MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

G. VALIRON

Théorie générale des séries de Dirichlet

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 17 (1926)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1926__17__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.,
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE XVII

Théorie générale des séries de Dirichlet

PAR M. G. VALIRON

Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras figurant entre crochets dans le courant du texte renvoient à cette Bibliographie.

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

SÉRIES DE DIRICHLET

Par M. G. VALIRON.

I. — Introduction.

1. Définitions et notations. — Les séries de Dirichlet les plus générales sont les séries de la forme

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

où $s = \sigma + it$ est la variable complexe, les λ_n des nombres réels indéfiniment croissants ($\lambda_{n+1} > \lambda_n$, $\lim \lambda_n = +\infty$) et les a_n des coefficients quelconques. Dans l'étude de telles séries on peut supposer que $\lambda_1 \geqq 0$, c'est ce qu'on fera toujours dans la suite. Toutes les séries correspondant à une même suite λ_n sont dites *du même type*, *le type* λ_n.

Nous désignerons par $f(s)$ la somme de la série (1), lorsque cette série converge au point s.

Les séries du type $\lambda_n = n$ sont les séries entières en e^{-s}, leurs propriétés se déduisent de celles des séries de Taylor, elles ont servi à orienter certaines recherches sur les séries les plus générales. Un autre cas particulier important est celui des séries du type $\lambda_n = \log n$, ces séries

$$(2) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

qui jouent un rôle considérable dans la théorie analytique des nombres sont celles qui ont été surtout envisagées par L. Dirichlet [9], on les appellera séries de Dirichlet *proprement dites*. La plus simple d'entre elles, correspondant à $a_n = 1$, définit la célèbre fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

La théorie générale des séries de Dirichlet a son origine dans les travaux de E. Cahen et de J. Hadamard. Les mathématiciens allemands et scandinaves, sous l'impulsion de E. Landau, ont considérablement complété, étendu et approfondi les résultats des deux géomètres français; à côté d'eux on doit signaler particulièrement M. Riesz et G.-H. Hardy, qui ont étudié le prolongement analytique des fonctions définies par ces séries, et H. Bohr qui a apporté à la théorie une contribution très personnelle et très importante.

Nous emploierons dans ce fascicule certaines notations qui sont d'un usage courant dans les Mémoires traitant des séries de Dirichlet et de la théorie analytique des nombres.

Soient x une variable réelle qui tend vers une limite (finie ou infinie), $\varphi(x)$ une fonction positive de cette variable, et $\psi(x)$ une autre fonction réelle ou complexe de x. La notation

$$\psi(x) = O[\varphi(x)]$$

signifie que le rapport $|\psi(x)| : \varphi(x)$ reste borné lorsque x tend vers sa limite; si ce rapport tend vers o, on écrit

$$\psi(x) = o[\varphi(x)].$$

En particulier, si $|\psi(x)|$ reste borné, on écrira

$$\psi(x) = O(1),$$

et si $\psi(x)$ tend vers o, on aura

$$\psi(x) = o(1).$$

Ce sont les notations de Bachmann.

c_n étant le terme général d'une série quelconque, on posera

$$C(x) = \sum_{n \leqq x} c_n, \qquad C_\lambda(x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} c_n.$$

2. Sur une classe particulière de séries de Dirichlet. — D'après les propriétés connues des séries de puissances, le domaine de convergence des séries du type $\lambda_n = n$, s'il existe, est le plan complet ou un demi-plan $\sigma > \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ étant défini par l'égalité de Cauchy-Hadamard

$$\mathcal{C} = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|a_n|}{n}.$$

Les procédés qui conduisent à cette proposition se généralisent de suite à une classe étendue de séries de Dirichlet. Posons

$$\text{(3)} \qquad D = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log n}{\lambda_n};$$

la propriété des séries à termes positifs décroissants c_n de ne pouvoir converger que si nc_n tend vers o, montre que la série

$$\text{(4)} \qquad \Sigma\, e^{-\lambda_n \sigma}$$

converge pour $\sigma > D$ et diverge pour $\sigma < D$. Supposons que D soit fini; si ε est positif et donné, on a, à partir d'une valeur de n,

$$\text{(5)} \qquad |a_n e^{-\lambda_n(s+D+2D\varepsilon)}| < |a_n e^{-\lambda_n s}| \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

La convergence de la série (1) au point s_0 entraîne donc la convergence absolue et uniforme pour $\sigma > \sigma_0 + D + \varepsilon$. En supposant $D = 0$, le théorème relatif au cas du type (n) se généralise et l'on obtient cette proposition :

I. *Étant donnée une série de Dirichlet* (1), *pour laquelle le nombre* D *est nul, si l'on pose*

$$\text{(6)} \qquad \mathcal{C} = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|a_n|}{\lambda_n},$$

la série diverge pour $\sigma < \mathcal{C}$ *et converge absolument et uniformément pour* $\sigma \geqq \sigma_0 > \mathcal{C}$. *Si le domaine de convergence existe* ($\mathcal{C} < +\infty$), *la somme* $f(s)$ *de la série est une fonction holomorphe de* s *à l'intérieur de ce domaine.*

Dans le cas $\lambda_n = n$, les propriétés connues des fonctions analytiques montrent que la fonction analytique qui coïncide avec $f(s)$ dans le domaine de convergence, admet des points singuliers sur la droite $\sigma = \mathcal{C}$. *Cette propriété ne se conserve pas pour toutes les* *séries telles que* $D = 0$. Choisissons en effet des nombres μ_n positifs et indéfiniment croissants, tels que $\log n : \mu_n$ tende vers o, et adjoignons-leur des nombres positifs ε_n tels que la série de type μ_n et de coefficients ε_n converge quel que soit s; la série de Dirichlet obtenue en prenant

$$\lambda_{2n} = \mu_n, \qquad \lambda_{2n+1} = \mu_n + \varepsilon_n,$$
$$a_{2n} = 1, \qquad a_{2n+1} = -1,$$

appartient à la classe considérée ici, son domaine de convergence est $\sigma > 0$ d'après la formule (6) et elle représente une fonction entière, comme on le voit de suite en groupant les termes de rangs $2n$ et $2n+1$. En particulier on peut prendre $\mu_n = 2n$, ce qui montre que les fonctions définies par deux séries de type voisin peuvent présenter des propriétés essentiellement différentes. Ainsi, non seulement le mode de croissance de la suite λ_n, mais aussi la régularité de la croissance doit jouer un rôle important dans cette étude. D'après les travaux de H. Bohr (Chap. IV), la nature arithmétique des nombres λ_n intervient également.

II. — Le domaine de convergence.

3. **Le domaine de convergence. Convergence absolue et convergence uniforme.** — L'étude des séries de Dirichlet de type quelconque, se fait en utilisant la transformation d'Abel

$$(7) \quad \sum_n^m c_p d_p = [C(m) - C(n-1)]\, d_m + \sum_n^{m-1} [C(p) - C(n-1)](d_p - d_{p+1}).$$

Lorsque les différences $C(p) - C(n-1)$ ont un module inférieur à K et que les d_p sont positifs et monotones, on a

$$(8) \qquad \left| \sum_n^m c_p d_p \right| < K d_n \qquad \text{ou} \qquad \left| \sum_n^m c_p d_p \right| < 2K d_m$$

suivant que les d_p sont décroissants ou croissants. Supposons que la série (1) converge pour $s = s_0$, posons

$$c_p = a_p e^{-\lambda_p s_0}, \qquad d_p = e^{-\lambda_p (s - s_0)},$$

et appliquons l'égalité (7). Comme on a ici

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} |d_p - d_{p+1}| &= \left|(s-s_0)\int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} e^{-x(s-s_0)}\,dx\right| \\ &< \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\left[e^{-\lambda_p(\sigma-\sigma_0)} - e^{-\lambda_{p+1}(\sigma-\sigma_0)}\right] \end{aligned} \right.$$

on obtient le premier théorème de Cahen [a], que nous énoncerons avec le complément qui y fut ajouté par O. Perron. [*Voir* aussi 32 (*c*).]

II. *Si la série de Dirichlet* (1) *converge pour* $s = s_0$, *et si* H *est un nombre positif fixe arbitrairement grand, la série est uniformément convergente dans la région*

$$\sigma \geqq \sigma_0, \qquad |s - s_0| \leqq (\sigma - \sigma_0)\,\mathrm{H}\,e^{\mathrm{H}(\sigma-\sigma_0)},$$

qui comprend l'angle

$$\sigma \geqq \sigma_0, \qquad |s - s_0| \leqq \mathrm{H}(\sigma - \sigma_0).$$

Cette proposition contient comme cas particulier le théorème classique d'Abel, sur la continuité de la somme d'une série entière en un point de convergence de la circonférence de convergence. La convergence en s_0 entraîne donc la convergence à l'intérieur du demi-plan $\sigma > \sigma_0$ et la convergence uniforme dans toute région complètement intérieure à ce demi-plan. En appliquant d'autre part le théorème de Weierstrass sur les suites uniformément convergentes de fonctions holomorphes, on arrive au second théorème de Cahen [a].

III. *Ou bien la série* (1) *diverge partout, ou bien elle converge partout et sa somme est une fonction entière, ou bien il existe un nombre fini* $\mathcal{C}$ *tel que la série converge pour* $\sigma > \mathcal{C}$ *et diverge pour* $\sigma < \mathcal{C}$. *La somme* $f(s)$ *est une fonction holomorphe à l'intérieur du demi-plan* $\sigma > \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ est appelé *l'abscisse de convergence*, la droite $\sigma = \mathcal{C}$ qui limite le demi-plan de convergence est la *droite de convergence*.

Lorsque le domaine de convergence existe, il peut arriver que la série converge absolument pour une valeur s_0, donc sur la droite $\sigma = \sigma_0$; d'après le théorème II elle converge absolument pour $\sigma > \sigma_0$, *il existe donc aussi un demi-plan de convergence absolue* $\sigma > \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ pouvant être égal à $-\infty$ ou à $+\infty$. $\mathcal{A}$ est *l'abscisse de convergence absolue*. L'inégalité (5) conduit de suite à ce théorème de Cahen [a] :

IV. *La différence $\mathcal{A}-\mathcal{C}$ des abscisses de convergence absolue et ordinaire est au plus égale au nombre* D *défini par l'égalité* (3).

On voit, en prenant $s=\sigma$, que la série pour laquelle $a_n=(-1)^n$ admet pour abscisse de convergence $\mathcal{C}=0$; la série des modules est la série (4), on a donc $\mathcal{A}=\mathrm{D}$. La différence $\mathcal{A}-\mathcal{C}$ peut donc atteindre sa limite supérieure D.

H. Bohr [c, h, n] a introduit la notion de demi-plan de convergence uniforme : *l'abscisse de convergence uniforme* $\mathcal{U}$ est la borne inférieure des nombres σ_0, tels que la convergence soit uniforme pour $\sigma \geqq \sigma_0$. Le raisonnement qui conduit au théorème II montre que la convergence uniforme sur la droite $\sigma=\sigma_0$ entraîne la convergence uniforme pour $\sigma \geqq \sigma_0$, $\mathcal{U}$ est donc aussi la borne inférieure des abscisses des droites $\sigma=\sigma_0$ sur lesquelles la série converge uniformément.

Il est manifeste que $\mathcal{C} \leqq \mathcal{U} \leqq \mathcal{A}$. L. Neder [a] a montré que le nombre $\mathcal{U}$ peut prendre effectivement toute valeur satisfaisant à ces inégalités.

E. Cahen [a] a donné une expression simple de l'abscisse de convergence valable lorsque cette abscisse est positive. Si la série (1) converge pour $\sigma_0>0$, on a, en posant

$$c_p=a_p e^{\lambda_p\sigma_0}, \qquad d_p=e^{\lambda_p\sigma_0},$$

et en appliquant la formule (8) avec $n=1$,

$$|\mathrm{A}(m)|<2\mathrm{K}e^{\lambda_m\sigma_0}, \qquad \left[\mathrm{A}(m)=\sum_1^m a_n\right].$$

Inversement, si $\mathrm{A}(m)$ vérifie une telle inégalité avec $\sigma_0>0$, en vertu de la formule d'Abel (7), la série (1) converge pour $\sigma>\sigma_0$ en même temps que l'intégrale

$$\int_\alpha^\infty \mathrm{A}_\lambda(x)e^{-sx}\,dx \quad (^1)$$

dont la convergence est évidente. Ainsi :

---

(1) Les fonctions définies par de telles intégrales lorsque $\mathrm{A}_\lambda(x)$ est remplacé par une fonction intégrable croissant moins vite qu'une exponentielle présentent de grandes analogies avec les fonctions définies par les séries (1).

V. *L'abscisse de convergence est donnée par*

$$\mathcal{C} = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |A(n)|}{\lambda_n}, \tag{10}$$

si ce nombre est positif; elle est négative ou nulle lorsque le second membre de l'égalité (10) *est négatif ou nul.*

En remplaçant dans cette formule $A(n)$ par la somme $\sum^{n} |a_p|$, on obtient une expression de l'abscisse de convergence absolue, valable si $\mathcal{A}$ est positif. L'abscisse de convergence uniforme $\mathcal{U}$ s'obtient par des considérations analogues si elle est positive, elle est donnée par le second membre de (10) dans lequel $|A(n)|$ est remplacé par la borne supérieure de

$$\left| \sum_{1}^{n} a_p e^{-\lambda_p it} \right|,$$

lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$ [Bohr [**k**] et Kuniyeda [**a**]].

S. Pincherle a montré le premier que lorsque $\mathcal{C}$ est négatif, sa valeur s'obtient en remplaçant dans le second membre de (10), $A(n)$ par $A(\infty) - A(n)$. (*Voir* aussi Cotton.) K. Knopp [**d**], T. Kojima [**a**, **b**], M. Fujiwara [**a**, **b**], E. Lindh [**30**], B. Malmrot, S. Kakeya, G. Valiron [**a**], ont donné des expressions des abscisses de convergences valables dans tous les cas. Parmi les résultats obtenus, signalons le suivant : $\mu_p = \lambda_{n_p}$ étant une suite extraite de la suite λ_n et telle que $\mu_{p+1} : \mu_p$ tende vers 1 et que

$$\Sigma e^{-\mu_p \sigma}$$

converge quel que soit σ, il suffit de remplacer dans (10) et dans les formules analogues $A(n)$ par la somme des a_m pour m compris entre n et le plus grand nombre n_p inférieur à n, pour obtenir des expressions valables quel que soit le signe de $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{U}$.

4. Unicité du développement en série de Dirichlet. Singularité de $f(s)$ à l'infini. — Si la série (1) converge pour s_0, elle converge uniformément dans tout angle $\sigma > \sigma_0$, $|s - s_0| \leqq H(\sigma - \sigma_0)$, et si $\lambda_1 > 0$ elle tend uniformément vers 0, à la façon d'une exponentielle, lorsque s s'éloigne indéfiniment dans un tel angle. En mettant en facteur le premier terme de la série et en appliquant ce résultat, on voit que la fonction $f(s)$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans un tel angle, et plus généralement dans toute région considérée dans l'énoncé II. Comme la différence de deux séries de Dirichlet est encore une série de Dirichlet, on obtient ainsi des théorèmes d'unicité et en particulier le suivant :

VI. *Deux séries de Dirichlet possédant des domaines de con vergence, ne peuvent avoir la même somme dans une région quelconque complètement intérieure aux deux domaines de convergence, que si elles sont identiques.*

Une autre conséquence de ce qui précède est que *le point à l'infini est une singularité transcendante de la fonction $f(s)$* définie par la série de Dirichlet; si cette fonction $f(s)$ est holomorphe dans tout le plan, c'est une fonction entière dont l'ordre est au moins égal à 1. (*Voir* le fascicule sur les fonctions entières.)

