MAURICE JANET

Les systèmes d'équations aux dérivées partielles

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 21 (1927)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1927__21__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.,
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE XXI

Les systèmes d'équations aux dérivées partielles

PAR M. MAURICE JANET
Professeur à l'Université de Caen.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1927

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Par M. Maurice JANET,
Professeur à l'Université de Caen.

Nous nous proposons d'étudier, pour les systèmes les plus généraux d'équations différentielles, le *degré d'indétermination* de la solution.

D'une manière plus précise, étant donné un système d'équations aux dérivées partielles, à un certain nombre (fini) de fonctions inconnues de n variables indépendantes, comment reconnaître :

1° Si ce système est compatible;

2° Quelles sont les données supplémentaires susceptibles de déterminer entièrement une solution et une seule.

Lorsqu'un problème particulier de ce genre se trouve posé par une question physique, il arrive souvent que cette question même en suggère la réponse; il s'agit alors pour le mathématicien de démontrer rigoureusement le fait prévu (exemples : problèmes analogues au problème de Dirichlet posés par la théorie de l'élasticité, problèmes relatifs à la propagation des ondes). Ici, au contraire, on ne particularise pas la forme du système étudié, et l'on cherche à *découvrir* la forme des conditions « initiales » ou « aux limites ».

La généralité du problème conduit à supposer analytiques, non seulement le système, mais aussi les données.

1. Des questions générales de cette nature, tant d'ailleurs pour une seule équation que pour des systèmes d'équations, ont été

résolues pour la première fois par Cauchy [6]. On sait par exemple qu'il a pu démontrer par la méthode dite du calcul des limites, ou des fonctions majorantes, qu'*une* équation aux dérivées partielles du *premier* ordre à *une* inconnue de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

a une solution régulière (et une seule) se réduisant pour $x_1 = x_1^0$ à une fonction donnée, arbitraire, φ, de $x_2, x_3, \ldots, x_n$, si du moins les conditions suivantes sont réalisées : φ régulier pour $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$, f régulier pour le système de valeurs

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \quad \varphi_0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)_0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)_0.$$

On doit faire à ce sujet plusieurs remarques qui conviendront aussi aux énoncés généraux que nous rencontrerons plus loin.

Tout d'abord l'énoncé suppose que l'équation donnée est résolue d'une certaine manière, le second membre ayant une certaine « régularité ». Il peut se faire que pour certaines solutions (analytiques) d'une équation donnée (non résolue par exemple), on ne puisse pas mettre l'équation proposée sous la forme en question, et cela au voisinage d'un système quelconque de valeurs des variables. Il pourra donc se faire que certaines solutions (analytiques) ne figurent pas parmi celles dont l'énoncé affirme l'existence : ce sont des solutions *singulières*. Nous ne nous préoccuperons ici que de la solution *générale*.

D'autre part, supposons que l'équation et les données initiales satisfassent aux conditions de régularité indiquées dans l'énoncé; ne pourrait-il pas se faire que le problème posé ait *une solution qui ne soit pas régulière* pour le système de valeurs initiales? S'il est assez aisé d'arriver à une réponse négative dans le cas présent, il l'est beaucoup moins dans la plupart des cas que nous aurons à étudier dans ce qui suit ([12, *a*]; [13]; [16, *b*]; note du n° 4). L'impossibilité de deux solutions régulières distinctes apparaîtra comme conséquence de la détermination complète de leurs développements en série de Taylor. L'existence d'une solution régulière sera déduite de la convergence d'un tel développement dans un domaine assez petit.

La solution régulière dont les théorèmes généraux démontreront l'existence sera ainsi définie *dans une certaine région;* le problème du *prolongement* se poserait ensuite [**24**, p, q].

Nous étudierons surtout les diverses formes canoniques auxquelles on peut ramener un système pour obtenir des théorèmes analogues au précédent.

Dans l'étude même de ces formes, nous ne donnerons qu'une indication très brève sur la convergence des développements en série qui constituent la solution; la démonstration complète résulte d'une application convenable de la méthode des fonctions majorantes : nous renverrons, pour les détails relatifs à cette méthode, à l'Ouvrage de M. Riquier (*Mémorial des Sciences mathématiques*) (*voir* aussi [**16**, e]).

Il est souvent commode, pour éviter toute difficulté accessoire, de supposer d'abord *linéaires* les systèmes que l'on envisage. Bien des raisonnements faits pour les systèmes linéaires s'étendent sans peine aux cas généraux. D'ailleurs, les solutions infiniment voisines d'une solution ordinaire d'un système S satisfont à un système *linéaire* Σ (système auxiliaire, ou aux variations) dont la solution la plus générale a le même degré de généralité que la solution générale de S [**9**, a, b].

2. Théorème de Cauchy-Kowalevsky. Dérivées principales et dérivées paramétriques. Classement des dérivées. — Considérons tout d'abord des systèmes comprenant autant d'équations que de fonctions inconnues. Cauchy a étudié le cas d'un système du premier ordre

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_k, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial u_k}{\partial x_n}\right)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

où les k équations sont résolues par rapport aux k dérivées du premier ordre des fonctions inconnues u_1, u_2, ..., u_k par rapport à *une même variable*. M^me^ de Kowalevsky [**19**] a traité plus généralement celui d'un système de la forme

$$\frac{\partial^{r_i} u_i}{\partial x_1^{r_i}} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_k, \mathrm{D}, \mathrm{D}', \ldots),$$

où les seconds membres ne renferment, outre les variables indépendantes et les fonctions inconnues, que les dérivées de u_1 jusqu'à l'ordre r_1 inclusivement, celles de u_2 jusqu'à l'ordre r_2 inclusivement, etc., sans renfermer toutefois aucune des k dérivées

$$D_1 = \frac{\partial^{r_1} u_1}{\partial x_1^{r_1}}, \qquad D_2 = \frac{\partial^{r_2} u_2}{\partial x_1^{r_2}}, \qquad \ldots, \qquad D_k = \frac{\partial^{r_k} u_k}{\partial x_1^{r_k}}.$$

Un tel système a une solution régulière et une seule telle que pour $x_1 = x_1^0$,

$$u_1, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{r_1 - 1} u_1}{\partial x_1^{r_1 - 1}}, \quad u_2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{r_2 - 1} u_2}{\partial x_1^{r_2 - 1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{r_k - 1} u_k}{\partial x_1^{r_k - 1}}$$

se réduisent à des fonctions arbitraires données (φ) de $x_2, x_3, \ldots, x_n$; si du moins les conditions suivantes sont réalisées : les φ sont régulières pour $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$; les f sont réguliers pour le système de valeurs de leurs arguments que l'on déduit des données : valeurs des φ pour $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$ et valeurs des variables $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

On voit que la connaissance : 1° des φ; 2° des équations, permet d'obtenir immédiatement les valeurs des k dérivées $D_1, D_2, \ldots, D_k$ pour $x_1 = x_1^0$; d'ailleurs, une solution satisfait non seulement aux équations proposées, mais aussi à celles que l'on obtient en dérivant ces équations; si l'on dérive une fois par rapport à x_1, il ne se présente aux seconds membres aucune dérivée de u_1 dont l'ordre partiel relativement à x_1 soit supérieur à r_1, de u_2 dont l'ordre partiel relativement à x_1 soit supérieur à r_2, etc. — et, comme $D_1, D_2, \ldots, D_k$ sont maintenant pour $x_1 = x_1^0$ des fonctions connues de $x_2, x_3, \ldots, x_n$, les k équations S′ dérivées des S font connaître les valeurs pour $x_1 = x_1^0$ des k dérivées

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial D_2}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial D_k}{\partial x_1}.$$

Si l'on dérive p fois par rapport à x_1, il ne se présente aux seconds membres aucune dérivée de u_1 dont l'ordre partiel relativement à x_1 soit supérieur à $r_1 + p - 1$, de u_2 dont l'ordre partiel relativement à x_1 soit supérieur à $r_2 + p - 1$, ..., etc. En donnant à p les valeurs 2, 3, ..., on voit que l'on obtient de proche en proche les valeurs pour $x_1 = x_1^0$ de toutes les dérivées successives par rapport à x_1 des premiers membres D_i, ... Au total, grâce aux données initiales et aux équations, on connaît ainsi les valeurs au point

$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ des u et de toutes leurs dérivées. Les séries de Taylor qui permettraient de représenter une solution régulière sont donc bien déterminées; il y a donc au plus une solution régulière satisfaisant aux conditions initiales imposées : il suffit pour démontrer qu'il y en a une de prouver la convergence, dans un petit domaine, des séries obtenues. C'est ce qu'a fait Mme de Kowalevsky.

Le calcul des dérivées successives des u peut se présenter sous une forme légèrement différente :

1° Répartissons les dérivées des u (y compris les fonctions u elles-mêmes que l'on considérera comme dérivées d'ordre zéro) en deux catégories : les D_i et leurs dérivées, appelées dérivées *principales;* toutes les autres appelées dérivées *paramétriques.*

2° Rangeons les dérivées des u en classes successives $C_1, C_2, \ldots$ d'après leur ordre *relativement à* x_1, à savoir, dans C_1 les dérivées des u_i dont cet ordre partiel est au plus

$$r_i - 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

dans C_2 celles dont l'ordre est r_i, et d'une manière générale dans C_ρ celles dont l'ordre est $r_i + \rho - 2$. De deux dérivées D, D′, placées dans des classes différentes, C_λ, C_μ, D est dite *antérieure* ou *postérieure* à D′ suivant que λ est *inférieur* ou *supérieur* à μ. On voit immédiatement que ce classement jouit des deux propriétés suivantes :

a. Si D′ est postérieure à D, $\frac{\partial D'}{\partial x_h}$ est aussi postérieure à D;

b. Si D′ est postérieure à D, $\frac{\partial D'}{\partial x_h}$ est aussi postérieure à $\frac{\partial D}{\partial x_h}$ (quel que soit $h = 1, 2, \ldots, n$).

Ces deux propriétés entraînent la conséquence suivante : si une équation, résolue par rapport à une des dérivées d'une fonction u, ne contient dans son second membre que des dérivées antérieures à celle qui figure au premier membre (forme E), toute équation obtenue en dérivant *totalement* les deux membres par rapport à une même variable jouit de la même propriété.

Les équations données ayant la forme (E), toutes leurs dérivées l'ont aussi. Les équations données et leurs dérivées donnent en somme l'expression d'une dérivée principale quelconque à l'aide des dérivées antérieures à cette dérivée principale et des variables indépendantes.

Rangeons ces équations dans les classes mêmes où se trouvent rangés leurs premiers membres, et supposons que l'on donne les valeurs pour $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de toutes les dérivées paramétriques.

Les dérivées principales de classe C_1 sont alors connues grâce aux équations de classe C_1, car les seconds membres de ces équations ne contiennent aucune dérivée principale. Toutes les dérivées de classe C_1 peuvent donc être considérées maintenant comme connues pour P_0.

Les dérivées principales de classe C_2 sont alors obtenues à l'aide des équations de classe C_2, et ainsi de suite.

3. Systèmes du premier ordre à une fonction inconnue. Systèmes complètement intégrables [8, *b*] [10, *a* et *b*]. — Soit

$$(\mathrm{I}) \quad F_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

un système d'équations du premier ordre à une inconnue u. Cherchons à le résoudre par rapport au plus grand nombre possible de dérivées et examinons les divers cas qui peuvent se présenter. Il peut arriver que, parmi les conséquences algébriques ([1]) de (1), on obtienne des équations ne contenant plus les dérivées et ne se réduisant pas à des identités. Si parmi ces conséquences, il y en a qui ne contiennent pas u, le système (I) est impossible. Si ces conséquences algébriques sont compatibles en u; 1° Si aucune solution de ce système d'équations ordinaires ne satisfait à (1), le système (I) est encore impossible; 2° Si quelque solution y satisfait, le système (I) peut avoir suivant les cas une ou plusieurs solutions. Nous dirons alors que la solution est déterminée.

Supposons maintenant que toutes les conséquences algébriques du système contiennent des dérivées de u; le système pourra s'écrire,

---

([1]) Nous appelons conséquences *algébriques* d'un système une équation conséquence du système lorsqu'on y regarde les quantités qui y entrent x_i, u, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ comme autant de variables indépendantes.

après résolution (en employant des notations convenables),

$$(1)\quad D_\lambda \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\lambda} = f_\lambda\left(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y_s}\right)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, r;\ r+s=n).$$

Si une fonction u satisfait à ce système d'équations, elle satisfait aussi aux équations dérivées. Par exemple, on a

$$(3)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \sum_{\mu=1}^{\mu=s}\frac{\partial f_1}{\partial q_\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu\,\partial x_2} \qquad \text{où} \qquad q_\mu = \frac{\partial u}{\partial y_\mu},$$

$$(2)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial y_\mu} = \frac{\partial f_2}{\partial y_\mu} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y_\mu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=s}\frac{\partial f_2}{\partial q_\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu\,\partial y_\mu}.$$

En tenant compte des équations (1) et (2), on voit que u satisfait à l'équation

$$(3)'\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u}f_2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=s}\frac{\partial f_1}{\partial q_\mu}\frac{\partial f_2}{\partial y_\mu} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\sum_{\mu=1}^{\mu=s}\frac{\partial f_1}{\partial q_\mu}\frac{\partial u}{\partial y_\mu}$$
$$+\sum_{\mu=1}^{\mu=s}\frac{\partial f_1}{\partial q_\mu}\left(\sum_{\nu=1}^{\nu=s}\frac{\partial f_2}{\partial q_\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu\,\partial y_\mu}\right).$$

Si l'on permute le rôle des variables x_1, x_2, on trouve une autre équation ; en la retranchant de la précédente, on obtient une équation (C) où n'entrent plus les dérivées du second ordre puisque le coefficient de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_\nu\,\partial y_\mu}$ au second membre est

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_\mu}\frac{\partial f_2}{\partial q_\nu} + \frac{\partial f_1}{\partial q_\nu}\frac{\partial f_2}{\partial q_\mu} - \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_\mu}\frac{\partial f_1}{\partial q_\nu} + \frac{\partial f_2}{\partial q_\nu}\frac{\partial f_1}{\partial q_\mu}\right).$$

On peut ainsi former pour chaque combinaison deux à deux des indices 1, 2, ..., r une équation d'ordre au plus égal à 1, à laquelle doit satisfaire toute solution de (1). Adjoignons ces équations au système (1), et traitons le système obtenu (I)′ comme on a traité le système primitif (I). Si l'on ne constate ni impossibilité, ni détermination, on sera ramené à un système (1)′ ayant au moins autant d'équations que le système (1).

Dire que (1)′ n'a pas plus d'équations que (1), c'est dire que les équations (C) sont conséquences algébriques des (1) ; c'est dire même qu'elles sont vérifiées identiquement puisque, d'après leur forme, elles ne peuvent contenir aucune des dérivées $\frac{\partial u}{\partial x_\lambda}$. Dans ce cas, on dira que (1) est *complètement intégrable* (¹).

