MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

N. E. NÖRLUND

Sur la « somme » d'une fonction

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 24 (1927)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1927__24__1_0>

© Gauthier-Villars, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BSM 3427

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC., DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris, Professeur a la Sorbonne.

FASCICULE XXIV

Sur la « Somme » d'une Fonction

PAR M. N.-E. NÖRLUND

de l'Académie des Sciences,
Doyen de la Faculté des Sciences de Copenhague.

SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1927

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

SUR

LA « SOMME » D'UNE FONCTION

Par N. E. NÖRLUND,

Membre correspondant de l'Académie des Sciences de Paris.
Professeur à l'Université de Copenhague.

INTRODUCTION.

L'étude d'une équation linéaire aux différences finies comporte deux problèmes de genres différents. On peut rechercher tout d'abord s'il existe des solutions possédant certaines propriétés analytiques simples, par exemple, qui soient analytiques ou entières. Mais de telles conditions laissent subsister une grande ambiguïté dans le choix des fonctions périodiques arbitraires dont dépend la solution générale, et, d'une manière plus précise, on peut chercher des solutions possédant en outre certaines propriétés asymptotiques, qui soient aussi simples que possible, et caractéristiques.

Nous exposons ici les principaux travaux auxquels ont donné lieu ces deux problèmes pour l'équation

$$\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}=\varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction donnée. La solution générale, qu'on appellera *somme indéfinie* de $\varphi(x)$ est de la forme

$$f(x)=F(x)+\pi(x),$$

$F(x)$ désignant une solution particulière, et $\pi(x)$ une fonction périodique arbitraire de période ω; et sa détermination s'appellera la *sommation* de l'équation.

Les premières théories de cette équation ont consisté à démontrer l'existence d'une solution entière, ou méromorphe, lorsque $\varphi(x)$ possède l'une ou l'autre de ces deux propriétés.

Pour pouvoir caractériser une *solution principale*, il faut en outre préciser le caractère de $\varphi(x)$ à l'infini. On réussit ainsi à définir une solution ne dépendant plus que d'une constante additive arbitraire, et que l'on appellera *la somme principale*, ou, plus brièvement, *la somme* de $\varphi(x)$.

Les hypothèses que l'on fait sur $\varphi(x)$ pour démontrer l'existence d'une somme, telle qu'elle est définie au Chapitre III, peuvent être rendues moins restrictives en généralisant convenablement cette définition. On trouvera ici même un exemple de généralisation, mais on conçoit que l'on puisse étendre encore la classe des fonctions qui admettent une somme, de même que l'on étend, en généralisant la définition et les procédés, la classe des séries divergentes sommables.

CHAPITRE I.

LES POLYNOMES DE BERNOULLI.

1. On appelle *nombres de Bernoulli* la suite des nombres B_0, B_1, B_2, ... définis par la relation de récurrence

$$\left\{\begin{aligned} &B_0 = 1,\\ &\sum_{s=0}^{\nu}\binom{\nu}{s}B_s = B_\nu \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots).\end{aligned}\right.$$

On voit immédiatement sur ces équations que ce sont des nombres rationnels, et tels que $(\nu+1)!\,B_\nu$ soit entier. Le rôle important de ces nombres dans l'analyse résulte de ce qu'ils permettent de sommer aisément les puissances entières positives de x.

On appelle *polynome de Bernoulli* $B_\nu(x)$ le polynome qui satisfait à l'équation (¹)

$$\Delta f(x) = \nu x^{\nu-1}, \tag{2}$$

(¹) Dans ce qui suit on pose

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$
$$\underset{\omega}{\Delta} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}.$$

et qui est tel que

$$B_\nu(0) = B_\nu.$$

Ces deux conditions déterminent complètement ce polynome, et l'on vérifie de suite qu'il s'écrit

$$(3) \qquad B_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} B_s x^{\nu-s};$$

il est donc toujours de degré ν.

On peut écrire symboliquement ce second membre $(x+B)^\nu$, en convenant de remplacer B^s par B_s dans le développement suivant les puissances de B. En particulier, on peut écrire (1) sous la forme

$$(1') \qquad (1+B)^\nu - B_\nu = \begin{cases} 0 & (\nu = 0, 2, 3, 4, \ldots), \\ 1 & (\nu = 1). \end{cases}$$

Si l'on remplace, dans (3), x par $x+h$, on a

$$B_\nu(x+h) = (x+h+B)^\nu,$$

qui, développé suivant les puissances de h, donne la formule générale

$$(4) \qquad B_\nu(x+h) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} h^s B_{\nu-s}(x).$$

On voit, en particulier, que

$$(5) \qquad \frac{dB_\nu(x)}{dx} = \nu B_{\nu-1}(x).$$

Plus généralement, si $\varphi(x)$ désigne un polynome quelconque, on déduit immédiatement de (1') l'identité symbolique

$$(6) \qquad \varphi(x+1+B) - \varphi(x+B) = \varphi'(x),$$

de sorte que

$$f(x) = \varphi(x+B) = \varphi(x) + \frac{B_1}{1!}\varphi'(x) + \frac{B_2}{2!}\varphi''(x) + \ldots$$

admet $\varphi'(x)$ pour différence finie. On a donc

$$(7) \quad f(x+h) = \varphi(x+h+B) = \varphi(x) + \frac{B_1(h)}{1!}\varphi'(x) + \frac{B_2(h)}{2!}\varphi''(x) + \ldots;$$

de cette formule générale découlent les applications des polynomes de Bernoulli dans le calcul aux différences finies.

La différence finie des deux membres extrêmes de (7) conduit à la formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin, relative à un polynome,

$$(8)\qquad \varphi'(x+h) = \Delta\varphi(x) + \frac{B_1(h)}{1!}\Delta\varphi'(x) + \frac{B_2(h)}{2!}\Delta\varphi''(x) + \ldots.$$

Remarquons encore que (6) peut s'écrire

$$\varphi(1+B(x)) - \varphi(B(x)) = \varphi'(x),$$

où l'on convient de remplacer les puissances $B^s(x)$ du développement par $B_s(x)$. Pour $\varphi(x) = x^\nu$, on retrouve l'équation (4), avec $h = 1$.

2. En changeant x en $1 - x$, on voit que l'équation (2) est également satisfaite par le polynome $(-1)^\nu B_\nu(1-x)$, dont la différence avec $B_\nu(x)$ doit donc être une constante. En égalant les dérivées de ces deux polynomes, on voit que

$$(9)\qquad B_\nu(1-x) = (-1)^\nu B_\nu(x).$$

Voici une autre application importante de (5). Cette équation est équivalente à

$$\int_x^y B_\nu(z)\,dz = \frac{B_{\nu+1}(y) - B_{\nu+1}(x)}{\nu+1},$$

x et y étant quelconques. En particulier

$$(10)\qquad \int_x^{x+1} B_\nu(z)\,dz = x^\nu.$$

On en déduit l'expression de la somme des puissances semblables des $n-1$ premiers nombres entiers

$$1^\nu + 2^\nu + \ldots + (n-1)^\nu = \frac{B_{\nu+1}(n) - B_{\nu+1}}{\nu+1} \qquad (\nu > 0).$$

C'est cette propriété des $B_\nu(x)$ qui a attiré tout d'abord sur eux l'attention des géomètres.

3. L'équation

$$\underset{\omega}{\Delta} f(x) = \nu x^{\nu-1} \qquad \left(\omega = \frac{1}{n}\right),$$

où n est un entier positif, admet évidemment les deux solutions

$$n^{-\nu}B_\nu(nx) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} B_\nu\left(x+\frac{s}{n}\right)$$

On a donc

$$\sum_{s=0}^{n-1} B_\nu\left(x+\frac{s}{n}\right) = n^{1-\nu}B_\nu(nx) + nC.$$

En intégrant de x à $x+\frac{1}{n}$, on voit, grâce à (10), que

$$C = \int_x^{x+1} B_\nu(z)\,dz - n^{1-\nu}\int_x^{x+\frac{1}{n}} B_\nu(nz)\,dz = 0.$$

On a donc

$$\sum_{s=0}^{n-1} B_\nu\left(x+\frac{s}{n}\right) = n^{1-\nu}B_\nu(nx). \tag{11}$$

Inversement, on peut déduire (10) de (11) en divisant cette dernière équation par n, puis en faisant tendre n vers l'infini.

On déduit de (2), (9) et (11) les valeurs des $B_\nu(x)$ pour certaines valeurs rationnelles de x. Par exemple, (2) et (9) donnent

$$B_\nu(1) = B_\nu(0) = B_\nu = (-1)^\nu B_\nu \qquad (\nu > 1); \tag{12}$$

les nombres de Bernoulli d'indice impair supérieur à 1 sont donc tous nuls; on a encore

$$B_{2\nu}(1) = B_{2\nu}(0) = B_{2\nu},$$
$$B_{2\nu+1}(1) = B_{2\nu+1}(0) = 0 \qquad (\nu > 0).$$

Pour $x = 0$, $n = 2$, (11) donne

$$B_\nu\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{\nu-1}} - 1\right)B_\nu.$$

4. Formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin. — La formule (8) s'étend à toute fonction $\varphi(z)$ admettant une dérivée continue d'ordre m, dans un intervalle $x \leqq z \leqq x+\omega$. Considérons la fonction $\overline{B}_\nu(x)$ de période 1 qui coïncide avec $B_\nu(x)$ dans l'intervalle $0 \leqq x < 1$. Si $\nu > 1$, (12) montre que $\overline{B}_\nu(x)$ est continue; par contre, $\overline{B}_1(x)$ fait un saut brusque égal à -1 quand x traverse une valeur entière, car $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Il résulte de (5) que, lorsque ν

est supérieur à 1, $\overline{B}_\nu(x)$ admet des dérivées continues, jusqu'à l'ordre $\nu-2$, la $(\nu-1)^{\text{ième}}$ étant discontinue.

Ceci posé, soit l'intégrale

$$R_m = -\omega^m \int_0^1 \frac{\overline{B}_m(h-z)}{m!} \varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz \qquad (0 \leqq h \leqq 1).$$

$m-2$ intégrations successives par parties donnent

$$R_m = -\sum_{\nu=2}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(\nu-1)}(x) + R_1,$$

et une dernière intégration par parties, compte tenu de la discontinuité de $\overline{B}_1(h-z)$ au point $z=h$, donne enfin la célèbre formule sommatoire d'Euler

$$(13)\quad \varphi(x+\omega h) = \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} \varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(\nu-1)}(x) + R_m.$$

Le terme complémentaire R_m a été étudié par un grand nombre d'auteurs, notamment par Poisson [1], Jacobi [1], Malmsten [1], Darboux [1], Sonin [1] et Lindelöf [1, 2, 3].

En posant $\varphi(x) = e^x$, il vient

$$(14)\qquad \frac{\omega e^{\omega h}}{e^\omega - 1} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) - \frac{\omega^{m+1}}{e^\omega - 1} \int_0^1 \frac{\overline{B}_m(h-z)}{m!} e^{\omega z}\,dz.$$

La fonction au premier membre est la fonction génératrice des polynomes de Bernoulli qui a servi de base à un grand nombre d'études sur ces polynomes.

En remplaçant ω par $i\omega$, (14) donne, pour $h=0$, le développement classique

$$(15)\qquad \frac{\omega}{2}\cot\frac{\omega}{2} = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu} + \frac{\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}} \mathcal{R}_m,$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m &= (-1)^{m+1}\omega^{2m} \int_0^1 \frac{B_{2m}(z)}{(2m)!} \cos\left(z-\frac{1}{2}\right)\omega\,dz \\ &= (-1)^{m+1}\omega^{2m+1} \int_0^1 \frac{B_{2m+1}(z)}{(2m+1)!} \sin\left(z-\frac{1}{2}\right)\omega\,dz. \end{aligned}$$

5. On déduit aisément de (15) les développements trigonométriques des polynomes de Bernoulli. En multipliant les deux membres par $\sin\frac{\omega}{2}$, il vient, pour $\omega = 2\nu\pi$, $\mathcal{R}_m = (-1)^\nu$, donc

$$\int_0^1 B_{2m}(z)\cos 2\nu\pi z\,dz = (-1)^{m+1}\frac{(2m)!}{(2\nu\pi)^{2m}} \qquad (m>0),$$

$$\int_0^1 B_{2m+1}(z)\sin 2\nu\pi z\,dz = (-1)^{m+1}\frac{(2m+1)!}{(2\nu\pi)^{2m+1}}.$$

En se rappelant la formule (9), on a donc les développements

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} B_{2m}(x) &= (-1)^{m+1}\frac{2(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu^{2m}},\\ B_{2m+1}(x) &= (-1)^{m+1}\frac{2(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+1}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu^{2m+1}}.\end{aligned}\right.$$

Si m est positif, ces séries convergent absolument et uniformément, et représentent la fonction au premier membre dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$. Elles représentent donc les fonctions périodiques $\overline{B}_\nu(x)$ pour toutes les valeurs de x.

On peut déduire de ces développements les expressions des sommes des puissances semblables négatives des nombres entiers. Par exemple, pour $x = 0$, la première équation (16) donne

$$(17)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2m}} = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}B_{2m}.$$

CHAPITRE II.

FORMATION D'UNE SOMME INDÉFINIE D'UNE FONCTION ENTIÈRE OU MÉROMORPHE.

6. De la définition des polynomes de Bernoulli, on peut déduire directement, pour la solution rationnelle de l'équation

$$(1)\qquad \Delta f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu,$$

l'expression

$$(2)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}\frac{a_\nu}{\nu+1}\,B_{\nu+1}(x)+\text{const.}$$

Lorsque le second membre de (1) devient une série entière, la série (2) correspondante n'est généralement pas convergente. Mais on peut remplacer les $B_\nu(x)$ par toute autre solution $\psi_\nu(x)$ de l'équation (2) (§ 1) et faire ce choix de manière que la série formée soit convergente.