5. Expression de $A(n)$ **et généralisations.** — E. Cahen [a] a montré que la somme $A(n)$ peut s'exprimer au moyen d'une intégrale portant sur $f(s)$ et prise sur une droite $\sigma =$ const. convenablement choisie. La démonstration de Cahen, surtout formelle, a été complétée par J. Hadamard [c] dans le cas où $\mathcal{L}$ est fini, puis par O. Perron dans le cas général. Les théorèmes de Cauchy permettent de montrer que l'on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xs}\frac{ds}{s} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

l'intégrale étant prise sur la droite $\sigma = c > 0$. D'autre part, en s'appuyant sur la transformation d'Abel et l'inégalité (9), on établit ce lemme [O. Perron, Landau [53], Hardy [52]] :

VII. *Si une série de Dirichlet converge pour $s = s_0$, on a uniformément, quels que soient $\sigma \geqq \sigma_0 + \varepsilon (\varepsilon > 0)$ et n,*

$$\left| \sum_1^n a_p e^{-(\sigma+it)\lambda_p} \right| = o(|t|).$$

En écrivant $f(s)$ sous la forme

$$f(s)=\sum_{1}^{N} a_p e^{-\lambda_p s}+e^{-\lambda_{N+1}} g(s),$$

et en intégrant après multiplication par $e^{su}\frac{ds}{s}$, on constate que l'intégrale du dernier terme est nulle pourvu que $\lambda_{N+1}>u$, et l'on obtient le théorème de O. Perron :

VIII. *Si la série $f(s)$ possède une abscisse de convergence $\mathcal{C}<+\infty$ et si c est positif et supérieur à $\mathcal{C}$, on a*

$$\text{(11)}\qquad A(n)=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)e^{su}\frac{ds}{s}\qquad(\lambda_n<u<\lambda_{n+1}).$$

J. Hadamard [a] dans un cas particulier, puis O. Perron dans le cas général ont donné des formules qui comprennent celle-ci comme cas particulier et dont la démonstration est analogue. Si k est positif, on a l'égalité

$$\text{(12)}\qquad \sum_{\lambda_p<u} a_p(u-\lambda_p)^k=\frac{\Gamma(k+1)}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)e^{us}\frac{ds}{s^{1+k}},$$

dans laquelle on suppose encore c positif et supérieur à $\mathcal{C}$. Dès que $k>1$ l'intégrale figurant dans cette égalité converge absolument. Lorsque $\mathcal{C}$ est négatif on peut obtenir des formules dans lesquelles l'intégrale est prise sur une droite d'abscisse négative en utilisant une méthode d'un emploi très général dans ces questions : on intègre la fonction sous le signe somme le long des côtés d'un rectangle $\sigma=c$, $\sigma=c'<c$, $t=-T$, $t=+T$ et l'on fait croître T indéfiniment, ce qui est loisible en vertu du théorème VII, les intégrales correspondantes tendent vers o. Si c' est négatif on introduit ainsi le résidu à l'origine de la fonction sous le signe somme et l'intégrale sur la droite d'abscisse c', à la place de l'intégrale sur la droite d'abscisse c. En appliquant la formule ainsi obtenue à la fonction $f(s+s_0)$, on arrive à l'égalité

$$\text{(13)}\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{u^k}\sum_{\lambda_p<u} a_p(u-\lambda_p)^k e^{-\lambda_p s_0}=f(s_0)+C_k^1\frac{f'(s_0)}{u}+\ldots+C_k^k\frac{f^{(k)}(s_0)}{u^k}\\ &\qquad\qquad+\frac{k!}{2i\pi u^k}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\frac{e^{u(s-s_0)}}{(s-s_0)^{1+k}}ds\\ &\qquad\qquad(\mathcal{C}<c<\sigma_0,\ k\ \text{entier positif}).\end{aligned}\right.$$

Dans cette formule l'intégrale du second membre reste bornée, on a donc

$$(14)\qquad f(s_0)=\lim_{u=\infty}\frac{1}{u^k}\sum_{\lambda_p<u}a_p(u-\lambda_p)^k e^{-\lambda_p s_0}\qquad (k>1).$$

Il est manifeste que, si le second membre de cette égalité converge uniformément dans un domaine comprenant à la fois une portion du demi-plan de convergence et une portion extérieure à ce demi-plan, il donnera le prolongement analytique de $f(s)$ dans cette portion extérieure; on est ainsi conduit à la méthode de prolongement de M. Riesz qui sera étudiée plus loin (n° 16). Nous nous bornerons actuellement à faire la remarque suivante. Supposons que la fonction $f(s)$ soit prolongeable analytiquement suivant des parallèles à l'axe $o\sigma$ jusque et y compris une droite d'abscisse $\rho(k)$ [1], et supposons en outre que dans la bande $\rho(k)\leqq\sigma\leqq\mathcal{C}+\varepsilon$, $(\varepsilon>0)$, la fonction $f(s)$ ainsi obtenue vérifie uniformément la condition

$$(15)\qquad f(s)=O(|t|^k).$$

(L'exemple donné au n° 2 montre que de telles hypothèses n'ont rien d'absurde.) $f(s)$ désignant la fonction ainsi prolongée on peut, comme précédemment, remplacer dans l'égalité (13) l'intégrale prise sur la droite d'abscisse $c>\mathcal{C}$, par l'intégrale prise sur une droite d'abscisse $\rho(k)+\varepsilon$; cette nouvelle intégrale sera une fonction holomorphe de s_0 pour $s_0>\rho(k)+2\varepsilon$ et l'égalité obtenue sera valable dans ce demi-plan, ce qui donne cette proposition [2] :

IX. *Si la fonction $f(s)$ définie par la somme de la série* (1), *supposée convergente pour une valeur de s, vérifie la condition* (15) *pour $\sigma\geqq\rho(k)$, la valeur $f(s_0)$ de cette fonction en un point intérieur à ce demi-plan est donnée par l'égalité* (14).

On peut développer des considérations analogues en partant de

$$\frac{k!}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s\,ds}{s(s+1)\ldots(s+k)}=\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^k & \text{si}\quad x\geqq 1,\\ 0 & \text{si}\quad x\leqq 1,\end{cases}$$

[1] Nous désignons dorénavant par $f(s)$ la somme de la série (1) ainsi prolongée.
[2] On utilise ici le théorème XII.

l'égalité étant valable pour $c > 0$ et k positif entier [1], ce qui conduira à l'égalité

$$\sum_{\lambda_p < u} a_p(1 - e^{\lambda_p - u})^k = \frac{k!}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(s)e^{su}\,ds}{s(s+1)\ldots(s+k)}.$$

On obtiendra une proposition parallèle au théorème IX :

X. *Moyennant les hypothèses du théorème* IX, *on a aussi dans le demi-plan* $\sigma > \rho(k)$

$$f(s) = \lim_{u=\infty} \sum_{\lambda_p < u} a_p e^{-\lambda_p s}(1 - e^{\lambda_p - u})^k.$$

Si au lieu de supposer que $f(s)$ vérifie la condition (15), on suppose cette fonction bornée, la convergence dans l'expression (14), et dans cette dernière égalité est uniforme; d'une façon plus précise on a la proposition suivante qui sera utilisée au n° 7 :

XI. *Si la série* (1) *converge pour une valeur de s et si la fonction définie par cette série est holomorphe et bornée pour* $\sigma \geqq \sigma_0$, *on a uniformément quel que soit t*

$$f(\sigma + it) = \sum_{\lambda_n < u} a_n e^{-\lambda_n(\sigma + it)}(1 - e^{\lambda_n - u})^k + O(e^{-\delta u}) \tag{16}$$

(*k entier positif*, $\sigma \geqq \sigma_0 + \varepsilon$, $\delta > 0$).

6. **Ordre de $f(s)$ sur les droites** $\sigma =$ const. — Les propositions qui viennent d'être données montrent l'intérêt de l'étude de l'ordre d'infinitude de $f(s)$ sur les droites $\sigma =$ const. H. Bohr [e] a introduit systématiquement la notion d'ordre. Soit $g(s)$ une fonction quelconque holomorphe dans un demi-plan $\sigma > \sigma_0$; on appelle *ordre de* $g(s)$ *sur une droite d'abscisse* σ *de ce demi-plan, le nombre*

$$\mu(\sigma) = \overline{\lim_{|t|=\infty}} \frac{\log|f(\sigma + it)|}{\log|t|};$$

l'ordre dans le demi-plan $\sigma \geqq \sigma'$ *est de même*

$$\nu(\sigma') = \overline{\lim_{|t|=\infty}} \frac{\log L(t)}{\log|t|},$$

[1] On peut donner des formules plus générales en supposant seulement k positif et en introduisant la fonction eulérienne [Hardy [52].]

L(t) étant la borne supérieure de $|g(\sigma+it)|$ pour $\sigma \geqq \sigma'$. On définira de même l'ordre dans une bande $\sigma' \leqq \sigma \leqq \sigma''$. En utilisant la méthode employée par Lindelöf et Phragmen [35] dans une question analogue (*voir* le fascicule sur les fonctions entières et méromorphes), on démontre la proposition suivante [Lindelöf [a]] :

XII. *Si l'ordre de $g(s)$ est fini dans une bande $\sigma' \leqq \sigma \leqq \sigma''$ et si l'on a*

$$g(\sigma'+it) = O[|t|^{k(\sigma')}], \qquad g(\sigma''+it) = O[|t|^{k(\sigma'')}],$$

on a uniformément dans la bande

$$g(\sigma+it) = O[|t|^{k(\sigma)}],$$

$k(\sigma)$ étant la fonction linéaire de σ qui prend les valeurs $k(\sigma')$ et $k(\sigma'')$ pour $\sigma=\sigma'$ et $\sigma=\sigma''$. Dans la bande la fonction $\mu(\sigma)$ est continue et semi-convexe (¹).

Appliquons ces résultats à la fonction $f(s)$ dans le demi-plan $\sigma > \mathcal{C}$. D'après le théorème VII l'ordre de $f(s)$ est au plus égal à 1 dans tout demi-plan $\sigma \geqq \sigma' > \mathcal{C}$. Remarquons en outre que $\mu(\sigma)$ ne change pas si l'on divise $f(s)$ par son premier terme, alors $f(s)$ tend vers 1 lorsqu'on s'éloigne indéfiniment sur l'axe réel et $f(s) = o(s)$ pour $\sigma \geqq \mathcal{C}+\varepsilon$; les méthodes de E. Lindelöf montrent de suite que l'on ne peut avoir

$$f(\mathcal{C}+\varepsilon+it) = o(1)$$

lorsque t croît indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives. En particulier on peut énoncer cette proposition [1 et 16] :

XIII. *Dans le demi-plan de convergence $\sigma > \mathcal{C}$ la fonction $\mu(\sigma)$ est au plus égale à* 1, *elle est continue, non croissante, semi-convexe et jamais négative. Si $\mathcal{A} < +\infty$, $\mu(\sigma)$ est nul pour $\sigma > \mathcal{A}$.*

H. Bohr [e] a construit des exemples de fonctions pour lesquelles $\mu(\sigma)$ est linéaire entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$; T. Jansson montre que, lorsque $\mathcal{A} = \infty$, $\mu(\sigma)$ peut être égal à 1 pour $\sigma > \mathcal{C}$. La détermination effective de la fonction μ est très difficile, elle est mal connue même dans des cas simples comme celui de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

(¹) C'est-à-dire que pour $\sigma' \leqq \sigma_1 < \sigma < \sigma_2 \leqq \sigma''$, $\mu(\sigma)$ est au plus égal à la valeur de la fonction linéaire de σ qui est égale à $\mu(\sigma_1)$ et $\mu(\sigma_2)$ pour $\sigma=\sigma_1$ et $\sigma=\sigma_2$.

Considérons maintenant le prolongement de la fonction $f(s)$ effectué comme il a été dit au n° 5; nous appellerons $\mathcal{R}$ la borne inférieure des nombres σ' pour lesquels le prolongement est possible jusque et y compris la droite d'abscisse σ'. Dans le demi-plan $\sigma > \mathcal{R}$ on pourra encore considérer les fonctions $\nu(\sigma)$ et $\mu(\sigma)$, nous désignerons par ω la borne inférieure des nombres σ pour lesquels $\nu(\sigma)$ est borné; dans le demi-plan $\sigma > \omega$, la fonction $\mu(\sigma)$ est encore continue, non croissante et semi-convexe.

Nous désignerons par $\mathcal{J}$ la borne inférieure des nombres $\sigma'(\sigma' > \mathcal{R})$ qui sont tels que $f(s)$ soit bornée pour $\sigma \geqq \sigma'$. Si $\mathcal{J} < +\infty$, $\mu(\sigma)$ est nul pour $\sigma > \mathcal{J}$ et si $\mathcal{C} < \mathcal{J}$, on peut appliquer le théorème XII à la bande $\mathcal{C} + \varepsilon < \sigma < \mathcal{J} + \varepsilon$, ce qui donne une limitation supérieure de $\mu(\sigma)$ dans cette bande. H. Bohr [1] a montré que *si l'abscisse de convergence uniforme* $\mathcal{U}$ *est finie et s'il existe une suite de bandes*

$$\sigma \geqq \eta, \qquad T_n \leqq t \leqq T'_n, \qquad [\eta < \mathcal{U}, \ \lim T_n = \infty, \ \lim (T'_n - T_n) = \infty]$$

dans lesquelles $f(s)$ *ou son prolongement suivant les parallèles à* $O\sigma$ *est en module inférieur à un nombre* K, *on a* $\mathcal{J} \leqq \eta$. La démonstration de cette intéressante proposition se rattache aux considérations qui seront développées au Chapitre IV : si l'on se donne un domaine Δ, $\tau < t < \tau'$, $\sigma > \eta$, on peut trouver une suite de valeurs τ_p telles que les domaines Δ_p déduits de Δ par les translations $i\tau_p$ appartiennent aux bandes considérées, et telles que les fonctions $f(s + i\tau_p)$ convergent uniformément vers $f(s)$ pour $s > \mathcal{U}$ et intérieur à Δ. Comme ces fonctions ont un module moindre que K dans Δ, elles convergent uniformément à l'intérieur de Δ [théorème de Stieltjes (*voir* le fascicule sur les suites de fonctions)], ce qui montre que $f(s)$ existe et a un module moindre que $K + \varepsilon$ dans toute région intérieure à Δ.

7. Formule de la moyenne et expression des coefficients. — Considérons avec F. Carlson [b] la série (1) et une série du même type

$$g(s) = \sum_{1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s},$$

ces deux séries admettant des domaines de convergence et définissant des fonctions régulières et bornées pour $\sigma > 0$. Écrivons l'égalité (16) pour $f(s)$ et l'égalité analogue pour $g(s)$, mais en y remplaçant t par $-t$; multiplions membre à membre et intégrons de α à $\alpha+x$ le produit par dt de l'égalité obtenue. Nous aurons l'inégalité

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \left|\frac{1}{x}\int_\alpha^{\alpha+x} f(\sigma+it)g(\sigma-it)\,dt - \sum_{\lambda_n<u} a_n b_n e^{-2\lambda_n\sigma}(1-e^{\lambda_n-u})^{2k}\right| \\ \quad < \frac{1}{\sqrt{x}} + O(e^{-\delta u}) \end{array}\right.$$

pourvu que σ soit positif et que x soit une fonction de u convenablement choisie. En supposant que b_n est imaginaire conjugué de a_n, cette inégalité montre que

$$(18)\qquad \sum_1^\infty |a_n|^2 e^{-2\lambda_n\sigma} \leqq M^2,$$

M désignant la borne supérieure de $|f(s)|$ sur la droite $\sigma =$ const. considérée. Le même résultat étant valable pour la série $g(s)$, l'inégalité de Cauchy

$$(\Sigma\,|a_n b_n|)^2 \leqq \Sigma\,|a_n|^2\,\Sigma\,|b_n|^2$$

montre que la série

$$(19)\qquad \Sigma\,|a_n b_n|\,e^{-2\lambda_n\sigma}$$

est convergente. L'inégalité (17) dans laquelle on fait croître u, et par suite x, indéfiniment conduit alors au théorème de Carlson :

XIV. *Si les séries du même type $f(s)$ et $g(s)$ admettent des domaines de convergence et définissent des fonctions qui sont bornées respectivement pour $\sigma > c-\varepsilon$ et $\sigma > d-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, on a l'églaité*

$$(20)\qquad \lim_{T=\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} f(c+it)g(d-it)\,dt = \sum_1^\infty a_n b_n e^{-\lambda_n(c+d)}$$

et la série du second membre converge absolument. En particulier, si $c > \mathfrak{F}$, on a

$$\sum_1^\infty |a_n|^2 e^{-2\lambda_n c} = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |f(c+it)|^2\,dt,$$

c'est la formule de la moyenne.

En supposant tous les b_n nuls, sauf celui de rang n supposé égal à 1, on a ce corollaire :

XV. *Pour* $c > \mathcal{F}$, *on a*

$$e^{-\lambda_n c} a_n = \lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} e^{\lambda_n it} f(c+it)\, dt. \tag{21}$$

Ces propositions, qui comprennent des théorèmes connus de la théorie des séries de Taylor, avaient d'abord été données par J. Hadamard [b] dans le cas où c et d sont abscisses de convergence absolue; elles avaient été ensuite étendues au cas où c est abscisse de convergence uniforme, et d abscisse de convergence absolue.

En utilisant la formule de la moyenne et en appliquant l'inégalité de Cauchy, on démontre aisément cette proposition de G.-H. Hardy [h], F. Carlson [b] et L. Neder [b] :

XVI. *On a*

$$\mathcal{B} \geqq \mathcal{F} \geqq \mathcal{A} - \frac{D}{2}. \tag{22}$$

L. Neder montre en outre que ces inégalités ne peuvent être remplacées par d'autres plus serrées.

F. Carlson [c] a cherché à préciser les conditions dans lesquelles la formule de la moyenne reste valable, il étudie à cet effet l'expression

$$j(\sigma) = \overline{\lim_{T=\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(\sigma + it)|^2 dt$$

qui avait déjà été considérée par G. H. Hardy (*voir* n° 17); la formule de la moyenne est valable tant que $j(c)e^{2\lambda_1 c}$ reste borné [*voir* aussi [8, d]].

