R. LAGRANGE

Calcul différentiel absolu

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 19 (1926)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1926__19__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC., DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE XIX

Calcul différentiel absolu

PAR M. R. LAGRANGE
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ABSOLU

Par M. R. LAGRANGE

INTRODUCTION.

Le calcul différentiel absolu est de création relativement récente. Si les principes essentiels se trouvent dans un mémoire fondamental de Christoffel paru dans le *Journal de Crelle* en 1869, c'est à Ricci et Levi-Civita que l'on doit l'érection des résultats de Christoffel en un mode général de calcul. C'est également grâce à ces deux géomètres que fut mise en évidence la fécondité de ce nouvel algorithme, dans leur mémoire paru en 1900 dans les *Mathematische Annalen*.

Il faut cependant reconnaître que, même chez ces deux auteurs, l'idée fondamentale n'était pas utilisée dans toute sa généralité; le problème à résoudre est celui du changement des variables; mais, jusqu'aux travaux récents de Eddington, Schouten et Cartan, on se borna au cas particulier où s'introduit une forme quadratique invariante, et l'on peut dire que cette particularité, d'importance fondamentale dans les applications à la géométrie et à la physique, masquait l'idée générale. La généralisation apparaît déjà, cependant, dans les travaux de Weyl, où est mise en évidence la notion de connexion affine.

Afin de faire ressortir les idées si simples qui sont à la base du calcul différentiel absolu, j'aborde la question dès le début dans toute sa généralité, comme un problème de pure analyse, et les considérations géométriques importantes qu'il n'est guère possible de passer sous silence sont exposées comme une illustration des résultats analytiques.

Dans cet esprit, le calcul différentiel absolu des variétés riemanniennes ne pouvait qu'être signalé avec ses particularités fondamentales. J'ai adopté le nom de Christoffel pour ce qu'on désigne généralement par « Calcul de Ricci et Levi-Civita », tout d'abord car la différentiation covariante relative à une forme quadratique de différentielles est définie et déjà utilisée par Christoffel comme moyen de calcul, et aussi pour réserver le nom de « calcul de Ricci et Levi-Civita » à la méthode des congruences orthogonales, créée et utilisée par ces deux auteurs, et dont, à mon avis, l'importance et la simplicité n'ont pas toujours été mises suffisamment en évidence dans les ouvrages consacrés au calcul différentiel absolu.

L'ouvrage se termine par les formules fondamentales relatives à une variété plongée dans une variété à connexion métrique, qu'il m'a paru bon de donner ici, étant données la généralité de la question et son analogie de caractère avec le problème initial.

CHAPITRE I.

CALCUL TENSORIEL.

1. Introduction. — L'étude quantitative d'un fait concret variable nécessite tout d'abord le choix d'éléments dont la mesure permette de caractériser chaque état de ce fait. De tels éléments constituent un système de coordonnées; un état particulier du fait, ou l'ensemble des nombres qui le caractérisent dans un système déterminé de coordonnées, s'appelle un point; enfin, l'ensemble de tous les états, ou points, constitue une variété.

Grâce à l'emploi du calcul, l'étude de tout phénomène variable est assimilable à l'étude d'une variété géométrique, et c'est au langage géométrique que l'on emprunte la nomenclature et les représentations dont on a besoin.

Les éléments du calcul dépendent et de la nature du phénomène et du choix des coordonnées; les lois auxquelles obéit le phénomène, traduisant des propriétés intrinsèques, doivent s'exprimer par des systèmes d'équations indépendants du choix de ces coordonnées.

Un invariant est tout élément, ou système d'éléments, dont les valeurs numériques, résultant d'une suite déterminée de calculs, sont indépendantes des coordonnées utilisées. Toute variété V possède un nombre entier invariant, savoir le nombre minimum des coordonnées qui caractérisent ses différents états; ce nombre n est le nombre des dimensions de V.

Étant donnés un point, de coordonnées $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ dans un premier système, ses coordonnées $(x'_1 x'_2 \ldots x'_n)$ dans un autre système sont fonctions des $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces fonctions caractérisent le changement des coordonnées. On les suppose dérivables, et l'on suppose également, par réciprocité, que le déterminant fonctionnel ne s'annule en aucun point du domaine de variation considéré.

2. Tenseurs. — Les tenseurs sont des éléments mathématiques qui, sans être invariants, permettent de former aisément des invariants ou des systèmes invariants d'équations. Avant de les définir [1], remarquons que le calcul introduit des quantités, fonctions du point de la variété, et affectées d'un certain nombre d'indices (les coordonnées x_i, les dérivées d'une fonction invariante, etc.); dans un ensemble de telles quantités, dotées de m indices pouvant prendre toutes les valeurs 1, 2, ..., n, le nombre d'éléments symboliquement distincts est n^m; un tel ensemble s'appelle système m^{uple}, ou, plus brièvement un m^{uple}.

Étant donnés deux systèmes de coordonnées $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ et $x'_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$, posons

$$\theta_i^\lambda = \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_i}, \qquad \theta_\lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\lambda}.$$

Les θ_i^λ et θ_λ^i sont évidemment réciproques [2] :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \theta_i^\lambda \theta_\mu^i = \varepsilon_\mu^\lambda, \qquad \varepsilon_\mu^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq \mu. \\ 1 & \text{si } \lambda = \mu \end{cases}$$

Soient $X_{i_1 i_2 \ldots i_m}(x_1 x_2 \ldots x_n)$ les éléments d'un m^{uple}, résultant, dans le premier système de coordonnées, d'une suite déterminée d'opérations; dans le deuxième système de coordonnées, les mêmes opé-

---

(1) La définition développée ici est la définition restreinte. D'une manière plus générale, un tenseur sera tout ensemble d'éléments qui, dans un changement des variables, subissent une transformation, généralement linéaire, dont les coefficients ne sont fonctions que des valeurs des anciennes et des nouvelles variables, et non de celles des éléments eux-mêmes.

(2) Nous profitons de l'emploi d'indices littéraux pour représenter les éléments de ces deux systèmes réciproques par la même lettre θ.

rations conduisent aux éléments $X'_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m}(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)$ d'un nouvel m^{uple}.

Les $X_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ constituent un tenseur covariant m^{uple} si les valeurs des $X'_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m}$ et des $X_{i_1 i_2 \ldots i_m}$, au même point, se déduisent les unes des autres par les relations linéaires

$$X'_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m}{}_1^n \theta^{i_1}_{\lambda_1}\theta^{i_2}_{\lambda_2}\ldots\theta^{i_m}_{\lambda_m} X_{i_1 i_2 \ldots i_m}.$$

Ils constituent un tenseur contrevariant m^{uple}, et nous les affecterons alors d'indices supérieurs pour les distinguer des covariants, si l'on a au même point

$$X'^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m}{}_1^n \theta^{\lambda_1}_{i_1}\theta^{\lambda_2}_{i_2}\ldots\theta^{\lambda_m}_{i_m} X^{i_1 i_2 \ldots i_m}.$$

Un tenseur mixte est un système, covariant par certains indices (que l'on place inférieurement), et contrevariant par d'autres indices (écrits supérieurement); les relations linéaires entre les anciennes et les nouvelles valeurs sont de la forme

$$X'^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_m \\ k_1 k_2 \ldots k_p}}{}_1^n \theta^{i_1}_{\lambda_1}\ldots\theta^{i_m}_{\lambda_m}\theta^{\mu_1}_{k_1}\ldots\theta^{\mu_p}_{k_p} X^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{i_1 i_2 \ldots i_m}.$$

Un tenseur m fois covariant et p fois contrevariant sera encore dit $\binom{p}{m}^{\text{uple}}$. Un invariant est un $\binom{0}{0}^{\text{uple}}$. Les différentielles dx_i forment un $\binom{1}{0}^{\text{uple}}$; nous les écrirons dx^i; les relations de contrevariance

$$dx'^{\lambda} = \sum_i{}_1^n \theta^{\lambda}_i\, dx^i$$

sont d'ailleurs les équations de définition des θ^{λ}_i. Les dérivées $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ d'un invariant constituent un $\binom{0}{1}^{\text{uple}}$. Nous verrons plus loin des exemples de tenseurs mixtes.

Il résulte de la forme linéaire des relations précédentes que tout système d'équations obtenu en annulant les éléments d'un tenseur a une signification invariante.

3. Algèbre tensorielle. — Étant donnés plusieurs systèmes d'éléments dotés d'indices, les uns inférieurs, les autres supérieurs, on peut en déduire de nouveaux systèmes par trois opérations algébriques fondamentales : l'addition, la multiplication, la composition. La somme de deux systèmes de même nature $X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p}$, $Y_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p}$ est le système dont les composantes sont

$$Z_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} = X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} + Y_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p}.$$

Le produit de deux systèmes quelconques $X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p}$, $Y_{j_1\ldots j_r}^{h_1\ldots h_q}$ est le système

$$Z_{i_1\ldots i_m j_1\ldots j_r}^{k_1\ldots k_p h_1\ldots h_q} = X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} Y_{j_1\ldots j_r}^{h_1\ldots h_q}.$$

En particulier le produit d'un système à indices tous inférieurs, et d'un système à indices tous supérieurs, est un système mixte.

Inversement on peut déduire de tout système mixte, par l'opération appelée contraction, un nouveau système n'ayant que des indices de même nature. Un système contracté de $X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p}$ est un système $\binom{p-1}{m-1}^{\text{uple}}$ dont les composantes sont

$$Z_{i_1\ldots i_{r-1} i_{r+1}\ldots i_m}^{k_1\ldots k_{s-1} k_{s+1}\ldots k_p} = \sum_i{}_1^n X_{i_1\ldots i_{r-1} i\, i_{r+1}\ldots i_m}^{k_1\ldots k_{s-1} i\, k_{s+1}\ldots k_p}.$$

La contraction supprime un indice inférieur et un indice supérieur; on dit qu'il y a eu saturation de ces deux indices. Le système obtenu dépend du choix des indices saturés. L'opération peut se répéter tant que tous les indices d'une même nature n'ont pas été saturés; les systèmes obtenus par ces contractions successives s'appellent également les contractés du système primitif.

On appelle composés de deux systèmes quelconques les contractés de leur produit; la composition présente donc la même indétermination que la contraction; cette opération-ci n'en est d'ailleurs qu'un cas particulier.

Par exemple, des deux systèmes X_{ij}^k, Y_h^l, on peut déduire les composés

$$Z_{ij}^l = \sum_k X_{ij}^k Y_k^l,$$

$$U_{ij}^l = \sum_k X_{ik}^l Y_j^k,$$

$$V_i = \sum_{jk} X_{ij}^k Y_k^j, \quad \text{etc.}$$

Mais toutes les formes que peut prendre la composition dérivent du même principe, celui de la saturation des indices.

Enfin ces trois opérations s'appliquent à plus de deux systèmes par le même algorithme qu'en algèbre.

Lorsqu'on effectue ces opérations sur des tenseurs, les systèmes obtenus sont encore des tenseurs. La vérification est immédiate. En particulier une composition où tous les indices sont saturés fournit un invariant.

Un système m^{uple}, qui, composé avec tout tenseur p^{uple}, donne un tenseur $(m-p)^{\text{uple}}$, est lui-même un tenseur. Par exemple, la covariance m^{uple} du tenseur $X_{i_1\ldots i_m}$ est équivalente à l'invariance de la forme de différentielles

$$\sum_{i_1\ldots i_m} X_{i_1\ldots i_m} dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_m}.$$

Remarque. — Dans le calcul tensoriel, ou, d'une manière générale, dans le calcul des m^{uples}, un signe Σ désigne habituellement une composition, les indices de sommation étant ceux qui apparaissent à la fois comme indice supérieur et comme indice inférieur; on ne crée alors aucune ambiguïté en s'abstenant de les écrire en indice du signe Σ. On se dispense même d'indiquer ce signe Σ, en convenant, sauf avis contraire, d'effectuer toutes les saturations indiquées par les couples d'indices égaux.