A. Hurwitz [1] retranche de $B_\nu(x)$ un certain nombre des premiers termes de son développement en série trigonométrique, qui sont bien des fonctions périodiques de x. Étant donné, comme le montre tout de suite (14) (§ 4) que

$$B_\nu(x)=\frac{\nu!}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{e^{xz}\,dz}{(e^z-1)\,z^\nu},$$

C_0 étant un cercle entourant le seul pôle $z=0$, par exemple le cercle $|z|=\pi$, cet auteur considère la fonction

$$(3)\qquad \psi_{\nu,r}(x)=\frac{\nu!}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{e^{xz}\,dz}{(e^z-1)\,z^\nu},$$

C_r étant le cercle $|z|=(2r+1)\pi$, où r est un entier. C'est encore une solution de (2) (§ 1) D'ailleurs, on voit immédiatement, par la théorie des résidus, que

$$\psi_{\nu,r}(x)-B_\nu(x)=\nu!\sum_{k=1}^{r}\frac{e^{2k\pi i x}+(-1)^\nu e^{-2k\pi i x}}{(2k\pi i)^\nu}\qquad (r\geqq 1),$$

c'est-à-dire la somme, changée de signe, des r premiers termes du développement (16) (§ 5) de $B_\nu(x)\,(\nu\geqq 1)$.

Si l'on retranche, par exemple, les m premiers termes de ces développements, les fonctions $\psi_\nu(x)$ obtenues sont telles que l'on ait, pour $0\leqq x<1$,

$$|\psi_\nu(x)|<\frac{C\nu!}{(\pi\nu)^\nu}<C.$$

On en déduit que, n étant un entier quelconque positif,

$$|\psi_\nu(x\pm n)|<\nu\left\{|x\pm n\mp 1|^{\nu-1}+|x\pm n\mp 2|^{\nu-1}+\ldots+|x|^{\nu-1}\right\}+C$$
$$<C\nu\,|x\pm n|^\nu\qquad (0\leqq x<1),$$

c'est-à-dire que, quels que soient x et ν,

$$|\psi_\nu(x)| < C\nu\,|x|^\nu.$$

Il résulte de là que, si $\varphi(x)$ désigne une fonction entière,

$$(4)\qquad \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

la série

$$a_0\psi_1(x) + \frac{a_1}{2}\psi_2(x) + \frac{a_2}{3}\psi_3(x) + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente dans tout le plan; elle représente donc une solution entière de l'équation

$$(5)\qquad \Delta f(x) = \varphi(x).$$

On peut se demander quelles sont les fonctions entières (4) pour lesquelles, quelle que soit la région finie Γ du plan, on peut former, avec une valeur constante de r, une solution

$$(6)\qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1}\psi_{\nu+1,r}(x)$$

de (5), uniformément convergente dans Γ. A. Hurwitz montre que la condition nécessaire et suffisante est que la série

$$(7)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu!\, a_\nu x^\nu$$

soit convergente.

Supposons d'abord que (6) puisse être rendue uniformément convergente dans toute région finie Γ, grâce à une valeur constante de r. Prenons pour Γ une région contenant l'intervalle (0, 1). La somme $f(x)$ de (6), étant holomorphe dans cet intervalle, admet un développement de Fourier.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2n\pi i x},$$

où

$$c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2n\pi i x}\, dx \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

On peut substituer (6) à $f(x)$ et intégrer terme à terme; il vient alors

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu \nu!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{dz}{(z - 2n\pi i) z^{\nu+1}},$$

d'où l'on conclut que $c_0 = c_{\pm 1} = c_{\pm 2} = \ldots = c_{\pm r} = 0$, et que, pour $|n| > r$,

$$c_n = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu \nu!}{(2n\pi i)^{\nu+1}}.$$

Donc (7) converge pour $x = \frac{1}{2(r+1)\pi i}$. En posant

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu \nu!}{(2\pi i x)^{\nu+1}}, \tag{8}$$

il vient

$$f(x) = -\sum_{n=r+1}^{\infty} [g(n) e^{2n\pi i x} + g(-n) e^{-2n\pi i x}] \qquad (0 < x < 1). \tag{9}$$

Réciproquement, si (8) converge pour $|x| > l$, prenons pour r la partie entière de l, et formons la série (6) correspondante. La somme de ses $n+1$ premiers termes est

$$S_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu \nu!}{(2\pi i)^{\nu+1}} \int_C \frac{e^{2\pi i x z}\, dz}{(e^{2\pi i z} - 1) z^{\nu+1}},$$

C étant un cercle de centre O et de rayon compris entre l et $r+1$. Si $g_n(x)$ est la somme des $n+1$ premiers termes de (8), on a

$$S_n(x) = \int_C \frac{e^{2\pi i x z}}{e^{2\pi i z} - 1} g_n(z)\, dz,$$

et ceci tend bien uniformément vers une limite, en même temps que $g_n(z)$, quand n augmente indéfiniment. On peut donc énoncer le

THÉORÈME. — *Si une fonction entière (4) est telle que la série (8) converge pour $|x| > l$, de partie entière $r \geq 0$, la série (6) est uniformément convergente dans toute région finie, et représente une solution entière de l'équation (5). Cette solution se représente encore par*

$$f(x) = \int_C \frac{e^{2\pi i x z}}{e^{2\pi i z} - 1} g(z)\, dz,$$

où C désigne un cercle de centre O et de rayon compris entre l et $r+1$, et (9) donne son développement en série de Fourier.

7. P. Appell [1] considère la solution $\psi_\nu(x)$ de (2) (§ 1) définie dans l'intervalle $0 \leqq \sigma < 1$ ($x = \sigma + i\tau$) par l'intégrale

$$(10) \qquad \psi_\nu(x) = \nu \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\cos 2(\nu-1)\pi x}{\cos 2(\nu-1)\pi z} \, \frac{z^{\nu-1}\, dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}};$$

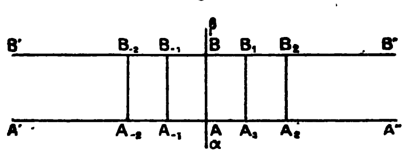
le prolongement analytique hors de cet intervalle s'effectue à l'aide de l'équation (2) (§ 1). En développant $\frac{1}{1-e^{2\pi i(x-z)}}$ suivant les puissances décroissantes ou croissantes de $e^{2\pi i(x-z)}$, selon que z est sur la partie positive ou négative de l'axe imaginaire, on vérifie aisément que $\psi_\nu(x)$ admet un développement trigonométrique qui coïncide avec celui de $B_\nu^!(x)$ à partir du $\nu^{\text{ième}}$ terme, tandis que les coefficients des $\nu - 1$ premiers termes sont de l'ordre de celui du $\nu^{\text{ième}}$ terme quand ν augmente indéfiniment. Les fonctions d'Appell peuvent donc remplir le rôle de $\psi_{\nu,\nu-1}(x)$.

8. La définition de ces fonctions est une application de l'intégrale générale grâce à laquelle C. Guichard [1] a démontré que *toute fonction entière est la différence finie d'une fonction entière*. Soit l'intégrale

$$(11) \qquad f(x) = \int_A^B \varphi(t)\, \frac{\pi(x)}{\pi(t)} \, \frac{dt}{1 - e^{2\pi i(x-t)}},$$

où le chemin d'intégration est un segment de droite parallèle à l'axe des imaginaires, et $\pi(x)$ une fonction analytique de période 1.

Fig. 1.



(11) définit une fonction périodique de x, admettant pour lignes de discontinuité les segments... $A_{-1}B_{-1}$, AB, A_1B_1, A_2B_2, ... con-

gruents de AB(¹). En effet, si E et F sont deux points infiniment voisins, respectivement à droite et à gauche de AB, on voit, sur l'expression

$$f(x)=\int_{A}^{B}\varphi(t)\,\frac{\pi(x)}{\pi(t)}\left[\frac{1}{1-e^{2\pi i(x-t)}}-\frac{1}{2\pi i(t-x)}\right]dt$$
$$+\int_{A}^{B}\left[\varphi(t)\,\frac{\pi(x)}{\pi(t)}-\varphi(x)\right]\frac{dt}{2\pi i(t-x)}+\frac{\varphi(x)}{2\pi i}\int_{A}^{B}\frac{dt}{t-x},$$

que, lorsqu'on passe de E à F, $f(x)$ admet la même discontinuité que la dernière intégrale, qui est une intégrale à coupure d'Hermite. La valeur de cette intégrale en un point M non situé sur AB est

$$\varphi(x)\left(\frac{1}{2\pi i}\log\left|\frac{B-M}{A-M}\right|+\frac{\arg(B-M)-\arg(A-M)}{2\pi}\right);$$

donc sa variation, quand M passe de E à F sans traverser la coupure, est $\varphi(x)$, pourvu que ces deux points ne s'approchent pas indéfiniment des extrémités A et B du chemin d'intégration, la cote de A étant supposée inférieure à celle de B. On en conclut que la valeur de l'intégrale (11) augmente de $\varphi(x)$, à un infiniment petit près, quand x passe du point E au point $F_1 = F+1$.

Par conséquent si l'on prolonge le chemin d'intégration en α et β au delà de A et B, et si l'on définit $f(x)$, dans le rectangle ABB_1A_1, par l'intégrale (11) de chemin $\alpha\beta$, et, hors de ce rectangle, par l'équation aux différences (5), cette fonction est analytique et continue dans la bande limitée par les deux parallèles $A'AA''$ et $B'BB''$ à l'axe réel.

Il a suffi que $\varphi(x)$ fût analytique dans une bande contenant la bande $A'A''$, $B'B''$. Si $\varphi(x)$ est entière, on saura donc former une solution entière de (5), si l'on sait trouver une fonction entière périodique $\pi(x)$ telle que l'intégrale (11) converge quand A et B s'éloignent à l'infini. Étant donné le développement (4) de $\varphi(x)$, il suffit de prendre

$$\pi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cos 2n\pi x;$$

(¹) C'est-à-dire l'ensemble des points x, $x\pm1$, $x\pm2$, ... correspondant aux points x de AB.

en effet, si AB est, par exemple, sur l'axe imaginaire, on a

$$\left|\frac{\varphi(iz)}{\pi(iz)}\right| \leqq \frac{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\,z^n}{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\,\mathrm{ch}\,2n\pi z},$$

qui tend vers zéro plus vite que toute puissance de z quand $|z|$ augmente indéfiniment. Le facteur $\frac{1}{1-e^{2\pi ix}e^{2\pi z}}$ restant fini, l'intégrale (11), prise le long de l'axe imaginaire, a donc un sens et représente, dans la bande $0 \leqq \sigma < 1$, une solution entière de l'équation (5).

9. Si $\varphi(x)$ est seulement holomorphe dans un cercle $|x-a| = \mathrm{R}$, en prenant A et B très voisins des points de cotes extrêmes de ce cercle, la méthode de Guichard définit une solution de (5) holomorphe dans ce cercle. On peut encore, avec H. Weber [1], remplacer le chemin rectiligne AB par un chemin curviligne variable ABC, tout entier intérieur à (R), et traversant la ligne des points $x \pm \nu$ (ν entier) entre $x-1$ et x. Il suffit d'ailleurs de prendre $\pi(x) = 1$. Cette intégrale définit alors la solution $f(x)$ dans tout le cercle en question (1).

10. On connaît une solution de l'équation (5) toutes les fois que l'une des séries

$$-\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi(x+\nu), \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi(x-\nu)$$

est convergente. Ceci se produit avec des fonctions non nécessairement entières, et permet de sommer certaines fonctions méromorphes. D'une manière générale, A. Hurwitz [1] a démontré, par le procédé de Mittag-Leffler, *qu'une fonction* $\varphi(x)$, *méromorphe dans toute région finie du plan, est la différence finie d'une fonction de même nature.*

En supposant d'abord que tous les pôles de $\varphi(x)$ soient à gauche d'une droite $\sigma = b$, les $\varphi(x+\nu)$ sont holomorphes à l'origine pour toutes les valeurs de $\nu > b$. On peut retrancher, du développement de

---

(1) *Cf.* également R. D. Carmichael [1], p. 173; K. P. Williams [1].

Maclaurin de ces $\varphi(x+\nu)$, la somme $g_\nu(x)$ d'un nombre suffisant des premiers termes, de manière que, dans le cercle $|x| < \nu - b$, on ait

$$|\varphi(x+\nu) - g_\nu(x)| < \varepsilon_\nu \qquad (\nu > b), \tag{12}$$

les ε_ν étant les éléments d'une série positive convergente. Cette inégalité est vraie dans toute région finie Γ du plan, dès que ν est suffisamment grand. Donc la série

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [g_\nu(x) - \varphi(x+\nu)],$$

où les $g_\nu(x)$ sont des polynomes, converge uniformément dans toute région finie du plan, tout au moins si l'on néglige un nombre fini de ses premiers termes. Elle représente donc une fonction méromorphe dans toute région finie.

La différence finie de $F(x)$ est également méromorphe, mais

$$\begin{aligned}\Delta F(x) - \varphi(x) + g_0(x) = \lim_{\nu \to \infty} \{ [g_0(x+1) - g_1(x)] &+ [g_1(x+1) - g_2(x)] + \ldots \\ &+ [g_{\nu-1}(x+1) - g_\nu(x)] \\ &+ g_\nu(x+1) - \varphi(x+1+\nu) \}\end{aligned}$$

est entière, car $\varphi(x+1+\nu)$ devient holomorphe dès que ν est assez grand, dans toute région finie du plan. On a donc

$$\Delta F(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x),$$

$\varphi_1(x)$ étant une fonction entière. En déterminant, par l'un des procédés que nous avons exposés, une solution entière $F_1(x)$ de $\Delta f(x) = \varphi_1(x)$, la fonction $F(x) - F_1(x)$ admettra $\varphi(x)$ comme différence finie et sera, comme $F(x)$, méromorphe dans toute région finie du plan.

Si tous les pôles de $\varphi(x)$ sont dans un demi-plan $\sigma > b$, on peut former de même une série

$$\overline{F}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [\varphi(x-\nu) - g_\nu(x)],$$

où les $g_\nu(x)$ sont des polynomes, qui représente une fonction méromorphe dans toute région finie du plan, et telle que $\Delta \overline{F}(x) - \varphi(x)$ soit une fonction entière.