On peut montrer directement que l'inégalité (21) a lieu uniformément quel que soit n, pourvu que $c > \mathcal{B}$. W. Schnee [e] établit une proposition analogue lorsqu'on suppose seulement $c > \mathcal{C}$, mais en faisant l'hypothèse que la suite des λ_n vérifie l'inégalité

$$\log \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n \delta}) \tag{23}$$

quel que soit le nombre positif δ. Cette *condition de Schnee* est réalisée pour toutes les fonctions de type λ_n à croissance régulière pour lesquelles $\log_2 n : \lambda_n$ tend vers o. Moyennant la condition (23), l'égalité

$$(24) \qquad \sum a_n b_n e^{-\lambda_n(c+d)} = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(c+it) g(d-it)\, dt$$

est vérifiée pour c supérieur à l'abscisse de convergence ordinaire de $f(s)$ et d supérieur à l'abscisse de convergence absolue de $g(s)$.

On peut étendre le champ d'application de cette formule en employant la méthode indiquée au n° 5 et la limitation de l'ordre fournie par le théorème XII, ce qui donne le théorème de W. Schnee [e] et Landau [53; 24, p] :

XVII. *La condition de Schnee étant réalisée, $f(s)$ convergente pour $\sigma > a$ et absolument convergente pour $\sigma > b > a$, $g(s)$ convergente pour $\sigma > a'$ et absolument convergente pour $\sigma > b' > a'$, la formule (24) est valable pour des nombres c et d tels que*

$$c > a, \qquad d > a', \qquad \frac{c-a}{b-a} + \frac{d-a'}{b'-a'} > 1.$$

En particulier la formule de la moyenne est valable pourvu que c soit supérieur à la moyenne des abscisses de convergence ordinaire et absolue, et *a fortiori* pour $c > \mathcal{C} + \frac{D}{2}$.

8. Relations entre la valeur de l'ordre et la position des abscisses de convergence. — E. Landau, W. Schnee et H. Bohr ont étudié les premiers la relation entre la position des abscisses de convergence $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, et la valeur de la fonction $\mu(\sigma)$. Les résultats obtenus supposent que les λ_n satisfont à certaines conditions.

On arrive à un résultat très simple en ce qui concerne le nombre $\mathcal{B}$:

XVIII. *Si la suite λ_n satisfait à la condition de Schnee, ou si $D = 0$, et si le domaine de convergence ordinaire existe, le demi-plan de convergence uniforme coïncide avec le demi-plan dans lequel $f(s)$ est borné, $\mathcal{B} = \mathcal{F}$.*

Pour établir le premier résultat, E. Landau [m] emploie l'égalité suivante qui se déduit du théorème de Perron (n° 5) :

$$\sum_{1}^{n} a_p e^{-\lambda_p s_0} - f(s_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\lambda_{n+1}s} - e^{\lambda_n s}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \frac{f(s+s_0)}{s^2}\, ds - f(s_0)$$

($c > \mathcal{C} - \sigma_0$, $\sigma_0 = \mathcal{F} + \varepsilon > \mathcal{F}$) et transforme le second membre en introduisant l'intégrale prise sur la droite d'abscisse $-\frac{\varepsilon}{2}$, ce qui permet de voir que ce second membre tend uniformément vers o. Le résultat relatif au cas D = o est une conséquence de l'égalité (21), il subsiste lorsqu'on fait une hypothèse moins restrictive sur $f(s)$ [49, **a**]. L. Neder [**b**] a montré que la condition de Schnee ne peut être remplacée par une autre plus avantageuse et de la même forme, la condition (23) peut être vérifiée avec une valeur fixe de δ et le théorème XVIII ne plus être vrai.

L'étude de la relation entre la valeur de $\mathcal{C}$ et les valeurs de $\mu(\sigma)$ est plus difficile. H. Bohr [**e**] a d'ailleurs montré que la fonction $\mu(\sigma)$ peut être la même pour deux séries de Dirichlet proprement dites, ayant des abscisses de convergence différentes. Les résultats de W. Schnee [**d**] et Landau [**f**] ont été complétés par H. Bohr [**j**]; la condition imposée aux λ_n est ici *la condition de Bohr : on suppose que le nombre*

$$l = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \log \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

est fini. On voit aisément que $D \leqq l$, le domaine de convergence absolue existe dès que l'abscisse de convergence $\mathcal{C}$ est finie. Pour les séries de Dirichlet proprement dites, $l = D = 1$. On démontre le théorème suivant :

XIX. *La condition de Bohr étant satisfaite, si, quel que soit n et pour toute valeur positive de* δ, *on a*

$$a_n = O(e^{\lambda_n \delta}) \tag{25}$$

et si $f(s)$ *est d'ordre au plus égal à k pour* $\sigma \geqq \rho(k)$, *on a*

$$\mathcal{C} \leqq \frac{\rho(k) + kl}{1 + k}. \tag{26}$$

Il suit de là que, si les autres conditions de l'énoncé restant les mêmes, l'inégalité (25) n'a plus lieu, mais que l'on sache que le domaine de convergence existe, on a

$$\mathcal{C} \leqq \rho(k) + kl.$$

En particulier, pour $l = 0$, le demi-plan de convergence coïncide avec le demi-plan $\sigma > \omega$ à l'intérieur duquel l'ordre est fini.

K. Grandjot [12] a mis le théorème XIX sous une forme différente en résolvant par rapport à k l'inégalité (26); dans le demi-plan où l'ordre reste fini, on a

$$\mu(\sigma) \geqq \frac{\mathcal{C} - \sigma}{l - \mathcal{C} + \mathrm{E}},$$

E *désignant la limite supérieure pour n infini du rapport*

$$\log|a_n| : \lambda_n.$$

Cette inégalité, qui renseigne sur la valeur de l'ordre, ne peut être remplacée par une autre plus avantageuse [Neder [e]].

On a déjà donné [inégalité (22)] une relation entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{I}$ qui est applicable aux séries pour lesquelles $\mathrm{D} < +\infty$. H. Bohr [g] a aussi étudié les séries pour lesquelles les λ_n sont linéairement indépendants (*voir* n° 21), et K. Grandjot a considéré les séries dont les λ_n satisfont à la condition de Bohr. Il utilise l'égalité (12) et montre que, E étant négatif ou nul, la série

$$\sum_1^\infty |a_n|^2 e^{-\lambda_n \sigma}$$

converge pour

$$\sigma > \frac{kl}{1+k} + 2\frac{\rho(k) + kl}{1+k}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy, on voit alors que :

XX. *La condition de Bohr étant satisfaite, on a*

$$\mathcal{A} \leqq \frac{\rho(k)}{1+k} + \frac{\mathrm{E}k}{1+k} + l\,\frac{1+4k}{2+2k}.$$

Lorsque l est positif on peut résoudre par rapport à k et l'on obtient l'inégalité

$$(27) \qquad \mu(\sigma) \geqq \frac{\mathcal{A} - \sigma - \frac{1}{2}l}{2l - \mathcal{A} + \mathrm{E}}$$

qui renseigne sur la valeur de l'ordre dans le demi-plan où cet ordre est fini. K. Grandjot puis L. Neder [e] ont montré que cette inégalité ne peut être améliorée.

9. **Les zéros des séries de Dirichlet.** — On a déjà dit au n° 4

qu'une série de Dirichlet n'a qu'un nombre fini de zéros dans le domaine de convergence uniforme, défini dans le théorème II. Mais il peut exister une infinité de zéros dans le demi-plan de convergence $\sigma > \mathcal{C}$. H. Bohr [d] a même montré que, lorsque $\mathcal{B} = +\infty$, il peut exister une suite infinie de zéros dont l'abscisse σ croît indéfiniment.

On peut obtenir une limitation supérieure du nombre des zéros dans une région en appliquant le théorème classique de Jensen. Supposons $\lambda_1 = 0$ et $a_1 \neq 0$, ce qui est légitime dans la recherche des zéros et soit L la ligne

$$|s - s_0| = (\sigma - \sigma_0) \mathrm{H} e^{\mathrm{H}(\sigma - \sigma} \qquad (\sigma > \sigma_0)$$

qui a été introduite dans le théorème II, sur cette ligne $f(s)$ tend vers a_1 lorsque σ croît indéfiniment, $f(s)$ est borné à droite d'une ligne analogue correspondant à une autre valeur de H aussi grande que l'on veut, enfin pour $\sigma \geqq \mathcal{C} + \varepsilon$, $f(s) = o(|t|)$. On peut alors appliquer le théorème de Jensen à des cercles ayant leur centre sur L et tangents à une droite d'abscisse σ_0. Lorsque $\mathcal{F} < +\infty$, on remplace L par une droite $\sigma = \sigma_1 > \mathcal{F}$. En désignant par $\mathrm{N}(\sigma_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ le nombre des zéros de $f(s)$ appartenant à la région $\sigma \geqq \sigma_0$, $\mathrm{T}_1 \leqq t \leqq \mathrm{T}_2$, on obtient la proposition suivante [Landau [j, n]] :

XXI. *S'il existe un demi-plan de convergence, on a dans le demi-plan $\sigma > \omega$ où l'ordre reste fini*

$$\mathrm{N}(\sigma, \mathrm{T}, \mathrm{T} + \sqrt{\log|\mathrm{T}|}) = o(\log^2|\mathrm{T}|); \tag{28}$$

s'il existe un demi-plan de convergence uniforme, on a pour $\sigma > \mathcal{F}$

$$\mathrm{N}(\sigma, \mathrm{T}, \mathrm{T} + 1) = \mathrm{O}(1), \tag{29}$$

et pour $\sigma > \omega$

$$\mathrm{N}(\sigma, \mathrm{T}, \mathrm{T} + 1) = \mathrm{O}(\log|\mathrm{T}|).$$

On déduit de ces formules des limitations pour les nombres

$$\mathrm{N}(\sigma, \mathrm{T}, -\mathrm{T})$$

correspondants, mais l'on obtient des inégalités conduisant à des résultats plus précis que (28), en appliquant le théorème de Jensen non pas à un cercle ayant son centre sur L, mais à un demi-cercle

$$|s-\sigma_0-\varepsilon-iT|<\log|T|,\quad \sigma>\sigma_0,$$

σ_0 étant supérieur à ω ou à $\mathcal{J}$ (¹), ce qui conduit à ce théorème [S. Wennberg [50]] :

XXII. *En supposant toujours $\mathcal{C}<+\infty$, on a pour $\sigma>\omega$*

$$N(\sigma, T, T+\log|T|)=O(\log^2|T|);$$

si $\mathcal{J}<+\infty$, on a pour $\sigma>\mathcal{J}$

$$N(\sigma, T, T+\log|T|)=O(\log|T|).$$

S. Wennberg montre que les limites ainsi obtenues pour $N(\sigma, -T, T)$ peuvent être effectivement atteintes dans certains cas. On peut encore compléter ces résultats dans le cas où la condition de Schnee est satisfaite, en utilisant la formule de la moyenne (théorème XVII), on montre que $N(\sigma, -T, T)=O(T)$ pour $\sigma>\frac{1}{2}(\mathcal{C}+\mathcal{A})$, [3, b, c]. Ces résultats peuvent être précisés dans le cas de certaines séries de Dirichlet proprement dites qui s'introduisent dans la théorie des nombres [5 (a), 24 (o)].

E. Lindelöf [b] a appliqué à la fonction de Riemann les théorèmes généraux de la théorie des fonctions qui ont leur origine dans le théorème de Picard. D'une façon générale si $\mathcal{J}<+\infty$ et si $\mathcal{R}<\mathcal{J}$, une application immédiate du théorème de Schottky-Landau montre que $f(s)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus dans toute bande $\mathcal{J}-\varepsilon<\sigma<\mathcal{J}+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$). On a une proposition analogue lorsque $\omega<+\infty$ et $\mathcal{R}<\omega$, c'est alors la bande $\omega-\varepsilon<\sigma<\omega+\varepsilon$ qui contient certainement des zéros de toutes les fonctions $f(s)-c$, sauf une au plus. Dans ces deux cas il existe même une suite de cercles de rayons finis dans lesquels la propriété a lieu. Dans un ordre d'idées analogue, S. Wennberg a démontré le théorème suivant :

XXIII. *Si $\mathcal{J}=+\infty$ et $\mathcal{C}<+\infty$, la fonction $f(s)$ prend toute valeur, sauf une au plus pour $\sigma>\sigma_0>\mathcal{C}$.*

(¹) On fait une représentation conforme convenable de ce demi-cercle sur un cercle concentrique le même rayon et l'on applique le théorème de Jensen.

On donnera au n° 21 un résultat de H. Bohr qui doit être rapproché de ces propositions. Nous signalerons enfin une proposition de K. Grandjot [12], qui permet aussi de reconnaître dans certains cas l'existence effective de zéros de $f(s)$. Le théorème de J. Hadamard sur la partie réelle d'une fonction (*voir* le fascicule sur les fonctions entières) permet de montrer que la fonction $f(s)$ étant régulière, non nulle et d'ordre fini pour $\sigma > \eta$, $|t| > t_0$ et $\log f(s)$ étant borné pour $\sigma \geqq \eta + \varepsilon$, la fonction $\mu(\sigma)$ relative à $f(s)$ est nulle pour $\sigma > \eta$. En rapprochant ce résultat de l'inégalité (27) on arrive à la proposition en vue :

Si la condition de Bohr est vérifiée avec $l > 0$, si la série (1) où $a_1 \neq 0$ et $\lambda_1 = 0$, possède une abscisse de convergence absolue et définit une fonction régulière et d'ordre fini pour $\sigma > \eta$ $\left(\eta < \mathcal{A} - \frac{l}{2}\right)$, $f(s)$ s'annule une infinité de fois pour $\sigma > \eta$.

E. Grandjot applique ce résultat à la fonction de Riemann.

10. Singularités de la fonction $f(s)$ dans le voisinage de la droite de convergence. — S. Wennberg [50] a établi le premier que certaines classes de séries de Dirichlet pour lesquelles $D = 0$, jouissent de la propriété démontrée par Hadamard et Fabry pour les séries de Taylor lacunaires : la droite de convergence est une ligne singulière pour la fonction $f(s)$. Le résultat de S. Wennberg a été complété par O. Szasz, F. Carlson et E. Landau [6]. Si l'on pose

$$\Delta = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\lambda_n}, \qquad G = \underline{\lim_{n=\infty}} (\lambda_{n+1} - \lambda_n),$$

on a la proposition suivante :

XXIV. *Si Δ est nul, G positif et si $\mathcal{C}$ est fini, la droite de convergence $\sigma = \mathcal{C}$ est une coupure pour la fonction $f(s)$.*

La démonstration utilise les propriétés des fonctions entières d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$; on introduit la fonction

$$\varphi_n(x) = \prod_1^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x^2}{\lambda_p^2}\right) = \Sigma c_q^n x^q \qquad (p \neq n)$$

qui est au plus d'ordre $\frac{1}{2}$ et du type moyen en x^2. Si $\mathcal{C} = 0$, on peut écrire pour $\sigma > 0$

$$(30)\qquad a_n \varphi_n(\lambda_n) e^{-\lambda_n s} = \sum_1^\infty a_m \varphi_n(\lambda_m) e^{-\lambda_m s} = \sum_0^\infty (-1)^q c_q^n f^{(q)}(s).$$

Si l'on suppose que $f(s)$ est holomorphe pour $|s| < \delta$, on voit, en utilisant les propriétés des dérivées des fonctions analytiques et les propriétés des coefficients c_q^n de $\varphi_n(x)$, que le dernier membre de (30) est holomorphe et borné pour $|s| \leqq \frac{\delta}{2}$, donc que l'égalité a encore lieu pour $s = -\frac{\delta}{2}$. En tenant compte de ce que, eu égard aux conditions imposées aux λ_n, on a $\varphi_n(\lambda_n) > O(e^{-\alpha\lambda_n})$, α positif arbitraire, on voit que la série (1) convergerait absolument pour $s = -\frac{\delta}{4}$ contrairement à l'hypothèse $\mathcal{C} = 0$.