Si (1)′ a une équation au moins de plus que (1), nous opérerons sur (1)′ comme nous avons opéré sur (1), et ainsi de suite.

Le nombre des équations d'un des systèmes ainsi formés allant en croissant, ce nombre étant d'autre part au plus égal à n, l'opération s'arrêtera. Autrement dit, on arrivera au bout d'un nombre fini d'opérations à un système analogue à (1), mais, de plus, *complètement intégrable.*

L'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui n'est ni impossible ni déterminé, se ramène donc à l'étude d'un système (1) *complètement intégrable.*

Un tel système a une solution régulière et une seule prenant pour $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \ldots, x_r = x_r^0$ une valeur donnée $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_s)$, si du moins on suppose φ régulière pour $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, \ldots, y_s = y_s^0$ et les f régulières au voisinage du système de valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_r^0$, $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_s^0, \varphi^0, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_s}\right)_0$.

Au lieu de chercher une solution du système, c'est-à-dire une fonction qui satisfasse à toutes les équations (1) quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cherchons une fonction qui ait seulement la propriété de satisfaire à la première équation sur la multiplicité $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0, \ldots, x_r = x_r^0$, à la seconde sur la multiplicité $x_3 = x_3^0$, $x_4 = x_4^0, \ldots, x_r = x_r^0, \ldots$, à la dernière quelles que soient les valeurs des variables.

On voit immédiatement que ce problème (P′) a une solution régulière et une seule prenant pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_r = x_r^0$ la valeur donnée $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_s)$; il suffit d'appliquer successivement le théorème

---

(¹) Un système de r équations linéaires et homogènes indépendantes

$$X_i(u) \equiv \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

où les a sont des fonctions données des x, est dit complet si les expressions

$$X_i[X_k(u)] - X_k[X_i(u)]$$

sont des combinaisons linéaires et homogènes des X ; on peut le supposer résolu par rapport à r dérivées de u ; il est aisé de voir qu'un tel système est complètement intégrable (système jacobien).

de Cauchy aux équations à $s+1$, $s+2$, ..., $s+r$ variables dont on vient d'indiquer la formation ([1]).

Or u désignant une fonction quelconque, et A_λ représentant la différence

$$\frac{\partial u}{\partial x_\lambda} - f_\lambda\left(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y_s}\right)$$

il est aisé de vérifier que, si le système (1) est complètement intégrable, on a l'identité

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} = A_\lambda \frac{\partial f_\mu}{\partial u} - A_\mu \frac{\partial f_\lambda}{\partial u} + \sum_{h=1}^{h=s}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial q_h}\frac{\partial A_\lambda}{\partial y_h} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial q_h}\frac{\partial A_\mu}{\partial y_h}\right).$$

Supposons que u soit la solution régulière [du problème (P′)] dont on vient de démontrer l'existence. La fonction régulière A_{r-1} est nulle pour $x_r = x_r^0$ et satisfait à l'équation

$$\frac{\partial A_{r-1}}{\partial x_r} = A_{r-1}\frac{\partial f_r}{\partial u} + \sum_{h=1}^{h=s}\frac{\partial f_r}{\partial q_h}\frac{\partial A_{r-1}}{\partial y_h}.$$

Or o satisfait à ces deux conditions, et d'autre part il n'y a qu'*une* fonction régulière qui y satisfasse ; donc $A_{r-1} = 0$.

De même la fonction régulière A_{r-2} est nulle pour $x_r = x_r^0$, $x_{r-1} = x_{r-1}^0$ et satisfait à un système d'équations linéaires homogènes aisé à former ; or o est la seule fonction régulière qui y satisfasse, car un calcul aisé montre que toutes les dérivées de A_{r-2} doivent être nulles pour

$$x_{r-1} = x_{r-1}^0, \qquad x_r = x_r^0.$$

Donc $A_{r-2} = 0$.

On démontre ainsi, de proche en proche, que tous les A sont nuls, autrement dit que u satisfait au système (1).

Pour traiter le problème (P′), on a utilisé le théorème de Cauchy ; ce point n'a rien d'essentiel.

1° Appelons *principales* les premiers membres et leurs dérivées, *paramétriques* toutes les autres dérivées de u. Remarquons qu'on obtient sans omission ni répétition les dérivées principales en utilisant comme variables de dérivation, pour D_1, x_1 et les y, pour D_2, x_1, x_2 et les y, ..., pour D_r, x_1, x_2, ..., x_r et les y.

([1]) Ce premier résultat est valable, que le système (1) soit, ou non, complètement intégrable.

2° De deux dérivées D, D′ de u, d'ordres différents p, p', D sera dite antérieure ou postérieure à D′ suivant que p sera inférieur ou supérieur à p'. De deux dérivées D, D′ de même ordre total p, mais d'ordres différents q, q' par rapport à l'ensemble des x, D sera dite antérieure ou postérieure à D′ suivant que q sera inférieur ou supérieur à q'.

En raisonnant comme au paragraphe précédent, on voit que la donnée de la fonction φ détermine entièrement le développement en série de Taylor qui représenterait la solution supposée. On démontrerait la convergence du développement en utilisant la méthode des fonctions majorantes.

On peut traiter d'une manière tout à fait analogue *certains* systèmes du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Soit un système à kr équations résolues par rapport aux dérivées des u relativement à $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Lorsque ce système est « complètement intégrable », il a une solution et une seule telle que les u prennent des valeurs données pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, ..., $x_r = x_r^0$ (conditions de régularité habituelles) (systèmes de König [17]).

4. **Recherche générale des fonctions primitives** (ou Calcul inverse de la dérivation) [16, *e* et *f*] [24, *r*]. — Nous nous proposons de trouver toutes les fonctions u de n variables dont certaines dérivées (D), en nombre fini, d'ordres partiels donnés, soient égales à des fonctions données des n variables [problème (P)]. Nous traiterons tout d'abord une autre question [problème (P′)] qui, ainsi que nous le verrons, est plus générale que la précédente.

Chaque dérivée $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}$ d'une fonction indéterminée est caractérisée par le monome correspondant $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

1° Donnons-nous un nombre fini de monomes M tous différents ; nous attacherons à chacun d'eux un certain nombre des variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$, qui seront appelées *ses variables multiplicatrices dans le système* (M) par la règle suivante :

x_i sera variable multiplicatrice pour $\overline{\mathrm{M}} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ si dans aucun de ceux des M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ ont respectivement les degrés $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{i+1}$, x_i n'a un degré supérieur à α_i ; non multiplicatrice dans le cas contraire (en particulier x_n est variable multiplicatrice pour ceux des M dont le degré en x_n est maximum et ceux-là seulement).

Nous définirons d'autre part certains monomes en nombre fini (N) que nous appellerons *monomes complémentaires* des (M), ainsi des *variables multiplicatrices* pour ces (N). Soit i l'un des nombres 1, 2, ..., n ; dans tous ceux des M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ ont respectivement des exposants déterminés $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{i+1}$, $(M_{\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{i+1}})$, considérons les exposants de x_i ; soit β un entier, positif ou nul, ne figurant pas parmi ces derniers nombres et inférieur au plus grand ; $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}, x_i^{\beta}$ est un monome $(N^{(i)})$. Ses variables multiplicatrices sont $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ et toutes celles des variables $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$ qui sont multiplicatrices pour un $M_{\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{i+1}}$ dans le système (M). L'ensemble de tous les monomes $N^{(n)}, N^{(n-1)}, \ldots, N^{(1)}$ constitue le système (N).

Soit un monome (M) ou (N) particulier ; faisons le produit de ce monome $\overline{M}$, ou $\overline{N}$, par un quelconque des monomes qu'on peut former avec ses variables multiplicatrices ; les produits ainsi obtenus (en y comprenant le monome lui-même $\overline{M}$, ou $\overline{N}$) formeront la classe $\overline{\mathcal{M}}$ ou $\overline{\mathcal{N}}$, correspondant à $\overline{M}$ ou $\overline{N}$.

Un monome quelconque appartient à une de ces classes et à une seule, de sorte que tous les monomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se trouvent répartis en un nombre fini de classes, les monomes de chaque classe s'obtenant en multipliant un monome déterminé par tous les monomes que l'on peut former avec ses variables multiplicatrices.

Ce théorème se traduit immédiatement dans la théorie des séries de Taylor par le suivant :

Il existe une fonction régulière et une seule, telle que chacune de ses dérivées (M) *ou* (N) *se réduise, lorsque ses variables non multiplicatrices se réduisent à leurs valeurs initiales* (¹), *à une fonction donnée, arbitraire, régulière, de ses variables multiplicatrices* (²).

2° Supposons maintenant que le système des monomes (M) soit

(¹) Valeurs prises parmi un système de nombres donnés $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

(²) On peut démontrer un théorème tout analogue où le mot *régulier* serait remplacé par le mot *continu* [16, *f*]. Ce point peut avoir une assez grande importance dans l'étude de diverses questions non résolues parmi lesquelles on peut citer les suivantes : extension du théorème de Holmgren (impossibilité d'une solution non régulière) ; recherche d'une intégrale particulière d'un système linéaire avec second membre lorsque l'on connaît l'intégrale générale du système sans second membre.

tel que chacun des produits que l'on peut former avec l'un d'eux $\overline{\mathrm{M}}$ et l'une des variables non multiplicatrices de $\overline{\mathrm{M}}$, soit identique à un M ou au produit d'un M par un certain nombre de ses variables multiplicatrices [autrement dit soit contenu dans une classe ($\mathcal{M}$) et non dans une classe ($\mathcal{N}$)]. Dans ce cas, *chacun des produits que l'on peut former avec un* M *et un monome quelconque en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *fait partie d'une des classes* ($\mathcal{M}$); nous dirons que le système (M) est *complet*. On voit que l'on sait répartir tous les multiples des monomes d'un système complet en un nombre fini de classes (sans éléments communs), classes ($\mathcal{M}$); les monomes de chaque classe s'obtenant en multipliant un monome déterminé par tous les monomes que l'on peut former avec certaines variables déterminées. On voit aussi que l'on sait répartir d'une manière analogue tous les monomes qui ne sont multiples d'aucun des M : classes ($\mathcal{N}$) (*cf.* exemple 7, 1° et 4°).

Étant donné un système quelconque de monomes (M), on peut toujours lui adjoindre un certain nombre de monomes, multiples de monomes M, de manière à obtenir un système *complet* (on peut indiquer plusieurs procédés *réguliers* [16, *e*, *f*] permettant d'arriver à ce résultat). Cela montre qu'il suffit de résoudre le problème posé au début de ce paragraphe (problème P), *dans le cas où le système des monomes correspondant aux dérivées* (D) *est complet.*

Si nous astreignons tout d'abord la fonction inconnue à satisfaire à chacune des équations données seulement *lorsque les variables non multiplicatrices* correspondant au premier membre se réduisent à leurs valeurs initiales (problème P′), le théorème énoncé à la fin de 1° nous donne immédiatement le degré de généralité de la solution : il y a *une solution et une seule telle que chaque dérivée* (N) (du système complémentaire) *se réduise à une fonction* (¹) *donnée arbitraire* (*régulière*), *lorsque ses variables non multiplicatrices se réduisent à leurs valeurs initiales.*

Revenons maintenant au problème (P) lui-même. Des conditions de possibilité apparaissent immédiatement : à chacune des identités

$$\overline{\mathrm{M}}.x_i = \mathrm{M}.x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \tag{1}$$

(¹) Cette « fonction » se réduit à une *constante* quand N *n'a pas* de variable multiplicatrice.

que mentionne la définition des systèmes complets, correspond une relation entre les fonctions $\bar{f}$, f auxquelles on cherche à égaler les dérivées $\overline{\mathrm{D}}$, D correspondant à $\overline{\mathrm{M}}$, M :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Si ces conditions (qui sont en nombre fini) *sont toutes réalisées, toute solution du problème* (P′) *est aussi solution du problème* (P) ; les deux problèmes sont équivalents, de sorte que l'on peut répéter exactement pour (P) l'énoncé obtenu pour (P′).

La démonstration résulte aisément de la propriété suivante des systèmes complets. Si l'on convient de dire que $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ est plus *haut* ou plus *bas* que $x_n^{\alpha'_n} x_{n-1}^{\alpha'_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha'_1}$ suivant que la première des différences $\alpha_n - \alpha'_n$, $\alpha_{n-1} - \alpha'_{n-1}$, ..., $\alpha_1 - \alpha'_1$ qui ne s'annule pas est *positive* ou *négative*, dans une identité telle que (1), M est plus haut que $\overline{\mathrm{M}}$.

5. **Remarques générales sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles.** — Étant donné un système quelconque S_p d'équations aux dérivées partielles d'ordre au plus égal à p, dérivons ses équations 1, 2, ..., λ fois et adjoignons les équations obtenues au système S_p ; le système $S_{p+\lambda}$ obtenu sera dit le *prolongement d'ordre* $p+\lambda$ de S_p.

Il peut arriver qu'un prolongement de S_p fournisse des équations d'ordre au plus égal à p, qui ne figurent pas parmi les conséquences algébriques de S_p (il suffit de se rappeler l'exemple d'un système de premier ordre S_1

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

le prolongement d'ordre 2 fournit l'équation $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ d'ordre 1, non conséquence de S). On peut considérer comme un cas particulier du cas précédent celui où un prolongement de S_p fournirait une équation ne contenant que les variables indépendantes, équation qui mettrait en évidence l'impossibilité du système d'équations aux dérivées partielles S_p.

Supposons qu'aucun prolongement de S_p ne fournisse d'équation d'ordre égal ou inférieur à p. Il peut arriver qu'un prolongement d'ordre $p+\lambda'$ fournisse des équations d'ordre $p+\lambda < p+\lambda'$ qui ne figurent pas dans les conséquences algébriques de $S_{p+\lambda}$. Ce cas ne peut se présenter pour les systèmes du premier ordre à une inconnue ni pour les systèmes de Cauchy de k équations à k inconnues. Mais en voici deux exemples pour un système du *deuxième* ordre à *une* fonction inconnue, et pour un système du *premier ordre* de *trois* équations à *trois* inconnues non susceptible de se mettre sous la forme de Cauchy, même après changement de variables :

1° Le prolongement d'ordre 4 du système S_2,

$$p_{200} - y p_{002} = 0, \qquad p_{020} = 0, \qquad p_{ikl} = \frac{\partial^{i+k+l} u}{\partial x^i \, \partial y^k \, \partial z^l},$$

fournit l'équation du 3e ordre

$$p_{012} = 0,$$

qui ne figure pas dans les conséquences (algébriques) du prolongement d'ordre 3 du système S_2.