Enfin, dans le cas général, on sait qu'on peut toujours décomposer $\varphi(x)$ en la somme de deux fonctions méromorphes dont les pôles soient respectivement dans les demi-plans $\mathcal{R}(x) > b$ et $\mathcal{R}(x) \leqq b$, et il suffit d'appliquer les résultats précédents à ces deux fonctions.

CHAPITRE III.

LA SOMME D'UNE FONCTION.

11. Pour résoudre l'équation

$$\underset{\omega}{\triangle} f(x) = \varphi(x), \tag{1}$$

où ω est un nombre positif quelconque, on peut considérer (¹), au lieu de la solution formelle

$$-\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(x+\nu\omega), \tag{2}$$

qui diverge généralement, la série

$$F_\eta(x \mid \omega) = \int_a^{\infty} \varphi(z) e^{-\eta z}\, dz - \omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(x+\nu\omega)\, e^{-\eta(x+\nu\omega)}, \tag{3}$$

a étant une constante indéterminée. Pour que cette série converge, quelque petit que soit le nombre positif η, il suffit de supposer que $\varphi(x)$ est une fonction, réelle ou non, continue pour $x \geqq b$, et telle que l'on ait

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) e^{-\eta x} = 0 \tag{4}$$

quel que soit $\eta > 0$. Or, on a

$$\underset{\omega}{\triangle} F_\eta(x \mid \omega) = \varphi(x) e^{-\eta x};$$

donc, si $F_\eta(x \mid \omega)$ tend uniformément vers une limite quand η tend vers zéro, cette limite $F(x \mid \omega)$ est une solution de (1). Elle est définie à une constante additive près, et nous l'appellerons la *solution prin-*

(¹) *Cf.* N. E. Nörlund [4].

cipale de (1), ou *somme de* $\varphi(x)$. Elle sera désignée par la notation

$$F(x \mid \omega) = \underset{a}{\overset{x}{\mathop{\mathbf{S}}}} \varphi(z) \underset{\omega}{\triangle} z = \lim_{\eta \to 0} F_\eta(x \mid \omega).$$

D'ailleurs, lorsque (2) converge, $F(x \mid \omega)$ représente sa somme, à une constante additive près.

Supposons que $F_\eta(x \mid \omega)$ tende uniformément vers une limite $F(x \mid \omega)$ quand η tend vers zéro, dans un certain intervalle $b \leqq x \leqq B$. On déduit immédiatement, de sa définition, que cette limite est une fonction continue de x dans cet intervalle. D'autre part, de l'égalité évidente

$$\frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} F_\eta\left(x + \frac{s\omega}{n} \,\middle|\, \omega\right) = F_\eta\left(x \,\middle|\, \frac{\omega}{n}\right),$$

on déduit *la formule de multiplication*

$$(5) \qquad \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} F\left(x + \frac{s\omega}{n} \,\middle|\, \omega\right) = F\left(x \,\middle|\, \frac{\omega}{n}\right).$$

Quand n augmente indéfiniment, on a donc

$$\lim_{n \to \infty} F\left(x \,\middle|\, \frac{\omega}{n}\right) = \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(x \mid \omega)\, dx;$$

cette intégrale s'évalue aisément, car en intégrant terme à terme la série uniformément convergente (3), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F_\eta(x \mid \omega)\, dx &= \int_a^{\infty} \varphi(x) e^{-\eta x}\, dx \\ &\quad - \int_x^{x+\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(x + \nu\omega) e^{-\eta(x+\nu\omega)}\, dx \\ &= \int_a^{x} \varphi(x) e^{-\eta x}\, dx, \end{aligned}$$

de sorte que, en faisant tendre η vers zéro, il vient

$$(6) \qquad \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(x \mid \omega)\, dx = \int_a^{x} \varphi(x)\, dx.$$

On voit ainsi que la somme $F\left(x \,\middle|\, \frac{\omega}{n}\right)$ devient justement la primitive de $\varphi(x)$ quand n augmente indéfiniment.

Signalons que les deux opérations $\underset{\omega}{\triangle}$ et $\mathop{\mathrm{S}}\limits_{a}^{x}$ ne sont pas permutables, car

$$\mathop{\mathrm{S}}\limits_{a}^{x}\left[\underset{\omega}{\triangle}\varphi(x)\right]\underset{\omega}{\triangle}x = \frac{1}{\omega}\mathop{\mathrm{S}}\limits_{a}^{x}\varphi(x+\omega)\underset{\omega}{\triangle}x - \frac{1}{\omega}\mathop{\mathrm{S}}\limits_{a}^{x}\varphi(x)\underset{\omega}{\triangle}x \tag{7}$$

$$= \frac{1}{\omega}\mathop{\mathrm{S}}\limits_{a+\omega}^{x+\omega}\varphi(x)\underset{\omega}{\triangle}x - \frac{1}{\omega}\mathop{\mathrm{S}}\limits_{a}^{x}\varphi(x)\underset{\omega}{\triangle}x$$

$$= \underset{\omega}{\triangle}\mathop{\mathrm{S}}\limits_{a}^{x}\varphi(x)\underset{\omega}{\triangle}x - \frac{1}{\omega}\int_{a}^{a+\omega}\varphi(x)\,dx.$$

12. Théorème d'existence. — Démontrons maintenant l'existence de $F(x \mid \omega)$ dans le cas où :

1° $\varphi(x)$ admet, pour $x \geqq b$, une dérivée $m^{\text{ième}}$ continue, infiniment petite à l'infini;

2° L'intégrale

$$\int_{0}^{\infty}\overline{B}_{m}(-z)\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz \tag{8}$$

converge uniformément dans l'intervalle $b \leqq x \leqq b+\omega$.

Il résulte de la première hypothèse que

$$\lim_{x \to \infty}\frac{\varphi^{(m-s)}(x)}{x^{s}} = 0 \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{9}$$

D'autre part, nous utiliserons dans la démonstration l'inégalité

$$\left|\int_{z}^{\infty}\overline{B}_{m}(h-z)e^{-\eta\omega z}\,dz\right| < Ce^{-\eta\omega z}, \tag{10}$$

où C est une constante. En effet, si $\psi(z)$ désigne l'intégrale au premier membre, la périodicité de $\overline{B}_{m}(z)$ permet d'écrire

$$\psi(z) = \frac{e^{-\eta\omega z}}{1-e^{-\eta\omega}}\int_{0}^{1}\overline{B}_{m}(h-z-t)e^{-\eta\omega t}\,dt,$$

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

ou encore, en vertu de

$$\int_x^{x+1} \overline{B}_m(t)\,dt = 0,$$

$$\psi(z) = -e^{-\eta\omega z}\int_0^1 \overline{B}_m(h-z-t)\frac{1-e^{-\eta\omega t}}{1-e^{-\eta\omega}}\,dt,$$

et cette intégrale reste finie lorsque η tend vers zéro.

Ceci posé substituons dans la formule d'Euler (13) (§ 4)

$$\varphi_\eta(x) = \varphi(x)e^{-\eta x}$$

à $\varphi(x)$, et ajoutons les équations relatives aux valeurs $x, x+\omega, \ldots, x+(n-1)\omega$ de la variable x. Il vient, pour $x \geqq b$,

$$\begin{aligned}\int_x^{x+n\omega} \varphi_\eta(z)\,dz - \omega\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi_\eta(x+h\omega+\nu\omega) \\ = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu}{\nu!}B_\nu(h)\varphi_\eta^{(\nu-1)}(x) - \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu}{\nu!}B_\nu(h)\varphi_\eta^{(\nu-1)}(x+n\omega) \\ + \frac{\omega^{m+1}}{m!}\int_0^n \overline{B}_m(h-z)\varphi_\eta^{(m)}(x+\omega z)\,dz.\end{aligned}$$

Quand n augmente indéfiniment, η restant fixe, il résulte de (9) que le second terme au second membre tend vers zéro, et l'on a

$$\begin{aligned}F_\eta(x+\omega h \mid \omega) = \int_a^x \varphi_\eta(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu}{\nu!}B_\nu(h)\varphi_\eta^{(\nu-1)}(x) \\ + \frac{\omega^{m+1}}{m!}\int_0^\infty \overline{B}_m(h-z)\varphi_\eta^{(m)}(x+\omega z)\,dz.\end{aligned}$$

Lorsque η tend vers zéro, les deux premiers termes au second membre tendent uniformément vers des limites finies. D'autre part, le dernier terme est une combinaison linéaire d'intégrales

$$P_s = \eta^s\int_0^\infty \overline{B}_m(h-z)\varphi^{(m-s)}(x+\omega z)e^{-\eta(x+\omega z)}\,dz \qquad (s = 0, 1, \ldots, m).$$

En posant

$$f(z) = \int_z^\infty \overline{B}_m(h-z)\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz,$$

l'intégration par parties de P_0 donne

$$P_0 = e^{-\eta x} f(0) - \eta\,\omega \int_0^\infty f(z) e^{-\eta(x+\omega z)}\, dz;$$

mais, en vertu de l'hypothèse 2°, on sait trouver un nombre N indépendant de x, tel que

$$|f(z)| < \varepsilon \qquad (z \geqq \mathrm{N}),$$

pourvu que $b \leqq x \leqq \mathrm{B}$; on a donc

$$|P_0 - e^{-\eta x} f(0)| < \eta\,\omega \left| \int_0^{\mathrm{N}} f(z)\, dz \right| + \eta\,\omega\varepsilon \int_{\mathrm{N}}^\infty e^{-\eta(x+\omega z)}\, dz,$$

et ce second membre tend uniformément vers zéro quand η tend vers zéro. P_0 tend donc uniformément vers $f(0)$.

Pour $s \geqq 1$, l'intégration par parties donne

$$(11)\quad P_s = \eta^s \psi(0) e^{-\eta x} \varphi^{(m-s)}(x) + \eta^s \omega\, e^{-\eta x} \int_0^\infty \varphi^{(m-s+1)}(x+\omega z) \psi(z)\, dz,$$

$\psi(z)$ désignant l'intégrale au premier membre de (10); il résulte de cette inégalité (10) que le dernier terme de (11) est inférieur, en valeur absolue, à

$$(12)\quad \mathrm{C}\eta^s \omega \int_0^\infty |\varphi^{(m-s+1)}(x+\omega z)| e^{-\eta(x+\omega z)}\, dz = \mathrm{C}\eta^s \int_x^\infty |\varphi^{(m-s+1)}(z)| e^{-\eta z}\, dz.$$

D'autre part, (9) exprime qu'il existe un nombre positif N tel que

$$|\varphi^{(m-s+1)}(z)| < \varepsilon z^{s-1}, \qquad \text{si } z > \mathrm{N},$$

quel que soit $\varepsilon > 0$; une borne supérieure des membres de (12) est donc

$$\mathrm{C}\eta^s \int_x^{\mathrm{N}} |\varphi^{(m-s+1)}(z)| e^{-\eta z}\, dz + \mathrm{C}\varepsilon \int_{\mathrm{N}}^\infty \eta^s z^{s-1} e^{-\eta z}\, dz,$$

qui tend uniformément vers zéro avec η, car la dernière intégrale tend vers $\Gamma(s)$. P_s tend donc uniformément vers zéro avec η, pour $s = 1, 2, \ldots, m$, ce qui démontre enfin que $F_\eta(x + \omega h \mid \omega)$ tend uniformément vers la limite

$$(13)\qquad F(x+\omega h\mid\omega)=\int_a^x\varphi(z)\,dz+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu}{\nu!}B_\nu(h)\varphi^{(\nu-1)}(x)$$
$$+\frac{\omega^{m+1}}{m!}\int_0^\infty \overline{B}_m(h-z)\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz,$$

quel que soit h dans l'intervalle $0\leqq h\leqq 1$. En particulier, $F(x\mid\omega)$ *est une fonction continue de x pour toute valeur de x supérieure ou égale à b.* Remarquons aussi que $F(x\mid\omega)$ *est une fonction continue de* ω, *pour* $\omega>0$.

Par exemple, si $\varphi(x)=x^\nu$, on voit que

$$\mathop{\large S}_0^x x^\nu\,\Delta x=\frac{B_{\nu+1}(x)}{\nu+1}.$$

13. Valeurs asymptotiques. — Quand m augmente indéfiniment, la série au second membre de (13) est généralement divergente, mais représente asymptotiquement $F(x+\omega h\mid\omega)$ pour les très grandes valeurs de x, car la dernière intégrale converge, par hypothèse, uniformément par rapport à x, et tend donc vers zéro quand x augmente indéfiniment. En particulier, si l'on pose

$$P(x)=\int_a^x\varphi(z)\,dz+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\omega^\nu}{\nu!}B_\nu\varphi^{(\nu-1)}(x),$$

on a

$$(14)\qquad \lim_{x\to\infty}[F(x\mid\omega)-P(x)]=0.$$

On peut déduire de là une autre expression de $F(x\mid\omega)$. En effet, il résulte de (1) que

$$(15)\qquad F(x\mid\omega)=-\omega\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi(x+\nu\omega)+F(x+n\omega\mid\omega),$$

donc (14) entraîne

$$(16)\qquad F(x\mid\omega)=\lim_{n\to\infty}\left[P(x+n\omega)-\omega\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi(x+\nu\omega)\right]$$

$$(16')\qquad =P(x)-\omega\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\varphi(x+\nu\omega)-\mathop{\Delta}_{\omega}P(x+\nu\omega)\right].$$

La solution principale est ainsi exprimée par une série uniformément convergente dans tout intervalle fini $b \leqq x \leqq B$. En prenant $h \neq 0$, par exemple $h = \frac{1}{2}$, on obtiendrait de nouvelles séries, mais qui ne diffèrent pas essentiellement de (16').

Ces séries sont d'autant plus simples que l'on prend pour m les plus petites valeurs pour lesquelles nos hypothèses sont valables. Par contre, elles sont généralement d'autant plus rapidement convergentes que m est plus grand; il arrive même qu'elles deviennent absolument convergentes dès que m surpasse un certain nombre.

