Mémorial des sciences mathématiques

A. Bloch

Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 20 (1926)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1926__20__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC., DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE XX

Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité

PAR M. A. BLOCH

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LES

FONCTIONS HOLOMORPHES ET MÉROMORPHES

DANS LE CERCLE-UNITÉ

Par M. A. BLOCH

CHAPITRE I.

Introduction et historique.

I. — INTRODUCTION.

1. L'objet du présent article du *Mémorial* est l'exposition des propriétés aujourd'hui connues des fonctions d'une variable complexe holomorphes ou méromorphes dans le cercle $|z| < 1$; il s'agira des relations nécessaires entre les valeurs de la fonction et de ses dérivées à l'intérieur de ce cercle, l'existence et le nombre des zéros obtenus en l'égalant à une constante, son maximum ou son minimum sur certains cercles intérieurs, etc. Le cercle-unité, dont on s'astreint à ne point sortir, n'est cependant nullement supposé cercle de convergence ou de méromorphie.

On peut aussi définir le sujet actuel comme concernant les propriétés à l'intérieur du cercle-unité des polynomes ou des fractions rationnelles dont on s'interdit de borner supérieurement le degré et pour lesquelles on fait abstraction de leur comportement à l'extérieur du cercle. En effet, les fonctions holomorphes ou méromorphes à l'intérieur du cercle-unité sont, comme on sait, limites d'une suite uniformément convergente de polynomes ou de fractions rationnelles; alors toute propriété obtenue pour ces derniers se trouve pouvoir s'étendre, par passage à la limite, aux fonctions holomorphes ou méromorphes quelconques par un raisonnement plus ou moins long d'ailleurs, mais toujours élémentaire; c'est ce qui ne semblait pas pouvoir être prévu *a priori*, mais c'est ce qui a toujours lieu.

Les théorèmes ne sont d'ailleurs généralement pas plus faciles à démontrer lorsqu'on se borne au cas particulier des polynomes ou fractions rationnelles que lorsqu'on se place dans le cas général.

2. C'est, historiquement, la théorie des fonctions entières qui a donné naissance à la présente théorie. On doit toutefois, pour être exact, faire remonter cette dernière aux inégalités de Cauchy, limitant supérieurement les coefficients d'une série entière en fonction du module maximum; de celle-ci résulta le théorème de Liouville sur les fonctions entières [11]. Mais, plus tard, ce fut toujours de la théorie de ces fonctions que naquit le progrès de celle qui nous occupe ici, soit que l'on ait été conduit pour faciliter leur étude, à établir des propositions préliminaires inhérentes au sujet actuel, soit au contraire que des théorèmes obtenus sur les fonctions entières et méromorphes aient été par un resserrement convenable de leur démonstration généralisés sous forme de propositions relatives aux fonctions définies seulement dans un cercle.

C'est cette dernière source de découvertes qui s'est montrée, et continue à se montrer la plus féconde; et c'est un fait remarquable que toute proposition sur les fonctions entières et méromorphes les plus générales puisse être regardée comme corollaire d'une proposition sur les fonctions holomorphes ou méromorphes dans le cercle-unité. On peut dire, sous forme semblable à celle d'un apophtegme connu : *Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito.* Ce retour de l'infini au fini, qui s'effectue avec profit en plus d'une partie de la science, apparaît comme intimement lié au sujet actuel. La substitution, dont il s'est agi plus haut, des polynomes et fractions rationnelles aux fonctions les plus générales, n'est en somme que l'accentuation de ce point de vue finitiste. Les énoncés relatifs aux fonctions entières générales, précisés par la considération d'un cercle d'où l'on ne sort pas, acquièrent par là même une grande force de pénétration et une grande commodité d'utilisation.

II. — Historique.

3. Le théorème classique de Liouville, déduit des inégalités de Cauchy, fut généralisé en 1876 par Weierstrass, qui prouva l'indétermination d'une fonction uniforme dans le voisinage d'une singu-

larité essentielle isolée [11]. En 1879, M. Picard [26, *a*] publiait ses théorèmes sur les valeurs lacunaires d'une fonction de cette espèce, et quelques années plus tard le théorème plus général sur les courbes algébriques uniformisables par ces fonctions. Il est peu d'exemples dans l'histoire de la science d'un résultat important demeuré aussi longtemps complètement isolé. Le théorème sur les valeurs lacunaires d'une fonction entière quelconque resta séparé pendant dix-sept ans de tout ce que l'on connaissait sur ces fonctions; il devait en être inévitablement ainsi tant que l'on se bornait à faire progresser la théorie des fonctions d'ordre fini; et d'autre part si l'on étudiait uniquement ces dernières, c'est qu'il était commode de tout rapporter à une même fonction de comparaison, connue depuis longtemps, la fonction exponentielle; on ne songeait pas à faire l'effort de pensée nécessaire pour comparer directement entre elles les diverses fonctions réelles associées à une fonction entière, sans recourir à un étalon déterminé.

4. Enfin en 1892, M. Hadamard [12, *a*, *b*, *c*] commença à aborder les difficultés en question. Il établit des inégalités concernant le maximum de la partie réelle de la fonction; il construisit et mit en œuvre de nouveaux moyens d'investigation, et créa les bases de la théorie contemporaine; bien qu'il appliquât surtout ses méthodes aux fonctions de genre fini, elles convenaient aussi aux fonctions entières les plus générales. Leur extension à ses dernières fut en 1896 réalisée par M. Borel; celui-ci [5, *a*, *b*, *c*] établit et utilisa des inégalités concernant les dérivées successives de la fonction; il démontra, de deux manières différentes, le théorème de M. Picard sur les valeurs lacunaires et le généralisa. La conclusion générale des travaux de MM. Hadamard et Borel est que pour une fonction entière quelconque, le maximum du module de la fonction, les maxima des valeurs positives et des valeurs négatives de la partie réelle, ceux des modules des dérivées successives, le minimum enfin du module de la fonction, sont du même ordre de grandeur, le sens de ce terme se précisant dans chaque cas. D'autre part, prenant pour point de départ les recherches de M. Hadamard, M. Jensen [15, *a*] établissait en 1899 l'inégalité connue sous son nom.

Le point de vue finitiste auquel se rapporte cet article ne prévalait pas encore, il était même à peu près insoupçonné, et la théorie des fonctions dans un cercle se réduisait en fait, à la fin du siècle dernier, à quatre séries d'inégalités auxquelles peuvent se rattacher les noms de Cauchy, Hadamard, Borel et Jensen. Non seulement on ne s'efforçait pas d'interpréter en termes finis les résultats de M. Borel, mais même on s'occupait à peine plus qu'avant leur apparition de la théorie des fonctions quelconques et les fonctions de genre fini, dont l'étude est d'ailleurs une branche indispensable de la théorie des fonctions entières, continuaient presque exclusivement à retenir l'attention; ou du moins les fonctions dont la croissance satisfaisait à des conditions restrictives.

D'autre part si, en ce qui concerne le théorème de M. Picard sur les valeurs lacunaires, les démonstrations données par M. Borel le faisaient bien rentrer dans la théorie générale des fonctions entières, aucun lien n'était établi entre ces démonstrations et la démonstration primitive à l'aide de la fonction modulaire; c'était là une importante lacune à combler.

5. En 1904, M. Landau découvrit son théorème [18, *a*; 29]; or, plus la proposition en question apparaissait comme « inattendue », plus on aurait dû être convaincu que l'on s'était fait jusqu'alors une idée inexacte, ou du moins incomplète de la théorie des fonctions entières. En fait on voyait dans les propriétés de ces dernières des conséquences de l'allure extraordinaire d'une fonction dans le voisinage d'une singularité essentielle; on se les représentait comme indissolublement liées à la suite *infinie* des coefficients, satisfaisant d'ailleurs à la condition $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$; on se refusait à croire qu'en considérant seulement les premiers termes de la série on pût se faire une idée même très imparfaite de ses propriétés; et ceci bien que les inégalités de Cauchy fussent connues depuis longtemps; *a fortiori* était-on fort loin de penser que l'on pût par la considération des premiers coefficients avoir des renseignements non seulement sur les propriétés d'inégalité de la fonction, mais sur celles d'égalité. Une autre cause de l'étonnement produit par le théorème de M. Landau était qu'en se bornant à l'énoncer pour le cas particulier d'un polynome, la proposition obtenue était si simple qu'il paraissait invraisemblable que, puisqu'elle était exacte, elle n'eût pas été trouvée bien auparavant par les moyens ordinaires de l'algèbre.

D'autre part, la nature du lien entre la fonction modulaire et la théorie des fonctions entières se trouvait mise en pleine lumière par le théorème et par les deux démonstrations, traduction en termes finis de celles de MM. Picard et Borel, qu'en donnait son auteur [18, *a*]. En fait, le raisonnement de M. Borel, ainsi complété, se trouvait permettre de calculer une borne supérieure d'une certaine expression de la théorie de la fonction modulaire.

Or, après la découverte du théorème de M. Landau, la théorie des fonctions entières les plus générales demeure à peu près stationnaire, et le point de vue finitiste tellement ignoré qu'il faut attendre l'année 1912 pour voir M. Picard [26, *d*] transformer dans cet ordre d'idées son théorème de 1887 [26, *c*] sur les courbes uniformisables par des fonctions à point essentiel isolé; un théorème de M. Borel [5, *b*] sur les systèmes de plusieurs fonctions entières, théorème datant de 1897, ne devait être traduit et démontré en terme finis [3, *c*] qu'en 1925,

6. Ce sont principalement deux causes différentes qui déterminèrent finalement les progrès réalisés depuis 1920 dans la théorie actuelle. L'une fut l'introduction et l'étude par M. Montel [23, *a*, *b*], de 1910 à 1916, des familles normales de fonctions; cette notion permit de coordonner les résultats obtenus en termes finis, et contribua par suite à la diffusion de l'ordre d'idées en question. D'un autre côté, la théorie générale de la croissance des fonctions entières était de la part de M. Wiman [34, *a*, *b*] l'objet de travaux publiés en 1914 et 1918, où furent obtenus par une méthode nouvelle des résultats très importants. M. Valiron [32, *a*, *b*, *c*, *d*] perfectionna encore méthode et résultats, et les rassembla dans une théorie générale comprenant en outre, en particulier, l'établissement de relations entre la croissance d'une fonction entière et le nombre des racines de l'équation obtenue en l'égalant à une constante, sujet autrefois sommairement traité par M. Borel [5, *b*].

La répercussion de ces deux causes différentes sur notre sujet se manifesta pour la première par l'extension obtenue en 1922 par M. Montel [23, *c*, *d*] du théorème de M. Landau au cas de fonctions prenant un nombre fini de fois certaines valeurs; pour la seconde, par la traduction en termes finis en 1924, par l'auteur [3, *a*, *b*] et par M. R. Nevanlinna [24, *f*, *h*], des théorèmes les plus importants de la théorie de M. Valiron, enfin par de nouvelles découvertes de ces différents géomètres.

CHAPITRE II.

Les théorèmes élémentaires.

I. — Les fonctions bornées ([1]).

7. Soit

$$(1)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une fonction holomorphe dans le cercle-unité $|x| < 1$. Soient $M(r)$ le maximum de la valeur absolue de la fonction sur le cercle

$$[|x| = r \qquad (r < 1);]$$

$A(r)$ et $B(r)$ les maxima sur le même cercle de $\mathcal{R}[f(x)]$ et de $-\mathcal{R}[f(x)]$. $M(r)$, $A(r)$, $B(r)$ [5, *c*; 32, *d*] sont des fonctions croissantes de r, dont la première est toujours positive.

Cauchy a obtenu les inégalités [32, *d*]

$$(2)\qquad |a_0| \leqq M(r), \qquad |a_1| \leqq \frac{M(r)}{r}, \qquad \ldots, \qquad |a_n| \leqq \frac{M(r)}{r^n}.$$

L'égalité $M(r) = |a_n| r^n$ exige $f(x) = a_n x^n$.

Méray et Weierstrass ont établi ces relations de manière algébrique, sans recourir à l'intégrale de Cauchy. Gutzmer a montré (cf. 11; 1, *b*) que

$$(3)\qquad [M(r)]^2 \geqq \Sigma\, |a_n|^2 r^{2n}.$$

D'autres inégalités ont éte obtenues à ce sujet [18, *b*].

M. Carathéodory a posé le problème général [7, *b*; 25, *a*] de la détermination des inégalités auxquels satisfont les coefficients du développement taylorien d'une fonction holomorphe dans le cercle-unité et y admettant une borne supérieure déterminée. La question par une transformation homographique est ramenée à la suivante :

I. *On se donne les $n+1$ premiers termes de la série entière*

$$(4)\qquad \frac{1}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots;$$

([1]) Des renseignements bibliographiques et historiques sont à trouver dans [28, *a*] et [25, *a*].

peut-on déterminer les autres termes de sorte que la série converge à tout l'intérieur du cercle $|z| < 1$ *et que la partie réelle de la fonction qu'elle représente y soit partout positive ?*

M. Carathéodory a donné d'abord une solution géométrique; voici la réponse analytique, obtenue en premier lieu par M. Tœplitz [31; 28, *a*] (nous posons $c_0 = 1$, $c_{-k} = \bar{c}_k$) :

I. *Pour que la série puisse être continuée de la manière exigée, il faut et il suffit que l'hermitien*

$$\sum_{i,k=0}^{n} c_{k-i} x_i \bar{x}_k \tag{5}$$

soit non négatif.

La condition pour que l'hermitien soit non négatif est qu'une chaîne de mineurs principaux soit non négative; la plus indiquée est

$$1, \quad \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ \bar{c}_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ \bar{c}_1 & 1 & c_1 \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} 1 & c_1 & \ldots & c_n \\ \bar{c}_1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{c}_n & \ldots & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Maintenant, si l'on se donne la série (4), *la condition pour qu'elle converge à l'intérieur du cercle* $|z| < 1$ *et que la partie réelle de la fonction qu'elle représente y soit positive est que la condition précédente soit satisfaite pour tout entier n.*

8. Plus généralement, la recherche des inégalités auxquelles satisfont en des points déterminés du cercle-unité les valeurs d'une fonction qui y est bornée a fait aussi l'objet de travaux importants. Sur ce sujet, on a d'abord la proposition suivante, connue sous le nom de *lemme de Schwarz* [16, *c*; 32, *d*] :

II. *Soit* $f(x)$ *une fonction nulle à l'origine, holomorphe et de module inférieur à un dans le cercle-unité : son module est plus petit que celui de x en tout point intérieur, à l'exclusion du seul cas* $f(x) = e^{i\omega} x$, *où il y a partout égalité.*

On appelle, en théorie des fonctions, *distance non euclidienne* de deux points intérieurs à un cercle par rapport à ce cercle le logarithme du rapport anharmonique intercepté par les deux points sur l'arc du cercle mené par eux orthogonalement au cercle donné. Si les deux points sont infiniment voisins, c'est le quotient de leur distance par leur puissance réduite par rapport au cercle (la puissance réduite est le quotient de la puissance par le diamètre du cercle); ou par leur distance à la droite si le cercle se réduit à une droite.

Le lemme de Schwarz peut alors s'énoncer comme il suit : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction méromorphe $z = f(\zeta)$ faisant correspondre aux points ζ intérieurs à un cercle Γ d'une sphère complexe des points z intérieurs à un cercle C d'une autre sphère complexe, les conditions $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$ étant vérifiées, est que la distance non euclidienne de α et β par rapport à Γ soit inférieure ou égale à celle de a et b par rapport à C.*

M. R. Nevanlinna [25, *a*] a obtenu les conditions pour qu'il existe *une fonction $z = f(x)$ holomorphe dans le cercle-unité, inférieure à un en module, prenant en $n+1$ points donnés x_i du cercle-unité $n+1$ valeurs z_i données.* Utilisant une méthode récurrente de M. J. Schur [30] il trouve que ces conditions consistent en $n+1$ inégalités; si les $n+1$ points sont fixés, ainsi que les valeurs z_i de la fonction qui leur correspondent, sauf pour un seul d'entre eux, $x_{n+1} = x$, le domaine de variabilité de la valeur $z_{n+1} = z$ de la fonction qui correspond à ce point est un cercle intérieur au cercle $|z| = 1$: à un point quelconque intérieur à ce cercle, pris pour z_{n+1}, correspondent une infinité de fonctions répondant à la question, à un point de la circonférence n'en correspond qu'une, qui est rationnelle, de degré n en général, de module un le long de la circonférence-unité; si maintenant, le point x étant fixé, on impose successivement les conditions

$$z_1 = f(x_1), \qquad \ldots, \qquad z_n = f(x_n),$$

on obtient, pour le domaine de variabilité de $z = f(x)$, d'abord un cercle, puis un autre intérieur au précédent, etc., en tout une série de $n+1$ cercles dont le premier est le cercle-unité de z, le dernier celui considéré plus haut.