2° Le prolongement d'ordre 3 du système S_1

$$S x_u^2 = E, \qquad S x_u x_v = F, \qquad S x_v^2 = G,$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues des deux variables u, v, fournit l'équation du 2e ordre

$$2 S (x_{uv}^2 - x_{u^2} x_{v^2}) = E_{v^2} - 2 F_{uv} + G_{u^2},$$

qui ne figure pas dans les conséquences (algébriques) du prolongement d'ordre 2 de S_1.

Supposons maintenant non seulement qu'aucun prolongement de S_p ne fournisse d'équation d'ordre au plus égal à p, mais aussi qu'aucun prolongement d'ordre $p+\lambda' > p+\lambda$ ne fournisse d'équation d'ordre $p+\lambda$ qui ne figure pas dans les conséquences de $S_{p+\lambda}$. On pourra alors, en se plaçant à un point de vue purement formel, avoir, en quelque sorte, une idée du degré de généralité de la solution. L'étude (algébrique) des systèmes S_p, S_{p+1}, S_{p+2}, ... permet en effet de voir le nombre d'arbitraires dont dépend, pour un système de valeurs initiales données, l'ensemble des dérivées d'ordre p, $p+1$, $p+2$, ... Pour la solution effective du problème proposé, il sera nécessaire de se demander si les séries de Taylor formées à l'aide de ces dérivées sont convergentes (dans un domaine convenable). De plus, il conviendra de préciser les « conditions initiales », de substituer à la donnée de constantes arbitraires en nombre infini celle de fonctions arbitraires en nombre fini.

6. **Théorème général de M. Riquier.** — L'étude du système de Cauchy-Kowalevsky nous a servi à introduire la distinction des dérivées en *principales* et *paramétriques* et la notion de classement des dérivées.

Celle des systèmes du premier ordre à une fonction inconnue nous a servi à introduire la notion de système *complètement intégrable*.

Celle enfin du problème général des fonctions primitives nous a servi à introduire la notion de *système* de monomes *complémentaire* d'un système donné, notion qui permet de préciser la forme des conditions initiales dans un cas où cette forme n'apparaît pas d'elle-même avec évidence.

Ces diverses notions serviront toutes ensemble dans l'étude qne nous allons faire maintenant et qui comprendra les trois précédentes comme cas particuliers.

Les *classements* que nous considérerons sont plus généraux que les précédents. Attachons à chacune des variables indépendantes x_1, $x_2, \ldots, x_n$, et à chacune des fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_k$, s nombres entiers qui seront appelés *cotes* 1^re^, 2^e^, ..., $s^{\text{ièmes}}$ de la quantité considérée. Appelons cote $\lambda^{\text{ième}}$ d'une dérivée d'une fonction inconnue, d'ordre total r, la somme des cotes $\lambda^{\text{ièmes}}$ de cette fonction et des r variables de dérivation. Supposons de plus que les cotes *premières* des *variables* indépendantes soient toutes égales à 1. De deux dérivées D, D' de cotes $c_1, c_2, \ldots, c_s$; $c'_1, c'_2, \ldots, c'_s$, D sera dite *postérieure* ou *antérieure* à D' suivant que la première des différences

$$c_1 - c'_1, \quad c_2 - c'_2, \quad \ldots, \quad c_s - c'_s$$

qui n'est pas nulle est *positive* ou *négative*. Les dérivées des fonctions inconnues se trouvent ainsi réparties en classes $C_1, C_2, \ldots, C_\mu \ldots$ dont chacune ne contient qu'un nombre fini d'éléments, à savoir toutes les dérivées dont les cotes sont respectivement égales aux cotes de l'une d'entre elles. Tout classement de cette nature jouit des propriétés suivantes :

1° D désignant une dérivée quelconque, $\dfrac{\partial D}{\partial x_i}$ est postérieure à D;

2° $\frac{\partial D}{\partial x_i}$ est postérieure ou antérieure à $\frac{\partial D'}{\partial x_i}$, suivant que D est postérieure ou antérieure à D'.

1° Considérons un système à k fonctions inconnues de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ composé d'équations (S) résolues par rapport à des dérivées, toutes différentes, de ces inconnues, chaque équation ne contenant dans son second membre que des dérivées antérieures au premier [1]. Les dérivées premiers membres relatives à une même fonction u correspondent aux monomes d'un système M; à chacun de ces monomes sont attachées par la règle énoncée plus haut des « variables multiplicatrices »; à chacun des « monomes complémentaires » correspond une dérivée de u, « dérivée complémentaire » à laquelle sont également attachées comme on l'a vu plus haut des « variables multiplicatrices ».

Nous demandons, non pas que le système soit vérifié quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (problème P), mais seulement que *chaque équation soit vérifiée lorsque les variables non multiplicatrices du premier membre correspondant se réduisent à leurs valeurs initiales* [2] (problème P').

Le problème (P') ainsi posé *a une solution régulière et une seule telle que chaque dérivée complémentaire se réduise à une fonction donnée, arbitraire, régulière, lorsque ses variables non multiplicatrices se réduisent à leurs valeurs initiales* [3] (si du moins toutes les valeurs initiales déduites des données constituent un système de valeurs *régulier* pour chacun des seconds membres des équations E).

Appelons principales les dérivées qui figurent aux premiers membres et plus généralement celles qui correspondent à un ($\mathcal{M}$), paramétriques toutes les autres : celles qui correspondent à un $\mathcal{N}$. Chaque équation E, chaque équation $\mathcal{E}$ que l'on peut en déduire par dérivations relativement à ses variables multiplicatrices sera mise dans la classe C_λ de son premier membre. La donnée de chaque dérivée complémentaire, lorsque ses variables non multiplicatrices se

---

(1) M. Riquier appelle orthonomes les systèmes qui jouissent de cette propriété.

(2) Valeurs prises parmi les coordonnées $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ d'un point P_0 point initial.

(3) Une fonction inconnue dont aucune dérivée ne figure dans un premier membre doit être prise arbitrairement.

réduisent à leurs valeurs initiales, fait connaître au total les valeurs pour $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de toutes les dérivées paramétriques. Comme d'ailleurs chacune des équations E et des équations formées ne contient dans son second membre que des dérivées antérieures au premier, les équations de la classe C_1 font connaître les valeurs en P_0 des dérivées principales de la classe C_1 ; les équations de la classe C_2 font connaître alors les valeurs en P_0 des dérivées principales de la classe C_2, et ainsi de suite de proche en proche. Le problème (P′) *ne peut donc avoir plus d'une solution régulière* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ satisfaisant aux conditions initiales imposées.

Formons maintenant les séries de Taylor, bien déterminées d'après ce qui précède, qui définissent $u_1, u_2, \ldots, u_k$. *On peut démontrer* à l'aide de la méthode des fonctions majorantes que ces séries admettent un système de rayons de convergence différents de zéro (¹). Le problème posé a donc bien une solution régulière et une seule.

2° Supposons que les systèmes (M) relatifs aux diverses fonctions inconnues soient tous *complets* (²); et demandons maintenant que le système soit vérifié quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

A chacune des identités

$$\overline{M}x_i = Mx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

que mentionne la définition des systèmes complets, correspond une équation à laquelle doit satisfaire toute solution du problème

$$\Delta_{x_i}\bar{f} = \Delta_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}} f,$$

où $\bar{f}$, f désignent les seconds membres des équations ayant pour premiers membres les dérivées $\overline{D}$, D correspondant à $\overline{M}$, M et où Δ désigne un symbole de dérivation totale.

Si toutes ces équations (I) sont des conséquences algébriques des équations $\mathcal{E}$ (où l'on comprend les E), nous dirons que le système (E)

(¹) C'est pour cette démonstration de convergence que l'hypothèse relative aux cotes premières des variables indépendantes *toutes égales à* 1 a une importance essentielle. Mᵐᵉ de Kowalevsky a montré que l'équation $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ n'a pas toujours une solution régulière prenant pour $y = 0$ une valeur régulière donnée (*voir* aussi [22, *e*] et [23]).

(²) On arrivera toujours à réaliser cette circonstance en adjoignant aux équations données quelques-unes de celles qu'on en déduit par dérivations.

est *complètement intégrable* (1). Les équations (I) sont appelées conditions d'intégrabilité.

Ces équations (I) sont évidemment en nombre fini; remarquons d'autre part que chacune d'elles ne peut contenir que des dérivées antérieures à la dérivée correspondant au monome

$$\overline{\mathrm{M}}x_i = \mathrm{M}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n};$$

par suite il suffit, pour reconnaître si (E) est complètement intégrable, de reconnaître si chacune des équations (I) est conséquence (algébrique) de celles des équations $\mathcal{E}$ de classes antérieures à la classe de la dérivée $\dfrac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial x_i}$ correspondante. On a donc un moyen régulier pour reconnaître, *par un nombre fini d'opérations*, si un système est ou non complètement intégrable.

Si le système (E) est complètement intégrable, *toute solution régulière du problème* (P′) *satisfait à toutes les équations* E *quels que soient* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, c'est-à-dire *est solution du problème* (P). Les deux problèmes sont alors équivalents et l'on peut répéter pour P l'énoncé même obtenu pour (P′).

Les u désignant des fonctions quelconques et $\overline{\mathrm{A}}$, $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$, ... représentant les différences $\overline{\mathrm{D}} - \overline{f}$, $\overline{\overline{\mathrm{D}}} - \overline{\overline{f}}$, ..., il est aisé de vérifier que, si le système est complètement intégrable, chaque expression (2) $\dfrac{\partial \overline{\mathrm{A}}}{\partial x_i}$ est une fonction des variables indépendantes, des dérivées paramétriques, des A et de leurs dérivées $\mathcal{A}$ par rapport à leurs variables multiplicatrices, qui possède la propriété de s'annuler dès qu'on y annule ces A et leurs dérivées ($\mathcal{A}$). Ces relations (II) sont telles que grâce à l'attribution de cotes simples aux A considérées comme fonctions inconnues, chaque second membre ne contient que des dérivées antérieures au premier.

Supposons que les u constituent une solution régulière du problème (P′). Les relations (II) constituent un système d'équations aux dérivées partielles pour les A qui admet *au plus une solution régulière* telle que les diverses fonctions qui la constituent s'annulent dans les conditions mêmes indiquées pour le problème (P′). Il résulte de là que les A sont nuls quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(1) M. Riquier emploie, à peu près dans ce sens, le mot *passif* (*voir* plus bas 15).

(2) Le signe de dérivation est bien entendu un signe de dérivation totale par rapport à x_i.

Remarque. — On peut reconnaître qu'un système est complètement intégrable par un procédé un peu différent de celui qu'on vient d'indiquer. Les premiers membres correspondant à chacune des fonctions étant supposés constituer toujours un système complet, désignons par p_0 leur cote première maxima; et considérons celles des équations $\mathcal{E}$ dont la cote première ne dépasse pas un nombre déterminé $p_1 \geqq p_0$ (équations $\mathcal{E}_1$). On peut aisément définir pour ces équations des *variables multiplicatrices* ayant des propriétés analogues à celles des variables multiplicatrices précédemment introduites. Pour que le système soit *complètement intégrable*, il faut et il suffit que :

1° Toute dérivée première d'une équation $\mathcal{E}_1$ de cote première inférieure à p_1 soit conséquence du système $\mathcal{E}_1$.

2° Toute dérivée première d'une équation $\mathcal{E}_1$ de cote première p_1 par rapport à une variable non multiplicatrice de cette équation soit conséquenee des $\mathcal{E}_1$ et des dérivées premières des $\mathcal{E}_1$ de cote première p_1 par rapport à leurs variables multiplicatrices.

Les B (différence entre le premier membre d'une équation $\mathcal{E}_1$ et le second) satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles analogue à celui auquel satisfont les A; mais ce système est ici *du premier ordre.*

7. Exemple. — Soit le système des six équations du deuxième ordre à une fonction inconnue de cinq variables :

$$\left|\begin{array}{l} p_{54}=p_{11} \\ p_{53}=p_{41} \\ p_{52}=p_{31} \end{array}\right| \begin{array}{l} p_{44}=p_{52} \\ p_{43}=p_{21} \\ p_{33}=p_{42} \end{array}\left|\quad \text{où } p_{ik}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\right.$$

1° Le tableau des *variables multiplicatrices* des premiers membres est

p_{54}	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
p_{53}	x_5		x_3	x_2	x_1
p_{52}	x_5			x_2	x_1
p_{44}		x_4	x_3	x_2	x_1
p_{43}			x_3	x_2	x_1
p_{33}			x_3	x_2	x_1

On constate que le système des premiers membres est *complet* (8 identités à vérifier).

2° Attribuons aux variables les cotes suivantes :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1	1	1	1
1	0	1	1	2
0	0	0	1	1

ce qui classe les 15 dérivées secondes dans l'ordre suivant :

Dérivées Secondes	p_{22}	p_{21} p_{32}	p_{42}	p_{11} p_{31} p_{33}	p_{52} p_{41} p_{43}	p_{44}	p_{51} p_{53}	p_{54}	p_{55}
Cotes	2, 0, 0	2, 1, 0	2, 1, 1	2, 2, 0	2, 2, 1	2, 2, 2	2, 3, 1	2, 3, 2	2, 4, 2

de sorte que chaque second membre ne contient que des dérivées *antérieures* au premier membre correspondant.

3° On constate que le système est *complètement intégrable* (8 identités à vérifier).

4° Les *monomes complémentaires* du système des premiers membres sont donnés, avec leurs variables multiplicatrices, dans le tableau suivant :

	(N).	variables multiplicatrices.
$N^{(3)}$	(provenant de $x_4 x_3$) x_4	x_2, x_1
	(provenant de x_3^2) 1, x_3	x_2, x_1
$N^{(2)}$	(provenant de $x_5 x_2$) x_5	x_5, x_1

de sorte que l'on peut se donner arbitrairement les valeurs régulières de u, $\frac{\partial u}{\partial x_4}$, $\frac{\partial u}{\partial x_5}$ sur la multiplicité $x_3 = x_3^0$, $x_4 = x_4^0$, $x_5 = x_5^0$ et celle de $\frac{\partial u}{\partial x_5}$ sur la multiplicité $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, $x_4 = x_4^0$; il y aura *une solution régulière* et *une seule* satisfaisant à ces conditions.

8. **Réduction d'un système quelconque à une forme complètement intégrable.** — On peut indiquer des procédés réguliers qui permettent, étant donné un système différentiel quelconque, d'arriver, par dérivations et éliminations, soit à une relation entre les variables

indépendantes seules, montrant l'impossibilité du système, soit à une forme complètement intégrable de l'espèce précédente (6, 2°).