14. Si l'on suppose en outre que $\int_b^\infty |\varphi^{(m)}(z)|\,dz$ a un sens, on peut faire tendre ω vers zéro. En désignant par R_{m+1} le dernier terme de (13), on peut trouver une constante C telle que

$$|R_{m+1}| < C\omega^{m+1}\int_0^\infty |\varphi^{(m)}(x+\omega z)|\,dz < C\omega^m \int_b^\infty |\varphi^{(m)}(z)|\,dz,$$

donc $\omega^{-m+1}R_{m+1}$ tend vers zéro avec ω. De la relation entre les deux restes consécutifs R_m et R_{m+1}, on conclut alors que $\omega^{-m+1}R_m$ *tend vers zéro avec* ω. En particulier,

$$\lim_{\omega \to 0} F(x \mid \omega) = \int_a^x \varphi(z)\,dz \qquad (\omega > 0).$$

Lorsque $\varphi(x)$ est infiniment dérivable, et telle que l'intégrale

$$\int_b^\infty |\varphi^{(m)}(z)|\,dz$$

converge pour toutes les dérivées d'ordre suffisamment grand, on voit que la série infinie des puissances de ω, au second membre de (13), représente asymptotiquement la solution principale pour les valeurs infiniment petites positives de ω.

15. Les dérivées de $F(x \mid \omega)$. — Supposons que $\varphi^{(m)}(x)$ soit continue pour $x \geqq b$, et que la série

$$\Phi_m(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x+\nu\omega)$$

converge uniformément dans l'intervalle $b \leqq x \leqq b + \omega$. Les conditions du paragraphe **12** sont satisfaites, et (13) peut s'écrire

$$(17)\qquad F(x + h\omega \mid \omega) = \int_a^x \varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h)\varphi^{(\nu-1)}(x$$
$$+ \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^1 \overline{B}_m(h - z)\Phi_m(x + \omega z\; dz$$

En dérivant par rapport à h, il vient, pour $h = 0$ et $m > 1$,

$$\frac{d}{dx} \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(x) \underset{\omega}{\triangle} x = \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi'(x) \underset{\omega}{\triangle} x + \varphi(a);$$

$m - 1$ dérivations de (17) donneraient

$$\frac{d^{m-1}F(x + \omega h \mid \omega)}{dx^{m-1}} = \varphi^{(m-2)}(x) + \omega B_1(h)\varphi^{(m-1)}(x)$$
$$+ \omega^2 \int_0^1 \overline{B}_1(h - z)\Phi_m(x + \omega z)\,dz$$

et une nouvelle dérivation, compte tenu de la discontinuité de $\overline{B}_1(h - z)$ pour $z = h$, donne

$$\frac{d^m F(x + \omega h \mid \omega)}{dx^m} = \varphi^{(m-1)}(x) + \omega \int_0^1 \Phi_m(x + \omega z)\,dz - \omega\Phi_m(x + \omega h);$$

ceci devient, pour $h = 0$,

$$(18)\qquad \frac{d^m F(x \mid \omega)}{dx^m} = \lim_{z \succ \infty} \varphi^{(m-1)}(z) - \omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + \nu\omega).$$

Il résulte des hypothèses faites que la série au second membre tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. Donc, *avec ces conditions*, $F(x \mid \omega)$ *admet, pour* $x \geqq b$, *une dérivée* $m^{\text{ième}}$ *continue qui tend vers une limite finie c quand x augmente indéfiniment. Cette propriété est caractéristique*, car la solution générale diffère de la solution principale par une fonction de période ω, et une fonction périodique qui possède la propriété en question est une constante.

En particulier, s'il existe un nombre $p > 1$ tel que

$$(19)\qquad \lim_{x \succ \infty} x^p \varphi^{(m)}(x) = 0,$$

on déduit de (18) que

$$\lim_{x \to \infty} x^{p-1}(F^{(m)}(x \mid \omega) - c) = 0.$$

Il résulte de là que si $\varphi(x)$ est indéfiniment dérivable, et si, quel que soit p, (19) est vrai dès que m surpasse un certain nombre, $F(x \mid \omega)$ est indéfiniment dérivable, et l'on a, quel que soit p,

$$\lim_{x \to \infty} x^{p} F^{(m)}(x \mid \omega) = 0,$$

pourvu que m soit suffisamment grand. $F(x \mid \omega)$ admet donc elle-même une somme, possédant également cette propriété, de sorte qu'on peut déduire de $\varphi(x)$ une succession infinie de sommes itérées.

Remarquons que *la propriété d'admettre une somme caractérise* $F(x \mid \omega)$, car la fonction $F_\eta(x \mid \omega)$ relative à une fonction périodique $\pi(x)$ de période ω est

$$F_\eta(x \mid \omega) = \left[\int_a^{a+\omega} e^{-\eta(z-x)}\pi(z)\,dz - \omega\pi(x)\right]\frac{e^{-\eta x}}{1-e^{-\eta\omega}},$$

et n'admet une limite, quand η tend vers zéro, que si la limite du crochet est nulle, c'est-à-dire si $\pi(x)$ est une constante.

16. **Séries trigonométriques.** — Supposons que $\varphi(x)$ admette, pour $x > b$, une dérivée $m^{\text{ième}}$ continue telle que

$$(20) \qquad \int_b^{\infty} |\varphi^{(m)}(z)|\,dz$$

ait un sens. $F(x \mid \omega)$ admet alors, dans tout intervalle

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \omega \qquad (x_0 > b),$$

un développement de Fourier

$$(21) \qquad F(x \mid \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2n\pi i}{\omega}x},$$

avec

$$c_n = \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x_0+\omega} e^{-\frac{2n\pi i}{\omega}x} F(x \mid \omega)\,dx.$$

On a vu, au paragraphe 11, que

$$c_0 = \int_a^{x_0} \varphi(z)\,dz.$$

Pour $n \neq 0$, un calcul analogue donne

$$c_n = -\lim_{\eta \to 0} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\left(\frac{2n\pi i}{\omega}+\eta\right)z} \varphi(z)\, dz.$$

La limite au second membre a donc un sens, mais l'intégrale ne converge généralement pas pour $\eta = 0$. En l'intégrant m fois par parties, on voit de suite que grâce à (20) l'intégrale obtenue conserve un sens pour $\eta = 0$, ce qui donne

$$c_n = -e^{-\frac{2\pi i n}{\omega} x_0} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(\nu)}(x_0)}{\left(\frac{2\pi i n}{\omega}\right)^{\nu+1}} - \int_{x_0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi i n}{\omega} z} \varphi^{(m)}(z)}{\left(\frac{2\pi i n}{\omega}\right)^{m}} dz.$$

c_n étant généralement de l'ordre de $\frac{1}{n}$, lorsque $|n|$ augmente indéfiniment, la série de Fourier de $F(x \mid \omega)$ n'est pas absolument convergente en général. Pour qu'elle converge absolument, il faut et il suffit que $\varphi(x_0) = 0$.

Pour $x = x_0 + \frac{\omega}{2}$, (21) donne

$$F\left(x + \frac{\omega}{2} \middle| \omega\right) = \int_a^x \varphi(z)\, dz - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lim_{\eta \to 0} \int_0^{\infty} \cos\frac{2n\pi z}{\omega}\, \varphi(x+z) e^{-\eta z} dz.$$

En prenant $x = x_0$, et sachant que la valeur correspondante de la série trigonométrique est $\frac{F(x_0 \mid \omega) + F(x_0 + \omega \mid \omega)}{2}$, il vient

$$F(x \mid \omega) = \int_a^x \varphi(z)\, dz - \frac{\omega}{2}\varphi(x) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\eta \to 0} \int_0^{\infty} \cos\frac{2n\pi z}{\omega}\, \varphi(x+z) e^{-\eta z} dz.$$

Ces deux développements sont valables quel que soit $x > b$.

17. **La fonction $\Psi(x)$.** — Une première application importante de ces généralités se rapporte à $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Nous définissons par

(22) $$\Psi(x) = \underset{1}{\overset{x}{\mathsf{S}}} \frac{\Delta x}{x}$$

la fonction transcendante $\Psi(x)$ étudiée par Legendre, Poisson et Gauss. La fonction $P(x)$ du paragraphe 13 est ici, pour $m = 0$, la fonction $\log x$, donc l'équation (16) donne

$$\Psi(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\log(x+n) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{x+\nu} \right);$$

en particulier,

$$-\Psi(1) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

est la constante d'Euler C. Avec la même fonction $P(x)$, l'équation (16′) s'écrit

$$\Psi(x) = \log x - \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{1}{x+\nu} - \log\left(1 + \frac{1}{x+\nu}\right) \right].$$

Pour $x = 1$, on a l'expression

$$C = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\nu} - \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \right],$$

qui, ajoutée à l'égalité précédente, donne

$$\Psi(x) = -C + \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{x+\nu} \right). \tag{23}$$

La valeur asymptotique de cette fonction est donnée par (14), c'est-à-dire

$$\lim_{x \to \infty} [\Psi(x) - \log x] = 0,$$

et, d'une manière plus précise, par l'équation (13) :

$$\Psi(x+h) = \log x - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \frac{B_\nu(h)}{x^\nu} + \int_0^\infty \overline{B}_m(z-h) \frac{dz}{(x+z)^{m+1}} \qquad (x > 0).$$

La définition (22) fait intervenir les quantités

$$\frac{e^{-\eta(x+\nu)}}{x+\nu} = \int_\eta^\infty e^{-(x+\nu)t} \, dt \qquad (x > 0);$$

substituons ces intégrales dans l'équation (22); en permutant l'intégrale et la somme, et en remarquant que

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\eta z}}{z}\,dz = \int_\eta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt,$$

on obtient

$$\Psi(x) = \lim_{\eta \to 0} \int_\eta^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right) dt;$$

on démontre ainsi que $\Psi(x)$ est représentée, pour $x > 0$, par l'intégrale de Gauss

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right) dt. \tag{24}$$

Grâce à l'identité

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,dt = \log x \qquad (x > 0),$$

on en déduit l'intégrale de Binet

$$\Psi(x) = \log x + \int_0^\infty e^{-xt}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right) dt.$$

La dérivée de $\Psi(x)$ est représentée par des séries très simples. La dérivation de (23) donne d'abord

$$\Psi'(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2},$$

et l'on peut remplacer cette série par des séries de plus en plus convergentes à l'aide de la formule (16′), où

$$P(x) = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{(-1)^\nu B_\nu}{x^{\nu+1}};$$

par exemple, aux valeurs $m = 0$ et 1 correspondent respectivement les séries

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= \frac{1}{x} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2(x+\nu+1)} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2(x+\nu)^2(x+\nu+1)^2},\end{aligned}$$

dont la dernière a été trouvée par Hermite.

La formule de multiplication (5) devient ici

$$\sum_{s=0}^{n-1} \Psi\left(x+\frac{s}{n}\right) = n\,\mathrm{F}(x),$$

$\mathrm{F}(x)$ désignant une solution principale de l'équation

$$n\left[\mathrm{F}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\mathrm{F}(x)\right]=\frac{1}{x};$$

en changeant x en $\frac{x}{n}$, on voit de suite que $\mathrm{F}\left(\frac{x}{n}\right)$ ne diffère de $\Psi(x)$ que par une constante, donc

$$\sum_{s=0}^{n-1} \Psi\left(x+\frac{s}{n}\right) = n\Psi(nx)+\mathrm{C}.$$

Quand x augmente indéfiniment, la valeur asymptotique $\log x$ de $\Psi(x)$ montre que $\mathrm{C}=-n\log n$; la formule de multiplication de la fonction $\Psi(x)$ est donc

$$(25)\qquad \Psi(x)+\Psi\left(x+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\Psi\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=n\Psi(nx)-n\log n.$$

18. **La fonction $\Gamma(x)$.** — Comme autre application, considérons *la fonction* $\log\Gamma(x)$, *définie comme la somme de* $\log x$ *qui s'annule pour* $x=1$. On a donc

$$\log\Gamma(x)=\mathop{\mathrm{S}}_0^x \log x\,\Delta x + c,$$

c étant une certaine constante, et, par conséquent, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. La fonction $\mathrm{P}(x)$ du paragraphe 13, relative à $m=1$, est ici

$$\mathrm{P}(x)=\int_0^x \log z\,dz-\frac{1}{2}\log x=\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x,$$

et l'équation (16) donne

$$\log\Gamma(x)-c=\lim_{n\to\infty}\left[\left(x+n-\frac{1}{2}\right)\log n - n - \sum_{\nu=0}^{n-1}\log(x+\nu)\right].$$

En retranchant de cette équation ce qu'elle devient pour $x=1$, il vient

$$\log\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{x\log n - \log x + \sum_{\nu=1}^{n-1}[\log\nu - \log(x+\nu)]\right\}.$$

On en déduit le produit de Gauss,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\,n^x}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

Si l'on remplace x par $1-x$, le produit de ces deux expressions de $\Gamma(x)$ et $\Gamma(1-x)$ fournit, par un calcul aisé, l'identité

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}. \tag{26}$$

Cette équation permet de calculer c; en effet, cette constante est, par définition,

$$c = -\mathop{\large S}_0^1 \log x\,\Delta x = -\mathop{\large S}_0^1 [\Delta\log\Gamma(x)]\,\Delta x,$$

et, par suite, en vertu de (7),

$$c = \int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx;$$

grâce à (26), on a donc

$$c = \int_0^{\frac{1}{2}} \log[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \log\frac{\pi}{\sin\pi x}\,dx = \log\sqrt{2\pi}.$$

La relation asymptotique (14) donne alors

$$\lim_{x\to\infty}\left[\log\Gamma(x) - \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x + x\right] = \log\sqrt{2\pi}. \tag{27}$$

Plus généralement, l'équation (13) s'écrit ici

$$\log\Gamma(x+h) = \log\sqrt{2\pi} + x\log x - x + B_1(h)\log x$$
$$-\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{(-1)^\nu B_{\nu+1}(h)}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{x^\nu} - \frac{1}{m}\int_0^\infty \overline{B}_m(z-h)\frac{dz}{(x+z)^m},$$

et nous savons que la série au second membre, prolongée indéfiniment, représente asymptotiquement $\log\Gamma(x+h)$ pour $x>0$. Pour $h=0$, ce développement se réduit à la série de Stirling.