4. Différentiation des tenseurs. — La différentiation d'un m^{uple} donne un nouveau m^{uple}; mais si le système différentié est un tenseur, il n'en est pas de même, en général, du système obtenu. Cela tient à ce que la différentiation fait intervenir les dérivées des θ_i^λ. La différentiation d'un tenseur quelconque ne fournit un tenseur que si les θ_i^λ sont des constantes, c'est-à-dire pour les changements de variables du groupe linéaire. Cette remarque évidente joue un rôle essentiel dans l'algorithme du calcul différentiel absolu.

La différentiation s'applique aux trois opérations algébriques fondamentales, suivant les identités formelles suivantes, aisément vérifiables :

$$(2)\quad \begin{cases} d\left(X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} + Y_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p}\right) = dX_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} + dY_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p}, \\ d\left(X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} \cdot Y_{j_1\ldots j_r}^{h_1\ldots h_q}\right) = X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} dY_{j_1\ldots j_r}^{h_1\ldots h_q} + Y_{j_1\ldots j_r}^{h_1\ldots h_q} dX_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p}, \\ d\left(X_{i_1\ldots i_m h_1\ldots h_q}^{k_1\ldots k_p} Y_{j_1\ldots j_r}^{h_1\ldots h_q}\right) = X_{i_1\ldots i_m h_1\ldots h_q}^{k_1\ldots k_p} dY_{j_1\ldots j_r}^{h_1\ldots h_q} + Y_{j_1\ldots j_r}^{h_1\ldots h_q} dX_{i_1\ldots i_m h_1\ldots h_q}^{k_1\ldots k_p}. \end{cases}$$

Remarquons à ce sujet que les deux dernières équations, bien que de forme identique, n'ont pas la même signification; la dernière contient en effet les indices de sommation $h_1, h_2, \ldots, h_q$, et le signe Σ y est sous-entendu conformément à notre convention.

CHAPITRE II.

PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ABSOLU.

1. Différentiation tensorielle. — Les propriétés formelles de la différentiation, que traduisent les identités (2), appartiennent également à des opérateurs linéaires de la forme

$$\begin{aligned}(3)\qquad \mathrm{A}\left(\mathrm{X}_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{k_1 k_2 \ldots k_p}\right) = {} & \mathrm{A}_{i_1}^{r}\,\mathrm{X}_{r i_2 \ldots i_m}^{k_1 k_2 \ldots k_p} + \mathrm{A}_{i_2}^{r}\,\mathrm{X}_{i_1 r \ldots i_m}^{k_1 k_2 \ldots k_p} + \ldots \\ & + \mathrm{B}_{r}^{k_1}\,\mathrm{X}_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{r k_2 \ldots k_p} + \mathrm{B}_{r}^{k_2}\,\mathrm{X}_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{k_1 r \ldots k_p} + \ldots + \mathrm{B}_{r}^{k_p}\,\mathrm{X}_{i_1 \ldots i_m}^{k_1 k_2 \ldots r}.\end{aligned}$$

Un tel opérateur est une somme de compositions du système considéré avec les systèmes à deux indices A_i^k, B_i^k. On vérifie immédiatement que, quels que soient les $2n^2$ éléments A_i^k, B_i^k, cet opérateur se comporte formellement comme la différentiation envers la somme et le produit des systèmes.

Par contre, cette opération n'est pas nécessairement permutable avec la contraction. On a, en effet,

$$\mathrm{A}\left(\sum_{h=1}^{n} \mathrm{X}_{i_1 \ldots i_m h}^{k_1 \ldots k_p h}\right) = \sum_{h,r}{}_{1}^{n} \mathrm{A}_{i_1}^{r}\,\mathrm{X}_{r \ldots i_m h}^{k_1 \ldots k_p h} + \ldots + \sum_{h,r}{}_{1}^{n} \mathrm{B}_{r}^{k_p}\,\mathrm{X}_{i_1 \ldots i_m h}^{k_1 \ldots r h},$$

tandis que

$$\begin{aligned}(4)\qquad \sum_{h=1}^{n} \mathrm{A}\left(\mathrm{X}_{i_1 \ldots i_m h}^{k_1 \ldots k_p h}\right) = {} & \sum_{h,r}{}_{1}^{n} \mathrm{A}_{i_1}^{r}\,\mathrm{X}_{r \ldots i_m h}^{k_1 \ldots k_p h} + \ldots + \sum_{h,r}{}_{1}^{n} \mathrm{B}_{r}^{k_p}\,\mathrm{X}_{i_1 \ldots i_m h}^{k_1 \ldots r h} \\ & + \sum_{h,r}{}_{1}^{n} \left(\mathrm{A}_{h}^{r}\,\mathrm{X}_{i_1 \ldots i_m r}^{k_1 \ldots k_p h} + \mathrm{B}_{r}^{h}\,\mathrm{X}_{i_1 \ldots i_m h}^{k_1 \ldots k_p r}\right).\end{aligned}$$

Pour que l'opérateur (3) soit permutable avec la contraction, il faut et il suffit que la dernière somme au second membre de (4) soit identiquement nulle, c'est-à-dire que

$$\mathrm{A}_h^r + \mathrm{B}_h^r = 0.$$

Dans ces conditions, (3) se comporte envers la composition des systèmes, résultat de leur multiplication suivie de contractions, suivant les relations formelles (2). Il en est de même de l'opérateur

$$(5)\qquad dX^{k_1\dots k_p}_{i_1\dots i_m} + \Lambda(X^{k_1\dots k_p}_{i_1\dots i_m}), \qquad (A^k_i + B^k_i = 0).$$

En résumé, nous avons en (5) un opérateur généralisant et pouvant remplacer la différentiation et se comportant comme elle envers les trois opérations fondamentales de l'algèbre tensorielle; c'est la différentiation tensorielle, que nous distinguerons de la différentiation ordinaire en surlignant le signe d :

$$(6)\qquad \bar{d}X^{k_1\dots k_p}_{i_1\dots i_m} = dX^{k_1\dots k_p}_{i_1\dots i_m} - \sum_{\alpha=1}^{m} \gamma^{r_\alpha}_{i_\alpha} X^{k_1\dots k_p}_{i_1\dots r_\alpha\dots i_m} + \sum_{\beta=1}^{p} \gamma^{k_\beta}_{r_\beta} X^{k_1\dots r_\beta\dots k_p}_{i_1\dots i_m}.$$

En outre, pour conserver l'homogénéité, on prend pour les γ^k_i des formes linéaires des différentielles dx^i

$$\gamma^k_i = \gamma^k_{ih}(x_1\dots x_n)\,dx^h,$$

de sorte que cette opération dépend de n^3 fonctions arbitraires.

On peut alors définir les dérivées tensorielles des différents ordres par le même algorithme que dans le calcul ordinaire; les dérivées tensorielles premières sont définies par

$$\bar{d}\,X^{k_1\dots k_p}_{i_1\dots i_m} = X^{k_1\dots k_p}_{i_1\dots i_m h}\,dx^h;$$

on les désigne encore par $\dfrac{\bar{\partial} X^{k_1\dots k_p}_{i_1\dots i_m}}{\partial x^h}$, ou même, plus simplement, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, par $X^{k_1\dots k_p}_{i_1\dots i_m h}$.

Il résulte de leur définition que les dérivées tensorielles $q^{\text{ièmes}}$ d'un $\binom{p}{m}^{\text{uple}}$ est un $\binom{p}{m+q}^{\text{uple}}$.

Remarque. — Il peut arriver que dans un $\binom{p}{m}^{\text{uple}}$ $X^{k_1\dots k_p}_{i_1\dots i_m}$, soient seulement considérés les éléments d'un sous-système, par exemple ceux dont les indices i_1, i_2, k_1 ont des valeurs déterminées. Pour spécifier que l'opérateur (6) ne doit pas opérer sur de tels indices, nous les isolerons des autres indices par des parenthèses. Ainsi, nous écrirons

$$\bar{d}X^{(j)l}_{(ik)h} = dX^{jl}_{ikh} - \gamma^r_h X^{jl}_{ikr} + \gamma^l_r X^{jr}_{ikh}.$$

2. Différentiations covariantes. — Les n^3 fonctions γ_{ih}^{k} dont dépend la différentiation tensorielle sont associées au système de coordonnées utilisées. A un premier système $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$, on peut associer une certaine différentiation tensorielle, définie par les n^3 fonctions $\gamma_{ih}^{k}(x_1\ \ldots\ x_n)$; à un autre système de coordonnées $(x'_1 x'_2 \ldots x'_n)$, on peut de même associer n^3 autres fonctions $\gamma'^{\mu}_{\lambda\nu}\,(x'_1 \ldots x'_n)$, et la différentiation tensorielle qu'elles définissent sera désignée par $\overline{d'}$.

Étant donné un $\binom{p}{m}^{\text{uple}}$, les différentielles tensorielles de ses éléments $X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p}(x_1 \ldots x_n)$, calculés dans le premier système de coordonnées, s'entendent avec les éléments γ_{ih}^{k}, tandis que les différentielles tensorielles de ses composantes $X'^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_m}(x'_1 \ldots x'_p)$ dans le deuxième système de coordonnées sont des opérations $\overline{d'}$.

Les γ_{ih}^{k} s'appellent les rotations de la différentiation tensorielle. Dans le calcul différentiel ordinaire, elles sont nulles identiquement. Dans le calcul tensoriel, nous avons, jusqu'ici, toute liberté dans leur choix, et cela pour chaque système de coordonnées, mais nous n'avons pas encore réalisé la propriété que nous avions en vue en faisant cette généralisation, savoir la conservation de la covariance par cette opération. Cette condition détermine les différentiations tensorielles relatives à tous les systèmes de coordonnées, dès que l'on a choisi les rotations associées à l'un d'eux.