Adoptons pour les fonctions inconnues et les variables indépendantes un système de cotes tel que chacune des classes qui en résultent ne contienne qu'un élément; c'est ce qui aura lieu, par exemple, pour le système de cotes suivant :

	u_1	u_2	...	u_k	x_1	x_2	...	x_n
Cotes premières..........	0	0	...	0	1	1	...	1
Cotes secondes...........	1	2	...	k	0	0	...	0

les cotes $3^e, 4^e, \ldots, (n+2)^{\text{ième}}$ étant nulles sauf la cote $(n+3-i)^{\text{ième}}$ de x_i qui est égale à 1.

On peut toujours supposer que chacune des équations du système donné C soit résolue par rapport à la dernière (1) des dérivées qui y entrent, les dérivées premiers membres étant toutes différentes [forme (a)]. On peut, en adjoignant au besoin à ces équations un certain nombre de celles qu'on en déduit par dérivations, supposer que les dérivées premiers membres correspondant à chaque inconnue constituent des systèmes complets. Adjoignons maintenant au système ses conditions d'intégrabilité et mettons le système obtenu (C′) sous la forme (a).

Appelons (D) l'opération qui permet de passer du système (C) au système (C′). Soit (C″) le système obtenu en effectuant l'opération (D) sur le système C′; et ainsi de suite. On va voir aisément qu'après un certain nombre, fini, d'opérations de ce genre, le système obtenu $C^{(q)}$ est *complètement intégrable*, au sens du paragraphe (6, 2°).

Chaque opération (D) qui ne reproduit pas le système $C^{(\lambda)}$ auquel on l'applique, adjoint à l'un au moins (M) des systèmes de monomes correspondant aux premiers nombres de $C^{(\lambda)}$ un ou plusieurs monomes dont aucun n'est multiple d'un monome de (M). *Or une suite de monomes à n variables telle que chacun d'eux n'est multiple d'aucun des précédents se compose d'un nombre fini de termes* (2)

(1) C'est-à-dire celle qui est *postérieure* à toutes les autres.

(2) Si l'on admet ce fait pour les monomes à $n-1$ variables, on le prouve très aisément pour les monomes à n variables. Il suffit alors, pour démontrer le lemme de nature arithmétique que nous utilisons, de remarquer qu'il est vrai pour $n=1$ puisqu'une suite d'entiers positifs décroissants n'a qu'un nombre fini de termes.

et, d'autre part, il n'y a qu'*un nombre fini de fonctions inconnues* (u).

Donc après un certain nombre fini q d'opérations, (D) ne fait que reproduire le système $C^{(q)}$ auquel on l'applique, ce qui revient à dire que $C^{(q)}$ est complètement intégrable (6, 2°).

Le raisonnement prouve le théorème de M. Tresse :

« Des équations aux dérivées partielles (à un nombre fini de fonctions inconnues, de n variables indépendantes) peuvent toujours être considérées comme des combinaisons (« algébriques » et différentielles) d'un nombre fini d'entre elles »,

et le théorème de Hilbert qui peut être considéré comme contenu dans le précédent.

« D'un système quelconque de formes algébriques en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut extraire un nombre fini de formes $F_1, F_2, \ldots, F_k$ telles que toutes les formes du système s'écrivent $A_1F_1+A_2F_2+\ldots+A_kF_k$, les A désignant des formes convenables en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. »

Le résultat prouve qu'un système d'équations aux dérivées partielles ne peut avoir d'autres conséquences que les équations que l'on en déduit par dérivations et combinaisons [1].

Remarque. — On peut tirer de la seconde forme des conditions d'intégrabilité (remarque n° 6, 2°) la conséquence suivante qui complète sur un point les théorèmes d'Hilbert :

Les relations qui existent entre les formes indépendantes B *d'ordre p d'un module donné sont du premier ordre lorsque p est assez grand*,

c'est-à-dire que les systèmes X de formes solutions de l'équation

$$\Sigma B_i X_i = 0$$

se déduisent par combinaisons linéaires d'un nombre fini de solutions où les X sont *linéaires*.

9. **Démonstration, par récurrence, d'un théorème général relatif**

---

[1] Ce point suppose, bien entendu, que l'on envisage *l'intégrale générale* du système et non pas seulement les solutions astreintes à telle ou telle condition, de régularité par exemple (c'est ainsi que, si l'on ne considérait que les solutions *régulières pour* $x=0$ de l'équation $xy''+y'=0$, cette équation aurait pour « conséquence » $y'=0$, qui ne peut s'en déduire par dérivations et combinaisons).

aux systèmes d'équations aux dérivées partielles. — On est en possession d'un procédé régulier permettant, par un nombre fini d'opérations (éliminations et résolutions, dérivations), ou bien de constater l'impossibilité du système proposé (cas d'incompatibilité), ou bien de le ramener à une forme canonique complètement intégrable pour laquelle on connaît un théorème d'existence précis. Mais, des propriétés d'une telle forme, retenons seulement ce fait que des vérifications *en nombre fini* nous permettent de nous assurer qu'on ne peut par dérivations et combinaisons *en nombre quelconque* en déduire une incompatibilité. Cette propriété, et le théorème de M. Tresse, dont la démonstration repose, nous l'avons vu, sur les mêmes principes, suffisent à montrer comment le théorème fondamental de Cauchy relatif à *une seule équation* d'ordre p peut permettre pour un système différentiel quelconque d'indiquer le degré de généralité de la solution [16, *b*].

Nous utiliserons un changement de variables. La méthode consistera à ramener l'étude du cas où le nombre des variables indépendantes est n à celui où le nombre des variables indépendantes est $n-1$.

Excluons le cas d'incompatibilité. Si, $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ étant considérées comme les seules inconnues, nous ne sommes pas dans le cas d'incompatibilité, choisissons u_k arbitrairement. Après avoir éventuellement choisi ainsi une ou plusieurs fonctions, nous serons ramené à un système à h inconnues d'où l'on peut déduire entre autres, par dérivations et combinaisons, des équations contenant chacune une seule des inconnues restantes

$$E_i(u_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

On peut changer de variables de manière qu'une telle équation, supposée d'ordre r_i, soit résoluble par rapport à $\frac{\partial^{r_i} u_i}{\partial x_1^{r_i}}$ (forme de Cauchy). Le changement de variables étant effectué de manière qu'il en soit ainsi pour chacune des équations E_i, on pourra évidemment mettre le système donné sous une forme telle qu'il ne contienne, outre les E_i, que des équations $e_1, e_2, \ldots, e_q$ faisant intervenir seulement les dérivées des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_h$ où la dérivation par rapport à x_1 est d'ordre inférieur à $r_1, r_2, \ldots, r_h$ respectivement (forme e).

Une équation obtenue en dérivant e_i par rapport à x_1 peut se mettre, en tenant compte des (E), sous la forme (e); si chacune de ces équations (e') est conséquence algébrique des e et de leurs dérivées par rapport à x_2, x_3, ..., x_n, on conviendra de dire que le système proposé est sous forme « complètement intégrable ». Sinon, on recommencera sur les (e, e') l'opération que l'on vient de faire sur les (e); les systèmes successifs ainsi formés peuvent être considérés comme à $n-1$ variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$ et à $r_1 + r_2, \ldots, + r_h$ inconnues (les u_i et leurs $r_i - 1$ premières dérivées par rapport à x_1); l'opération ne pourra s'effectuer qu'un nombre fini de fois.

Mais un système *complètement intégrable* est aisé à traiter si l'on sait traiter *les systèmes à $n-1$ variables indépendantes*. Soit en effet une solution régulière du système (e), considéré comme à $n-1$ variables indépendantes, x_1 ayant une valeur fixe a; utilisons les fonctions qui la constituent comme conditions initiales pour une solution régulière du système (E); conformément au théorème de Cauchy cette solution régulière est bien déterminée. *Cette solution satisfait aussi aux équations (e) quels que soient x_1, x_2, ..., x_n.*

On le voit immédiatement en écrivant les conditions d'intégrabilité et en utilisant le raisonnement indiqué précédemment à deux reprises [**3**, **6**].

10. Formes diverses du système différentiel le plus général. — La question fondamentale qui nous occupe est ainsi résolue par deux méthodes différentes, susceptibles elles-mêmes de bien des modes d'emploi différents.

C'est ainsi que, dans la seconde, on peut prendre pour le système E un système quelconque déduit par dérivations et combinaisons du système donné, et susceptible d'être mis sous la forme de Cauchy-Kowalevsky par un changement de variables indépendantes. C'est ainsi que, dans la première, on peut varier les cotes des variables et des fonctions, que l'on peut faire en sorte de n'avoir à traiter que des systèmes à une fonction inconnue (on détermine successivement chacune des inconnues), ou encore de n'avoir que des systèmes du premier ordre (à plusieurs inconnues) [**24**, a, r].

On a remarqué depuis longtemps que tout système différentiel peut être remplacé, en considérant certaines dérivées comme des inconnues nouvelles et en gardant les mêmes variables indépendantes, par un système différentiel *du premier ordre*. On déduit immédiatement de cette remarque évidente que tout système peut se remplacer par un système à *une* fonction inconnue, d'ordre *deux* [1] : il suffit de prendre pour nouvelle inconnue la fonction

$$u = x_{n+1} u_1 + x_{n+2} u_2 + \ldots + x_{n+k} u_k,$$

les u_i étant les fonctions qui interviennent dans le système du premier ordre précédent (S) et les x_{n+i} de nouvelles variables indépendantes, de remplacer, dans les équations de (S), u_i par $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et d'adjoindre au système ainsi obtenu les équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+i}\,\partial x_{n+h}} = 0 \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, k).$$

On déduit de la même remarque que tout système d'équations aux dérivées partielles peut se remplacer par un *système d'équations de Pfaff*. Il suffit d'adjoindre aux équations du système (S) où $\frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda}$ est remplacé par $p_{i\lambda}$ les relations

$$du_i = p_{i1}\,dx_1 + p_{i2}\,dx_2 + \ldots + p_{in}\,dx_n.$$

On ne s'intéresse, il est vrai, qu'à celles des intégrales de ce système de Pfaff *qui n'établissent aucune relation entre les x*.

Suivant la nature du problème posé, il pourra être avantageux soit de distinguer dès l'abord les fonctions inconnues des variables indépendantes, comme nous l'avons fait jusqu'ici, soit de traiter tout d'abord de la même manière toutes les variables tant dépendantes qu'indépendantes en étudiant un système d'équations de Pfaff.

11. Étude des modules de formes. — Un perfectionnement de la première des deux méthodes consiste à donner le moyen d'éviter les complications accessoires qui proviennent du choix fixé *a priori* des variables indépendantes.

Dans cet ordre d'idées, un essai intéressant a été fait dès 1896 par M. Delassus [8, *a*]. Malheureusement, la forme canonique proposée par cet auteur n'est pas entièrement générale [11, *c*, *e*; 16, *j*; 25, *a*]. C'est par M. Gunther qu'a été donnée, pour la première fois, une forme canonique « invariante » à laquelle on peut ramener par un change-

[1] Ce fait a son importance pour la classification des transcendantes définies par les systèmes différentiels [9, *a*].

ment de variables un système quelconque d'équations aux dérivées partielles [11, g, i]. Les remarques purement algébriques qui suivent conduisent très naturellement à une forme canonique qui est voisine de celle de M. Gunther et qui la comprend comme cas particulier. Elles auront de plus l'avantage de montrer directement le rôle dans la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles de certaines notions introduites par M. Cartan au sujet des systèmes d'équations de Pfaff.

On dit qu'un ensemble de formes algébriques (F) en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constitue un *module* si toute forme qui peut s'écrire

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_k F_k$$

(où les F appartiennent à l'ensemble et où les A sont des formes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$) appartient aussi à l'ensemble (F).

Il résulte du théorème mentionné plus haut (8) que d'un module quelconque de formes, on peut extraire un nombre fini de formes F_1, $F_2, \ldots, F_k$ telles que toutes les formes du module puissent s'écrire $A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_k F_k$ (les A désignant des formes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$); et par suite, dès que P est assez grand ($P \geqq P_0$) toutes les formes d'ordre $P+1$ du module sont combinaisons linéaires à coefficients constants des produits que l'on peut former avec l'une quelconque des formes (F) d'ordre P du module et l'une quelconque des variables x.

Il résulte aussi des remarques faites aux n^{os} 4, 6, 8 que : *Le nombre des conditions indépendantes auxquelles doit satisfaire une forme d'ordre* P *pour faire partie d'un module quelconque donné est un polynome en* P *dès que* P *est assez grand.*

En effet, en égalant à zéro les formes qui définissent le module et en traitant les équations obtenues par la méthode indiquée au n° 8 $\left(\text{le rôle d'une dérivée partielle } \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \text{ étant tenu ici par le monome correspondant } x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}\right)$, on voit que le nombre des conditions indépendantes auxquelles doit satisfaire une forme d'ordre P pour faire partie du module est égal au nombre des monomes d'ordre P qui ne sont multiples d'aucun des monomes d'un certain système complet (M); d'après la définition (4) des classes, en nombre *fini*, dont font partie ces monomes d'ordre P (classes $\mathfrak{N}$) ce nombre est un polynome en P dès que P dépasse le degré maximum des monomes (N) complémentaires des (M). Ce polynome est appelé *polynome caractéristique* du module.

Nous allons voir maintenant que, dès que P devient assez grand, le passage des formes d'ordre P aux formes d'ordre $P+1$ se fait suivant une loi simple et générale que nous préciserons.

Étant donné un système quelconque de formes (F) d'ordre p, appelons $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k$ le nombre dont augmente son *rang* (au sens de la théorie des équations linéaires, les monomes d'ordre p, $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, où $\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n=p$, étant regardés comme autant de variables indépendantes), lorsqu'on lui adjoint les produits respectifs de k formes linéaires déterminées à coefficients *arbitraires* par tous les monomes d'ordre $p-1$,

$$x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n} \qquad (\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n=p-1).$$

On a

$$\sigma_1\geqq\sigma_2\geqq\ldots\geqq\sigma_{n-1}\geqq\sigma_n=0.$$

Soient (F′) les formes obtenues en multipliant une forme (F) par une variable (x); au système de formes (F′) d'ordre $p+1$ ainsi obtenu correspondent d'après la définition précédente des nombres σ,

$$\sigma'_1\geqq\sigma'_2\geqq\ldots\geqq\sigma'_{n-1}\geqq\sigma'_n=0.$$

On a la relation

$$\sigma'_1+\sigma'_2+\ldots+\sigma'_{n-1}\leqq\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+(n-1)\sigma_{n-1}. \tag{1}$$

Soient F″ les formes obtenues en multipliant une forme (F′) par une variable x, σ'' les nombres attachés, d'après la définition précédente, aux (F″).