La fonction $\Gamma(x)$ se rattache simplement à la fonction $\Psi(x)$ grâce à la relation évidente

$$\frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{x} \frac{\Delta x}{x} = \Psi(x);$$

on en déduit

$$\log\Gamma(x) = \int_1^x \Psi(x)\,dx.$$

L'intégration terme à terme du développement (23) donne alors

$$(28) \qquad \log\Gamma(x+1) = \int_0^x \Psi(x+1)\,dx = -Cx + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x}{\nu} - \log\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right];$$

on en déduit l'expression de Schlömilch,

$$\Gamma(x+1) = e^{-Cx}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}}.$$

En remplaçant $\Psi(x+1)$ par son expression (24), on déduit de (28) la formule de Plana

$$\log\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty}\left(x - \frac{1-e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)\frac{e^{-t}}{t}\,dt \qquad (x > -1).$$

La formule de multiplication de $\log\Gamma(x)$ peut s'établir à partir de (25), en intégrant de 1 à x. On obtient de suite

$$\log\left[\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\right] = \log\Gamma(nx) - nx\log n + \text{const.},$$

la constante se calculant aisément à l'aide de l'expression asymptotique (27). On trouve

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)n^{nx}}{\Gamma(nx)} = \sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

ce qui fournit le théorème de la multiplication de $\Gamma(x)$, dû à Gauss et Legendre,

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-nx}\,\Gamma(nx).$$

19. Représentation de la somme par des intégrales définies. — On suppose maintenant que x et ω sont complexes. Soit $\varphi(x)$ une fonction holomorphe dans un angle aigu $\mathcal{D}$ contenant l'axe réel positif et limité par deux rayons vecteurs situés au-dessus et au-dessous de cet axe. Si l'on a, uniformément dans $\mathcal{D}$,

$$\lim_{x \to \infty} x^{1+\varepsilon} \varphi^{(m)}(x) = 0 \qquad (\varepsilon > 0),$$

pourvu que m soit assez grand, l'analyse du paragraphe 12 montre que $F(x \mid \omega)$ existe lorsque x et ω sont intérieurs à $\mathcal{D}$. Cette fonction est holomorphe dans cet angle, et les expressions analytiques données plus haut sont valables.

Plus généralement, supposons qu'on ait, uniformément dans $\mathcal{D}$,

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) e^{-\varepsilon |x|} = 0 \qquad (\varepsilon > 0), \tag{29}$$

quelque petit que soit ε. $F_\eta(x \mid \omega)$ existe quel que soit $\eta > 0$, pourvu que x et ω restent dans $\mathcal{D}$. En posant, comme plus haut,

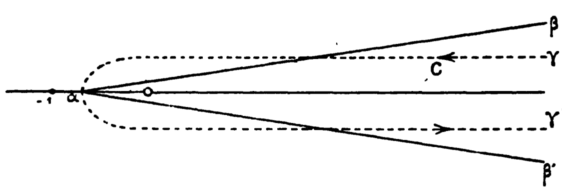
$$\varphi_\eta(x) = \varphi(x) e^{-\eta x},$$

la théorie des résidus montre que l'on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\eta(x + \nu\omega) = \frac{1}{2i} \int_C \varphi_\eta(x + \omega z) \cot \pi z \, dz, \tag{30}$$

C étant un lacet rectiligne direct $\gamma\alpha\gamma'$, contenant l'axe réel positif, et coupant l'axe réel négatif en un point α compris entre o et -1 et

Fig. 2.



assez voisin de o pour que $x + \omega z$ reste dans $\mathcal{D}$ quand z décrit C.

A l'aide de l'une ou l'autre des deux identités

$$\frac{\cot \pi z}{2i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - e^{-2\pi i z}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{2\pi i z}},$$

suivant que z est sur $\gamma\alpha$ ou $\alpha\gamma'$, on a donc

$$(31)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\eta(x+\nu\omega) = \int_\alpha^\infty \varphi_\eta(x+\omega z)\,dz - \int_{\alpha\gamma}\frac{\varphi_\eta(x+\omega z)}{1-e^{-2\pi i z}}\,dz - \int_{\alpha\gamma'}\frac{\varphi_\eta(x+\omega z)}{1-e^{2\pi i z}}\,dz,$$

la première intégrale étant prise le long de l'axe réel. On peut déformer les chemins $\alpha\gamma$ et $\alpha\gamma'$ des deux dernières intégrales suivant les côtés $\alpha\beta$ et $\alpha\beta'$ d'un angle aigu, situés au dessus et au-dessous de l'axe réel positif (*fig.* 2), et tels que $x+\omega z$ reste dans $\mathcal{D}$ quand z les décrit. Ces deux intégrales, prises respectivement le long de $\alpha\beta$ et $\alpha\beta'$, conservent un sens quand η tend vers zéro, donc $F(x\,|\,\omega)$ existe, et l'on a

$$(32)\quad F(x\,|\,\omega) = \int_a^{x+\omega\alpha}\varphi(z)\,dz + \omega\int_{\alpha\beta}\frac{\varphi(x+\omega z)}{1-e^{-2\pi i z}}\,dz + \omega\int_{\alpha\beta'}\frac{\varphi(x+\omega z)}{1-e^{2\pi i z}}\,dz.$$

En introduisant la primitive

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(z)\,dz \qquad (a > b),$$

l'intégration par parties des deux dernières intégrales de (32) donne l'expression simple

$$(33)\quad F(x\,|\,\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta'\alpha\beta}\psi(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 dz \qquad (-1 < \alpha < 0).$$

On voit aussi que $F(x\,|\,\omega)$ est une fonction analytique de x et de ω, holomorphe dans $\mathcal{D}$.

20. On obtient des résultats analogues en supposant :

1° Que $\varphi(x)$ soit holomorphe dans un demi-plan $\sigma \geqq b\,(x = \sigma + i\tau)$, et qu'on puisse trouver deux constantes positives C et k telles qu'on ait, dans ce demi-plan,

$$(34)\quad |\varphi(x)| < C e^{(k+\varepsilon)|x|} \qquad (\varepsilon > 0),$$

quelque petit que soit ε;

2° Que dans une bande quelconque située dans ce demi-plan et parallèle à l'axe réel, on ait

$$(35)\qquad |\varphi(x)| < Ce^{\varepsilon|x|} \qquad (\varepsilon > 0),$$

quelque petit que soit ε.

Prenons $\omega > 0$, $\sigma > b$. (30) et (31) subsistent, et l'on peut déplacer $\alpha\gamma$ et $\alpha\gamma'$ jusqu'aux deux demi-droites $\alpha\beta$, $\alpha\beta'$ parallèles à l'axe imaginaire, pourvu que $(k+\varepsilon)\omega - 2\pi < 0$, ce qui se produit si $\omega < \frac{2\pi}{k}$. En faisant tendre η vers zéro, on retrouve (32) où $\alpha\beta$ et $\alpha\beta'$ sont parallèles à l'axe imaginaire, et (33) où le chemin d'intégration est la droite $(\alpha - i\infty, \alpha + i\infty)$. Dans ces deux formules, α est un nombre quelconque compris entre 0 et -1, avec $\sigma > b - \omega\alpha$.

En particulier, si l'on fait tendre α vers zéro, en déformant la ligne d'intégration à gauche de $z = 0$, (32) devient

$$(36)\quad F(x\,|\,\omega) = \int_a^x \varphi(z)\,dz - \frac{\omega}{2}\varphi(x) + i\omega\int_0^\infty \frac{\varphi(x+i\omega t) - \varphi(x - i\omega t)}{1 - e^{2\pi t}}\,dt.$$

On voit que $F(x\,|\,\omega)$ est une fonction analytique de x, holomorphe pour $\sigma \geqq b$, tant que $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Mais il n'en est plus ainsi quand ω sort de cet intervalle.

Cette expression de la solution de l'équation (1) a été donnée par Plana [1] et Abel [1]. La première démonstration rigoureuse est due à Cauchy [1], qui a établi une formule sensiblement équivalente. On trouvera une autre démonstration de la formule (36) dans un ouvrage important de E. Lindelöf [3], où elle est déduite directement de la formule sommatoire d'Euler. On peut la déduire également de l'intégrale de Guichard, par une transformation très simple de cette intégrale sous la forme donnée par Weber, et citée au paragraphe 9.

21. Supposons, plus particulièrement, que $\varphi(x)$ soit une fonction entière satisfaisant à (35) pour toute valeur de x. L'intégrale (33), de chemin $(\alpha - i\infty, \alpha + i\infty)$, conserve un sens quels que soient les nombres complexes x et ω, et fournit le prolongement analytique de $F(x\,|\,\omega)$ dans tout le plan. $F(x\,|\,\omega)$ est donc une fonction entière de x et de ω. En remplaçant ω et z par $-\omega$ et $-1-z$, (33) devient

$$F(x\,|-\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \psi(x + \omega + \omega z)\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 dz \qquad (-1 < \alpha < 0),$$

dont la comparaison avec (33) fournit la relation remarquable

$$F(x-\omega \mid -\omega) = F(x \mid \omega). \tag{37}$$

La formule (9) (§ 2) en est une application.

22. **Prolongement analytique.** — Les résultats précédents peuvent être établis en substituant $e^{-\eta\lambda(x)}$ au facteur $e^{-\eta x}$, où

$$\lambda(x) = x^p \log^q x \qquad (p \geqq 1,\ q \geqq 0).$$

Il n'y a presque rien à changer aux démonstrations. Mais on peut ainsi étendre les résultats aux fonctions $\varphi(x)$ qui satisfont à la seule condition 1° du paragraphe 20, en définissant leur somme par

$$\underset{a}{\overset{x}{\mathbf{S}}}\varphi(x) \underset{\omega}{\triangle} x = \lim_{\eta \to 0} \left\{ \int_a^\infty \varphi(z) e^{-\eta\lambda(z)} dz - \omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(x+\nu\omega) e^{-\eta\lambda(x+\nu\omega)} \right\}, \tag{38}$$

avec $p > 1$, ou avec $p = 1$, $q > 0$. Le raisonnement du paragraphe 19 donne encore l'équation (31), avec $\sigma > b$, où l'on aurait posé

$$\varphi_\eta(x) = \varphi(x) e^{-\eta\lambda(x)}. \tag{39}$$

On voit que l'on peut encore déformer les chemins $\alpha\gamma$ et $\alpha\gamma'$ des deux dernières intégrales de (31) suivant des rayons vecteurs $\alpha\beta$ et $\alpha\beta'$ faisant avec l'axe réel positif des angles $\pm\theta$ tels que

$$|\xi| + \theta < \frac{\pi}{2p} \qquad (\theta > 0),$$

où l'on a posé $\omega = \rho e^{i\xi}$. Lorsque η tend vers zéro, ces deux intégrales conservent un sens pourvu que ω soit assez petit, et l'on retrouve (32). On voit qu'en faisant tendre p vers 1 on peut écarter $\alpha\beta$ et $\alpha\beta'$ jusqu'à ce que $\theta = \frac{\pi}{2} - |\xi|$, pourvu que

$$\rho < \frac{2\pi}{k} \cos\xi.$$

On peut donc affirmer que la limite (38) existe pourvu que ρ soit intérieur au cercle de diamètre $\left(0, \frac{2\pi}{k}\right)$, et ne dépend pas de $\lambda(x)$. Par contre, il arrive que cette limite cesse d'exister quand ω sort de ce cercle.

En particulier, si $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$, on retrouve également (33). On déduit de cette équation qu'il existe une constante C telle que

$$|F(x \mid \omega)| < Ce^{(k+\varepsilon)|x|} \qquad (\sigma > b), \tag{40}$$

pour toute valeur fixe de ω de cet intervalle. Notre opération de sommation s'applique donc à $F(x \mid \omega)$, et ainsi de suite, les sommes successives vérifiant toutes l'inégalité (40). *La propriété d'être holomorphe dans une bande $b < \sigma < b + \omega$, et d'être la solution de la plus petite croissance dans cette bande caractérise la solution principale*, car une fonction $\pi(x)$ de période positive ω, holomorphe pour $\sigma > b$, et vérifiant (40), avec $k < \frac{2\pi}{\omega}$, est une constante.

23. Le développement trigonométrique de $F(x \mid \omega)$ se déduit aisément de (31), où $\varphi_\eta(x)$ a la signification (39). A l'aide des développements limités

$$\frac{1}{1 - e^{\pm 2\pi i z}} = -\sum_{\nu=1}^{m} e^{\mp 2\nu\pi i z} + \frac{e^{\mp 2m\pi i z}}{1 - e^{\pm 2\pi i z}},$$

cette équation donne, pour $\sigma > b - \alpha\omega$,

$$\begin{aligned} F_\eta(x \mid \omega) = \int_a^{x+\alpha\omega} \varphi_\eta(z)\,dz - 2\omega \sum_{\nu=1}^{m} \int_\alpha^\infty \cos(2\nu\pi z)\varphi_\eta(x + \omega z)\,dz \\ + \omega \int_{\alpha\gamma} \varphi_\eta(x + \omega z) \frac{e^{2m\pi i z}}{1 - e^{-2\pi i z}}\,dz + \omega \int_{\alpha\gamma'} \varphi_\eta(x + \omega z) \frac{e^{-2m\pi i z}}{1 - e^{2\pi i z}}\,dz. \end{aligned}$$

Si $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$, les transformations des chemins d'intégration faites dans le paragraphe 22, avec $\xi = 0$, donnent

$$\begin{aligned} F(x \mid \omega) = \int_a^{x_0} \varphi(z)\,dz \\ - 2 \sum_{\nu=1}^{m} \lim_{\eta \to 0} \int_{x_0}^\infty \cos \frac{2\nu\pi(z - x)}{\omega} \varphi(z) e^{-\eta\lambda(z)}\,dz + R_m \end{aligned} \tag{41}$$

avec $x_0 = x + \alpha\omega\,(0 > \alpha > -1)$, et où

$$\begin{aligned} R_m = \omega \int_\alpha^{\alpha + i\infty} \varphi(x + \omega z) \frac{e^{2m\pi i z}}{1 - e^{2\pi i z}}\,dz \\ + \omega \int_\alpha^{\alpha - i\infty} \varphi(x + \omega z) \frac{e^{-2m\pi i z}}{1 - e^{2\pi i z}}\,dz. \end{aligned} \tag{42}$$

Il résulte de (42) et de l'inégalité (34) que

$$|R_m| < 2C \int_{\alpha}^{\alpha+i\infty} |e^{2m\pi iz}\, dz| = \frac{C}{m\pi},$$

donc R_m tend vers zéro quand m augmente indéfiniment. La série trigonométrique au second membre de (41), prolongée indéfiniment, représente donc $F(x\,|\,\omega)$ dans l'intervalle $0 < x - x_0 < \omega$.

