point, tangentiellement à chaque direction principale, une infinité de lignes de courbure, formant ce que M. Montel [14] appelle un *estuaire*.

La forme $\frac{2v}{K} + 2K_1 e^{kv}$, où K_1 n'est pas nul, peut être réduite à la forme plus simple

$$(10)\qquad -v\sqrt{k} - 2ke^{-\frac{2v}{\sqrt{k}}}$$

et donne toutes les surfaces applicables sur le paraboloïde

$$(y + iz)y = -kx \tag{11}$$

qui touche le plan de l'infini en un point non situé sur le cercle de l'infini et admet un plan directeur isotrope. Weingarten a montré que le ds^2 peut être réduit à la forme élégante (du type de Liouville, comme pour toute quadrique)

$$ds^2 = (\alpha - \beta)\left[\frac{\alpha - 2}{\alpha^2}\,d\alpha^2 - \frac{\beta - 2}{\beta^2}\,d\beta^2\right], \tag{12}$$

3°
$$c = \frac{n(1 - n)}{2} v^2,$$

où n est un entier; le remplacement de n par son complément relatif à 1 est sans effet; $n = 0$ ou 1 redonne le premier cas; on supposera donc n positif. (E) admet un invariant d'ordre n et un autre d'ordre $n + 1$; pour $n = 2$, on a les surfaces applicables sur le paraboloïde à plan directeur isotrope et à axe isotrope

$$x(y + iz) = k(y - iz) \tag{13}$$

dont le ds^2 peut être ramené à la forme

$$ds^2 = k^2(u - v)(u\,du^2 - v\,dv^2). \tag{14}$$

Pour $n > 2$, on obtient des surfaces applicables sur la surface imaginaire de degré 3 à plan directeur isotrope

$$y - iz = 2x(y + iz) + \frac{2 + n - n^2}{3}(y + iz)^3. \tag{15}$$

Cette formule (15) est valable d'ailleurs même pour $n = 1$ et $n = 2$. Les formes remarquables trouvées ici aux cas 1°, 2°, 3° vont être retrouvées au numéro suivant, à propos de la méthode de Weingarten.

4° Si $c = kv^2$, où k n'est pas de la forme $\frac{n(1 - n)}{2}$ avec n entier, la solution de (E″) peut être représentée par une intégrale *définie* dépendant de deux fonctions arbitraires.

Dans tous les autres cas relatifs à la forme (I), *il n'y a jamais d'autre involution que*

$$P = \varepsilon \qquad R = 0, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

La première donne les surfaces réglées à plan directeur isotrope signalées par Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 333 : la fonction V de v étant choisie arbitrairement, les coordonnées paramétriques de ces surfaces sont

$$(16)\qquad \begin{cases} x = u - \displaystyle\int \frac{V}{V'}\,dv, \qquad y + iz = 2\int \frac{dv}{V'}, \\ y - iz = Vu + \displaystyle\int cV'\,dv - \int \frac{V^2}{2V'}\,dv. \end{cases}$$

L'hypothèse $V = v$ donne justement l'échantillon (15). La seconde involution $R = 0$, bien qu'analytiquement distincte de la précédente, redonne les mêmes surfaces, car elle conduit à prendre la coordonnée y, par exemple, égale à

$$(17)\qquad y = \frac{uV}{2} + \int \frac{4 - V^2 + 2c}{4V'}\,V'^2\,dv,$$

où V est une fonction arbitraire de v; il faudrait ensuite calculer x et z par l'identité

$$(18)\qquad du^2 + 2(u + c)\,dv^2 - dy^2 \equiv dx^2 + dz^2,$$

mais il est parfaitement inutile de faire le calcul si l'on voit que les formules (16) donnent précisément pour y la forme (17); on retrouve les fonctions x, z définies par (16) [1].

Pour la forme (II) *l'équation* (E) *admet pour chaque système l'involution* $R = 0$ *qui fournit les surfaces réglées que fournit la méthode de Darboux pour les surfaces réglées générales.*

En tout cas, pour la forme (II), *que l'élément convienne ou non à une quadrique, l'intégration explicite de* (E) *est impossible; les seuls cas où l'on puisse obtenir l'intégration explicite sont donc fournis par la forme* (I), *pour les formes très particulières indiquées pour* $c(v)$ et il est très remarquable que ces cas eussent

[1] Les surfaces réglées à génératrices isotropes conduisent à l'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{U^2\,du\,dv}{(u - v)^2},$$

où U est fonction de u seul; les surfaces réglées correspondant à cet élément s'obtiennent en suivant la marche indiquée par Darboux; toutes ces surfaces sont imaginaires sauf si U est une constante, auquel cas on a la sphère.

été obtenus géométriquement par Weingarten, Darboux, Baroni et M. Goursat.

8. **Méthode du trièdre mobile.** — Une méthode que le géomètre italien Codazzi a imaginée et que Darboux a appliquée systématiquement consiste à relier l'étude de la surface S au mouvement d'un trièdre mobile; en un point M de S, l'axe des z sera la normale à S et les axes Mx, My sont rectangulaires, situés dans le plan tangent, déterminés par l'angle m compté depuis Mx jusqu'à la tangente à la courbe $v =$ const. Les translations élémentaires de M, les rotations élémentaires du trièdre mobile T relativement à trois axes fixes rectangulaires OXYZ sont appelées $\xi\, du + \xi_1\, dv$, $\eta\, du + dv$, $\zeta\, du + \zeta_1\, dv$ et $p\, du + p_1\, dv$, $q\, du + q_1\, dv$, $r\, du + r_1\, dv$; on a ici $\zeta = \zeta_1 = 0$ et les formules classiques du mouvement à deux paramètres donnent

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - r \eta_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = r \xi_1 - \xi r_1, \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1, & p \eta_1 - \eta p_1 + \xi q_1 - q \xi_1 = 0. \end{array}\right.$$