Si, dans la relation (1), c'est *l'égalité* qui est vérifiée, on a encore *l'égalité*

$$\sigma''_1+\sigma''_2+\ldots+\sigma''_{n-1}=\sigma'_1+2\sigma'_2+\ldots+(n-1)\sigma'_{n-1}$$

et dans ce cas *les σ' sont donnés en fonction des σ* par les formules

$$\sigma'_k=\sigma_k+\sigma_{k+1}+\ldots+\sigma_{n-1}.$$

Le nombre des conditions indépendantes auxquelles doit satisfaire une forme d'ordre $P\geqq p$ pour faire partie du module défini par les (F) est alors

$$\sigma_1+\sigma_2\frac{P-p+1}{1}+\ldots+\sigma_k\frac{(P-p+1)(P-p+2)\ldots(P-p+k-1)}{1.2\ldots(k-1)}+\ldots$$
$$+\sigma_{n-1}\frac{(P-p+1)(P-p+2)\ldots(P-p+n-2)}{1.2\ldots(n-2)}.$$

Lorsque *l'égalité*

$$\sigma'_1+\sigma'_2+\ldots+\sigma'_{n-1}=\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+(n-1)\sigma_{n-1}$$

est vérifiée, on dit que le système des (F) est *en involution;* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ sont appelés *ses caractères.*

Quel que soit le module considéré, le système des formes d'ordre p qui lui appartiennent est en *involution à condition de choisir p assez grand* [16, i, k].

12. Exemples [16, k]. — 1° Les six formes en x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (à rapprocher du système étudié plus haut, n° 7)

$$x_5x_4-x_1^2,\quad x_5x_3-x_4x_1,\quad x_5x_2-x_3x_1;$$
$$x_4^2-x_5x_2,\quad x_4x_3-x_2x_1,\quad x_3^2-x_4x_2,$$

constituent un système en involution; les nombres $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ sont égaux à 5, 4, 0, 0. (Le module qu'elles définissent n'est autre que celui de toutes les formes en x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 qui s'annulent identiquement quand on y fait

$$x_5=u^4,\qquad x_1=u^3v,\qquad x_4=u^2v^2,\qquad x_3=uv^3,\qquad x_2=v^4.)$$

2° Deux formes arbitraires du second degré ne constituent pas un système en involution. Considérons pour fixer les idées deux formes du second degré à quatre variables, et supposons qu'elles n'aient pas de facteur commun du premier degré; elles ne constituent pas un système en involution; mais les huit formes du troisième degré que l'on en déduit en multipliant chacune d'elles par chacune des variables constituent un système en involution, les nombres $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ étant égaux à 8, 4, 0.

13. Systèmes en involution. Nouvelles formes canoniques. — Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles à une inconnue, on peut toujours, en effectuant au besoin des dérivations et des éliminations, le mettre sous la forme suivante :

$n_l, n_{l+1}, \ldots, n_p$ équations d'ordres $l, l+1, \ldots, p$ formant des systèmes $S_l, S_{l+1}, \ldots, S_p$ de rang $n_l, n_{l+1}, \ldots, n_p$ relativement aux dérivées d'ordres $l, l+1, \ldots, p$, toute équation obtenue en dérivant une fois une équation de l'un des systèmes $S_l, S_{l+1}, \ldots, S_{p-1}$ étant conséquence algébrique de $(S_l, S_{l+1}, \ldots, S_p)$, les n_p équations d'ordre p étant de plus linéaires par rapport aux dérivées d'ordre p.

Supposons que le système de formes en $P_1, P_2, \ldots, P_n$ obtenu en substituant, dans les termes d'ordre p des S_p, à chaque dérivée $\frac{\partial^p u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ le monome correspondant $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n}$ (formes *caractéristiques*) soit (en tenant compte au besoin des équations S_i où $i < p$) *en involution* (¹). Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ ses caractères.

Supposons de plus que le système obtenu en dérivant une fois les équations S_p donne seulement $\Gamma_n^{p+1} - [\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + (n-1)\sigma_{n-1}]$ équations indépendantes (²) relativement aux dérivées d'ordre $p+1$ qui y entrent (et éventuellement, des conséquences algébriques de S_l, $S_{l+1}, \ldots, S_p$). Nous dirons alors que *le système* $(S_l, S_{l+1}, \ldots, S_p)$ *est en involution*.

Soient maintenant un point $M_0(x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0)$ et des multiplicités linéaires *arbitraires* $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ à $1, 2, \ldots, n-1$ dimensions passant par M_0, chacune étant contenue dans la suivante. On peut se donner arbitrairement (outre les valeurs en M_0 des dérivées d'ordre inférieur à p, liées seulement par les équations $S_l, S_{l+1}, \ldots, S_{p-1}$) les valeurs sur $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ dérivées (³) d'ordre p.

Il y a une solution régulière, et une seule, qui satisfait à ces conditions. On suppose, bien entendu, que le système de valeurs initiales des dérivées que l'on déduit des données rende les équations S régulières et les équations $S_l, S_{l+1} \ldots, S_p$, résolubles dans les conditions ordinaires de la théorie classique des fonctions implicites.

Tout système à une inconnue peut être mis sous la forme invariante qui précède; il suffit de supposer p assez grand [16, k].

On arrive aisément à la démonstration du théorème d'existence

(¹) Les dérivées d'ordre inférieur à p et les variables indépendantes doivent être considérées comme de simples paramètres.

(²) Nous désignons par Γ_n^p le nombre des monomes d'ordre p à n variables

$$\Gamma_n^p = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

(³) Les dérivées d'ordre p qui doivent intervenir sont précisées par la théorie indiquée plus loin.

que nous venons d'énoncer en prenant comme nouvelles variables les formes linéaires qui interviennent dans la *définition* des systèmes en involution (leurs coefficients ayant un système de valeurs non exceptionnel).

Répartissons les monomes d'ordre p en n *classes*, les monomes de la $k^{\text{ième}}$ *classe* ne contenant aucun des x_i où $i < k$, mais contenant effectivemeut x_k, et appelons variables multiplicatrices [1] d'un monome de la $k^{\text{ième}}$ classe les variables x_k, x_{k-1}, ..., x_1 ; on obtient sans omission ni répétition tous les monomes d'ordre $p + \lambda$ en multipliant chaque monome d'ordre p, m_p par chaque monome d'ordre λ formé avec les variables multiplicatrices de m_p. Étant donné un système de monomes (M) d'ordre p, si chacun des produits que l'on peut former avec l'un d'eux $\overline{\mathrm{M}}$ et l'une de ses variables non multiplicatrices, est égal au produit d'un monome M du système par une de ses variables multiplicatrices, le système (M) est dit *involutif* (et c'est d'ailleurs un système de formes en involution). Il est très aisé de répartir les monomes d'ordre $\geqq p$ qui ne sont multiples d'aucun M en un nombre fini de classes ($\mathcal{N}$) sans éléments communs : une classe est constituée par tous les monomes que l'on peut former en multipliant un monome N d'ordre p, non compris dans les M, par un monome quelconque formé avec les variables multiplicatrices de N.

On peut supposer que chaque équation S_p est résolue, ne contient dans son second membre que des dérivées antérieures au premier, et que les dérivées premiers membres correspondent aux monomes d'un système involutif. Les conditions initiales se mettent alors en évidence grâce aux remarques qui viennent d'être faites relativement aux ($\mathcal{N}$) (*cf.* 4).

Exemple. — Le système

$$\begin{array}{lll} p_{55} = p_{41}, & p_{54} = p_{31}, & p_{53} = p_{21}, \\ & p_{44} = p_{21}, & p_{43} = p_{32}, \\ & & p_{33} = p_{42} \end{array}$$

est sous la forme canonique voulue; une solution est déterminée par la donnée des fonctions et constantes arbitraires suivantes :

---

[1] On remarque que, à l'encontre de ce qui se passait précédemment, les variables multiplicatrices d'un monome *ne dépendent que de ce monome* et non pas du système où il est contenu.

valeurs de p_{52}, p_{42}, p_{32}, p_{22} pour

$$x_5 = x_5^0, \qquad x_4 = x_4^0, \qquad x_3 = x_3^0;$$

valeurs de p_{51}, p_{41}, p_{31}, p_{21}, p_{11} pour

$$x_5 = x_5^0, \qquad x_4 = x_4^0, \qquad x_3 = x_3^0, \qquad x_2 = x_2^0;$$

valeurs de u et de ses dérivées premières pour

$$x_5 = x_5^0, \qquad x_4 = x_4^0, \qquad x_3 = x_3^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad x_1 = x_1^0,$$

soit 4 fonctions de deux variables, 5 d'une variable, 6 constantes. L'exemple actuel n'est autre, aux notations près, que celui que l'on a cité plus haut (7); les variables précédemment appelées x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sont appelées ici x_3, x_1, x_5, x_4, x_2.

Le cas examiné antérieurement par M. Gunther est celui où les dérivées premiers membres correspondent à un système de monomes *normé* [**11**, g] : un système de monomes d'ordre p est dit *normé* si, quel que soit le monome de l'ensemble $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k} \ldots x_n^{\alpha_n}$ où $\alpha_k \neq 0$, l'ensemble contient aussi les monomes

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k - 1} \ldots x_l^{\alpha_l + 1} \ldots x_n^{\alpha_n} \qquad (l = k+1, k+2, \ldots, n).$$

Un changement de variables *arbitraire* amène nécessairement à ce cas ([1]).

D'après M. Robinson, on peut toujours, par un changement de variables, être ramené au cas où le système des monomes premiers membres est tel que si $x_k^{\alpha_k} \ldots x_n^{\alpha_n}$, où $\alpha_k \neq 0$ fait partie du système : 1° les $x_k^{\alpha_k - 1} \ldots x_l^{\alpha_l + 1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, où $l > k$; 2° les $x_k^{\alpha_k} \ldots x_l^{\alpha_l - 1} \ldots x_m^{\alpha_m + 1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, où $m > l > k$ en font aussi partie. Les systèmes de M. Robinson [**25**] doivent être rapprochés des systèmes *réguliers* de M. Riquier [**24**, r].

14. Digression. Systèmes minimaux de M. Gunther. — Dans l'étude à laquelle il a été fait allusion plus haut (n° **11**), M. Delassus appelle « systèmes canoniques » de monomes d'ordre p tout système constitué par les l derniers monomes de cet ordre, $l \leqq \Gamma_n^p$, le classement des monomes d'ordre p étant défini par la règle suivante : M, M' étant deux monomes d'ordre p correspondant aux exposants α_1,

---

([1]) Tout système normé est involutif; mais la réciproque n'est pas vraie; le système x_3^2, $x_3 x_2$, x_2^2, $x_2 x_1$ par exemple est involutif sans être normé.

$\alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ M est dit *postérieur* (¹) ou *antérieur* à M′ suivant que la première des différences $\alpha_1 - \alpha'_1, \alpha_2 - \alpha'_2, \ldots, \alpha_n - \alpha'_n$ qui ne s'annule pas est *positive* ou *négative*. Or, contrairement à ce qu'avait cru pouvoir affirmer M. Delassus, *on ne peut pas toujours par changement de variables* ramener un système de l formes indépendantes d'ordre p à être de *rang* l *par rapport aux* l *derniers monomes d'ordre* p. C'est ce qu'a montré d'abord l'exemple [**11**, c; **25**, b] des formes à trois variables x_1, x_2, x_3 :

$$x_1^2, \quad x_1 x_2, \quad x_2^2.$$

Des systèmes de forme normale très simple tels que *deux* polynomes homogènes du deuxième ordre, à quatre variables, par exemple, ou encore les l polynomes d'un ordre déterminé p quelconque du module (F, G) que l'on en déduit, ne peuvent d'ailleurs non plus se ramener par changement de variables à avoir le rang l par rapport aux l derniers monomes d'ordre p [**16**, j, k].

Quoi qu'il en soit, on doit remarquer avec M. Gunther [**11**, f] que la considération des systèmes canoniques de M. Delassus peut servir à la solution d'une question voisine de celle qui a été traitée au n° **11**.

Étant donnés n, p et $l \leqq \Gamma_n^p$, *trouver le minimum* L_0 *du nombre des monomes* (²) *d'ordre* $p+1$ *qui sont multiples de l'un des* l *monomes d'un système d'ordre* p : il suffit de compter le nombre des monomes d'ordre $p+1$ qui sont multiples de l'un des *l derniers monomes d'ordre p*. Un système de l monomes d'ordre p dont les multiples d'ordre $p+1$ sont en nombre L_0 sera dit *minimal*. Si un système de monomes d'ordre p est minimal, le système dérivé d'ordre $p+1$ l'est aussi. Étant donné un système de monomes quelconque, les systèmes dérivés d'un ordre assez élevé sont minimaux.

Les entiers n, p, $l \leqq \Gamma_n^p$ déterminent entièrement un système de $n-1$ entiers, les exposants $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ qui interviennent dans le *premier* $x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} x_n^{p-(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_{n-1})}$ des l monomes du système canonique d'ordre p; ces exposants (γ) sont d'ailleurs aussi ceux qui interviennent dans le premier des L_0 monomes du système dérivé d'ordre $p+1$, et dans le premier des monomes de l'un quelconque des systèmes dérivés.

(¹) Nous inversons le sens attribué par M. Delassus aux mots postérieur et antérieur de manière à mettre le langage employé ici d'accord avec celui de la théorie générale (n° 6).

(²) Monomes à n variables.

Ces nombres peuvent servir, comme les (σ), à déterminer (¹) le polynome caractéristique du système de monomes envisagé. L'identité des polynomes caractéristiques obtenus à l'aide des (γ) ou des (σ) conduit à des formules qui donnent les (γ) en fonction des (σ). Ces formules sont utilisées par M. Gunther même dans le cas où le système (*normé*) des monomes considérés *n'est pas minimal*. Les nombres (γ) ont sur les nombres (σ) l'avantage d'être indépendants de l'ordre p du système considéré.

Les remarques précédentes conduisent à mettre en évidence les systèmes minimaux *de formes* d'ordre p, c'est-à-dire les systèmes de l formes indépendantes d'ordre p tels que les formes dérivées indépendantes d'ordre $p+1$ que l'on en peut déduire soient en nombre minimum L_0.

15. Le degré de généralité de la solution. — Le degré de généralité de la solution pour un système d'équations aux dérivées partielles à une inconnue (²) est déterminé par la nature du module des *formes caractéristiques* (n° **13**).

Prenons comme seules données initiales arbitraires (outre des constantes, valeurs de dérivées *d'ordre inférieur à p*), des *dérivées d'ordre p*, p étant assez grand pour que le système des formes caractéristiques d'ordre p soit *en involution;* les fonctions arbitraires de $1, 2, \ldots, n-1$ variables sont au nombre de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$; non seulement ces nombres (σ) ne dépendent que de p et non pas des variables indépendantes choisies, mais ce sont encore à eux que l'on arrive, si l'on peut mettre le système sous une forme *complètement intégrable quelconque* où les équations soient d'ordre au plus égal à p, en s'assujettissant à ne se donner arbitrairement que *des dérivées d'ordre p*, et des *constantes*, valeurs de dérivées d'ordre inférieur à p.