M. G. Pick était parvenu antérieurement au même résultat; il a donné [27, *b*] les conditions sous forme géométrique, par l'emploi systématique de la distance non euclidienne.

M. J. L. Jensen [15, *b*] avait donné auparavant, sous le nom de *lemme de Schwarz généralisé*, la proposition suivante :

III. *Soit $f(x)$ une fonction qui dans le cercle-unité est holomorphe et inférieure à un en module et s'annule aux points $x_1, \ldots, x_n$ intérieurs à ce cercle; alors on a pour $|x| < 1$*

$$|f(x)| < \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{x - x_i}{1 - \overline{x_i} x} \right|. \tag{6}$$

9. M. G. Julia [16, *a*] a obtenu une extension nouvelle du lemme de Schwarz, dans laquelle figurent, au lieu de deux faisceaux de cercles concentriques, deux faisceaux de cercles tangents entre eux; la voici sous la forme précise que lui ont donnée MM. F. et R. Nevanlinna [24].

IV. *Soit $\varphi(x)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Re(x) > 0$ et y satisfaisant à la condition $\Re[\varphi(x)] \geqq 0$. Soit de plus dans le voisinage du point à l'infini*

$$\varphi(x) = cx[1 + \varepsilon(x)],$$

en sorte que $\varepsilon(x)$ tende uniformément vers zéro pour x croissant indéfiniment dans tout angle intérieur au demi-plan.

Dans ces conditions on a pour tout nombre positif λ l'inégalité

$$\Re[\varphi(x)] \geqq c\lambda \tag{7}$$

en tout point du demi-plan $\Re(x) \geqq \lambda$.

Dans le même ordre d'idées, M. R. Nevanlinna [25, *c*] a résolu le *problème des valeurs au contour*, qui est suggéré par le théorème de M. Julia de la même manière que le problème des valeurs imposées en position générale est suggéré par le lemme de Schwarz.

D'autre part, il a élucidé les différents problèmes mixtes et cas limites qui se présentent. Il a traité [25, *d*] d'une manière détaillée un cas limite du problème des valeurs au contour, qui est à ce dernier ce que le problème spécial de Carathéodory est au problème général; cette question spéciale est d'ailleurs liée au problème des moments de Stieltjes.

10. Les théorèmes de Stieltjes et Vitali-Porter, la théorie due à M. Montel, des *familles normales* (et *quasi normales*) de fonctions uniformes [23, *a*, *b*, *c*, *d*], seront exposés dans l'article du *Mémorial* consacré aux familles de fonctions analytiques.

Disons seulement : *Une famille de fonctions holomorphes ou méromorphes dans un domaine est dite normale lorsque de toute suite infinie de fonctions de la famille on peut extraire une suite convergeant uniformément à l'intérieur du domaine (la limite de la suite pouvant être une constante finie ou infinie).*

V. *Toute famille de fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble est normale.*

Le concept de famille normale s'est montré un utile instrument d'investigation, d'abréviation et de synthèse, à cause de son caractère presque intuitif. Mais il est toujours possible de gagner en précision en s'en passant. Aussi serait-il, actuellement du moins, d'un intérêt plutôt théorique que pratique de le mettre sous une forme ne comportant pas une infinité de choix, au moyen de théorèmes comme le suivant (1) :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de fonctions holomorphes dans le domaine D *soit normale est qu'à tout nombre positif* m *et à tout nombre positif* ε *on puisse faire correspondre un nombre positif* $M(m, \varepsilon)$, *tel que les fonctions de la famille inférieures à* m *en module en au moins un point du domaine* Δ, *lieu des points de* D *dont la distance à la frontière de* D *surpasse* ε, *soient inférieures à* M *en module en tout point de* Δ.

II. — Les zéros et les poles ; les diverses fonctions mesurant la croissance.

11. M. Jensen [15, *a*] a donné une formule reliant les modules des zéros et des pôles d'une fonction méromorphe dans un cercle au module de la fonction sur le cercle. Soient $a_1, \ldots, a_m$ les zéros; $b_1, \ldots, b_p$ les pôles de la fonction $\Phi(z)$, méromorphe dans le cercle $|z| \leqq r$; en posant $\Phi(z) = \frac{b_1 \ldots b_p}{a_1 \ldots a_m} z^{m-p} e^{L(z)}$, en calculant le long du cercle

(1) *Voir* cependant n° 50 et [25 *bis*, *a*].

$|z| = \mathrm{R}$ l'intégrale $\int \mathrm{L}(z)\frac{dz}{z}$ et en en prenant la partie imaginaire, on obtient la formule de Jensen

$$(8)\quad \log|\Phi(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\Phi(\mathrm{R}e^{iu})|\,du - \Sigma\log\frac{\mathrm{R}}{|a_i|} + \Sigma\log\frac{\mathrm{R}}{|b_j|}.$$

Si $n(x, f)$ désigne le nombre des zéros a_i de $f(z)$ de module inférieur ou égal à x et si l'on pose [**32**, c, d] :

$$\Sigma\log\left|\frac{r}{a_i}\right| = \int_0^{r}\frac{n(x,f)}{x}\,dx = \mathrm{N}(r, f),$$

on a ici

$$(9)\quad \log|\Phi(0)| + \mathrm{N}(\mathrm{R}, \Phi) - \mathrm{N}\left(\mathrm{R}, \frac{1}{\Phi}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\Phi(\mathrm{R}e^{iu})|\,du.$$

En particulier, dans le cas d'une fonction holomorphe $f(z)$,

$$(10)\qquad \log|f(0)| + \mathrm{N}(r, f) < \log \mathrm{M}(r).$$

Une transformation homographique conduit de la formule de Jensen à la suivante, valable pour $r < \mathrm{R}$, où $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_j$ sont les quantités imaginaires conjuguées de a_i et b_j et où l'on a posé $re^{i\varphi} = x$:

$$(11)\quad \log|\Phi(re^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\Phi(\mathrm{R}e^{iu})|\,\frac{\mathrm{R}^2 - r^2}{\mathrm{R}^2 + r^2 - 2\mathrm{R}r\cos(u-\varphi)}\,du$$
$$- \Sigma\log\left|\frac{\mathrm{R}^2 - \bar{a}_i x}{\mathrm{R}(a_i - x)}\right| + \Sigma\log\left|\frac{\mathrm{R}^2 - \bar{b}_j x}{\mathrm{R}(b_j - x)}\right|.$$

MM. F. et R. Nevanlinna à qui elle est due l'appellent *formule de Poisson-Jensen*. La considération des fonctions analytiques correspondant aux fonctions harmoniques ci-dessus donne immédiatement la *formule de F. et R. Nevanlinna* [**24**]

$$(12)\quad \log\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\Phi(\mathrm{R}e^{iu})|\,\frac{\mathrm{R}e^{iu} + x}{\mathrm{R}e^{iu} - x}\,du$$
$$- \Sigma\log\frac{\mathrm{R}^2 - \bar{a}_i x}{\mathrm{R}(a_i - x)} + \Sigma\log\frac{\mathrm{R}^2 - \bar{b}_j x}{\mathrm{R}(b_j - x)} + i\mathrm{C},$$

où

$$\mathrm{C} = \arg\Phi(0) + \Sigma\arg\frac{\mathrm{R}}{a_i} - \Sigma\arg\frac{\mathrm{R}}{b_j}.$$

12. Au théorème classique de Cauchy sur la croissance du module maximum $\mathrm{M}(r)$ d'une fonction holomorphe, M. Hadamard [**12**, d, f] a ajouté la proposition suivante :

VI. log $M(r)$ *est une fonction convexe de* $\log r$. Cet énoncé, dont le lemme de Schwarz est un cas particulier, est exact même pour une fonction holomorphe seulement dans une couronne circulaire; il s'exprime par l'inégalité

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \log M(r_1) & \log r_1 & 1 \\ \log M(r_2) & \log r_2 & 1 \\ \log M(r_3) & \log r_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0,$$

où $r_1 < r_2 < r_3$; l'égalité n'a lieu que dans le cas d'un monome.

M. Blumenthal [2, *a*] a fait une étude approfondie de la fonction $M(r)$ (*F. E. F. M.*, p. 5) [1].

Pour une fonction quelconque de r, définie pour $0 < r < r_0$, la convexité dans un cercle de son logarithme par rapport à $\log r$ entraîne par elle-même la croissance de la fonction dans le cercle $r < r_0$, sous la seule condition qu'elle soit finie à l'origine.

La valeur moyenne du carré du module

$$H(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{iu})|^2\, du$$

a également [18, *b*] son logarithme convexe en $\log r$ dans toute couronne (r_1, r_3).

M. Hardy [13] a trouvé que la même propriété avait lieu pour le logarithme de la valeur moyenne du module :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{iu})|\, du.$$

M. F. Riesz [28, *b*] également a étudié la valeur moyenne du module et de ses puissances [*voir* aussi 1, *b*]

Au même ordre d'idées se rattache la propriété suivante : la valeur moyenne quadratique

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [V(r, \varphi)]^2\, d\varphi}$$

d'une fonction $V(r, \varphi)$ harmonique dans une couronne est également convexe en $\log r$.

$N(r, f)$ est fonction convexe en $\log r$.

---

(1) Cette abréviation désigne l'article du *Mémorial* : *Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable*, par M. G. VALIRON [32, *f*].

13. MM. F. et R. Nevanlinna [24; 25, *f*] ont introduit, dans leurs travaux, de nouvelles fonctions convexes en $\log r$. Soit $\overset{+}{a}$ égal à a ou à zéro suivant que a réel est positif ou nul, ou bien négatif.

VII. *La fonction*

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \tag{14}$$

est convexe en $\log r$ *dans toute couronne, croissante dans tout cercle, où* $f(z)$ *est holomorphe.*

Pour une fonction $f(z)$, méromorphe dans un cercle, la fonction qui (dans l'ordre d'idées des valeurs moyennes) caractérise la croissance n'est plus $m(r, f)$, mais (on suppose que l'origine n'est pas un pôle) $gm\ (r, f)$, notée aussi $T\ (r, f)$ [25, *e*, *g*]; on a

$$gm(r, f) = m(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right). \tag{15}$$

VIII. $gm(r, f)$ *est une fonction convexe en* $\log r$, *et par suite croissante;* car elle est convexe dans toute couronne sans pôles, et comme, par le théorème de Jensen

$$gm(r. f) - gm\left(r, \frac{1}{f}\right) = \log |f(0)|, \tag{16}$$

dans toute couronne sans zéros.

On peut aussi considérer une fonction méromorphe seulement dans une couronne. Pour une fonction méromorphe dans un cercle, on a, d'après M. Jensen,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi - \int_0^r n(x, f)\,\frac{dx}{x} + \int_0^r n\left(x, \frac{1}{f}\right)\frac{dx}{x} = \text{const.} \tag{17}$$

Pour une fonction méromorphe dans une couronne, l'expression

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi - \int_\alpha^r n_\alpha(x, f)\,\frac{dx}{x} + \int_\beta^r n_\beta\left(x, \frac{1}{f}\right)\frac{dx}{x},$$

où $n_\alpha(x, f)$ et $n_\beta\left(x, \frac{1}{f}\right)$ sont les nombres de zéros et de pôles comptés à partir de deux cercles quelconques α et β de la couronne n'est plus constante, mais est une fonction linéaire de $\log r$. L'expression

$$m(r, f) + \int_{\beta}^{r} n_{\beta}\left(x, \frac{1}{f}\right) \frac{dx}{x}$$

est dans la couronne une fonction convexe de $\log r$.

La fonction $gm(r, f)$ mesure la croissance d'une fonction méromorphe dans un cercle. Pour une fonction holomorphe, on peut prendre, suivant l'ordre d'idées dans lequel on se trouve, soit la valeur moyenne $m\ (r, f)$, soit le module maximum $\mathrm{M}(r, f)$, pour caractériser la croissance. Il y aurait intérêt, pour une fonction méromorphe, à définir une fonction $\mathrm{GM}(r, f)$ jouant par rapport au module maximum $\mathrm{M}(r, f)$ d'une fonction holomorphe le rôle que $gm(r, f)$ (fonction méromorphe) joue par rapport à $m(r, f)$ (fonction holomorphe).

14. L'expression $gm(r, f)$ jouit encore de la propriété suivante [25, g] :

IX. *Soient à l'intérieur du cercle-unité deux fonctions holomorphes $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ inférieures ou égales à un en module; et soit $f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$. On a alors évidemment*

$$gm(r, f) \leqq \log\left|\frac{1}{\varphi_2(0)}\right|. \tag{18}$$

Réciproquement, si $f(x)$, prenant une valeur finie à l'origine, est telle que $gm(r, f)$ ait une limite finie $gm(1, f)$ lorsque r tend vers un, on peut mettre $f(x)$ sous la forme $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$, avec, dans le cercle-unité,

$$|\varphi_1(x)| \leqq 1, \qquad |\varphi_2(x)| \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(0) = e^{-gm(1,f)}. \tag{19}$$

M. Nevanlinna donne une décomposition particulièrement simple de la fonction $f(x)$ sous la forme précédente, possible d'une seule manière.

Ce théorème IX ramène, dans un grand nombre de cas, l'étude des propriétés des expressions $m(r, f)$ et $gm(r, f)$ à celle des fonctions bornées.

Il conviendrait ([1]) d'étendre cette méthode à la démonstration du théorème de M. Picard [26, *b*] d'après lequel *une fonction méromorphe dans un domaine ouvert y est toujours le quotient de deux fonctions holomorphes;* on obtiendrait ainsi la plus simple des décompositions de cette espèce. Cette extension une fois réalisée, il y aurait lieu ([1]) d'établir par la même voie le théorème de Poincaré et de Cousin, d'aprèslequel une fonction méromorphe de plusieurs variables est un quotient de fonctions entières (*Acta math.*, t. II et XIX).

La même méthode pourrait être utile dans l'étude de la question suivante, à laquelle peuvent se rattacher les travaux de M. Denjoy [8] sur les produits canoniques : Quelle est la fonction entière la plus simple, ou quelle est la catégorie la plus simple de fonctions entières, dont les zéros sont des nombres donnés? Ici encore, le problème pourra s'étendre au cas de plusieurs variables.

III. — Quelques théorèmes récents.

15. La notion de *direction singulière* d'une fonction entière, bien qu'elle n'ait pas été jusqu'à présent l'objet de travaux en termes finis, doit cependant être exposée ici.

En 1919, en utilisant les résultats acquis sur les familles normales, M. Julia [16, *b*, *c*] a découvert une propriété des fonctions entières qui les rapproche des séries à rayon de convergence borné ; de même qu'une telle série admet toujours au moins un point singulier sur son cercle de convergence, une fonction entière ou une fonction holomorphe dans le voisinage d'un point essentiel isolé admet toujours au moins une direction singulière, qui possède une définition simple et des propriétés intéressantes. Énonçons-les en nous plaçant, uniquement pour fixer les idées, dans le cas des fonctions entières.