En effet, il faut que les rotations γ_{ih}^{k} et $\gamma'^{\mu}_{\lambda\nu}$ associées à deux systèmes de coordonnées différents soient telles que les relations

$$X'^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_m} = \theta_{\lambda_1}^{i_1}\ldots\theta_{\lambda_m}^{i_m}\,\theta_{k_1}^{\mu_1}\ldots\theta_{k_p}^{\mu_p}\,X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} \tag{7}$$

entraînent

$$\overline{d'}\,X'^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_m} = \theta_{\lambda_1}^{i_1}\ldots\theta_{\lambda_m}^{i_m}\,\theta_{k_1}^{\mu_1}\ldots\theta_{k_p}^{\mu_p}\,\overline{d}X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p}. \tag{8}$$

Or le second membre de (7) est une composition du tenseur considéré avec le $\binom{m+p}{m+p}^{\text{uple}}$

$$\theta_{\lambda_1\ldots\lambda_m k_1\ldots k_p}^{i_1\ldots i_m \mu_1\ldots\mu_p} = \theta_{\lambda_1}^{i_1}\ldots\theta_{\lambda_m}^{i_m}\,\theta_{k_1}^{\mu_1}\ldots\theta_{k_p}^{\mu_p};$$

ce système se rattache au premier système de coordonnées par ses indices latins, au deuxième système de coordonnées par ses indices grecs. On peut généraliser l'opération (6) afin de la rendre applicable à de tels systèmes; d'une manière générale, appelons différentiation tensorielle d'un système doté d'indices grecs et latins, supérieurs et inférieurs, l'opérateur

$$(9)\qquad \overline{d}\,U^{k_1\ldots k_p\,\mu_1\ldots\mu_q}_{i_1\ldots i_m\,\lambda_1\ldots\lambda_r} = dU^{k_1\ldots k_p\,\mu_1\ldots\mu_q}_{i_1\ldots i_m\,\lambda_1\ldots\lambda_r} - \sum_{\alpha=1}^{m}\gamma^{s_\alpha}_{i_\alpha}\,U^{k_1\ldots\mu_q}_{i_1\ldots s_\alpha\ldots\lambda_1\ldots\lambda_r} + \sum_{\alpha=1}^{p}\gamma^{k_\alpha}_{s_\alpha}\,U^{k_1\ldots s_\alpha\ldots\mu_1\ldots\mu_q}_{i_1\ldots\lambda_r} - \sum_{\alpha=1}^{r}\gamma'^{\sigma_\alpha}_{\lambda_\alpha}\,U^{k_1\ldots\mu_q}_{i_1\ldots i_m\ldots\sigma_\alpha\ldots\lambda_r} + \sum_{\alpha=1}^{q}\gamma'^{\mu_\alpha}_{\sigma_\alpha}\,U^{k_1\ldots k_p\ldots\sigma_\alpha\ldots\mu_q}_{i_1\ldots\lambda_r}.$$

Cet opérateur, dont (6) n'est d'ailleurs qu'une forme particulière, est encore de la forme (5) et possède donc les propriétés formelles traduites par les identités (2). La différentiation tensorielle, ainsi généralisée, des deux membres de (7), donne

$$\overline{d'}\,X'^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_m} = \theta^{i_1\ldots i_m\,\mu_1\ldots\mu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_m\,k_1\ldots k_p}\,\overline{d}\,X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m} + X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}\,\overline{d}\,\theta^{i_1\ldots i_m\,\mu_1\ldots\mu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_m\,k_1\ldots k_p};$$

l'identification avec (8) entraîne

$$\overline{d}\,\theta^{i_1\ldots i_m\,\mu_1\ldots\mu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_m\,k_1\ldots k_p} = 0,$$

et, par suite, les conditions nécessaires et suffisantes

$$\overline{d}\,\theta^{\lambda}_{i} = 0,\qquad \overline{d}\,\theta^{i}_{\lambda} = 0.$$

D'ailleurs, la différentiation tensorielle des relations de réciprocité (1) montre que les seules conditions essentielles sont

$$(\mathrm{I})\qquad \overline{d}\,\theta^{\lambda}_{i} = 0.$$

On peut donc dire que, pour que deux différentiations tensorielles relatives à deux systèmes de coordonnées conservent la covariance (soient covariantes), il faut et il suffit que les θ^{λ}_{i} se comportent comme des constantes envers la différentiation tensorielle (9).

Cet énoncé rappelle la remarque faite au sujet de la différentiation ordinaire des tenseurs; mais les quantités arbitraires introduites nous permettent maintenant de réaliser les conditions (I), quels que soient les θ^{λ}_{i}. En effet, ces équations, développées, s'écrivent

$$\frac{\partial\theta^{\lambda}_{i}}{\partial x_k} - \gamma^{h}_{ik}\,\theta^{\lambda}_{h} + \gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}\,\theta^{\mu}_{i}\,\theta^{\nu}_{k} = 0,$$

et définissent complètement les rotations $\gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}$ associées à tout système de coordonnées $(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)$ dès que l'on s'est donné, d'ailleurs arbitrairement, les rotations γ^h_{ik} associées à un système de coordonnées particulier $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$.

Ces équations sont la généralisation de celles dont la discussion a conduit Christoffel au principe de la différentiation covariante des variétés riemanniennes.

Si l'on considère les dérivées tensorielles, il résulte de (8) que les dérivées tensorielles $q^{\text{ièmes}}$ d'un tenseur $\binom{p}{m}^{\text{uple}}$ forment un tenseur $\binom{p}{m+q}^{\text{uple}}$; l'ordre de contrevariance n'est pas modifié.

Ainsi nous avons obtenu, sans avoir introduit jusqu'ici de complication formelle, une opération qui remplace la différentiation ordinaire et qui a l'avantage de ne pas détruire la forme tensorielle, c'est-à-dire la signification intrinsèque, des éléments auxquels on l'applique.

Nous disposons même encore des n^3 fonctions arbitraires γ^h_{ik}. En général, la définition de la variété V suggère des conditions supplémentaires qui en simplifient l'étude et dont la réalisation restreint le choix des γ^h_{ik}. A ce sujet, on peut faire une remarque essentielle. De telles conditions expriment en général que certains tenseurs sont nuls, et si, dans un certain système de coordonnées, elles sont satisfaites par les γ^h_{ik}, elles le seront nécessairement, d'après (I), par les $\gamma'^{\mu}_{\lambda\nu}$ associés à tout autre système de coordonnées. Il résulte de là que si de telles conditions définissent complètement les γ^k_{ih}, leur réalisation entraîne, par cela même, la covariance des différentiations.

CHAPITRE III.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ABSOLU DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES.

1. **Différentiation covariante de Christoffel.** — Une variété riemannienne à n dimensions est une variété à laquelle est associée une forme quadratique des différentielles dx^i, irréductible, et de caractère invariant

$$\varphi = a_{ik}(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx^i\, dx^k. \tag{10}$$

On peut toujours supposer que les coefficients a_{ik} sont symétriques par rapport à leurs indices, et la donnée de cette forme φ est équivalente à la donnée du tenseur covariant double et symétrique a_{ik}; c'est ce qu'on appelle le « tenseur fondamental ».

Le groupe des changements de variables fait correspondre à φ un ensemble de formes quadratiques, et les propriétés intrinsèques de la variété sont les propriétés communes à toutes ces formes quadratiques.

On dit encore que φ définit une métrique riemannienne dont l'élément de longueur ds est mesuré par $\sqrt{\varphi}$.

Les formes quadratiques, dont l'étude par le calcul différentiel ordinaire est le plus simple, sont celles dont les coefficients a_{ik} sont constants; nous les appellerons « cartésiennes »; elles sont toutes réductibles l'une à l'autre et appartiennent donc à la même métrique, que l'on appelle « la métrique euclidienne ». Cependant, le ds^2 d'une variété euclidienne n'affecte la forme cartésienne que pour un choix convenable du système des coordonnées.

Les simplifications rencontrées chez les formes cartésiennes conduisent à associer, à la forme générale φ, une différentiation tensorielle envers laquelle les composantes du tenseur fondamental se comportent comme des constantes. Les rotations γ_{ih}^{k} doivent donc vérifier les équations

$$\bar{d}\, a_{ik} = 0, \tag{11}$$

et nous savons que ce système d'équations se conserve dans tous les autres systèmes de coordonnées par l'emploi des différentiations covariantes.

Les $\frac{n^2(n+1)}{2}$ équations (11) sont linéaires par rapport aux n^3 fonctions inconnues $\gamma_{ih}^{k}(x_1 x_2 \ldots x_n)$; elles se partagent d'ailleurs en n systèmes ($h = 1, 2, \ldots, n$), différant seulement par leurs seconds membres. Il reste donc $\frac{n^2(n-1)}{2}$ arbitraires dans le choix des rotations γ_{ih}^{k}.

D'autre part, si cette différentiation tensorielle se comporte plus simplement que la différentiation ordinaire envers les tenseurs, et surtout envers le tenseur fondamental, elle risque de compliquer les calculs où interviennent les différentielles dx^i. En effet, un grand nombre de propriétés du calcul différentiel ordinaire (telles que la commutativité des dérivations d'une fonction uniforme, la formule de Green, les conditions d'intégrabilité des systèmes d'équations aux dérivées partielles, etc.), résultent des identités

$$\delta\, dx^i - d\,\delta x^i = 0,$$

qui expriment que les dx^i sont des différentielles exactes. Or, dans la différentiation tensorielle, le rôle des $\delta\, dx^i$ est rempli par les $\bar{\delta}\, dx^i$, et l'on n'a plus, *a priori*,

$$\bar{\delta}\, dx^i - \bar{d}\,\delta x^i = 0. \tag{12}$$

Pour conserver à ce sujet les simplifications formelles du calcul différentiel ordinaire, on est donc conduit à satisfaire à ces conditions. Les équations (12), développées, se réduisent à

$$\gamma^k_{ih} = \gamma^k_{hi}, \tag{13}$$

au nombre de $\frac{n^2(n-1)}{2}$, et, jointes à (11), déterminent complètement les γ^k_{ih}.

Les rotations ainsi obtenues sont les seconds symboles de Christoffel; nous les désignerons par la notation $\left\{ {k \atop ih} \right\}$ et l'on a [1]

$$\left\{ {k \atop ih} \right\} = \frac{1}{2} a^{kj} \left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{hj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ih}}{\partial x_j} \right].$$

Remarques. — Les fonctions réciproques des a_{ik} forment un tenseur covariant double, et la différentiation tensorielle des relations de réciprocité montre immédiatement que ces éléments a^{ik} se comportent également comme des constantes envers la différentiation de Christoffel.

Aux contrevariants dx^i on peut associer le tenseur covariant simple

$$dx_i = a_{ik}\, dx^k;$$

par suite de la constance des a_{ik}, au point de vue tensoriel, les rela-

(1) Nous modifions légèrement la notation $\left\{ {ih \atop k} \right\}$ de Christoffel, afin de nous conformer aux conventions d'écriture des indices de covariance et de contrevariance.

tions (12) entraînent

$$\bar{\delta}\, dx_i - \bar{d}\, \delta x_i = 0\,;$$

on a ainsi un exemple d'un système de formes de Pfaff, qui ne sont pas nécessairement des différentielles exactes, et qui se comportent cependant comme telles dans ce calcul différentiel absolu.

2. Permutation de deux différentiations tensorielles successives. — Grâce au choix de ses rotations, le calcul de Christoffel sera plus simple, à beaucoup d'égards, que le calcul différentiel ordinaire. Mais la complication n'est que déplacée et le résultat de deux différentiations successives dépend maintenant de leur ordre de succession. D'ailleurs, cet inconvénient ne peut balancer l'avantage de conserver, avec la covariance, la signification intrinsèque des calculs, et, d'autre part, on ne peut espérer supprimer une difficulté qui tient essentiellement à la nature de la variété.