(¹) M. Hilbert [14], M. Delassus [8, *e*] déterminaient respectivement le polynome caractéristique par les nombres (χ), (ω) en l'écrivant

$$\chi_0 + \frac{p}{1}\chi_1 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+3)}{1.2\ldots(n-2)}\chi_{n-2}$$

$$-\omega_{n-1} - \frac{p}{1}\omega_{n-2} - \ldots - \frac{p(p+1)\ldots(p+n-3)}{1.2\ldots(n-2)}\omega_1.$$

(²) MM. Delassus et Gunther ont d'ailleurs aussi exposé leurs recherches pour le cas de plusieurs fonctions inconnues.

La signification algébrique des nombres (σ) a été donnée plus haut, leur connaissance équivaut en somme à celle du *polynome caractéristique* (ou postulation) du module. On ne peut espérer [16, *j*], comme avait cru pouvoir le faire M. Delassus, obtenir le degré de généralité de la solution en recherchant simplement les *dimensions* et *degrés* des multiplicités algébriques définies dans un espace à $n-1$ dimensions en égalant à zéro les formes du module envisagé. *Le polynome caractéristique d'un module ne dépend pas seulement de ces nombres* ([1]). On peut seulement affirmer [14] que *la plus grande des dimensions* des multiplicités définies est égale *au degré d* du polynome caractéristique, et que *le degré* de la multiplicité de *dimension maxima* est égal au produit par $d!$ du coefficient du terme de plus haut degré de ce polynome ([2]).

Si maintenant on considère l'une quelconque des formes en involution ou des formes complètement intégrables (n° 6) auxquelles on peut réduire un système *à une* inconnue donné, les conditions initiales peuvent évidemment prendre des formes assez variées; mais il est très aisé de voir que les deux nombres suivants restent *invariants :*

L *nombre maximum des arguments des fonctions arbitraires;*
M *nombre des fonctions arbitraires de* L *arguments.*

L est en effet $d+1$, d étant le degré du polynome caractéristique (autrement dit, L est l'indice maximum des σ différents de zéro).

M est le produit par $d!$ du coefficient du terme du plus haut degré de ce polynome (autrement dit, M est la valeur de σ_L).

M. Riquier a obtenu à ce sujet les propositions suivantes [24, *i*, *r*]:

1° Appelons *forme passive* d'un système (S) *quelconque* une forme de ce système où les équations soient résolues par rapport à diverses dérivées, les seconds membres ne contenant aucune dérivée principale (en appelant toujours principales les dérivées premiers membres et leurs dérivées de tout ordre), et qui soit telle que le système (S) prolongé indéfiniment soit numériquement équivalent à un système résolu par rapport aux dérivées principales.

([1]) C'est ainsi que, dans le cas de quatre variables, si la multiplicité algébrique définie est de dimension 1 et de degré 4, le polynome caractéristique est $4p$ ou $4p+1$, suivant que c'est une biquadratique, ou une quartique unicursale.

([2]) Encore doit-on faire quelques réserves au sujet de certains cas singuliers [16, *e*].

L'ensemble des conditions initiales peut se représenter en général de diverses manières à l'aide d'un nombre fini de fonctions (et constantes) arbitraires. Soient λ le nombre maximum des arguments de ces fonctions arbitraires, μ le nombre des fonctions arbitraires de μ arguments.

λ, μ *gardent des valeurs constantes quelque choix que l'on fasse parmi des représentations diverses dont nous venons de parler.*

2° Appelons *ordinaire* toute forme passive telle que, en attribuant à chaque variable indépendante une cote égale à 1 et, à chaque fonction inconnue, une cote convenablement choisie, les formules qui donnent les quantités principales en fonction des variables indépendantes et des quantités paramétriques ne contiennent au second membre (sauf peut-être un nombre fini d'entre elles) que des quantités de cote *au plus* égale au premier membre correspondant.

Si l'on réduit un système à une forme *passive ordinaire quelconque*, les nombres λ, μ ont des valeurs indépendantes de cette forme; soient L, M ces valeurs. Si l'on réduit le système à une forme *passive quelconque*, les nombres λ, μ correspondants satisfont aux relations suivantes :

1° $$\lambda \leqq L.$$

2° $$\mu \leqq M \qquad (\text{si } \lambda = L).$$

16. Généralisations du théorème de M. Riquier. — M. Riquier a indiqué une généralisation importante de son théorème fondamental [**21**, *r*]. Le théorème généralisé concerne le cas où le « second membre » de chacune des équations considérées peut contenir des quantités antérieures au premier membre correspondant *sans contenir* toutefois aucune quantité de *cote première supérieure* à la cote première du premier membre. Dans ce cas, le théorème fondamental subsiste *à condition que les valeurs initiales* des variables, des inconnues et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques satisfassent à *certaines restrictions d'inégalité*. Ce fait résulte presque immédiatement du théorème fondamental lui-même si l'on a soin d'utiliser des fonctions majorantes convenables [**16**, *e*].

1° Proposons-nous tout d'abord de traiter pour le système proposé le problème (P′) qui a été indiqué au n° **6**. Les dérivées se classent en groupes successifs d'après leur cote première. Classons les équations (ε) d'après la cote première de leur premier membre. Les équations ε_λ de cote première λ ne fournissent pas immédiatement les dérivées principales de cote première λ en fonction des dérivées paramétriques et des dérivées principales de cote première inférieure à λ; car des dérivées principales de cote λ peuvent fort bien figurer aux deuxièmes membres. Mais si l'on sait par ailleurs que chacun des systèmes ε_λ est *résoluble* par rapport aux dérivées principales de cote première λ, on voit que la connaissance des dérivées paramètriques suffira pour permettre de construire les développements en série des intégrales; il ne restera plus qu'à démontrer la convergence de ces développements.

Sans entrer dans l'étude détaillée de ces questions, on comprendra aisément l'utilité, dans l'une comme dans l'autre, du lemme d'algèbre suivant :

Soient $A_{ik}(i, k = 1, 2, \ldots, N)$ des nombres positifs ou nuls, U_i des nombres positifs. Supposons que le système d'équations linéaires en X

$$X_i = \sum_{k=1}^{k=N} A_{ik} X_k + U_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

ait une solution $X_1, X_2, \ldots, X_N$ formée de nombres tous positifs.

Le système d'équations linéaires en x

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=N} a_{ik} x_k + u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

où $|a_{ik}| \leqq A_{ik}$ et $|u_i| \leqq U_i$ *a une solution et une seule, et cette solution est telle que* $|x_i| \leqq X_i$.

Il est aisé de ramener l'étude du problème posé à celle d'un problème analogue où les données initiales soient identiquement nulles, et où toutes les dérivées de cote première inférieure à un nombre donné λ soient nulles. Si l'on écrit alors les équations (ε) de cote égale à la cote maxima C des équations proposées, supposées linéaires par rapport aux dérivées de cote C, tout le problème consistera à écrire un système (ε_1) majorant pour le système (ε) et ayant une solution dont tous les coefficients soient positifs [16, *e*]. C'est pour pouvoir former un tel système que l'on a à faire certaines hypothèses *d'inégalité* sur les valeurs initiales des « coefficients » qui figurent dans les seconds membres des (ε), coefficients qui dépendent des dérivées de cote première inférieure à C. Si d'ailleurs les équations (ε) de cote (¹) C ne sont pas linéaires par rapport aux dérivées de cote C, il suffirait d'appliquer les raisonnements aux équations (ε) de cote $C+1$.

C'est ainsi, par exemple, que l'on démontre [**24**, *r*] que l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

admet une solution régulière et une seule prenant des valeurs régulières données pour $x=x_0$ et pour $y=y_0$, à condition que les dérivées partielles de f par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ soient telles que le module du produit de leurs valeurs initiales $A_0 B_0$ soit inférieur (²) à $\frac{1}{4}$.

2° Passons maintenant au problème (P) lui-même. On pourra encore supposer que les systèmes (M), premiers membres relatifs aux diverses fonctions inconnues, soient tous complets. A chacune des identités que mentionne la définition des systèmes complets, on pourra encore faire correspondre une équation (I) formée comme il a été indiqué précédemment; si toutes ces équations (I) sont conséquences algébriques des équations (ε) [où l'on comprend les (E)], le système (E) est dit *complètement intégrable*. Il suffira de reconnaître si les équations (I) sont conséquences algébriques des équations (ε) de cote au plus égale à $C+1$, en appelant C la cote maxima des premiers membres des (E).

Si le système (E) est *complètement intégrable*, toute solution régulière du problème (P′) satisfait à toutes les équations (E) quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, c'est-à-dire est solution du problème (P), à condition toutefois que certaines restrictions d'inégalité soient vérifiées. Les restrictions d'inégalité que nous faisons sont tout d'abord celles auxquelles il a été fait allusion lorsqu'on a traité le problème (P′); ce sont de plus celles que l'on est amené à faire pour

---

(¹) Il est loisible de supprimer le mot *première* puisque aucune autre cote n'intervient maintenant.

(²) M. Gunther a montré récemment qu'il en est ainsi non seulement si $|A_0 B_0| < \frac{1}{4}$ mais aussi si $A_0 B_0 - \frac{1}{4}$ n'est pas un nombre réel positif [11, *l*].

affirmer que le nouveau système auquel satisfont les A (nouvelles relations II) admet au plus une solution régulière telle que les diverses fonctions qui la constituent s'annulent dans les conditions indiquées pour le problème (P).

M. Riquier a complété cette étude en montrant comment l'énoncé du théorème généralisé se simplifie dans certains cas très généraux [24, j, r].

« Construisons un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux diverses variables indépendantes et les colonnes aux diverses quantités (q) qui figurent dans les premiers membres des conditions initiales. Hachurons les cases des diverses variables dont ne dépend pas la fonction arbitraire correspondant à la quantité (q). Si, en adoptant pour les lignes, c'est-à-dire pour les variables indépendantes, un ordre convenable, les cases blanches de chaque colonne se trouvent toutes situées *au bas de cette colonne* (disposition *régulière*) », les *restrictions d'inégalité se simplifient; par exemple*, dans le cas où les premiers membres des équations données sont relatifs à des inconnues *toutes différentes*, *toute restriction d'inégalité devient inutile* (le système proposé devient nécessairement « orthonome »).

17. **Caractéristiques.** — L'énoncé du théorème de Cauchy, relatif à une équation aux dérivées partielles à une inconnue, a été complété par Beudon [1, b, c] grâce à la notion de *multiplicité caractéristique*.

Considérons d'abord, pour plus de netteté, une équation linéaire d'ordre p, et dans l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une multiplicité arbitraire M_{n-1} à $n-1$ dimensions. Donnons-nous, sur cette multiplicité, u et ses dérivées d'ordre $1, 2, \ldots, p-1$, liées bien entendu sur M_{n-1} par les relations

$$dp_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = p_{\alpha_1+1\alpha_2\ldots\alpha_n}\,dx_1 + \ldots + p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n+1}\,dx_n,$$

de sorte qu'il n'y a là en réalité que p fonctions arbitraires de $n-1$ variables.

En tenant compte de l'équation, les dérivées d'ordre p, $p+1$, $p+2$, ... se calculent successivement d'une manière *bien déterminée;* c'est là sous une autre forme la remarque fondamentale sur laquelle repose la démonstration du théorème de Cauchy. Il y a *exception* pour certaines multiplicités, $f = 0$ (multiplicités *caractéristiques*) : les surfaces intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre que l'on obtient en remplaçant, dans la *forme caractéristique* de l'équation proposée, chaque dérivée $\frac{\partial^p u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha}}$ par le produit $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$. Si l'on considère une surface intégrale ordinaire de cette équation, le calcul des dérivées d'ordre p, $p+1$, ... de la fonction u introduit chaque fois une arbitraire : il conduit en effet chaque fois à une équation aux dérivées partielles du premier ordre à $n-1$ variables indépendantes pour l'une de ces dérivées.

Considérons maintenant une équation non linéaire d'ordre p, et une solution particulière ordinaire de cette équation; la connaissance, sur une multiplicité à $n-1$ dimensions, de l'espace $x_1, x_2, \dots, x_n$, de u et de ses dérivées jusqu'à l'ordre p (satisfaisant à l'équation) permet en général, grâce seulement aux équations dérivées, de retrouver entièrement les dérivées d'ordre $p+1$, $p+2$, ... de u. Il y a *exception pour certaines multiplicités d'éléments d'ordre* p, M_{n-1}^p ; F étant le premier membre de l'équation d'ordre p donnée, $p_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ une dérivée d'ordre p, le support $f = 0$, dans l'espace à n dimensions, de M_{n-1}^p, est défini par l'équation

$$\sum \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} F}{\partial p_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = 0.$$

Dans chaque coefficient chaque dérivée de u doit être remplacée par son expression en $x_1, x_2, \dots, x_n$ de sorte que ces supports dépendent en général de la solution particulière considérée.

Ces notions ont été étendues par M. Hadamard [1] aux systèmes de la forme de M$^{\text{me}}$ de Kowalevsky, puis à d'autres systèmes à autant d'équations que de fonctions inconnues [12, *a*, *b*]. M. Le Roux a donné peu de temps après, pour *définir* les multiplicités caractéristiques d'un système quelconque, une méthode simple et générale [20]. Les résultats les plus précis ont été obtenus par M. Gunther [11, *d*, *e*].

M. Gunther prend pour point de départ les systèmes (S) de

---

[1] Au cours de ses recherches sur la propagation des ondes. La notion d'*onde* correspond à celle de caractéristique.

M. Riquier dont il a été question au numéro précédent. Considérons toutes les équations de cote C du système prolongé; en désignant par $C - C_h$ la cote de l'inconnue u_h, elles s'écrivent

$$\sum_{h=1}^{h=k} \sum_{\alpha} A^{i,h}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} p^h_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, L),$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = C_h.$$

La surface $\omega \equiv x_n - \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0$ est dite *caractéristique* pour l'intégrale ordinaire $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ du système si la fonction ψ est solution du système des équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_T = 0$$

obtenues en égalant à zéro les déterminants d'ordre k du tableau

$$| \varphi_i^{(1)} \quad \varphi_i^{(2)} \quad \ldots \quad \varphi_i^{(k)} | \qquad (i = 1, 2, \ldots, L),$$

où

$$\varphi_i^{(h)} = \Sigma_\alpha (A^{(i,h)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \ldots \omega_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = C_h,$$

ω_i représentant $\dfrac{\partial\omega}{\partial x_i}$ et $(A^{(i,h)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$ le résultat de la substitution dans $A^{i,h}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, aux u et à leurs dérivées, de leurs valeurs calculées par les équations qui définissent l'intégrale $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$.