X. *Soit une fonction entière $f(z)$; soient les deux cercles $|z| = a$, $|z| = b$, a et b étant deux nombres positifs de rapport $\sigma > 1$; dans la couronne comprise entre les deux cercles, il existe un point au moins où la famille $f(z\sigma^n)$ n'est pas normale.* La semi-droite joignant l'origine à un tel point est dite *direction singulière* de la fonction entière. Cette définition paraît faire intervenir le nombre σ;

([1]) La possibilité d'aboutir par cette voie à ces théorèmes paraît en 1926 fort douteuse à l'auteur.

M. Valiron [32, *e*] a montré qu'elle en est en réalité indépendante; quel que soit le nombre $\sigma > 1$ choisi pour définir la couronne et la famille, on trouve le même ensemble de directions singulières.

Les directions singulières ont été étudiées [16, *b*, *c*] dans l'ordre d'idées de la théorie de Picard-Landau : dans le voisinage d'une telle direction, toute valeur finie, sauf une au plus, est prise une infinité de fois; il est douteux que la réciproque soit exacte.

L'analogie avec les points singuliers des séries entières [10; 12, *e*] peut servir de guide dans la théorie des directions singulières; par exemple, un théorème de MM. Pringsheim, Borel et Fabry conduit à se demander si la proposition suivante est vraie : une fonction entière prise au hasard admet toute direction pour direction singulière; les résultats de MM. Hadamard, Borel et Fabry, à rechercher si une fonction entière dont le développement taylorien présente des lacunes et où la différence de deux exposants consécutifs croît indéfiniment rentre toujours dans ce dernier cas; etc.

La théorie des familles normales a permis d'une manière commode la découverte et l'étude des directions singulières. Il y aura intérêt à les étudier aussi d'une manière plus directe. M. H. Milloux [22, *a*, *b*], utilisant un théorème de MM. Lindelöf et Phragmen, a commencé à le faire; M. Valiron [32, *i*] y est parvenu d'une autre manière.

La définition des directions singulières s'étend immédiatement au cas des fonctions méromorphes; mais toutes les fonctions méromorphes n'en possèdent pas. M. Valiron [32, *e*, *g*, *h*] a trouvé que *toute fonction méromorphe d'ordre infini en possède*. Simultanément et d'une manière indépendante, M. Ostrowski (¹) a montré que *seules certaines fonctions d'ordre nul n'en possèdent pas*.

Dans l'article *F. E. F. M.* (n° 20) sont donnés différents résultats de MM. Phragmen, Lindelöf, Nevanlinna, utiles dans la théorie des directions singulières et dans plusieurs autres, dont il serait vraisemblablement possible de trouver les expressions en termes finis [20; 21; 24].

16. Un théorème général [3, *f*] sur les fonctions à point essentiel isolé (qui peut d'ailleurs s'énoncer de manière analogue pour les fonctions méromorphes dans une aire doublement connexe) est le suivant :

(¹) *Voir* n° 50.

XI. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe partout à distance finie dans la région du plan extérieure à un contour simple* C; *on peut trouver (d'une infinité de manières) une nouvelle variable ζ liée à z par une relation faisant correspondre biunivoquement l'extérieur de* C *à l'extérieur d'un certain contour simple* Γ *du plan des ζ, telle que l'on ait pour deux valeurs correspondantes de z* et ζ

$$f(z) = \varphi(\zeta),$$

$\varphi(\zeta)$ *étant une fonction méromorphe dans tout le plan.*

La démonstration repose d'une part sur la méthode alternée de Schwarz, d'autre part sur un lemme simple d'*Analysis Situs* relatif aux surfaces de Riemann de genre zéro.

Si $f(z)$ est holomorphe à l'extérieur de C, l'exemple $f(z) = \int \frac{e^{z^2}}{z^2}\,dz$ prouve qu'il n'existe pas toujours une fonction $\varphi(\zeta)$ qui soit entière, même si on laisse arbitraire le choix du contour C. Le minimum du nombre des pôles de $\varphi(\zeta)$ quand C est arbitraire est alors un certain invariant lié à la nature particulière du point essentiel de $f(z)$.

CHAPITRE III.

La théorie de la croissance, d'après différents géomètres.

I. — Les travaux initiaux de M. Borel.

17. L'établissement par M. E. Borel [5, a, b, c] d'une série d'inégalités a marqué le début de la théorie de la croissance des fonctions entières, et des fonctions holomorphes dans un cercle. M. J. Hadamard [12, b], à l'aide des formules de Fourier, avait obtenu les inégalités

$$(1) \qquad |a_n|\, r^n \leqq 4\overset{+}{\mathrm{A}}(r) + 2\,|a_0|$$

(l'emploi du théorème I fournirait d'ailleurs une limitation plus précise de $|a_n|$ en fonction de $\mathrm{A}(r)$ et a_0).

Des inégalités ci-dessus, M. Borel a déduit une relation entre $\mathrm{M}(r)$ et $\mathrm{A}(\mathrm{R})$. Les résultats les plus précis à ce sujet découlent du lemme de Schwarz (théorème II) : sous la supposition $a_0 = 0$, on a

$$(3) \qquad \left|\frac{f(x)}{f(x) - 2\mathrm{A}(\mathrm{R})}\right| \leqq \frac{r}{\mathrm{R}} \qquad (x = re^{i\theta},\ r < \mathrm{R}),$$

$$(4) \quad \mathrm{A}(r) \leqq \frac{2r}{\mathrm{R}+r}\,\mathrm{A}(\mathrm{R}), \qquad \mathrm{B}(r) \leqq \frac{2r}{\mathrm{R}-r}\,\mathrm{A}(\mathrm{R}), \qquad \mathrm{M}(r) \leqq \frac{2r}{\mathrm{R}-r}\,\mathrm{A}(\mathrm{R}).$$

Si $a_0 \neq 0$, l'inégalité suivante entre $M(r)$ et $A(R)$, due à M. Carathéodory, suffit dans la plupart des cas [*voir* 18, *b*]

$$M(r) < \frac{R}{R-r}[2A(R) + 4|a_0|]. \tag{5}$$

On peut l'obtenir aussi à l'aide de la formule donnant l'expression de la fonction $f(x)$ holomorphe dans le cercle $|x| \leqq R$ à l'aide de sa partie réelle $U(R, \varphi)$ sur ce cercle [11],

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(R, \varphi)\frac{Re^{i\varphi}+x}{Re^{i\varphi}-x}\,d\varphi + ia_0'' \qquad (a_0 = a_0' + ia_0''). \tag{6}$$

Si $M^1(r)$ est le module maximum de la dérivée $f'(z)$, on a les inégalités [5, *b*; 32, *d*]

$$\frac{M(r) - |f(0)|}{r} < M^1(r) < \frac{M(R)}{R-r}. \tag{7}$$

Le module maximum $M^n(r)$ de la dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}(x)$ satisfait à l'inégalité

$$M^n(r) < \frac{M(R)}{(R-r)^n}. \tag{8}$$

Toutes ces inégalités résultent d'ailleurs des propriétés des fonctions bornées (Chap. I, § I).

18. M. Borel fit reposer sur les inégalités ci-dessus entre les fonctions $M(r)$, $A(r)$, $B(r)$, $M^1(r)$ la comparaison effective de ces fonctions, au moyen du théorème suivant [5, *b*].

XII. *Soit* $U(x)$ *une fonction positive croissante définie pour les valeurs de x comprises entre deux nombres réels (finis ou non). Alors, sauf peut-être pour des valeurs de x situées dans des intervalles d'étendue totale finie,* $x + \frac{1}{U(x)}$ *est également compris entre ces deux nombres, et,* α *étant un nombre positif arbitraire, l'inégalité suivante a lieu :*

$$U\left(x + \frac{1}{U(x)}\right) < (1+\alpha)U(x); \tag{9}$$

la longueur totale des intervalles exceptionnels situés à droite d'une valeur x_0 *ne dépasse pas la quantité* $\frac{1+2\alpha}{\alpha}\,\frac{1}{U(x_0)}$.

Ce théorème fut le premier de la théorie générale des fonctions croissantes, développée ultérieurement dans les travaux de MM. Blumenthal [2, *b*], Remoundos, Varopoulos [33]. Le suivant en résulte immédiatement (observant que $1 + t < e^t$) :

XII *bis*. *Soit* $V(x)$ *une fonction positive croissante, définie pour les valeurs de* x *comprises entre deux nombres positifs. Alors, sauf peut-être dans des intervalles où la variation totale de* $\log x$ *est finie,* $x\left[1 + \frac{1}{V(x)}\right]^\gamma$ *où* γ *est réel est également compris entre ces deux nombres, et,* α *étant un nombre positif arbitraire, l'inégalité suivante a lieu :*

$$V\left[x\left(1 + \frac{1}{V(x)}\right)^\gamma\right] < (1+\alpha)V(x); \tag{10}$$

la variation totale de $\log x$ *dans les intervalles exceptionnels situés à droite d'une valeur* x_0 *ne dépasse pas une quantité dépendant uniquement de* α, γ *et* $V(x_0)$, *tendant vers zéro avec* $\frac{1}{V(x_0)}$.

De cette proposition résulte la suivante :

XIII. *Si pour les valeurs des deux nombres positifs* r *et* R $(r < R)$ *appartenant à un segment où la fonction* $Q(R)$ *est croissante et supérieure à un nombre positif* β, *a lieu l'inégalité*

$$P(r) < \frac{R^{\gamma+1}}{r^\gamma(R-r)} Q(R), \tag{11}$$

γ *étant un nombre réel, on a dans le même segment,* α *étant un nombre positif arbitraire, l'inégalité*

$$P(r) < C_{\alpha\beta\gamma}[Q(r)]^{1+\alpha}, \tag{12}$$

sauf peut-être dans des intervalles où la variation totale de $\log r$ *est inférieure à un nombre ne dépendant que de* α, β, γ *et tendant vers zéro avec* $\frac{1}{\beta}$ (*la constante positive* C *ne dépendant également que de* α, β, γ).

Si c'est, toutes choses égales d'ailleurs, l'inégalité

$$P(r) < \frac{R^{p+1}}{r^q(R-r)} Q(R), \tag{13}$$

p étant différent de q, que l'on suppose réalisée, il y a lieu de considérer la fonction $R^{p-q}Q(R)$, et le signe de $p-q$ intervient; si $p < q$, il suffit de supposer $r > \rho$ pour qu'ait lieu une inégalité de même forme que pour $p = q$ sans puissance de r en facteur; au contraire, si $p > q$, la même conclusion n'est assurée que si $\frac{\log Q(R)}{\log R}$ tend vers l'infini avec R.

19. Le théorème s'applique aux inégalités données ci-dessous entre les fonctions $M(r)$, $A(r)$, $B(r)$, $M'(r)$, $M''(r)$, si bien qu'au point de vue indéfini, les logarithmes de ces fonctions sont asymptotiquement équivalents, sauf dans les intervalles exceptionnels. Il est même possible ici d'appliquer directement le théorème XII et de prouver ainsi que la variation totale de r dans les intervalles exceptionnels est finie, et non seulement celle de $\log r$; mais ce dernier avantage est généralement sans importance.

L'équivalence asymptotique de $\log M(r)$ et $\log A(r)$ n'a d'ailleurs plus d'intérêt aujourd'hui, car une relation plus serrée découle de la théorie exposée au paragraphe suivant; au contraire, l'inégalité (5) entre $M(r)$ et $A(r)$, qui donne naissance à ce résultat, conserve, aujourd'hui encore, de l'intérêt, en raison de sa simplicité et de sa précision, et permet par exemple d'obtenir une démonstration du théorème de M. Schottky [29; 18, *b*; 11] (la première en date), donnant lieu à des formules déjà précises [*voir* aussi 25 *bis*, *b*]. Quant à l'équivalence asymptotique des logarithmes de $M(r)$ et $M'(r)$, elle est sensiblement la relation la plus précise qui ait lieu entre ces fonctions; elle a été utilisée dans la démonstration du théorème de M. Picard et de plusieurs généralisations de ce théorème.

20. Du théorème XII *bis* résulte un corollaire d'un emploi fréquent :

XIV. *Si la fonction positive croissante* $P(r)$ *satisfait entre deux nombres positifs a et b à l'une ou l'autre des inégalités*

$$(14)\qquad \begin{cases} P(r) < k\dfrac{R^{p+1}}{r^q(R-r)}[P(r)]^\nu & (p \leqq q,\ 0 < \nu < 1), \\ P(r) < k\dfrac{R^{p+1}}{r^q(R-r)}\log P(r) & (p \leqq q), \end{cases}$$

elle admet pour $a \leqq r < b$ une borne supérieure dépendant uniquement de k, p, q, a, b, ν et r.

Ces inégalités peuvent d'ailleurs être traitées par voie directe [5, *b*, *c*; 18, *b*; 11].

M. R. Nevanlinna [25, *f*, *h*] traite l'inégalité (13) par une méthode différente de celle consistant à s'appuyer sur le théorème XII *bis*; au lieu de comparer directement les deux fonctions, il compare deux intégrales indéfinies portant sur elles; il n'y pas alors d'intervalles exceptionnels. Pour les applications à la théorie des fonctions analytiques, cette méthode paraît se montrer pratiquement équivalente à celle qui vient d'être exposée.

C'est surtout dans la théorie des fonctions à trois valeurs lacunaires et ses généralisations (*cf.* Chap. V et VI) que s'appliquent toutes ces propriétés; mais il y aurait intérêt, par l'introduction de nouvelles expressions associées à l'intégrale de Poisson, à affranchir l'analyse complexe des considérations de cette nature, qui ne permettent d'ailleurs pas d'obtenir les résultats les plus complets.

II. — La théorie de MM. Wiman et Valiron.

21. La méthode de M. Borel [5, *a*, *b*, *c*] dans la théorie des fonctions entières consistait à établir d'abord au moyen de l'intégrale de Cauchy certaines inégalités; celles-ci obtenues, le théorème fondamental sur les fonctions croissantes permettait par une sorte d'intégration d'en déduire des propriétés ayant lieu partout, sauf peut-être dans des couronnes d'épaisseur totale finie. Dans ses travaux M. A. Wiman [34, *a*, *b*] utilisa systématiquement le développement en série de puissances (point de vue de Weierstrass-Méray) et obtint par une méthode nouvelle des résultats bien plus précis, qui doivent être regardés comme des *propriétés du second ordre* de la fonction, tandis que ceux de M. Borel correspondaient au premier ordre. M. G. Valiron [32, *a*; *b*, *d*], en utilisant un polygone de Newton introduit par M. Hadamard [12, *d*], que l'on peut faire correspondre à toute fonction entière, simplifia considérablement l'exposition de cette méthode et compléta d'une manière essentielle les résultats de M. Wiman, en montrant que les propriétés qu'il avait établies ont lieu presque partout, et qu'elles subsistent si l'on remplace les petits arcs de circonférence considérés par M. Wiman par de petits cercles. La conclusion générale de ces recherches est que la fonction se comporte approximativement comme un monome dans le voisinage des points du cercle $|z| = r$ où elle passe par son maximum.

22. Voici comment [3, *a*, *b*] on peut exposer cette théorie, à la base de laquelle se trouve le lemme suivant :

Soit $-\mathcal{H}(n)$ *une fonction convexe de l'entier* n, *positif, nul ou négatif, telle que* $\mathcal{H}(n) - \mathcal{H}(n-1)$, *ait pour* $n \to +\infty$ *et pour* $n \to -\infty$ *des limites finies désignées ici par* $\mathcal{H}'(+\infty)$ et $\mathcal{H}'(-\infty)$. *Soit*

$$\mathfrak{F}(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathcal{H}(n)} u^n, \tag{15}$$

série de Laurent dite série de comparaison. Soit d'autre part une série de Laurent quelconque :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n. \tag{16}$$

A une valeur r *de* $|z|$ *pour laquelle la série* $f(z)$ *converge, on peut en général faire correspondre un couple de nombres positifs* k *et* l *tels que la série* $k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$ *majore* $f(z)$, *les deux séries ayant des termes maxima égaux en valeur absolue et de même rang. Les valeurs de* r *pour lesquelles, la série* $f(z)$ *étant convergente, cette propriété n'a pas lieu, occupent des intervalles où la variation totale de* $\log r$ *est au plus égale à* $\mathcal{H}'(-\infty) - \mathcal{H}'(+\infty)$.