Appelons ds l'arc élémentaire pour un déplacement sur la surface S, ω l'angle que fait la tangente à cette courbe avec l'axe Mx; on a

$$(2)\qquad ds \cos\omega = \xi\, du + \xi_1\, dv, \qquad ds \sin\omega = \eta\, du + \eta_1\, dv;$$

$$(3)\qquad ds^2 = (\xi\, du + \xi_1\, dv)^2 + (\eta\, du + \eta_1\, dv)^2.$$

Si la surface S *se déforme en entraînant avec elle le trièdre* T, *les translations* ξ, η, ξ_1, η_1 *demeurent invariables et aussi* r *et* r_1. Déformer la surface revient donc à déterminer les inconnues p, q, p_1, q_1 au moyen des données ξ, ξ_1, η, η_1; ces inconnues sont données par les équations (1), dont on défalque les deux équations donnant *explicitement* r et r_1 en fonction de ξ, ξ_1, η, η_1. Quand l'élément linéaire est donné, les relations

$$(4)\qquad \xi^2 + \eta^2 = \mathrm{E}, \qquad \xi\xi_1 + \eta\eta_1 = \mathrm{F}, \qquad \xi_1^2 + \eta_1^2 = \mathrm{G}$$

déterminent ξ, ξ_1, η, η_1 autant que ces fonctions peuvent l'être; on peut choisir *arbitrairement* l'angle m et c'est ce lien, arbitraire, du trièdre T avec la surface S qui donne de la souplesse à la méthode et permettra l'obtention des beaux résultats de Weingarten. On aura alors, en appelant α l'angle des courbes $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$, les expressions explicites de ξ, η, ξ_1, η_1 :

$$(4') \qquad \begin{cases} \xi = \sqrt{E}\cos m, & \eta = \sqrt{E}\sin m \\ \xi_1 = \sqrt{G}\cos n, & \eta_1 = \sqrt{G}\sin n \end{cases} \qquad (n - m = \alpha).$$

Voici quelques résultats utiles pour la suite : par un point fixe O de l'espace, menons le trièdre T_1 parallèle à T; T_1 a mêmes rotations que (T); le point m à la distance 1 sur l'axe Oz de ce trièdre T_1 donne la représentation sphérique de Gauss; $d\sigma$ étant l'arc élémentaire décrit par m, θ l'angle compté depuis Mx jusqu'à la tangente à cet arc, on a

$$(5) \qquad \begin{cases} d\sigma \cos\theta = q\,du + q_1\,dv, \qquad d\sigma \sin\theta = -(p\,du + p_1\,dv), \\ d\sigma^2 = (p\,du + p_1\,dv)^2 + (q\,du + q_1\,dv)^2. \end{cases}$$

L'équation aux rayons de courbure principaux est

$$(6) \qquad (pq_1 - qp_1)\rho^2 + (q\eta_1 - q_1\eta - \xi p_1 + \xi_1 p)\rho + \xi\eta_1 - \eta\xi_1 = 0,$$

et, en tenant compte d'une des équations (1), on retrouve l'expression de la courbure totale K de S, en fonction uniquement de l'élément linéaire

$$(7) \qquad K = \frac{1}{\rho'\rho''} = \frac{\dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u}}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1}.$$

Or la méthode classique du mouvement à deux paramètres conduit : 1° au calcul de p, q, p_1, q_1 par les 4 équations déjà citées : 2° à une équation de Riccati pour calculer les cosinus (a, b, c) de OX par rapport à $Mxyz$, puis ceux (a', b', c') de OY et (a'', b'', c'') de OZ. Cette méthode ainsi conduite est, au fond, équivalente au calcul de δ, δ', δ'' proposé au paragraphe 2 : en effet, différentions,

$$(8) \qquad \begin{cases} \xi a + \eta b = \dfrac{\partial x}{\partial u}, & \xi a' + \eta b' = \dfrac{\partial y}{\partial u}, & \xi a'' + \eta b'' = \dfrac{\partial z}{\partial u}, \\ \xi_1 a + \eta_1 b = \dfrac{\partial x}{\partial v}, & \xi_1 a' + \eta_1 b' = \dfrac{\partial y}{\partial v}, & \xi_1 a'' + \eta_1 b'' = \dfrac{\partial z}{\partial v}, \end{cases}$$

on obtient

$$(9)\quad \begin{cases} S\,c\,d\dfrac{\partial x}{\partial u} = \delta\,du + \delta'\,dv = \xi S\,c\,da + \eta S\,c\,db \\ \qquad = -\xi(q\,du + q_1\,dv) + \eta(p\,du + p_1\,dv), \\ S\,c\,d\dfrac{\partial x}{\partial v} = \delta'\,du + \delta''\,dv = \xi_1 S\,c\,da + \eta_1 S\,c\,db \\ \qquad = -\xi_1(q\,du + q_1\,dv) + \eta_1(p\,du + p_1\,dv), \end{cases}$$

puis

$$(10)\quad p\eta - q\xi = \delta, \qquad p_1\eta - q_1\xi = p\eta_1 - q\xi_1 = \delta', \qquad p_1\eta_1 - q_1\xi_1 = \delta'',$$

ce qui prouve bien que la connaissance de p, p_1, q, q_1 entraîne celle de δ, δ', δ'', et *réciproquement*.

Or Weingarten a montré qu'il est préférable de calculer (a, a', a'') et non (a, b, c) : le calcul de p, q, p_1, q_1, a, a', a'' se fera d'un seul coup et sera réduit à l'intégration d'une équation de Monge-Ampère; trois quadratures donnent ensuite, comme plus haut, les coordonnées de M, mais l'équation de Riccati a disparu. Je vais exposer cette méthode ainsi envisagée comme une simple modification de la méthode du trièdre mobile.