Si l'on regarde comme données les valeurs sur la surface ω des dérivées ayant une cote moindre que C, les valeurs sur cette surface des dérivées de cote C sont déterminées par les équations du système S prolongé, sauf dans le cas où la surface est *caractéristique*.

Excluons le cas où les Φ seraient identiquement nulles (ce qui reviendrait à dire qu'une au moins des fonctions u est arbitraire); on pourra satisfaire aux équations $\Phi = 0$ par un système de la forme

$$(1) \qquad \omega_i = \psi_i(\omega_{s+1}, \omega_{s+2}, \ldots, \omega_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Une *nouvelle question* se pose ici, dont la réponse est loin d'être immédiate. Alors que dans le cas d'un système d'équations aux dérivées partielles de la forme normale (de M^{me} de Kowalevsky) les caractéristiques étaient définies par *une seule* équation du premier ordre, elles sont en général définies ici par *un système* d'équations du premier ordre. Ce système est-il complètement intégrable?

On doit faire ici une distinction importante.

Formons le tableau

$$\left\| \frac{\partial\Phi_j}{\partial\omega_1} \quad \frac{\partial\Phi_j}{\partial\omega_2} \quad \ldots \quad \frac{\partial\Phi_j}{\partial\omega_n} \right\| \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mathrm{T}).$$

Si tous les éléments $\frac{\partial\Phi_j}{\partial\omega_k}$ sont égaux à zéro sur la caractéristique envisagée, on dira que cette caractéristique est *multiple;* elle sera dite simple dans le cas contraire.

Si le rang du tableau, sur la caractéristique envisagée, est précisément égal à s, on dira que cette caractéristique est *ordinaire* (de genre s); elle sera dite singulière dans le cas contraire.

M. Gunther démontre que, *dans le cas d'une caractéristique ordinaire*, le système (1) est *complètement intégrable*, et il fait voir par un exemple [**11**, *d*, p. 210] qu'il n'en est pas toujours ainsi dans le cas d'une caractéristique singulière.

Pour qu'une caractéristique simple soit *ordinaire* (de genre s), il faut et suffit que s soit égal à un certain nombre σ complètement déterminé par le système S, l'intégrale et la surface considérés.

La détermination des dérivées de cote C sur une caractéristique ordinaire du genre s dépend de l'intégration d'un système aux dérivées partielles à une inconnue, du premier ordre, composé de s équations, qui est lui-même complètement intégrable.

Enfin, si l'on peut de plusieurs manières mettre le système donné sous la forme de Riquier prise pour point de départ, la solution considérée étant ordinaire pour chacun des systèmes obtenus, une caractéristique ordinaire (de genre s) pour l'un est aussi caractéristique ordinaire (de genre s), pour l'autre [*cf.* **11**, *d*, p. 358-360].

Toutes ces recherches reposent sur les théorèmes de M. Riquier. Dans des travaux ultérieurs, M. Gunther a repris d'une manière différente, et perfectionné, la théorie générale de la détermination des intégrales par des conditions non caractéristiques [**11**, *j* et *k*].

La plupart des travaux publiés par Beudon sur les caractéristiques de certains systèmes doivent être rapprochés non de la théorie précédente, mais de la théorie des caractéristiques des équations et systèmes d'équations du premier ordre à une inconnue [**1**, *a*, *e*, *f*].

18. Systèmes à autant d'équations que d'inconnues. — Les théorèmes généraux d'existence dont il a été question jusqu'ici peuvent être jugés insuffisants dans certains cas (même si l'on se borne toujours aux solutions analytiques régulières). Quel que soit le système, on est certain d'arriver au bout d'un nombre fini d'opérations à une forme complètement intégrable; encore cela peut-il exiger un temps fort long et peut-on demander de mettre effectivement un système donné sous la forme voulue.

Cette question offre surtout de l'intérêt lorsque le système donné présente une forme assez générale dont l'étude se présente naturellement. C'est ce qui arrive par exemple pour un système comprenant autant d'équations que de fonctions inconnues. Pour préciser, considérons un système linéaire de k équations *indépendantes* [16, g, h] à k fonctions inconnues de n variables; supposons-le du premier ordre (ce qui ne restreint pas la généralité de la question). Un cas bien connu est celui où, en faisant au besoin un changement de variables, on peut remplacer le système par un système de k équations résolues par rapport aux dérivées de k inconnues relatives à une même variable; dans ce cas, la solution dépend *de k fonctions arbitraires de $n-1$ variables.* Un autre cas est celui où le système équivaut à un système algébrique : la solution est *entièrement déterminée.* Il *semble probable* que l'on doit obtenir le résultat suivant : à part les deux cas précédents, la solution dépend de $k-1$, $k-2$, ..., ou 1 fonctions arbitraires de $n-1$ variables (et jamais de 0 fonction arbitraire de $n-1$ variables avec des arbitraires de $n-2$ variables par exemple). Autrement dit, si la fonction caractéristique du module correspondant n'est pas identiquement nulle, elle est de degré $n-2$ $\Big($le coefficient du terme de degré $n-2$ ne peut d'ailleurs dépasser $\frac{k}{(n-2)!}\Big)$ [16, g, h].

19. Systèmes d'équations de Pfaff. Théorie de M. Cartan. — On a indiqué plus haut qu'un système d'équations aux dérivées partielles quelconques peut se mettre sous la forme d'un système d'équations de Pfaff [5, a].

M. Cartan a donné [5, a] une théorie entièrement générale de ces systèmes d'équations; nous indiquerons les traits généraux de cette théorie et son lien avec les recherches précédemment exposées.

Si le système de Pfaff

$$\begin{aligned}
&a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots + a_r\,dx_r = 0,\\
&b_1\,dx_1 + b_2\,dx_2 + \ldots + b_r\,dx_r = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

(où les a, b, ... sont des fonctions données des $x_1, x_2, \ldots, x_r$) est regardé comme un système à m variables indépendantes et à $r - m$ variables dépendantes, convenons de dire qu'il est *en involution* si par tout point arbitraire il passe au moins une intégrale à 1 dimension, si par toute multiplicité intégrale *arbitraire* à 1 dimension M_1 passe au moins une multiplicité intégrale à 2 dimensions M_2, si par toute multiplicité intégrale arbitraire M_2 passe au moins une multiplicité intégrale M_3, ..., enfin si par toute multiplicité intégrale arbitraire M_{m-1} passe au moins une multiplicité intégrale à m dimensions M_m. Il est facile de trouver des conditions nécessaires pour qu'un système soit en involution. Appelons élément E_p l'ensemble d'un point $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ et d'une multiplicité plane à p dimensions passant par ce point; convenons de dire que E_p est un élément *intégral* si les paramètres directeurs $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$ d'une quelconque des droites de E_p satisfont au *système de Pfaff donné* et si de plus les paramètres directeurs dx_i, δx_i de deux droites quelconques de E_p annulent *les covariants bilinéaires*

$$\sum\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right)(dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i),$$
$$\sum\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \frac{\partial b_k}{\partial x_i}\right)(dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

des premiers membres des équations données. Il est évident que si le système est en involution, par tout élément intégral arbitraire E_1 passe au moins un élément intégral E_2, par tout élément intégral arbitraire E_2 passe au moins un élément intégral E_3 et ainsi de suite; enfin pour tout élément intégral arbitraire E_{m-1} passe au moins un élément intégral E_m. M. Cartan a démontré que ces conditions *nécessaires* sont aussi *suffisantes*.

Il existe d'après cela un entier maximum n bien déterminé tel que le système soit en involution pour toutes les valeurs de m qui ne dépassent pas n.

On peut déterminer n de la manière suivante :

Soit s le nombre des équations linéairement indépendantes qui expriment qu'un élément linéaire issu d'un point arbitraire est intégral. On a $s \leqq r$.

Si $s < r$, il y a des éléments intégraux E_1. Soit $s + s_1$ le nombre des équations linéairement indépendantes qui expriment qu'un élément linéaire est intégral et est en involution ([1]) avec un élément intégral arbitraire E_1. On a $s + s_1 \leqq r - 1$.

Si $s + s_1 < r - 1$, il y a des éléments intégraux E_2. Soit $s + s_1 + s_2$ le nombre des équations linéairement indépendantes qui expriment qu'un élément linéaire est intégral et est en involution ([1]) avec un élément intégral arbitraire E_2. On a $s + s_1 + s_2 \leqq r - 2$.

On continuera ainsi tant que cela sera possible, on arrivera finalement à un entier n (genre) et n entiers $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (caractères) tels que

$$s + s_1 + s_2 + \ldots + s_n = r - n,$$
$$s \geqq s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_n \geqq 0.$$

Les entiers s, invariants dans tout changement de variables, indiquent le degré d'indétermination de l'intégrale générale à n dimensions : elle dépend de fonctions arbitraires de n, $n - 1, \ldots, 1$ arguments, et de constantes arbitraires, en nombre respectivement s_n, $s_{n-1}, \ldots, s_1, s$.

Mais cette théorie doit être complétée pour répondre au problème suivant dont l'importance est évidente dans l'étude que nous avons en vue. Déterminer les multiplicités intégrales à *un nombre donné p de dimensions* d'un système donné d'équations de Pfaff, ces multiplicités étant assujetties à *n'établir aucune relation finie entre p variables déterminées* prises parmi les variables données (ou plus généralement à n'établir aucune relation linéaire entre p expressions de Pfaff données ω indépendantes entre elles et indépendantes des premiers membres des équations du système). On peut même se proposer de ramener toutes ces multiplicités à constituer *l'intégrale générale* à p dimensions d'un système de Pfaff *en involution*.

Les premiers membres $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ des équations du système donné et les p expressions données $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ forment $s + p$ expressions de Pfaff linéairement indépendantes; on peut leur en adjoindre $q = r - s - p$ autres indépendantes entre elles et indépendantes des premières, $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_q$.

([1]) Un élément linéaire est dit *en involution* avec un autre élément linéaire si les paramètres directeurs $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ $(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)$ de ces deux éléments annulent tous les covariants bilinéaires du système considéré. Un élément linéaire est dit *en involution* avec un élément E_p s'il est en involution avec tous les éléments linéaires contenus dans E_p.

En tenant compte des équations du système, les covariants bilinéaires des θ sont des expressions bilinéaires par rapport aux ω et aux ϖ. M. Cartan montre [5, *b*] que, sauf le cas d'impossibilité du problème, il est permis de les supposer de la forme

$$\theta'_k = \Sigma a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

[où les produits $\omega_i \varpi_\rho$ sont des produits symboliques (¹)].

Cette hypothèse faite, il donne la condition nécessaire et suffisante pour que le système considéré comme à p variables indépendantes soit en involution et que ses multiplicités intégrales générales à p dimensions n'établissent aucune relation linéaire entre les ω. Considérons le tableau à q colonnes et ps lignes

$$\left\| \begin{array}{cccc} \Sigma a_{i11} u_i & \Sigma a_{i21} u_i & \ldots & \Sigma a_{iq1} u_i \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \Sigma a_{i1s} u_i & \Sigma a_{i2s} u_i & \ldots & \Sigma a_{iqs} u_i \\ \Sigma a_{i11} u'_i & \Sigma a_{i21} u'_i & \ldots & \Sigma a_{iq1} u'_i \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \Sigma a_{i1s} u'_i & \Sigma a_{i2s} u'_i & \ldots & \Sigma a_{iqs} u'_i \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \Sigma a_{i1s} u_i^{(p-1)} & \Sigma a_{i2s} u_i^{(p-1)} & \ldots & \Sigma a_{iqs} u_i^{(p-1)} \end{array} \right\|,$$

où les $u_i, u'_i, \ldots, u_i^{(p-1)}$ sont p^2 arbitraires. Soient $\sigma_1, \sigma_1+\sigma_2, \ldots, \sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_p$ les rangs des tableaux déduits du précédent en en considérant successivement les s, $2s$, $\ldots$, ps premières lignes. La condition nécessaire et suffisante cherchée est que le nombre des paramètres arbitraires dont dépend l'élément intégral le plus général d'ordre p qui n'établit aucune relation linéaire entre les ω soit égal à

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + (p-1)\sigma_{p-1} + p[q - (\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{p-1})].$$

(Le nombre de ces paramètres ne peut d'ailleurs jamais dépasser cette valeur.) On a les relations

$$\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \ldots \geqq \sigma_p.$$

Plaçons-nous dans le cas intéressant où

$$q = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p.$$

(¹) Sur les produits symboliques, voir en particulier [10, *d*].

L'intégrale générale dépend de σ_p, σ_{p-1}, ..., σ_1, fonctions arbitraires de p, $p-1$, ..., 1 variable. Si l'on « prolonge » le système, le nouveaux nombres (σ) sont liés aux anciens par la relation

$$\sigma'_k = \sigma_p + \sigma_{p-1} + \ldots + \sigma_k.$$

Si le système donné ne satisfait pas aux conditions supposées dans l'énoncé, on peut toujours *le prolonger* de manière que le nouveau système obtenu y satisfasse.

Si l'on part d'un système d'équations aux dérivées partielles à une inconnue *en involution* au sens qui a été donnè à ce mot au n° 13, on obtient un système de Pfaff en involution au sens actuel et il y a coïncidence entre les nombres σ obtenus dans les deux cas.

La méthode de M. Cartan, grâce à l'emploi des formes symboliques, permet de présenter les calculs sous une forme abrégée, et souvent de les achever sans peine. De nombreuses applications en ont été faites à l'Analyse et à la Géométrie (théorie des groupes infinis, géométrie différentielle des hypersurfaces) [5, *b*, *c*, *d*].

20. Théorie corrélative de M. Vessiot. — M. Vessiot a donné récemment une théorie des problèmes généraux d'intégration qui peut être considérée comme *corrélative* de celle de M. Cartan.

A tout système (S) d'équations différentielles ordinaires du premier ordre correspond une équation aux dérivées partielles linéaire (E), celle qui a pour solution les intégrales premières de (S). La correspondance est réciproque et l'intégration de (S) et de (E) sont deux problèmes équivalents. Il y a entre (S) et (E) une sorte de *dualité;* on peut dire que le système (S) et l'équation (E) sont *corrélatifs*.

Une telle dualité existe aussi entre les systèmes *complètement intégrables d'équations de Pfaff* (1) et les systèmes *complets*

(1) Un système d'équations de Pfaff à r variables est dit *complètement intégrable* si, considéré comme un système d'équations aux différentielles totales à s fonctions inconnues de $r-s$ variables indépendantes, il admet toujours une solution (et une seule) telle que pour des valeurs numériques données des variables indépendantes les fonctions inconnues prennent des valeurs numériques arbitrairement données. Pour que le système considéré soit complètement intégrable, il faut et il suffit que les covariants bilinéaires des premiers membres s'annulent quand on suppose les différentielles liées par les relations données (Frobenius).

d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles du premier ordre.