Une valeur de r pour laquelle la série $f(z)$ est convergente est dite *ordinaire* ou *exceptionnelle*, par rapport à la série de comparaison $\mathfrak{F}(u)$, suivant que la propriété énoncé par le lemme a lieu ou non pour cette valeur de r. Si $N(r)$ est le *rang* (le degré) du terme maximum pour $|z| = r$, il y a au plus entre deux nombres r_1 et r_2 pour lesquels $f(z)$ converge, $|N(r_1) - N(r_2)| + 1$ intervalles exceptionnels.

23. La théorie suivante pourrait être développée en ne faisant sur $\mathcal{H}(n)$ que des hypothèses complémentaires assez larges, mais on obtient déjà des résultats importants avec une fonction $\mathcal{N}(n)$ particulière.

M. Valiron, dans l'étude des fonctions entières, a pris pour série de comparaison

$$\Sigma e^{n^\alpha} u^n \qquad (0 < \alpha < 1).$$

De même, dans l'étude des séries de Laurent, il est naturel de prendre pour série de comparaison

$$(17) \qquad \mathfrak{F}_\alpha(u) = \Sigma e^{-\alpha\sqrt{n^2+1}+(n^2+1)^{\frac{\alpha}{2}}} u^n \qquad (0 < \alpha < 1).$$

La variation totale de $\log r$ dans les intervalles exceptionnels est alors au plus égale à 2α, et par suite à 2.

On a le corollaire suivant du lemme fondamental :

Pour toute valeur ordinaire r de la série de Laurent $f(z)$, l'inégalité suivante a lieu, v réel étant supposé inférieur à

$$\frac{1}{2}(N^2+1)^{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)},$$

$$(18) \qquad \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} |p|^q |a_{N+p}| (1+v)^p r^{N+p} < A_q m(r)(N^2+1)^{\frac{q+1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)},$$

inégalité où N est le rang $N(r)$ du terme maximum $m(r)$, A_q un nombre ne dépendant que de q et α.

Ce corollaire s'établit en montrant qu'il est vrai pour la série de comparaison $\mathfrak{F}_\alpha(z)$, pour toute valeur où celle-ci converge.

24. Écrivant $f(z)$ sous la forme

$$(19) \qquad f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^N \left[f(z_0) + \frac{z-z_0}{z_0} g(z_0) + \left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^2 \chi(z, z_0)\right],$$

où

$$g(z) = zf'(z) - Nf(z),$$

et appliquant à $\chi(z, z_0))$ le corollaire pour $q = 2$, on obtient un résultat essentiel :

XV. *Soit r une valeur ordinaire quelconque; soit z_0 un point du cercle $|z| = r$ pour lequel $f(z)$ atteint son maximum $M(r)$;*

soit enfin $\left|\frac{z-z_0}{z_0}\right| < \frac{1}{2}(N^2+1)^{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)}$, N *étant toujours le rang* $N(r)$ *du terme maximum. On a alors l'inégalité*

$$(20) \qquad f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^N f(z_0)\left[1 + \frac{z-z_0}{z_0}\,\theta\,K_\alpha(N^2+1)^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right],$$

où θ *est inférieur à un en module,* K_α *ne dépendant que de* α.

Ce résultat s'établit en prouvant que

$$|\chi(z, z_0)| < K'_\alpha(N^2+1)^{\frac{3}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} M(r), \qquad |g(z_0)| < K''_\alpha(N^2+1)^{\frac{3}{4}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} M(r).$$

Si maintenant on a l'inégalité un peu plus restrictive

$$\left|\frac{z-z_0}{z_0}\right| < \frac{1}{2}(N^2+1)^{\frac{\alpha}{2}-1-\varepsilon},$$

où ε est un nombre positif quelconque, on conclut, de l'inégalité (20), la suivante :

$$(21) \qquad f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^N f(z_0)[1 + \theta_1 K_\alpha(N^2+1)^{-\varepsilon}],$$

θ_1 étant un nombre inférieur à un en module.

Si $f(z)$ est sans terme constant, ou du moins si l'on suppose $N \neq 0$, on peut si l'on veut dans tout ce qui précède remplacer $(N^2+1)^{\frac{1}{2}}$ par $|N|$.

25. L'inégalité (21) combinée avec l'étude facile de la série de Laurent $f(z)$ dans une couronne où $N(r)$ demeure bornée en valeur absolue, conduit à un résultat important :

XVI. *Pour une série de Laurent* $f(z)$ *sans terme constant, on a dans la couronne de convergence,* ε *étant un nombre positif arbitraire, l'inégalité*

$$(22) \qquad M(r) < (1+\varepsilon)A(r),$$

sauf peut-être dans des intervalles où la variation totale de $\log r$ *est bornée supérieurement par une fonction de* ε *seul; cette variation est d'ailleurs, pour* ε *suffisamment grand, aussi petite que l'on veut.*

Il résulte de là qu'au point de vue indéfini, on a pour une série de Laurent à terme constant quelconque, convergeant en tout point différent de o ou ∞,

$$M(r) \sim A(r) \sim B(r), \tag{23}$$

lorque r tend vers o ou vers ∞.

Il y aurait intérêt à établir la proposition précédente en se plaçant au point de vue de Cauchy et de Riemann; il faudrait à cet effet trouver des relations d'inégalité entre les valeurs prises par les fonctions $M(r)$, $A(r)$, $B(r)$ sur trois cercles, et soumettre ces relations à un processus d'intégration généralisant celui de M. Borel.

26. La méthode précédente conduit aussi à des résultats relatifs aux dérivées successives de $f(z)$, dont le principal peut, au point de vue indéfini, s'énoncer comme il suit :

XVII. *Le module r étant suffisamment grand et demeurant extérieur à une certaine suite d'intervalles où la variation totale de* $\log r$ *est finie, aux points du cercle $|z| = r$ où l'un des nombres*

$$f(z), \quad \left(\frac{z}{N}\right) f'(z) \ldots \left(\frac{z}{N}\right)^q f^{(q)}(z)$$

est supérieur à $M(r)\,N(r)^{-\frac{1}{8}}$, *tous les autres sont supérieurs à* $(1-\varepsilon)\;M(r)\;N(r)^{-\frac{1}{8}}$, *et aux mêmes points a lieu l'inégalité*

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left[\frac{N(r)}{z}\right]^j \left(1 + h_j N^{-\frac{1}{16}}\right) \qquad (|h_j| < K). \tag{24}$$

En particulier,

$$M^j(r) \sim M(r)\left[\frac{N(r)}{r}\right]^j. \tag{25}$$

D'où la formule récurrente

$$M^{p-i}(r)\,M^{q+i}(r) \sim M^p(r)\,M^q(r).$$

On pourrait trouver des propositions en termes finis correspondantes.

III. — Le théorème de M. Hadamard sur le minimum du module.

27. Le théorème du minimum du module est une propriété générale des fonctions entières, dont le principe est dû à M. Hadamard [12, *a*, *c*], qui la démontra pour les fonctions de genre fini. M. Borel [5, *b*], adoptant la même méthode, en établit un énoncé pour les fonctions entières quelconques. P. Boutroux l'étudia d'une manière nouvelle qui fut adoptée dans ses recherches par M. Valiron [32, *c*, *d*]. La méthode de ces deux géomètres, plus commode au point de vue finitiste que celle de M. Borel, et qui utilise d'ailleurs comme elle le théorème XII, permet d'obtenir l'énoncé suivant :

XVIII. *Soit* $f(z)$ *une fonction égale* à 1 *pour* $z = 0$ *et holomorphe dans un cercle indéterminé de centre origine, de module maximum* $M(r)$. *Alors,* ε *étant un nombre positif arbitraire, on a, dès que* $M(r) > \beta > 1$, *l'inégalité*

$$\log|f(z)| > -C_{\varepsilon\beta}[\log M(r)]^{1+\varepsilon} \tag{26}$$

dans le cercle d'holomorphie, sauf peut-être dans des couronnes où la variation totale de $\log r$ *ne dépasse pas un nombre dépendant uniquement de* ε *et* β (C *étant une constante positive ne dépendant que de ces deux nombres*).

C'est là l'énoncé sensiblement le plus précis que l'on puisse donner comme certain, dans l'état actuel de la science pour les fonctions quelconques ; il a pu être utilisé, au point de vue indéfini comme au point de vue défini, dans l'étude du théorème de M. Picard et de plusieurs généralisations de ce théorème [5, *b*].

28. Mais pour les fonctions sans zéros $f(z) = e^{g(z)}$, la méthode de Wiman-Valiron nous fournit un résultat meilleur (n° 25).

XIX. *Si la fonction holomorphe sans zéros* $f(z)$ *est égale à* 1 *à l'origine, on a* $m(r)$ *étant le module minimum*

$$\frac{1}{\omega} < -\frac{\log M(r)}{\log m(r)} < \omega,$$

sauf peut-être dans des couronnes où la variation totale de $\log r$ *ne dépend que de* ω *supérieur à un.*

Par analogie, M. Wiman [34, *b*] a considéré comme vraisemblable un théorème, encore indémontré, que l'on peut énoncer :

XX. *Pour une fonction holomorphe quelconque $f(z)$, égale à* 1 *à l'origine, on a dans le cercle d'holomorphie*

$$\log|f(z)| > -(1+\varepsilon)\log M(r), \tag{27}$$

sauf peut-être dans des couronnes où la variation totale de $\log r$ *ne dépend que de ε positif arbitraire, et tend d'ailleurs vers zéro si ε croît indéfiniment.*

Or le calcul qui mène au théorème XVI de la section précédente sur la comparaison de $M(r)$ et $A(r)$ donne aussi, convenablement resserré, le résultat suivant :

La série de Laurent $f(z)$ étant dénuée de terme constant, on a pour toute valeur ordinaire r l'inégalité $A(r) > \theta_\alpha M(r)$, *le nombre θ_α compris entre* 0 *et* 1 *ne dépendant que de l'indice α de la série $\mathcal{F}_\alpha(u)$.*

On ne peut pas, avec la série de comparaison qui a été adoptée, choisir α de sorte que θ_α ait une valeur aussi voisine que l'on veut de l'unité; mais on peut modifier légèrement la forme de la série de comparaison de manière que cela devienne possible.

Dès lors le théorème du minimum du module, sous la forme précise énoncée en XX, sera démontré si l'on établit — même seulement pour une fonction holomorphe — la proposition suivante :

La fonction méromorphe $f(z)$ étant égale à 1 *à l'origine, on pose $f(z) = z^{m-p}\dfrac{b_1\ldots b_p}{a_1\ldots a_m}e^{\varphi(z)}$, les nombres $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_p$ étant respectivement les zéros et les pôles de module inférieur à $|z|$, $\varphi(z)$ étant une série de Laurent (qui n'est pas la même quel que soit $|z|$, mais qui n'a jamais de terme constant). Alors, une série de comparaison quelconque étant choisie, la valeur $|z| = r$ est ordinaire pour cette série de Laurent $\varphi(z)$, sauf peut-être dans des couronnes du cercle de méromorphie de $f(z)$ où la variation totale de* $\log r$ *ne dépend que de la série de comparaison considérée. Pour une série de comparaison convenable, cette variation est d'ailleurs aussi petite qu'on veut.*

Cet énoncé, supposé démontré, conduira probablement à une extension aux fonctions méromorphes du théorème du minimum du module, lorsqu'on aura défini l'expression (encore hypothétique) $GM(r)$ mesurant la croissance d'une telle fonction (n° **13**).

IV. — Les expressions de MM. F. et R. Nevanlinna.

29. Les expressions, désignées ici par $m(r, f)$ et $gm(r, f)$, introduites en analyse par MM. F. et R. Nevanlinna, jouent actuellement un rôle important. La première intervient, dans bien des questions, plus efficacement que le module maximum $M(r, f)$ de la fonction, supposée holomorphe. La seconde est la seule connue actuellement pour mesurer la croissance d'une fonction méromorphe. L'emploi de ces expressions est avantageux dans un grand nombre de recherches, car là où devrait intervenir le théorème du minimum du module — encore si mal connu — si l'on utilisait l'expression $M(r, f)$, il suffit, au point de vue actuel, d'appliquer la formule de M. Jensen (*voir* n^{os} **11** à **14**).

Il peut être utile de savoir passer d'un ordre d'idées à l'autre. On a, pour une fonction holomorphe dans un cercle, les deux inégalités (la seconde résultant de la formule de Poisson-Jensen) [**24**; **25**, f]

$$m(r, f) \leq \overset{+}{\log} M(r, f), \tag{28}$$

$$\log M(r, f) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r}\, m(\rho, f) \qquad (r < \rho). \tag{29}$$

Il résulte de là que les fonctions $\log M(r, f)$ et $m(r, f)$ sont *du même ordre de grandeur*, c'est-à-dire que le rapport de leurs logarithmes tend vers un lorsque r croît indéfiniment, sauf peut-être dans des intervalles où la variation totale de $\log r$ est finie. Il est d'ailleurs possible qu'une relation plus précise ait lieu, qui n'a pas été obtenue; mais des exemples simples prouvent que $\log M(r, f)$ et $m(r, f)$ ne sont pas équivalents (même en excluant des intervalles à variation de $\log r$ finie).

30. L'inégalité

$$\overset{+}{\log}\,|\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p| \leq \overset{+}{\log}\,|\alpha_1| + \overset{+}{\log}\,|\alpha_2| + \ldots + \overset{+}{\log}\,|\alpha_p|$$

donne

$$m(r, f_1 f_2) \leq m(r, f_1) + m(r, f_2), \qquad gm(r, f_1 f_2) \leq gm(r, f_1) + gm(r, f_2). \tag{30}$$

On a les inégalités

$$\overset{+}{\log} | \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p | \leqq \overset{+}{\log} | \alpha_1 | + \overset{+}{\log} | \alpha_2 | + \ldots + \overset{+}{\log} | \alpha_p | + \log p,$$
$$\overset{+}{\log} | \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p | \leqq \overset{+}{\log} \mathrm{A} + \log p,$$

où A est la plus grande des valeurs absolues $|\alpha_1| \ldots |\alpha_p|$.

La première donne

$$(31) \qquad m(r, f+a) < m(r, f) + \overset{+}{\log} | a | + \log 2.$$

Donc les valeurs moyennes $m(r, f+a)$ et $m(r, f)$ où f est holomorphe sont équivalentes (sans intervalles exceptionnels) quand r croît indéfiniment.

De même,

$$(32) \qquad gm(r, f+a) < gm(r, f) + \overset{+}{\log} | a | + \log 2,$$

et par suite encore

$$gm(r, f+a) \sim gm(r, f).$$

Plus généralement,

$$(33) \qquad gm\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) \sim gm(r, f),$$

et par suite, $\mathrm{R}_p(f)$ étant une fonction rationnelle de degré p en f, on a, à partir d'une valeur de r,

$$(34) \qquad gm[m, \mathrm{R}_p(f)] < (1+\varepsilon) p \, gm(r, f).$$

31. On peut comparer les fonctions holomorphes f et e^f : la formule de F. et R. Nevanlinna conduit à l'inégalité

$$(35) \quad m(r, f) < 4 \log 2 + 2 \overset{+}{\log} | f(0) | + \log \frac{\rho}{\rho - r} + \overset{+}{\log} m(\rho, e^f) \qquad (r < \rho).$$

De là résulte, d'après le n° **18**, que presque partout on a la relation

$$(36) \qquad m(r, f) < (1+\varepsilon) \overset{+}{\log} m(r, e^f).$$

L'équivalence de $m(r, f)$ et $\overset{+}{\log} m(r, e^f)$ n'a pas été démontrée; la relation la plus précise limitant $\overset{+}{\log} m(r, e^f)$ en fonction de $m(r, f)$ [comme celle limitant $\log \mathrm{M}(r, f)$ en fonction de $m(r, f)$] est probablement du second ordre, dépend autrement dit d'une inégalité où figurent trois cercles différents.