Il importe de donner quelques mots d'historique :

Weingarten a, dans deux Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (Paris, t. 112, 1891, p. 607 et 706), donné, sans explication aucune, un premier résultat que M. Goursat a pu, aussitôt, expliquer aux *Annales de Toulouse*, t. 5, 1891, et Darboux a reproduit l'essentiel de cet exposé de M. Goursat au Chapitre XIII de la *Théorie des Surfaces*. Puis Weingarten, dans un Mémoire couronné par l'Académie de Paris en 1894, a exposé la méthode que je vais analyser, toujours sans explication, et de telle sorte que l'on peut se demander si la méthode « *singulière* » de 1891 (c'est le qualificatif donné par Darboux) est distincte de celle de 1894 ou non (en réalité le résultat de 1891 est une conséquence de celui exposé postérieurement en 1894); ce Mémoire a été imprimé aux Mémoires des Savants étrangers, et en 1896 les *Acta mathematica* [19] le reproduisent avec un complément assez bref faisant entrevoir le lien des résultats de 1891 avec ceux de 1894. Darboux, au Chapitre XIV de la *Théorie des Surfaces*, t. 4, donne une explication géométrique du Mémoire couronné; je n'ai eu qu'à compléter par quelques remarques l'exposé de Darboux pour mettre en évidence la suite naturelle et en quelque sorte obligatoire qui fait reconstituer au chercheur les stades de la méthode de Weingarten. Un dernier progrès restait à faire : montrer quel lien relie l'équation de Monge-Ampère donnée plus haut et celle, également du type de Monge-Ampère, trouvée par Weingarten et c'est encore à M. Goursat que nous devons l'explication définitive; dans une Note des *Comptes rendus*, 1925, puis au *Bulletin de la Société mathématique de*

France 1927, [9], M. Goursat donne la transformation de Bäcklund qui fait passer de l'une des équations à l'autre. J'ai tenu à faire la synthèse de ces résultats de Weingarten, Darboux et M. Goursat ; le renversement de l'ordre historique s'impose ; d'autre part je m'efforce de convaincre le lecteur qu'ici, comme dans toute question mise soigneusement au point, il ne reste plus trace de *mystère* ni *d'artifice*.

9. Méthode de Weingarten. — Les cosinus (a, a', a'') ne font intervenir qu'une tangente liée *intrinsèquement* à la surface ; le point (a, a', a'') décrit une sphère Σ et donne une *représentation sphérique nouvelle de* S ; la sphère Σ est une surface *connue*, que nous savons rapporter de bien des façons à un système curviligne (u', v'), dont le choix reste *arbitraire* pourvu toutefois que (a, a', a'') soient exprimés *explicitement* en (u', v') ; ce sera, par exemple,

$$(1) \qquad a = \frac{u' + v'}{1 + u'v'}, \qquad a' = i\,\frac{v' - u'}{1 + u'v'}, \qquad a'' = \frac{u'v' - 1}{1 + u'v'}$$

ou tout autre système. Le calcul de (a, a', a'') en fonction de (u, v) revient donc à calculer (u', v') en (u, v) ou, ce qui est équivalent, (u, v) en fonction de (u', v'). Nous avons à calculer p, q, p_1, q_1, u, v en fonction de u', v' ; cela nous fait *deux* inconnues supplémentaires, mais l'équation de Riccati disparaît, grâce aux formules *explicites* telles que (1). Soit donc l'élément linéaire *connu*

$$(2) \qquad ds^2 = e\,du'^2 + 2f\,du'\,dv' + g\,dv'^2$$

de la sphère Σ dans le système u', v' ; j'écris

$$(3) \qquad da^2 + da'^2 + da''^2 = e\,du'^2 + 2f\,du'\,dv' + g\,dv'^2,$$

ce qui donne *trois* équations entre u', v' et p, q, p_1, q_1, u, v : *une* des quatre équations primitivement obtenues entre p, q, p_1, q_1, u, v doit donc disparaître comme conséquence des trois autres et des trois équations découlant de (3). Or écrivons les équations classiques de cinématique

$$(4) \qquad \begin{cases} da = b(r\,du + r_1\,dv) - c(q\,du + q_1\,dv), \\ da' = b'(r\,du + r_1\,dv) - c'(q\,du + q_1\,dv), \\ da'' = b''(r\,du + r_1\,dv) - c''(q\,du + q_1\,dv) ; \end{cases}$$

d'où, au lieu de (3),

$$(5) \qquad e\,du'^2 + 2f\,du'\,dv' + g\,dv'^2 - \left[\left(r\frac{\partial u}{\partial u'} + r_1\frac{\partial v}{\partial u'}\right)du' + \left(r\frac{\partial u}{\partial v'} + r_1\frac{\partial v}{\partial v'}\right)dv'\right]^2 = (q\,du + q_1\,dv)^2,$$

$\Delta\theta$ *étant le paramètre différentiel du premier ordre relatif à l'élément linéaire de la sphère* Σ, écrire que le premier membre de (5) est carré parfait donne

$$(6) \qquad r^2 \Delta u + 2 r r_1 \Delta(u, v) + r_1^2 \Delta v = 1$$

et, cette équation vérifiée, l'extraction de la racine carrée donne

$$(7) \qquad q \frac{\partial u}{\partial u'} + q_1 \frac{\partial v}{\partial u'} = Q, \qquad q \frac{\partial u}{\partial v'} + q_1 \frac{\partial v}{\partial v'} = Q_1;$$

où Q et Q_1 sont faciles à calculer en fonction *explicite* de e, f, g, r, r_1, $\frac{\partial u}{\partial u'}$, $\frac{\partial v}{\partial u'}$, $\frac{\partial u}{\partial v'}$, $\frac{\partial v}{\partial v'}$; ces *trois* équations (6) et (7) sont les trois équations complémentaires annoncées. Il reste maintenant à indiquer quelle est l'équation que nous pouvons supprimer du système

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, & \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, & p \eta_1 - \eta p_1 + \xi q_1 - q \xi_1 = 0. \end{cases}$$