Effectuons d'abord les calculs pour le calcul différentiel absolu le plus général. Désignons par $d\gamma_i^k$ les formes linéaires $\gamma_{ih}^k\, dx^h$, qui étaient désignées par γ_i^k dans la formule (6). Différentions de nouveau cette formule pour un déplacement δx^i; il vient

$$\begin{aligned}\overline{\delta d}\, X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} = \delta d\, X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} &- \sum_{\alpha=1}^{m} \delta\gamma_{i_\alpha}^{r_\alpha}\; dX_{i_1\ldots r_\alpha\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} + \sum_{=1}^{p} \delta\gamma_{r_\beta}^{k_\beta}\; dX_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots r_\beta\ldots k_p}\\ &- \sum_{\alpha=1}^{m} d\gamma_{i_\alpha}^{r_\alpha}\; \bar{\delta}\, X_{i_1\ldots (r_\alpha)\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} + \sum_{\beta=1}^{p} d\gamma_{r_\beta}^{k_\beta}\; \bar{\delta}\, X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots (r_\beta)\ldots k_p}\\ &- \sum_{\alpha=1}^{m} \bar{\delta}\, d\gamma_{i_\alpha}^{(r_\alpha)}\, X_{i_1\ldots r_\alpha\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} + \sum_{\beta=1}^{p} \bar{\delta}\, d\gamma_{(r_\beta)}^{k_\beta}\, X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots r_\beta\ldots k_p}.\end{aligned}$$

On vérifie aisément que les sommes des première et deuxième lignes forment un ensemble symétrique par rapport aux accroissements d, δ; elles disparaissent donc dans la différence $(\overline{\delta, d}) = \overline{\delta d} - \overline{d\delta}$. Cette différence s'écrit alors

$$(14)\qquad \begin{aligned}(\overline{\delta, d})\, X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} = (\delta, d)\, X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p} &- \sum_{\alpha=1}^{m} (\bar{\delta} d - \bar{d}\delta)\, \gamma_{i_\alpha}^{(r_\alpha)}\, X_{i_1\ldots r_\alpha\ldots i_m}^{k_1\ldots k_p}\\ &+ \sum_{\beta=1}^{p} (\bar{\delta} d - \bar{d}\delta)\, \gamma_{(r_\beta)}^{k_\beta}\, X_{i_1\ldots i_m}^{k_1\ldots r_\beta\ldots k_p},\end{aligned}$$

le premier terme du second membre disparaissant lorsque les $X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}$ sont uniformes dans le domaine de variation considéré. Remarquons que cette identité est de la même forme que la différentiation tensorielle, les formes linéaires $d\gamma_i^k$ étant simplement remplacées par les formes bilinéaires

$$(\bar{\delta}d - \bar{d}\delta)\gamma_i^{(k)} \quad \text{et} \quad (\bar{\delta}d - \bar{d}\delta)\gamma_{(i)}^k.$$

Bien plus, ces deux sortes de coefficients sont égaux, comme on le vérifie immédiatement, de sorte que la similitude de forme des deux opérateurs (6) et (14) est complète.

En posant

$$(15) \qquad (\bar{\delta}d - \bar{d}\delta)\gamma_{(i)}^k = (\bar{\delta}d - \bar{d}\delta)\gamma_{(i)}^k = \gamma_{ihl}^k\, dx^h\, \delta x^l,$$

de sorte que

$$\gamma_{ihl}^k = -\gamma_{ilh}^k,$$

(14) s'écrit

$$(16) \qquad (\overline{\delta, d})\, X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m} = (\delta, d)\, X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m} - \sum_{\alpha=1}^{m} \gamma^{r_\alpha}_{i_\alpha hl}\, X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots r_\alpha\ldots i_m}\, dx^h\, \delta x^l$$
$$+ \sum_{\beta=1}^{p} \gamma^{k_\beta}_{r_\beta hl}\, X^{k_1\ldots r_\beta\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}\, dx^h\, \delta x^l.$$

Dans le cas particulier où la différentiation tensorielle vérifie les équations (12), les γ_{ihl}^k s'expriment simplement à l'aide des dérivées tensorielles des γ_{ih}^k; il vient en effet

$$(17) \qquad \gamma_{ihl}^k = \gamma_{ih/l}^{(k)} - \gamma_{il/h}^{(k)}.$$

Dans ce même cas particulier, il résulte de (16) que les dérivées tensorielles secondes d'un tenseur uniforme sont liées par les relations

$$(18) \quad X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}/_{hl} - X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}/_{lh} = -\sum_{\alpha=1}^{m} \gamma^{r_\alpha}_{i_\alpha hl}\, X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots r_\alpha\ldots i_m} + \sum_{\beta=1}^{p} \gamma^{k_\beta}_{r_\beta hl}\, X^{k_1\ldots r_\beta\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}.$$

3. Tenseur de Riemann-Christoffel. — Les formules (17) et (18) sont valables pour le calcul de Christoffel. Il résulte alors de (18) que les γ_{ihl}^k sont les éléments d'un tenseur $\binom{1}{3}^{\text{uple}}$; leur composition avec les a_{ik} fournit un tenseur $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}^{\text{uple}}$

$$\gamma_{ikhl} = a_{rk}\,\gamma^r_{ihl};$$

c'est le tenseur dit « de Riemann-Christoffel », et rencontré pour la première fois par Christoffel.

Ce tenseur est nul pour un ds^2 cartésien, et par suite pour les variétés euclidiennes. Ce tenseur distingue donc une métrique non euclidienne de la métrique euclidienne; on dit qu'il traduit la courbure de la métrique.

Remplaçons les γ^r_{ihl} par leur valeur (17), et introduisons les premiers symboles de Christoffel

$$\gamma_{ikh} = a_{rk}\,\gamma^r_{ih} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ih}}{\partial x_k}\right];$$

il vient

$$\gamma_{ikhl} = \gamma_{(i)kh/l} - \gamma_{(i)kl/h},$$

ou, en tenant compte de (13),

$$\gamma_{ikhl} = \frac{\partial\gamma_{ikh}}{\partial x_l} - \frac{\partial\gamma_{ikl}}{\partial x_h} - a_{rs}\left(\gamma^r_{ih}\,\gamma^s_{kl} - \gamma^r_{il}\,\gamma^s_{kh}\right);$$

compte tenu de la relation (11), qui s'écrit encore

$$\gamma_{ikh} + \gamma_{kih} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_h},$$

on vérifie immédiatement que les γ_{ikhl} sont symétriques gauches par rapport aux indices i, k; les symboles de Riemann-Christoffel satisfont donc à un premier système de relations

$$(19) \qquad \gamma_{ikhl} = -\gamma_{iklh} = -\gamma_{kihl};$$

d'autre part, il résulte de (12) que le covariant trilinéaire absolu de dx^i

$$(\overline{\Delta, \delta})\,dx^i + (\overline{\delta, d})\,\Delta x^i + (\overline{d, \Delta})\,\delta x^i$$

est nul, ce qui donne

$$(20) \qquad \gamma^i_{khl} + \gamma^i_{hlk} + \gamma^i_{lkh} = 0;$$

ces dernières formules sont d'ailleurs valables pour tout calcul tensoriel qui satisfait aux conditions (12); dans le calcul plus particulier de Christoffel, on en déduit, pour les γ_{ikhl}, un nouveau système de relations

$$\gamma_{ikhl} + \gamma_{ihlk} + \gamma_{ilkh} = 0. \tag{21}$$

En outre, des relations distinctes (19) et (21), résultent encore les relations remarquables

$$\gamma_{ikhl} = \gamma_{hlik}. \tag{22}$$

En résumé, le tenseur covariant de Riemann-Christoffel est symétrique par rapport aux deux couples d'indices (ik), (hl), et symétrique gauche par rapport aux indices de chaque couple; enfin, les relations linéaires (19), (21), (22) montrent que le nombre de ses composantes linéairement distinctes est $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$, en général.

CHAPITRE IV.

CALCUL PFAFFIEN ABSOLU.

1. Emploi des formes de Pfaff dans le calcul différentiel absolu. — Un examen attentif des principes généraux développés dans les chapitres précédents montre que les propriétés formelles du calcul différentiel absolu ne dépendent pas de ce que les dx^i sont des différentielles exactes; bien plus les coordonnées x_i n'interviennent que pour désigner les différents points de la variété, sans que joue aucun rôle leur lien avec les dx^i. C'est ainsi que les dérivées d'une fonction de M interviennent comme les coefficients des dx^i dans l'expression de la différentielle de cette fonction; de même, ce qui intervient dans le changement des coordonnées, ce ne sont pas les expressions des nouvelles variables x'_λ en fonction des anciennes, mais seulement les expressions linéaires des dx'^λ en fonction des dx^i; en particulier nous n'avons eu à tenir compte, à aucun moment, de ce que les θ_i^λ sont des dérivées de certaines fonctions.

Il en résulte que l'on peut reprendre l'exposé général du calcul différentiel absolu, sans modification des propriétés formelles, en utilisant, au lieu des dx^i, n formes de Pfaff quelconques $d\omega^i$, linéairement distinctes. Dans ce calcul, que nous appellerons calcul pfaffien absolu, les dérivées d'une fonction sont les coefficients des $d\omega^i$ dans l'expression de sa différentielle, et l'idée de changement de variables est remplacée par l'idée plus générale de substitution linéaire, effectuée sur les formes de Pfaff de base,

$$d\omega'^{\lambda} = \theta_i^{\lambda}(x_1 x_2 \ldots x_n)\, d\omega^i. \tag{23}$$

2. Calcul pfaffien absolu des variétés riemanniennes. — Il résulte des remarques précédentes que l'on pourra définir un calcul tensoriel relatif à une forme quadratique de formes de Pfaff

$$\varphi = a_{ik}(x_1 \ldots x_n)\, d\omega^i\, d\omega^k, \tag{24}$$

sans modifier la forme du calcul de Christoffel. Il suffit de choisir les éléments de définition γ_i^k de la différentiation tensorielle, de façon que soient satisfaites les relations analogues à (11) et (12),

$$\left\{\begin{aligned} \bar{d}\, a_{ik} &= 0, \\ \bar{\delta}\, d\omega^i - \bar{d}\, \delta\omega^i &= 0. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Les rotations γ_{ih}^k sont maintenant définies par les équations

$$\gamma_i^k = \gamma_{ih}^k\, d\omega^h. \tag{26}$$

Les substitutions linéaires générales (23) font correspondre au ds^2 d'une métrique riemannienne un ensemble d'expressions de la forme (24), mais, parmi cet ensemble, le sous-ensemble des formes quadratiques

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} (d\omega^i)^2 \tag{27}$$

est particulièrement intéressant. On sait que le choix des formes de Pfaff $d\omega^i$ est toujours possible, pour qu'un ds^2 donné prenne la forme (27), et ces formes de Pfaff particulières sont définies à une transformation orthogonale près. Le calcul pfaffien absolu, ainsi associé aux formes particulières (27), n'est rien autre que le calcul auquel Ricci et Levi-Civita ont été conduits par la généralisation de l'emploi du trièdre mobile de Darboux : Les systèmes d'équations obtenus en annulant $n-1$ des n formes de Pfaff de base $d\omega^i$ définissent une direction sur la variété; les n directions « $d\omega^i$ non nul », ainsi définies en un point M, sont supposées former un n-èdre, comme si une région infiniment petite de la variété était assimilable à un espace euclidien. Les fonctions γ_{ih}^{k} sont alors les rotations de ce n-èdre lorsqu'on déplace son sommet M dans les directions « $d\omega^h$ non nul ».

C'est sous cette forme géométrique que Ricci et Levi-Civita exposent leur calcul. Nous le considérons ici comme un cas particulier du calcul pfaffien absolu ; la forme quadratique φ de la métrique est mise sous la forme (27), et, par continuité, on se borne aux transformations (23) du groupe orthogonal direct.

Le tenseur fondamental se réduit ici à

$$a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k, \\ 1 & \text{si} \quad i = k ; \end{cases} \tag{28}$$

et, grâce à l'identité de toute substitution orthogonale directe avec la substitution réciproque, ($\theta_i^k = \theta_k^i$), il n'y a pas de distinction à faire entre la covariance et la contrevariance. En particulier, les indices d'un m^{uple} peuvent être tous écrits inférieurement, la saturation devant alors s'effectuer, sauf avis contraire, sur tout couple d'indices égaux.