Landau et Carlson [6] généralisent encore en montrant que Δ étant toujours nul et la condition $G > 0$ remplacée par l'hypothèse

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}{w_n} = k > 0,$$

w_n étant le minimum de $\lambda_p : p$ pour $p \geqq n$, on peut assurer que $f(s)$ n'est pas prolongeable au delà de la droite $\sigma = \mathcal{C} - k$ (on a $\mathfrak{R} \geqq \mathcal{C} - k$). [*Voir* aussi Neder [d].] A. Ostrowski [c] a donné une autre extension; il montre que si $\Delta \leqq \theta$ et $G \geqq 2$, il existe une fonction $\alpha(\theta)$ telle que $f(s)$ admette au moins un point singulier dans tout cercle ayant pour centre un point de $\sigma = \mathcal{C}$ et $\alpha(\theta)$ pour rayon. Lorsque θ tend vers 0, la fonction $\alpha(\theta)$ tend aussi vers 0. Une proposition d'une nature un peu différente a été donnée par G. Pólya en supposant seulement $G > 0$. G. Pólya introduit la notion de densité maximum de la suite λ_n, c'est un nombre δ qui vérifie les inégalités $\delta \geqq \Delta$, $G\delta \leqq 1$. Il montre que tout segment de longueur $2\pi\delta$ de la droite de convergence contient au moins un point singulier de $f(s)$. En particulier on a cette remarquable proposition :

XXV. *Si* G *est positif et* $\mathcal{C}$ *fini, la fonction* $f(s)$ *a au moins un point singulier sur tout segment de longueur* $\frac{2\pi}{G}$ *pris sur la droite de convergence.*

A côté de ces propositions qui supposent toutes que Δ est fini, se place un théorème de Landau [a] qui ne suppose rien sur le type de la série :

XXVI. *Si tous les coefficients d'une série de Dirichlet admettant un domaine de convergence sont positifs, le point $s = \mathcal{C}$ est un point singulier de $f(s)$.*

Prenons $\mathcal{C} = 0$, si le point $s = 0$ était point ordinaire, la valeur de $f(s)$ pour une valeur réelle négative s_1 de s serait donnée par le développement de Taylor de $f(s)$ autour du point $s = 1$, on aurait

$$f(s_1) = \sum \left[\frac{(1-s_1)^n}{n!} \sum a_p \lambda_p^n e^{-\lambda_p}\right] \tag{31}$$

et comme la série double est à termes positifs on pourrait ordonner par rapport aux a_p, ce qui entraînerait la convergence au point s_1.

Des généralisations ont été données par M. Fekete [a, b], puis par A. Ostrowski [c]. A. Ostrowski considère notamment le cas où G étant supérieur ou égal à 2, les a_n sont réels et changent de signe pour des indices ν tels que $\overline{\lim}(\nu : \lambda_{n_\nu}) = \gamma > 0$. Il montre que $f(s)$ possède alors un point singulier dans le cercle $|s - \mathcal{C}| \leqq \psi(\gamma)$, $\psi(\gamma)$ étant une fonction convenablement choisie de γ. Cette proposition qui contient celle donnée plus haut se déduit du théorème XXVI et d'un théorème de Cramer dont il va être question [on prend dans ce théorème XXVII

$$\varphi(z) = \prod\left(1 - \frac{z^2}{r_\nu^2}\right), \qquad r_\nu = \frac{\lambda_{n_\nu} + \lambda_{n_\nu+1}}{2}\Bigg].$$

11. Sur les singularités des fonctions définies par certaines séries correspondantes. — Les propositions dont il va être question ici constituent les premiers essais d'extension aux séries de Dirichlet, du théorème sur la multiplication des singularités des séries de Taylor (théorème de Borel et Hadamard). H. Cramer [a, b,] a étudié la relation entre le domaine d'existence de la fonction $f(s)$ définie par une série (1) et celui de la fonction

$$F(s) = \sum_1^\infty a_n \varphi(\lambda_n) e^{-\lambda_n s}, \tag{32}$$

$\varphi(z) = \Sigma c_q z^q$ étant une fonction entière d'ordre inférieur à 1 ou d'ordre 1 et du type moyen, c'est-à-dire vérifiant la condition

$$|\varphi(z)| < e^{k|z|}$$

à partir d'une valeur de $|z|$. On peut supposer positive l'abscisse de convergence $\mathcal{C}$ de $f(s)$; la transformation d'Abel montre alors que

$$\sum_1^n a_n \varphi(\lambda_n) = O(e^{\lambda_n(\mathcal{C}+k+\varepsilon)}) \qquad (\varepsilon > 0),$$

la série (32) converge donc pour $\sigma > \mathcal{C} + k$. En remplaçant $\varphi(\lambda_n)$ par son développement en série, on obtient une série double dans laquelle on peut intervertir l'ordre des sommations lorsque $\sigma > \mathcal{C} + k$, c'est là la partie essentielle de la démonstration. On a alors

$$F(s) = \Sigma(-1)^q c_q f^{(q)}(s)$$

et, en utilisant les propriétés des coefficients de $\varphi(z)$ et les propriétés des dérivées des fonctions analytiques, on peut montrer que le second membre est encore holomorphe dans certains domaines qui sont définis dans l'énoncé suivant de Cramer :

XXVII. D *étant un domaine connexe contenant le demi-plan de convergence de* $f(s)$ *et dans lequel* $f(s)$ *est holomorphe, soit* $D(k)$ *le domaine obtenu en supprimant de* D *les points dont la distance à la frontière est inférieure ou égale à* k *et soit* $D'(k)$ *la portion de* $D(k)$ *qui est connexe avec le demi-plan* $\sigma > \mathcal{C} + k$, *la fonction* $F(s)$ *définie par la série* (32) *qui converge pour* $\sigma > \mathcal{C} + k$ *est holomorphe à l'intérieur de* $D'(k)$. *Lorsque* $\varphi(z)$ *est d'ordre inférieur à* 1 *ou d'ordre* 1 *et du type minimum,* k *est aussi petit que l'on veut, les seuls points singuliers de* $F(s)$ *sont ceux de* $f(s)$.

H. Cramer montre en outre que si s_0 est un point singulier isolé de $f(s)$, tel que le rayon de convergence du développement de Laurent de $f(s)$ autour de ce point dépasse $2k$, $F(s)$ possède au moins un point singulier dans le cercle $|s - s_0| \leqq k$ [on suppose que ce cercle empiète sur $D'(k)$]; il donne aussi d'intéressantes applications de ses théorèmes à la théorie des fonctions entières.

Le théorème de Cramer a été aussi démontré par O. Szasz dans le cas des fonctions $\varphi(z)$ du type minimum. G. Pólya a complété le théorème XVII en montrant qu'on peut remplacer $D(k)$ par le domaine obtenu, en supprimant de D la région balayée par des courbes convexes dont le « centre » décrit la frontière de D, ces courbes se déduisant par une translation de la courbe indicatrice de la croissance de la fonction $\varphi(z)$. (Cette indicatrice est intérieure au sens large à un cercle de rayon k.) Un Mémoire de J. Soula sur ces questions doit paraître prochainement (*Journal de Math.*, 1925, p. 339).

12. Les généralisations du théorème d'Abel et leurs réciproques. — On a dit au n° 3 que le théorème II généralise un théorème bien connu d'Abel. La réciproque de cette proposition a été donnée par W. Schnee [c] qui complète de la façon suivante une proposition de E. Landau [b] :

XXVIII. *La condition nécessaire et suffisante pour que la série* (1) *converge pour* $s=0$, *est que* $f(\sigma)$ *tende vers une limite* A *lorsque* σ *tend vers* 0 *par valeurs positives et que*

$$S_n = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_n\lambda_n = o(\lambda_n).$$

La somme pour $s=0$ *est alors* A.

Pour montrer que cette condition est suffisante, on remarque que $S(x)$ étant égal à S_n pour $\lambda_n \leqq x < \lambda_{n+1}$, on a, d'après la transformation d'Abel et moyennant l'hypothèse faite sur S_n,

$$A(n) = \int_0^{\lambda_n} S(x)\frac{dx}{x^2} + o(1), \qquad f(\sigma) = \int_0^{\infty} S(x)e^{-\sigma x}\left(\frac{\sigma}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx.$$

La seconde égalité et l'hypothèse faite sur S_n montrent que

$$A = \lim_{n=\infty}\int_0^{\lambda_n} S(x)e^{-\sigma x}\frac{dx}{x^2} \qquad \text{si} \qquad \sigma = \frac{1}{\lambda_n},$$

et l'on voit alors aisément que la différence entre $A(n)$ et l'intégrale du second membre de cette dernière égalité tend vers 0.

Le théorème d'Abel a été généralisé par divers auteurs, en particulier W. Schnee [a] a démontré que :

XXIX. *Si le rapport* $\lambda_{n+1} : \lambda_n$ *tend vers* 1, *la condition*

$$\lim_{n=\infty}\frac{A(n)}{\lambda_r^{\alpha}} = L \qquad (\alpha \geqq -1) \tag{33}$$

entraîne $\mathcal{C} = 0$ *et*

$$\lim_{s=0} s^{\alpha} f(s) = \mathrm{L}\Gamma(1+\alpha) \qquad \left(\left|\frac{s}{\sigma}\right| < \mathrm{H}\right) \tag{34}$$

si $\alpha > -1$, *tandis que pour* $\alpha = -1$ *on a*

$$\lim_{s=0} \frac{f(s)}{s \log \frac{1}{s}} = \mathrm{L}.$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de l'égalité

$$f(s) = s \int_0^{\infty} \mathrm{A}_{\lambda}(x) e^{-sx} \, dx$$

valable pour $\sigma > \mathcal{C} = 0$ (*voir* n° 3).

Ici encore on ne peut déduire de la seule hypothèse faite sur les λ_n et de l'égalité (34) que l'égalité (33) est vérifiée; les conditions dans lesquelles on peut énoncer une réciproque ont été élucidées par Hardy et Littlewood (15, b). En supposant les a_n positifs et $\alpha \geqq 0$, on constate d'abord que la fonction croissante $\mathrm{A}_{\lambda}(x)$ est égale à $\mathrm{O}(x^{\alpha})$. On en déduit que la relation asymptotique

$$\sigma^{1+\alpha} \int_0^{\infty} \mathrm{A}_{\lambda}(x) e^{-x\sigma} \, dx = \mathrm{L}\Gamma(1+\alpha) + o(1)$$

est dérivable [*voir* aussi Landau [c]]. On dérive alors q fois cette égalité en choisissant convenablement σ et q, et l'on remplace l'intégrale obtenue par une autre prise entre des limites finies, ce qui conduit à ce résultat : *les* a_n *étant positifs et* $\alpha > 0$, *la relation* (34) *entraîne* (33) (on suppose toujours que $\lambda_n : \lambda_{n-1}$ tend vers 1). On passe ensuite au cas des a_n quelconques en les assujettissant à une condition de croissance : on suppose les a_n réels et l'on ajoute à la série donnée une autre satisfaisant aux conditions du théorème XXIX et telle que la série obtenue ait ses coefficients positifs. On arrive ainsi à cette conclusion qui comprend un résultat antérieur de Littlewood [27] :

XXX. $\mathcal{C}$ *étant nul, l'égalité* (34) *entraîne certainement* (33) *si* $\lambda_{n+1} : \lambda_n$ *tend vers* 1 *et si*

$$a_n = \mathrm{O}[(\lambda_n - \lambda_{n-1})\lambda_n^{\alpha-1}] \qquad (\alpha \gtreqless 0).$$

Dans le cas $\alpha = 0$, Hardy et Littlewood [c] donnent des réciproques d'un caractère un peu différent.

Au lieu de faire l'hypothèse (33), on peut faire une hypothèse sur la façon dont la série (1) se comporte en un point de l'axe des σ situé à gauche de l'abscisse de convergence. Il est loisible de supposer que ce point est $\sigma = -1$, l'abscisse de convergence étant nulle; on introduit alors les sommes

$$B(n) = \sum_{1}^{n} a_p \mu_p \qquad (\mu_p = e^{\lambda_p}),$$

et l'on voit que si $\mu_{n+1} : \mu_n$ tend vers 1 et si $B(n) : \mu_n \lambda_n^{\alpha-1}$ $(\alpha > 0)$ tend vers L, on a encore l'égalité (34). Mais ici, non seulement la méthode qui conduisait aux réciproques tombe en défaut, mais ces réciproques ne sont plus vraies en général; pour obtenir des résultats, E. Landau [d et 53] fait en outre des hypothèses sur la nature de la singularité $s = 0$ et sur l'ordre de $f(s)$ pour $\sigma > 0$. Les importantes propositions qu'il obtient doivent être rapprochées de propriétés directes telles que la suivante : Si $B_\mu(x)$ désigne la valeur de $B(n)$ pour x compris entre μ_n et μ_{n+1} et si l'on a

$$B_\mu(x) = Lx + o(x^\gamma) \qquad (0 < \gamma < 1),$$

la fonction $f(s)$ admet $s = 0$ pour pôle simple de résidu L et n'a pas d'autre point singulier pour $\sigma > \gamma - 1$. Ce théorème de Landau [c], généralisé ensuite par W. Schnee [c], est une conséquence de l'égalité

$$f(s) = (1+s) \int_0^\infty B_\mu(x) x^{-s-2} \, dx,$$

valable pour $\sigma > 0$. En utilisant l'égalité (12) on obtient avec E. Landau la réciproque suivante :

XXXI. *Si la série de Dirichlet* (1) *a ses coefficients positifs et possède un domaine de convergence, si la fonction* $f(s)$ *définie par sa somme est régulière pour* $\sigma > 0$, *admet un pôle simple de résidu* L *pour* $s = 0$ *et est d'ordre fini* K *pour* $\sigma \geqq \delta > 0$ *quel que soit* δ, *on a*

$$B_\mu(x) = Lx + o(x).$$

Cet énoncé, qui a été généralisé par Hardy et Littlewood (*voir* n° 17) n'est valable comme le précédent que si $\mu_{n+1} : \mu_n$ tend vers 1. E. Cahen [b] a donné une méthode qui permet l'étude de certaines propriétés directes dans le cas où cette condition n'est plus réalisée. [*Voir* aussi 49, [b].]

Le théorème XXX, qui donne dans le cas $\alpha = 0$ une réciproque du théorème d'Abel, a été généralisé par E. Landau [g] qui fait une hypothèse sur la différence $A(n) - A(m)$ en supposant que $\lambda_n : \lambda_m$ satisfait à certaines conditions. [*Voir* aussi 24, [h]]. On peut faire des hypothèses plus larges sur les a_n, si l'on suppose que le point $s = 0$ est un point de régularité de la droite de convergence. Dans le cas des séries de Taylor ($\lambda_n = n$) on a le théorème de Fatou : si les a_n tendent vers 0 et si la fonction définie par la série est holomorphe pour $s = 0$, la série converge en ce point. Cette propriété a été étendue aux séries de Dirichlet par M. Riesz [c, e, g] qui donne la proposition suivante :

XXXII. *Si l'abscisse de convergence de la série* (1) *est nulle et si c étant positif ou nul, on a* $\sum_{\mu_p < x} a_p e^{\lambda_p c} = o(x^c)$, *la série converge en chaque point de la droite* $\sigma = 0$ *en lequel* $f(s)$ *est holomorphe, et la convergence est uniforme sur tout segment* $\tau \leqq t \leqq \tau'$ *de* $\sigma = 0$ *sur lequel* $f(s)$ *est holomorphe.*

M. Riesz conduit la démonstration d'une façon très simple. Soit un rectangle $-\alpha \leqq \sigma \leqq +\alpha$, $\tau_1 \leqq t \leqq \tau_2$, dans lequel $f(s)$ est holomorphe, on introduit la suite de fonctions

$$g_n(s) = e^{\lambda_n s}(s - i\tau_1)(s - i\tau_2)\left[f(s) - \sum_1^n a_p e^{-\lambda_p s}\right].$$

L'hypothèse et la transformation d'Abel permettent de montrer que le module de $g_n(s)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$ lorsque s est sur les côtés du rectangle, il s'ensuit que $g_n(s)$ tend uniformément vers 0 à l'intérieur du rectangle et que la série (1) converge uniformément vers $f(s)$ sur tout segment intérieur au rectangle.

13. La multiplication des séries de Dirichlet. — On sait que le produit de deux séries absolument convergentes $\Sigma a_n \Sigma b_p$ est égal à la somme de la série double $\Sigma\Sigma a_n b_p$, qui peut être ordonnée en série simple d'une façon quelconque. Le produit de deux séries de Dirichlet

$$f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad g(t) = \Sigma b_p e^{-\lambda'_p s},$$

possédant un domaine de convergence absolue commun, $\sigma > \sigma_0$ peut donc être écrit sous forme de série de Dirichlet du type ν_m, les ν_m sont les nombres $\lambda_n + \lambda'_p$ rangés par ordre croissant, s'il y a plusieurs couples de nombres n, p tels que $\nu_m = \lambda_n + \lambda_p$, le coefficient de $e^{-\nu_m s}$ est la somme $\Sigma a_n b_p$ étendue à ces couples de nombres. C'est la série ainsi obtenue que l'on appellera dans tous les cas la série produit. Cette série converge absolument pour $\sigma > \sigma_0$ et a pour somme $f(s)\, g(s)$ dans le cas où nous nous sommes placés; d'une façon générale *on dira que la multiplication est légitime lorsque la série produit convergera et aura pour somme $f(s)\, g(s)$*. En général la série produit sera d'un type nouveau, cependant pour deux séries de Dirichlet proprement dites, on aura une série du même type

$$f(s) g(s) = \Sigma c_m m^{-s},$$

c_m est la somme des produits $a_n b_p$ pour lesquels $np = m$.