Le point (a, a', a'') décrit la sphère Σ; le trièdre T_1 d'axes parallèles à ceux de T, qui a son origine en m, a des translations élémentaires ξ', ξ'_1, η', η'_1, ζ', ζ'_1 égales, d'après les formules (4), respectivement à 0, 0, r, r_1, $-q$, $-q_1$ et des rotations égales à celles de T; ce trièdre joue, vis-à-vis de Σ, le même rôle que T vis-à-vis de S, sauf qu'il faut permuter circulairement le nom des arêtes, car la normale à S s'appelle Mz et celle de Σ, mx_1; appliquons donc la formule (7) du numéro précédent à la courbure totale de Σ qui est égale à 1; on voit que l'on a *automatiquement*

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = \eta' \zeta'_1 - \zeta' \eta'_1 = - r q_1 + q r_1.$$

On supprimera donc la première équation (8); on conserve les trois autres et on leur adjoint (6) et (7). L'élimination de p et p_1 peut d'ailleurs se faire entre les trois équations (8) restantes; on a

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} & r_1 & -r \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} & -q_1 & q \\ \xi q_1 - q \xi_1 & \eta_1 & -\eta \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations (7) donnent, d'ailleurs explicitement, q et q_1; on remarquera que leur différentiation donne

$$\frac{\partial Q}{\partial v'} - \frac{\partial Q_1}{\partial u'} = \left(\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v}{\partial u'}\right), \tag{10}$$

et que l'équation (9) devient une équation ne contenant plus que u, v et leurs dérivées des deux premiers ordres en u' et v' (on se rappelle que l'élément donné de S a permis de calculer r et r_1 explicitement en u et v); toute la difficulté est donc d'intégrer le système des deux équations (6) et (9) aux deux inconnues u, v et c'est là qu'intervient l'interprétation *géométrique* de nos opérations *analytiques* dans le but de donner à (6) une forme propice à la résolution en v, par exemple. En tout cas, une fois u, v calculés, rappelons que a, a', a'' seront connus *explicitement* en u' et v' (ou en u et v); les formules (4) où nous remplaçons c, c', c'' par $a'b''-b'a''$, $a''b-b''a$, $ab'-ba'$ deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial u} &= br - q(a'b''-b'a''), & \frac{\partial a}{\partial v} &= br_1 - q_1(a'b''-b'a''),\\
\frac{\partial a'}{\partial u} &= b'r - q(a''b-b''a), & \frac{\partial a'}{\partial v} &= b'r_1 - q_1(a''b-b''a),\\
\frac{\partial a''}{\partial u} &= b''r - q(ab'-ba'), & \frac{\partial a''}{\partial v} &= b''r_1 - q_1(ab'-ba').
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Ces deux systèmes, où l'on regarde b, b', b'' comme les inconnues, sont linéaires, évidemment compatibles, de déterminant respectif

$$r(r^2+q^2) \quad \text{et} \quad r_1(r_1^2+q_1^2);$$

l'un d'eux, puisque r et r_1 ne peuvent être nuls ensemble, donne b, b', b''; on a ensuite les coordonnées (X, Y, Z) de M dans le système OXYZ par les formules

$$\left\{\begin{aligned}
X &= \int a\,(\xi\,du + \xi_1\,dv) + b\,(\eta\,du + \eta_1\,dv),\\
Y &= \int a'(\xi\,du + \xi_1\,dv) + b'(\eta\,du + \eta_1\,dv),\\
Z &= \int a''(\xi\,du + \xi_1\,dv) + b''(\eta\,du + \eta_1\,dv).
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

L'équation (6) ne contient que les dérivées premières de u et v; l'équation (9) contient les dérivées secondes. Supposons que l'on ait pris sur la surface S une famille *quelconque* de courbes $u=$ const.; associons-leur une famille de courbes $v=$ const., puis essayons de changer cette dernière famille de façon à simplifier (6); on remplace donc u, v par u, v^0 avec

$$v^0 = \varphi(u, v). \tag{13}$$

On aura donc, avec les nouvelles rotations r^0 et r_1^0,

$$r^0\,du + r_1^0\,dv^0 = r\,du + r_1\,dv, \tag{14}$$

$$r = r^0 + r_1^0 \frac{\partial v^0}{\partial u}, \qquad r_1 = r_1^0 \frac{\partial v^0}{\partial v}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = \left(\frac{\partial r^0}{\partial v^0} - \frac{\partial r_1^0}{\partial u}\right)\frac{\partial v^0}{\partial v} = f(u, v). \tag{16}$$

Puisque r et r_1 sont connus, $f(u, v)$ est une fonction connue de u et v; nous calculerons v^0 par la quadrature

$$v^0 = \int_{v_1}^{v} f(u, v)\,dv + \psi(u), \tag{17}$$

où v_1 est une constante numérique arbitraire et $\psi(u)$ une fonction arbitraire de u; on aura donc

$$\frac{\partial r^0}{\partial v^0} - \frac{\partial r_1^0}{\partial u} = 1. \tag{18}$$

On peut maintenant calculer un angle α par la quadrature de différentielle totale

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} + r^0 = v^0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v^0} + r_1^0 = 0. \tag{19}$$

Or, conservant les courbes u et v^0, substituons au trièdre T du début un autre trièdre obtenu en faisant tourner T de l'angle α autour de Mz : le nouveau trièdre a pour rotations élémentaires

$$r^0 + \frac{\partial \alpha}{\partial u} \quad \text{et} \quad r_1^0 + \frac{\partial \alpha}{\partial v^0},$$

si donc nous supprimons les indices, avec le nouveau trièdre et les nouvelles courbes de coordonnées, on voit que, *par de simples quadratures et en conservant la famille arbitraire de courbes* $u=$ const., on a réalisé les égalités

$$r = v, \qquad r_1 = 0. \tag{20}$$

L'équation (6) prend la forme simple

$$(21)\qquad v^2 = \frac{1}{\Delta u},$$

et il n'y a plus qu'à remplacer v par cette valeur dans (9); ce sera l'équation définitive fournissant u en u' et v' et toutes les autres inconnues se calculent de proche en proche. On doit calculer les invariants de u *relatifs à l'élément linéaire de la sphère* Σ, défini par l'équation

$$(22)\qquad ds'^2 = e\,du'^2 + 2f\,du'\,dv' + g\,dv'^2.$$

Comme on a aussi

$$(23)\qquad ds'^2 = v^2\,du^2 + (q\,du + q_1\,dv)^2,$$

on pourra, grâce aux propriétés d'invariance, calculer ces paramètres avec les variables u et v; en tenant compte des formules

$$(24)\qquad \frac{\partial a}{\partial u} = br - cq = bv - cq, \qquad \frac{\partial a}{\partial v} = br_1 - cq_1 = -cq_1,$$

on trouve que la résolution en b, b', b'' de (11) donne

$$(25)\qquad b = v\,\Delta(a, u), \qquad b' = v\,\Delta(a', u), \qquad b'' = v\,\Delta(a'', u).$$