Considérons des sommes de fonctions différentes. La relation

$$m(r, f_1+f_2) < (1+\varepsilon) \times \text{la plus grande de} \begin{cases} m(r, f_1), \\ m(r, f_2), \end{cases}$$

qui s'étendra d'elle-même à un nombre quelconque de fonctions holomorphes, a fort probablement lieu presque partout. Elle résulterait de la suivante :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\text{le plus grand de} \begin{cases} \overset{+}{\log} f_1(re^{i\varphi}) \\ \overset{+}{\log} f_2(re^{i\varphi}) \end{cases}\right] d\varphi$$
$$< (1+\varepsilon) \times \text{la plus grande de} \begin{cases} m(r, f_1), \\ m(r, f_2). \end{cases}$$

Pour une somme de fonctions méromorphes il n'y a, dans le cas le plus général, rien d'analogue concernant les expressions gm, comme le prouve l'exemple $\frac{1}{(x-a)(x-b)}\cdot$ On a simplement la relation évidente

$$gm(r, f_1+f_2+\ldots+f_n) < gm(r, f_1) + gm(r, f_2) + \ldots + gm(r, f_n) + \log n.$$

32. Des inégalités limitant la croissance des dérivées d'une fonction holomorphe ou méromorphe sont une conséquence du théorème IX, joint à l'inégalité $M^1(r) < \frac{M(R)}{R-r}\cdot$ Pour une fonction méromorphe Φ, on a

$$(37) \qquad gm(r, \Phi') < \overset{+}{\log}\frac{2}{R-r} + 2gm(R, \Phi),$$

$$(38) \qquad gm\left(r, \frac{\Phi'}{\Phi}\right) < \log\left|\frac{1}{\Phi(0)}\right| + \overset{+}{\log}\frac{2}{R-r} + 2gm(R, \Phi),$$

d'où, presque partout,

$$(39) \quad gm(r, \Phi') < (1+\varepsilon) \times 2gm(r, \Phi), \qquad gm\left(r, \frac{\Phi'}{\Phi}\right) < (1+\varepsilon) \times 2gm(r, \Phi).$$

Pour la dérivée $n^{\text{ième}}$, on a de même

$$(40) \qquad gm(r, \Phi^{(n)}) < (1+\varepsilon) \times (n+1) gm(r, \Phi).$$

Soit maintenant f une fonction holomorphe sans zéros ; on a directement [25, f] par la formule de MM. Nevanlinna, sur le cercle de rayon $r < R$,

$$(41) \qquad \left|\frac{f'}{f}\right| < \frac{2R}{(R-r)^2}\left[\log\left|\frac{1}{f(0)}\right| + 2m(R, f)\right].$$

On conclut de là, toujours à l'aide du théorème IX, que pour une fonction holomorphe quelconque F :

$$(42)\quad m(r, F') < 2\log 2 + \overset{+}{\log}\frac{1}{R} + 2\log\frac{R}{R-r} + \log m(R, F) + m(R, F),$$

$$(43)\quad gm\left(r, \frac{F'}{F}\right) < 2\log 2 + \log\left|\frac{1}{F(0)}\right|$$
$$+ \overset{+}{\log}\frac{1}{R} + 2\log\frac{R}{R-r} + \log m(R, F) + m(R, F);$$

donc, presque partout,

$$(44)\quad m(r, F') < (1+\varepsilon)m(r, F); \qquad gm\left(r, \frac{F'}{F}\right) < (1+\varepsilon)m(r, F).$$

Pour une fonction méromorphe f, puissance $m^{\text{ième}}$ d'une fonction uniforme, on a presque partout

$$gm\left(r, \frac{f'}{f}\right) < (1+\varepsilon)\times\frac{2}{m}\,gm(r, f),$$

$\frac{2}{m}$ étant à remplacer par $\frac{1}{m}$ si f est holomorphe.

CHAPITRE IV.

Les domaines riemanniens engendrés par les fonctions holomorphes.

I. — Les domaines engendrés par les fonctions holomorphes quelconques.

33. Les résultats obtenus par M. G. Valiron [32, *b*, *d*] sur le comportement d'une fonction entière dans certains petits cercles comprennent des propositions relatives aux domaines riemanniens qu'engendre alors la fonction. L'égalité (21) du Chapitre III donne en effet ceci : *Le domaine riemannien engendré par une fonction entière qui n'est pas un polynome comprend des couronnes circulaires de centre origine, p fois enroulées sur elles-mêmes sans ramification, pour lesquelles le rayon intérieur, le rapport des rayons et le nombre p sont aussi grands que l'on veut.*

La même égalité, combinée avec l'étude facile d'une série convergeant dans un cercle où le rang du terme maximum demeure borné, donne les propositions en termes finis qui suivent [3, *b*].

XXI. *Soit* $f(x) = x + \ldots$ *une fonction holomorphe dans le* *cercle-unité, s'annulant à l'origine et y ayant une dérivée égale à un : alors le domaine riemannien correspondant au cercle-unité contient un cercle à un seul feuillet de rayon supérieur à une certaine constante absolue; il contient même un cercle à un seul feuillet, de centre réel, de rayon supérieur à une certaine constante absolue.*

On pourrait, à l'aide de la démonstration, trouver des valeurs de ces constantes; mais seule présenterait de l'intérêt la détermination des valeurs exactes (des plus grandes que l'on puisse prendre).

XXII. *Les fonctions holomorphes dans un domaine et telles que les cercles à un seul feuillet, de centre réel, du domaine riemannien correspondant aient un rayon borné (ou n'existent pas) engendrent une famille normale dans le domaine donné.*

34. On démontre de la même manière des propositions plus générales :

XXIII. *Soit une série entière dont on donne les $p+1$ premiers coefficients : on peut trouver un cercle ayant l'origine pour centre, dont le rayon ne dépend que de ces $p+1$ premiers coefficients et du nombre positif arbitraire ρ, tel que, si la série entière y converge, le domaine riemannien correspondant comprenne une pile de p cercles à un seul feuillet superposés, de centre réel, de rayon ρ.*

XXIV. *Les fonctions holomorphes dans un domaine et telles que les piles de p cercles à un seul feuillet superposés, de centre réel, du domaine riemannien correspondant, aient un rayon borné (ou n'existent pas) engendrent une famille quasi normale d'ordre $p-1$ dans le domaine donné; par conséquent, en un point déterminé, le $(p+1)^{ième}$ coefficient du développement taylorien est borné en fonction des p premiers.*

Tous ces théorèmes pourront être précisés par diverses formules.

II. — Les fonctions univalentes.

35. Il est une catégorie de fonctions pour lesquelles le comportement dans le cercle-unité et les propriétés des domaines riemanniens engendrés sont particulièrement bien connus; ce sont les fonctions *univalentes* (en allemand *schlicht*), c'est-à-dire celles qui ne prennent qu'une fois chacune de leurs valeurs; elles furent étudiées systématiquement d'abord par M. Koebe [17] à l'occasion de la théorie de l'uniformisation; les résultats obtenus par lui furent ultérieurement précisés par divers auteurs, parmi lesquels MM. Faber [9], Bieberbach [1, *a*], Pick [27, *a*] et R. Nevanlinna [25, *b*] [*voir* aussi 1, *b*, et 18, *b*].

La théorie des fonctions univalentes est d'une nature élémentaire; il paraît abusif de la faire reposer sur le théorème de Picard-Landau, qui, au surplus, ne peut donner toute la précision qu'elle comporte.

M. R. Nevanlinna [25, *b*] a coordonné et complété les résultats antérieurs. Voici son exposition :

36. XXV. *Soit $f(x)$ une fonction holomorphe et univalente dans le cercle-unité, s'annulant à l'origine et y ayant une dérivée égale à un,*

$$f(x) = x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n \ldots,$$

les coefficients b_n satisfont à une inégalité de MM. Faber et Bieberbach

$$\sum_1^\infty n \mid b_n \mid^2 = \mid b_1 \mid^2 + \ldots + n \mid b_n \mid^2 + \ldots \leqq 1. \tag{1}$$

Appliquant cette proposition, non à $f(x)$, mais à la fonction

$$g(x) = \sqrt{f(x^2)},$$

qui est aussi univalente dans le cercle-unité, on trouve

$$\mid a_2 \mid \leqq 2. \tag{2}$$

Cette limite supérieure de $\mid a_2 \mid$, obtenue par M. Bieberbach, est effectivement atteinte quand on prend pour $f(x)$ la fonction $\frac{x}{(1+x)^2}$. L'image correspondante du cercle-unité est le plan tout entier, coupé le long de l'axe réel de $\frac{1}{4}$ à $+\infty$.

De cette limite supérieure de $\mid a_2 \mid$, M. Nevanlinna déduit les inégalités suivantes, obtenues par M. Pick d'une manière différente : *Pour* $|x| = r < 1$, *on a*

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{r}{(1+r)^2} \leqq |f(x)| \leqq \dfrac{r}{(1-r)^2}, \\ \dfrac{1-r}{(1+r)^3} \leqq |f'(x)| \leqq \dfrac{1+r}{(1-r)^3}. \end{cases}$$

Ces diverses limites peuvent être effectivement atteintes.

Faisant $r = 1$, on voit en particulier que l'*image du cercle-unité fournie par la fonction* $f(x)$ *contient le cercle* $|x| \leqq \frac{1}{4}$.

La détermination exacte du rayon du plus grand cercle dont on puisse affirmer l'existence dans cette image ne paraît pas avoir été faite jusqu'à présent; ni celle du rayon du plus grand cercle de centre réel. Ces deux rayons sont au plus égaux à $\frac{\pi}{4}$.

XXVI. *Soit maintenant une fonction holomorphe univalente quelconque dans le cercle-unité*

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

On a, pour $|x_1| = |x_2| = r$, *d'après les limitations de* $|f'(x)|$,

$$(4)\qquad \frac{1}{\Omega(r)} < \left|\frac{\varphi'(x_1)}{\varphi'(x_2)}\right| < \Omega(r),$$

résultat dû à M. Koebe et utilisé par lui dans la théorie de l'uniformisation.

De la limitation de $f(x)$ indiquée ci-dessus résulte que non seulement a_2 est borné supérieurement, mais aussi tout coefficient a_n de $f(x)$, d'un rang n déterminé. Cette même limitation donne le théorème suivant [23, c] :

XXVII. *Les fonctions holomorphes univalentes dans un domaine y forment une famille quasi normale d'ordre un.*

37. On peut, par des moyens analogues, étudier les fonctions méromorphes univalentes dans un domaine, et obtenir à cet égard les propositions suivantes :

XXVIII. *Les fonctions méromorphes univalentes dans un domaine y forment une famille quasi normale d'ordre un.*

Les fonctions méromorphes univalentes dans un domaine, y prenant en trois points donnés des valeurs données, forment une famille normale.

D'autres détails sur les fonctions univalentes figureront dans l'article du *Mémorial* consacré à la représentation conforme.

CHAPITRE V.

Les fonctions à trois valeurs lacunaires.

I. — Exposé de la théorie a partir de la fonction modulaire.

38. Dans ses travaux, datant de 1879, M. E. Picard [26, *a*] a établi au moyen de la fonction modulaire le théorème initial de la théorie des fonctions à trois valeurs lacunaires, d'après lequel *une fonction entière qui ne se réduit pas à une constante prend nécessairement toute valeur finie, sauf une au plus.* Dans l'ordre d'idées finitiste de MM. Landau et Schottky, M. C. Carathéodory [7, *a*] a montré, en 1905, que la considération de la *fonction modulaire* était indispensable à l'obtention des résultats les plus complets dans la théorie en question. M. E. Lindelöf [21], en 1909, a développé d'une manière systématique la même théorie, à partir de la fonction modulaire.

On peut, à ce point de vue, condenser les propositions de MM. Picard, Landau, Schottky [26, *a*; 18, *a*, *b*; 29] dans l'énoncé suivant :

XXIX. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction méromorphe à l'intérieur d'un cercle, n'y prenant pas trois valeurs données, et y prenant en deux points donnés deux valeurs déterminées, est que la distance non euclidienne des deux points dans le cercle soit supérieure ou égale à la distance triponctuelle minima des deux valeurs assignées par rapport aux trois valeurs lacunaires.*

La *distance triponctuelle* de deux points par rapport à un système de trois autres se définit comme il suit : supposant, ce qu'on peut toujours réaliser par une transformation homographique, que les trois points soient 0, 1, ∞, la fonction modulaire inverse fait correspondre à chacun des deux points un système d'une infinité de points homologues du réseau modulaire; la distance non euclidienne d'un point d'un de ces deux systèmes infinis à un point de l'autre, dans le cercle couvert par le réseau modulaire, est une détermination de la distance triponctuelle en question; quant à la distance triponctuelle *minima*, c'est la plus petite de toutes ces déterminations.

Dans le cas particulier où les deux points dont on cherche la distance triponctuelle minima sont infiniment voisins, celle-ci est infinitésimale, D'après l'expression $\frac{ds}{y}$ de la distance non euclidienne de deux points voisins par rapport à une droite, l'énoncé est alors le suivant :

XXX. *La condition pour que a_0 et a_1 soient les deux premiers coefficients d'une série entière $a_0+a_1x+\ldots$ convergeant dans le cercle de rayon* R *et n'y prenant pas les valeurs* o *et* 1 *est*

$$R \leq \frac{2\mathfrak{J}\nu(a_0)}{|a_1||\nu'(a_0)|}, \tag{1}$$

où $\nu(a_0)$ est la fonction modulaire inverse correspondant à a_0.

Le second membre est naturellement indépendant de la détermination choisie pour $\nu(a_0)$.

39. Il importe de se rendre compte de la nature analytique des expressions qui s'introduisent ainsi nécessairement en théorie des fonctions. Au point de vue de la théorie des équations du potentiel, la fonction modulaire peut se définir à l'aide de la représentation conforme [**21**; **16**, *c*]; il est préférable encore d'en rattacher l'existence à l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur la sphère triponctuée, sous des conditions déterminées ([1]); la connaissanee de la fonction u pour le point a_0 est équivalente à celle de $\frac{2\mathfrak{J}\nu(a_0)}{|\nu'(a_0)|}$ et de la distance triponctuelle infinitésimale, on passe à la distance triponctuelle finie par la résolution d'un problème de minimum; on n'a donc même pas, à ce point de vue, à parler de fonction modulaire.

Mais quel que puisse être l'intérêt de ces considérations, qui s'appliquent à une question plus générale, il vaut bien mieux, dans la question actuelle, se placer à un point de vue purement analytique, puisque précisément la chose est ici possible. D'une part la

([1]) *Cf.* par exemple H. POINCARÉ, *Les fonctions fuchsiennes et l'équation* $\Delta u = e^u$ (*Journal de Mathématiques*, 1898, p. 137).

fonction modulaire peut se définir au moyen d'une équation linéaire du second ordre (ou d'une équation de Schwarz) purement numérique. D'autre part la fonction modulaire inverse $\nu(y)$ est le rapport ω de deux périodes primitives d'une intégrale elliptique

$$\int \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u-y)}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-yt^2)}},$$

et l'on déduit de là comme on sait plusieurs développements de la fonction modulaire y, soit par rapport à ω lui-même, soit par rapport à $q = e^{2\pi i\omega}$.

40. La distance triponctuelle par rapport à 0, 1, ∞ de deux carrés de modules singuliers (distincts) de multiplication complexe est le logarithme d'un nombre *algébrique;* il y aurait intérêt à rechercher s'il n'y a pas d'autres cas où la condition nécessaire et suffisante prenne une forme purement algébrique.

M. Carathéodory [1] a déterminé le plus petit cercle de centre origine où la série entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

dont on donne les $(n+1)$ premiers coefficients, devient nécessairement égale à 0 ou 1, à moins d'y avoir un point singulier; la considération de la fonction modulaire ramène ce problème à un problème sur les fonctions bornées, dont la solution a été indiquée au Chapitre II.