M. Vessiot [28, *a*, *b*] étend cette notion de dualité au cas où (S) est un système de Pfaff quelconque. A tout système (S) d'équations de Pfaff correspond un « faisceau » F de transformations infinitésimales $\sum_{i=1}^{i=m} u_i X_i(f)$, et réciproquement. Si l'on convient de dire qu'une multiplicité à p dimensions est intégrale d'un faisceau de transformations infinitésimales quand elle est invariante pour p transformations « divergentes » de ce faisceau, toute multiplicité intégrale du système de Pfaff (S) sera une multiplicité intégrale du faisceau F corrélatif, et réciproquement. A la notion du système de Pfaff en involution correspond celle du faisceau involutif, et cette nouvelle notion conduit à introduire les notions de *genre* et de *caractères* du faisceau; les nombres trouvés sont ceux-là mêmes que l'on trouverait en appliquant les méthodes de M. Cartan au système de Pfaff corrélatif.

Cette nouvelle théorie est sans doute destinée à avoir, comme celle de M. Cartan, d'élégantes applications.

21. On voit par ce qui précède comment s'est approfondie l'étude des questions relatives à l'indétermination de l'intégrale générale d'un système différentiel. On peut en comparer le développement à celui d'une étude de Géométrie où l'on n'aurait eu d'autre moyen d'investigation que l'Analyse.

Après s'être borné à utiliser le *système de référence donné* (recherches de Cauchy, de Méray, de M. Riquier), on a étudié l'effet des *changements de système de référence* et mis en évidence des *invariants* (polynomes caractérisant le degré de généralité, multiplicités caractéristiques de Beudon, de M. Hadamard, de M. Gunther). On sait quelle unité et quelle élégance donne à certaines théories géométriques l'emploi des éléments à l'infini. C'est un rôle analogue, pourrait-on dire, que joue dans la théorie des systèmes différentiels l'emploi des formes et des équations de Pfaff (théorie de M. Cartan). L'idée de dualité elle-même, si importante en Géométrie, trouve ici son analogue (théorie de M. Vessiot).

On doit remarquer que dans toutes ces études il n'est fait aucune distinction entre les quantités de nature réelle ou imaginaire qui peuvent intervenir. C'est sans doute grâce à une telle distinction que se poseront maintenant les problèmes les plus importants à résoudre dans ce domaine. Il conviendra d'étudier et de classer les systèmes réels, à données réelles. La nature réelle ou imaginaire des multiplicités caractéristiques jouera un rôle essentiel dans cette classification.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. BEUDON. — *a.* Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 13, 1896; suppl.).

b. Sur les singularités des équations aux dérivées partielles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 124, 1897, p. 671).

c. Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles (*Bull. Soc. math.*, t. 25, 1897, p. 108).

d. Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux équations du premier ordre (*C. R. Acad. Sc.*, t. 126, 1898, p. 324 et 388).

e. Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux équations du premier ordre (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 15, 1898, p. 229).

f. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux systèmes d'équations du premier ordre en involution (*Journal de Math.*, 5e série, t. 5, 1899, p. 351).

2. BOUQUET. — Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles totales simultanées du premier ordre (*Bull. Soc. math.*, 3e série, 1872, p. 265).

3. BOURLET. — Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues (*Ann. Éc. Normale*, 3e série, t. 8, 1891; suppl.).

4. BRIOT et BOUQUET. — Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles (*Journal Éc. Polyt.*, t. 21, 1856).

5. CARTAN. — *a.* Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 18, 1901, p. 241).

b. Sur la structure des groupes infinis de transformations (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 21, 1904, p. 153).

c. Sur les systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables indépendantes (*Bull. Soc. math.*, t. 39, 1911, en particulier p. 356-358).

d. Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien (*Bull. Soc. math.*, t. 48, 1920, en particulier p. 137 à 140).

6. Cauchy. — Nombreuses notes aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 14, 15, 16 (1842, 1843). Voir aussi *Œuvres complètes.*

7. Darboux. — *a.* Mémoire sur l'existence de l'intégrale dans les équations aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de fonctions et de variables indépendantes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 80, 1875, p. 101 et 317).

b. Rapport sur le concours du prix Bordin pour 1899 (*C. R. Acad. Sc.*, t. 129, 1899, p. 1064).

8. Delassus. — *a.* Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles (*Ann. Éc. Normale*, 3e série, t. 13, 1896, p. 421).

b. Leçons sur la théorie analytique des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Hermann, 1897).

c. Sur les systèmes algébriques et leurs relations avec certains systèmes d'équations aux dérivées partielles (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 14, 1897, p. 21).

d. Sur les transformations et l'intégration des systèmes différentiels (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 14, 1897, p. 195).

e. Sur les invariants des systèmes différentiels (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 25, 1908, p. 255).

9. Drach. — *a.* Sur les systèmes complètement orthogonaux dans l'espace à n dimensions et sur la réduction des systèmes différentiels les plus généraux (*C. R. Acad. Sc.*, t. 125, 1897, p. 598).

b. Mémoire sur les systèmes orthogonaux de l'espace à n dimensions et sur les formes quadratiques de différentielles (présenté au concours du prix Bordin pour 1899, *inédit*).

c. Sur les systèmes complètement orthogonaux de l'espace euclidien à n dimensions (*Bull. Soc. math.*, t. 36, 1908, p. 85).

10. Goursat. — *a.* Cours d'Analyse mathématique.

b. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (2e édition; Hermann, 1921).

c. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre (Hermann, 1898).

d. Leçons sur le problème de Pfaff (Hermann, 1922).

11. Gunther (N.). — *a.* Sur une question concernant la théorie des caractéristiques des équations aux dérivées partielles (Communication au XIIe Congrès des naturalistes russes. Moscou, 1912. *Bulletin* du Congrès).

b. Sur une question concernant la théorie des caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles (*Journal de l'Institut des Ponts et Chaussées de Russie*, 1910).

c. Remarque sur le Mémoire de M. Delassus « Extension du théorème de Cauchy » (*Journ. de l'Inst. des P. et Ch.*, 1911).

d. Théorie des caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles (Saint-Pétersbourg, 1913).

e. Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 156, 1913, p. 1147).

f. Sur une inégalité dans la théorie des fonctions rationnelles entières (*Journ. de l'Inst. des P. et Ch.*, 1913).

g. Sur la forme canonique des systèmes d'équations homogènes (*Ibid.*, 1913).

h. Sur les conditions de passivité d'un système de formes données (*Ibid.*, 1913).

i. Sur la forme canonique des équations algébriques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 157, 1913, p. 577).

j. Extension du théorème de Cauchy à un système arbitraire d'équations aux dérivées partielles (*Journal de la Soc. math. de Moscou*, 1924, fasc. 2 et 3).

k. Sur la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 158, 1914, p. 853 et 1108).

l. Sur les solutions analytiques de l'équation $s = f(x, y, z, p, q, r, t)$ (*Journal de la Soc. math. de Moscou*, 1924, fasc. 1).

12. HADAMARD. — *a.* Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique (Hermann, 1903; Chap. VII et Note I).

b. Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles (*Bulletin Soc. math.*, t. 34, 1906, p. 48).

13. HAMBURGER. — Zur theorie der Integration eines Systemes von n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit 2 unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen (*J. f. r. und angew. Math.*, t. 81).

14. HILBERT. — Ueber die Theorie der algebraischen Formen (*Math. Annalen*, t. 36, 1890, p. 473).

15. HOLMGREN. — Ueber Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen (*Ofversigt of Kongl. Vetenskaps-Akd Forhandl.*, 9 janvier 1901, p. 91).

16. JANET (Maurice). — *a.* Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 158, 1913, p. 118).

b. Existence et détermination univoque des solutions des systèmes d'équations aux dérivées partielles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 157, 1913, p. 697).

c. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 170, 1920, p. 1101).

d. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles et les systèmes de formes algébriques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 170, 1920, p. 1236).

e. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles (Thèse), (*Journ. de Math.*, 8ᵉ série, t. 3, 1920, p. 65).

f. Sur la recherche générale des fonctions primitives à n variables (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. 45, 1921, p. 238).

g. Sur les systèmes aux dérivées partielles comprenant autant d'équations que de fonctions inconnues (*C. R. Acad. Sc.*, t. 172, 1921, p. 1637).

h. Sur les caractéristiques de certains systèmes aux dérivées partielles comprenant autant d'équations que de fonctions inconnues (*C. R. Acad. Sc.*, t. 173, 1921, p. 124).

i. Les caractères des modules de formes et les systèmes d'équations aux dérivées partielles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 174, 1922, p. 432).

j. Sur les formes canoniques invariantes des systèmes algébriques et différentiels (*C. R. Acad. Sc.*, t. 174, 1922, p. 991).

k. Les modules de formes algébriques et la théorie générale des systèmes différentiels (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 41, 1924, p. 27).

l. Les travaux récents sur le degré d'indétermination des solutions d'un système différentiel (*Bulletin des Sciences mathématiques,* 2e série, t. 49, 1925, p. 307).

17. König. — Ueber die Integration simultaner Systeme partieller Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen (*Math. Ann.*, t. 23, 1884, p. 520).

18. Königsberger. — *a.* Ueber die Integrale partieller Differentialgleichungsysteme beliebiger Ordnung (*J. f. r. und angew. Math.*, t. 109, 1892, p. 261).

b. Ueber die Convergenzbereiche der Integrale partieller Differentialgleichungen (*J. f. r. und angew. Math.*, t. 112, 1893, p. 181).

c. Bemerkung zu dem Existenzbeweise der Integrale partieller Differentialgleichungsysteme (*Math. Ann.*, t. 42, 1893, p. 485).

19. Kowalevsky (Mme de). — Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen (*J. f. r. und angew Math.*, t. 80, 1875, p. 1).

20. Le Roux. — Sur les caractéristiques des systèmes aux dérivées partielles (*Bull. Soc. math.*, t. 36, 1908, p. 129).

21. Mayer. — Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen (*Math. Ann.*, 5e série, 1872, p. 448).

b. Sur les systèmes absolument intégrables d'équations linéaires aux différentielles totales et sur l'intégration simultanée des équations linéaires aux différentielles partielles (*Bull. Sc. math.*, 11e série, 1876, p. 87 et 125).

22. Méray. — *a.* Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du calcul infinitésimal et sur la théorie du développement des fonctions en séries (*Revue des Sociétés savantes*, 2e série, t. 3, 1868, p. 133).

b. Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale, 1872, p. 143.

c. Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques (Gauthier-Villars, 1894).

d. Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles (*Journ de Math.*, 3e série, t. 6, 1880, p. 235).

e. Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles qui sont dépourvus d'intégrales contrairement à toute prévision (*C. R. Acad. Sc.*, t. 106, 1888, p. 648).

23. Méray et Riquier. — Sur la convergence des développements des inté-

grales ordinaires d'un système d'équations différentielles totales (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 6, 1889, p. 355, et t. 7, 1890, p. 23).

24. RIQUIER. — *a.* De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque; Sur le problème général de l'intégration; Sur la réduction d'un système différentiel quelconque à une forme linéaire et complètement intégrable du premier ordre (*C. R. Acad. Sc.*, t. **114**, 1892, p. 731, et t. **116**, 1893, p. 426 et 866).

b. De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. **10**, 1893, p. 69, 123, 167).

c. Sur la réduction d'un système différentiel quelconque à un système linéaire et complètement intégrable du premier ordre (*Ibid.*, p. 359).

d. Mémoire sur l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque et sur la réduction d'un semblable système à une forme linéaire et complètement integrable du premier ordre (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. **32**, n° 3).

e. Sur une question fondamentale du calcul intégral (*Acta mathematica*, t. **23**, 1899, p. 203).

f. Sur la réduction du problème général de l'intégration; Sur l'existence des intégrales; Sur l'application de la méthode des fonctions majorantes, etc. (*C. R. Acad. Sc*, t. **124**, 1897, p. 490; t. **125**, 1897, p. 933, 1018, 1159; t. **126**, 1898, p. 208, 1558; t. **127**, 1898, p. 809 et 1194).

g. Sur l'existence dans certains systèmes différentiels des intégrales répondant à des conditions initiales données (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. **21**, 1904, p. 297).

h. Sur les conditions d'intégrabilité complète de certains systèmes différentiels (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. **24**, 1907, p. 535).

i. Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque (*Acta mathem.*, t. **25**, 1902, p. 297).

j. Sur les systèmes différentiels réguliers (*Ann. Fac. Sc. Marseille*, t. **14**, 1904, p. 157).

k. Sur l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles auquel conduit l'étude des déformations finies d'un milieu continu (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. **22**, 1905, p. 475).

l. Sur les systèmes auxquels conduisent : 1° l'étude des déformations d'un milieu continu dans l'espace à *n* dimensions; 2° la détermination des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales à *n* variables (*C. R. Acad. Sc.*, t. **145**, 1907, p. 1137).

m. Sur les sytèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. **18**, 1901, p. 421).

n. Sur la réduction d'un système différentiel quelconque; Sur l'intégration de certains systèmes du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues (*C. R. Acad. Sc.*, t. **119**, 1894, p. 324).

o. Sur le calcul par cheminement des intégrales de certains systèmes différentiels (*C. R. Acad. Sc.*, t. **133**, 1901, p. 1187).

p. Sur le calcul par cheminement des intégrales de certains systèmes différentiels (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. **20**, 1903, p. 27).

q. Sur quelques principes généraux relatifs à la théorie des fonctions d'un nombre quelconque de variables (*Ann. Fac. des Sc. de Toulouse*, 2e série, t. 9, 1907, p. 136 à 175).

r. Les systèmes d'équations aux dérivées partielles (Gauthier-Villars, 1910).

25. Robinson. — *a*. Notes from the Mathematical Seminary (*J. H. U.*, 1913).

b. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles (*C. R. Acad. Sc.*, t. **157**, 1913, p. 106).

c. A new canonical form for systems of partial differential equations (*American Journal of Math.*, t. 39, 1917, p. 95).

26. Stäckel. — Ueber die Existenz von Integralen bei Systemen partieller Differentialgleichungen (*J. f. r. und angew. Math.*, t. 119, 1898, p. 339).

27. Tresse. — Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations (*Acta mathematica*, t. 18, 1894, p. 1).

28. Vessiot. — *a*. Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration (*C. R. Acad. Sc.*, t. 178, 1924, p. 1137).

b. Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration (*Bull. Soc. math.*, t. **52**, 1924, p. 337).

29. Von Weber. — *a*. Theorie der Involutionssysteme partieller Differentialgleichungen erster ordnung in beliebig vielen abhängigen und unabhängigen Variabeln (*Math. Ann.*, t. 49, 1897, p. 543).

b. Grundzüge einer Integrationstheorie der Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei unabhängigen und beliebig vielen abhängigen Veränderlichen (*J. f. r. und angew. Math.*, t. 118, 1897, p. 123).

TABLE DES MATIÈRES.