On a, en opérant sur (23),

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta u = \frac{1}{v^2}, \qquad \Delta\Delta u = \frac{4(v^2+q^2)}{v^8 q_1^2},\\ &\Delta(\Delta u, u) = \frac{2q}{v^5 q_1}, \qquad \Delta_2 u = -\frac{p_1}{vq_1} + \frac{q}{v^3 q_1}, \qquad \Delta_{22} u = \frac{p}{v^4 q_1}.\end{aligned}\right.$$

Ces formules tiennent lieu des résolutions indiquées plus haut.

La dernière équation (8), écrite en y remplaçant $\frac{p}{q_1}$, $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{q}{q_1}$ par les valeurs déduites de (26), est l'équation résolvante de Weingarten

$$(\mathrm{E}')\ (27)\qquad \eta_1\Delta_{22} u + \frac{\eta}{v^3}\Delta_2 u + \frac{\xi}{v^4} - \frac{\eta + \xi_1 v^2}{2v}\Delta(u, \Delta u) = 0,$$

où v est remplacée par $\frac{1}{\sqrt{\Delta u}}$. Si nous employons le système des coordonnées

$$(28)\qquad a = \frac{x+y}{1+xy}, \qquad a' = \frac{i(y-x)}{1+xy}, \qquad a'' = \frac{xy-1}{xy+1},$$

appelons p, q, r, s, t les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, et pour abréger

$$(29) \qquad r_1 = r + \frac{2py}{1+xy}, \qquad t_1 = t + \frac{2qx}{1+xy},$$

on a alors

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta u = (1+xy)^2 pq, \qquad \Delta\Delta u = (1+xy)^6 (qr_1 + ps)(pt_1 + qs), \\ &\Delta_2 u = (1+xy)^2 s, \qquad \Delta(u, \Delta u) = \frac{(1+xy)^4}{2} (2pqs + p^2 t_1 + q^2 r_1), \\ &\qquad\qquad \Delta_{22} u = \frac{(1+xy)^4}{4} (r_1 t_1 - s^2). \end{aligned} \right.$$

Ceci prouve bien que l'équation résolvante est du type de Monge-Ampère.

10. Explications géométriques de la méthode de Weingarten données par Darboux et M. Goursat. — Darboux signale cette propriété : par le point M de S menons une tangente Mt attachée *intrinsèquement* à S, c'est-à-dire définie par l'angle $\alpha = (\mathrm{M}x, \mathrm{M}t)$ donné *a priori* en fonction de u, v, E, F, G ; dans la congruence rectiligne ainsi formée, extirpons une surface réglée R ; la ligne de striction de R est en général non située sur S ; *la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne de striction* K *de* R *soit sur* S *est donnée par l'équation*

$$(1) \qquad r\, du + r_1\, dv + d\alpha = 0$$

qui ne change pas de forme si S *se déforme.*

Cette équation (1), si l'on se donne α *a priori*, est une équation différentielle du premier ordre qui définit ∞^1 lignes K de S, lignes K définies *intrinsèquement ;* mais notre but étant de simplifier les équations, nous nous donnons au contraire *a priori* les courbes K, de sorte que l'équation (1) fournit α par une quadrature : la constante que l'on peut ajouter à α est constante sur chaque courbe K, mais peut varier d'une courbe K à l'autre : c'est une fonction $\varphi(\mathrm{K})$. L'idée que Weingarten n'a pas explicitée est donc d'avoir pris $r_1 = 0$ de façon que $du = 0$ et $\alpha = 0$ fournissent la solution de (1) ; *on a choisi arbitrairement les courbes* K *(prises pour courbes* $u =$ const.*) et obtenu la congruence correspondante par une quadrature.*

M. Goursat a trouvé le moyen élégant de rattacher les résultats obtenus en 1891 par Weingarten à ceux de 1894 et obtenu du même coup la transformation de Bäcklund échangeant l'équation de Monge-Ampère obtenue pour la déformation aux paragraphes 4 et 7 avec celle que Weingarten signale et qui est aussi du type de Monge-Ampère.

Supposons choisies sur S les courbes K et les tangentes (t) associées; de O menons $O\mu$ parallèle à (t) et portons sur $O\mu$ une longueur $\psi(K)$ ne dépendant que de K. La surface Σ, lieu de μ, admet comme sections par les sphères concentriques de centre O les courbes $K = \text{const}$. *La normale à Σ en μ est une droite (n) parallèle à une certaine tangente Mn de S liée elle aussi intrinsèquement à* S : l'angle (Mx, Mn) ne dépend que de l'élément linéaire de S, du choix des courbes K, du choix des tangentes (t) associées [ou de $\varphi(K)$], et du choix de la fonction $\psi(K)$. Si S se déforme au sens de Gauss, entraînant Mt et Mn, la surface Σ subit une *variation* (qui n'est pas une déformation) où chaque configuration Σ' correspond univoquement à chaque configuration S' et *réciproquement*, toutes les surfaces Σ, Σ', ... sont intégrales d'une équation aux dérivées partielles E_1 du second ordre, du type de Monge-Ampère, ne dépendant que de l'élément linéaire de S, de K, $\varphi(K)$ et $\psi(K)$. A toute surface solution de E_1 correspond par trois quadratures de différentielle totale une surface S et une seule (sauf translation). Ces résultats s'obtiennent aisément en prenant comme lignes de coordonnées les arêtes de rebroussement situées sur S des congruences (t) et (n). Les coordonnées de μ étant (X, Y, Z), les cosinus directeurs de la normale en μ à Σ étant C, C', C'', on a

$$(2)\quad \begin{cases} X = \lambda \dfrac{\partial x}{\partial v}, & Y = \lambda \dfrac{\partial y}{\partial v}, & Z = \lambda \dfrac{\partial z}{\partial v}, \\ C = \mu \dfrac{\partial x}{\partial u}, & C' = \mu \dfrac{\partial y}{\partial u}, & C'' = \mu \dfrac{\partial z}{\partial u}, \end{cases}$$