En suivant la méthode classique qui sert à établir le théorème de Mertens dans le cas de la multiplication des séries de puissances, on établit la généralisation énoncée par Stieltjes [46], et démontrée par Landau [c]:

XXXIII. *La multiplication est légitime pour toute valeur s rendant l'une des séries convergente et l'autre absolument convergente.*

Stieltjes puis E. Landau [c] ont donné des conditions plus larges dans lesquelles l'opération est légitime, c et $c + \eta$, d et $d + \eta'$ étant des abscisses de convergence ordinaire et absolue pour les deux séries il suffit de supposer

$$\sigma > \frac{c\eta' + d\eta + \eta\eta'}{\eta + \eta'}$$

pour que la multiplication soit permise. En particulier, l'élévation au carré est légitime lorsque $\sigma > \mathcal{C} + \frac{D}{2}$. H. Bohr a construit une série (2) pour laquelle la série $[f(s)]^2$ a effectivement ce demi-plan de convergence.

On trouvera d'autres propriétés de la multiplication dans des Mémoires de E. Landau [c, 1] et de G.-H. Hardy [f]. Nous nous bornerons à énoncer ici un théorème qui généralise une proposition d'Abel :

XXXIV. *Si les deux séries données et la série produit convergent, la multiplication est légitime.*

Dans le cas où les séries ont une abscisse de convergence absolue la démonstration a été faite par E. Landau [c], dans le cas général elle a été obtenue comme conséquence immédiate d'un théorème relatif à la sommabilité par les moyennes de Cesàro de la série produit (n° 15).

14. Conditions pour qu'une fonction soit développable en série de Dirichlet. — On sait (n° 4), qu'une fonction ne peut être représentée que d'une seule façon par une série de Dirichlet. A quelles conditions une fonction est-elle représentable? Il est aisé de donner des conditions nécessaires pour qu'une fonction donnée $F(s)$ soit la somme d'une série (1) convergente pour $\sigma > \sigma_0 > 0$: il faut que toutes les égalités où intervient la fonction $f(s)$ soient possibles lorsqu'on y introduit $F(s)$. Il est plus difficile de choisir parmi ces conditions des conditions suffisantes qui ne soient pas surabondantes. De telles conditions ont été données d'abord par E. Cahen [a]; sa démonstration incomplète fut reprise par J. Hadamard [c], E. Landau [c] et [53] et W. Schnee [f]. [*Voir* aussi 11 [c.]] C'est sur la formule donnant $A(n)$ que ces auteurs ont porté leur attention. L'intégrale

$$J(u) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, e^{su} \frac{ds}{s} \qquad (c > 0, \quad c > \sigma_0)$$

doit être finie pour toute valeur positive de u et constante dans une suite d'intervalles dont les limites donnent les valeurs des λ_n, les valeurs de l'intégrale dans ces intervalles successifs donnent les $A(n)$, donc les coefficients a_n. Il faut encore supposer que le produit $J(u)e^{-u\sigma}$ tend vers 0 lorsque u croît indéfiniment, ce qui n'est pas une conséquence des hypothèses précédentes. Les conditions ainsi trouvées semblent trop compliquées pour être applicables, il ne semble pas qu'elles aient été utilisées. J. Steffensen [b] a donné des conditions d'une forme différente en utilisant les considérations qui seront développées au n° 17; ses résultats qui sont énoncés pour le cas des séries de Dirichlet proprement dites, pourront être généralisés.

On donnera au n° 24 des conditions nécessaires d'une autre forme et des propriétés des fonctions définies par les séries de Dirichlet.

III. — Les procédés d'extension analytique.

15. La méthode des moyennes arithmétiques. — Les premiers essais de prolongement analytique des séries de Dirichlet se rattachant aux méthodes générales de sommation des séries divergentes, ont été faits en 1908 à peu près simultanément par H. Bohr, M. Riesz et G.-H. Hardy.

La méthode des moyennes arithmétiques ou de Cesàro consiste à attribuer la somme C à la série divergente Σc_n lorsque le rapport

$$C_n^1 = \frac{C(1) + C(2) + \ldots + C(n)}{n}$$

tend vers C. Si la suite C_n^1 diverge on prend les moyennes des termes de cette suite, ce sont les moyennes d'ordre 2, C_n^2; d'une façon générale, on pose

$$C_n^p = \frac{C_1^{p-1} + C_2^{p-1} + \ldots + C_n^{p-1}}{n}.$$

Si les moyennes d'ordre p convergent vers C, la série est dite sommable d'ordre p ou sommable (C, p) de somme C. Une série sommable (C, p) est sommable (C, $p+q$) de même somme. Dans la méthode de Hölder qui est équivalente à celle de Cesàro [Knopp [a], Schnee [b]] on prend

$$S_n^0 = \sum_1^n c_p, \qquad S_n^1 = \sum_1^n S_p^0, \qquad \ldots, \qquad S_n^r = \sum_1^n S_p^{r-1},$$

et l'on dit que la série est sommable d'ordre r et a pour somme S si l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^r \, r!}{n^r} = S.$$

On a aussi défini les sommations d'ordre non entier, nous ne les considérerons pas ici.

Une série de Taylor $\Sigma a_n z^n$ n'est jamais prolongeable au delà du cercle de convergence par la méthode des moyennes arithmétiques, mais elle est sommable (C, p) en tout point de la circonférence de ce cercle où la fonction définie par la série est holomorphe, pourvu que $a_n = o(n^{p-1})$. Comme une série de Dirichlet proprement dite est l'ensemble des valeurs des intégrales généralisées d'une série de Taylor en un point du cercle de convergence, la méthode des moyennes doit au contraire permettre le prolongement analytique d'une telle série moyennant certaines hypothèses. H. Bohr [a, b, c] a appliqué cette méthode aux séries de Dirichlet en utilisant la définition de Hölder.

Si la série (2) est sommable d'ordre r au point s_0 et si $S_n^r(s)$ désigne la somme de Hölder relative à cette série prise au point s, la transformation d'Abel effectuée $r+1$ fois donne l'égalité

$$S_n^{r+1}(s) = \sum_1^n S_i^{r+1}(s_0)\Delta^{r+1}\left(\frac{1}{n^{s-s_0}}\right) + O(1),$$

avec

$$\Delta^j(\alpha_n) = \Delta^{j-1}(\alpha_n) - \Delta^{j-1}(\alpha_{n+1}), \qquad \Delta^1(\alpha_n) = \alpha_n - \alpha_{n+1},$$

et $\sigma > \sigma_0$. Il en découle que la série est sommable d'ordre r pour $\sigma > \sigma_0$; *le domaine de sommabilité d'ordre r est un demi-plan $\sigma > \sigma^r$*. La somme obtenue donne le prolongement de la fonction $f(s)$ dans les conditions du n° 5 dès que $\sigma^r < \mathcal{C}$. A l'intérieur du demi-plan de sommabilité d'ordre r, l'ordre $\nu(\sigma)$ est au plus égal à $r+1$; inversement, si $\mathcal{C} + < \infty$, la sommabilité d'ordre $r+1$ est possible dans le demi-plan où $\nu(\sigma) < r+1$. H. Bohr donne également une expression de l'abscisse de sommabilité d'ordre r qui généralise la formule (10) de Cahen, il montre que la différence des abscisses de sommabilité d'ordre r et $r+1$ est au plus égale à 1. Il donne également un théorème sur la multiplication qui rentre comme cas particulier dans un théorème de Riesz dont il va être question (théorème XXXV).

16. Méthode des moyennes typiques de M. Riesz. — M. Riesz [a, b, c, d, h] a créé de nouvelles méthodes de sommation, généralisant celle de Cesàro, qui s'appliquent aux séries de Dirichlet les plus générales en donnant naissance à une théorie analogue à celle de Bohr. Il remplace les moyennes arithmétiques par des moyennes pondérées dépendant du type λ_n, d'où le nom de moyennes typiques. La méthode de Riesz a été exposée *a priori* par son auteur dans l'Ouvrage sur les séries de Dirichlet qu'il écrivit en collaboration avec Hardy [52]; nous rattacherons de suite ici sa théorie aux formules de J. Hadamard et O. Perron données au n° 5. Les théorèmes IX et X conduisent à considérer à la place de la série (1) les expressions

$$(35)\quad \sum_{\lambda_p<u} a_p e^{-\lambda_p s}\left(1-\frac{\lambda_p}{u}\right)^k, \qquad \sum_{\lambda_p<u} a_p e^{-\lambda_p s}(1-e^{\lambda_p-u})^k \qquad (k>0),$$

dont les limites pour u infini donnent certainement la valeur de $f(s)$ dans le demi-plan où l'ordre est inférieur à k.

On dira que *la série* (1) *est sommable, de somme* C, *par les moyennes de type* λ_n *et d'ordre* k ou sommable (λ_n, k) *lorsque la première expression* (35) *tend vers* C, et qu'elle est sommable, de somme C, par les moyennes de type $\mu_n = e^{\lambda_n}$ d'ordre k ou sommable (μ_n, k) lorsque la seconde expression (35) tend vers C lorsque u croît indéfiniment. Ces définitions s'appliquent évidemment à une série numérique quelconque.

M. Riesz fait tout d'abord la comparaison des divers procédés de sommation ainsi définis : une série sommable (λ_n, k) est aussi sommable (λ_n, k') si $k'>k$ et a même somme, une série sommable (μ_n, k) est sommable (λ_n, k) et a la même somme. D'une façon plus générale on peut comparer la sommation (μ_n, k) à une sommation (ν_n, k) où ν_n est une fonction rationnelle de λ_n, ou une fonction de type plus général à croissance rationnelle. M. Riesz donne aussi des conditions nécessaires pour que la sommation soit possible : le reste de la série à partir du terme de rang n doit être égal à $0\left[\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\right)^k\right]$ pour que la sommation (λ_n, k) soit possible. Il en résulte que lorsque $\lambda_{n+1} : \lambda_n$ reste supérieur à un nombre supérieur à 1, les seules séries sommables sont les séries convergentes. Des propositions analogues sont données par Hardy [g].

L'application de la méthode des moyennes typiques au produit de deux séries conduit à cette proposition [52].

XXXV. *Si les séries Σa_n et Σb_n sont sommables* (λ, k) *et* (λ', k') *respectivement, la série produit est sommable* $(\nu, k+k'+1)$ *et sa somme est le produit des sommes* A *et* B *de ces séries.*

Car en posant $l = k + k' + 1$ et

$$A_\lambda^k(u) = \sum_{\lambda_p < u} a_p(u - \lambda_p)^k, \qquad B_{\lambda'}^{k'}(u) = \sum_{\lambda'_p < u} b_p(u - \lambda'_p)^{k'},$$

$$C_\nu^l(u) = \sum_{\nu_p < u} c_p(u - \nu_p)^l,$$

on constate que

$$C_\nu^l(u) = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k'+1)} \int_0^u A_\lambda^k(v) B_{\lambda'}^{k'}(u - v)\, dv,$$

et en utilisant la définition de la sommabilité on voit que l'intégrale est asymptotiquement égale à

$$A.B.u^l \int_0^1 v^k(1-v)^{k'}\, dv,$$

ce qui conduit au résultat.

Le théorème XXXIII a été également étendu au cas où l'une des deux séries étant absolument convergente, l'autre est sommable (λ', k), le produit est alors sommable (ν, k) et égal au produit des sommes [52].

Revenons alors au cas particulier des séries de Dirichlet. Dans les applications dont il va être question, $f(s)$ désignera toujours la somme d'une série (1), supposée convergente en un point, éventuellement prolongée dans le demi-plan $\sigma > \mathcal{R}$ comme il a été dit au n° 5. Les théorèmes II et III se généralisent comme il suit :

XXXVI. *Si la série* (1) *est sommable* (λ_n, k) *ou* (μ_n, k) *au point* s_0, *elle est uniformément sommable dans l'angle* A,

$$\sigma > \sigma_0, \qquad |s - s_0| < H(\sigma - \sigma_0).$$

Par suite, il existe un demi-plan de sommabilité (λ_n, k) *ou* (μ_n, k) *dans lequel la méthode des moyennes typiques donne la valeur de* $f(s)$.

Nous donnerons des indications sur la démonstration en supposant k entier; dans toute cette théorie les démonstrations sont beaucoup plus difficiles pour k quelconque. On peut supposer $s_0 = 0$ et la somme d'ordre k des a_n égale à o; nous considérerons seulement les moyennes de première espèce. La première expression (35) s'écrit

$$-\frac{1}{u^k}\int_0^u A_\lambda(x)\frac{d}{dx}[e^{-xs}(u-x)^k]\,dx$$

et comme $A_\lambda(x)$ est à un facteur près la dérivée d'ordre k de

$$A_\lambda^k(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n(x-\lambda_n)^k,$$

on peut intégrer par parties, ce qui conduit à l'expression

$$(36)\qquad \frac{A_\lambda^k(u)e^{-us}}{u^k} - \frac{1}{k!\,u^k}\int_0^u A_\lambda^k(x)\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}[e^{-xs}(x-u)^k]\,dx.$$

Dans l'angle A le premier terme tend vers o, le second donne une somme de termes qui, à l'exception d'un seul, tendent aussi vers o; on trouve ainsi que l'on a dans l'angle A

$$(37)\qquad f(s) = \frac{s^{k+1}}{\Gamma(k+1)}\int_0^\infty e^{-sx}A_\lambda^k(x)\,dx,$$

ce qui généralise une formule donnée au n° **12**.

M. Riesz montre que l'abscisse de sommabilité pour les moyennes typiques de même ordre est la même pour les moyennes des deux espèces, on peut donc se borner aux moyennes de première espèce. La formule de Cahen (n° **3**) se généralise de même :

XXXVII. *Si l'abscisse de sommabilité* (λ_n, k), σ_λ^k, *est positive, elle est donnée par la formule*

$$(38)\qquad \sigma_\lambda^k = \overline{\lim_{u=\infty}}\,\frac{\log|A_\lambda^k(u)|}{u}.$$

Car l'expression (36) converge lorsque σ est supérieur au second membre de (38) et, en appliquant la transformation d'Abel à la première expression (35), on constate que le second membre de (38) est au plus égal à l'abscisse de sommabilité. Des expressions de σ_λ^k valables lorsque ce nombre est négatif, ou valables dans tous les cas, ont été données par Kuniyeda [**b**, **c**].

Le théorème VII se généralise également. Si $f(s)$ est sommable

(λ, k) pour $s = 0$, $f(s)$ est bornée dans l'angle A défini ci-dessus; à l'extérieur de cet angle l'intégrale (37) peut être décomposée en une intégrale prise de 0 à X et une intégrale prise de X à $+\infty$; si X est assez grand la seconde intégrale est égale à $o(|t|^{k+1})$, et l'on voit qu'il en est de même de la première en faisant une intégration par parties. Par suite :

XXXVIII. *Si $f(s)$ est sommable en s_0 par les moyennes typiques d'ordre k, on a uniformément $f(s) = o(|t|^{k+1})$ dans le demi-plan $\sigma \geqq \sigma_0 + \varepsilon > \sigma_0$.*

L'égalité (12) d'Hadamard et Perron est donc valable pour $c > 0$ et supérieur à σ_λ^{k-1}. Kuniyeda [b] a donné la valeur de l'intégrale figurant dans cette formule lorsque σ_λ^k étant négatif on prend $c < 0$.

Les théorèmes IX et XXXVIII montrent la relation étroite qui lie σ_λ^k aux valeurs de la fonction $\mu(\sigma)$. On sait que $\mu(\sigma)$ est semi-convexe, M. Riesz [h] montre qu'il en est de même de σ_λ^k considérée comme fonction de k.

La méthode de M. Riesz permet ainsi l'étude de $f(s)$ dans le demi-plan $\sigma > \omega$ où l'ordre est fini. Toutes les questions relatives à la nature de $f(s)$ dans le voisinage de la droite de convergence $\sigma = \mathcal{C}$, peuvent également être posées pour le voisinage de $\sigma = \omega$ [*voir* M. Riesz [h] et Cramer [d]]. Signalons enfin d'intéressantes applications de la méthode de Riesz à l'étude des zéros réels des séries de Dirichlet à coefficients réels [M. Fekete [e]].

M^lle P. Nalli [a] a généralisé la méthode de Riesz en remplaçant la formule (37) qui donne la valeur de la somme par l'égalité de définition plus générale

$$f(s) = \lim_{y=\infty} \frac{s^{1+y}}{\Gamma(1+y)} \int_0^{\theta(y)} e^{-sx} A_\lambda^y(x)\, dx,$$

$\theta(y)$ étant une fonction croissante telle que $\theta(y) : y \log y$ tende vers l'infini. Le champ de validité de la méthode n'est pas étendu.