Ainsi, on a

$$\gamma_{ih}^{k} = \gamma_{ikh}, \tag{29}$$

et la différentiation tensorielle doit prendre la forme

$$\overline{d}X_{i_1\ldots i_m} = dX_{i_1\ldots i_m} - \sum_{\alpha=1}^{m} \gamma_{i_\alpha r_\alpha h} X_{i_1\ldots r_\alpha \ldots i_m} d\omega_h ; \tag{30}$$

c'est ce qu'on vérifie d'ailleurs immédiatement, car les premières relations (25) s'écrivent

$$\gamma_{irh} + \gamma_{rih} = 0. \tag{31}$$

L'ensemble de ces relations (25) définit complètement les rotations γ_{ikh} en fonction des coefficients c_{ikh} dans leurs propres covariants bilinéaires des formes de Pfaff $d\omega_i$; en posant

$$\delta d\omega_i - d\delta\omega_i = c_{khi}\, d\omega_k \delta\omega_h,$$

on a

$$c_{khi} + c_{hki} = 0,$$

et un calcul simple donne

$$\gamma_{ikh} = \frac{1}{2}(c_{khi} + c_{hik} - c_{ikh}).$$

De même les tenseurs γ^k_{ihl} et γ_{ikhl} sont identiques, et les formules (17) et (18) s'écrivent

$$(32)\qquad (\overline{\delta, d})\,X_{i_1\ldots i_m} = (\delta, d)\,X_{i_1\ldots i_m} - \sum_{\alpha=1}^{m}{}' \gamma_{i_\alpha r_\alpha hl} X_{i_1\ldots r_\alpha \ldots i_m}\, d\omega^h\, \delta\omega^l,$$

$$(33)\qquad X_{i_1\ldots i_m/hl} - X_{i_1\ldots i_m/lh} = -\sum_{\alpha=1}^{m} \gamma_{i_\alpha r_\alpha hl} X_{i_1\ldots r_\alpha \ldots i_m}.$$

Sans diminuer en rien la généralité du calcul de Christoffel, le calcul de Ricci et Levi-Civita réalise donc une grande simplification formelle; en particulier, toute formule écrite dans le calcul de Christoffel se transcrit immédiatement dans le calcul de Ricci en se plaçant dans les conditions particulières exprimées par (28), et en substituant aux dx^i des formes de Pfaff convenables $d\omega_i$.

Remarque. — Étant donné un système de formes de Pfaff $d\omega_1, \ldots, d\omega_n$, le calcul de Ricci et Levi-Civita est le plus simple où interviennent ces formes; on peut le considérer comme particulièrement associé à ce système de formes de Pfaff, et il joue, pour ce système, le même rôle que le calcul différentiel ordinaire pour les n différentielles exactes dx^i. C'est ainsi que les éléments du calcul pfaffien absolu, associé à une forme quadratique (24), s'expriment, à partir des coefficients a_{ik}, de la même façon que les éléments du calcul de Christoffel, associé à la forme quadratique $a_{ik}dx^i dx^k$, à condition de remplacer les dérivées ordinaires des a_{ik} par les dérivées tensorielles de Ricci relatives aux formes $d\omega_i$.

3. **Structure du calcul pfaffien général.** — Nous savons que, dans le cas général, l'expression (14) ou (16) du covariant bilinéaire absolu d'un tenseur est encore valable, mais il n'en est pas de même de la formule (18) établie en supposant vérifiées les équations (12). Sans cette restriction, le second membre de (18) est une forme linéaire, non seulement des composantes du tenseur, mais encore de leurs dérivées premières.

En effet, de l'équation de définition

$$\overline{d}\,X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m} = X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m/h}\, d\omega^h,$$

on déduit immédiatement

$$(34)\qquad (\overline{\delta, d})X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m} = (X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}/_{hl} - X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}/_{lh})\,d\omega^h\,\delta\omega^l + X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}/_h(\bar\delta d\omega^h - \bar d\delta\omega^h),$$

de sorte qu'il intervient deux espèces de coefficients, formes bilinéaires des différentielles, les $\bar\delta d\omega^i - \bar d\delta\omega^i$, et les $\bar\delta d\gamma^i_k - \bar d\delta\gamma^i_k$. Posons

$$(35)\qquad \begin{cases} \bar\delta d\omega^i - \bar d\delta\omega^i = A^i_{hl}\,d\omega^h\,\delta\omega^l, \\ (\bar\delta d - \bar d\delta)\gamma^i_k = (\bar\delta d - \bar d\delta)\,\gamma^{(i)}_k = \gamma^i_{khl}\,d\omega^h\,\delta\omega^l. \end{cases}$$

La forme générale du premier membre de (18) est alors, pour un tenseur uniforme,

$$(36)\qquad X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}/_{hl} - X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}/_{lh} = -A^j_{hl}X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}/_j - \sum_{\alpha=1}^{m}\gamma^{r_\alpha}_{i_\alpha hl}X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots r_\alpha\ldots i_m} + \sum_{\beta=1}^{m}\gamma^{k_\beta}_{r_\beta hl}X^{k_1\ldots r_\beta\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}.$$

Les A^i_{hl} et γ^i_{khl} sont deux tenseurs [1] symétriques gauches par rapport aux deux indices h et l, le premier $\binom{1}{2}^{\text{uple}}$, le deuxième $\binom{1}{3}^{\text{uple}}$. C'est d'ailleurs une conséquence de (36).

Les A^i_{hl}, au nombre de $\frac{n^2(n-1)}{2}$, traduisent ce qu'on appelle la *torsion ;* les γ^i_{khl}, au nombre de $\frac{n^3(n-1)}{2}$, traduisent ce qu'on appelle la *courbure*.

Les dérivées absolues de ces deux tenseurs vérifient elles-mêmes certaines équations de structure, résultant de ce que les covariants trilinéaires des formes de Pfaff $d\omega^i$ et $d\gamma^i_k$ sont identiquement nuls. Écrivons les deux identités

$$(\overline{\Delta, \delta})\,d\omega^i + (\overline{\delta, d})\,\Delta\omega^i + (\overline{d, \Delta})\,\delta\omega^i = \bar\Delta(\bar\delta d\omega^i - \bar d\delta\omega^i) + \bar\delta(\bar d\Delta\omega^i - \bar\Delta d\omega^i) + \bar d(\bar\Delta\delta\omega^i - \bar\delta\Delta\omega^i),$$

$$(\overline{\Delta, \delta})\,d\gamma^{(i)}_k + (\overline{\delta, d})\Delta\gamma^{(i)}_k + (\overline{d, \Delta})\Delta\gamma^{(i)}_k = \bar\Delta(\bar\delta d - \bar d\delta)\gamma^{(i)}_k + \bar\delta(\bar d\Delta - \bar\Delta d)\gamma^{(i)}_k + \bar d(\bar\Delta\delta - \bar\delta\Delta)\gamma^{(i)}_k;$$

---

[1] Dans le calcul différentiel absolu relatif à des différentielles exactes dx^i, les A^i_{hl} se réduisent aux différences $\gamma^i_{hl} - \gamma^i_{lh}$.

les premiers membres s'expriment à l'aide de la formule (16); les seconds membres se calculent par différentiation des équations de définition (35). On obtient ainsi les équations

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} & A^i_{kjh/l}+A^i_{khl/j}+A^i_{klj/h}+A^i_{rj}A^r_{hl}+A^i_{rh}A^r_{lj}+A^i_{rl}A^r_{jh} \\ & \quad =\gamma^i_{jhl}+\gamma^i_{hlj}+\gamma^i_{ljh}, \\ & \gamma^i_{kjh/l}+\gamma^i_{khl/j}+\gamma^i_{klj/h}+A^r_{jh}\gamma^i_{krl}+A^r_{hl}\gamma^i_{krj}+A^r_{lj}\gamma^i_{krh}=0. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier d'un calcul sans torsion, les premières formules (37) se réduisent aux formules déjà établies en (20); les dernières formules prennent la forme

$$\gamma^i_{kjh/l}+\gamma^i_{khl/j}+\gamma^i_{klj/h}=0,$$

et généralisent l'identité démontrée par Ricci, pour les dérivées covariantes du tenseur de Riemann-Christoffel, dans les *Annali di matematica* (1886).

CHAPITRE V.

VARIÉTÉS A CONNEXION AFFINE.

1. Interprétation géométrique du calcul pfaffien absolu. — Nous avons signalé le point de vue géométrique auquel s'étaient placés Ricci et Levi-Civita pour la définition de leur calcul. Nous allons examiner, d'une manière générale, l'exposé géométrique du calcul pfaffien absolu. Les considérations qui suivent sont d'autant plus intéressantes qu'elles sont à l'origine de ce calcul.

L'idée initiale est celle de variété à connexion affine, mise en évidence par Weyl, et étudiée dans toute sa généralité par Cartan.

La géométrie affine de l'espace ordinaire est la géométrie des propriétés qui se conservent dans toute transformation homographique laissant invariant le plan de l'infini; c'est la géométrie linéaire des vecteurs, sans considération d'angles et de distances. Ces deux dernières notions sont du domaine de la géométrie métrique. On peut d'ailleurs construire une géométrie affine avec un nombre quelconque de dimensions et toute variété, où cette géométrie est valable, est dite affine.

Les coordonnées usuelles dans un espace affine sont les coordonnées cartésiennes. On les définit à l'aide de n vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, d'origine commune M, et non dans un même $(n-2)$-plan; les coordonnées d'un point N de l'espace sont les mesures ξ^i des composantes du vecteur $\overrightarrow{MN}$ suivant les vecteurs de référence $\vec{e}_i$; le repérage se traduit donc par l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{MN} = \xi^1 \vec{e}_1 + \xi^2 \vec{e}_2 + \ldots + \xi^n \vec{e}_n.$$

Le choix du n-èdre de référence est arbitraire, et un changement du système des coordonnées cartésiennes est défini quand on se donne, dans l'ancien système, les coordonnées de la nouvelle origine N, et les composantes des nouveaux vecteurs de référence $\vec{\varepsilon}_i$. Ce changement se traduit donc par les équations

$$(38) \qquad \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \xi^i \vec{e}_i, \\ \varepsilon_i \;= A_i^k \vec{e}_k. \end{cases}$$

Ceci posé, on appelle variété à connexion affine une variété dont chaque région infiniment petite est assimilable à un espace affine. On peut alors supposer que l'on associe à chaque point M un système de référence $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, et que l'on passe d'un tel système de référence à un autre système de référence $\vec{\varepsilon}_i$, d'origine infiniment voisine N, comme si l'on se trouvait dans un même espace affine. L'espace affine associé à un point M de la variété s'appelle « espace affine tangent en M »; par la pensée, on peut l'étendre autant qu'on veut, de sorte que l'on peut prendre pour les e_i des vecteurs finis, mais qui ne servent qu'à repérer des déplacements infiniment petits.

En résumé, une variété à connexion affine est un continuum d'espaces affines, mais en général, une région finie n'est plus assimilable à un espace affine proprement dit.

Le repérage de l'espace affine tangent en N à l'espace affine tangent en M se fait par l'intermédiaire d'équations de la forme (38); mais maintenant, les ξ^i sont des formes linéaires $d\omega^i$ des dx^i, et l'on suppose qu'il en est de même des différences géométriques infiniment petites $\vec{\varepsilon}_i - \vec{e}_i$. Ce passage se traduit donc par le système

$$(39) \qquad \begin{cases} \overrightarrow{MN} = d\omega^i \vec{e}_i, \\ \vec{\varepsilon}_i - \vec{e}_i = \gamma_{ih}^k (x_1 \ldots x_n)\, d\omega^h \vec{e}_k. \end{cases}$$

On voit qu'une connexion affine se définit par les mêmes éléments que le calcul pfaffien absolu, de sorte que l'étude des connexions affines se confond avec l'étude de ce calcul, et en fournit une traduction géométrique.