λ satisfait à l'équation aux différentielles totales

$$(3)\quad \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{1}{2F}\frac{\partial E}{\partial v}du + \left(\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2F}\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv = 0,$$

ce qui entraîne la relation

$$(4)\quad W \equiv \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2F}\frac{\partial G}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2F}\frac{\partial E}{\partial v}\right) = 0,$$

λ est bien une fonction connue de u, v indépendante de la déformation de S. En appelant $P = \frac{\partial Z}{\partial X}$, $Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}$ les coefficients du plan tangent à Σ en μ, on aura

$$\frac{P}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{Q}{\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{-1}{\frac{\partial z}{\partial u}} = \frac{PX + QY - Z}{\lambda F} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}}{\sqrt{E}}. \tag{5}$$

Nous pouvons ainsi écrire quatre relations entre un élément (X, Y, Z, P, Q) de Σ et un élément $\left(u, v, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ de la surface auxiliaire $z = z(u, v)$ déjà citée plusieurs fois; ce sera

$$\left\{\begin{aligned} &X^2 + Y^2 + Z^2 = \lambda^2 G, \qquad Z = \lambda \frac{\partial z}{\partial v}, \\ &\frac{PX + QY - Z}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}} = \frac{\lambda F}{\sqrt{E}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}} = 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ce sont les conditions du problème de Bäcklund : dans les équations (6), les deux de gauche permettent de tirer u, v en fonction de X, Y, Z, P, Q (sinon Σ serait surface de Monge et S développable); si nous portons ces valeurs de u, v dans l'équation

$$dz = \frac{-\sqrt{E}}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}} du + \frac{Z}{\lambda} dv, \tag{7}$$

la condition d'intégrabilité du second membre est une équation de Monge-Ampère

$$HR + 2KS + LT + M + N(RT - S^2) = 0, \tag{E_1}$$

où H, K, L, M, N sont des fonctions connues de X, Y, Z, P, Q. Si nous introduisons maintenant les formules

$$X = \rho \cos \omega, \qquad Y = \rho \sin \omega, \tag{8}$$

les équations (6) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\rho^2 + Z^2 = \lambda^2 G, \qquad Z = \lambda \frac{\partial z}{\partial v}, \\ &\frac{\rho \frac{\partial Z}{\partial \rho} - Z}{\sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial \omega}\right)^2 + 1}} = \frac{\lambda F}{\sqrt{E_1}}, \\ &\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial \omega}\right)^2 + 1}} = 0. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Cette fois, c'est ω qui ne figure pas; donc en résolvant en T, ρ, $\frac{\partial Z}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial Z}{\partial \omega}$, on aura

$$(10)\quad \begin{cases} \omega'_Z = \dfrac{1}{\dfrac{\partial Z}{\partial \omega}}, \qquad \omega_\rho = -\dfrac{\dfrac{\partial Z}{\partial \rho}}{\dfrac{\partial Z}{\partial \omega}}, \\ d\omega = \omega'_Z\, dZ + \omega'_\rho\, d\rho = A\, du + B\, dv, \end{cases}$$

où A, B ne dépendent que de u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. La condition d'intégrabilité pour $d\omega$ donne une équation de Monge-Ampère à laquelle satisfait $z(u, v)$: c'est nécessairement l'équation de Monge-Ampère a laquelle nous sommes arrivés au n° 4; on a donc bien établi le passage d'une équation à l'autre par une transformation de Bäcklund. D'ailleurs l'équation (E_1) de ce numéro et l'équation (E') du numéro précédent dérivent l'une de l'autre par une transformation ponctuelle; en effet, tenant compte du changement de notations, la fonction inconnue u figurant dans (E') est celle qui fixe les lignes de striction, ou encore K, ou encore $Z_1 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ puisque $O\mu$ est constant pour chaque courbe K; d'autre part les variables indépendantes u', v' adoptées dans (E') sont deux variables quelconques susceptibles de définir l'orientation de $O\mu$, de sorte que l'on peut supposer

$$(11)\qquad u' = \frac{X}{Z_1}, \qquad v' = \frac{Y}{Z_1}, \qquad Z_1 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

la transformation ponctuelle $(X, Y, Z;\ u', v', Z)$ change donc (E_1) en (E'). Comme l'équation (E_1) dépend non seulement du ds^2, mais du choix de $K(u, v)$ $\varphi(K)$ et $\psi(K)$, c'est-à-dire du choix de la congruence (t) puis du choix de la congruence (n) et du choix de $\psi(K)$, on peut trouver une infinité d'équations (E_1) ou (E') toutes équivalentes entre elles; M. Goursat montre encore ce résultat essentiel : *toutes les équations ainsi obtenues se ramènent à une seule par une transformation de contact.* Quand la transformation de contact faisant passer d'une surface Σ à une surface Σ' est déduite d'*une seule équation directrice*, cette équation est de la forme

$$(12)\qquad \psi(X^2 + Y^2 + Z^2, \quad X'^2 + Y'^2 + Z'^2, \quad XX' + YY' + ZZ') = 0,$$

et réciproquement ; dans ce cas les courbes K et K′ relatives à Σ et Σ' sont différentes. Quand la transformation de contact est déduite de *deux équations directrices*, ces deux relations sont de la forme

$$(13)\qquad \begin{cases} X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = \varphi_1(X^2 + Y^2 + Z^2), \\ XX' + YY' + ZZ' = \varphi_2(X^2 + Y^2 + Z^2). \end{cases}$$

Dans ce cas les courbes K sont les mêmes, mais les congruences (t) différentes.