17. Les fonctions correspondantes de Cahen et la méthode de sommation de Hardy. — Cahen [a] a mis en évidence des relations simples entre les séries de Dirichlet de mêmes coefficients a_n et de types λ_n et $\mu_n = e^{\lambda_n}$. Nous considérons donc à côté de la série (1) la série

$$(39)\qquad F(z)=\sum_1^{\infty} a_n e^{-\mu_n z}\qquad (z=x+iy).$$

Les formules de Cahen découlent des formules réciproques

$$(40)\qquad \Gamma(s)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx,$$

$$(41)\qquad e^{-z}=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)e^{-s\log z}\,ds\qquad (c>0,\quad z=x+iy,\quad x>0)$$

dont la seconde, due à S. Pincherle, s'établit en appliquant les méthodes du calcul des résidus à la fonction sous le signe d'intégration ($\log z$ y est supposé égal à $\log x$ pour $z=x>0$). En changeant x en $\mu_n x$ dans (40), z en $\mu_n z$ dans (41), en multipliant par $a_n\mu_n^{-s}$ ou a_n et additionnant on obtient les égalités formelles de Cahen :

$$(42)\qquad f(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} x^{s-1}F(x)\,dx$$

et

$$(43)\qquad F(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)z^{-s}f(s)\,ds.$$

O. Perron a établi en toute rigueur la proposition suivante :

XXXIX. *L'égalité* (42) *est valable pour* $\sigma>\sigma_0$, σ_0 *étant positif et au moins égal à l'abscisse de convergence* $\mathcal{C}$ *de* $f(s)$ *et la formule* (43) *pour* c *positif et supérieur à* $\mathcal{C}$ *et* $x>0$.

La première partie résulte de la convergence uniforme de la série (39) pour $z=x\geqq x_0>0$ et de ce que la somme d'un nombre quelconque de ses termes est au plus égale à $K+K_1x^{-\sigma_1}$ si $\sigma_1>\mathcal{C}$. La seconde partie se démontre en s'appuyant sur la convergence uniforme de $f(s)$ dans la région considérée dans le théorème II; on établit la formule en intégrant tout d'abord sur la ligne L limitant cette région, ce qui est possible, la formule (41) étant encore valable lorsque l'intégrale est prise sur L. On passe ensuite de la ligne L à la droite d'abscisse c en appliquant le théorème de Cauchy (*voir* n° 5) et en utilisant la valeur approchée de $\Gamma(s)$ fournie par la formule de Stirling ainsi que le théorème VII.

La formule (42) renferme en particulier l'égalité déjà employée par Riemann

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \qquad (\sigma > 1).$$

G.-H. Hardy a montré l'importance des formules de Cahen et en a déduit une belle méthode de prolongement analytique qu'il a exposée en détail pour les séries de Dirichlet proprement dites. Hardy dit que sa méthode s'applique lorsque $\mathcal{A} < +\infty$; en réalité il suffit que $\mathcal{C} < +\infty$, c'est ce que nous supposerons ici.

On dit qu'une série Σc_n est sommable par la méthode d'Abel ou sommable (A, μ) lorsque la série de Dirichlet de coefficients c_n et type μ_n converge pour $x > 0$; et que sa somme tend vers une limite lorsque x tend vers o; cette limite est appelée la somme de la série donnée.

Appliquons la formule (42) à la série de Dirichlet de type λ_n et coefficients $a_n e^{-\mu_n x}$ $(x > 0)$, nous aurons

$$\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s} e^{-\mu_n x} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty y^{s-1} \mathrm{F}(x+y) dy,$$

égalité valable si la série Σa_n est sommable (A, μ). On voit aisément que le second membre tend vers une limite lorsque x tend vers o, ce qui montre que :

XL. *Si la série* (1) *est sommable* (A, μ) *pour* $s = 0$, *elle est sommable pour* $\sigma > 0$; *sa somme qui est égale à* $f(s)$ *est donnée par la formule*

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty y^{s-1} \mathrm{F}(y)\, dy.$$

Le domaine de sommabilité (A, μ) est donc un demi-plan $\sigma \geqq \mathcal{H}$. La formule de Stirling montre que pour $\sigma \geqq \mathcal{H} + \varepsilon > \mathcal{H}$ on a uniformément

$$\log|f(s)| = \frac{\pi}{2}|t| + \mathrm{O}(\log|t|).$$

Inversement si $0 < \mathcal{C} < +\infty$ et si $f(s)$ est holomorphe pour $\sigma > \eta$

($\eta < 0$), et telle que $\log|f(s)|$ soit inférieur à $\beta\,|t|$ avec $\beta < \frac{\pi}{2}$, on peut appliquer la formule (43) avec c positif et assez grand et $z = x$, puis remplacer l'intégrale par une autre prise sur la droite $\sigma = \frac{\eta}{2}$, ce qui introduit la valeur $f(0)$ résidu à l'origine. L'intégrale prise sur $\sigma = \frac{\eta}{2}$ tend vers o avec x; $f(0)$ est donc la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers o. On voit que l'expression qui joue ici le rôle que jouait $\mu(\sigma)$ dans les méthodes précédentes est

$$h(\sigma) = \overline{\lim_{|t|=\infty}} \frac{\log|f(\sigma + it)|}{|t|};$$

l'étude de cette quantité se fait en utilisant la méthode de Lindelöf comme au n° 6. On a ce théorème :

XLI. *Le domaine de sommabilité* (A, μ) *coïncide avec le demi-plan dont l'abscisse est la borne inférieure des nombres* σ_0 *jouissant de cette propriété : pour* $\sigma \geqq \sigma_0$, *on a uniformément à partir d'une valeur de* $|t|$ *et si petit que soit* ε

$$\log|f(s)| \leqq \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)|t|. \tag{44}$$

La méthode de Hardy est effectivement plus puissante que celle de Riesz; il existe des fonctions qui ne sont pas d'ordre fini et qui cependant vérifient la condition (44) dans un certain demi-plan [Hardy [h, i]].

On peut encore étendre le domaine d'application de cette méthode si simple en remplaçant les μ_n par μ_n^k ($k < 1$), le domaine de sommabilité (A, μ, k) coïncide avec le demi-plan dans lequel $h(\sigma)$ est inférieur à $\frac{\pi}{2k}$. Hardy montre encore que la série de Dirichlet est uniformément sommable dans tout demi-plan où $f(s)$ est borné, il en déduit une démonstration du théorème XVI. Il généralise ensuite ce théorème en montrant qu'on peut remplacer $\mathfrak{F}$ par la borne inférieure des nombres σ_0 pour lesquels

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |f(\sigma + it)|^2\,dt \qquad (\sigma \geqq \sigma_0)$$

est uniformément borné. Ce résultat est à rapprocher de ceux obtenus plus tard par Carlson (n° 7).

Hardy et Littlewood [**c**, **d**] donnent d'autres applications de la formule (43) généralisée comme il vient d'être dit : en supposant la série (1) sommable (A, μ, k) pour $\sigma > \mathcal{H}_k$, la formule (43) est encore valable pour c positif et supérieur à $\mathcal{H}_k$, et l'on a $F(x) = o(x^{-c})$; en supposant que $\lambda_{n+1} : \lambda_n$ tende vers 1 on peut appliquer le théorème XXX.

On peut également faire des hypothèses sur la fonction $F(z)$ dans le voisinage de l'origine et en déduire des propriétés de $f(s)$ au moyen de la formule (42). Si $F(z)$ est régulière ou a un pôle d'ordre q à l'origine, on peut remplacer l'intégrale figurant dans (42) par la somme de deux autres, l'une prise entre d et ∞ qui définit une fonction entière, l'autre prise entre 0 et d dans laquelle $F(z)$ peut être remplacé par son développement de Laurent si d a été pris assez petit. L'intégration terme à terme de cette seconde intégrale montre que $f(s)$ est méromorphe, les points $1, 2, \ldots, q$ en sont les pôles, les résidus étant les coefficients de la partie principale de $F(z)$ [*voir* aussi Fekete [**a**, **b**]].

Une représentation des séries de Dirichlet proprement dites, d'un caractère essentiellement différent de celui de Cahen, a été donné par J. Steffensen [**a**].

18. **Représentation analytique des séries de Dirichlet dans leur étoile d'holomorphie.** — M. Riesz [**f**] a étendu aux séries de Dirichlet les méthodes qui ont permis à G. Mittag-Leffler de donner une représentation analytique des fonctions définies par une série de Taylor, valable dans toute l'étoile d'holomorphie.

L'étoile d'holomorphie de la fonction $f(s)$ définie par la série (1), supposée convergente en un point ($\mathcal{C}$ fini), s'obtient en effectuant le prolongement de $f(s)$ *suivant les parallèles à* $O\sigma$ *vers les* σ *négatifs;* si s_0 est un point singulier rencontré au cours du prolongement, on exclut la demi-droite $t = t_0$, $\sigma \leqq \sigma_0$. Le domaine restant est l'étoile cherchée, c'est une étoile relative au point à l'infini sur $O\sigma$. M. Riesz donne des expressions représentant $f(s)$ dans certains domaines de forme donnée intérieurs à l'étoile et une expression valable dans toute l'étoile.

D'après l'hypothèse ($\mathcal{C}$ fini) la série

$$\varphi_\alpha(s) = \sum_1^\infty \frac{a_n e^{-\lambda_n s}}{\Gamma(\alpha\lambda_n + 1)} \qquad (\alpha > 0)$$

définit une fonction entière de s qui, lorsque α tend vers zéro, converge uniformément vers $f(s)$ dans toute région fermée complètement intérieure au demi-plan $\sigma > \mathcal{C}$. Dans une telle région $\varphi_\alpha(s)$ s'exprime aisément au moyen de $f(s)$ grâce à la formule connue de Hankel

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha\lambda_n + 1)} = \frac{1}{2i\pi}\int_C e^{-u}(-u)^{-\alpha\lambda_n - 1}\,du,$$

dans laquelle C désigne un contour tracé dans le plan des u sectionné le long de l'axe réel positif; C est constitué par la partie de cet axe pour laquelle $u > r$, prise au-dessus et au-dessous de la section et par la circonférence $|u| = r$. Pour $\sigma > \mathcal{C}$, on a

$$\varphi_\alpha(s) = \frac{-1}{2i\pi}\int_C e^{-u} f[s + \alpha\log(-u)]\,\frac{du}{u}.$$

On voit aisément que cette égalité reste valable dans une région Δ intérieure à l'étoile et comprenant une portion du demi-plan de convergence pourvu que α soit assez petit, car le second membre définit une fonction holomorphe de s qui est égale au premier membre pour $\sigma > \mathcal{C}$. Comme $f[s + \alpha\log(-u)]$ est uniformément bornée dans Δ pourvu que α soit assez petit, les fonctions $\varphi_\alpha(s)$ sont bornées dans leur ensemble dans Δ et convergent uniformément dans une portion de Δ vers $f(s)$; elles convergent donc encore uniformément dans tout Δ vers $f(s)$, d'après le théorème de Stieltjes déjà employé au n° 6. Donc

XLII. *Lorsque α tend vers* 0, *les fonctions entières $\varphi_\alpha(s)$ convergent uniformément vers $f(s)$ dans toute région complètement intérieure à l'étoile d'holomorphie.*

Une nouvelle intégration et l'interversion de l'ordre des intégrations conduisent M. Riesz à cette seconde proposition :

XLIII. *Soit E_α le domaine obtenu en supprimant de l'étoile les points s balayés par le segment* $\sigma = \sigma_0$, $t_0 - \frac{1}{2}\pi\alpha \leq t \leq t_0 + \frac{1}{2}\pi\alpha$

lorsque le point s_0 décrit la frontière de l'étoile; à l'intérieur de E_α on a

$$f(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^v}\varphi_\alpha(s-\alpha v)e^v dv.$$

M. Riesz donne également une formule généralisant la formule (10) de Cahen, et faisant connaître sur chaque droite $t=$ const. l'abscisse σ_E du sommet de l'étoile situé sur cette droite, on a

$$\sigma_E=\lim_{\alpha=0}\left[\overline{\lim_{\sigma=+\infty}}(\alpha\log_2|\varphi_\alpha(-\sigma+it)|-\sigma)\right].$$

On pourra déduire de ces beaux résultats de M. Riesz, des conséquences analogues à celles que l'on tire des propositions correspondantes dans le cas des séries de Taylor; il semble cependant que les résultats moins parfaits qui ont été donnés ci-dessus (n^{os} **16** et **17**) sont plus facilement applicables à l'étude des séries de Dirichlet.

19. Autres méthodes de prolongement analytique. — G.-H. Hardy [c] a appliqué aux séries de Dirichlet proprement dites la méthode de sommation exponentielle de E. Borel : il attribue pour somme à la série (1) pour $\sigma \leqq \mathcal{C}$ la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x}\left(\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)dx;$$

il montre que le domaine de convergence de cette intégrale est encore un demi-plan, il en est de même du domaine de convergence absolue. Mais ce procédé peut donner moins que la méthode des moyennes dans certains cas, tandis qu'il donne plus dans d'autres cas. Un résultat intéressant est cependant à noter : si la série $\Sigma a_n x^n$ est régulière pour $x=1$, la fonction entière représentée par la série (2) est sommable B dans tout le plan (elle est d'ailleurs aussi sommable par la méthode d'Abel).

G. Sannia a de même appliqué la méthode exponentielle généralisée de Borel aux séries de Dirichlet proprement dites.

On peut rattacher aux recherches sur le prolongement analytique des propositions obtenues par A. Ostrowski [b], comme conséquences de théorèmes très généraux sur les suites de fonctions analytiques uniformément convergentes. En supposant qu'il existe une suite d'entiers n_q pour lesquels $\lambda_{n_q} : \lambda_{n_q+1}$ tend vers o, Ostrowski montre que la suite de fonctions entières

$$\sum_1^{n_q} a_n e^{-\lambda_n s}$$

converge uniformément vers la fonction analytique définie par la série (1) dans tout le domaine d'existence de cette fonction qui est par suite uniforme dans son domaine naturel d'existence. Cette proposition s'applique notamment aux fonctions pour lesquelles $n : \log\lambda_n$ tend vers o.

IV. — Les idées de H. Bohr.

20. Rappel de deux théorèmes sur les approximations simultanées. — La partie la plus originale de l'œuvre de H. Bohr dans la théorie des séries de Dirichlet repose sur deux théorèmes de la théorie des approximations diophantiques dus à Kronecker. Le premier de ces théorèmes, qui est démontré dans la plupart des traités d'analyse, s'énonce comme suit :

A. *Étant donnés* N *nombres positifs* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ *et un entier t positif, il existe un entier m au plus égal à* t^N, *et des entiers* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ *tels que*

$$|m\alpha_q - \beta_q| < \frac{1}{t} \qquad (q = 1, 2, \ldots, N).$$

Ce théorème a reçu le complément suivant que nous aurons surtout à utiliser :

A'. *Étant donnés* N *nombres positifs* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ *et un nombre* ε *positif, il existe une suite de nombres* m_p *tels que*

$$\varliminf_{p=\infty} (m_{p+1} - m_p) > 0, \qquad \varlimsup_{p=\infty} \frac{m_p}{p} < \infty$$

et tels que, à chaque m_p *correspondent des entiers* $\beta_1^p, \beta_2^p, \ldots, \beta_N^p$ *pour lesquels*

$$|\beta_q^p - m_p\alpha_q| < \varepsilon. \tag{45}$$

Le second théorème de Kronecker employé par H. Bohr est la remarquable proposition qui a été retrouvée par plusieurs auteurs (Borel, F. Riesz) et démontrée d'une façon très simple par Bohr [p] :

B. *Si les nombres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ *sont linéairement indépendants en ce sens qu'il n'existe pas de systèmes d'entiers non tous nuls* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$ *donnant lieu à l'égalité*

$$\alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 + \ldots + \alpha_N\delta_N = 0,$$

et si $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ *sont des nombres donnés réels et quelconques, on peut faire correspondre à tout nombre* ε *positif un nombre* t *et des entiers* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ *tels que*

$$(46) \qquad |t\alpha_q - \beta_q - \gamma_q| < \varepsilon.$$

H. Weyl [51] a en outre étudié la densité des nombres t donnant l'inégalité (46) : les nombres t compris entre o et T vérifiant cette inégalité forment des intervalles dont la longueur totale $l(T)$ vérifie la condition

$$\lim_{T=\infty} \frac{l(T)}{T} = \varepsilon^N.$$

21. Étude du cas où les λ_n sont linéairement indépendants. — Nous supposerons dans tout ce paragraphe que les λ_n sont linéairement indépendants, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune relation linéaire homogène à coefficients entiers entre un nombre fini de ces éléments. Le théorème de Kronecker montre immédiatement que les abscisses de convergence absolue et uniforme coïncident. En outre, si la série (1) converge absolument pour $\sigma = \sigma_0$, à chaque ε correspond un nombre t_0 pour lequel

$$\left| \sum_1^\infty |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} - f(\sigma_0 + it_0) \right| < \varepsilon.$$

Il résulte aisément de cette inégalité que, si la série (1) ne converge pas absolument pour $\sigma = \mathcal{A}$, $f(s)$ n'est pas borné pour $\sigma > \mathcal{A}$. H. Bohr établit cette proposition générale :

XLIV. *S'il existe un domaine de convergence* $\sigma > \mathcal{C}$, *le demi-plan de convergence absolue* $\sigma > \mathcal{A}$ *coïncide avec le demi-plan* $\sigma > \mathcal{J}$ *dans lequel* $f(s)$ *est bornée.*

Pour le montrer il est loisible de supposer que (1) converge pour $s = 0$ et que $\mathcal{S} < 0$; la valeur de $f(s)$ pour $s = \sigma + it$, $\sigma > \mathcal{S}$ et t quelconque, est donnée uniformément par l'égalité (14) du n° 5, dans laquelle on peut prendre $k = 1$; on a donc, quel que soit t,

$$\left| \sum_{\lambda_p < u} a_p (u - \lambda_p) e^{-\lambda_p(\sigma + it)} \right| < \mathrm{K} u,$$

et d'après le théorème de Kronecker la même inégalité où K est remplacé par 2K a encore lieu lorsqu'on remplace chaque terme du premier membre par son module, *a fortiori*

$$\frac{u}{2} \sum_{\lambda_n < \frac{u}{2}} | a_n | e^{-\lambda_n \sigma} < 2 \mathrm{K} u,$$

ce qui démontre la convergence absolue pour $s = \sigma$.