Les intégrales dont les limites constituent cette série n'ont généralement pas de sens pour $\eta = 0$. Mais on peut écrire

$$\begin{aligned} F(x\,|\,\omega) = & \int_a^{x_0} \varphi(z)\, dz \\ & - 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \lim_{\eta \to 0} \int_0^{\infty} \cos\frac{2\nu\pi(z+x_0-x)}{\omega}\, \varphi(x_0+z)\, e^{-\eta\lambda(x_0+z)}\, dz, \end{aligned}$$

et déplacer deux fois le chemin de ces intégrales comme on a fait pour obtenir (41); pour les termes en $e^{\frac{2\nu\pi i}{\omega}}$, l'axe réel positif est déformé jusqu'à l'axe imaginaire positif; il devient l'axe imaginaire négatif pour les termes en $e^{-\frac{2\nu\pi i}{\omega}}$; les intégrales ainsi obtenues ont un sens pour $\eta = 0$; en faisant enfin le changement de variable (z, iz), il vient

$$(43) \quad F(x\,|\,\omega) = \int_a^{x_0} \varphi(z)\, dz + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[a_\nu \cos\frac{2\nu\pi(x-x_0)}{\omega} + b_\nu \sin\frac{2\nu\pi(x-x_0)}{\omega} \right]$$

avec

$$a_\nu = \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\nu\pi z}{\omega}}\, \frac{\varphi(x_0+iz) - \varphi(x_0-iz)}{i}\, dz,$$

$$b_\nu = -\int_0^{\infty} e^{-\frac{2\nu\pi z}{\omega}} [\varphi(x_0+iz) + \varphi(x_0-iz)]\, dz.$$

Le reste de la série (43) est encore donné par (42).

24. Si l'on veut pouvoir prolonger $F(x\,|\,\omega)$ en dehors des domaines indiqués au paragraphe 22, il faut faire des hypothèses plus restrictives. Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction entière satisfaisant à la condition (34) dans tout le plan. L'intégrale (33) de chemin

$$(\alpha - i\infty,\ \alpha + i\infty)$$

montre que $F(x\,|\,\omega)$ est holomorphe pour toute valeur de x, pourvu que $|\omega| < \frac{2\pi}{k}$. Si l'inégalité (34) ne subsiste pas dès que ε prend une valeur négative, il y a un point singulier sur la circonférence de ce cercle. En effet, si l'on remplace, dans (33), $\psi(x+\omega z)$ par son développement de Taylor,

$$\psi(x+\omega z) = \int_a^x \varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^\nu z^\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x),$$

l'intégration du terme général fait apparaître ([1]) $B_\nu(0)$. Sachant que $B_1 = -\frac{1}{2}$ et $B_{2\nu+1} = 0\,(\nu > 0)$, on a donc

$$F(x \mid \omega) = \int_a^x \varphi(z)\,dz - \frac{\omega}{2}\varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} \varphi^{(2\nu-1)}(x).$$

Or il résulte de (17) (§ 5) que

$$\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} \sim 2\,\frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\pi)^{2\nu}}$$

quand ν croît indéfiniment; d'autre part, les hypothèses faites sur $\varphi(x)$ entraînent

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, |\varphi^{(\nu)}(x)|^{\frac{1}{\nu}} = k, \tag{44}$$

d'où l'on conclut que la série entière en ω admet le cercle $|\omega| = \frac{2\pi}{k}$ pour cercle de convergence.

23. Supposons maintenant que $\varphi(x)$, toujours uniforme, possède un nombre limité de points singuliers $\beta_s\,(s=1, 2, \ldots, \mu)$ dans le plan, et vérifie encore (34) pourvu que $|x|$ soit assez grand. Cette fonction est holomorphe dans deux demi-plans $\sigma > b$, $\sigma < \overline{b}$, et les résultats du paragraphe 20 subsistent. Reprenons l'expression (33), de chemin $(\alpha - i\infty, \alpha + i\infty)$, valable pour $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. On suppose $a > b$, et, si $\sigma > b$, que $\psi(z)$ est définie par un chemin d'intégration situé dans ce demi-plan. On peut remplacer le chemin rectiligne de (33) par le chemin $A'B'C'\alpha CBA$, formé d'un petit cercle $C'\alpha C$ entourant $z=0$, des deux segments CB, CB′ d'équations

([1]) On a en effet l'intégrale (33) relative à $\psi(z) = z^\nu$, avec $x = 0$.

$\tau = \pm\,\delta\,(\delta \leqq \sigma \leqq d)$, et des deux demi-droites BA, B'A' $(\sigma = d, |\tau| > \delta)$. Quel que soit x d'abscisse plus grande que b, et ω dans le demi-cercle (c) défini par $\mathcal{R}(\omega) \geqq 0$, $|\omega| < \frac{2\pi}{k}$, l'origine étant exclue, on peut choisir δ assez petit et d assez grand pour que $\psi(x + \omega z)$ soit holomorphe quand z décrit A'B'C'αCBA. $F(x \mid \omega)$ est donc une fonction analytique de x et de ω, holomorphe pour $\sigma > b$ et ω dans (c).

On peut prolonger cette fonction à l'aide de (15) (§ 13). ω étant donné dans (c), on peut, quel que soit x, choisir n assez grand pour que $F(x + n\omega \mid \omega)$ soit holomorphe en x et ω. Donc $F(x \mid \omega)$ est une fonction uniforme de x admettant les seuls points singuliers

$$\beta_s - \nu\omega \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

(15) (§ 13) montre que la singularité de $F(x \mid \omega)$ en chacun de ces points est généralement celle de $-\,\omega\varphi(x + \nu\omega)$.

26. On peut prolonger autrement $F(x \mid \omega)$. Soit $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$, $\sigma > b$, et écrivons (33)

$$(45)\qquad F(x \mid \omega) = \frac{1}{2\pi i\omega}\int_{x+\omega\alpha-i\omega\infty}^{x+\omega\alpha+i\omega\infty} \psi(z)\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi(z-x)}{\omega}}\right]^2 dz.$$

Déplaçons x vers la gauche, le long d'une parallèle à l'axe réel qui ne rencontre aucun des β_s. Toutes les fois que le chemin d'intégration L de (45) rencontre un de ces points, il faut ajouter la valeur de l'intégrale étendue au lacet rectiligne Γ_s, d'origine $\beta_s - i\infty$, qui tourne dans le sens direct autour de β_s. Lorsque $\sigma < b$, on a donc

$$(46)\qquad F(x \mid \omega) = \pi(x \mid \omega) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \psi(x + \omega z)\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 dz \qquad \left(0 < \omega < \frac{2\pi}{k}\right),$$

$\pi(x \mid \omega)$ étant la fonction, de période ω,

$$(47)\qquad \pi(x \mid \omega) = \frac{1}{2\pi i\omega}\sum_{s=1}^{\mu}\int_{\Gamma_s} \psi(z)\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi(z-x)}{\omega}}\right]^2 dz.$$

L'intégrale au second membre de (46) est holomorphe pour $\sigma < b$

et ω dans (c); donc, lorsque x et ω restent dans ces deux domaines, les points singuliers de $F(x \mid \omega)$ sont ceux de $\pi(x \mid \omega)$. En intégrant (47) par parties, et remarquant que $\left| \cot \frac{\pi(z-x)}{\omega} - i \right|$ tend vers zéro comme $e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}$ quand z s'éloigne à l'infini sur Γ_s, il vient

$$\pi(x \mid \omega) = \frac{1}{2i} \sum_{s=1}^{\mu} \int_{\Gamma_s} \varphi(z) \left[\cot \frac{\pi(z-x)}{\omega} - i \right] dz. \tag{48}$$

La fonction sous le signe étant maintenant uniforme, la théorie des résidus donne, avec la notation de Cauchy,

$$\pi(x \mid \omega) = -\pi i \sum_{s=1}^{\mu} A_s + \mathcal{E}[\varphi(z)] \pi \cot \frac{\pi(z-x)}{\omega}, \tag{49}$$

A_s désignant le résidu de $\varphi(x)$ au point β_s. On voit que $\pi(x \mid \omega)$ admet les points singuliers $\beta_s \pm \nu\omega$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$.

27. Reprenons l'expression (45), avec $\sigma > b$, et, laissant x fixe, déplaçons ω le long d'un cercle de centre $\omega = 0$, à partir d'une valeur positive inférieure à $\frac{2\pi}{k}$. Lorsque ω est devenu négatif, après une rotation dans le sens inverse, le chemin d'intégration L a balayé tout le plan, de sorte qu'à l'intégrale prise le long du nouveau chemin se seront ajoutées les valeurs qu'elle prend le long des lacets Γ_s. On retrouve ainsi (46) avec (49). Mais si l'on fait tourner ω dans le sens direct, le rôle des lacets Γ_s est rempli par les lacets Γ'_s d'origine $\beta_s + i\infty$, de sorte que, dans l'expression (48), Γ_s est remplacé par Γ'_s et $-i$ par $+i$. On obtient donc (46), où $\pi(x \mid \omega)$ serait remplacé par

$$\pi i \sum_{s=1}^{\mu} A_s + \mathcal{E}[\varphi(z)] \pi \cot \frac{\pi(z-x)}{\omega} = -\pi(x \mid -\omega). \tag{50}$$

On voit ainsi que $F(x \mid \omega)$ *est une fonction non uniforme de* ω. Pour une rotation complète autour de $\omega = 0$ dans le sens direct, sa valeur s'accroît de

$$2\pi i \sum_{s=1}^{\mu} A_s = -2\pi i A,$$

A étant le résidu de $\varphi(x)$ à l'infini. Nous la rendrons uniforme à l'aide de la coupure rectiligne $(0, -i\infty)$.

ω étant devenu négatif sans traverser la coupure, on peut déplacer x comme au paragraphe 26 jusqu'en un point du demi-plan $\sigma < \overline{b}$; ω étant négatif, et les Γ'_s étant parcourus dans le sens inverse, la contribution de ces lacets détruit le terme (50), de sorte qu'on retrouve (45), où ω est négatif. On a ainsi réalisé le prolongement analytique complet de $F(x \mid \omega)$. Si $(\overline{c})$ désigne le demi-cercle opposé à (c), on voit que $F(x \mid \omega)$ est holomorphe pour $\sigma < \overline{b}$, et ω dans $(\overline{c})$.

Il résulte encore de ce qui précède que

$$F(x - \omega \mid -\omega) = F(x \mid \omega) - \pi(x \mid \omega), \tag{51}$$

et cette relation subsiste pour les valeurs complexes de ω, pourvu que la coupure ne soit pas franchie. La formule (26) (§ 18) en est une application. De même, en posant $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, la relation (51) prend la forme

$$\Psi(1 - x) = \Psi(x) + \pi \cot \pi x.$$

28. Sans changer les hypothèses, on peut définir de même la fonction

$$\overline{F}(x \mid \omega) = \mathop{\mathbf{S}}_{-a}^{x} \varphi(-z) \mathop{\Delta}_{\omega} z \qquad (a > b)$$

par la limite [1]

$$\overline{F}(-x \mid \omega) = \lim_{\eta \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{a} \varphi(z) e^{-\eta\lambda(z)} dz - \omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(x - \nu\omega) e^{-\eta\lambda(x - \nu\omega)} \right\}, \tag{52}$$

l'intégrale au second membre étant définie par un chemin situé au-dessus de tous les points β_s. Cette limite existe, par exemple, pour $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$ et $\sigma < \overline{b}$, et l'on a alors

$$\overline{F}(-x \mid \omega) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \psi(x - \omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 dz.$$

On en conclut que

$$\overline{F}(-x \mid \omega) = -F(x \mid -\omega).$$

Compte tenu de cette relation et des expressions (38) et (52), on

---

[1] On peut, en effet, remplacer $\lambda(z)$ par $\lambda(-z)$.

déduit de (51) que

$$(53)\quad \pi(x\mid\omega)=\lim_{\eta\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)e^{-\eta\lambda(z)}dz-\omega\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\varphi(x+\nu\omega)e^{-\eta\lambda(x+\nu\omega)}\right\},$$

valable pour $0<\omega<\frac{2\pi}{k}$ et pourvu que x soit sur une parallèle D à l'axe réel ne passant pas par un β_s.

La fonction périodique $\pi(x\mid\omega)$ est développable en série de Fourier le long d'une telle droite D. Les coefficients de ce développement

$$\pi(x\mid\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}\qquad (x \text{ sur D})$$

sont donnés par

$$c_n=\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega}\pi(x\mid\omega)e^{-\frac{2n\pi i x}{\omega}}dx.$$

En substituant le développement uniformément convergent (53), l'intégration terme à terme donne

$$\begin{aligned} c_0 &= \lim_{\eta\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)e^{-\eta\lambda(z)}dz-\int_{x-\infty}^{x+\infty}\varphi(z)e^{-\eta\lambda(z)}dz\right\}\\ &= -2\pi i\sum_s{}' \mathrm{A}_s, \end{aligned}$$

cette dernière somme étant étendue aux pôles β_s situés au-dessus de D. On obtient de même, pour $n\neq 0$,

$$(54)\qquad c_n=-\lim_{\eta\to 0}\int_{x-\infty}^{x+\infty}\varphi(z)e^{-\eta\lambda(z)}e^{-\frac{2n\pi i z}{\omega}}dz.$$

Si n est positif, cette intégrale a pour valeur la somme

$$c_n=2\pi i \mathop{\mathcal{E}}^{''}\varphi(x)e^{-\frac{2n\pi i x}{\omega}}\qquad (n>0),$$

étendue aux points β_s situés au-dessous de D, car l'hypothèse (34) et $0<\omega<\frac{2\pi}{k}$ montrent que l'intégrale (54) est nulle pour un chemin situé au-dessous de tous les points singuliers.