Enfin, si la transformation est *ponctuelle*, on a

$$(14)\qquad \frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = f(X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Cela revient à prendre les mêmes courbes k et la même congruence (t); la fonction $\psi(K)$ change de Σ à Σ'.

D'autre part on peut remarquer que (E_1), par raison de symétrie exprime simultanément que dx, dy, dz,

$$(15)\qquad dx = \frac{C}{\mu} du + \frac{X}{\lambda} dv, \qquad dy = \frac{C'}{\mu} du + \frac{Y}{\lambda} dv, \qquad dz = \frac{C''}{\mu} du + \frac{Z}{\lambda} dv,$$

sont trois différentielles totales exactes; ces trois quadratures déterminent la surface S correspondant à une surface Σ. Or il est assez probable que Weingarten a dû développer cette théorie à la suite d'un exemple que le hasard de ses recherches lui avait fait découvrir [20] : de toute surface minima connue (X, Y, Z), on déduit par les quadratures suivantes :

$$(16)\qquad dx = X\,dp + C\,dq, \qquad dy = Y\,dp + C'\,dq, \qquad dz = Z\,dp + C''\,dq,$$

où C, C′, C″ sont les cosinus directeurs de la normale, et où p et q désignent les éléments géométriques

$$(17)\qquad p = CX + C'Y + C''Z, \qquad 2q = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

une surface d'élément linéaire

$$(18)\qquad ds^2 = 2q\,dp^2 + 2p\,dp\,dq + dq^2.$$

On remarquera que l'on peut écrire ce ds^2 sous la forme

$$(19)\qquad ds^2 = dq^2 + 2\,dp\,d(pq)$$

et l'on connaît une surface réglée à plan directeur isotrope admettant ce ds^2 :

$$(20) \qquad x = q, \qquad y + iz = p, \qquad y - iz = 2pq.$$

C'est le paraboloïde déjà cité au n° 7,

$$(21) \qquad 2x(y + iz) = y - iz.$$

En posant

$$(22) \qquad q = u - \frac{v^2}{2}, \qquad p = v,$$

le ds^2 prend la forme déjà citée au même n° 7,

$$(23) \qquad ds^2 = du^2 + 2[u - v^2]\,dv^2.$$

L'équation (E_1) est ici

$$(24) \qquad \rho' + \rho'' = 0.$$

C'est cet exemple qui a dû conduire Weingarten à ses Notes de 1891 : dans quel cas l'équation (E_1) est-elle de la forme

$$(25) \qquad A + B(\rho' + \rho'') + C\rho'\rho'' = 0,$$

où ρ' et ρ'' sont les rayons de courbure principaux de Σ et A, B, C de fonctions de X, Y, Z ? Si l'on remarque que les équations (6) conduisent assez naturellement à prendre pour paramètres les quantités

$$(26) \quad 2q = X^2 + Y^2 + Z^2, \qquad p = CX + C'Y + C''Z = \frac{PX + QY - Z}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}},$$

on trouve immédiatement qu'avec les notations (2) on doit avoir $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$, ce qui permet de supposer $E = 1$ et l'on trouve

$$(27) \qquad ds^2 = du^2 + 2\,d(V\theta)\frac{dv}{V};$$

où V est une fonction arbitraire de v et θ une fonction arbitraire de u et v. Par un changement de paramètres, on peut alors écrire avec une fonction $w(u, v)$ arbitraire

$$(28) \qquad ds^2 = du^2 + 2\,dv\,dw,$$

ce qui donne une surface particulière S_0, en général imaginaire

$$(29) \qquad S_0, \qquad x_0 = u, \qquad y_0 + iz_0 = v, \qquad y_0 - iz_0 = 2w.$$

La surface Σ est définie par

$$(30)\quad X = \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad Y = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad Z = \frac{\partial z}{\partial v}, \qquad C = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad C' = \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad C'' = \frac{\partial z}{\partial u},$$

et si l'on pose

$$(31)\qquad p = \frac{\partial w}{\partial u}, \qquad q = \frac{\partial w}{\partial v},$$

on constate que p et q ont simplement les significations (26). Les lignes de striction relatives aux tangentes des courbes $u =$ const. ont pour équation $q =$ const., celles relatives aux courbes $v =$ const. sont $p =$ const. Or la formation de l'équation (E′) engage à prendre pour l'un des paramètres précisément celui qui donne les lignes de striction; ici la transformation de Legendre s'impose donc et l'on écrit

$$(32)\qquad \varphi = up + vq - w, \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

de façon à prendre p et q pour nouvelles variables indépendantes; l'équation (E_1) devient

$$(33)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} - (\rho' + \rho'')\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q} + \rho' \rho'' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0,$$

et l'on a ainsi retrouvé tous les résultats de Weingarten, en montrant comment les Notes de 1891 deviennent conséquence du Mémoire de 1894. On peut remarquer que la surface Σ' polaire réciproque de Σ relativement à une sphère de centre O admet pour rayon vecteur et normale les mêmes droites que Σ, mais en sens inverse; la représentation (a, a', a'') imaginée par Weingarten pour S n'est donc autre que la représentation sphérique de Gauss pour Σ', et c'est ce qui explique pourquoi Weingarten, reprenant en 1894 les résultats de 1891, détermine Σ en coordonnées tangentielles.

11. Surfaces W. — On doit encore à Weingarten un autre résultat fondamental [21] : *si les rayons de courbure d'une surface Σ sont liés par une relation* $F(R', R'') = 0$, *les deux nappes* S_1 *et* S_2 *de la développée de Σ sont applicables chacune sur une surface de révolution dont le ds^2 ne dépend que de* F (les surfaces de révolution relatives à S_1 et S_2 ne sont pas en général identiques).