H. Bohr donne des exemples montrant que le théorème XLIV n'est pas valable pour des séries de type quelconque. Il étudie aussi les valeurs prises par $f(s)$ dans le domaine de convergence absolue. Deux cas sont à distinguer suivant que la série des modules converge ou ne converge pas pour $\sigma = \mathcal{A}$; dans le second cas la fonction $f(s)$ prend toute valeur finie pour $\sigma > \mathcal{A}$; dans le premier cas, si S désigne la somme de la série des modules pour $\sigma = \mathcal{A}$, $f(s)$ prend toute valeur de module inférieur à S (sauf la valeur 0 si $2 | a_1 | e^{-\lambda_1 \mathcal{A}} > \mathrm{S}$). La démonstration de ces propriétés repose sur une étude préalable des valeurs de $f(s)$ sur une droite $\sigma = \text{const.}$

Un cas particulier important de séries à λ_n indépendants est celui des séries de Dirichlet proprement dites où $\lambda_n = \log p_n$, p_n étant le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.

22. Étude de l'ensemble des valeurs de $f(s)$ sur une droite $\sigma = \text{const.}$ — H. Bohr a cherché à étendre les derniers résultats donnés ci-dessus au cas des séries de type λ_n quelconque. Il étudie d'abord [**2, i**] le cas des séries proprement dites, puis [**2, m**] celui des séries générales.

Considérons d'abord une série (2) absolument convergente pour une valeur $s = \sigma$; on peut l'écrire en prenant d'abord les termes pour lesquels n est premier, puis ceux pour lesquels n est un produit de deux nombres premiers, et ainsi de suite. En désignant par

$$p_1, p_2, \ldots, p_q$$

la suite des nombres premiers, on a

$$f(s) = a_1 + \Sigma c_\alpha p_\alpha^{-s} + \Sigma c_{\alpha,\beta} p_\alpha^{-s} p_\beta^{-s} + \Sigma c_{\alpha,\beta,\gamma} p_\alpha^{-s} p_\beta^{-s} p_\gamma^{-s} + \ldots,$$

avec

$$c_{\alpha,\beta,\gamma} = a_n \quad \text{si} \quad n = p_\alpha p_\beta p_\gamma.$$

Les logarithmes des p_q étant linéairement indépendants, le théorème de Kronecker montre que : *l'ensemble* $\mathrm{E}(\sigma)$ *des valeurs de* $f(s)$ *sur une droite de convergence absolue* $\sigma =$ const. *est partout dense sur l'ensemble* $\mathrm{U}(\sigma)$ *des valeurs prises par la fonction d'une infinité de variables indépendantes.*

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = a_1 + \Sigma c_\alpha x_\alpha + \Sigma c_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta + \ldots, \tag{47}$$

lorsque le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *décrit la multiplicité*

$$|x_q| = p_q^{-\sigma} \qquad (q = 1, 2, \ldots).$$

Supposons σ supérieur à $\mathcal{A}$ et soit $\mathrm{E}(\sigma, \varepsilon)$ l'ensemble des valeurs prises par $f(s)$ dans la bande $\sigma - \varepsilon$, $\sigma + \varepsilon$ (ε est supposé assez petit pour que $\sigma - \varepsilon > \mathcal{A}$); les ensembles $\mathrm{E}(\sigma, \varepsilon)$ ont en commun un ensemble $\mathrm{E}'(\sigma)$ que H. Bohr appelle *l'ensemble des valeurs de* $f(s)$ *dans le voisinage de la droite* $\sigma =$ const. considérée. Les ensembles $\mathrm{E}'(\sigma)$ et $\mathrm{U}(\sigma)$ coïncident.

H. Bohr étudie aussi les séries $g(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ qui sont bornées sur la multiplicité $|x_q| \leqq \mathrm{X}_q$ ($q = 1, 2, \ldots$). On entend par là que la série obtenue en supposant les x_q nuls pour $q > m + 1$ est absolument convergente et a un module inférieur à un nombre K indépendant de m lorsque $|x_q| \leqq \mathrm{X}_q$ pour $q = 1, 2, \ldots$. Dans ces conditions, la série (47) est encore absolument convergente pour $|x_q| \leqq \mathrm{X}_q \varepsilon_q$, pourvu que les ε_q soient compris entre 0 et 1 et que la série $\Sigma \varepsilon_q^2$ converge. H. Bohr montre le rôle important que joue la borne supérieure S des nombres γ jouissant de la propriété suivante : toute série (47) bornée sur la multiplicité $|x_q| \leqq \mathrm{X}_q$ converge absolument pour $|x_q| \leqq \mathrm{X}_q \varepsilon_q$, pourvu que les ε_q soient compris entre 0 et 1 et que la série $\Sigma \varepsilon_q^\gamma$ converge. Pour toute série de Dirichlet proprement dite, on a

$$\mathcal{A} - \mathcal{F} \leqq \frac{1}{\mathrm{S}}.$$

Comme d'après ce qui vient d'être dit S est au moins égal à 2, on obtient le théorème XVI (dans ce cas particulier des séries proprement dites) par une méthode plus compliquée que celles employées depuis (n^{os} 7 et 17), mais qui ne manque pas d'intérêt. O. Toeplitz [48] avait montré que S est au plus égal à 4, on a vu qu'en fait $S = 2$ (n° 7).

Signalons enfin que Bohr montre, en utilisant ses résultats, que $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ pour les séries qui s'introduisent dans la théorie des nombres.

Pour étendre ces résultats aux séries générales, il faut introduire des nombres qui jouent le rôle des nombres premiers dans la théorie précédente. On appelle *base de la suite des* λ_n toute suite finie ou infinie de nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \ldots$ jouissant des propriétés suivantes : 1° ces nombres sont linéairement indépendants; 2° tout nombre λ_n s'exprime en fonction linéaire homogène à coefficients rationnels d'un nombre fini d'éléments ν_m; 3° tout nombre ν_m est une fonction linéaire à coefficients rationnels d'un nombre fini de λ_n.

Toute suite λ_n possède au moins une base et par suite une infinité puisque les ν_m constituant une base, il en est de même des $r_m \nu_m$ où les r_m sont rationnels. Les éléments de l'une des bases sont évidemment des fonctions linéaires homogènes à coefficients rationnels des éléments d'une autre base. Si une base renferme un nombre fini P d'éléments, il en est de même de toutes les autres bases. Lorsque les λ_n sont des fonctions linéaires à coefficients entiers des ν_m, on dit que *la base est entière*. C'est le cas pour $\lambda_n = \log n$, la base formée par les $\log p_n$ est entière.

Si les ν_m sont les éléments d'une base des λ_n on a

$$\lambda_n = r_n^1 \nu_1 + r_n^2 \nu_2 + \ldots + r_n^{q_n} \nu_{q_n}, \tag{48}$$

et l'on peut écrire

$$f(s) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \Sigma a_n e^{-r_n^1 x_1 - \ldots - r_n^{q_n} x_{q_n}}.$$

Si $f(s)$ converge absolument pour $\sigma = \sigma_0$, $g(x_1, x_2, \ldots)$ converge absolument lorsque la partie réelle des nombres x_m est égale à $\sigma_0 \nu_m$,

$$\text{partie réelle} \quad x_m = \nu_m \sigma_0 \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{49}$$

Nous désignerons encore par $U(\sigma_0)$ l'ensemble des valeurs de $g(x_1, x_2, \ldots)$ lorsque les relations (49) sont vérifiées, par $E(\sigma_0)$ l'ensemble des valeurs de $f(\sigma_0 + it)$ lorsque t varie et par $E'(\sigma_0)$ l'ensemble des valeurs de $f(s)$ dans le voisinage de la droite $\sigma_0 = \text{const.}$ En appliquant le théorème de Kronecker on montre que :

XLV. *Si la série* (1) *converge absolument pour* $\sigma > \mathcal{A}$, *l'ensemble* $E(\sigma)$ *qui appartient à* $U(\sigma)$ *est partout dense sur cet ensemble.*

H. Bohr montre en outre que l'ensemble $E'(\sigma_0)$ coïncide avec l'ensemble formé par $E(\sigma_0)$ et ses points limites et établit la proposition suivante :

XLVI. *Si les* λ_n *possèdent une base entière, les ensembles* $E'(\sigma)$ *et* $U(\sigma)$ *coïncident.*

On peut également rapprocher des séries de même type dont les coefficients jouissent de certaines propriétés : deux séries sont dites équivalentes lorsque leurs coefficients ont le même module et que la différence des arguments des coefficients de rang n est de la forme

$$r_n^1\varphi_1 + r_n^2\varphi_2 + \ldots + r_n^{q_n}\varphi_{q_n},$$

les r_n^p étant les coefficients de l'égalité (48) et les φ_q ne dépendant pas de n. Cette définition est indépendante de la base ν_n choisie. Les ensembles $E'(\sigma)$ et $U(\sigma)$ sont les mêmes pour deux séries équivalentes.

23. **Quasi-périodicité de $f(s)$ sur les droites** $\sigma = \text{const.}$ — Dans les propositions précédentes on a utilisé seulement les théorèmes A et B sur les approximations. Les compléments de ces théorèmes permettent de montrer que $f(s)$ est quasi-périodique sur certaines droites $\sigma = \text{const.}$ Considérons un domaine Δ complètement intérieur au demi-plan de convergence uniforme ($\sigma > \mathcal{U}$) et donnons-nous un nombre positif ε. Le reste de la série (1) est moindre que ε pour tous les points $s + i\tau$ pourvu que s appartienne à Δ et que $n > N$; on a donc

$$|f(s+i\tau) - f(s)| < 2\varepsilon + \sum_1^N |a_n| e^{-\lambda_n\sigma} |e^{-i\lambda_n\tau} - 1|,$$

et en appliquant le théorème (A') on obtient ce théorème de Bohr [o] :

XLVII. *Si la série $f(s)$ possède un demi-plan de convergence uniforme, à chaque domaine Δ intérieur à ce demi-plan et à chaque ε correspond une suite de nombres τ_p tels que pour s appartenant à Δ*

$$|f(s+i\tau_p)-f(s)|<\varepsilon \qquad (p=\pm 1, \pm 2, \ldots),$$

les nombres τ_p vérifiant les relations

$$\underline{\lim}_{p=\pm\infty}(\tau_{p+1}-\tau_p)>0, \qquad \overline{\lim}_{p=\pm\infty}\frac{|\tau_p|}{p}<+\infty.$$

C'est la propriété de quasi-périodicité.

D'une façon générale la proposition n'est plus vraie au delà du demi-plan de convergence uniforme, c'est ce que montre la fonction

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^s}.$$

Les propriétés générales des fonctions holomorphes et bornées dans un domaine [*voir* par exemple [33, b]] permettent de montrer que la propriété subsiste dans le demi-plan $\sigma > \mathcal{S}$ où $f(s)$ est borné.

H. Bohr [o] considère le cas particulier où les λ_n sont les logarithmes de la suite des nombres premiers : la quasi-périodicité a lieu pour $\sigma \geqq \sigma_1 > \frac{1}{2}(\mathcal{A}+\mathcal{C})$. La démonstration s'appuie sur la formule de la moyenne (théorème XIV) qui est valable pour $c=\sigma_1$ d'après la remarque de la fin du n° 7, on constate que pour

$$\sigma \geqq \sigma_1 \qquad \text{et} \qquad \tau-\alpha \leqq t \leqq \tau+\alpha$$

le reste de la série (1) est en moyenne inférieur à un nombre donné ε. On applique d'autre part le théorème de Kronecker avec le complément de Weyl. Ce théorème de Bohr reste vrai lorsque les λ_n sont linéairement indépendants et satisfont à la condition de Schnee (n° 7).

24. Caractères analytiques des fonctions définies par les séries de Dirichlet. — Pour qu'une fonction soit représentable par une série de Dirichlet possédant un domaine de convergence uniforme, il faut qu'elle soit quasi périodique. Pour rechercher si cette condition est suffisante, H. Bohr [*voir* [2, p]] a été amené à faire une étude approfondie des fonctions quasi périodiques et de leur représentation analytique. Les résultats de cette étude, actuellement en cours, semblent devoir être d'une grande importance aussi bien pour la théorie des séries de Dirichlet que pour la théorie des fonctions de variables réelles.

A. Ostrowski [a] a montré que les fonctions définies par certaines séries de Dirichlet ne peuvent vérifier certaines équations différentielles algébriques. Une équation de la forme

$$P[s, f(s+h_0), f'(s+h_1), \ldots, f^{(p)}(s+h_p)] = 0, \tag{50}$$

où P est un polynome par rapport aux $p+2$ variables mises en évidence, et les h_q des constantes réelles ne peut être vérifiée par une série de Dirichlet possédant un domaine de convergence absolue si les λ_n ne possèdent pas une base finie. Cette proposition s'étend au cas où la série posséderait seulement un domaine de convergence ordinaire. L'auteur montre aussi que, si $\lambda_n : \lambda_{n+1}$ tend vers $0, f(s)$ ne peut vérifier aucune équation de la forme (50); il en est de même lorsque les a_n ne possèdent pas de base finie. Ces résultats s'étendent au cas où l'équation (50) est seulement analytique par rapport à s, le point à l'infini étant point régulier ou pôle.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. K. Ananda-Rau. — Note on a property of Dirichlet's series (*London math. Soc.*, t. 19, 1920).
2. H. Bohr. — (*a*) Sur la série de Dirichlet (*Comptes rendus*, t. 148, 1909); (*b*) Ueber die Summabilität Dirichletscher Reihen (*Göttinger Nachr.*, 1909); (*c*) Sur la convergence des séries de Dirichlet (*Comptes rendus*, t. 151, 1910); (*d*) Beweis der Existenz Dirichletscher Reihen, die Nullstellen mit beliebig grosser Abszisse besitzen (*Rendiconti Palermo*, t. 31, 1910); (*e*) Bidrag til de Dirichlet'ske Raekkers Theori (*Dissertation*, Copenhague, 1910); (*f*) Ueber die Summabilitätsgrenzgerade der Dirichletschen Reihen (*Wiener Sitzb.*, t. 119, 1910); (*g*) Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse Dirichletscher Reihen (*Acta math.*, t. 36, 1911); (*h*) Ueber die gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen (*J. für Math.*, t. 143, 1913); (*i*) Ueber die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\Sigma\, a_n n^{-s}$ (*Got. Nachr.*, 1913); (*j*) Einige Bemerkungen über das Konvergenzproblem Dirichletscher Reihen (*Rendiconti Palermo*, t. 37, 1913); (*k*) Darstellung der gleichmässigen Konvergenzabszisse einer Dirichletschen Reihe als Funktion der Koeffizienten der Reihe (*Archiv. der Math.*

und Phys., t. 21, 1913); (*l*) Ein Satz über Dirichletsche Reihe (*Münch. Sitzb.*, 1913); (*m*) Zur Theorie der allgemeinen Dirichletschen Reihen (*Math. Annalen.*, t. 79); (*n*) Nogle Bemaerkninger om de Dirichletske Raekkers ligelige Konvergens (*Mat. Tidsskr.*, B. 1921); (*o*) Ueber eine quasi-periodische Eigenschaft Dirichletscher Reihen mit Anwendung auf die Dirichletschen L-Funktionen (*Math. Ann.*, t. 85); (*p*) Another proof of Kronecker's theorem (*London math. Soc.*, t. 21, 1922); (*q*) Zur Theorie der fast periodischen Funktionen (*Acta math.*, t. 45, 1924).