D'ailleurs, au point de vue formel, on peut considérer les $\vec{e_i}$ comme des symboles auxiliaires, linéairement distincts, et auxquels on attribue un caractère covariant. Leur introduction permet d'associer à tout couple de points $M(x_i)$, $N(x_i + dx_i)$, l'invariant symbolique $d\omega^i \vec{e_i}$, que l'on désigne par $\overrightarrow{MN}$, ou même, plus simplement, par $\overrightarrow{dM}$.

Ceci posé, désignons par le symbole $\overrightarrow{de_i}$ la différence géométrique $\vec{\varepsilon_i} - \vec{e_i}$. La deuxième équation (39) s'écrit alors symboliquement

$$\overrightarrow{\bar{d}e_i} = 0, \tag{40}$$

la différentiation tensorielle indiquée par le symbole $\bar{d}$ ayant les mêmes éléments que la connexion affine.

Étant donné un vecteur libre $\vec{\xi}$ de l'espace affine tangent en M, soient ξ^i ses composantes dans le système des vecteurs $\vec{e_i}$, $\xi^i + d\xi^i$ ses composantes dans le système des $\vec{\varepsilon_i}$. Les $d\xi^i$ se calculent en écrivant que $d\vec{\xi} = 0$; et la différentiation tensorielle de l'équation de définition

$$\vec{\xi} = \xi^i \vec{e_i}$$

donne, en tenant compte de (40),

$$\bar{d}\xi^i = 0. \tag{41}$$

Ce dernier système d'équations exprime donc que le vecteur $\vec{\xi}$ reste équipollent dans l'espace affine tangent en M.

Les équations

$$d\xi^i = 0 \tag{42}$$

traduisent ce qu'on peut appeler l'entraînement du vecteur $\vec{\xi}$, avec le système de référence, sans mouvement relatif par rapport à ce système.

D'une manière générale, le vecteur

$$\vec{d\xi} = \overline{d}\xi^i \vec{e_i}$$

est la différentielle géométrique absolue du vecteur $\vec{\xi}$, fonction de son origine M, tandis que

$$d\xi^i \vec{e_i}$$

est sa différentielle géométrique relative. On peut donc dire que les $\gamma^k_{ih}\, d\omega^h$ définissent la rotation dans l'espace affine tangent en M, du système de référence lorsque son origine se déplace le long de $\overrightarrow{MN}$.

L'analogie des opérateurs (6) et (14) montre que les formes bilinéaires $(\overline{\delta}d - \overline{d}\delta)\gamma^k_{(i)}$ définissent aussi une rotation affine, associée au parallélogramme infiniment petit de côtés $\overrightarrow{dM}$, $\overrightarrow{\delta M}$. Par exemple le transport d'un vecteur $\vec{\xi}$, par équipollence, le long de ce parallélogramme, en commençant par le côté $\overrightarrow{\delta M}$, se traduit par

$$(\overline{\delta, d})\xi^i = 0,$$

de sorte que ses composantes, au retour, sont

$$\xi^i + (\delta, d)\xi^i = \xi^i - (\overline{\delta}d - \overline{d}\delta)\gamma^{(i)}_k \xi^k. \tag{43}$$

La rotation affine par laquelle on passe de la direction initiale à la direction finale traduit donc la *courbure* de la connexion affine (ou du calcul pfaffien absolu).

On peut également interpréter cette rotation en supposant que le vecteur $\vec{\xi}$ est entraîné, sans mouvement relatif, avec le n-èdre de référence de son origine. Mais alors la résultante des déplacements absolus successifs n'a de sens que par rapport à un même espace affine. Pour faire leur somme, on les suppose donc transportés, par équipollence, en un même point infiniment voisin de tout le contour ; on doit effectuer cette opération à la fois sur les différences géométriques de $\vec{\xi}$, et sur les déplacements de son origine M.

En effectuant ce transport par équipollence, au sommet A du parallélogramme, on obtient, pour la variation géométrique totale de $\vec{\xi}$, les composantes $(\overline{\delta, d})\xi^i$, avec la condition $(\delta, d)\xi^i = 0$. La formule (14) donne donc, en écrivant $(\bar{\delta}, d)$ pour $(\bar{\delta} d - \bar{d}\delta)$,

$$(\overline{\delta, d})\xi^i = (\bar{\delta}, d)\gamma_k^{(i)}\xi^k.$$

Le transport, au même sommet A, des différences géométriques absolues $\overrightarrow{dM}$ de l'origine du vecteur, donne pour leur résultante

$$\overrightarrow{(\delta, d)M} = (\bar{\delta} d\omega^i - \bar{d}\delta\omega^i)e_i, \tag{44}$$

de sorte que dans l'image que l'on fait, dans le même espace affine, du déplacement de $\vec{\xi}$, le vecteur ne revient pas à son origine initiale. Les formes bilinéaires qui traduisent la *torsion* de la variété (ou du calcul pfaffien absolu) sont donc les composantes d'une translation associée au parallélogramme en question.

Si, au lieu du vecteur $\vec{\xi}$, on considère son extrémité P, le déplacement que subit P, le long du parallélogramme, et dans l'image affine considérée, est la somme du déplacement de l'origine et de la variation géométrique de $\vec{\xi}$, c'est-à-dire [1]

$$[(\bar{\delta} d\omega^i - \bar{d}\delta\omega^i) + (\bar{\delta}, d)\gamma_k^{(i)}\xi^k]\vec{e_i}. \tag{45}$$

2. Théorème de la conservation de la courbure et de la torsion. — M. Cartan a donné une interprétation géométrique remarquable des formules (37). Considérons un parallélépipède de sommet A et de côtés $\overrightarrow{dA}$, $\overrightarrow{\delta A}$, $\overrightarrow{\Delta A}$. A chaque face est associé un déplacement affine; repérons, par rapport à l'espace affine tangent en un même point infiniment voisin de toutes les faces, le sommet A par exemple, les déplacements affines d'un même point P, relatifs aux six faces. Les formules (37) expriment que la somme géométrique de ces déplacements affines, effectuée dans ce même espace affine, est identiquement nulle.

Tout d'abord, le déplacement affine du point

$$P = A + \xi^i \vec{e_i},$$

[1] Pour une démonstration rigoureuse de ce résultat, *cf.* CARTAN, *Sur les variétés à connexion affine*... (*Ann. École Norm. sup.*, 1924, p. 366-372).

associé à la face $\left(\overrightarrow{d\mathrm{A}}, \overrightarrow{\delta\mathrm{A}}\right)$, est le déplacement (45). Soit A′ le sommet $\mathrm{A} + \overrightarrow{\Delta\mathrm{A}}$, et soient $\overrightarrow{\varepsilon_i}$ les vecteurs de référence en A′. Les coordonnées de P par rapport aux $\overrightarrow{\varepsilon_i}$ sont

$$\eta^i = -\Delta\omega^i + \xi^i - \Delta\gamma^i_k\,\xi^k,$$

et le déplacement affine associé à la face $\left(\overrightarrow{d\mathrm{A}'}, \overrightarrow{\delta\mathrm{A}'}\right)$ est, aux infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\varepsilon_i}\left\{(\bar{\delta}\,d\omega^i - \bar{d}\,\delta\omega^i) + \Delta(\bar{\delta}\,d\omega^i - \bar{d}\,\delta\omega^i) + (\bar{\delta}, d)\,\gamma^{(i)}_k\,\eta^k + \Delta(\bar{\delta}, d)\,\gamma^{(i)}_k\,\xi^k\right\}\\
&= \overrightarrow{e_i}\left\{(\bar{\delta}\,d\omega^i - \bar{d}\,\delta\omega^i) + \Delta(\bar{\delta}\,d\omega^i - \bar{d}\,\delta\omega^i) - (\bar{\delta}, d)\,\gamma^{(i)}_k\,\Delta\omega^k + \Delta\gamma^i_k(\bar{\delta}\,d\omega^k - \bar{d}\,\delta\omega^k)\right.\\
&\qquad\left. + \xi^k\left[(\bar{\delta}, d)\,\gamma^{(i)}_k - (\bar{\delta}, d)\,\gamma^{(i)}_h\,\Delta\gamma^h_k + \Delta(\bar{\delta}, d)\,\gamma^{(i)}_k + \Delta\gamma^i_h(\bar{\delta}, d)\,\gamma^{(h)}_k\right]\right\}.
\end{aligned}$$

La somme géométrique, effectuée ainsi en A, des déplacements affines associés à ces deux faces opposées, parcourues évidemment en sens contraires, est donc

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{e_i}\left\{\Delta(\bar{\delta}\,d\omega^i - \bar{d}\,\delta\omega^i) - (\bar{\delta}, d)\,\gamma^{(i)}_k\,\Delta\omega^k + \Delta\gamma^i_k\,(\bar{\delta}\,d\omega^k - \bar{d}\,\delta\omega^k)\right.\\
&\qquad\left. + \xi^k\left[\Delta(\bar{\delta}, d)\,\gamma^{(i)}_k + \Delta\gamma^i_h(\bar{\delta}, d)\,\gamma^{(h)}_k - \Delta\gamma^h_k(\bar{\delta}, d)\,\gamma^{(i)}_h\right]\right\},
\end{aligned}$$

et la résultante totale, pour les six faces, qui s'obtient en ajoutant les termes déduits de ceux-ci par permutation circulaire des lettres d, δ, Δ est bien

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{e_i}\left\{(\Delta, \delta)\,d\omega^i + (\delta, d)\,\Delta\omega^i + (d, \Delta)\,\delta\omega^i\right\}\\
&+ \overrightarrow{e_i}\,\xi^k\left\{(\Delta, \delta)\,d\gamma^i_k + (\delta, d)\,\Delta\gamma^i_k + (d, \Delta)\,\delta\gamma^i_k\right\} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Remarque. — Étant donné un arc de courbe non infiniment petit, on peut reporter dans un même espace affine, de proche en proche, les déplacements affines d'un même point le long des éléments d'arc successifs. Par ce procédé, on peut associer à un arc quelconque un déplacement affine (translation, et rotation affine).

On peut ainsi définir les géodésiques d'une variété à connexion affine comme les courbes dont la tangente reste parallèle à elle-même le long de la courbe. Ce sont les courbes dont l'image, dans un même espace affine, est une droite.

On peut également écrire que, le long d'une géodésique, $\bar{d}\,d\omega^i$ est proportionnel à $d\omega^i$.

3. Variétés à connexion métrique. — Considérons des variétés à connexion affine dont chaque région infiniment petite a, en outre, les caractères de l'espace métrique euclidien. La longueur ξ d'un vecteur $\xi^i \overrightarrow{e_i}$, supposée mesurée avec un certain étalon, est donnée par une forme quadratique (¹)

$$\xi^2 = \varphi = a_{ik}(x_1 \ldots x_n)\, \xi^i \xi^k. \tag{46}$$

La métrique est complètement définie par la donnée de la connexion affine (39) et de la forme quadratique φ. On en déduit le rapport des mesures de deux vecteurs équipollents, situés dans deux espaces affines tangents infiniment voisins; on obtient, en effet, par différentiation de (46), compte tenu de (11),

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{\frac{1}{2}\,\overline{d}\,a_{ik}\,\xi^i \xi^k}{a_{ik}\,\xi^i \xi^k}.$$

Dans le déplacement d'un vecteur par équipollence, la rotation affine de ce vecteur par rapport au n-èdre de référence se décompose donc en une rotation euclidienne et une homothétie. En général, cette homothétie dépend de l'orientation du vecteur. Une variété est dite « à connexion métrique » si ce rapport d'homothétie ne dépend pas de l'orientation du vecteur, mais seulement du déplacement de l'origine. Pour cela, il faut et il suffit que

$$\overline{d}\,a_{ik} = 2\,a_{ik}\,d\psi, \tag{47}$$

$d\psi$ étant une forme linéaire, d'ailleurs arbitraire, des $d\omega^i$.