Dans le cas particulier où $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sont nuls, on a simplement pour le rayon de ce cercle

$$(2) \qquad \sqrt[n]{\frac{2\Im\,\nu(a_0)}{|a_n|\,|\nu'(a_0)|}}.$$

On peut aussi ne supposer connus, avec a_0 et a_n, qu'une partie des autres $(n+1)$ premiers coefficients, ou même aucun d'entre eux; dans tous les cas, si $a_n \neq 0$, le problème admet une solution, fournie encore par la fonction modulaire.

M. Hartogs a montré que la limite $\frac{2\Im\,\nu(a_0)}{|a_1|\,|\nu'(a_0)|}$ était susceptible d'une

(1) Pour des renseignements bibliographiques détaillés, *voir* [28, *a*, et 25, *a*].

interprétation simple par la théorie classique des fonctions elliptiques [16, c]; la fonction modulaire est le rapport anharmonique des quatre racines du polynome; donc, en adoptant par exemple la notation de Weierstrass, on doit poser, e_1, e_2, e_3 étant les trois racines finies,

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = a_0.$$

Si Q désigne l'aire du parallélogramme des périodes $(2\Omega_1, 2\Omega_2)$, on a

$$\frac{2\Im\nu(a_0)}{|a_1|\,|\nu'(a_0)|} = \frac{2Q}{\pi}\,|e_1 - e_2|\left|\frac{a_0}{a_1}\right|. \tag{3}$$

41. Passons aux approximations des résultats précédents par des fonctions algébriques et logarithmiques.

XXXI. *La fonction $f(x)$, holomorphe dans le cercle $|x| < R$, n'y prenant pas les valeurs* o *et* 1, *prenant à l'origine la valeur a_0, satisfait à l'inégalité*

$$\log|f(x)| < \left\{2\pi\left[\Im\nu(a_0) + \frac{1}{\Im\nu(a_0)}\right] + C\right\}\frac{R}{R - |x|}, \tag{4}$$

où $\nu(a_0)$ est une détermination quelconque de la fonction modulaire inverse, et où C *est une certaine constante numérique.*

Ce résultat [32, d], dû à M. Landau [18, c; 4], précise le théorème de M. Schottky, d'après lequel $|f(x)|$ est borné en fonction de x et a_0.

M. P. Lévy [19] a montré que l'on a, plus généralement,

$$|\log f(x)| < K(a_0)\frac{R}{R - |x|}, \tag{5}$$

où $\log f(x)$ est la détermination dont la partie imaginaire est comprise à l'origine entre o et $2\pi i$, et où $K(a_0)$ ne dépend que de a_0.

L'inégalité suivante a peut-être lieu :

$$m(r, f) \leqq \overset{+}{\log}\,|a_0| + K_1(a_0)\log\frac{R}{R - r}.$$

On peut aussi obtenir des valeurs approchées par excès du rayon exact du cercle de Landau. On a, d'après A. Hurwitz,

$$\frac{2\Im\nu(a_0)}{|a_1|\,|\nu'(a_0)|} < \frac{16}{|a_1|}\,|a_0|^{\frac{2}{3}}\,|a_0 - 1|^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Des expressions plus approchées, contenant des logarithmes, ont en particulier l'avantage de permettre de retrouver, par intégration, le théorème de M. Schottky; par exemple, $\frac{2\Im\nu(a_0)}{|\nu'(a_0)|}$, *fini pour* a_0 *fini*, *est équivalent lorsque* a_0 *croît indéfiniment*, *à* $2|a_0|\log|a_0|$.

II. — Les démonstrations directes.

42. On a trouvé des théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions à trois valeurs lacunaires plusieurs démonstrations, dites élémentaires, indépendantes de la fonction modulaire.

M. Borel [**5**, *a*, *b*, *c*] donna en 1896 la première démonstration directe du théorème de M. Picard sur les fonctions entières; il observa que, dans l'identité $e^{G(z)} + e^{G_1(z)} - 1 = 0$, on peut poser

$$G(z) - 2n\pi i = e^{\Gamma_n(z)};$$

s'appuyant sur les relations connues à cette époque entre les croissances respectives des fonctions $A(r)$ et $M(r)$ il mit en évidence une contradiction. Cette démonstration fut le point de départ des travaux de MM. Landau et Schottky; ils parvinrent à leurs propositions en en resserrant les inégalités [**18**, *a*, *b*; **29**; **11**].

Une seconde démonstration donnée par M. Borel [**5**, *b*] du théorème de M. Picard, basée sur la croissance des dérivées et le théorème du minimum du module, peut également conduire au théorème de Landau-Schottky [3, *c*, *k*].

43. Les contributions nouvelles apportées à la théorie par MM. Wiman et Valiron (Chap. III, § II; Chap. IV, § I) ont permis d'édifier plusieurs nouvelles démonstrations [**3**, *a*, *b*]. On peut par exemple observer que si la fonction entière $f(z)$ ne prenait pas les valeurs 0 et 1, la fonction entière $f(z)[f(z) - 1]$ aurait presque partout (n° **25**) son maximum de l'ordre de grandeur de celui de f^2 et l'inverse de son minimum de l'ordre de celui de f; transposant ce raisonnement en termes finis, on établit de proche en proche le théorème de M. Schottky en prouvant l'existence d'une constante numérique δ telle que si, la fonction $f(z)$ étant holomorphe dans le cercle-unité sans y prendre les valeurs 0 et 1, les quantités $f(z_0)$, $f(z_0) - 1$, $\frac{1}{f(z_0)}$ sont bornées, il en soit de même pour $f(z_1)$, $f(z_1) - 1$, $\frac{1}{f(z_1)}$, sous la seule condition que la distance non euclidienne de z_0 et z_1 soit inférieure à δ.

La considération des domaines riemanniens (n° 33) conduit aux démonstrations suivantes, du théorème de M. Picard qu'il est d'ailleurs très aisé d'énoncer également en termes finis. M. Valiron [32, *b*, *d*] observe que, si la fonction entière $f(z)$ ne prenait pas les valeurs 0 et 1, la fonetion entière $i \log f$ ne pourrait admettre dans son domaine riemannien des cercles de centre réel de grandeur arbitraire. Si, au lieu de $i \log f$, on considère la fonction

$$\log(\sqrt{\log f - 2\pi i} - \sqrt{\log f}),$$

on aboutit [3, *b*] à une contradiction analogue sans rien supposer sur la position des centres, réels ou non, des cercles arbitrairement grands du domaine riemannien; une intégrale elliptique convenable [3, *b*] conduit, sans logarithmes, au même résultat.

44. Dans l'ordre d'idées de la seconde démonstration de M. Borel, M. R. Nevanlinna [25, *f*] a obtenu une démonstration très simple, par l'emploi des valeurs moyennes logarithmiques qu'il a introduites en analyse. Écrivant

$$\frac{f-1}{f} = \frac{f'}{f}\,\frac{f-1}{f'}, \tag{7}$$

il obtient l'inégalité

$$m(r, f) < c + 2\overset{+}{\log}\rho + 4\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho - r} + 2\overset{+}{\log} m(\rho, f), \tag{8}$$

qui, si f était une fonction entière, conduirait à une impossibilité (*cf.* Chap. III). D'autre part, en supposant simplement f holomorphe dans le cercle-unité, et eu égard à l'expression de c, qui ne dépend que de a_0 et a_1, il en déduit aussi [25, *i*] le théorème de M. Landau; et l'on peut en conclure celui de M. Schottky [32, *h*].

On peut déduire de ces différentes démonstrations un grand nombre de formules, mais qui sont généralement moins précises que celles indiquées plus haut, fournies par la fonction modulaire.

III. — Quelques propositions complémentaires.

45. Le théorème de M. Schottky a conduit M. Montel [23, *b*] à la proposition suivante :

XXXII. *Les fonctions méromorphes dans un domaine et n'y prenant pas trois valeurs fixes distinctes (pouvant comprendre l'infini) forment une famille normale.*

Une transformation homographique auxiliaire permet d'étendre sous la forme suivante cette proposition au cas où les valeurs lacunaires sont mobiles :

XXXIII. *Si une famille de fonctions méromorphes dans un domaine est telle que chacune d'entre elles y admette trois valeurs lacunaires, les distances sur la sphère complexe des trois valeurs lacunaires prises deux à deux étant bornées inférieurement, la famille est normale dans le domaine.*

Il résulte de là que les valeurs qui ne sont pas prises par une fonction méromorphe, à l'intérieur d'un cercle de rayon croissant indéfiniment, sont comprises sur la sphère complexe à l'intérieur de deux cercles de rayons tendant vers zéro. Cela pourrait se préciser par des énoncés en termes finis [3, *b*; 18, *d*].

46. Une extension du théorème de M. Schottky résulte de l'extension donnée par M. Julia (n° 9) au lemme de Schwarz; on peut l'énoncer ainsi :

XXXIV. *Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) > 0$, n'y prenant pas les valeurs* 0 *et* 1. *Soit de plus dans le voisinage du point à l'infini*

$$f(x) = e^{cx}[1 + \varepsilon(x)] \qquad (c > 0),$$

en sorte que $\varepsilon(x)$ tende uniformément vers zéro pour x croissant indéfiniment dans tout angle intérieur au demi-plan. Alors, pour une valeur déterminée de $\mathfrak{R}(x)$, $f(x)$ n'est pas quelconque, mais satisfait à la condition d'être extérieur à une certaine région du plan, dépendant uniquement du produit $c\mathfrak{R}(x)$, com-

prenant les points o *et* 1 *et limitée par une ou deux courbes simples.*

Cette condition précise, qui dépend de la fonction modulaire, conduit par approximation à différentes inégalités, parmi lesquelles :

$$(9) \qquad \left|\log\frac{f(x)}{f(x)-1}\right| < \frac{K}{c\mathfrak{R}(x)},$$

où K est une certaine constante numérique et où la détermination du logarithme est celle qui s'annule à l'infini.

47. On peut généraliser de la manière suivante [**18**, *c*; **23**, *c*; **3**, *d*] le théorème de M. Landau :

XXXV. *Il existe un cercle de rayon* $R_q(a_0, a_1)$ *où la fonction* $a_0+a_1x+\ldots$, *supposée holomorphe et ne s'y annulant pas, prend nécessairement au moins* q *fois la valeur* 1.

XXXVI. *Il existe un cercle de rayon* $R(a_0, a_1)$ *où la fonction* $a_0+a_1x+\ldots$, *supposée holomorphe, devient nécessairement au moins deux fois en tout égale à* 0 *ou* 1.

On peut prendre pour $R_q(a_0, a_1)$ le plus grand des rayons des q cercles où $(a_0+a_1x+\ldots)^{\frac{1}{q}}$ devient certainement égale aux q racines $q^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Quant au second énoncé, il résulte aisément du premier.

Dans le cours de ce numéro, les racines sont comptées avec leur degré de multiplicité ; on pourrait développer une théorie parallèle où il ne serait pas tenu compte de ce degré, mais il paraît préférable de laisser actuellement cette extension de côté.

XXXVII. *Les fonctions holomorphes dans un domaine, ne s'y annulant pas et y devenant moins de* q *fois égales à* 1, *engendrent une famille normale* [**23**, *c*].

On peut se proposer d'obtenir, dans l'ordre d'idées actuel, les résultats les plus complets; on connaît [**3**, *e*] les limites exactes de $R_2(a_0, a_1)$ et $R(a_0, a_1)$:

XXXVIII. *La limite exacte* $R_2(a_0, a_1)$ *du rayon du cercle, où la fonction* $a_0+a_1x+\ldots$, *supposée holomorphe et non nulle,* *prend nécessairement deux fois au moins la valeur* 1, *est*

$$R_2(a_0, a_1) = \frac{1}{|a_1|} \frac{2 \operatorname{sh} \pi \mathfrak{J} \nu(a_0)}{\pi |\nu'(a_0)|}, \tag{10}$$

où $\nu(a_0)$ *désigne non plus une détermination quelconque de la fonction modulaire inverse, mais la détermination principale, c'est-à-dire celle située dans un triangle du réseau ayant un sommet à l'infini.*

La limite exacte $R(a_0, a_1)$ *du rayon du cercle, où la fonction* $a_0 + a_1 x + \ldots$, *supposée holomorphe, devient au moins deux fois en tout égale à* 0 *ou* 1, *est* $R_2(a_0, a_1)$ *ou* $R_2(1 - a_0, a_1)$, *suivant que la partie réelle de* a_0 *est supérieure ou inférieure à* $\frac{1}{2}$.

IV. — La nature du théorème de Picard-Landau.

48. La théorie des fonctions à trois valeurs lacunaires joue un rôle capital dans la science mathématique contemporaine; d'une part elle est le type le plus simple d'une série de questions dont l'étude, d'ailleurs difficile, est actuellement l'une des tâches les plus essentielles de l'analyse complexe; d'autre part, elle paraît se rattacher à d'importantes questions d'algèbre, de théorie des groupes, et de théorie des nombres.

On se pose naturellement [18, *a*] la question suivante : le théorème de Picard-Landau, supposé démontré pour une *fraction rationnelle* (ou même un *polynome*), s'étendra immédiatement au cas général; comment donc le démontrer, de manière *algébrique*, dans ce cas particulier?

Tout d'abord on pourrait naturellement, avec assez de patience, remanier chacune des démonstrations directes du théorème, afin d'en faire disparaître l'emploi des logarithmes et tout appareil analytique; mais les démonstrations obtenues de la sorte seraient lourdes, compliquées, sans intérêt et sans fécondité (1).

Une manière meilleure d'envisager la question consistera à rechercher, pour chaque valeur de a_0, et chaque valeur du degré m de la fraction rationnelle, la plus petite valeur de $|a_1|$ pour laquelle l'une au

(1) *Voir* cependant n° 50 et [25 *bis*, *b*].

moins des valeurs o, 1, ∞ soit certainement prise dans le cercle-unité (il faudra montrer ensuite que ce minimum ne croît pas indéfiniment avec m). C'est là un problème qui paraît en rapports étroits avec l'étude au point de vue algébrique du théorème d'existence de Riemann pour une surface de genre zéro ([1]); par exemple, si au lieu de o, 1, ∞ on prend pour valeurs lacunaires les trois racines cubiques 1, λ, λ^2 de l'unité, et que l'on choisisse $a_0 = 0$, les fractions rationnelles de degré m donnant lieu à la plus petite valeur de $|a_1|$, pour laquelle l'une au moins des valeurs 1, λ, λ^2 soit sûrement prise dans le cercle-unité, sont vraisemblablement, pour m égal à 1, 4 ou 10 :

$$(11) \qquad x, \quad \frac{x^4+2x}{2x^3+1}, \quad \frac{2x^{10}+10x^7+14x^4+5x}{5x^9+14x^6+10x^3+2}.$$

Les surfaces de Riemann correspondantes ont une définition très simple, qui s'étend au cas général où $m = 3 \times 2^k - 2$; il leur correspond une division de la sphère complexe en un nombre fini de cases, qui est une approximation du réseau modulaire; les fractions correspondantes sont elles-mêmes des valeurs approchées de la fonction modulaire. Pour a_0 et m quelconques, la résolution complète de la question posée serait très désirable, mais aussi probablement fort délicate; elle a peut-être des rapports avec la transformation des fonctions elliptiques.

Ce qu'il semble y avoir de mieux à faire actuellement consiste à partir de la remarque suivante : un polynome de degré m devient égal à o ou 1 pour *au moins* $m+1$ *valeurs distinctes de la variable*, une fraction rationnelle de degré m à o, 1 ou ∞ pour au moins $m+2$ valeurs distinctes; en calculant des limites inférieures des écarts deux à deux de ces $m+1$ ou $m+2$ valeurs, on arrivera probablement à établir le théorème.