On voit de même que, pour $n<0$,

$$c_n=-2\pi i \mathop{\mathcal{E}}^{'}\varphi(x)e^{-\frac{2n\pi i x}{\omega}}\qquad (n<0),$$

cette somme étant étendue aux points β_s situés au-dessus de D.

On conclut de là que $\pi(x \mid \omega)$ est représentable par une même série trigonométrique dans toute bande parallèle à l'axe réel, comprise entre deux points singuliers de cotes consécutives. En particulier, $c_0 = 0$ pour $\tau > \mathcal{R}\left(\frac{\beta_s}{i}\right)$ $(s = 1, 2, \ldots, \mu)$, et $c_0 = 2\pi i A$ pour $\tau < \mathcal{R}\left(\frac{\beta_s}{i}\right)$ $(s = 1, 2, \ldots, \mu)$.

29. **Série asymptotique.** — Les points singuliers de $F(x \mid \omega)$ dans le plan des ω sont les points $\frac{\beta_s - x}{\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, donc $\omega = 0$ est un point singulier essentiel, et tous les points singuliers sont sur μ rayons vecteurs issus de ce point. Pour étudier $F(x \mid \omega)$ au voisinage de $\omega = 0$, x étant fixe dans le demi-plan $\sigma > b$, reprenons le calcul du paragraphe 24 avec le développement de Taylor de $\psi(x + \omega z)$, limité par le reste de Darboux,

$$\psi(x+\omega z) = \int_a^x \varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu z^\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu-1)}(x) + \zeta\frac{\omega^{m+1}z^{m+1}}{(m+1)!}\varphi^{(m)}(x+\Theta\omega z),$$

où $0 < \Theta < 1$ et $|\zeta| < 1$. Il vient alors

$$(55)\quad F(x \mid \omega) = \int_a^x \varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu B_\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu-1)}(x)$$
$$+ \frac{\omega^{m+1}}{(m+1)!}\frac{\zeta}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \varphi^{(m)}(x+\Theta\omega z)\,z^{m+1}\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 dz.$$

La série au second membre ne peut pas être convergente lorsqu'on la prolonge indéfiniment avec m, sans quoi le point $\omega = 0$ serait régulier, mais elle représente asymptotiquement $F(x \mid \omega)$ quand ω tend vers zéro d'une certaine manière. En effet, l'intégrale dans le dernier terme R_m de (55) converge pour $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$; et l'on peut déformer le chemin d'intégration suivant les côtés $\alpha\beta$, $\alpha\beta'$ d'un angle placés comme dans la figure 2. $\pm\varkappa$ étant leurs angles avec l'axe réel positif, l'intégrale prise le long de $\beta'\alpha\beta$ a un sens pourvu que ω reste dans le demi-cercle (c) avec

$$|\omega| < \frac{2\pi\sin\varkappa - \varepsilon}{k} \qquad (\varepsilon > 0),$$

$|\varkappa|$ étant assez petit pour que $\varphi^{(m)}(x + \Theta\omega z)$ reste holomorphe le long de $\beta'\alpha\beta$. On sait alors trouver une constante C telle que l'on ait constamment

$$\left|\frac{\varphi^{(m)}(x+\theta\omega z)}{(m+1)!}\right| < \mathrm{C}\, e^{k|\omega z|},$$

et, par suite,

$$|\mathrm{R}_m| < 2\mathrm{C}|\omega|^{m+1}\int_{\beta'\alpha\beta} e^{(2\pi\sin\chi-\varepsilon)|z|}\left|\frac{z^{m+1}\,dz}{(\sin\pi z)^2}\right|.$$

On a donc, *uniformément*,

$$\lim_{|\omega|\to 0}\frac{\mathrm{R}_m}{\omega^m} = 0,$$

ω *tendant vers zéro à l'intérieur de* (c). On verrait de même que ce résultat subsiste pour $\sigma < \bar{b}$, ω tendant vers zéro à l'intérieur du demi-cercle $(\bar{c})$. On en conclut que la série divergente

$$(56)\qquad \int_a^x \varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\omega^\nu \mathrm{B}_\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu-1)}(x)$$

représente asymptotiquement $\mathrm{F}(x\,|\,\omega)$ dans l'angle $-\frac{\pi}{2} \leqq \arg\omega \leqq \frac{\pi}{2}$ si $\sigma > b$, et dans l'angle $\frac{\pi}{2} \leqq \arg\omega \leqq \frac{3\pi}{2}$ si $\sigma < \bar{b}$. Il résulte du paragraphe précédent que cette série représentera asymptotiquement

$$\mathrm{F}(x\,|\,\omega) + \pi(x\,|\,-\omega)$$

dans l'angle $\frac{\pi}{2} \leqq \arg\omega \leqq \frac{3\pi}{2}$ si $\sigma > b$, et

$$\mathrm{F}(x\,|\,\omega) - \pi(x\,|\,\omega) = \mathrm{F}(x-\omega\,|\,-\omega)$$

dans l'angle $-\frac{\pi}{2} \leqq \arg\omega \leqq \frac{\pi}{2}$ si $\sigma < \bar{b}$.

Plus précisément, en posant $\omega = \rho e^{i\xi}$ et $\beta_s - x = r_s e^{i\theta_s}$, l'expression (50) montre que, lorsque ω tend vers zéro sur un rayon vecteur non singulier d'argument ξ, on a [1]

$$\lim_{\omega\to 0}\pi(x\,|\,-\omega) = -\pi i\sum_{s=1}^{\mu}\mathrm{A}_s + \pi i\sum_{s=1}^{\mu}\mathrm{A}_s\lim_{\rho\to 0}\frac{e^{\frac{2\pi r_s}{\rho}\sin(\theta_s-\xi)}+1}{e^{\frac{2\pi r_s}{\rho}\sin(\theta_s-\xi)}-1}.$$

---

[1] Les dérivées de $\cot\dfrac{\pi(\beta_s-x)}{\omega}$ étant infiniment petites quand ρ tend vers zéro, la limite du résidu de $\varphi(z)\pi\cot\dfrac{\pi(z-x)}{\omega}$ est égale à la limite du terme

$$\pi\mathrm{A}_s\cot\frac{\pi(\beta_s-x)}{\omega}.$$

Donc, si $\sigma > b$, et si les β_s sont numérotés dans l'ordre des arguments θ_s croissants, qui sont alors compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, la série (56) représente asymptotiquement

$$F(x \mid \omega) - 2\pi i \sum_{s=1}^{p} A_s \qquad [\arg(\beta_p - x) < \arg\omega < \arg(\beta_{p+1} - x)].$$

On voit que la valeur asymptotique fait un saut brusque égal à une période de $\psi(x)$, quand ω franchit un rayon vecteur singulier. On a donc

$$\lim_{\omega \to 0} F(x \mid \omega) = \int_a^x \varphi(z)\, dz$$

le long de tout rayon vecteur non singulier, la détermination de l'intégrale changeant lorsque l'argument de ω traverse une valeur singulière.

CHAPITRE IV.

MÉTHODES DIVERSES DE SOMMATION.

30. R. D. Carmichael [1] obtient les résultats exposés au paragraphe 6 par la méthode intéressante suivante. Étant donnée la fonction entière

(1) $$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} x^\nu,$$

il s'agit de trouver une solution

(2) $$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_\nu}{\nu!} x^\nu$$

de l'équation

(3) $$\Delta f(x) = \varphi(x).$$

La substitution des développements (1) et (2) dans (3) fournit les équations

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{f_{\nu+s}}{s!} = a_\nu$$

et, par suite, en posant

$$(4) \qquad f_\nu = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda_\nu^{(h)} a_h,$$

$$(5) \qquad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu+s}^{(h)}}{s!} = \varepsilon_{\nu,h} \qquad (\varepsilon_{\nu,h} = 0 \text{ si } \nu \neq h;\ \varepsilon_{h,h} = 1).$$

On est ainsi conduit à prendre

$$(6) \qquad \lambda_\nu^{(h)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_h} \frac{dz}{(e^z - 1) z^{h-\nu+1}},$$

C_h étant un contour entourant l'origine. On vérifie aisément qu'il suffit que C_h entoure $z = 0$ et soit indépendant de ν pour que les quantités $\lambda_\nu^{(h)}$ définies par (6) soient une solution de (5).

Il s'agit donc de choisir les contours C_h de manière que les séries (4) et (2) convergent. Pour que la fonction sous le signe de (6) reste finie le long de C_h, il est indiqué de prendre pour C_h un cercle de centre $z = 0$ et de rayon $(2n_h + 1)\pi$, n_h étant entier.

On peut alors trouver une constante K telle que

$$(7) \qquad |\lambda_\nu^{(h)}| < \frac{K}{[(2n_h + 1)\pi]^{h-\nu}}.$$

Ceci posé, si l'on considère la série double

$$(8) \qquad \sum_{h=0}^{\infty} |a_h| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|\lambda_\nu^{(h)}|\,|x|^\nu}{\nu!},$$

il résulte de (7) que la somme relative à ν est inférieure à

$$(9) \qquad \frac{K}{[(2n_h + 1)\pi]^h}\, e^{(2n_h+1)\pi|x|}.$$

D'autre part, on sait que, quel que soit R, on peut trouver une constante M telle que l'on ait

$$|a_h| < \frac{M h!}{R^h},$$

donc la somme de la série (8) est inférieure à

$$KM \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h!\, e^{(2n_h+1)\pi|x|}}{[(2n_h + 1)\pi R]^h};$$

la racine $h^{\text{ième}}$ du terme de rang h de cette dernière somme est de l'ordre de

$$\frac{he^{\frac{2n_h\pi|x|}{h}-1}}{(2n_h+1)\pi R},$$

et est aussi petite que l'on veut, en même temps que $\frac{1}{R}$, pourvu que n_h soit dans un rapport fini avec h. On prendra, le plus simplement, $n_h = h$. La fonction $f(x)$ obtenue est bien entière, et son développement s'écrit

$$(10)\quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu\,!} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{2\pi i} \int_{C_h} \frac{dz}{(e^z-1)z^{h-\nu+1}} \qquad [|z| = (2h+1)\pi].$$

On retrouve ainsi la solution donnée par Hurwitz, car la convergence absolue des séries permet de permuter les sommations, ce qui introduit les fonctions

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{2\pi i\nu\,!} \int_{C_h} \frac{dz}{(e^z-1)z^{h-\nu+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_h} \frac{e^{xz}\,dz}{(e^z-1)z^{h+1}} = \frac{1}{(h+1)!}\,\psi_{h+1,h}(x).$$

Remarquons que si $h-\nu$ est pair, les résidus de $\frac{1}{(e^z-1)z^{h-\nu+1}}$ en deux pôles $\pm 2n\pi i$ sont opposés; donc, dans ce cas, C_h peut se réduire à C_0. On a alors

$$\lambda_\nu^{(h)} = \frac{B_{h-\nu+1}}{(h-\nu+1)!} = \begin{cases} 0 & (h \neq \nu), \\ -\frac{1}{2} & (h = \nu). \end{cases}$$

En résumé, on peut écrire (10)

$$f(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu\,!} {\sum_{h=0}^{\infty}}' \frac{a_h}{2\pi i} \int_{C_h} \frac{dz}{(e^z-1)z^{\nu-h+1}},$$

la dernière somme étant étendue aux seules valeurs de h pour lesquelles $h-\nu$ est impair. On en conclut que si $\varphi(x)$ est une fonction paire (impaire), une solution de (3) est la somme de $-\frac{1}{2}\varphi(x)$ et d'une fonction entière impaire (paire).

31. Lorsque $\varphi(x)$ est une fonction holomorphe à l'extérieur d'un cercle $|x| = \mathrm{R}$, sauf peut-être à l'infini, R. D. Carmichael [1] pose

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \frac{\mathrm{A}}{x} + \Phi(x),$$

$\varphi_1(x)$ étant entière, et $\Phi(x)$ étant développable suivant une série entière en $\frac{1}{x}$ sans terme du premier degré. Il résulte de là que les séries

$$\Phi_1(x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi(x+\nu), \qquad \Phi_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi(x-\nu)$$

sont convergentes, et définissent des fonctions analytiques dont la différence finie est $\Phi(x)$, et dont les seuls points singuliers sont les points congruents, respectivement à gauche et à droite, aux points singuliers de $\Phi(x)$. D'autre part, deux solutions évidentes de $\Delta f(x) = \frac{1}{x}$ sont

$$g_1(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{x+\nu}\right), \qquad g_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{x-\nu}\right),$$

qui sont holomorphes dans tout le plan, sauf respectivement aux points $-\nu$ et $1+\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$.

On voit ainsi qu'une solution de (3) est, dans ce cas, la somme de $\mathrm{A}g_1(x) + \Phi_1(x)$ ou $\mathrm{A}g_2(x) + \Phi_2(x)$ et d'une fonction entière. Les solutions obtenues sont analytiques dans tout le plan, sauf aux points congruents, respectivement à gauche et à droite, aux points singuliers de $\varphi(x)$.

32. E. Hilb [2] a indiqué plusieurs procédés pour ramener la résolution de certaines équations aux différences finies à la résolution d'équations différentielles.

Étant donnée une fonction entière $\varphi(x)$ pour laquelle il existe un nombre k tel que l'on ait

$$\text{(11)} \qquad \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \, |\varphi^{(\nu)}(x)|^{\frac{1}{\nu}} \leqq k < 2\pi,$$

l'équation (3), où l'on développe $f(x+1)$ en série de Taylor, devient l'équation différentielle d'ordre infini

$$\text{(12)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} = \varphi(x).$$

En cherchant une solution de la forme

$$f'(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \varphi^{(s)}(x),$$

la substitution dans (12) fournit les équations

$$\sum_{s=0}^{\nu} \frac{a_s}{(\nu - s + 1)!} = \varepsilon_{0,\nu},$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = \frac{x}{e^x - 1},$$

c'est-à-dire

$$a_\nu = \frac{B_\nu}{\nu!}.$$

On retrouve ainsi la solution principale donnée au paragraphe **24**. On vérifie aisément qu'elle possède la même propriété que $\varphi(x)$, de sorte que (12) a bien un sens.