Une connexion métrique est complètement définie par la donnée du tenseur fondamental a_{ik}, de la forme linéaire $d\psi$, et des composantes de la torsion $\overline{\delta}\, d\omega^i - \overline{d}\, \delta\omega^i$.

L'étude des variétés à connexion métrique, sans torsion, constitue la géométrie de Weyl. Cette géométrie est donc complètement déterminée par la forme quadratique φ et la forme linéaire $d\psi$.

Lorsque $d\psi$ est nul, la connexion est dite « euclidienne ». Il en est de même lorsque $d\psi$ est une différentielle exacte, car on peut l'an-

(¹) On suppose que la mesure d'un vecteur entraîné avec le n-èdre de référence, sans mouvement relatif, est une fonction uniforme de la situation de ce n-èdre.

nuler en prenant un étalon e^{ψ} fois plus long. Les variétés à connexion euclidienne et sans torsion sont les variétés riemanniennes.

Sur une variété à connexion métrique, la courbure affine, associée à un contour infiniment petit, se décompose en une rotation euclidienne et une homothétie. Le théorème de la conservation de la courbure et de la torsion exprime que la somme des rotations et la somme des homothéties associées aux éléments d'une V_2 de la variété, fermée et infiniment petite, sont nulles.

On simplifie l'étude des connexions métriques en les rapportant à n vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ orthogonaux et de longueur unité. On a alors

$$d\gamma_{ik} = a_{kh}\, d\gamma_i^h = d\gamma_i^k,$$

et (46) et (47) s'écrivent

$$(48) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi = (d\omega_i)^2, \\ &d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} = 0 \qquad (i \neq k), \\ &d\gamma_{ii} = -\,d\psi. \end{aligned} \right.$$

Le calcul différentiel absolu défini par (48) se réduit au calcul de Ricci pour $d\psi = 0$, avec $\overline{\delta}\, d\omega^i - \overline{d}\, \delta\omega^i = 0$.

Remarquons également que, par le choix d'un étalon et de vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ qui soient $e^{\int d\psi}$ fois plus longs, l'intégrale $\int d\psi$ étant prise le long du chemin parcouru, on peut donner, aux équations de définition de la connexion métrique (48), la forme

$$(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi = e^{2\int d\psi} (d\omega_i)^2, \\ &d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} = 0; \end{aligned} \right.$$

ainsi, les variétés à connexion métrique peuvent être considérées comme représentables conformément sur les variétés à connexion euclidienne, le rapport des deux ds^2 n'étant pas nécessairement uniforme.

Le $ds^2 = \varphi$ d'un élément d'arc n'est susceptible d'une signification intrinsèque que lorsqu'on peut adopter un étalon de mesure des longueurs pour lequel $d\psi$ soit nul, c'est-à-dire lorsque la connexion est euclidienne [1].

---

[1] Il résulte en effet de (47) que, lorsque $d\psi \neq 0$, la mesure de la longueur d'un élément d'arc dépend de l'extrémité à laquelle on se place.

Les courbes de longueur stationnaire d'une variété à connexion euclidienne, prise sous la forme (48) avec $d\psi = 0$, sont les extrémales de l'intégrale

$$I = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{d\omega_i^2}.$$

En désignant par δx_i la variation du point courant de l'extrémale, déformation fonction de s mais nulle aux deux extrémités, la variation première de I est

$$\delta I = \int_A^B \frac{d\omega_i}{ds} \bar{\delta}\, d\omega^i = \int_A^B \frac{d\omega_i}{ds} \bar{d}\, \delta\omega_i + \int_A^B \frac{d\omega_i}{ds} (\bar{\delta}\, d\omega_i - \bar{d}\, \delta\omega_i).$$

Or

$$\int_A^B \frac{d\omega_i}{ds} \bar{d}\, \delta\omega_i = \left[\frac{d\omega_i}{ds} \delta\omega_i\right]_A^B - \int_A^B \delta\omega_i \bar{d} \frac{d\omega_i}{ds},$$

et la quantité intégrée au second membre est nulle par hypothèse. Il vient donc

$$\delta I = -\int_A^B \delta\omega_i \left\{ \bar{d} \frac{d\omega_i}{ds} - A_{khi} \frac{d\omega_k}{ds} d\omega_h \right\}.$$

Si la variété est sans torsion, les extrémales sont donc les intégrales du système d'équations

$$\bar{d} \frac{d\omega_i}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire les géodésiques.

D'ailleurs, pour qu'une géodésique soit une ligne de longueur stationnaire, il faut et il suffit que, le long d'une telle ligne,

$$d\omega_k (A_{khi}\, d\omega_h\, \delta\omega_i) = 0,$$

c'est-à-dire que la translation affine $A_{khi}\, d\omega_h\, \delta\omega_i$ associée à tout élément plan, passant par un élément d'arc quelconque $d\omega_k$ de cette courbe, soit orthogonale à cet élément d'arc.

Pour que toute géodésique soit une ligne de longueur stationnaire, il faut donc et il suffit que la translation associée à un élément plan quelconque soit orthogonale à cet élément plan. Pour une V_2, ceci exige qu'elle soit sans torsion.

CHAPITRE VI.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ABSOLU D'UNE VARIÉTÉ PLONGÉE DANS UNE AUTRE.

1. Courbure d'une variété par rapport à une autre.— Étant donnée une variété V_N, l'ensemble des états pour lesquels les N coordonnées satisfont à certaines relations constituent eux-mêmes une variété. On ne restreint pas la généralité en supposant les coordonnées telles que x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_N soient constantes le long de la variété en question.

Relativement à cette variété à n dimensions V_n, les changements de variables de la V_N, qui laissent invariant le système

$$x_{n+1} = \text{const.}, \qquad x_{n+2} = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad x_N = \text{const.},$$

jouent un rôle particulier. Ils sont de la forme

$$(50) \qquad \begin{cases} x'_\alpha = x'_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_N) & (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \\ x'_{n+\rho} = x'_{n+\rho}(x_{n+1}, \ldots, x_N) & (\rho = 1, 2, \ldots, N-n), \end{cases}$$

c'est-à-dire tels que

$$\theta_a^{n+\rho} = 0 \qquad (a = 1, 2, \ldots, n).$$

Étudier une V_n appartenant à une V_N conduit donc à étudier comment se comporte le calcul tensoriel envers le sous-groupe linéaire

$$(51) \qquad \begin{cases} d\omega'^\alpha = \theta_a^\alpha \, d\omega^a + \theta_{n+r}^\alpha \, d\omega^{n+r} & (\alpha, a = 1, 2, \ldots, n), \\ d\omega'^{n+\rho} = \qquad\qquad \theta_{n+r}^{n+\rho} \, d\omega^{n+r} & (\rho, r = 1, 2, \ldots, N-n). \end{cases}$$

Nous savons que la substitution aux dx^i des formes de Pfaff $d\omega^i$ ne complique en rien le calcul; mais, cependant, nous généralisons ainsi la question, car le système invariant d'équations

$$(52) \qquad d\omega^{n+r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, N-n)$$

ne définit une véritable V_n que s'il est complètement intégrable.

Nous poserons $q = N - n$, et nous désignerons par $i, k, h, \ldots$; $a, b, c, \ldots$; $r, s, t, \ldots$ les indices pouvant prendre respectivement les valeurs $1, 2, \ldots, N$; $1, 2, \ldots, n$; $1, 2, \ldots, q$; et par $\lambda, \mu, \nu, \ldots$;

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots; \rho, \sigma, \tau, \ldots$ les indices correspondants pour le nouveau système de coordonnées. Posons

$$\theta^{n+\rho}_{n+r} = \chi^{\rho}_{r}, \qquad \theta^{n+r}_{n+\rho} = \chi^{r}_{\rho};$$

les systèmes des θ^{a}_{α} et des χ^{r}_{ρ} sont respectivement les réciproques des systèmes des θ^{α}_{a} et des χ^{ρ}_{r}.

Dans tout tenseur $X^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_m}$ de la V_N, l'ensemble des composantes $X^{n+r_1\ldots n+r_p}_{a_1\ldots a_m}$ constituent un tenseur pour les transformations (51). C'est ce que nous appellerons la *composante normale* du tenseur de la V_N. La propriété d'avoir sa composante normale nulle est donc invariante, et le tenseur est alors dit « tangent à la V_n ».

Supposons maintenant que soit définie dans la V_N une différentiation tensorielle (ou connexion affine) de rotations $\gamma^{k}_{ih}\,d\omega^h$. Le long de la V_n, les seuls éléments utiles sont les γ^{k}_{ib}; posons

$$\gamma^{n+r}_{ab} = P^{r}_{ab}, \qquad \gamma^{a}_{n+r\,b} = Q^{a}_{rb}, \qquad \gamma^{n+s}_{n+r\,b} = R^{s}_{rb}.$$

Désignons par le symbole $\overline{\overline{d}}$ l'opérateur auquel se réduit la différentiation absolue dans la V_N, le long de la V_n, lorsqu'on y supprime les rotations P^{r}_{ab} et Q^{a}_{rb}, qui substituent à un indice d'un groupe un indice de l'autre groupe.

Les équations (I) qui donnent les rotations de la différentiation covariante s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&(53) \qquad & \overline{\overline{d}}\,\theta^{n+\rho}_{a} &= 0 = -P'^{\rho}_{\alpha\beta}\,\theta^{\alpha}_{a}\,d\omega'^{\beta} + P^{r}_{ab}\,\chi^{\rho}_{r}\,d\omega^{b},\\
&(54) \qquad & \overline{\overline{d}}\,\theta^{\alpha}_{a} &= P^{r}_{ab}\,\theta^{\alpha}_{n+r}\,d\omega^{b},\\
&(55) \qquad & \overline{\overline{d}}\,\theta^{\alpha}_{n+r} &= -Q'^{\alpha}_{\rho\beta}\,\chi^{\rho}_{r}\,d\omega'^{\beta} + Q^{a}_{rb}\,\theta^{\alpha}_{a}\,d\omega^{b},\\
&(56) \qquad & \overline{\overline{d}}\,\chi^{\rho}_{r} &= -P'^{\rho}_{\alpha\beta}\,\theta^{\alpha}_{n+r}\,d\omega'^{\beta}.
\end{aligned}$$

(53) définit les $P'^{\rho}_{\alpha\beta}$, (54) les $\gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma}$, (55) les $Q'^{\alpha}_{\rho\beta}$, et (56) les $R'^{\rho}_{\sigma\beta}$. (53) exprime que les P^{r}_{ab} constituent un tenseur $\binom{1}{2}^{\text{uple}}$ pour les transformations (52).

En particulier, le système des équations $P^{r}_{ab} = 0$ a une signification invariante; il exprime que tout tenseur tangent à la V_n reste tangent dans le déplacement par équipollence dans la V_N, le long de la V_n. La V_n est alors dite *plane* (par rapport à la V_N). Les géodésiques d'une telle V_n sont géodésiques pour la V_N.