Réciproquement, soit une surface S applicable sur une surface de révolution; traçons sur S les géodésiques qui correspondent aux méridiens; on sait que les tangentes à ces méridiens forment une congruence de normales; *chaque surface Σ trajectoire orthogonale satisfait à une relation* $F(R', R'') = 0$. Si la surface S se déforme, chaque segment MP tangent en M à S et normal en P à Σ peut être considéré comme entraîné par la surface S au cours de sa déformation et l'on constate que, S ayant pris une nouvelle configuration S', le lieu des extrémités des segments MP est devenu une autre surface Σ_1 satisfaisant encore à $F(R', R'') = 0$. La recherche des surfaces satisfaisant à l'équation $F(R', R'') = 0$ dépend d'une équation aux dérivées partielles du second ordre (E), qui n'est plus nécessairement du type de Monge-Ampère, dont l'intégration est un problème équivalent à celui de la déformation de S.

On peut, par exemple, au lieu de $F(R', R'') = 0$, écrire avec une variable auxiliaire k et une fonction *connue* $\varphi(k)$

$$R' = \varphi(k), \qquad R'' = \varphi(k) - k\varphi'(k). \tag{1}$$

Les deux nappes de la développée S_1 et S_2 ont pour ds^2

$$\begin{cases} ds^2 = k^2 dv^2 + \varphi'^2(k)\, dk^2, \\ ds^2 = \varphi'^2(k)\, du^2 + k^2 \varphi''^2(k)\, dk^2. \end{cases} \tag{2}$$

La surface Σ rapportée à ses lignes de courbure (u) et (v) a pour ds^2

$$ds^2 = \frac{\varphi^2(k)}{k^2} du^2 + \frac{[\varphi(k) - k\varphi'(k)]^2}{\varphi'^2(k)} dv^2, \tag{3}$$

où k est une fonction inconnue $k(u, v)$ déterminée par l'équation aux dérivées partielles *linéaire*

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k\varphi''}{\varphi'^2}\frac{\partial k}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varphi'}{k^2}\frac{\partial k}{\partial v}\right) - \frac{1}{k\varphi'} = 0. \tag{4}$$

A chaque solution de (4) correspond intrinsèquement une surface Σ déterminée par sa première forme ds^2 (3), et par sa troisième forme

$$d\sigma^2 = \frac{du^2}{k^2} + \frac{dv^2}{\varphi'^2(k)}. \tag{5}$$

L'équation (4) exprime purement et simplement que les $d\sigma^2$ (5) a sa courbure égale à $+1$.

D'après la discussion qui précède, on ne sait intégrer complètement (4) que si la surface Σ est surface minima $\left(\text{c'est-à-dire } R'+R''=0,\ R=-R'=\frac{k^2}{2},\ \varphi(k)=\frac{k^2}{2}\right)$ et dans le cas

$$(6)\qquad \frac{2(R-R')}{p}=\sin\frac{2(R+R')}{p} \qquad \text{ou} \qquad \frac{2(R-R')}{p}=\operatorname{sh}\frac{2(R+R')}{p}$$

qui correspond aux surfaces applicables sur le paraboloïde

$$(7)\qquad x^2+y^2=2piz \qquad \text{ou} \qquad x^2+y^2=2pz.$$

OUVRAGES A CONSULTER.

L. Bianchi. — *Lezioni di Geometria Differenziale*, 3e édition.
G. Darboux. — *Théorie des Surfaces* (Paris, Gauthier-Villars).
E. Goursat. — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre* (Paris, Hermann).
S. Lie et G. Scheffers. — *Vorlesungen über die Geometrie der Berührungstransformationen* (Leipzig).
Encyclopédie des Sciences mathématiques, édition allemande, Band III_3, Heft 2-3, p. 389-440.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. Beltrami. — *Giorn. di Mat.*, t. 2, 1864, p. 355; t. 3, 1865, p. 89, 260.
2. Christoffel. — Ueber die Transformation der homogen Differentialausdrücke zweiten Grades (*J. f. Math.*, t. 70, 1869, p. 46).
3. Codazzi. — Mémoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de Paris*, t. 27, 1872).
4. Gau. — *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 42, 1925, p. 89-141.
5. Gauss. — Disquisitiones circa superficies curvas, Article 11 (Göttingen, 1827).
6. Gauss. — *Ibid.*, Article 12.
7. Gosse. — *Journal de Mathématiques*, 1925.
8. Goursat. — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.*
9. Goursat. — Sur la méthode de Weingarten (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 55, 1927, p. 5 39).
10. E.-E. Levi. — Sulla Deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili (*Reale Academia delle Scienze di Torino*, 1907-1908).
11. Liouville. — *Journal de Mathématiques*, t. 16, 1851, p. 131.
12. Minding. — *Journal für Mathematik*, t. 5, 1829, p. 303; t. 6, 1830, p. 159.
13. Minding. — Wie sich entscheiden lässt ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind (*J. f. Math.*, t. 19, 1839, p. 370).

14. Montel. — Thèse (*Annales de l'École Normale supérieure*).

15. Ricci. — Sui parametri egli invarianti delle forme quadratiche differenziali (*Ann. di Math.*, 2e série, t. **14**, 1886).

16. Sophus Lie und C. Scheffers. — *Vorlesungen über die Geometrie der Berührungstransformationen.*

17. Voss. — Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke (*Math. Ann.*, t. **46**, 1880, p. 129 et 571).

18. Weingarten. — *Festchrift der technischen Hochschule.* Berlin, 1884 (I B 2, n° **22**).

19. Weingarten. — Sur les déformations des surfaces (*Acta mathematica*, t. **20**, 1896, p. 159 200).

20. Weingarten. — Eine neue Classe auf einander abwickelbare Flächen (*Nachrichten zu Göttingen*, 1887, p. 28).

21. Weingarten. — *J. f. Math.*, t. **59**, 1861, p. 382.

22. Zorawski. — Ueber Biegunsinvarianten (*Acta mathematica*, t. **16**, 1891, p. 41).

TABLE DES MATIÈRES.