3. H. Bohr und E. Landau. — (*a*) Ueber das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_k(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$ (*Göttinger Nachr.*, 1910); (*b*) Ein Satz ueber die Dirichletschen Reihen mit Anwendung auf die ζ-Funktion und die L-Funktionen (*Rendiconti Palermo*, t. 37); (*c*) Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (*Comptes rendus*, t. 158, 1914).

4. E. Cahen. — (*a*) Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues (*Ann. École Norm.*, 3e série, t. 11, 1894); (*b*) Sur les séries de Dirichlet (*Comptes rendus*, t. 166, 1918).

5. F. Carlson. — (*a*) Ueber die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion (*Arkiv för Mat., Ast. och. Fys.*, t. 15, 1920); (*b*) Sur les séries de Dirichlet (*Comptes rendus*, t. 172, 1922); (*c*) Contribution à la théorie des séries de Dirichlet (*Arkiv för Mat., Ast. och. Fys.*, t. 16, 1922).

6. F. Carlson und E. Landau. — Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabryschen Lückensatzes (*Gott. Nachr.*, 1921).

7. E. Cotton. — Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet (*Bulletin Soc. math.*, t. 45, 1917).

8. H. Cramer. — (*a*) Sur une classe de séries de Dirichlet (*Dissertation*, Upsala, 1917); (*b*) Un théorème sur les séries de Dirichlet et son application (*Arkiv for mat., Ast. och Fys.*, t. 13, 1918); (*c*) Ueber das Teilerproblem von Piltz (*Arkiv f. Mat.*, t. 16, 1922); (*d*) Ein Satz über Dirichlet'sche Reihen (*Arkiv f. Mat.*, t. 18, 1924).

9. Lejeune Dirichlet. — *Œuvres complètes*, t. 1 et 2.

10. M. Fekete. — (*a*) Sur les séries de Dirichlet (*Comptes rendus*, t. 150, 1910); (*b*) Sur un théorème de M. Landau (*Comptes rendus*, t. 151, 1910); (*c*) A széttarto végtelen sorok elméletéhez (*Math. és Természettudomanyi Ertesito*, t. 29, 1911); (*d*) Sur quelques généralisations d'un théorème de Weierstrass (*Comptes rendus*, t. 153, 1911); (*e*) Sur une propriété des racines des moyennes arithmétiques d'une série entière réelle (*Comptes rendus*, t. 157, 1913).

11. M. Fujiwara. — (*a*) On the convergence-abscissa of general Dirichlet's series (*Tôhoku J.*, t. 6, 1914); (*b*) Ueber Konvergenzabszisse der Dirichletschen Reihe (*Tôhoku J.*, t. 17, 1920); (*c*) Ueber Abelsche erzeugende Funktion und Darstellbarkeitsbedingung von Funktionen in Dirichletschen Reihen (*Tôhoku J.*, t. 17, 1920).

12. K. Grandjot. — Ueber das absolute Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen (*Inaug. Diss.*, Göttingen, 1922).

13. J. HADAMARD. — (*a*) Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et ses conséquences arithmétiques (*Bull. Soc. math.*, t. 24, 1896); (*b*) Théorèmes sur les séries entières (*Acta math.*, t. 22, 1896); (*c*) Sur les séries de Dirichlet (2 notes) (*Rendiconti di Palermo*, t. 25, 1908).

14. G.-H. HARDY. — (*a*) On certain oscillating series (*Quarterly J.*, t. 38, 1907); (*b*) The multiplication of conditionnally convergent series (*London mat. Soc.*, 2e série, t. 6, 1908); (*c*) The application to Dirichlet's series of Borel's exponential method of summation (*London math. Soc.*, t. 8, 1909); (*d*) Theorems relating to convergence and summability of slowly oscillating series (*London math. Soc.*, t. 8, 1909); (*e*) On a case of term-by-term integration of an infinite series (*Mess. of Math.*, t. 39, 1910); (*f*) The multiplication of Dirichlet's series (*London math. Soc.*, t. 10, 1911); (*g*) An extension of a theorem on oscillating series (*London math. Soc.*, t. 12, 1912); (*h*) The application of Abel's method of summation to Dirichlet's series (*Quarterly J.*, t. 47, 1916); (*i*) Example to illustrate a point in the theory of Dirichlet's series (*Tôhoku J.*, t. 8, 1915).

15. G.-H. HARDY and J. LITTLEWOOD. — (*a*) Tauberian theorems concerning Dirichlet's series whose coefficients are positive (*London math. Soc.*, t. 13, 1913); (*b*) Some theorems concerning Dirichlet's series (*Mess. of Math.*, t. 43, 1914); (*c*) New proofs of the prime numbers theorem and similar theorems (*Quarterly, J.*, t. 46, 1915); (*d*) Contribution to the theory of the Riemann zeta function and the theory of the distribution of primes (*Acta math.*, t. 42, 1919).

16. T. JANSSON. — Ueber die Grössenordnung Dirichletscher Reihen (*Arkiv för Mat.*, t. 15, 1920).

17. J.-W. JENSEN. — Om Roekkers Konvergens (*Tidsskr. för Math.*, 1884).

18. S. KAKEYA. — On the convergence-abscissa of general Dirichlet's series (*Tôhoku J.*, t. 11, 1916).

19. H.-D. KLOOSTERMAN. — Een stelling betreffende macht reeksen van oneindig veel vorenderlyken, mer toepassing of reeksen van Dirichlet (*Akad. Amsterdam*, t. 32).

20. K. KNOPP. — (*a*) Divergenzcharaktere gewisser Dirichletscher Reihen (*Acta math.*, t. 34, 1908); (*b*) Nichtfortsetzbare Dirichletsche Reihen (*Math. Annalen*, t. 69, 1908); (*c*) Grenzwerte von Dirichletschen Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze (*J. für Math.*, t. 138, 1910); (*d*) Ueber die Abszisse der Grenzgeraden einer Dirichletschen Reihen (*Sitzb. Berliner Math. G.*, 1910).

21. T. KOJIMA. — (*a*) On the convergence abscissa of general Dirichlet's series (*Tôhoku J.*, t. 6, 1914); (*b*) Note on the convergence abscissa of Dirichlet's series (*Tôhoku J.*, t. 9, 1916); (*c*) On the double Dirichlet's series (*Reports Tôhoku University*, t. 9, 1920).

22. L. KRONECKER. — *Œuvres complètes.*

23. M. KUNIYEDA. — (*a*) Uniform convergence-abscissa of general Dirichlet's series (*Tôhoku J.*, t. 9, 1916); (*b*) Note on Perron's integral and summability-abscissae of Dirichlet's series (*Quarterly J.*, t. 47, 1916); (*c*) On the abscissa of summability of general Dirichlet's series (*Tôhoku J.*, t. 9, 1916).

24. E. LANDAU. — (a). — Ueber ein Staz von Tschebyschef (*Math. Ann.*, t. 61, 1905); (b) Ueber die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes (*Monatsh. für Math.*, t. 18, 1907); (c) Ueber die Multiplikation Dirichletscher Reihen (*Rendiconti di Palermo*, t. 24, 1907); (d) Beiträge zur analytischen Zahlentheorie (*Rendiconti di Palermo*, t. 26, 1908); (e) Neue Beiträge zur analytischen Zahlentheorie (*Rendiconti di Palermo*, t. 27, 1909); (f) Ueber das Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen (*Rendiconti di Palermo*, t. 28, 1909); (g) Ueber ein Satz des Herrn Littlewood (*Rendiconti di Palermo*, t. 35, 1913); (h) Ein neues Konvergenzkriterium für Integrale (*Münchener Sitz.*, t. 43, 1913); (i) Die Identität des Cesàroschen und Holderschen Grenzwertes für Integrale (*Leipziger Berichte*, t. 65, 1913); (j) Ueber die Nullstellen Dirichletscher Reihen (*Berliner Sitz.*, t. 41, 1913); (k) Neuer Beweis eines Hauptsatzes aus der Theorie der Dirichletschen Reihen (*Leipziger Ber.*, t. 69, 1917); (l) Ueber ein Satz des Herrn Rosenblatt (*Deut. Math. Ver.*, t. 29, 1920); (m) Ueber die gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen (*Math. Zeitschrift*, t. 11, 1921); (n) Ueber die Nullstellen Dirichletscher Reihen (*Math. Zeitschrift*, t. 10, 1921); (o) Ueber die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion (*Arkiv för Math., Ast. och Fys.*, t. 16, 1921); (p) Neuer Beweis des Schneeschen Mittelwertsatzes über Dirichletsche Reihen (*Tôhoku J.*, t. 20, 1922).

25. E. LANDAU und A. WALFISZ. — Ueber die Nichtfortsetzbarkeit einiger durch Dirichletsche Reihen definierter Funktionen (*Rendiconti di Palermo*, t. 44, 1920).

26. E. LINDELÖF. — (a) Quelques remarques sur la croissance de la fonction $\zeta(s)$ (*Bulletin des Sc. math.*, t. 32, 1908); (b) Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur certaines propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel (*Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. 35, 1908).

27. J.-E. LITTLEWOOD. — The converse of Abel's theorem on power series (*London math. Soc.*, t. 9, 1910).

28. B. MALMROT. — Sur une formule de M. Fujiwara (*Arkiv för Math. Ast. och Fys.*, t. 14, 1919).

29. H. MELLIN. — (a) Bemerkungen im Anschluss an den Beweis eines Satzes von Hardy über die Zetafunktion (*Ann. Acad. sci. Fennicæ*, A, t. 11, 1917); (b) Ein Satz über Dirichletsche Reihen (*Ann. Acad. sc. Fennicæ*, t. 11, 1917); (b)* Die Theorie der asymptotischen Reihen von Standpuntke der Theorie der reziproken Funktionen und Integrale (*Ibid.* A, t. 18, 1922); (d)* Ueber die analytische Forsetzung von Funktionen, welche durch gewisse allgemeine Dirichletsche Reihen definiert sind (*Ibid.* A, t. 20, 1924).

30. G. MITTAG-LEFFLER (*Lindh*). — Un nouveau théorème dans la théorie des séries de Dirichlet (*Comptes rendus*, t. 160, 1915).

31. M^lle P. NALLI. — (a) Sulle serie di Dirichlet (*Rendiconti di Palermo*, t. 40, 1915); (b) Aggiunta alla memoria « Sulle serie di Dirichlet » (*Rendiconti di Palermo*, t. 40, 1915).

32. L. Neder. — (*a*) Ueber die Lage der Konvergenzabszisse einer Dirichletschen Reihe zur Beschränktheitsabszisse ihrer Summe (*Arkiv för Mat., Ast. och. Fys.*, t. 16, 1922); (*b*) Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen, beschränkter Funktionen (*Math. Zeitsc.*, t. 14, 1922); (*c*) Ueber Gebiete gleichmässiger Konvergenz Dirichletscher Reihen (*Math. Zeitsc.*, t. 15, 1922); (*d*) Ueber einen Lückensatz für Dirichletsche Reihen (*Math. Ann.*, t. 85, 1922); (*e*) Ueber Umkehrungen der Konvergenzsätze für Dirichletschen Reihen (*Leipziger Ber.*, t. 74, 1922).

33. A. Ostrowski. — (*a*) Ueber Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen (*Math. Zeitsc.*, t. 8, 1920); (*b*) Ueber vollständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen (*Hamburg. math. Seminar*, t. 1, 1922); (*c*) Einige Bemerkungen über Singuläritaten Taylorscher und Dirichletscher Reihen (*Berliner Sitzb.*, 1923).

34. O. Perron. — Zur Theorie der Dirichletschen Reihen (*J. für die Math.* t. 134, 1908).

35. E. Phragmén et E. Lindelöf. — Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier (*Acta math.*, t. 31, 1908).

36. S. Pincherle. — Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti (*Atti del IV Congresso dei Matematici, Rome*, t. 2, 1908).

37. G. Pólya. — Ueber die Existenz unendlich vieler singulärer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser Dirichletscher Reihen (*Berliner Sitzb.*, 1923).

38. A. Pringsheim. — Zur Theorie der Dirichletschen Reihen (*Math. Ann.*, t. 37, 1890).

39. B. Riemann. — *Œuvres.*

40. M. Riesz. — (*a*) Sur les séries de Dirichlet (*Comptes rendus*, t. 148, 1909); (*b*) Sur la sommation des séries de Dirichlet (*Comptes rendus*, t. 149, 1909); (*c*) Sur les séries de Dirichlet et les séries entières (*Comptes rendus*, t. 149, 1909); (*d*) Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques (*Comptes rendus*, t. 152, 1911); (*e*) Ueber ein Satz des Herrn Fatou (*J. für die Math.*, t. 140, 1911); (*f*) Sur la représentation analytique des fonctions définies par des séries de Dirichlet (*Acta math.*, t. 35, 1911); (*g*) Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen (*Acta math.*, t. 40, 1916); (*h*) Ueber die Summierbarkeit durch typische Mitteln (*Acta Universitatis Hungaricæ*, t. 2, 1924).

40′. W. Rogosinski. — (*a*)* Ein Satz über Dirichletsche Reihen (*Math. Annalen*, t. 92, 1924, p. 104); (*b*)* Zur Theorie der Dirichletschen Reihen *Math. Zeitschrift*, B. 20, 1924, p. 280).

41. A. Rosenblatt. — Ueber einen Satz des Herrn Hardy (*Deut. Math. Ver.*, t. 23, 1914).

42. G. Sannia. — Le serie di Dirichlet sommate col metodo di Borel generalizzato (*Acad. Torino*, t. 54, 1918).

43. W. Schnee. — (*a*) Ueber irreguläre Potenzreihen und Dirichletsche Reihen (*Inaug. Diss., Berlin*, 1908); (*b*) Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes (*Math. Ann.*, t. 67, 1909); (*c*) Ueber Dirichletsche

Reihen (*Rendiconti di Palermo*, t. 27, 1909); (*d*) Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen (*Math. Ann.*, t. 66, 1909); (*e*) Ueber Mittelwertsformeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen (*Wiener Sitzb.*, t. 118, 1909); (*f*) Ueber die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen (*Göttinger Nachr.*, 1910); (*g*) Ueber den Zusammenhang zwischen den Summabilitätseigenschaften Dirichletscher Reihen und ihrem funktionentheoretischen Charakter (*Acta math.*, t. 35, 1911).

44. V. Stadigh. — Ein Satz über Funktionen, die algebraische Differentialgleichungen befriedigen, und über die Eigenschaft der Funktion $\zeta(s)$ keiner solchen Gleichung zu genügen (*Dissertation*, *Helsingfors*, 1902).

45. J. Steffensen. — (*a*) Ein Satz über Stieltjessche Integrale mit Anwendung auf Dirichletsche Reihen (*Rendiconti di Palermo*, t. 36, 1913); (*b*) Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Funktion als Dirichletsche Reihe (*Nyt Tidskr. f. Mat.*, 1917).

46. T. J. Stieltjes. — Note sur la multiplication de deux séries (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. 6, 1887).

47. O. Szasz. — Ueber Singularitäten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches (*Math. Ann.*, t. 85, 1922).

48. O. Toeplitz. — Ueber eine bei den Dirichletschen Reihen auftretende Aufgabe aus der Theorie der Potenzreihen von unendlichvielen Veränderlichen (*Göttinger Nachr.*, 1913).*

49. G. Valiron. — (*a*) Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet (*Bull. Soc. math.*, t. 52, 1924); (*b*) Sur la valeur des séries de Dirichlet dans le voisinage de l'abscisse de convergence (*Rendiconti di Palermo*, t. 49, 1925).

50. S. Wennberg. — Zur Theorie der Dirichletschen Reihen (*Dissertation*, *Upsala*, 1920).

51. H. Weyl. — Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. (*Math. Ann.*, t. 77, 1916).

51'. S. Wigert. — *Sur une nouvelle formule de la théorie des séries de Dirichlet (*Mathematisk Tidsskrift*, B, 1924, p. 41).

Ouvrages à consulter.

52. E.-H. Hardy et M. Riesz. — *The general theory of Dirichlet's series* (Cambridge University Press, 1915). Cet Ouvrage contient notamment un exposé original de la méthode des moyennes typiques de Riesz qui constitue plus de la moitié du texte.

53. E. Landau. — *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Teubner, Leipzig, 1909). Le Livre 7 contient un exposé très complet de l'état de la théorie des séries de Dirichlet (en 1909) avec des démonstrations originales de quelques théorèmes.

*Les Mémoires marqués d'un *, dont je n'ai eu connaissance qu'après la rédaction de ce fascicule, ne sont pas analysés dans le présent exposé.

TABLE DES MATIÈRES.