Si la V_n est une vraie variété, c'est-à-dire si le système (52) est complètement intégrable, et si la V_N est sans torsion, le tenseur P^r_{ab} est symétrique ($P^r_{ab} = P^r_{ba}$). Cela résulte de l'identité

$$\bar{\delta}\, d\omega^{n+r} - \bar{d}\, \delta\omega^{n+r} = (\delta\, d\omega^{n+r} - d\, \delta\omega^{n+r}) + (P^r_{ab} - P^r_{ba})\, d\omega^a\, \delta\omega^b + \ldots = 0;$$

dans le second membre, les termes non écrits sont nuls quand on se déplace le long de la V_n, et il en est de même du premier terme, d'après l'hypothèse faite sur le système (52).

D'une manière générale, le vecteur $\vec{\eta}$ déduit d'un vecteur $\vec{\xi}$, tangent à la V_n en $M(\xi^{n+r} = 0)$, par déplacement par équipollence le long de $\overrightarrow{MN} = d\omega^i \vec{e_i}$, n'est pas tangent à la V_n, car

$$\eta^{n+r} = d\xi^{n+r} = -P^r_{ab}\, \xi^a\, d\omega^b.$$

On dit que le tenseur P^r_{ab} traduit la courbure de la V_n par rapport à la V_N. D'après $\bar{d}\xi^a = \bar{\bar{d}}\xi^a = 0$, on voit que la composante $\eta^a \vec{\varepsilon_a}$ de $\vec{\eta}$, en N, est le vecteur déduit de $\vec{\xi}$ par l'équipollence que définit, dans la V_n, la différentiation $\bar{\bar{d}}$.

2. Connexion affine réduite. — Il est à remarquer que l'équipollence (ou la connexion affine), ainsi définie par l'opérateur $\bar{\bar{d}}$ dans la V_n, n'est pas invariante pour le groupe (51); mais elle le devient lorsque les données permettent de fixer, en chaque point de la V_n, non seulement le $(n+1)$-plan tangent, mais encore le $(q+1)$-plan des vecteurs $\overrightarrow{e_{n+r}}$, que, par opposition aux vecteurs tangents, nous appellerons $(q+1)$-plan *normal* à la V_n.

Plaçons-nous maintenant dans ce cas. Le groupe des transformations (51) se réduit au sous-groupe pour lequel

$$(57) \qquad \theta^\alpha_{n+r} = \theta^{n+\rho}_a = 0,$$

et, par suite, $\theta^a_{n+\rho} = \theta^{n+r}_\alpha = 0$. Tout tenseur $X^{k_1 \ldots k_p}_{i_1 \ldots i_m}$ contient un tenseur normal $X^{n+r_1 \ldots n+r_p}_{a_1 \ldots a_m}$ et un tenseur tangent $X^{a_1 \ldots a_p}_{n+r_1 \ldots n+r_m}$. Plus généralement, tout système déduit de ce tenseur, en ne donnant à chaque indice que les valeurs de l'un ou l'autre des groupes $1, 2, \ldots, n$; $n+1, n+2, \ldots, N$, est lui-même un tenseur.

Les équations (53) à (56) deviennent

$$(58) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\bar{\bar{d}}\,\theta_a^\alpha = 0, \\ &\bar{\bar{d}}\,\chi_r^\rho = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(59) \qquad \left\{ \begin{aligned} &P'^\rho_{\alpha\beta} = \chi_r^\rho\,\theta_\alpha^a\,\theta_\beta^b\,P^r_{ab}, \\ &Q'^\alpha_{\rho\beta} = \chi_\rho^r\,\theta_a^\alpha\,\theta_\beta^b\,Q^a_{rb}; \end{aligned} \right.$$

les rotations contiennent donc deux tenseurs $\binom{1}{2}^{\text{uples}}$, relativement aux transformations (57).

Les équations $Q^a_{rb} = 0$ expriment qu'un tenseur normal à la V_n ($X^{a_1 \ldots a_p}_{n+r_1 \ldots n+r_m} = 0$) reste normal dans tout déplacement par équipollence le long de la V_n.

La connexion affine définie dans la V_n par le calcul pfaffien réduit, d'opérateur $\bar{\bar{d}}$, est invariante pour les transformations (57), de sorte que la V_n est maintenant une variété à connexion affine bien déterminée, appartenant à la variété à connexion affine V_N. La connexion de la V_n s'appellera la *connexion affine réduite à la* V_n.

Si la V_N est sans torsion, il en est de même de la V_n, car, le long de celle-ci, $\bar{\delta}\, d\omega^a = \bar{\bar{\delta}}\, d\omega^a$.

Supposons que la V_N soit à connexion métrique, le $(q+1)$-plan normal en M étant orthogonal à la V_n. Le long de la V_n, la forme quadratique de la métrique est de la forme

$$\varphi = a_{ab}\, d\omega^a\, d\omega^b + a_{n+r,\, n+s}\, d\omega^{n+r}\, d\omega^{n+s},$$

de sorte que

$$\bar{d}\, a_{ab} = \bar{\bar{d}}\, a_{ab};$$

donc la V_n est également à connexion métrique, avec le même rapport d'homothétie $1 + d\psi$.

Il résulte de là que la V_n est riemannienne en même temps que la V_N; de sorte que la connexion réduite à la V_n coïncide avec la connexion riemannienne déterminée par le ds^2 de cette V_n. L'équipollence riemannienne (ou de Levi-Civita), dans la V_n, est donc le résultat de l'équipollence riemannienne, dans la V_N, d'un vecteur tangent à la V_n, suivie d'une projection orthogonale sur la V_n. Cette propriété, relative au cas où la V_N est un espace euclidien, constitue le théorème classique énoncé en 1917 par Levi-Civita.

3. Relations entre les courbures de deux variétés sans torsion. — Particularisons encore le problème en supposant la V_N, et par suite la V_n, sans torsion; supposons également que la V_n, définie par les équations (52), soit une vraie variété. Désignons par les lettres Γ et γ les éléments des courbures respectives de la V_N et de la V_n. On a

$$\Gamma^a_{bcd} = \frac{\bar{\partial}\gamma^{(a)}_{bc}}{\partial\omega_d} - \frac{\bar{\partial}\gamma^{(a)}_{bd}}{\partial\omega_c},$$

$$\gamma^a_{bcd} = \frac{\bar{\bar{\partial}}\gamma^{(a)}_{bc}}{\partial\omega_d} - \frac{\bar{\bar{\partial}}\gamma^{(a)}_{bd}}{\partial\omega_c},$$

et la symétrie des P^r_{ab} entraîne

$$\Gamma^a_{bcd} = \gamma^a_{bcd} - (P^r_{bd}\,Q^a_{rc} - P^r_{bc}\,Q^a_{rd});$$

on calcule de même les Γ^{n+r}_{bcd}, $\Gamma^a_{n+r\,cd}$, $\Gamma^{n+s}_{n+r\,cd}$.

En introduisant les tenseurs quadruples

$$(60)\qquad \left\{\begin{aligned} P^a_{bcd} &= P^r_{bd}\,Q^a_{rc} - P^r_{bc}\,Q^a_{rd},\\ Q^s_{rcd} &= P^s_{ac}\,Q^a_{rd} - P^s_{ad}\,Q^a_{rc}, \end{aligned}\right.$$

on obtient, en définitive, entre les courbures des deux variétés, les relations fondamentales

$$(61)\qquad \left\{\begin{aligned} &\gamma^a_{bcd} &&- P^a_{bcd} &&= \Gamma^a_{bcd}.\\ &P^r_{bc}/\!/_d &&- P^r_{bd}/\!/_c &&= \Gamma^{n+r}_{bcd},\\ &Q^a_{rc}/\!/_d &&- Q^a_{rd}/\!/_c &&= \Gamma^a_{n+r\,cd},\\ &R^s_{rcd} &&- Q^s_{rcd} &&= \Gamma^{n+s}_{n+r\,cd}. \end{aligned}\right.$$

Les dérivées absolues qui interviennent dans ces formules sont les dérivées réduites à la V_n, et R^s_{rcd} représente l'expression $R^{(s)}_{rc}/\!/_d - R^{(s)}_{rd}/\!/_c$.

Les γ^a_{bcd} sont les courbures intrinsèques de la connexion réduite. Les R^s_{rcd} peuvent être appelées les *courbures de torsion* (ne pas confondre avec la torsion d'une connexion affine).

Lorsque la V_N est riemannienne avec

$$\varphi = (d\omega_i)^2,$$

on a

$$P^r_{ab} = -Q^a_{rb},$$

et les deux lignes intermédiaires de (61) sont identiques. On peut d'ailleurs écrire $P_{ab,cd}$ et $Q_{rs,cd}$ pour P^h_{acd} et Q^s_{rcd}; ces symboles covariants sont symétriques gauches par rapport aux deux indices de chaque couple, et les $P_{ab,cd}$ sont en outre symétriques, comme les $\gamma_{ab,cd}$ et $\Gamma_{ab,cd}$, par rapport aux deux couples d'indices.

Les formules (61) sont fondamentales dans l'établissement des propriétés géométriques de la V_n, relativement à la V_N qui la contient.

BIBLIOGRAPHIE.

CHRISTOFFEL. — Ueber die Transformationen der homogenen Differentialausdrücke 2ten grades (*Journal de Crelle*, Bd 70, 1869).

RICCI et LEVI-CIVITA. — Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications (*Math. Annalen*, Bd 54, 1900).

RICCI. — *Lezioni sulla teoria delle superficie.*

LEVI-CIVITA. — Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura riemanniana (*Rendic. del Circ. Mat. di Palermo*, vol. 42, 1917).

— Lezioni di calcolo differenziale assoluto (Rome, 1925).

WEYL. — Reine Infinitesimalgeometrie (*Math Zeitschr.*, Bd 2, 1918).

— Zür Infinitesimalgeometrie : Einordnung der projectiven und der konformen Auffassung (*Götinger Nachr.*, 1921).

— *Zeit, Raum, Materie*, 5e édition (Traduction française : Temps, espace, matière).

EDDINGTON. — A generalisation of Weyl's Theory of the electro magnetic and gravitational Fields (*Proc. Roy. Soc.*, A.99, 1921).

— *The mathematical theory of relativity.*

CARTAN. — *C. R. Ac. Sc.*, 1922 (13 février, 27 février, 27 mars, 24 avril).

— Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (*Ann. École Norm. sup.*, 1924 et 1925).

SCHOUTEN. — Ueber die verschiedenen Arten der Uebertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differential-geometrie zugrunde gelegt werden können (*Math. Zeitschr.*, Bd 13, 1922).

— On the place of conformal and projective geometrie in the theory of linear displacements (*Proceedings*, vol. 27).

BIANCHI. — *Lezioni di geometria differenziale.*

CARPANESE (Anita). — Parallelismo e curvatura in una varietà qualunque (*Annali di Matematica*, 3e série, vol. 28, 1919).

HESSENBERG. — Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie (*Math. Ann.*, 78, 1916).

JUVET. — *Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu.*

KÖNIG. — Beiträge zu einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (*Jahresber. d. D. Math. Ver.*, 28, 1920).

LAGRANGE (René). — Sur le calcul différentiel absolu (Thèse). (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1923).

— Sur le calcul différentiel absolu (*C. R. Ac. Sc.*, 11 avril 1924).

PALATINI. — Sui fondamenti del calcolo differenziale assoluto (*Rendic. del Circ. Mat. di Palermo,* vol. 43, 1919).

STRUIK. — *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung.*

TABLE DES MATIÈRES.