49. Au point de vue analytique se pose également une question digne d'intérêt. La démonstration par la fonction modulaire, qui fournit les résultats les plus complets, est actuellement fort loin d'être susceptible d'extension à la plupart des théories analogues à édifier; quant aux démonstrations directes données jusqu'ici, si elles s'ap-

---

([1]) *Cf.* A. Comessati, *Bull. des Sc. math.*, janvier 1922.

pliquent, à la rigueur, à une partie des généralisations qu'il est possible d'entrevoir, cette adaptation ne va pas le plus souvent sans sérieuses complications. Ne pourrait-on trouver des démonstrations intermédiaires, utilisant les principes de la théorie des fonctions analytiques et harmoniques, relativement courtes comme celles par la fonction modulaire, mais qui, n'ayant recours à aucune transcendante trop spéciale, se transporteraient mieux aux problèmes analogues à élucider? La théorie de la représentation conforme peut servir de guide dans cet objet (voir n° 53). L'on arrivera sans doute un jour à établir par là de manière *élémentaire* [voir 3, *m*] les résultats les plus complets, fournis par la fonction modulaire.

Signalons en terminant une conséquence immédiate du théorème Picard-Landau qui mériterait d'être démontrée directement, au moins dans le cas où tout est réel :

XXXIX. *Soient trois suites infinies de nombres a_i, b_i, c_i; les b_i et les c_i sont définis par rapport aux a_i par les relations de récurrence :*

$$(12)\quad \begin{cases} a_0 b_0 = 1, \quad a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0, \quad \ldots, \quad a_0 b_n + \ldots + a_n b_0 = 0, \quad \ldots, \\ (a_0 - 1)c_0 = 1, \; (a_0 - 1)c_1 + a_1 c_0 = 0, \; \ldots, \; (a_0 - 1)c_n + \ldots + a_n c_0 = 0, \; \ldots. \end{cases}$$

Dans ces conditions, il est impossible que les nombres $\sqrt[n]{a_n}$, $\sqrt[n]{b_n}$, $\sqrt[n]{c_n}$ tendent tous trois vers zéro quand n croît indéfiniment.

CHAPITRE VI.

Les développements récents de la théorie (1).

I. — Quelques résultats nouveaux.

50. Dans deux Mémoires récents, M. A. Ostrowski, en perfectionnant de manière plus simple qu'il n'était permis de l'espérer des méthodes déjà connues, a réalisé des progrès intéressants. Dans l'un [25 *bis*, *a*] il montre par un habile emploi des familles normales, que *toutes les fonctions méromorphes possèdent des directions singu-*

(1) Ce Chapitre a été ajouté en 1926 au reste du fascicule, composé en 1925.

lières (n° 15) *à l'exception d'une catégorie parfaitement déterminée de fonction d'ordre nul.*

Dans l'autre Mémoire [25 *bis*, *b*] concernant les fonctions à trois valeurs lacunaires, M. Ostrowski débarrasse la démonstration de Borel-Schottky de l'emploi de la fonction logarithmique; la démonstration obtenue, dont il n'est pas actuellement possible de mesurer la portée, est une première démonstration algébrique du théorème de Picard-Landau.

Dans l'étude de certaines questions on utilise avec avantage une notion qui comprend celle, due à M. Montel [23, *c*, *d*], de famille quasi normale : c'est celle de *famille hyponormale* [3, *k*]. Une famille de fonctions méromorphes (ou holomorphes) dans un domaine y est dite hyponormale lorsque de toute suite infinie de fonctions de la famille on peut extraire une suite convergeant *presque partout* à l'intérieur du domaine, c'est-à-dire dont l'écart (sur la sphère de Riemann) avec une certaine fonction tend uniformément vers zéro dans tout domaine intérieur, sauf peut-être à l'intérieur de contours dont la longueur totale tend vers zéro.

51. Les théorèmes XXI et XXII se généralisent comme il suit [3, *j*] :

XL. *Les fonctions holomorphes dans un domaine, et dont le domaine riemannien ne comprend aucun de trois cercles à un seul feuillet donnés, extérieurs les uns aux autres, engendrent une famille normale* (comparer XLVI).

Le théorème XXI donne le suivant :

XLI. *Soit $f(x)$ une fonction entière sans zéros : si petit que soit ε positif, $n(r, f-a)$ devient et demeure supérieur, lorsque r croît indéfiniment, à $(1-\varepsilon)\,\mathrm{K}r$, K étant une constante ne dépendant que de a, $f(0)$ et $f'(0)$.*

On a une proposition analogue [3, *m*] pour les systèmes de deux fonctions méromorphes liées par une relation algébrique de genre un, mais avec, au second membre, $(1-\varepsilon)\,\mathrm{K}r^2$. Les valeurs exactes des constantes K sont d'ailleurs connues et fournies respectivement par la considération du logarithme népérien et de l'intégrale de première espèce.

Dans certaines questions, il peut y avoir intérêt [3, *m*] pour caractériser la croissance d'une fonction méromorphe, à introduire au lieu de l'expression $gm(r, f)$ l'expression $\Omega(r, f)$, définie comme l'aire du domaine riemannien engendrée par la fonction (à l'intérieur du cercle $|x| < r$) sur la sphère de Riemann dont l'aire est prise pour unité. On peut espérer arriver par là à comparer directement entre elles les expressions $n(r, f - a)$ [c'est-à-dire sans passer comme au numéro suivant par l'intermédiaire des expressions $N(r, f - a)$] et à les comparer aussi à r : les résultats seront plus précis.

Des propositions de M. Landau [18, *c* ; voir aussi 1, *b*], concernant les racines de polynomes à nombre limité de termes ou présentant certaines lacunes, ont été généralisées par divers auteurs, en particulier par M. Montel [23, *e*] dont les résultats comprennent notamment le suivant :

XLII. *L'équation à k termes :*

$$1 + x + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}} = 0$$

a toujours une racine dont le module est inférieur ou égal à k.

L'intérêt de ces théorèmes, au point de vue actuel, est qu'ils seront un jour compris dans une nouvelle algèbre supérieure dont un Chapitre sera la théorie algébrique du théorème de Picard-Landau.

II. — GÉNÉRALISATIONS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS A TROIS VALEURS LACUNAIRES.

52. Le théorème général de M. Picard, d'après lequel *une fonction méromorphe dans tout le plan prend une infinité de fois en tout trois valeurs distinctes quelconques* (qui d'après le théorème IX est strictement équivalent à l'*impossibilité pour une fonction à point essentiel isolé d'admettre dans le voisinage trois valeurs lacunaires*) devait donner naissance à la théorie des fonctions à trois valeurs incomplètement lacunaires, c'est-à-dire prises seulement un nombre fini de fois. Les principaux travaux sur ce sujet sont dus à M. Montel [23, *c*, *d*; voir aussi 1, *c*; 3, *d*]; pour les fonctions holomorphes a lieu le théorème suivant :

XLIII. *A tout entier positif q l'on peut faire correspondre un cercle, centré à l'origine, de rayon $R_q(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ où la* *fonction*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots,$$

supposée holomorphe, prend nécessairement au moins p fois la valeur zéro, ou au moins q fois la valeur un.

Les fonctions méromorphes donnent lieu à des propositions analogues. A ces théorèmes correspondent des critères de familles quasi normales, holomorphes et méromorphes.

Dès 1896, le théorème général de M. Picard avait donné naissance à une autre catégorie de recherches, se rapportant à la distribution des zéros d'une fonction entière ou méromorphe à croissance connue; les résultats obtenus successivement par MM. Borel [5, *b*], Blumenthal [2, *b*], Valiron [32, *c*, *d*], R. Nevanlinna [25, *e*, *f*, *j*], Collingwood [7 *bis*] sont exposés dans *F. E. F. M.* (Chap. V); la proposition la plus importante est actuellement la suivante [25, *j*, *k*]:

XLIV. *Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_q$ étant distincts, finis ou non ($q \geqq 3$) la fonction méromorphe $f(x)$ satisfait, sauf peut-être pour des valeurs de r d'étendue totale finie, à l'inégalité*

$$(q-2)\, gm(r, f) < (1+\varepsilon)\left[\sum_{1}^{q} \mathrm{N}(r, f-a_\nu) - \mathrm{N}_1(r, f)\right]$$

où ε tend vers zéro avec r, et où $\mathrm{N}_1(r, f)$ est formé avec les valeurs de x, où $f(x)$ est stationnaire (chacune d'elles comptée un nombre de fois égal à l'ordre du point de ramification correspondant), comme $\mathrm{N}(r, f)$ avec les zéros de f.

Ce résultat $\left[\text{où } \mathrm{N}(r, f-\infty) = \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right]$ s'établit par la méthode de dérivation (n° 44) grâce à un calcul particulier, utile dans d'autres circonstances, et auquel, même dans le cas où $q = 3$ [25, *f*], les résultats du n° 32 ne peuvent être substitués.

La traduction en termes finis du théorème XLIV est compliquée par la présence, à côté de la valeur initiale de la fonction, de celle de sa dérivée; il n'a pas encore été décidé si ce fait tient ou non au procédé de démonstration. Une méthode nouvelle de M. F. Nevanlinna [24 *bis*] pour établir XLIV, reposant sur l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur la sphère triponctuée, permettra peut-être de lever ce doute, et paraît d'ailleurs avoir une grande portée.

53. Au théorème [26, c], d'après lequel *deux fonctions uniformes et méromorphes dans le voisinage d'un point essentiel isolé commun ne peuvent être liées par une relation algébrique de genre supérieur à un*, correspond au point de vue finitiste le suivant [26, d; 3, b] :

XLV. *Si deux fonctions méromorphes dans un domaine sont liées par une relation algébrique de genre supérieur à un, chacune d'elles engendre une famille normale.*

De là découlent naturellement plusieurs relations en termes finis (limitant le rayon du cercle de méromorphie, bornant les variations des intégrales abéliennes de première espèce à l'intérieur d'un cercle déterminé, etc.), pour lesquelles le maximum de précision s'obtient à l'aide de la démonstration originale [26, d] par les fonctions fuchsiennes ou par l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur la surface de Riemann.

Le théorème XLV se déduit aussi très simplement [3, b] du théorème XXI grâce à la remarque que le domaine riemannien engendré par une intégrale de première espèce d'une courbe de genre supérieur à un ne contient que des cercles à un seul feuillet de rayon borné.

On peut également employer la méthode de dérivation et les expressions de MM. Nevanlinna; à cet effet, on peut, soit utiliser les intégrales abéliennes [3, l], soit traiter directement la relation algébrique donnée. Dans ce dernier objet, on observe que, pour une courbe hyperelliptique, le théorème XLV est un simple corollaire du théorème XLVI ci-dessous; et le *principe de continuité topologique* [3, m] rend alors certaine la possibilité d'un mode de démonstration analogue, mais s'appliquant à une courbe quelconque.

Le théorème XLIV, traduit en termes finis, entraîne la conséquence suivante [3, j] (les résultats de MM. Carathéodory [7, a] et Montel [23, b] sur ce sujet ont été généralisés par MM. Valiron [32, c, d] et R. Nevanlinna [25, j]) :

XLVI. *Soient q nombres distincts (finis ou non)*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_q (q > 2)$$

affectés respectivement de coefficients entiers positifs (finis ou non) $m_1, m_2, \ldots, m_q$ satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_q} < q - 2.$$

Alors les fonctions $f(x)$, méromorphes dans un domaine, et telles que les équations $f(x) = a_q$ n'aient jamais que des racines d'ordre de multiplicité au moins égal à m_q, engendrent une famille normale.

Si un système de deux fonctions méromorphes dans un domaine, liées par une relation déterminée de genre un, est stationnaire toutes les fois qu'il vient en un point déterminé de la surface de Riemann, chacune des deux fonctions engendre une famille normale.

Au point de vue indéfini ont lieu à ce sujet des théorèmes analogues au théorème XLIV lui-même [32, *c*, *d*; 25, *j*].

Une démonstration analytique féconde du théorème de Picard-Landau et des théorèmes analogues serait celle reposant sur la résolution du problème suivant : *Soit une riemannienne indéfinie simplement connexe, appliquée sur une surface fermée de genre un, un tore par exemple, ne pouvant se ramifier qu'en un point déterminé du tore, et toujours simplement ; à quelle condition est-elle représentable conformément, non sur un cercle, mais sur un plan indéfini?*

III. — Les systèmes de plusieurs fonctions d'une variable

54. Les propositions de la présente section sont, pour une bonne part, inédites.

La démonstration du théorème de Picard-Landau donnée au n° 43, basée sur la considération du produit $f(f-1)$, s'applique immédiatement à l'étude d'un système de deux fonctions entières sans zéros (exponentielles) et donne ainsi (après transformation homographique) :

XLVII. *Un système de deux fonctions méromorphes d'une variable, admettant pour droites lacunaires les trois côtés d'un triangle, s'approche indéfiniment de l'un au moins des sommets du triangle.*

Cette proposition pourra sans doute être considérablement précisée au point de vue quantitatif et étendue aux systèmes de p fonctions à $p+1$ variétés linéaires lacunaires; elle permettra alors d'établir sans dérivation le théorème XLVIII qui, comme les autres théorèmes de la présente section, n'a été établi jusqu'ici que par la méthode de dérivation.

Un théorème de M. Borel sur les systèmes de fonctions entières [5, *b*] s'étendant d'ailleurs de lui-même aux systèmes de fonctions à point essentiel isolé [3, *c*] se généralise en termes finis sous forme d'une vaste théorie [3, *k*] où les résultats les plus complets sont encore à trouver; bornons-nous à l'énoncé suivant :

XLVIII. *Soient $f(x)$, $g(x), \ldots, k(x)$, n fonctions d'une variable x, holomorphes dans le cercle-unité, ne s'y annulant pas et dont la somme n'y devient pas égale à l'unité ; leurs valeurs initiales a_0, $b_0, \ldots, e_0$, et les sommes d'un nombre quelconque de ces valeurs initiales sont supposées différentes de zéro et de un. Alors, pour $|x| \leqq \rho < 1$, ces fonctions admettent en valeur absolue une borne supérieure et inférieure dépendant uniquement des valeurs initiales $(a_0, b_0, \ldots, e_0)$ et de ρ.*

Le cas où les valeurs initiales sont quelconques donne lieu à un théorème plus général; pour $n = 2$ a été possible une étude particulièrement approfondie mais qui est encore loin d'épuiser la question.

M. Montel [23, *f*], à propos de cette théorie, a commencé la classification des familles de systèmes de fonctions d'une variable.

55. Comme pour une seule fonction ont lieu des généralisations étendues. Ainsi [3, *l*] :

XLIX. *Soit une courbe de genre p à modules généraux, et soit un groupe de points de cette courbe, en nombre n inférieur à p, fonction méromorphe d'une variable t inférieure à un en module, c'est-à-dire tel que les fonctions symétriques des coordonnées de ses points soient des fonctions méromorphes de t dans le cercle-unité; alors la variation entre deux points intérieurs à ce cercle de la somme abélienne, relative à une intégrale de première espèce déterminée, correspondant aux n points du groupe, admet une borne supérieure ne dépendant que de ces deux points.*

Pour le théorème XLVIII, le cas où $n = 2$ est en somme celui du plan projectif affecté de quatre droites lacunaires, en position générale. Or, convenons de dire qu'une droite est *d'indice m au sens strict*, pour un système de deux fonctions méromorphes lorsque la courbe décrite par le point représentatif a, partout où elle rencontre la droite, m points infiniment voisins communs avec elle, ou un nombre multiple de m; *d'indice m, au sens large*, si elle a simplement en tout point de rencontre, au moins m points infiniment voisins communs; par exemple en un point commun à une droite d'indice 2 et à une droite d'indice 2 ou 3, on a en général un rebroussement ordinaire. Au sujet des systèmes de droites d'indices donnés, on connaît seulement le théorème suivant :

L. *Dans le plan projectif affecté de quatre droites en position générale, d'indice au sens strict égal à quatre, toutes les courbes lieux de points à coordonnées méromorphes sont algébriques et se répartissent en une infinité dénombrable de familles à un paramètre de courbes elliptiques, chaque famille comprenant un nombre fini d'unicursales.*

Dans le plan projectif affecté de quatre droites en position générale, d'indices au sens large égaux ou supérieurs à cinq, les seules courbes lieux de points à coordonnées méromorphes sont les trois diagonales du quadrilatère complet.