33. Une autre méthode de cet auteur [2], qui s'applique indirectement à notre équation, est basée sur le lemme suivant (¹) :

« Si les deux séries

$$a(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu, \qquad b(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

sont régulières pour $|z| < k$, et si $b(z)$ a un zéro unique et simple, z_0, dans ce cercle, le système d'équations

$$(13) \qquad \sum_{\nu=s}^{\infty} a_{\nu-s}\xi_\nu + \sum_{\nu=s-1}^{\infty} s b_{\nu-s+1}\xi_\nu = \eta_s \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots),$$

où

$$(14) \qquad \overline{\lim_{s\to\infty}} |\eta_s|^{\frac{1}{s}} \leq k$$

possède une seule solution, dont les éléments ξ_s vérifient la même inégalité (14) que les η_s.

(¹) *Cf.* E. Hilb, *Mathematische Annalen*, t. 82, 1920, p. 1-39.

» Cette solution est définie par les équations

$$\xi_s = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{s,\nu} \eta_\nu, \tag{15}$$

les $\lambda_{s,\nu}$ étant les coefficients de la solution unique

$$\lambda_s(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{s,\nu} z^\nu$$

de l'équation

$$a(z)\lambda_s(z) + b(z)\frac{d\lambda_s(z)}{dz} = z^s, \tag{16}$$

qui est régulière au point z_0. »

Ceci étant admis, considérons l'équation

$$h(x+1) - xh(x) = g(x), \tag{17}$$

qui se ramène immédiatement à notre équation (3) en posant

$$h(x) = \Gamma(x)f(x),$$
$$g(x) = \Gamma(x+1)\varphi(x).$$

Le changement de x en $x+s$ dans cette équation donne

$$\xi_{s+1} - (x+s)\xi_s = \eta_s \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

où l'on a posé

$$h(x+s) = \xi_s, \qquad g(x+s) = \eta_s.$$

On voit par identification que les équations (18) forment un système (13) où l'on aurait

$$a(z) = z - x, \qquad b(z) = -z;$$

en particulier, on a $z_0 = 0$. Si $\lambda_0(z)$ est la solution de

$$(z-x)\lambda_0(z) - z\frac{d\lambda_0(z)}{dz} = 1,$$

qui est régulière à l'origine, un calcul élémentaire donne

$$\lambda_0(z) = -e^z z^{-x} \int_0^z e^{-z} z^{x-1}\, dz,$$

donc

$$\lambda_{0,\nu} = -\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+\nu)}.$$

Par conséquent,

$$(19) \qquad h(x) = \xi_0 = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g(x+\nu)}{x(x+1)\dots(x+\nu)}.$$

On a supposé, pour appliquer le lemme, que $g(x)$ vérifie la condition (11); ce lemme nous apprend alors que la solution $h(x)$ possède également cette propriété, qui suffit à la caractériser.

34. En revenant à $f(x)$ et $\varphi(x)$, on voit que (19) fournit l'une des solutions formelles évidentes de notre équation. Mais la méthode permet d'obtenir des solutions sous des formes très différentes.

Par exemple, si l'on exprime $h(x+1)$ par son développement de Taylor au point x, la dérivée $s^{\text{ième}}$ de l'équation (17) mise sous cette forme donne

$$-sh^{(s-1)}(x) + (1-x)h^{(s)}(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{h^{(s+\nu)}(x)}{\nu!} = g^{(s)}(x) \qquad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

En posant

$$h^{(s)}(x) = \xi_s, \qquad g^{(s)}(x) = \eta_s,$$

ces équations forment un système (13) où

$$a(z) = e^z - x, \quad b(z) = -1.$$

L'équation (16) d'indice $s = 0$ est ici

$$(e^z - x)\lambda_0(z) - \frac{d\lambda_0(z)}{dz} = 1;$$

z_0 n'existe plus, et l'on peut prendre, par exemple, l'une ou l'autre des deux fonctions

$$\lambda_0(z) = e^{e^z} e^{-xz} \int_z^{\pm\infty} e^{-e^t} e^{xt}\, dt,$$

et à chacune d'elles correspond une solution entière

$$h(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{0,\nu}\, g^{(\nu)}(x).$$

35. Signalons encore une autre méthode intéressante de E. Hilb [1, 2], bien qu'elle exige l'hypothèse très restrictive que $g(x)$ soit

holomorphe pour $\sigma > b$, et de la forme

$$g(x) = \frac{c}{x} + \frac{O(1)}{x^2} \tag{20}$$

dans ce demi-plan. On voit de suite que si α est supérieur à b, (17) peut s'écrire, pour une solution $h(x)$ de même nature que $g(x)$,

$$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} h(z)\left(\frac{1}{x+1-z} - \frac{x}{x-z}\right)dz = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{g(z)}{x-z}\,dz \qquad (\sigma > \alpha).$$

En remplaçant, dans cette équation, $\frac{1}{x-z}$ et $\frac{1}{x+1-z}$ respectivement par

$$\frac{1}{x-z} = \int_0^\infty e^{(z-x)u}\,du \qquad [\sigma > \mathcal{R}(z)],$$

et l'expression analogue, et en permutant les intégrations comme le permet la convergence absolue des intégrales, il vient

$$\int_0^\infty e^{-ux}(e^{-u} - x)F(u)\,du = \int_0^\infty e^{-ux}\gamma(u)\,du, \tag{21}$$

où l'on a posé

$$\gamma(u) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{uz} g(z)\,dz,$$

$$F(u) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{uz} h(z)\,dz. \tag{22}$$

Supposons $F(0) = 0$, et intégrons par parties l'intégrale au premier membre de (21) relative au terme xe^{-ux}; cette équation devient

$$\int_0^\infty e^{-ux}[e^{-u}F(u) - F'(u)]\,du = \int_0^\infty e^{-ux}\gamma(u)\,du,$$

ce qui donne

$$F'(u) - e^{-u}F(u) + \gamma(u) = 0.$$

Avec la condition $F(0) = 0$, $F(u)$ est entièrement défini, et la résolution de (22) donne

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-ux}F(u)\,du. \tag{23}$$

D'ailleurs, on trouve de suite

$$F(u) = -e^{-e^{-u}}\int_0^u e^{e^{-t}}\gamma(t)\,dt;$$

en portant cette expression dans (23), il vient

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} H(x, z) g(z)\, dz, \tag{24}$$

où

$$H(x, z) = -\int_0^\infty e^{-ux} e^{-e^{-u}} du \int_0^u e^{tz} e^{e^{-t}} dt.$$

On vérifie directement que $H(x, z)$ est la valeur de $h(x)$ relative à $g(x) = \frac{1}{x - z}$, donc que (24) vérifie notre équation. On voit aisément que

$$H(x, z) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{x + \nu - z} \, \frac{1}{x(x+1)\dots(x+\nu)},$$

et, par suite, que (24) est la solution trouvée au paragraphe précédent..

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Abel (N. H.). — [1] Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies (*Magazin for Naturvidenskaberne*, Kristiania, t. **1**. 1823, p. 55-63; *Œuvres*, t. **2**, 1re édition, Kristiania, 1839, p. 222-228; *Œuvres*, t. **1**, 2e édition, Kristiania, 1881, p. 11-27).

[2] L'intégrale finie $\Sigma^n \varphi(x)$ exprimée par une intégrale définie simple (*Ibid.*, t. 3, 1825, 182-189; *Ibid.*, p. 45-50; *Ibid.*, p. 34-39).

Appell (P.). — [1] Sur les fonctions périodiques de deux variables (*J. Math. pures appl.*, 4e série, t. 7, 1891, p. 157-176).

Barnes (E. W.). — [1] The generalisation of the Mac Laurin sum formula, and the range of its applicability (*Quart. J. pure appl. math.*, t. **35**, 1904, p. 175-188).

[2] On functions generated by linear difference equations of the first order (*Proc. London math. Soc.*, 2e série, t. **2**, 1904, p. 280-292).

[3] The linear difference equation of the first order (*Ibid.*, p. 438-469).

[4] The Mac Laurin sum formula (*Ibid.*, 2e série, t. 3, 1905, p. 253-272).

Bernoulli (Jakob). — [1] *Ars conjectandi* (Basel, 1713).

Birkhoff (G. D.). — [1] General theory of linear difference equations (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. **12**, 1911, p. 243-284).

BOOLE (G.). — [1] *A Treatise on the calculus of finite differences* (Cambridge, 1860; 2e édition, London, 1872; 3e édition, London, 1880).

BRODÉN (T.). — [1] Bemerkungen über sogenannte finite Integration (*Arkiv Mat. Astr. och Fys.*, t. 7, 1912, n° 6).

[2] Einige Anwendungen diskontinuierlicher Integrale auf Fragen der Differenzenrechnung (*Acta Univ. Lund.*, 2e série, t. 8, 1912, n° 7).

CARMICHAEL (R. D.). — [1] On the theory of linear difference equations (*Amer. J. math.*, t. 35, 1913, p. 163-182).

CAUCHY (A.-L.). — [1] Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques (*Mém. Acad. Sc. Paris.*, t. 6, 1827, p. 603 612; *Œuvres*, 1re série, t. 2, Paris, 1908, p. 12-19).

DARBOUX (G). — [1] Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable (*J. Math. pures appl.*, 3e série, t. 2, 1876, p. 291-312).

GUICHARD (C.). — [1] Sur la résolution de l'équation aux différences finies $G(x+1)-G(x)=H(x)$ (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 4, 1887, p. 361-380).

GULDBERG (A.) et WALLENBERG (G.). — [1] *Theorie der linearen Differenzengleichungen* (Leipzig und Berlin, 1911).

HILB (E.). — [1] Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen (*Math. Ann.*, t. 85, 1922, p. 89-98).

[2] Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen (1) (*Math. Ztschr.*, t. 14, 1922, p. 211 229).

[3] Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen (2) (*Ibid.*, t. 15, 1922, p. 280-285).

[4] Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen (3) (*Ibid.*, t. 19, 1924, p. 136-144).

HURWITZ (A.). — [1] Sur l'intégrale finie d'une fonction entière (*Acta math.*, t. 20, 1897, p. 285-312; t. 22, 1899, p. 179-180).

JACOBI (C. G. J.). — [1] De usu legitimo formulæ summatoriæ Maclaurinianæ (*J. reine angew. Math.*, t. 12, 1834, p. 263-272; *Werke*, t. 6, Berlin, 1891, p. 64-75).

LINDELÖF (E.). — [1] Quelques applications d'une formule sommatoire générale (*Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. 31, 1902, n° 3).

[2] Sur une formule sommatoire générale (*Acta math.*, t. 27, 1903, p. 305-311).

[3] *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions* (Paris, 1905).

MALMSTEN (C. J.). — [1] Sur la formule

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1\ldots 4}\Delta u^{\mathrm{iv}}_x + \ldots$$

(*J. reine angew. Math.*, t. 35, 1847, p. 55-82; *Acta math.*, t. 5, 1884, p. 1-46).

MARKOFF (A. A.). — [1] *Differenzengleichungen und ihre Summation* (Saint-Pétersbourg, 1889-1891).

[2] *Differenzenrechnung* (Leipzig, 1896).

NÖRLUND (N. E.). — [1] Mémoire sur les polynomes de Bernoulli (*Acta math.*, t. 43, 1920, p. 121-196).

[2] Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences finies (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 44, 1920, p. 174-192, p. 200-220).

[3] Sur les équations aux différences finies (*C. R. Congr. intern. math. Strasbourg*, 1920, Toulouse, 1921, p. 98-119).

[4] Mémoire sur le calcul aux différences finies (*Acta math.*, t. 44, 1922, p. 71-211).

[5] Sur certaines équations aux différences finies (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 25, 1923, p. 13 98).

[6] Remarques diverses sur le calcul aux différences finies (*J. Math. pures appl.*, 9e série, t. 2, 1923, p. 193-214).

[7] *Differenzenrechnung* (Berlin, 1924).

PICARD (E.). — [1] Sur une classe de transcendantes nouvelles (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 117, 1893, p. 472-476; *Acta math.*, t. 18, 1894, p. 133-154; t. 23, 1900, p. 333-337).

PINCHERLE (S.) et AMALDI (U.). — [1] *Le operazione distributive e le loro applicazioni all' analisi* (Bologna, 1901).

[2] Funktionaloperationen und gleichungen (*Enzyklopädie der math. Wiss.*, t. II, A.11, 1906, p. 761-817).

[3] Sull' inversione degli integrali definiti (*Mem. Soc. ital. sc.*, 3e série, t. 15, 1907, p. 3-43).

PLANA (G. A. A.). — [1] Note sur une nouvelle expression analytique des nombres bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule générale pour la sommation des suites (*Mem. Acad. sc. Torino*, 1re série, t. 25, 1820, p. 403-418).

POISSON (S. D.). — [1] Mémoire sur le calcul numérique des intégrales définies (*Mém. Acad. Sc. Inst. France*, t. 6, 1823, p. 571-602).

SONIN (N. J.). — [1] Sur les termes complémentaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 108, 1889, p. 725-727; *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 6, 1889, p. 257-262).

WALLENBERG (G.) et GULDBERG (A.). — [1] *Theorie der linearen Differenzengleichungen* (Leipzig und Berlin, 1911).

WEBER (H.). — [1] Ueber Abels Summation endlicher Differenzenreihen (*Acta math*, t. 27, 1903, p. 225-233).

WIENER (N.). — [1] The solution af a differend equation by trigonometrical integrals (*J. Math. Phys. Massachusetts Inst. Technol*; t. 4, 1925, p. 153-163).

WILLIAMS (K. P.). — [1] The solutions of non-homogeneous linear difference equations and their asymptotic form (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 14, 1913, p. 209 240).

TABLE DES MATIÈRES.