La dernière partie de cet énoncé s'applique à des fonctions d'une variable liées par l'équation $X^5 + Y^5 + Z^5 - 1 = 0$. Alors (principe de continuité topologique) :

LI. *Une surface sans singularités, d'ordre égal ou supérieur à cinq, possède au plus un nombre fini de courbes (nécessairement algébriques) lieux de points à coordonnées méromorphes, et la surface la plus générale du même ordre n'en possède pas.*

Une droite lacunaire du plan projectif est d'indice infini. Or, on peut considérer plus généralement des *courbes lacunaires :*

LII. *Dans le plan projectif affecté d'une courbe lacunaire consistant en une cubique indécomposable sans point double, toutes les courbes lieux de points à coordonnées méromorphes sont algébriques unicursales et se répartissent en une infinité dénombrable de familles à un paramètre.*

Dans le plan projectif affecté d'une courbe lacunaire algébrique d'ordre supérieur ou égal à quatre, pouvant être composée, mais n'admettant que des points multiples à tangentes distinctes, les courbes lieux de points à coordonnées méromorphes sont, quand par hasard elles existent, algébriques unicursales, et se répartissent en un nombre fini de familles à zéro ou un paramètre.

Aux théorèmes L, LI et LII correspondent naturellement des propositions en termes finis et des critères de familles normales, au sens de M. Montel [23, f].

Observons qu'une courbe $y = P(x)$, où P est un polynome (ou même une fonction entière), est lacunaire pour le système de fonctions entières $x = f(t)$; $y = P[f(t)] + e^{g(t)}$; la cubique $y = x^2 + \frac{1}{x}$, pour le système de fonctions entières $x = e^{f(t)}$; $y = e^{2f(t)} + e^{-f(t)} + e^{g(t)}$. La classification des courbes lacunaires sera peut-être facilitée par la considération des groupes continus finis de transformations homographiques ou crémoniennes du plan.

Au lieu de courbes lacunaires, on pourra considérer aussi des courbes d'indice fini.

56. Les théorèmes précédents ouvrent la voie à des recherches sur les fonctions de plusieurs variables. Par exemple on définit immédiatement l'indice d'une droite par rapport à un système de deux fonctions méromorphes de deux variables en considérant les deux variables u et v comme fonctions holomorphes d'une seule t; alors la première partie, convenablement précisée, du théorème L donne le suivant :

LIII. *Soient deux fonctions de deux variables u et v, méromorphes à l'intérieur de l'hypersphère : $u\bar{u} + v\bar{v} = R^2$ et pour lesquelles quatre droites du plan projectif ont un indice au sens strict égal à quatre. Le rayon R de l'hypersphère admet alors une borne supérieure dépendant uniquement des valeurs initiales des deux fonctions et de leurs quatre dérivées premières (le jacobien à l'origine étant supposé non nul).*

Ceci peut s'énoncer en considérant la relation

$$X^4 + Y^4 + Z^4 - 1 = 0.$$

Alors (principe de continuité topologique) :

LIV. *La surface sans singularités, d'ordre égal ou supérieur à quatre, n'est pas uniformisable par les fonctions méromorphes.*

Toutes ces théories, pour leur édification complète, demandent encore un grand nombre de recherches.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. Bieberbach (L.). — *a.* Ueber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln (*Berl. Sitzgsber.*, t. 38, 1916, p. 940-955).

— *b.* Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen (*Encycl. d. Math. Wiss.*, II, C. 4, Leipzig, 1921).

— *c.* Ueber die Verteilung der Null-und Einsstellen analytischer Funktionen (*Math. Ann.*, t. 85, 1922, p. 142-148).

2. Blumenthal (O.). — *a.* Sur le mode de croissance des fonctions entières (*Bull. de la Soc. math.*, 1907).

— *b. Principe de la théorie des fonctions entières de genre infini* (Paris, 1910).

3. Bloch (A.). — *a.* Démonstration directe de théorèmes de M. Picard (*C. R. de l'Ac. des Sc.*, t. 178, 1924, p. 1593).

— *b.* Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 178, 1924, p. 2051 ; *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1925).

— *c.* Sur un théorème de M. Borel et sur une généralisation de la théorie de Picard-Landau (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 179, 1924, p. 666).

— *d.* Sur les fonctions prenant plusieurs fois dans un cercle les valeurs 0 et 1 (*Ibid.*, p. 954).

— *e.* Sur un cercle où une fonction holomorphe prend au moins deux fois en tout les valeurs 0 et 1 (*Ibid.*, t. 180, 1925, p. 36).

— *f.* Sur les fonctions à point essentiel isolé (*Congrès de l'Assoc. franç. pour l'Avanc. des Sc.*, Liége, 1924).

— *g.* Sur un point de la théorie des fonctions à trois valeurs lacunaires (*Congrès de l'Assoc. franç. pour l'Avanc. des Sc.*, Grenoble, 1925).

— *h.* Sur la croissance d'une fonction de fonction entière (*Ibid.*, Grenoble, 1925).

— *i.* Sur la non-uniformisabilité par les fonctions méromorphes des variétés algébriques les plus générales (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 181, 1925, p. 276).

— *j.* Quelques théorèmes sur les fonctions entières et méromorphes d'une variable (*Ibid.*, t. 181, 1925, p. 1123; t. 182, 1926, p. 367).

— *k.* Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires (*Ann. de l'Éc. Norm.*, date de publication inconnue).

— *l.* Sur les systèmes de fonctions uniformes liées par l'équation d'une variété algébrique dont l'irrégularité dépasse la dimension (*Journal de Mathématiques*, 9e série, t. 5, 1926, p. 19-66).

— *m.* La conception actuelle de la théorie des fonctions entières et méromorphes (*Enseignement mathématique*, 1926).

4. Bohr (H.) et Landau (E.). — Ueber das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Nähe der Geraden $s = 1$ (*Gott. Nachr.*, 1910, p. 303-330).

5. Borel (E.). — *a.* Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 122, 1896, p. 1045-1048).

— *b.* Sur les zéros des fonctions entières (*Acta mathematica*, t. 20, 1897).

— *c.* *Leçons sur les fonctions entières*, 2e édition, Paris, 1921.

6. Boutroux (P.). — Sur quelques propriétés des fonctions entières (Thèse, *Acta mathematica*, t. 26, 1903).

7. Carathéodory (C.). — *a.* Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 141, 1905, p. 1213).

— *b.* Ueber den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen (*Math. Ann.*, t. 64, 1907, p. 93-115).

7 *bis.* Collingwood (E.). — Sur quelques théorèmes de M. R. Nevanlinna (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 179, 1924, p. 955).

8. Denjoy (A.). — Sur les produits canoniques d'ordre infini (Thèse, *Journal de Mathématiques*, 1910).

9. Faber (G.). — Neuer Beweis eines Kœbe-Bieberbachschen Satzes über konforme Abbildung (*Münch. Sitzgsber.*, 1916).

10. Fabry (E.). — Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série, et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux (*Ann. Éc. Norm.*, t. 13, 1896).

11. Goursat (E.). — *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, 3e édition (Paris, 1919).

12. Hadamard (J.). — *a.* Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor (Thèse, *Journal de Mathématiques*, t. 8, 1892).

— *b.* Sur les fonctions entières de la forme $e^{G(x)}$ (*C. R. de l'Ac. des Sc.*, t. 114, 1892, p. 1053).

— *c.* Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann (*Journal de Mathématiques*, t. 9, 1892).

— *d.* Sur les fonctions entières (*Bull. de la Soc. math.*, t. 24, 1896, p. 186-187).

— *e.* *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Paris, 1901).

— *f. Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard*, 2e Partie (Paris, 1912).

13. Hardy (G.-H.). — The mean value of the modulus of an analytic function (*Proc. London Math. Soc.*, 1915).

14. Hurwitz (A.). — Ueber die Anwendung der elliptischen Modulfunktion auf einen Satz der allgemeinen Funktionentheorie (*Viertelj. der Naturf. Ges. Zürich*, 1904)

15. Jensen (J.-L.). — *a.* Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions (*Acta mathematica*, t. 22, 1899, p. 359-364).

— *b.* Undersgelser over en Klasse fundamentale Uligheder i de analytiske Funktioners Theori (*D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv og Mathematisk Afd.*, 8 Raekke, II, 3, 1916, p. 203-228).

16. Julia (G.). — *a.* Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz (*Acta mathematica*, 42 : 4, 1920, p. 349-355).

— *b.* Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières et méromorphes (*Ann. Éc. Norm.*, 3 Mémoires; 1919-1920-1921).

— *c. Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé* (Paris, 1924).

17. Koebe (P.). — Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe (*Gött. Nachr.*, 1909, p. 68-76).

18. Landau (E.). — *a.* Ueber eine Verallgemeinerung des Picard schen Satzes (*Berl. Sitzgsber.*, 1904, p. 1118-1134).

— *b. Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionen theorie* (Berlin, 1916).

— *c.* Ueber den Picard'schen Satz (*Viertelj. naturf. Ges. Zürich.*, 1906).

— *d.* Zum Koebeschen Verzerrungssatz (*Rendiconti del Circ Math. di Palermo*, t. 46, 1922, p. 347-348).

19 Lévy (P.). — Remarques sur le théorème de M. Picard (*Bull. de la Soc. math.*, t. 40, 1912, p. 25).

20. Lindelöf (E.) et Phragmen (E.) — Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier (*Acta mathematica*, t. 31, 1908, p. 381-406).

21. Lindelöf (E.). — Sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions monogènes (*Congrès des Math. à Stockholm*, 1909).

22. Milloux (H.). — *a.* Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières (*Journal de Mathématiques*, 9e série, t. 3, 1924, p. 345-401).

— *b.* Sur le théorème de Picard (*Bull. de la Soc. math.*, t. 53, 1925, p. 181).

23. Montel (P.). — *a. Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe* (Paris, 1910).

— *b.* Sur les familles normales de fonctions analytiques (*Ann. de l'Éc. Norm.*, 1916).

— *c.* Sur les familles quasi normales de fonctions holomorphes (*Mém. de l'Acad. Roy. de Belgique; classe des sciences*, 2e série, t. 6, 1922, p. 1-41).

— *d.* Sur les familles quasi normales de fonctions analytiques (*Bull. de la Soc. math.*, t. 52, 1922, p. 85-113).

— *e.* Sur les modules des zéros des polynomes (*Ann. Éc. Norm.*, t. 40, 1923, p. 134).

— *f.* Sur les familles complexes (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 179, 1924, p. 660).

24. Nevanlinna (F. et R.). — Ueber die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer analytischen Stelle oder Linie (*Acta Soc. Fennicæ*, t. 50, nº 5, 1922, p. 1-46.

24 *bis*. Nevanlinna (F.). — Ueber die Werteverteilung einer analytischen Funktion in der Umgebung einer isolierten wesentlich singularen Stelle (6e *Congr. des Math. Scand.*, Copenhague, 1925, p. 97-107).

25. Nevanlinna (R.). — *a.* Ueber beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen (*Ann. Acad. Scient. Fennicæ*, t. 13, nº 1, 1919, p. 1-71).

— *b.* Ueber die schlichten Abbildungen des Einheitskreises (*Oev. av. Finska Vet. Soc. Förh.*, t. 62, 1919-1920, nº 7, p. 1-14).

— *c.* Kriterien über die Randwerte beschränkter Funktionen (*Math. Zeitschrift*, t. 13, 1922, p. 1-9).

— *d.* Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem (*Ann. Acad. Scient. Fennicæ*, t. 18, nº 5, 1922, p. 1-53).

— *e.* Sur les fonctions méromorphes (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 178, 1924, p. 367).

— *f.* Untersuchungen über den Picard'schen Satz (*Acta Soc. Fennicæ*, t. 50, nº 6, 1924).

— *g.* Ueber eine Klasse meromorpher Funktionen (*Math. Ann.*, t. 92, 1924, p. 146-154).

— *h.* Ueber den Picard-Borelschen Satz in der Theorie der ganzen Funktionen (*Ann. Acad. Scient. Fennicæ*, t. 23, nº 5, 1924).

— *i.* Beweis des Picard-Landauschen Satzes (*Göttinger Nachrichten*, 6 juin 1924).

— *j.* Zur Theorie der meromorphen Funktionen (*Acta mathematica*, t. 46, p. 1-99).

— *k.* Neuere Untersuchungen über den Picardschen Satz (6e *Congr. des Math. Scand.*, Copenhague, 1925, p. 77-95).

25 *bis*. Ostrowski (A.). — *a.* Ueber Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes (*Math. Zeitschrift*, t. 24, 1925, p. 215-258).

— *b.* Ueber den Schottkyschen Satz und die Borelschen Ungleichungen (*Berl. Sitzgsber.*, 1925, p. 471-484).

26. Picard (E.). — *a.* Sur une propriété des fonctions entières (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 88, 1879, p. 1024).

— *b.* Sur la décomposition en facteurs primaires des fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels (*C. R. de l'Ac. des Sc.*, t. 92, 21 mars 1881).

— *c.* Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une relation algébrique (*Acta math.*, t. 11, 1887, p. 1-12).

— *d.* Sur les couples de fonctions uniformes d'une variable correspondant aux points d'une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité (*Rendic. del Circ. Math. di Palermo*, t. 33, 1912, p. 254-258).

27 PICK (G.). — *a.* Ueber den Koebeschen Verzerrungssatz (*Leipziger Berichte*, t. 68, 1916, p. 58-64).

— *b.* Ueber beeschränkte Funktionen mit vorgeschriebenen Wertzuordnungen (*Ann. Acad. Scient. Fennicæ*, t. 15, nº 3, 1920, p. 1-17).

28. RIESZ (F.). — *a. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913).

— *b.* Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion (*Math. Zeitschrift*, t. 18, 1923, p. 87-95).

29. SCHOTTKY (F.). — Ueber den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen (*Berl. Sitzgsber.*, 1904, p. 1244-1263).

30. SCHUR (J.). — Ueber Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (*Journal de Crelle*, t. 147, p. 205-232; t. 148, p. 122-145).

31. TOEPLITZ (O.). — Ueber die Fouriersche Entwickelung positiver Funktionen (*Rendic. del Circ. Mat. di Palermo*, t. 32, 1911, p. 191-192).

32. VALIRON (G.). — *a.* Les théorèmes généraux de M. Borel dans la théorie des fonctions entières (*Ann. Éc. Norm.*, t. 37, 1920).

— *b.* Recherches sur le théorème de M. Picard (*Ibid.*, t. 38, 1921).

— *c.* Recherehes sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions entières (*Ibid.*, t. 39, 1922).

— *d. Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, 1923).

— *e.* Remarque sur un théorème de M. Julia (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. 49, p. 68-73).

— *f.* Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable (*Mémorial des Sciences mathématiques*, Paris, 1925).

— *g.* Supplément à la note « Remarque sur un théorème de M. Julia (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. 49, p. 270-275).

— *h.* Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes (*Acta mathematica*, t. 47, p. 117-142).

— *i.* Sur les fonctions méromorphes sans valeurs asymptotiques (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 182, 1926, p. 1266).

33. VAROPOULOS (Th.). — Sur quelques propriétés des fonctions croissantes (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 173, 1921, p. 515, 569, 693, 963).

34. WIMAN (A.). — *a.* Ueber den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe (*Acta mathematica*, t. 37, 1914).

— *b.* Ueber den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Betrage bei gegebenen Argumente der Funktion (*Acta mathematica*, t. 41, 1918).

ERRATA.

Pages 17, 18, 19, 20, diminuer d'une unité les numéros des formules (3) à (13); les inégalités (14) doivent être numérotées respectivement (13) et (14).

Page 20, n° 20, *lire* Du théorème XIII résulte...

Dans les seconds membres des inégalités, *lire* respectivement $[P(R)]^{\nu}$, $\log P(R)$.

Page 26, ligne 6, *lire* P. Boutroux [6] l'étudia...

Page 54, théorème LIV, *lire* La surface la plus générale *au lieu de :* La surface sans singularités...

TABLE DES MATIÈRES.